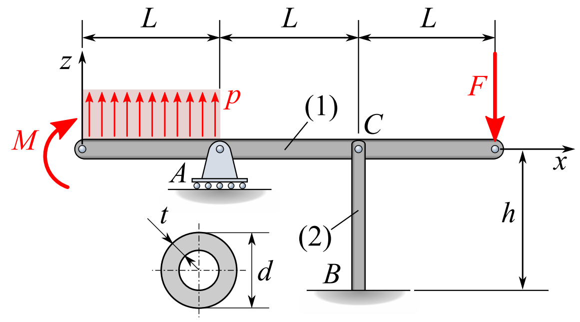
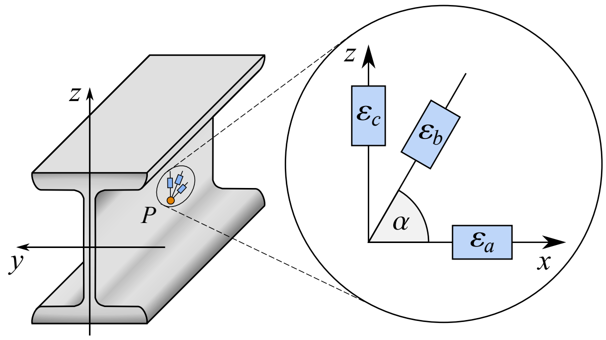
BME Gépészmérnöki Kar	SZILÁRDSÁGTAN	Név: Kindlik Dániel
Műszaki Mechanikai Tanszék	2. HÁZI FELADAT	Neptun kód: AHU27Z
2024/25 II.	Határidő: lásd Moodle	Késedelmes beadás: ☐ Javítás: ☐
Nyilatkozat: Aláírásommal igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik.		Aláírás: Kindlik Dániel

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! `http://www.mm.bme.hu/targyak/bsc/sziltan`

Feladatkitűzés

Az ábrán vázolt szerkezet két rúdja csuklósan kapcsolódik, anyaguk homogén, izotrop, lineárisan rugalmas (rugalmassági modulusz: $E = 210$ GPa; Poisson-tényező: $\nu = 0{,}3$). Az (1)-es rúd keresztmetszete az ábrán látható I-szelvény (I-80-MSZ-325), míg a (2)-es rúdé d külső átmérőjű körgyűrű.





Adatok

L [m]	h [m]	d [mm]	F [kN]	M [kNm]	p [kN/m]	ε_a [10^{-4}]	ε_b [10^{-4}]	ε_c [10^{-4}]	α [°]
1.50	2.50	58	4	1.50	1.75	-5.20	2.50	6	30

(Rész)eredmények

A_z [kN]	$x_{\max}$ [m]	$w_{\max}$ [mm]	$t_{\min}$ [mm]	ε_y [10^{-4}]	γ_{xz} [10^{-4}]	σ_x [MPa]
-8.9375	4.5	-47.125	7.1	-0.343	11.316	-78.462
σ_z [MPa]	τ_{xz} [MPa]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	σ_3 [MPa]	$\Delta\sigma_{\mathrm{e}}$ [MPa]	u_d [J/cm^3]
102.462	91.399	140.597	0	-116.597	34.134	0.1027

e_{1x} [-]	e_{1y} [-]	e_{1z} [-]	e_{2x} [-]	e_{2y} [-]	e_{2z} [-]	e_{3x} [-]	e_{3y} [-]	e_{3z} [-]
0.385	0	0.9229	0	1	0	-0.9229	0	0.385

Pontozás

Minimumfeladat	Feladatok						Dokumentáció	**Összesen**
	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
	/5	/3	/4	/4	/2	/2	/5	**/25**

Szilárdságtan 2. Házi feladat
Kindlik Dániel
AHU27Z

Kindlik Dániel

Adatok:

