Filtraggio della Matrice di Correlazione

Relatore: Stefano Marmi

Studente: Marco Miani

Scuola Normale Superiore

30 aprile 2019

Introduzione

Sia $(\Omega, \mathrm{P}, \mathcal{F})$ un qualsiasi spazio di probabilità e sia $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ una V.A vettoriale su tale spazio.

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

Introduzione

Sia $(\Omega, \mathrm{P}, \mathcal{F})$ un qualsiasi spazio di probabilità e sia $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ una V.A vettoriale su tale spazio.

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

Consideriamo t eventi $\omega_1, \dots, \omega_t$ e prendiamone le immagini tramite X e mettiamole come colonne di una matrice

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} X_1(\omega_1) & & X_1(\omega_t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ X_n(\omega_1) & & X_n(\omega_t) \end{array} \right) \quad \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$$

che chiameremo matrice delle realizzazioni.

Introduzione

Covarianza

$$(\Sigma)_{i,j} := \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_i X_j] = \int_\Omega X_i(\omega) X_j(\omega)\,\mathrm{dP}(\omega)$$

Introduzione

Covarianza

$$(\Sigma)_{i,j} := \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_i X_j] = \int_\Omega X_i(\omega) X_j(\omega)\, \mathrm{dP}(\omega)$$

Covarianza "discreta"

$$(C)_{i,j} := \frac{(MM^T)_{i,j}}{t} = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} M_{i,s} M_{j,s} = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} X_i(\omega_s) X_j(\omega_s)$$

Introduzione

Covarianza

$$(\Sigma)_{i,j} := \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_i X_j] = \int_\Omega X_i(\omega) X_j(\omega)\, \mathrm{dP}(\omega)$$

Covarianza "discreta"

$$(C)_{i,j} := \frac{(MM^T)_{i,j}}{t} = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} M_{i,s} M_{j,s} = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} X_i(\omega_s) X_j(\omega_s)$$

La legge dei grandi numeri ci dice che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(MM^T)_{i,j}}{t} = (\Sigma)_{i,j}$$

E quindi per t abbastanza grande si ha $\Sigma \approx C$

Kelly e Markowitz

L'importanza della matrice Σ risulta ancor più evidente dopo aver visto alcuni risultati

Kelly e Markowitz

L'importanza della matrice Σ risulta ancor più evidente dopo aver visto alcuni risultati

Criterio di Kelly

Data una certa scommessa e un certo capitale, ci chiediamo quale sia la percentuale f^* del capitale da investire che massimizza il guadagno.

$$f^*_{ottimale} = \arg\min \{\mathbb{E}[\log(return(f^*))] \mid 0 \leq f^* \leq 1\}$$

Kelly e Markowitz

L'importanza della matrice Σ risulta ancor più evidente dopo aver visto alcuni risultati

Criterio di Kelly

Data una certa scommessa e un certo capitale, ci chiediamo quale sia la percentuale f^* del capitale da investire che massimizza il guadagno.

$$f^*_{ottimale} = \arg\min \{\mathbb{E}[\log(return(f^*))] \mid 0 \leq f^* \leq 1\}$$

Proiettile di Markowitz

Dato un mercato, ci chiediamo quale sia il portfolio W di rischio minimo con un dato ritorno μ

$$W_{ottimale}(\mu) = \arg\min \left\{ W\Sigma W^T \mid \mu = MW \right\}$$

Filtraggio

Se Σ è ignota e conosciamo solo C? (e.g. corse di cavalli, stock in borsa...)

Filtraggio

Se Σ è ignota e conosciamo solo C? (e.g. corse di cavalli, stock in borsa...)

Definizione

Un filtraggio nella sua forma più generale è un qualsiasi operatore

$$(filt) : \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$$

Noi considereremo solo filtraggi tra matrici simmetriche definite positive

Chiameremo:

-filtraggio nullo $(filt_{nullo}) := Id_{\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})}$.

-filtraggio ideale quello tale che $C^{(filt_{ideale})} = \Sigma \qquad \forall C$ realizzazione.

Filtraggio

Se Σ è ignota e conosciamo solo C? (e.g. corse di cavalli, stock in borsa...)

Definizione

Un filtraggio nella sua forma più generale è un qualsiasi operatore

$$(filt) : \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$$

Noi considereremo solo filtraggi tra matrici simmetriche definite positive

Chiameremo:

-filtraggio nullo $(filt_{nullo}) := Id_{\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})}$.

-filtraggio ideale quello tale che $C^{(filt_{ideale})} = \Sigma \qquad \forall C$ realizzazione.

Esamineremo 4 tipi di filtraggio:

$$\underbrace{\boxed{\text{SLCA}} \qquad \boxed{\text{ALCA}}}_{\text{su grafi}} \qquad \underbrace{\boxed{\text{Rosenow}} \qquad \boxed{\text{Potters}}}_{\text{spettrali}}$$

Filtraggio con metodi su grafi

Si costruisce un grafo completo pesato (N, E, W).

- I nodi $N = \{1, \ldots, n\}$ corrispondono alle componenti della V.A. X
- Gli archi E sono tutte le possibili coppie di nodi (grafo completo)
- Come pesi assegnamo quelli naturali $W(i,j) := C_{i,j}$

Filtraggio con metodi su grafi

Si costruisce un grafo completo pesato (N, E, W).

- I nodi $N = \{1, \dots, n\}$ corrispondono alle componenti della V.A. X
- Gli archi E sono tutte le possibili coppie di nodi (grafo completo)
- Come pesi assegnamo quelli naturali $W(i, j) := C_{i,j}$

Si selezionano gli archi più "significativi" costruendo il Maximum Spanning Tree relativo al grafo.

Filtraggio con metodi su grafi

Si costruisce un grafo completo pesato (N, E, W).

- I nodi $N = \{1, \ldots, n\}$ corrispondono alle componenti della V.A. X
- Gli archi E sono tutte le possibili coppie di nodi (grafo completo)
- Come pesi assegnamo quelli naturali $W(i, j) := C_{i,j}$

Si selezionano gli archi più "significativi" costruendo il Maximum Spanning Tree relativo al grafo.

Mentre procede l'algoritmo sul grafo, al passo s aggiorniamo la relativa matrice $C^{(s)}$ in modo opportuno.

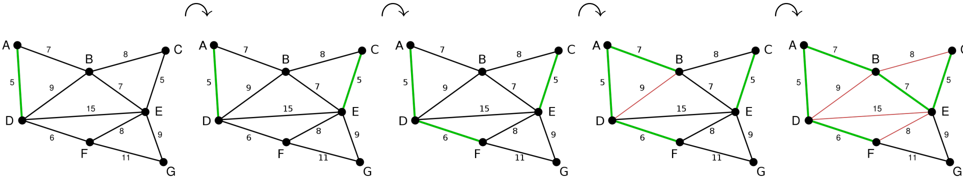
Filtraggio con metodi su grafi

MST - Algoritmo di Kruskal

All'inizio ci sono n cluster, ciascuno composto da un singolo nodo, e poi si procede iterativamente.

- Si seleziona l'arco di peso maggiore.
- Si uniscono i due cluster di nodi che sono collegati da tale arco.
- Si eliminano gli archi interni ai cluster.

Dopo $n-1$ iterazioni si ha solo un cluster e l'algoritmo termina.



