

Università degli Studi di Pisa

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Dal problema di Calderón al mantello di Harry Potter

Candidato:
Marco Miani

Relatore:
Prof. Luigi Carlo Berselli

*Grazie ai miei compagni di collegio
per le innumerevoli risposte
e i molteplici consigli*

Indice

Introduzione	3
1 Il problema inverso di Calderón	7
1.1 Mappa Dirichlet-To-Neumann	7
1.2 Tomografia ad Impedenza Elettrica	8
1.3 Invarianza per cambio di variabili	12
1.4 Risultati di unicità	16
2 Cloaking non singolare	19
2.1 Ordinamento tra conducibilità	19
2.2 Costruzione	20
2.3 Stima della “bontà” della soluzione	23
2.4 Studio degli autovalori	26
3 Cloaking singolare	29
3.1 Condizioni necessarie	30
3.2 Costruzione	32
3.3 Generalizzazione	37
Conclusioni	39
Bibliografia	43

Introduzione

Qui e nel seguito ci restringeremo all'elettrodinamica classica, cioè alle equazioni di Maxwell nelle quali ϵ e μ sono arbitrari tensori che non dipendono dall'intensità dei campi E e B . Trascureremo quindi effetti quantistici o di ottica non lineare.

Lo scopo di questa trattazione è di illustrare l'idea che sta alla base del cosiddetto cloaking, ovvero come rendere un oggetto invisibile a rilevazioni effettuate tramite onde elettromagnetiche. L'obiettivo è quello di impedire agli osservatori non solo di vedere l'oggetto, ma anche di essere a conoscenza che qualcosa gli sta venendo nascosto.

Dato un oggetto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ qualsiasi, gli unici parametri di questo che sono in qualche modo rilevabili tramite onde elettromagnetiche (i.e luce) sono la conducibilità $\sigma(x)$, la permeabilità elettrica $\epsilon(x)$ e la permeabilità magnetica $\mu(x)$ per ogni $x \in \Omega$, in quanto queste e solo queste compaiono nelle equazioni di Maxwell. Di conseguenza, se due oggetti hanno esattamente gli stessi valori di questi tre parametri, punto per punto, allora sono assolutamente indistinguibili tramite onde elettromagnetiche. Se un oggetto ha gli stessi parametri dell'aria ed è immerso nell'aria, allora sarà a tutti gli effetti invisibile.

Vedere significa ottenere informazioni su qualcosa senza avvicinarsi, possiamo quindi considerare una regione di spazio chiusa e limitata Ω all'interno della quale non possiamo entrare. Diciamo che $D \subset \Omega$ è un oggetto che sta dentro Ω sul quale vorremmo ottenere informazioni, cioè, come detto, conoscerne permeabilità e conducibilità in ogni punto. Nella pratica quando vediamo un oggetto, quello che sta succedendo in realtà è che lo stiamo illuminando con qualcosa, ad esempio una torcia, cioè stiamo imponendo campi elettrici e magnetici su una porzione della superficie $\partial\Omega$, e stiamo capendo come "reagisce" la regione Ω misurando i campi risultanti sulla superficie $\partial\Omega$, restringendoci però alla sola area della nostra pupilla.

INTRODUZIONE

Vedere può quindi essere assunto, nella sua forma più generale, come il poter agire solo sulla superficie esterna $\partial\Omega$ imponendo e misurando campi, potenziali e correnti.

Nel seguito, per comodità di trattazione ma soprattutto per concentrarci più sull'aspetto matematico che su quello fisico, ci restringeremo alla sola elettrostatica, nella quale non compaiono le due permeabilità. La sola σ definisce univocamente gli oggetti, nel senso che due oggetti con stessa conducibilità sono assolutamente indistinguibili.

Per noi vedere corrisponderà ad imporre un potenziale elettrico su ogni punto della superficie $\partial\Omega$, cioè imporre condizioni di Dirichlet $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ (spazio di Bessel che ci garantisce soluzioni ad energia finita per il potenziale), e misurare la corrente risultante sulla superficie stessa. Formalizzeremo questa idea nel Capitolo 1 tramite la mappa Dirichlet-To-Neumann $\Lambda_\sigma : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ parametrica nella conducibilità $\sigma(x)$, dove quest'ultima in generale è una mappa $\sigma : \Omega \rightarrow \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a valori simmetrici semidefiniti positivi.