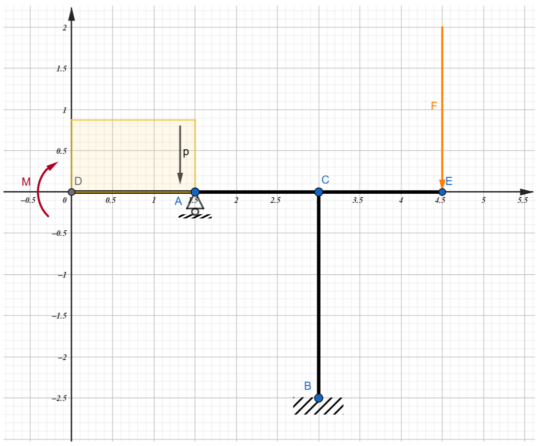
$L = 1.5$ [m] $\quad h = 2.5$ [m] $\quad d = 58$ [mm]

$F = 4$ [kN] $\quad M = 1.5$ [kNm] $p = 1.75$ [kN/m]

$\varepsilon_a = -5.2\ [10^{-4}] \quad \varepsilon_b = 2.5\ [10^{-4}] \quad \varepsilon_c = 6\ [10^{-4}] \quad \alpha = 30\ [°]$

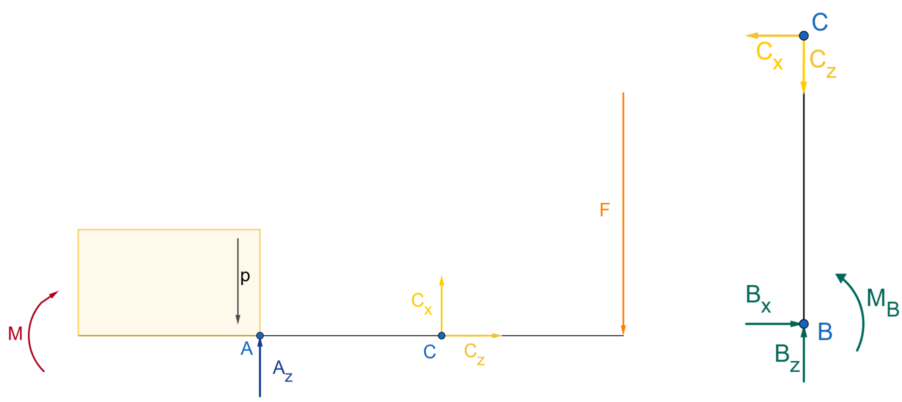
$E = 210$ [GPa] $\quad \nu = 0.3$ [−]

1. Feladat:



Az ábrán egy egység megfelel 1 m-nek és 2 kN-nak

A szerkezetünket két részre tudjuk bontani, hogy ki tudjuk számolni a reakcióerőket. Ekkor C-pontban meg fog jelenni egy C vektor, és a két rúdra külön tudunk 3-3 egyensúlyi-egyenletet írni. A két rész (1. eset balra, 2. eset jobbra) szabadtest-ábrája:



Kindlik Dániel

1. esetben kijövő egyensúlyi egyenletek A pontra vonatkoztatva:

$$(1)\ \sum F_x = 0 = C_x$$

$$(2)\ \sum F_y = 0 = A_z + C_z + p \cdot L - F$$

$$(3)\ \sum M_{A'} = 0 = C_z \cdot L - M - F \cdot 2L - (p \cdot L) \cdot \frac{L}{2}$$

2. esetben kijövő egyensúlyi egyenletek B pontra vonatkoztatva:

$$(4)\ \sum F_x = 0 = -C_x + B_x$$

$$(5)\ \sum F_y = 0 = -C_z + B_z$$

$$(6)\ \sum M_B = 0 = M_B + B_x \cdot h$$

A két egyenletrendszer megoldása:

