MBA USP ESALQ

Supervised Machine Learning: Modelos Logísticos Binários e Multinomiais

Prof. Dr. Luiz Paulo Fávero

*A responsabilidade pela idoneidade, originalidade e licitude dos conteúdos didáticos apresentados é do professor.

MODELOS LOGÍSTICOS

Fundamentação teórica e conceitos

Especificação do modelo e funções de ligação canônica

Modelos logísticos binários e multinomiais

Estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança

***Cutoff*, sensitividade, especificidade, curva ROC e índice GINI**

Estimações em Python

Modelos Lineares Generalizados (GLM)

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$$

Modelo de Regressão	Característica da Variável Dependente	Distribuição
Linear	Quantitativa	Normal
Com Transformação de Box-Cox	Quantitativa	Normal Após a Transformação
Logística Binária	Qualitativa com 2 Categorias (*Dummy*)	Bernoulli
Logística Multinomial	Qualitativa M ($M > 2$) Categorias	Binomial
Poisson	Quantitativa com Valores Inteiros e Não Negativos (Dados de Contagem)	Poisson
Binomial Negativo	Quantitativa com Valores Inteiros e Não Negativos (Dados de Contagem)	Poisson-Gama

Regressão Logística Binária

- Técnica supervisionada de machine learning utilizada para explicar ou predizer a probabilidade de ocorrência de determinado evento em função de uma ou mais variáveis explicativas.

- **Variável dependente:** binária.

→ Resultados interpretados em termos de probabilidades.

- **Variáveis preditoras *X*:** métricas ou não métricas.

Objetivos da Técnica

- **Atribuição de Probabilidades:**
  Estimar a probabilidade de ocorrência de determinado evento ou de que uma observação venha a se enquadrar nessa ou naquela categoria.

- **Classificação em categorias:**
  Classificar indivíduos ou observações em categorias específicas.

Conceitos:

Probabilidade

Chance (*odds*)