L'idea di base che svilupperemo per realizzare il cosiddetto cloaking sarà costruire un guscio sferico con una particolare conducibilità punto per punto, una sorta di mantello di Harry Potter, con l'obiettivo di “ingannare” la vista e, equivalentemente, la mappa Dirichlet-To-Neumann. Nello specifico vogliamo che questo guscio faccia in modo che la mappa Λ_σ ad esso associata sia la stessa della mappa Λ_1 associata, ad esempio, all'aria. Così facendo renderemo l'oggetto posto dentro al guscio, nonché il guscio stesso, assolutamente indistinguibili dall'aria e di conseguenza, quando immerso nell'aria, assolutamente invisibile.

In particolare nel Capitolo 2 sfrutteremo il teorema sull'invarianza per cambio di variabili della mappa Dirichlet-To-Neumann per costruire una prima versione del cloaking, quello che chiameremo non singolare. Questo non renderà gli oggetti invisibili, ma solo più “piccoli”, in un senso che verrà precisato meglio. Stimeremo poi la bontà di questa soluzione ottenendo così la garanzia di poter nascondere l'oggetto a qualsiasi livello di precisione fissato.

Nel Capitolo 3 porteremo avanti in modo rigoroso il limite per ottenere quello che chiameremo cloaking singolare. Nel limite alcune delle ipotesi precedentemente assunte smetteranno di valere, ad esempio la positività e finitezza della conducibilità, e quindi non potremo più usare alcuni dei risultati precedenti. Adotteremo quindi un approccio differente, prima mostrando la totale necessità di infrangere le ipotesi sopracitate e poi dimostrando l'effettiva efficacia del metodo proposto.

Vedremo infine che questa restrizione ai soli campi statici non sarà limitativa, in quanto i ragionamenti fatti per σ si applicheranno in modo pressoché analogo anche a ϵ e μ e quindi risulterà abbastanza facile estendere i risultati ottenuti a tutta l'elettrodinamica.

INTRODUZIONE

Capitolo 1

Il problema inverso di Calderón

1.1 Mappa Dirichlet-To-Neumann

Siano qui e nel seguito $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una regione limitata e $\sigma(x) \forall x \in \Omega$ una condicibilità elettrica, in generale una funzione a valori matriciali simmetrici, cioè tale che $\sigma(x)^T = \sigma(x)$ per ogni $x \in \Omega$, e tale che $\sigma(x)$ sia semidefinita positiva. Il campo elettrico E e la corrente J rispettano la relazione

$$J = \sigma E.$$

Detto u il potenziale elettrico, vale

$$E = -\nabla u,$$

e quindi

$$J = -\sigma \nabla u.$$

Se la carica elettrica è conservata, come deve essere se non ci sono sorgenti all'interno di Ω , abbiamo $\nabla \cdot J = 0$.

Otteniamo quindi

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

in forma esplicita

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.1)$$

Se σ è una costante diversa da 0, cioè quando Ω è “vuoto” (i.e. è isotropo e omogeneo) e senza cariche, la (1.1) si semplifica all'equazione di Laplace $\Delta u = 0$.

In assenza di sorgenti di carica, fissata σ , se imponiamo condizioni al bordo di Dirichlet, cioè il potenziale $u|_{\partial\Omega} = f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}.$$

Analogamente se imponiamo condizioni al bordo di Neumann, cioè la derivata co-normale del potenziale $\sigma \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, con \mathbf{n} vettore ortogonale a $\partial\Omega$, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega \\ (\sigma \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = g \end{cases}.$$

In entrambi i casi il teorema di Lax-Milgram ci garantisce che la soluzione per il potenziale u esiste ed è unica quando σ è definita positiva e finita, cioè $\sigma_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ed esiste $c > 0$ tale che $\sum_{i,j} \sigma_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c \sum_k |\xi_k|^2$ per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\xi \in R^n$.

Possiamo di conseguenza definire la mappa Dirichlet-To-Neumann

$$\Lambda_\sigma : u|_{\partial\Omega} \longmapsto (\sigma \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}, \quad (1.2)$$

che associa ad un arbitrario potenziale al contorno, le condizioni di Dirichlet, la rispettiva corrente ortogonale al contorno risultante.

1.2 Tomografia ad Impedenza Elettrica

Il problema inverso di Calderón, che costituisce il fondamento matematico della Tomografia ad Impedenza Elettrica (EIT), ampiamente trattata in [4], si chiede quando e come una sconosciuta distribuzione di conducibilità σ all'interno di un dominio in \mathbb{R}^n possa essere determinata da sole misurazioni di potenziale e corrente sul bordo. Nella notazione precedente questo problema si può porre come: data la mappa Dirichlet-To-Neumann, si può ricavare la conducibilità σ associata? Più precisamente, la mappa

$$\mathcal{C} : \Lambda_\sigma \longrightarrow \sigma$$

è ben definita? La risposta, come vedremo nei prossimi capitoli, è in generale negativa.