$$A_z = \underline{\underline{-8.9375\ [\mathrm{kN}]}}$$

$$B_x = \underline{\underline{0\ [\mathrm{kN}]}}$$

$$B_z = \underline{\underline{10.3125\ [\mathrm{kN}]}}$$

$$M_B = \underline{\underline{0\ [\mathrm{kN}]}}$$

$$C_x = \underline{\underline{0\ [\mathrm{kN}]}}$$

$$C_z = \underline{\underline{10.3125\ [\mathrm{kN}]}}$$

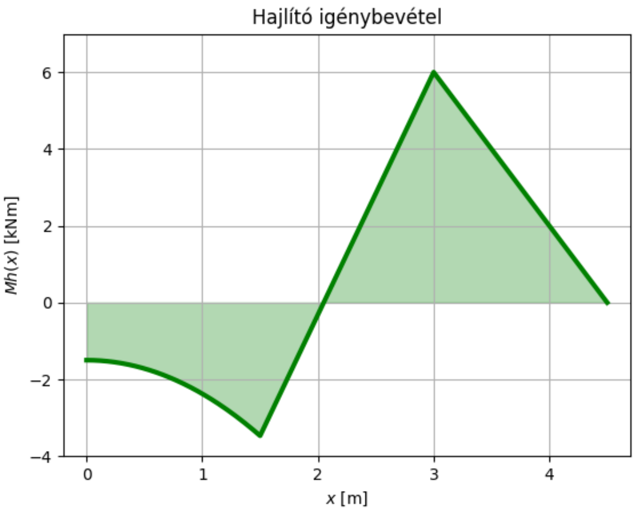
Kindlik Dániel

2. Feladat:

Ahhoz hogy meg tudjuk határozni w(x)-et először meg kell adnunk az (1)-es rúd hajlítónyomatéki igénybevételét: A szerkezetet három részre tudjuk bontani, így a függvény:

	I. $0 < x < 1.5$	II. $1.5 < x < 3$	III. $3 < x < 4.5$
M_h	$-M - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} =$ $= -0.875x^2 - 1.5$ [kNm]	$-M - p \cdot L \cdot (x - \frac{L}{2}) - A_z \cdot (x - L) =$ $= 6.315x - 12.9375$ [kNm]	$-M - p \cdot L \cdot (x - \frac{L}{2}) - A_z \cdot (x - L) - C_z \cdot (x - 2L) =$ $= 18 - 4x$ [kNm]

Az egyenletekből adódó függvény:



Az (1)-es rúd lehajlásfüggvényének meghatározásához felhasználhatjuk az alábbi összefüggéseket:

$$-I \cdot E \cdot w''(x) = M_h(x) \rightarrow -I \cdot E \cdot w'(x) = \int M_h(x) \rightarrow -I \cdot E \cdot w(x) = \iint M_h(x)$$

Ezek az összefüggések a rúd egészén igazak, úgyhogy felírom a hajlítónyomaték-függvény három szakaszának szükséges alakjait:

	I. $(w_1''(x), w_1'(x), w_1(x))$	II. $(w_2''(x), w_2'(x), w_2(x))$	III. $(w_3''(x), w_3'(x), w_3(x))$
$M_h(x)$	$-0.875x^2 - 1.5$	$6.315x - 12.9375$	$18 - 4x$
$\int M_h(x)$	$-0.2917x^3 - 1.5x + C_{11}$	$3.15625x^2 - 12.9375x + C_{21}$	$-2x^2 + 18x + C_{31}$
$\iint M_h(x)$	$-0.072917x^4 - 0.75x^2 + C_{11}x + C_{12}$	$1.052083x^3 - 6.46875x^2 + C_{21}x + C_{22}$	$-0.667x^3 + 9x^2 + C_{31}x + C_{32}$

Az egyenletekben az integrálás miatt megjelenő ismeretleneket a peremfeltételekből kijövő egyenletrendszerrel tudjuk kiszámolni, itt elhagyhatjuk a $-I \cdot E$ szorzót.

Kindlik Dániel

A peremfeltételek:

$w_1(L) = 0 \quad w_2(L) = 0 \quad w_2(2L) = 0 \quad w_3(2L) = 0 \quad w_1'(L) = w_2'(L) \quad w_2'(2L) = w_3'(2L)$

Ezek alapján be tudunk helyettesíteni az x-ek helyére számokat, és 6db egyenletünk jön ki.