Filtraggio con metodi su grafi

Filtraggio 1 - SLCA (Med)

Al passo s, quando uniamo i cluster H e K nel cluster Q poniamo

$$C_{i,j}^{(s+1)} = \begin{cases} \dfrac{|H|\, C_{H,j}^{(s)} + |K|\, C_{K,j}^{(s)}}{|H| + |K|} & \text{se } i \in Q \quad j \notin H \cup K \\ C_{i,j}^{(s)} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Filtraggio con metodi su grafi

Filtraggio 1 - SLCA (Med)

Al passo s, quando uniamo i cluster H e K nel cluster Q poniamo

$$C_{i,j}^{(s+1)} = \begin{cases} \dfrac{|H|\, C_{H,j}^{(s)} + |K|\, C_{K,j}^{(s)}}{|H| + |K|} & \text{se } i \in Q \quad j \notin H \cup K \\ C_{i,j}^{(s)} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Filtraggio 2 - ALCA (Max)

Al passo s, quando uniamo i cluster H e K nel cluster Q poniamo

$$C_{i,j}^{(s+1)} = \begin{cases} \max\{C_{H,j}^{(s)}, C_{K,j}^{(s)}\} & \text{se } i \in Q \quad j \notin H \cup K \\ C_{i,j}^{(s)} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Filtraggio con metodi su grafi

Filtraggio 1 - SLCA (Med)

Al passo s, quando uniamo i cluster H e K nel cluster Q poniamo

$$C_{i,j}^{(s+1)} = \begin{cases} \dfrac{|H|\, C_{H,j}^{(s)} + |K|\, C_{K,j}^{(s)}}{|H| + |K|} & \text{se } i \in Q \quad j \notin H \cup K \\ C_{i,j}^{(s)} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Filtraggio 2 - ALCA (Max)

Al passo s, quando uniamo i cluster H e K nel cluster Q poniamo

$$C_{i,j}^{(s+1)} = \begin{cases} \max\{C_{H,j}^{(s)}, C_{K,j}^{(s)}\} & \text{se } i \in Q \quad j \notin H \cup K \\ C_{i,j}^{(s)} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Alla fine si pone $C^{(filt)} = C^{(n-1)}$

Filtraggio con metodi spettrali

Si diagonalizza C tramite matrici ortogonali $C = V^T D\, V$ e si modifica la matrice D, operando sugli autovalori più piccoli ($\leq \lambda_{max}$ fissato).

$$D \rightsquigarrow \tilde{D}$$

Filtraggio con metodi spettrali

Si diagonalizza C tramite matrici ortogonali $C = V^T D\, V$ e si modifica la matrice D, operando sugli autovalori più piccoli ($\leq \lambda_{max}$ fissato).

$$D \rightsquigarrow \tilde{D}$$

Si rimoltiplica, ottenendo $\tilde{C} := V^T \tilde{D}\, V$ e si modifica $\tilde{C}$ per assicurarsi che il risultato sia ancora una matrice di correlazione.

$$\tilde{C} \rightsquigarrow C^{(filt)}$$

Filtraggio con metodi spettrali

Filtraggio 3 - Rosenow

Si sostituiscono gli elementi di D più piccoli di λ_{max} con 0

$$\tilde{D}_{i,i} = \begin{cases} D_{i,i} & \text{se } D_{i,i} \geq \lambda_{max} \\ 0 & \text{se } D_{i,i} < \lambda_{max} \end{cases}$$

Si forzano gli elementi della diagonale a 1

$$C_{i,j}^{(filt)} = \delta_{i,j} + (1 - \delta_{i,j})\tilde{C}_{i,j}$$

Filtraggio con metodi spettrali

Filtraggio 3 - Rosenow

Si sostituiscono gli elementi di D più piccoli di λ_{max} con 0

$$\tilde{D}_{i,i} = \begin{cases} D_{i,i} & \text{se } D_{i,i} \geq \lambda_{max} \\ 0 & \text{se } D_{i,i} < \lambda_{max} \end{cases}$$

Si forzano gli elementi della diagonale a 1

$$C^{(filt)}_{i,j} = \delta_{i,j} + (1 - \delta_{i,j})\tilde{C}_{i,j}$$

Filtraggio 4 - Potters

Si sostituiscono gli elementi di D più piccoli di λ_{max} con la loro media

$$\tilde{D}_{i,i} = \begin{cases} D_{i,i} & \text{se } D_{i,i} \geq \lambda_{max} \\ \mathbb{E}[\lambda_j : \lambda_j < \lambda_{max}] & \text{se } D_{i,i} < \lambda_{max} \end{cases}$$

Si pone scalano gli elementi di $\tilde{C}$ con le radici degli elementi diagonali

$$C^{(filt)}_{i,j} = \frac{\tilde{C}_{i,j}}{\sqrt{\tilde{C}_{i,i}\,\tilde{C}_{j,j}}}$$

Stima bontà del filtraggio

- Fissiamo una V.A. vettoriale con matrice di covarianza $\Sigma \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ simmetrica definita positiva

Stima bontà del filtraggio

- Fissiamo una V.A. vettoriale con matrice di covarianza $\Sigma \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ simmetrica definita positiva
- Costruiamo tante (~ 1000) sue realizzazioni indipendenti $M_1, \dots, M_{1000} \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$

Stima bontà del filtraggio

- Fissiamo una V.A. vettoriale con matrice di covarianza $\Sigma \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ simmetrica definita positiva
- Costruiamo tante (~ 1000) sue realizzazioni indipendenti $M_1, \ldots, M_{1000} \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$
- Calcoliamo le matrici di covarianza $C_1, \ldots, C_{1000} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ associate alle rispettive realizzazioni

Stima bontà del filtraggio

- Fissiamo una V.A. vettoriale con matrice di covarianza $\Sigma \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ simmetrica definita positiva
- Costruiamo tante (~ 1000) sue realizzazioni indipendenti $M_1, \ldots, M_{1000} \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$
- Calcoliamo le matrici di covarianza $C_1, \ldots, C_{1000} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ associate alle rispettive realizzazioni
- Scegliamo un filtraggio e applichiamolo, ottenendo $C_1^{(filt)}, \ldots, C_{1000}^{(filt)}$

Stima bontà del filtraggio

- Fissiamo una V.A. vettoriale con matrice di covarianza $\Sigma \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ simmetrica definita positiva
- Costruiamo tante (~ 1000) sue realizzazioni indipendenti $M_1, \dots, M_{1000} \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$
- Calcoliamo le matrici di covarianza $C_1, \dots, C_{1000} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ associate alle rispettive realizzazioni
- Scegliamo un filtraggio e applichiamolo, ottenendo $C_1^{(filt)}, \dots, C_{1000}^{(filt)}$

Σ

Stima bontà del filtraggio

- Fissiamo una V.A. vettoriale con matrice di covarianza $\Sigma \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ simmetrica definita positiva
- Costruiamo tante (~ 1000) sue realizzazioni indipendenti $M_1, \ldots, M_{1000} \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$
- Calcoliamo le matrici di covarianza $C_1, \ldots, C_{1000} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ associate alle rispettive realizzazioni
- Scegliamo un filtraggio e applichiamolo, ottenendo $C_1^{(filt)}, \ldots, C_{1000}^{(filt)}$

$$\begin{array}{ccc} & & C_1 \\ & \nearrow & \vdots \\ \Sigma & \rightarrow & C_i \\ & \searrow & \vdots \\ & & C_{1000} \end{array}$$

Stima bontà del filtraggio

- Fissiamo una V.A. vettoriale con matrice di covarianza $\Sigma \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ simmetrica definita positiva
- Costruiamo tante (~ 1000) sue realizzazioni indipendenti $M_1, \dots, M_{1000} \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$
- Calcoliamo le matrici di covarianza $C_1, \dots, C_{1000} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ associate alle rispettive realizzazioni
- Scegliamo un filtraggio e applichiamolo, ottenendo $C_1^{(filt)}, \dots, C_{1000}^{(filt)}$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & C_1 & \to & C_1^{(filt)} \\
 & \nearrow & \vdots & & \vdots \\
\Sigma & \to & C_i & \to & C_1^{(filt)} \\
 & \searrow & \vdots & & \vdots \\
 & & C_{1000} & \to & C_1^{(filt)}
\end{array}
$$

Stima bontà del filtraggio

Fissiamo una distanza tra matrici $d : \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$.

Stima bontà del filtraggio

Fissiamo una distanza tra matrici $d : \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$.

Per capire quanto un $(filt) \approx (filt_{ideale})$ possiamo misurare:

1. Quanto $C^{(filt)}$ si avvicina a Σ?

   $$\langle d(\Sigma, C^{(filt)}) \rangle$$

2. Quanta informazione di C viene persa/trattenuta in $C^{(filt)}$?

   $$\langle d(C, C^{(filt)}) \rangle$$

3. Quanto è stabile il filtraggio?

   $$\langle d(C^{(filt)}, C^{(filt)}) \rangle$$

Stima bontà del filtraggio

Fissiamo una distanza tra matrici $d : \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$.