Logito

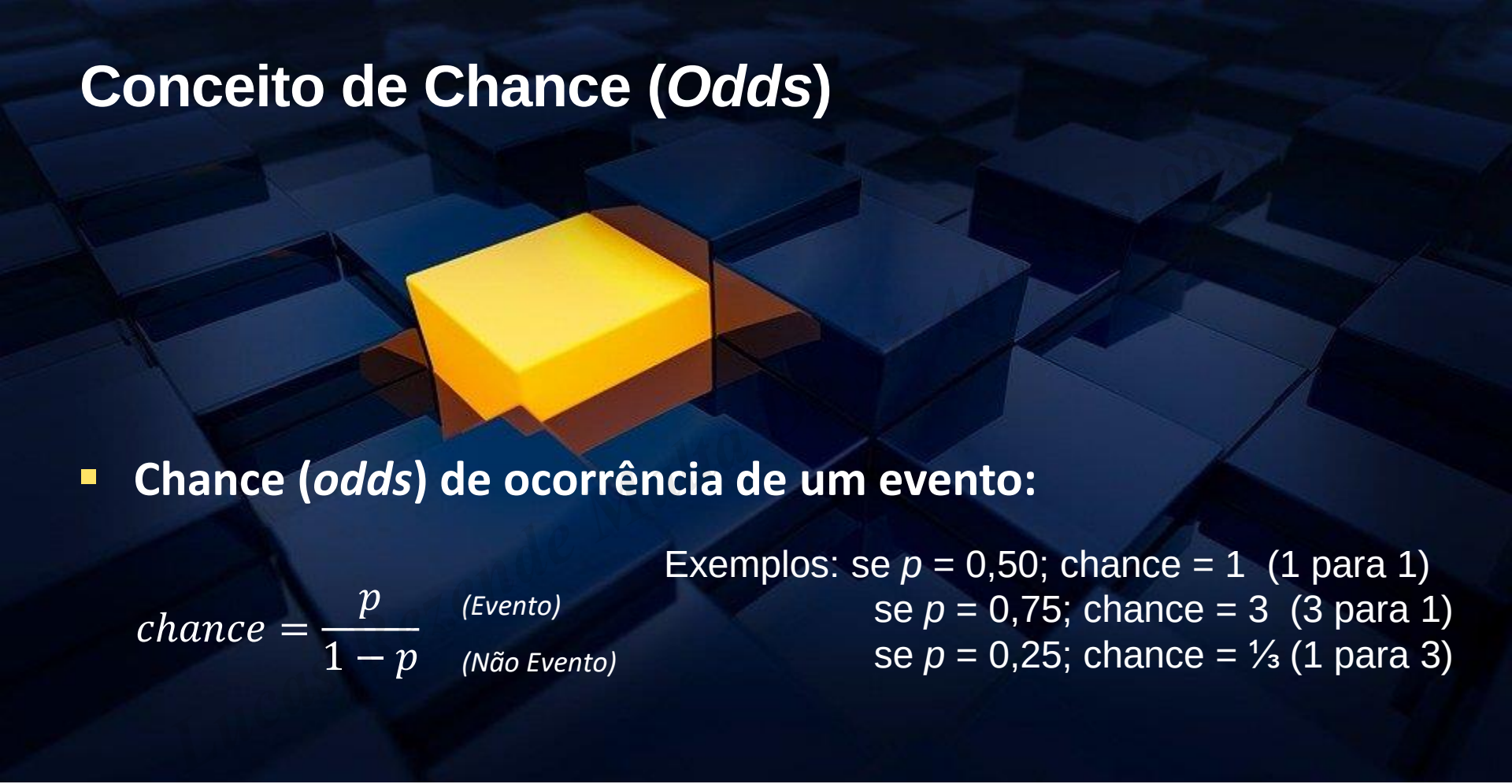
- **Conceito de Probabilidade**

  Seja *Y* a resposta a um estímulo (sim ou não) - pode ser a preferência por um produto, adimplência, aprovação em um curso, etc.

- ***p*: probabilidade da resposta “sim”.**

- **1 – *p*: probabilidade da resposta “não”.**

Conceito de Chance (*Odds*)



- **Chance (*odds*) de ocorrência de um evento:**

$$chance = \frac{p}{1-p} \quad \begin{matrix} \textit{(Evento)} \\ \textit{(Não Evento)} \end{matrix}$$

Exemplos: se p = 0,50; chance = 1 (1 para 1)
se p = 0,75; chance = 3 (3 para 1)
se p = 0,25; chance = ⅓ (1 para 3)

Conceito de Logito

- **Logito: logaritmo natural da chance de ocorrência de uma resposta do tipo “sim”.**

E, a partir do logito, define-se a expressão da probabilidade de ocorrência do evento em estudo, em função das variáveis explicativas.