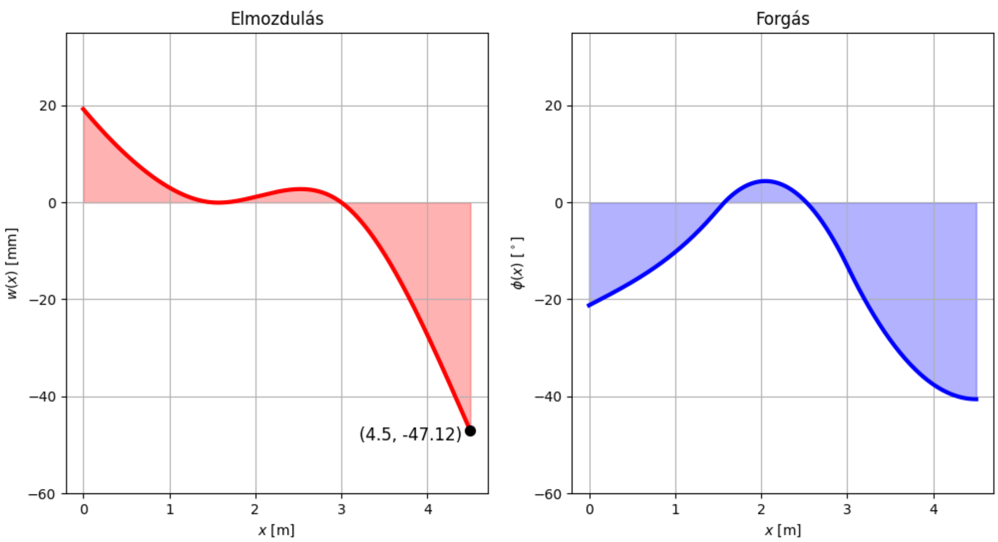
Az egyenletrendszer megoldása:

$C_{11} = 3.4688 \;\; C_{12} = -3.1465 \;\; C_{21} = 12.539 \;\; C_{22} = -7.8047 \;\; C_{31} = -33.8672 \;\; C_{32} = 38.6016$

Az így kijövő eredményeket fel tudjuk használni $w(x)$ és $\phi(x)$függvény meghatározásához:

$$w(x) = -\frac{1}{I \cdot E} \cdot \iint M_h(x) \qquad \phi(x) = -\frac{1}{I \cdot E} \cdot \int M_h(x)$$

	I. $0 < x < 1.5$	II. $1.5 < x < 3$	III. $3 < x < 4.5$
$w(x)$	$0.446x^4 + 4.59x^2 - 21.231x + 19.259$	$-6.439x^3 + 39.593x^2 - 76.748x + 47.77$	$4.08x^3 - 55.0863x^2 + 207.2909x - 236.269$
$\phi(x)$	$1.785x^3 + 9.181x - 21.2312$	$-19.318x^2 + 79.187x - 76.748$	$12.2414x^2 - 110.173x + 207.291$



Az ábráról láthatjuk, hogy a legnagyobb lehajlás $x = 4.5$-nél következik be:

$x_{max} = \underline{\underline{4.5[\mathrm{m}]}} \quad w_{max} = w(4.5) = \underline{\underline{-47.12[\mathrm{mm}]}}$

Kindlik Dániel

3. Feladat:

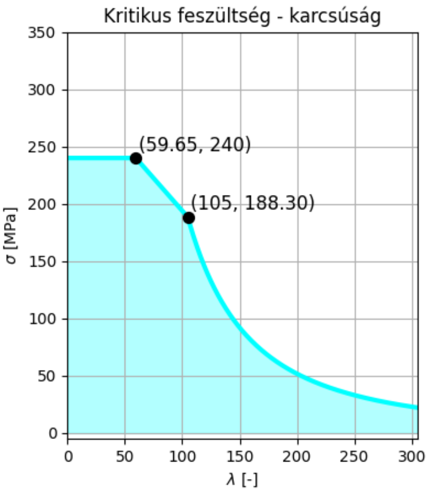
$\sigma_F = 240[\text{MPa}] \quad \lambda_0 = 105 \quad \sigma_{kr} = 308 - 1.14\lambda$

A $\sigma - \lambda$ diagram 3 részből fog állni: Folyáshatár, Tetmajer-egyenes és Euler-hiperbola