Per capire quanto un $(filt) \approx (filt_{ideale})$ possiamo misurare:

1. Quanto $C^{(filt)}$ si avvicina a Σ?

$$\langle d(\Sigma, C^{(filt)}) \rangle := \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} d(\Sigma, C_i^{(filt)})$$

2. Quanta informazione di C viene persa/trattenuta in $C^{(filt)}$?

$$\langle d(C, C^{(filt)}) \rangle := \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} d(C, C_i^{(filt)})$$

3. Quanto è stabile il filtraggio?

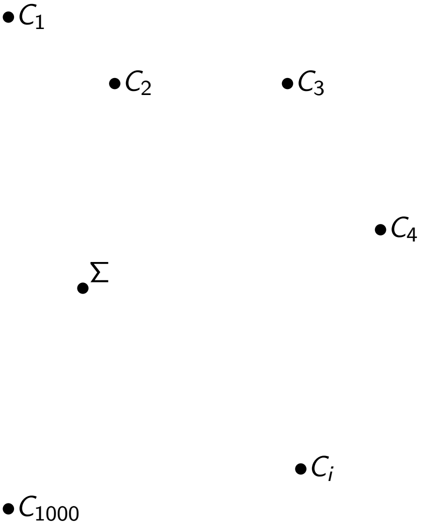
$$\langle d(C^{(filt)}, C^{(filt)}) \rangle := \frac{1}{499500} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{1000} d(C_i^{(filt)}, C_j^{(filt)})$$