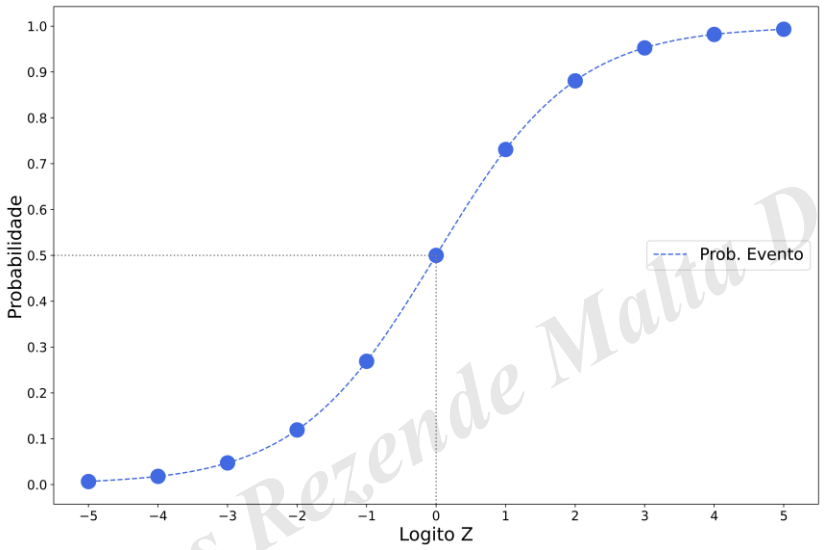
Vetor com variáveis explicativas

$$logito = Z = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

$$e^{logito} = e^{Z} = \frac{p}{1-p} = odds$$

$$p = \frac{e^{Z}}{1+e^{Z}} = \frac{1}{1+e^{-Z}}$$

O Modelo de Regressão Logística Binária



A curva logística, ou sigmoide, descreve a relação entre a probabilidade associada à ocorrência de determinado evento e um conjunto de variáveis preditoras.

A função logística assume valores entre 0 e 1 para qualquer *Z* entre $-\infty$ e $+\infty$

$$p_i = \frac{1}{1+e^{-Z_i}} = \frac{1}{1+e^{-(\alpha+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+.....+\beta_k X_{ki})}}$$

Função Logística

$$p_i = \frac{1}{1+e^{-Z_i}} = \frac{1}{1+e^{-(\alpha+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+.....+\beta_k X_{ki})}}$$

- Definida para que se estabeleça a probabilidade de ocorrência de determinado evento e a importância das variáveis explicativas para esta ocorrência.
- **Estimação dos parâmetros:** processo iterativo para maximizar o acerto da probabilidade de ocorrência de um evento à sua real ocorrência (**Método de Máxima Verossimilhança**).
- Os **resultados** atribuíveis à variável dependente estarão entre 0 e 1.
- **Análise do ajuste do modelo:** testes de significância dos parâmetros e tabela de classificação (matriz de confusão).

Regressão Logística Multinomial

Regressão Logística Multinomial

- Variável dependente se apresenta na forma **qualitativa com mais de duas categorias**.

- Por exemplo, para três possíveis respostas (*labels* 0, 1 ou 2, por exemplo), e sendo 0 a categoria de referência escolhida, teremos duas outras possibilidades de evento em relação a esta categoria (1 ou 2).

- Dessa forma, são definidos dois vetores de variáveis explicativas, com os respectivos parâmetros estimados (dois logitos):

$$Z_{1i} = \alpha_1 + \beta_{11} X_{1i} + \ldots + \beta_{k1} X_{ki}$$

$$Z_{2i} = \alpha_2 + \beta_{12} X_{1i} + \ldots + \beta_{k2} X_{ki}$$

- Logo, o **número de logitos estimados será (*M* – 1)**, sendo *M* o número de categorias de *Y*.

Funções Logísticas Multinomiais

- Sendo $p_i = \frac{e^{Z_i}}{1 + e^{Z_i}}$ a **probabilidade de ocorrência do evento**, temos que:

- Probabilidade de ocorrência da **categoria 0** (referência): $P_{i_0} = \frac{1}{1 + e^{Z_{1i}} + e^{Z_{2i}}}$

- Probabilidade de ocorrência da **categoria 1**: $P_{i_1} = \frac{e^{Z_{1i}}}{1 + e^{Z_{1i}} + e^{Z_{2i}}}$

- Probabilidade de ocorrência da **categoria 2**: $P_{i_2} = \frac{e^{Z_{2i}}}{1 + e^{Z_{1i}} + e^{Z_{2i}}}$

Interpretação e Eficiência Global do Modelo Multinomial

- Como na regressão logística binária, deve-se avaliar o resultado do **teste χ^2** para o modelo de regressão logística multinomial, bem como os resultados dos **testes *z*** para os parâmetros estimados das variáveis preditoras.

- **Interpretação:** os parâmetros das variáveis devem ser analisados em relação à categoria de referência da variável dependente.

- **Eficiência do modelo:** a classificação das observações deve ser realizada a partir da maior probabilidade estimada para cada observação (aqui, ao contrário da regressão logística binária, não faz sentido a definição de um *cutoff*).

MUITO OBRIGADO!

Prof. Dr. Luiz Paulo Fávero

LinkedIn