A diagram ábrázolásához meg kell adnunk a folyáshatár és Tetmajer-egyenes váltópontját, valamint az Euler-hiperbola egyenletét:

$240 = 308 - 1.14\lambda_F \rightarrow \lambda_F = 59.65$

Euler-hiperbola egyenlete: $\left(\dfrac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot 2E$



A méretezés elvégzéséhez tegyük fel, hogy az Euler-tartományban vagyunk:

$$F_t = \left(\frac{\pi}{c \cdot L}\right)^2 \cdot I_2 \cdot E$$

$F_t = 3 \cdot |C_z|$ mivel háromszoros biztonságot akarunk

$c = 2$ mivel alul be van fogva a rúd, felül pedig szabadon mozoghat

$I_2 = \dfrac{(d^4 - (d-2t)^4) \cdot \pi}{64}$ mivel körgyűrűről beszélünk

Az egyenleteket összevonva és átrendezve: $t_{min} = \underline{\underline{7.05 \approx 7.1[\text{mm}]}}$

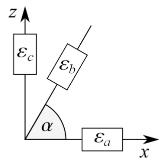
Így λ karcsúság értéke:

$$\lambda = \frac{L_0}{i_2} = \frac{c \cdot L}{\sqrt{\dfrac{I_2}{A}}}$$

Ezek alapján $\lambda = \underline{\underline{275.1774}} > \lambda_0$, tehát helyes volt a feltételezésünk

Kindlik Dániel

4. Feladat:



A nyúlásmérő-bélyegek elhelyezkedése miatt célszerű nevezések: $\varepsilon_x = \varepsilon_a$ és $\varepsilon_z = \varepsilon_c$

ε_y és γ_{xz} megadására ezek alapján használhatunk két egyenletet:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_a \cdot \cos^2(\alpha) + \varepsilon_b \cdot \sin^2(\alpha) + \frac{\gamma_{xz}}{2} \cdot \sin(2\alpha) \rightarrow \gamma_{xz} = 11.316\left[10^{-4}\right]$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_z)}{1-\nu} \rightarrow \varepsilon_y = -0.343\left[10^{-4}\right]$$

Ezek alapján az alakváltozási tenzor: $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -5.2 & 0 & 5.658 \\ 0 & -0.343 & 0 \\ 5.658 & 0 & 6 \end{bmatrix}\left[10^{-4}\right]}}$

A Hooke-törvény segítségével meg tudjuk adni a feszültségi tenzort:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_1 \cdot \mathbf{E}\right)$$

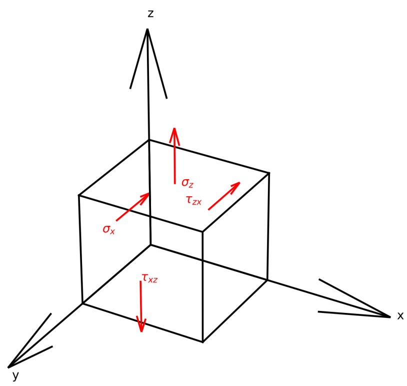
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta V}{V} = tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \underline{\underline{0.457\left[10^{-4}\right]}}$$

Ezek alapján az feszültségi tenzor: $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -78.462 & 0 & 91.399 \\ 0 & 0 & 0 \\ 91.399 & 0 & 102.462 \end{bmatrix}[\mathrm{MPa}]}}$

$$\sigma_I = tr(\boldsymbol{\sigma}) = \underline{\underline{24[\mathrm{MPa}]}}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xz}^2 = \underline{\underline{-16393\ \left[\mathrm{MPa}^2\right]}}$$

$$\sigma_{III} = det(\boldsymbol{\sigma}) = \underline{\underline{0}}$$



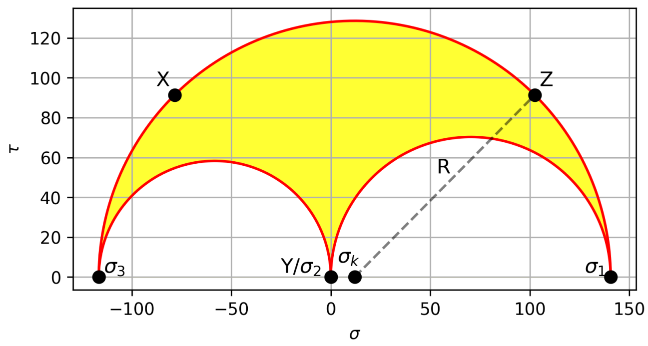
5. Feladat:

$\boldsymbol{\sigma}$ mátrixból láthatjuk, hogy $\underline{e}_2$ főirány és Y pont ismert.