Stima bontà del filtraggio

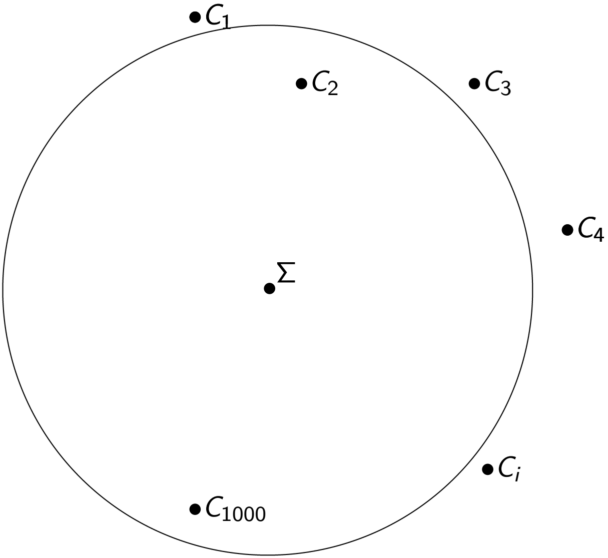
- Σ

Stima bontà del filtraggio

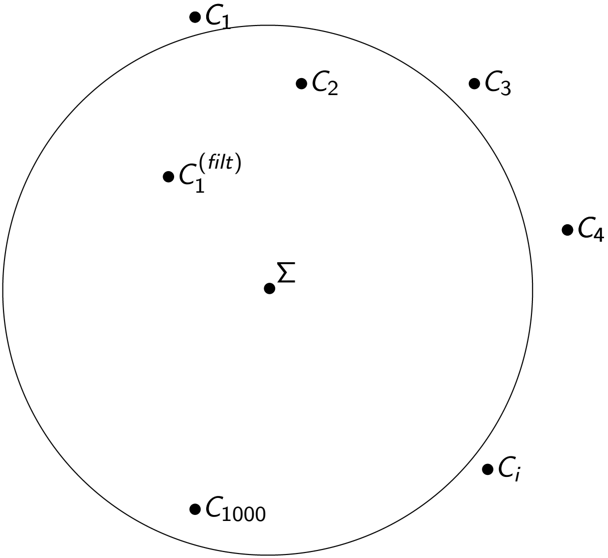
Stima bontà del filtraggio



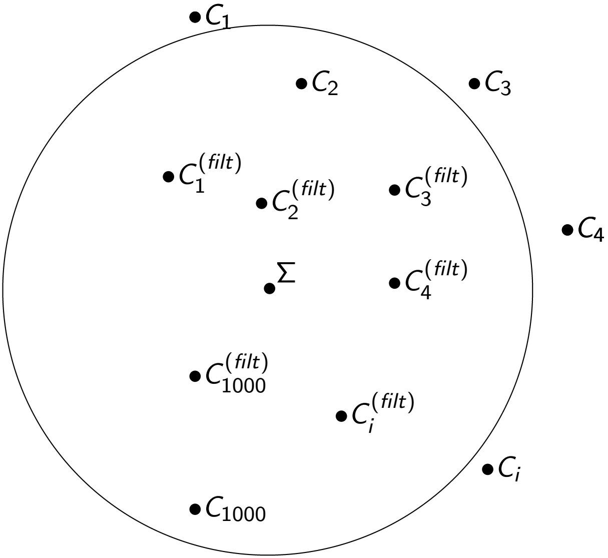
Stima bontà del filtraggio



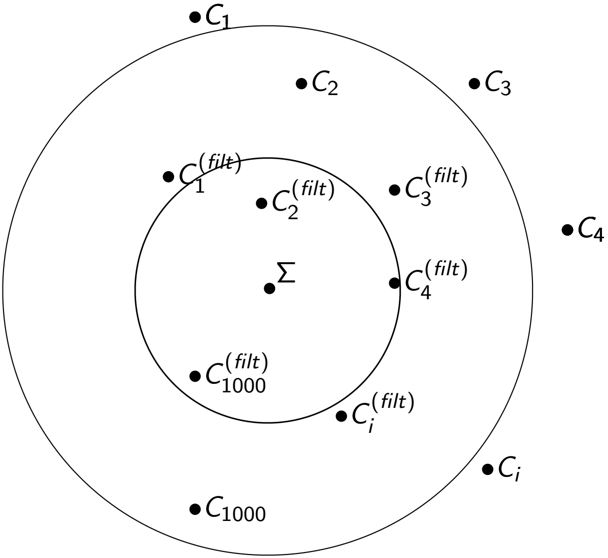
Stima bontà del filtraggio



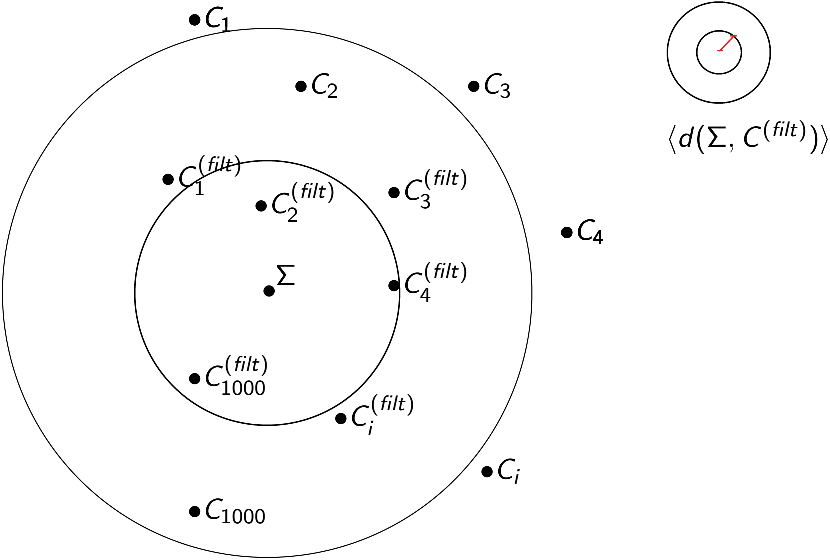
Stima bontà del filtraggio



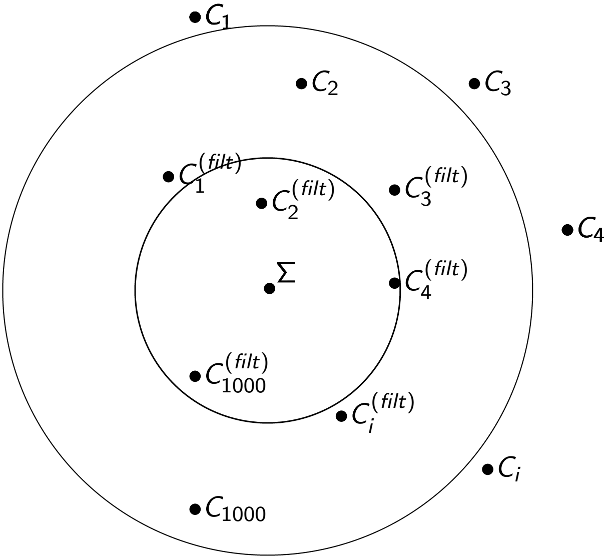
Stima bontà del filtraggio

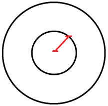


Stima bontà del filtraggio

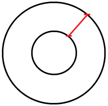


Stima bontà del filtraggio



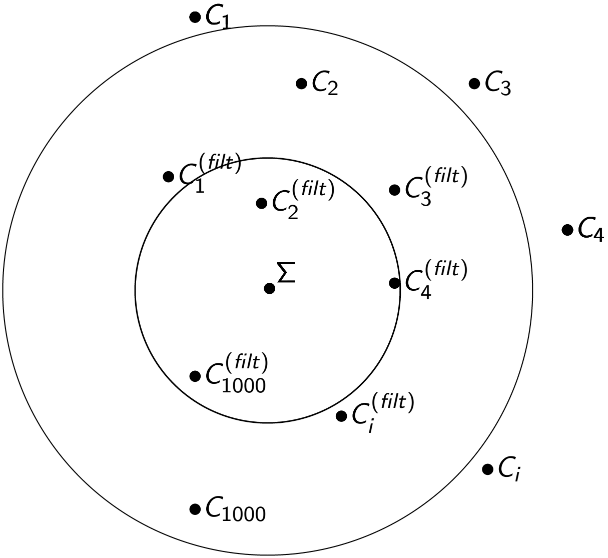


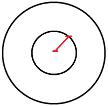
$\langle d(\Sigma, C^{(filt)}) \rangle$



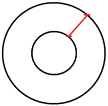
$\langle d(C, C^{(filt)}) \rangle$

Stima bontà del filtraggio

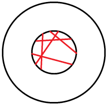




$\langle d(\Sigma, C^{(filt)})\rangle$



$\langle d(C, C^{(filt)})\rangle$



$\langle d(C^{(filt)}, C^{(filt)})\rangle$

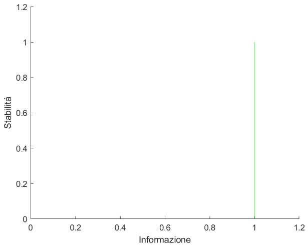
Stima bontà del filtraggio

Se la matrice Σ ci è ignota:

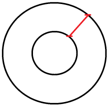
1. $\langle d(\Sigma, C^{(filt)}) \rangle$ NON calcolabile
2. $\langle d(C, C^{(filt)}) \rangle$ calcolabile
3. $\langle d(C^{(filt)}, C^{(filt)}) \rangle$ calcolabile

Stima bontà del filtraggio

Se la matrice Σ ci è ignota:



1. $\langle d(\Sigma, C^{(filt)}) \rangle$ NON calcolabile
2. $\langle d(C, C^{(filt)}) \rangle$ calcolabile

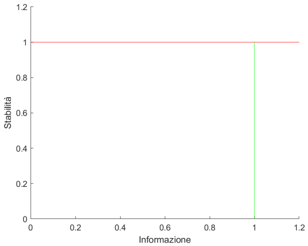


$$\underbrace{0 = \langle d(C, C) \rangle}_{\text{filtraggio nullo}} \leq \langle d(C, C^{(filt)}) \rangle \leq \underbrace{\langle d(C, \Sigma) \rangle = \ ?}_{\text{filtraggio perfetto}}$$

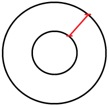
3. $\langle d(C^{(filt)}, C^{(filt)}) \rangle$ calcolabile

Stima bontà del filtraggio

Se la matrice Σ ci è ignota:

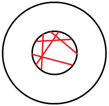


1. $\langle d(\Sigma, C^{(filt)}) \rangle$ NON calcolabile
2. $\langle d(C, C^{(filt)}) \rangle$ calcolabile



$$\underbrace{0 = \langle d(C, C) \rangle}_{\text{filtraggio nullo}} \leq \langle d(C, C^{(filt)}) \rangle \leq \underbrace{\langle d(C, \Sigma) \rangle = \ ?}_{\text{filtraggio perfetto}}$$

3. $\langle d(C^{(filt)}, C^{(filt)}) \rangle$ calcolabile



$$\underbrace{0 = \langle d(\Sigma, \Sigma) \rangle}_{\text{filtraggio perfetto}} \leq \langle d(C_i^{(filt)}, C_j^{(filt)}) \rangle \leq \underbrace{\langle d(C_i, C_j) \rangle = \ ?}_{\text{filtraggio nullo}}$$

Distanza di Kullback-Leibler

Definizione

Date due densità di probabilità P e Q si definisce:

$$K(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := \mathbb{E}\left[\ln\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\right)\right] = \int \ln\left(\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right) \mathrm{dP}(x)$$

la distanza di Kullback-Leibler.

Distanza di Kullback-Leibler

Definizione

Date due densità di probabilità P e Q si definisce:

$$K(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := \mathbb{E}\left[\ln\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\right)\right] = \int \ln\left(\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right) \mathrm{dP}(x)$$

la distanza di Kullback-Leibler.

Proprietà:

- $K(\mathrm{P},\mathrm{P}) = 0$
- $K(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \geq 0$
  $$-K(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \int \log(\tfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}})\mathrm{P}\,\mathrm{d}x \leq log(\int \tfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}\mathrm{P}\,\mathrm{d}x) = \log(1) = 0$$
- **Non** è simmetrica
  $$K_{sim}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := K(\mathrm{P},\mathrm{Q}) + K(\mathrm{Q},\mathrm{P}) = \int \log(\tfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}})(\mathrm{P}-\mathrm{Q})\,\mathrm{d}x$$
- **Non** soddisfa la disuguaglianza triangolare

Distanza di Kullback-Leibler

Definizione

Date due densità di probabilità P e Q si definisce:

$$K(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := \mathbb{E}\left[\ln\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\right)\right] = \int \ln\left(\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right) \mathrm{dP}(x)$$

la distanza di Kullback-Leibler.

Nata originariamente per definire l'**informazione mutuale** tra Variabili Aleatorie X e Y come

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(X,Y) &:= K(\mathbb{P}(X,Y),\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)) \\ &= \int \ln\left(\frac{\mathbb{P}(X,Y)}{\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)}\right) \mathrm{d}\mathbb{P}(X,Y)\end{aligned}$$

Distanza di Kullback-Leibler

Consideriamo due variabili aleatorie gaussiane di media nulla e varianza Σ_i

$$X_1 \sim \mathrm{N}(0, \Sigma_1) \qquad X_2 \sim \mathrm{N}(0, \Sigma_2)$$

e le relative densità di probabilità associate

$$\mathrm{P}_i(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_i)}} e^{-\frac{1}{2} x^T \Sigma_i^{-1} x}$$

Distanza di Kullback-Leibler

Consideriamo due variabili aleatorie gaussiane di media nulla e varianza Σ_i

$$X_1 \sim \mathrm{N}(0, \Sigma_1) \qquad X_2 \sim \mathrm{N}(0, \Sigma_2)$$

e le relative densità di probabilità associate

$$\mathrm{P}_i(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_i)}} e^{-\frac{1}{2}x^T \Sigma_i^{-1} x}$$

Possiamo quindi definire una distanza tra matrici

Definizione

Date due matrici simmetriche definite positive Σ_1 e Σ_2 si definisce:

$$K(\Sigma_1, \Sigma_2) := K(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$$

la distanza di Kullback-Leibler tra matrici.