Alberto Pedro Calderón si pose questo problema originariamente per motivi geofisici. Nel 1947, prima di iniziare la sua brillante carriera di matematico, Calderón ottenne un lavoro nel laboratorio di ricerca dell'Argentinian state

oil company. Pare che all'epoca avesse già formulato il problema che oggi porta il suo nome, ma non pubblicò i suoi risultati fino a trenta anni dopo.

Una delle applicazioni maggiormente studiate ad oggi è la tecnica dell'Electrical Impedance Tomography. Viene utilizzata in medicina per controllare l'attività polmonare, rilevare tumori al seno e, in rari casi, controllare l'attività cerebrale. Nello specifico si utilizza l'approccio equivalente, ma più facilmente realizzabile in pratica, di imporre una corrente al contorno, e.g. tramite elettrodi, per poi misurare il potenziale risultante. In particolare vengono sfruttate le particolari conducibilità di aria nei polmoni, $\sigma \approx 0$, e di cellule tumorali, σ circa 10 volte maggiore rispetto alle cellule sane. Ad esempio Isaacson, Muller, Newell e Siltanen in [5] hanno ricostruito tramite questa tecnica le immagini di un cuore umano durante un intero ciclo cardiaco.

Vediamo un esempio esplicito in dimensione due. Supponiamo che σ sia isotropo, cioè a valori scalari, i.e. senza direzioni privilegiate, e di una forma particolare, così da rendere agevoli i conti esplicativi. Sia $\Omega = B_1(0)$, dove $B_r(p)$ indica la palla di raggio r e centro p . Per $\alpha \geq 0$ e $0 < \rho < 1$ supponiamo una conducibilità

$$\sigma_{\alpha,\rho}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in B_\rho(0) \\ 1 & \text{se } x \in B_1(0) \setminus B_\rho(0) \end{cases}, \quad (1.3)$$

cioè mettiamo una palla di raggio ρ di materiale con conducibilità α all'interno di un materiale conduttore omogeneo e isotropo. Assunto questo è assegnato il valore di α , il nostro obiettivo è trovare ρ e di conseguenza $\sigma_{\alpha,\rho}$ a partire da Λ_σ . Per risolvere il potenziale nell'anello $B_1(0) \setminus B_\rho(0)$ è conveniente scrivere l'equazione di Laplace in coordinate polari

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad (1.4)$$

dove $u = u(r, \theta)$ è il potenziale nell'anello. Usando (1.4) è lineare verificare che le funzioni 1 , $\ln r$ e $r^{|k|} e^{ik\theta}$, $r^{-|k|} e^{ik\theta}$ per $k \in \mathbb{Z}$ sono armoniche per $r > 0$ e quindi nell'anello $B_1(0) \setminus B_\rho(0)$. Costruiremo le soluzioni rilevanti come sovrapposizione di queste funzioni, cioè

$$u(r, \theta) = c_0 + d_0 \ln r + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (c_k r^{|k|} + d_k r^{-|k|}) e^{ik\theta}, \quad (1.5)$$

scegliendo opportuni c_k e d_k .

Le condizioni al bordo di Dirichlet $f = u|_{\partial\Omega}$ si traducono in coordinate polari in $u(1, \theta) = f(\theta)$, cioè

$$c_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (c_k + d_k) e^{ik\theta} = f(\theta) \quad \text{per } \theta \in [0, 2\pi), \quad (1.6)$$

che è esattamente l'estensione in serie di Fourier di f , quando questa converge. Supponiamo quindi che f sia continua e C^1 a tratti, cosicchè la sua serie di Fourier converga punto per punto, possiamo quindi scrivere f come

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{ik\theta}, \quad \text{dove } f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Facendo combaciare i coefficienti f_k con i corrispondenti termini in (1.6) otteniamo

$$\begin{aligned} c_0 &= f_0 \\ c_k + d_k &= f_k \quad \text{per } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Imposte le condizioni al bordo esterno dell'anello ci mancano da imporre le condizioni al bordo interno, queste ovviamente dipenderanno dal valore di α . Consideriamo solo i due casi estremi $\alpha = 0$ e $\alpha = \infty$ perché, come vedremo, questi saranno sufficienti a dare un bound sia dall'alto che dal basso a tutti i casi di nostro interesse.