Mohr-körök segítségével meg tudjuk adni $\sigma_{1,2}$-t is:

$$\sigma_K = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad R = \sqrt{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}^2 + \tau_{xz}^2}$$

$X(\sigma_x, \tau_{xz}) \quad Y(\sigma_y, 0) \quad Z(\sigma_z, \tau_{xz})$



Az ábra segítségével:

$$\sigma_1 = \sigma_K + R = \underline{\underline{140.597[\text{MPa}]}}$$

$$\sigma_2 = \underline{\underline{0[\text{MPa}]}}$$

$$\sigma_3 = \sigma_K - R = \underline{\underline{-116.597[\text{MPa}]}}$$

Az 1-es főfeszültséghez tartozó főirány: $\phi_1 = \text{atan}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) \to \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\phi_1) \\ 0 \\ \sin(\phi_1) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0.385 \\ 0 \\ 0.923 \end{bmatrix}}}$

Az 2-es főfeszültséghez tartozó főirány ismert: $\underline{e}_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$

Az 3-as főfeszültséghez tartozó főirány: $\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0.9223 \\ 0 \\ 0.385 \end{bmatrix}}}$

Ellenőrzés:

Ellenőrhetünk sajátérték-sajátvektor számítással:

Sajátértékek:

$$det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = det\left(\begin{bmatrix} -78.462 - \lambda & 0 & 91.399 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 91.399 & 0 & 102.462 - \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (-78.462 - \lambda) \cdot (-\lambda) \cdot (102.462 - \lambda) - (91.399) \cdot (-\lambda) \cdot (91.399) = 0$$

$\lambda_3 = -116.597\checkmark \quad \lambda_2 = 0\checkmark \quad \lambda_1 = 140.597\checkmark$

Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} -78.462 - \lambda_{1,2,3} & 0 & 91.399 \\ 0 & -\lambda_{1,2,3} & 0 \\ 91.399 & 0 & 102.462 - \lambda_{1,2,3} \end{bmatrix} \cdot \underline{e}_{1,2,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0.385 \\ 0 \\ 0.923 \end{bmatrix} \checkmark \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark \quad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} -0.9223 \\ 0 \\ 0.385 \end{bmatrix} \checkmark$$

6. Feladat:

Mohr-féle egyenértékű feszültség: $\sigma_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \underline{\underline{257.193[\text{MPa}]}}$

HMH-féle egyenértékű feszültség: $\sigma_e^{HMH} = \sqrt{\dfrac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = \underline{\underline{223.059[\text{MPa}]}}$

A kettő különbsége: $\Delta\sigma = \sigma_e^{Mohr} - \sigma_e^{HMH} = \underline{\underline{34.134[\text{MPa}]}}$

7. Feladat:

Alakváltozási energiasűrűség értéke:

$$u = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}}{2} = \frac{\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \sigma_z \cdot \varepsilon_z}{2} = \underline{\underline{0.10285\left[\text{J/cm}^3\right]}}$$

Hidrosztatikus alakváltozási komponens:

$$u_h = \frac{(\frac{1}{3}\sigma_1 \cdot \mathbf{E}) : (\frac{1}{3}\varepsilon_1 \cdot \mathbf{E})}{2} = \frac{1}{6}\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 = \underline{\underline{1.82857 \cdot 10^{-4}\left[\text{J/cm}^3\right]}}$$

Ezek alapján a deviátoros alakváltozási komponens:

$$u_d = u - u_h = \underline{\underline{0.10267\left[\text{J/cm}^3\right]}}$$