Distanza di Kullback-Leibler

$$K(\Sigma_1, \Sigma_2) = \int \ln\left(\frac{\mathrm{P}_1(x)}{\mathrm{P}_2(x)}\right) \mathrm{dP}_1(x)$$

Distanza di Kullback-Leibler

$$K(\Sigma_1, \Sigma_2) = \int \ln\left(\frac{\mathrm{P}_1(x)}{\mathrm{P}_2(x)}\right) \mathrm{dP}_1(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\det(\Sigma_2)}{\det(\Sigma_1)}\right) + \mathrm{TR}(\Sigma_2^{-1}\Sigma_1) - n\right)$$

Distanza di Kullback-Leibler

$$
\begin{aligned}
K(\Sigma_1, \Sigma_2) &= \int \ln\left(\frac{\mathrm{P}_1(x)}{\mathrm{P}_2(x)}\right) \mathrm{dP}_1(x) \\
&= \int \ln\left(\sqrt{\frac{\det(\Sigma_2)}{\det(\Sigma_1)}} e^{-\frac{1}{2}(x^T\Sigma_1^{-1}x - x^T\Sigma_2^{-1}x)}\right) \mathrm{dP}_1(x) \\
&= \int \ln\left(\sqrt{\frac{\det(\Sigma_2)}{\det(\Sigma_1)}}\right) \mathrm{dP}_1(x) - \frac{1}{2}\int (x^T\Sigma_1^{-1}x - x^T\Sigma_2^{-1}x)\,\mathrm{dP}_1(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\det(\Sigma_2)}{\det(\Sigma_1)}\right) + \int x^T\Sigma_2^{-1}x\,\mathrm{dP}_1(x) - \int x^T\Sigma_1^{-1}x\,\mathrm{dP}_1(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\det(\Sigma_2)}{\det(\Sigma_1)}\right) + \mathrm{TR}(\Sigma_2^{-1}\Sigma_1) - n\right)
\end{aligned}
$$

calcolabile esplicitamente in funzione delle sole matrici Σ_1 e Σ_2

Distanza di Kullback-Leibler

Delle C così costruite seguono la distribuzione di Wishart

$$C \sim W_n(\Sigma, t)$$

Distanza di Kullback-Leibler

Delle C così costruite seguono la distribuzione di Wishart

$$C \sim W_n(\Sigma, t)$$

con densità

$$f(C) = \frac{1}{\Gamma_n(\frac{t}{2})\left(\sqrt{2^n \det(\Sigma)}\right)^t} (\det(C))^{\frac{t-n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{TR}(\Sigma^{-1}C)}$$

dove $\Gamma_n\left(\frac{t}{2}\right) = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{t-j}{2}\right)$ è la Multivariate Gamma Function.

Distanza di Kullback-Leibler

Grazie a questa possiamo calcolare

$$\mathbb{E}_W[K(\Sigma, C)]$$

$$\mathbb{E}_W[K(C, \Sigma)]$$

$$\mathbb{E}_{W \otimes W}[K(C, C)]$$

Distanza di Kullback-Leibler

Grazie a questa possiamo calcolare

$$\mathbb{E}_W[K(\Sigma, C)] = \frac{1}{2}\left(n \ln\left(\frac{2}{t}\right) + \sum_{p=t-n+1}^{t}\left(\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)}\right) + \frac{n(n+1)}{t-n-1}\right)$$

$$\mathbb{E}_W[K(C, \Sigma)] = \frac{1}{2}\left(n \ln\left(\frac{t}{2}\right) - \sum_{p=t-n+1}^{t}\left(\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)}\right)\right)$$

$$\mathbb{E}_{W\otimes W}[K(C, C)] = \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{t-n-1}$$

Distanza di Kullback-Leibler

Grazie a questa possiamo calcolare

$$\mathbb{E}_W[K(\Sigma, C)] = \frac{1}{2}\left(n \ln\left(\frac{2}{t}\right) + \sum_{p=t-n+1}^{t} \left(\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)}\right) + \frac{n(n+1)}{t-n-1} \right)$$

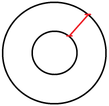
$$\mathbb{E}_W[K(C, \Sigma)] = \frac{1}{2}\left(n \ln\left(\frac{t}{2}\right) - \sum_{p=t-n+1}^{t} \left(\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)}\right) \right)$$

$$\mathbb{E}_{W\otimes W}[K(C, C)] = \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{t-n-1}$$

che **NON** dipendono da Σ

Applicazione

- $\langle d(C, C^{(filt)})\rangle$

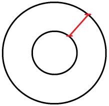


Quanta informazione di C viene persa/trattenuta in $C^{(filt)}$?

$$\underbrace{0 = \langle K(C,C)\rangle}_{\text{filtraggio nullo}} \leq \langle K(C, C^{(filt)})\rangle \leq \underbrace{\langle K(C,\Sigma)\rangle \approx \mathbb{E}_W[K(C,\Sigma)]}_{\text{filtraggio perfetto}}$$

Applicazione

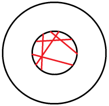
- $\langle d(C, C^{(filt)}) \rangle$



Quanta informazione di C viene persa/trattenuta in $C^{(filt)}$?

$$\underbrace{0 = \langle K(C, C) \rangle}_{\text{filtraggio nullo}} \leq \langle K(C, C^{(filt)}) \rangle \leq \underbrace{\langle K(C, \Sigma) \rangle \approx \mathbb{E}_W[K(C, \Sigma)]}_{\text{filtraggio perfetto}}$$

- $\langle d(C^{(filt)}, C^{(filt)}) \rangle$



Quanto è stabile il filtraggio?

$$\underbrace{0 = \langle K(\Sigma, \Sigma) \rangle}_{\text{filtraggio perfetto}} \leq \langle K(C_i^{(filt)}, C_j^{(filt)}) \rangle \leq \underbrace{\langle K(C_i, C_j) \rangle \approx \mathbb{E}_{W \otimes W}[K(C, C)]}_{\text{filtraggio nullo}}$$

Applicazione - Test Teorici

- Fissiamo n e t

Applicazione - Test Teorici

- Fissiamo n e t
- Generiamo una Σ casuale $\in \mathfrak{M}(n, n, \mathbb{R})$

Applicazione - Test Teorici

- Fissiamo n e t
- Generiamo una Σ casuale $\in \mathfrak{M}(n, n, \mathbb{R})$
- Costruiamo **tante** sue realizzazioni indipendenti $M_i \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$

Applicazione - Test Teorici

- Fissiamo n e t
- Generiamo una Σ casuale $\in \mathfrak{M}(n, n, \mathbb{R})$
- Costruiamo **tante** sue realizzazioni indipendenti $M_i \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$
- Per ciascuna realizzazione M_i calcoliamo la matrice di covarianza C_i

Applicazione - Test Teorici

- Fissiamo n e t
- Generiamo una Σ casuale $\in \mathfrak{M}(n, n, \mathbb{R})$
- Costruiamo **tante** sue realizzazioni indipendenti $M_i \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$
- Per ciascuna realizzazione M_i calcoliamo la matrice di covarianza C_i
- Applichiamo i filtraggi

$$C_i \rightsquigarrow \left[C_i^{(filt_{Max})}, C_i^{(filt_{Med})}, C_i^{(filt_{Potter})}, C_i^{(filt_{Rosenow})} \right]$$

Applicazione - Test Teorici

- Fissiamo n e t
- Generiamo una Σ casuale $\in \mathfrak{M}(n, n, \mathbb{R})$
- Costruiamo **tante** sue realizzazioni indipendenti $M_i \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$
- Per ciascuna realizzazione M_i calcoliamo la matrice di covarianza C_i
- Applichiamo i filtraggi

$$C_i \rightsquigarrow \left[C_i^{(filt_{Max})}, C_i^{(filt_{Med})}, C_i^{(filt_{Potter})}, C_i^{(filt_{Rosenow})} \right]$$

- Calcoliamo le medie delle distanze e plottiamo i 4 punti

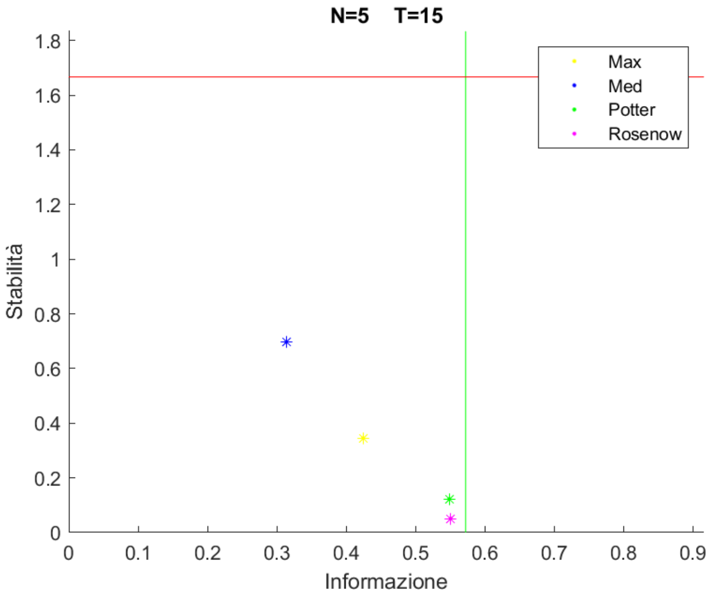
$$\left(\langle K(C, C^{(filt_{Max})}) \rangle, \langle K(C^{(filt_{Max})}, C^{(filt_{Max})}) \rangle \right) \quad \in \mathbb{R}^2$$

$$\left(\langle K(C, C^{(filt_{Med})}) \rangle, \langle K(C^{(filt_{Med})}, C^{(filt_{Med})}) \rangle \right) \quad \in \mathbb{R}^2$$

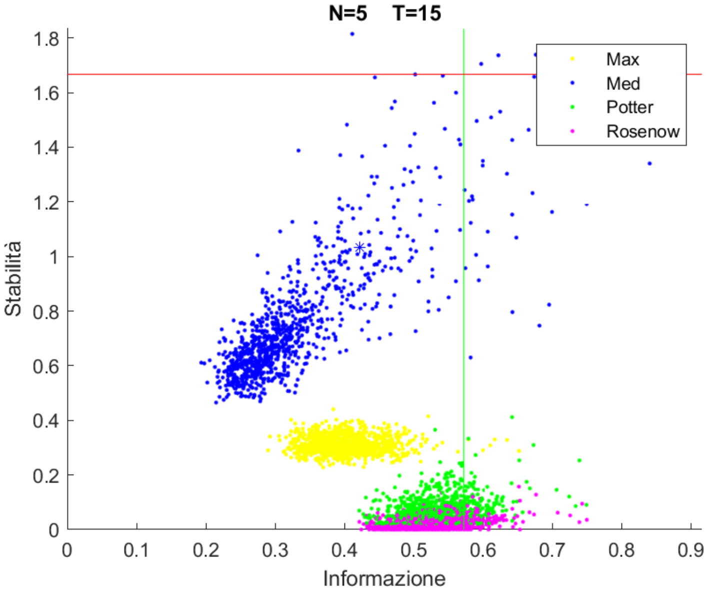
$$\left(\langle K(C, C^{(filt_{Potter})}) \rangle, \langle K(C^{(filt_{Potter})}, C^{(filt_{Potter})}) \rangle \right) \quad \in \mathbb{R}^2$$

$$\left(\langle K(C, C^{(filt_{Rosenow})}) \rangle, \langle K(C^{(filt_{Rosenow})}, C^{(filt_{Rosenow})}) \rangle \right) \quad \in \mathbb{R}^2$$

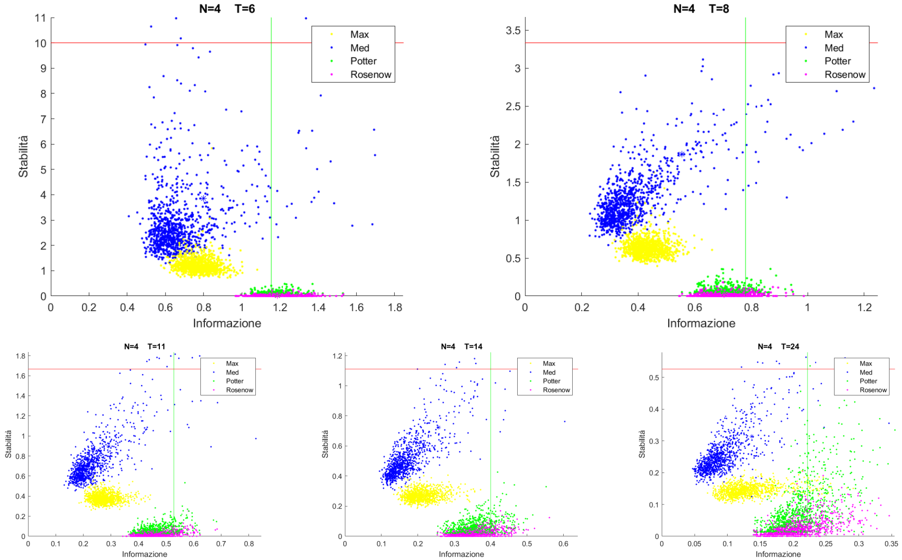
Applicazione - Test Teorici

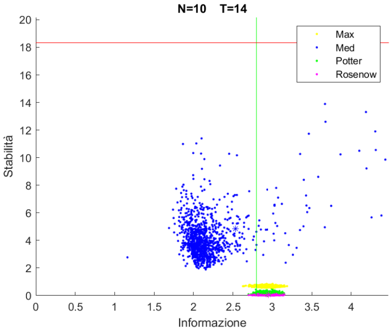


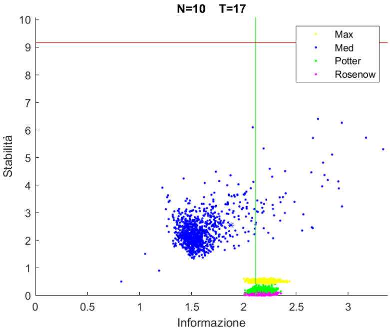
Applicazione - Test Teorici

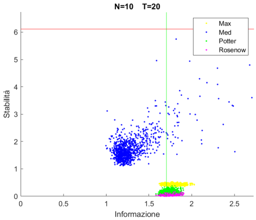


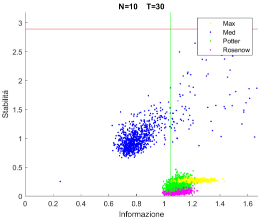
Applicazione - Test Teorici (n=4)

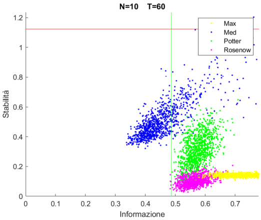



N=10 T=14
Max
Med
Potter
Rosenow
Stabilità
Informazione


N=10 T=17
Max
Med
Potter
Rosenow
Stabilità
Informazione


N=10 T=20
Max
Med
Potter
Rosenow
Stabilità
Informazione


N=10 T=30
Max
Med
Potter
Rosenow
Stabilità
Informazione

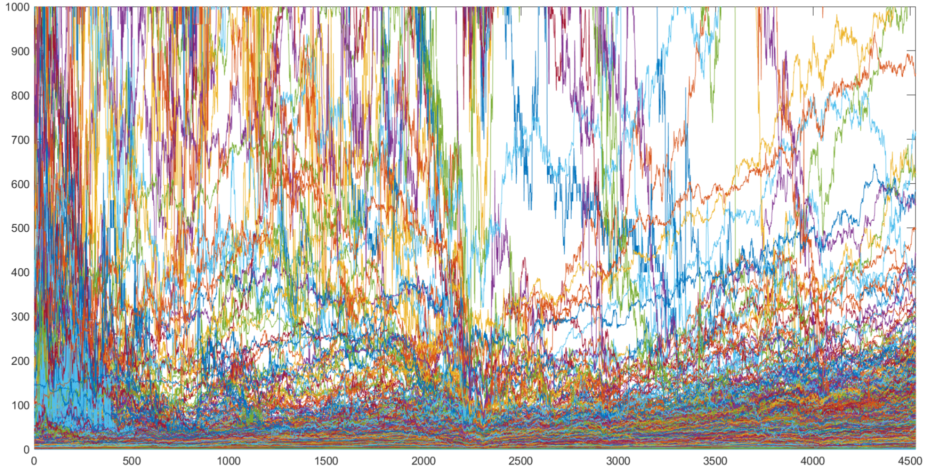

N=10 T=60
Max
Med
Potter
Rosenow
Stabilità
Informazione

Applicazione - Test Pratici

I dati da cui sono partito sono i prezzi in chiusura giornalieri di 7227 stock.
Di questi ho selezionati i 2122 che avevano dati per almeno 20 anni

Applicazione - Test Pratici

I dati da cui sono partito sono i prezzi in chiusura giornalieri di 7227 stock. Di questi ho selezionati i 2122 che avevano dati per almeno 20 anni



Applicazione - Test Pratici

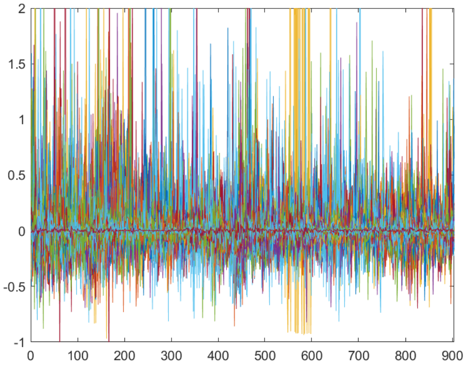
Dai prezzi giornalieri sono passato alle medie settimanali e da queste sono passato agli incrementi percentuali tra una settimana e la succssiva.

$$incr(i) = \frac{prezzo(i) - prezzo(i-1)}{|prezzo(i)|}$$

Applicazione - Test Pratici

Dai prezzi giornalieri sono passato alle medie settimanali e da queste sono passato agli incrementi percentuali tra una settimana e la succssiva.

$$incr(i) = \frac{prezzo(i) - prezzo(i-1)}{|prezzo(i)|}$$



Applicazione - Test Pratici

- Fissiamo n e t

Applicazione - Test Pratici

- Fissiamo n e t
- Scegliamo n stock quotati nella borsa di New York

Applicazione - Test Pratici

- Fissiamo n e t
- Scegliamo n stock quotati nella borsa di New York
- Prendiamo i dati relativi relativi a **tanti** intervalli di tempo lunghi t disgiunti (=realizzazioni indipendenti $M_i \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$)

Applicazione - Test Pratici

- Fissiamo n e t
- Scegliamo n stock quotati nella borsa di New York
- Prendiamo i dati relativi relativi a **tanti** intervalli di tempo lunghi t disgiunti (=realizzazioni indipendenti $M_i \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$)
- Per ciascuna realizzazione M_i calcoliamo la matrice di covarianza C_i

Applicazione - Test Pratici

- Fissiamo n e t
- Scegliamo n stock quotati nella borsa di New York
- Prendiamo i dati relativi relativi a **tanti** intervalli di tempo lunghi t disgiunti (=realizzazioni indipendenti $M_i \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$)
- Per ciascuna realizzazione M_i calcoliamo la matrice di covarianza C_i
- Applichiamo i filtraggi

$$C_i \rightsquigarrow \left[C_i^{(filt_{Max})}, C_i^{(filt_{Med})}, C_i^{(filt_{Potter})}, C_i^{(filt_{Rosenow})} \right]$$

Applicazione - Test Pratici

- Fissiamo n e t
- Scegliamo n stock quotati nella borsa di New York
- Prendiamo i dati relativi relativi a **tanti** intervalli di tempo lunghi t disgiunti (=realizzazioni indipendenti $M_i \in \mathfrak{M}(n, t, \mathbb{R})$)
- Per ciascuna realizzazione M_i calcoliamo la matrice di covarianza C_i
- Applichiamo i filtraggi

$$C_i \rightsquigarrow \left[C_i^{(filt_{Max})}, C_i^{(filt_{Med})}, C_i^{(filt_{Potter})}, C_i^{(filt_{Rosenow})} \right]$$

- Calcoliamo le medie delle distanze e plottiamo i 4 punti

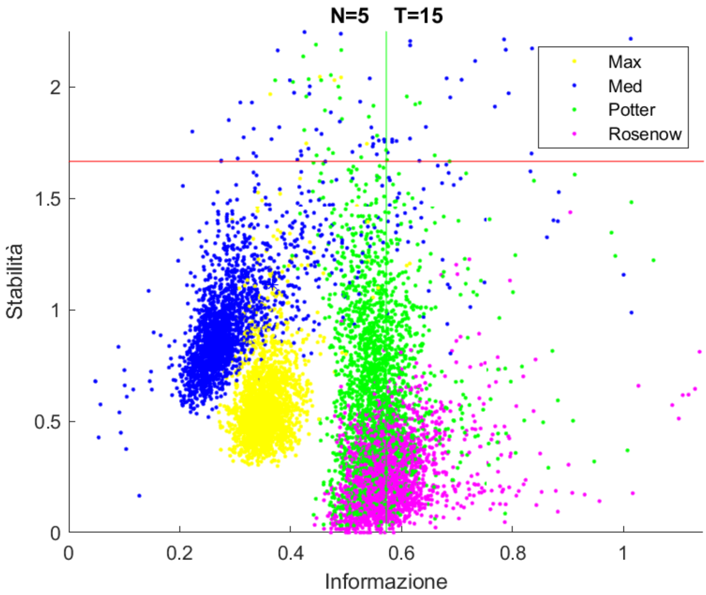
$$\left(\langle K(C, C^{(filt_{Max})}) \rangle, \langle K(C^{(filt_{Max})}, C^{(filt_{Max})}) \rangle \right) \quad \in \mathbb{R}^2$$

$$\left(\langle K(C, C^{(filt_{Med})}) \rangle, \langle K(C^{(filt_{Med})}, C^{(filt_{Med})}) \rangle \right) \quad \in \mathbb{R}^2$$

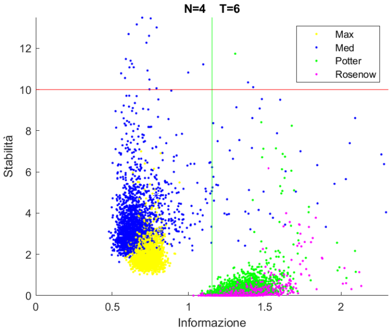
$$\left(\langle K(C, C^{(filt_{Potter})}) \rangle, \langle K(C^{(filt_{Potter})}, C^{(filt_{Potter})}) \rangle \right) \quad \in \mathbb{R}^2$$

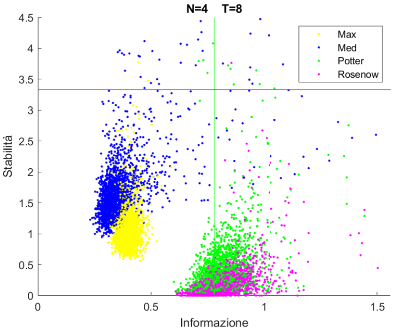
$$\left(\langle K(C, C^{(filt_{Rosenow})}) \rangle, \langle K(C^{(filt_{Rosenow})}, C^{(filt_{Rosenow})}) \rangle \right) \quad \in \mathbb{R}^2$$

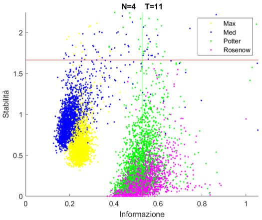
Applicazione - Test Pratici

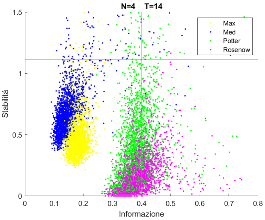


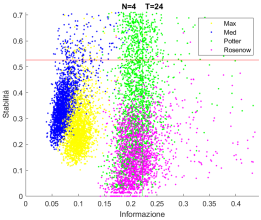
Applicazione - Test Pratici (n=4)



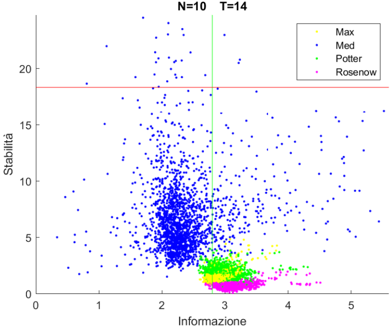


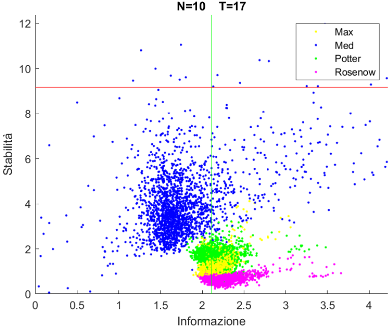


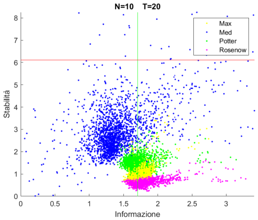


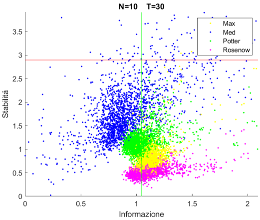


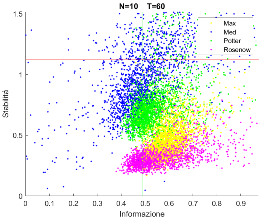
Applicazione - Test Pratici (n=10)











Proiettile di Markowitz

Sia dato un mercato con vettore dei ritorni attesi M e covarianza Σ.

Definizione

Un **portfolio** è un vettore $W \in \{[0,1]\}^n$ di pesi.
W_i è la percentuale del capitale che investiamo nello stock i. $(\sum W_i = 1)$

Il ritorno atteso è quindi $\mu = MW^T$ e la varianza è $\sigma^2 = W\Sigma W^T$.

C'è un ordinamento parziale nell'insieme $\mathcal{W}$ dei portafogli.

$$W_1 \preceq W_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[W_1] \leq \mathbb{E}[W_2] \wedge \mathrm{Var}(W_1) \geq \mathrm{Var}(W_2)$$

Definizione

Un portfolio si dice **efficiente** se è un elemento massimale rispetto a $\preceq$

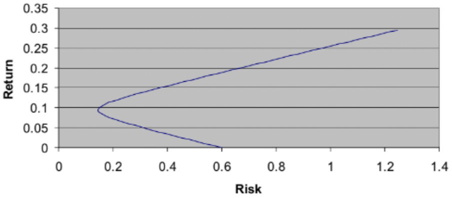
Proiettile di Markowitz

Markowitz

Dato $\mu \in \mathbb{R}^+$, il portfolio con ritorno atteso μ e varianza minima ha pesi:

$$W = \frac{\det\begin{pmatrix} \mu & M\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \\ 1 & \mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \end{pmatrix} M\Sigma^{-1} + \det\begin{pmatrix} M\Sigma^{-1}M^T & \mu \\ \mathbb{1}\Sigma^{-1}M^T & 1 \end{pmatrix} \mathbb{1}\Sigma^{-1}}{\det\begin{pmatrix} M\Sigma^{-1}M^T & M\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \\ \mathbb{1}\Sigma^{-1}M^T & \mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \end{pmatrix}}$$

Possiamo quindi tracciare la curva dei portafogli efficienti, il cosiddetto proiettile di Markowitz



Criterio di Kelly

Supponiamo che a un giocatore venga data la possibilità di scommettere una fissata frazione f del suo capitale (arbitrariamente divisibile) su lanci successivi di monete.
Ad ogni lancio con probabilità $p < \frac{1}{2}$ vince quanto ha scommesso, con probabilità $1 - p$ perde.

Quale f scegliere?

- $f = 1$ massimizza il valore atteso
- $f = 0$ minimizza la varianza

Criterio di Kelly

Se F_n è il capitale al passo n, definiamo il grow rate esponenziale come

$$G := \lim_{n\to\infty} \log\left(\left(\frac{F_n}{F_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

Se il giocatore dopo n passi ha vinto W volte e perso L volte, $F_n = (1+f)^W(1-f)^L F_0$, e quindi

$$G = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{W}{n}\log(1+f) + \frac{L}{n}\log(1-f)\right) = p\log(1+f) + (1-p)\log(1-f)$$

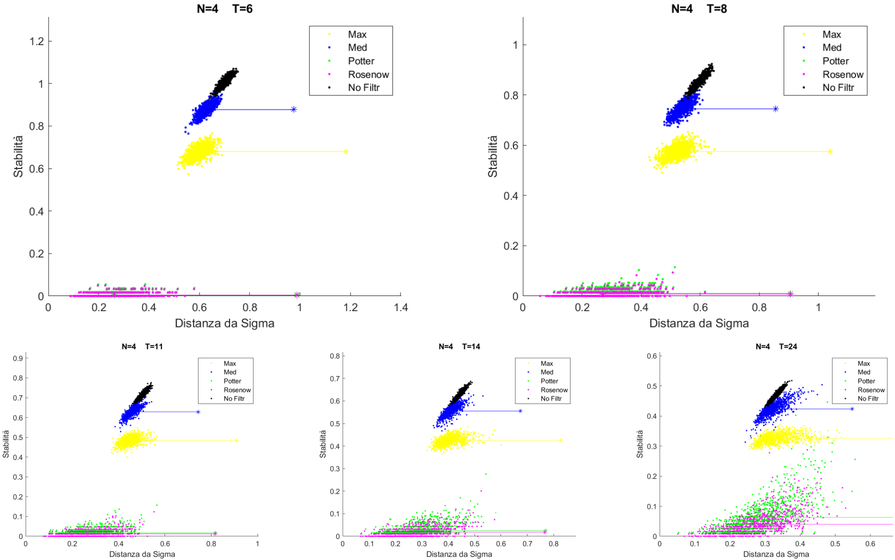
Il criterio di Kelly

Se definiamo $f^*_{ottimale} := \arg\min\{\mathbb{E}[\log(return(f^*))] : 0 \le f^* \le 1\}$

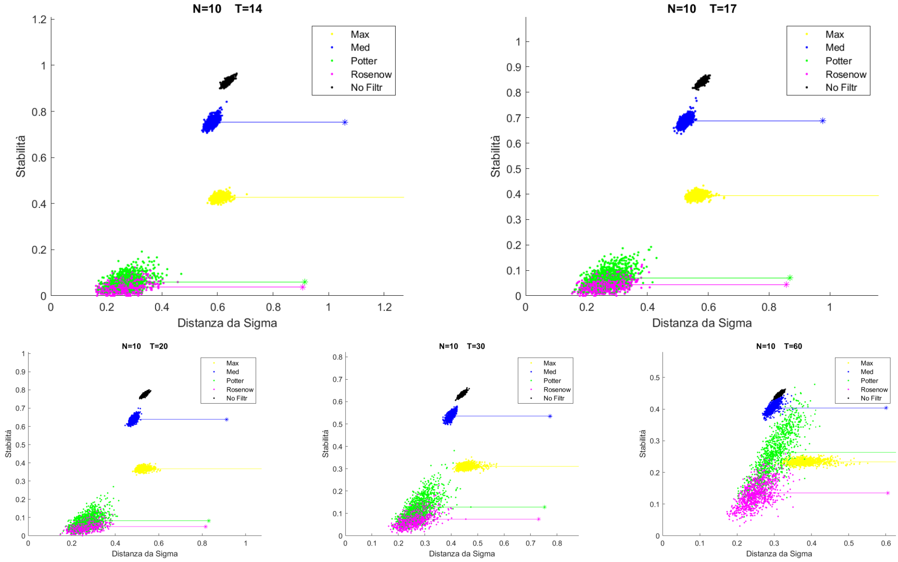
Per scommesse semplici con due possibili risultati vale:

$$f^* = p - (1-p)$$

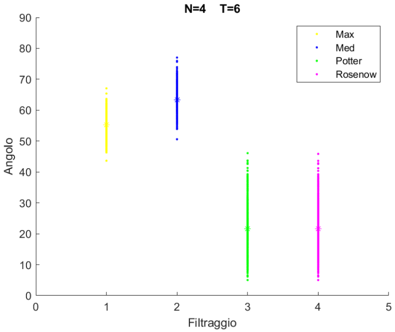
Check Risultati

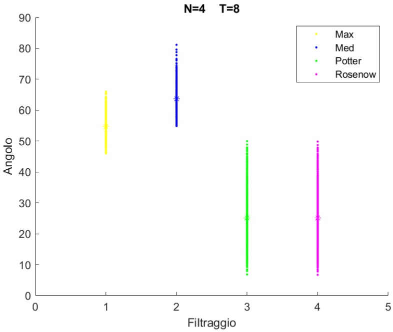


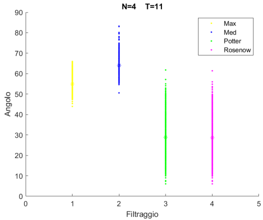
Check Risultati

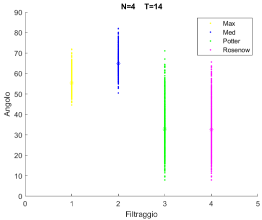


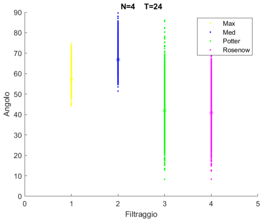
Check Risultati











Check Risultati