Caso $\alpha = 0$ Avendo scelto un disco di materiale perfettamente isolante, dobbiamo imporre che non ci siano correnti che attraversano la superficie interna, cioè $\frac{\partial u}{\partial r}(x) = 0$ per $x \in \partial B_\rho(0)$. Deriviamo quindi la (1.5) rispetto ad r e valutiamo in $r = \rho$, otteniamo

$$\frac{d_0}{\rho} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k|(c_k \rho^{|k|-1} - d_k \rho^{-|k|-1}) e^{ik\theta} = 0 \quad \text{per } \theta \in [0, 2\pi), \quad (1.8)$$

che può essere interpretata come la serie di Fourier della funzione 0, i quali coefficienti di Fourier sono tutti 0, cioè

$$\begin{aligned} d_0 &= 0 \\ (c_k \rho^{|k|-1} - d_k \rho^{-|k|-1}) &= 0 \quad \text{per } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Risolvendo (1.7) e (1.9) per c_k e d_k e sostituendo i risultati in (1.5) otteniamo la soluzione esplicita del potenziale all'equazione di Laplace nell'anello con condizioni al bordo assegnate

$$u(r, \theta) = f_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{f_k}{1 + \rho^{2|k|}} r^{|k|} + \frac{\rho^{2|k|} f_k}{1 + \rho^{2|k|}} r^{-|k|} \right) e^{ik\theta}, \quad (1.10)$$

da cui, derivando, possiamo facilmente calcolare le condizioni di Neumann risultanti

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k| \frac{1 - \rho^{2|k|}}{1 + \rho^{2|k|}} f_k e^{ik\theta}, \quad (1.11)$$

che rappresenta esplicitamente le condizioni di Neumann ottenute in funzione del potenziale al bordo imposto, cioè rappresenta esplicitamente la mappa Λ_σ in funzione di ρ , come volevamo.

Ad esempio, se imponiamo condizioni di Dirichlet $f = \cos(\theta)$ si ha $f_1 = f_{-1} = 1/2$ e $f_k = 0$ per $k \neq \pm 1$ e quindi

$$\Lambda_{0,\rho}(\cos(\theta)) = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2} \cos(\theta).$$

Caso $\alpha = \infty$ Avendo scelto un disco di materiale perfettamente conduttore, in questo caso, dobbiamo imporre che il potenziale sia costante sulla superficie interna, cioè $u(x) = c$ per $x \in \partial B_\rho(0)$ per un'opportuna costante c , e che non ci siano scambi di cariche tra le due regioni, cioè $\int_{\partial B_\rho(0)} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$.

La seconda condizione si traduce in

$$\int_0^{2\pi} \frac{d_0}{\rho} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k| (c_k \rho^{|k|-1} - d_k \rho^{-|k|-1}) e^{ik\theta} d\theta = 2\pi \frac{d_0}{\rho} = 0,$$

cioè abbiamo $d_0 = 0$.

La prima condizione si impone valutando la (1.5) in $r = \rho$, che può quindi essere interpretata come la trasformata di Fourier della funzione costante. Otteniamo così

$$c = f_0 \\ (c_k \rho^{|k|-1} + d_k \rho^{-|k|-1}) = 0 \quad \text{per } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Grazie a queste, analogamente al caso precedente, otteniamo la soluzione esplicita del potenziale all'equazione di Laplace nell'anello con condizioni al bordo assegnate

$$u(r, \theta) = f_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{f_k}{1 - \rho^{2|k|}} r^{|k|} - \frac{\rho^{2|k|} f_k}{1 - \rho^{2|k|}} r^{-|k|} \right) e^{ik\theta}, \quad (1.12)$$

da cui, come prima, possiamo calcolare le condizioni di Neumann risultanti

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k| \frac{1 + \rho^{2|k|}}{1 - \rho^{2|k|}} f_k e^{ik\theta}. \quad (1.13)$$

Ad esempio, se imponiamo condizioni di Dirichlet $f = \cos(\theta)$ si ha $f_1 = f_{-1} = 1/2$ e $f_k = 0$ per $k \neq \pm 1$ e quindi

$$\Lambda_{\infty,\rho}(\cos(\theta)) = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \cos(\theta).$$

In questi casi particolari siamo quindi riusciti ad esprimere esplicitamente la mappa Dirichlet-To-Neumann. Evidenziamo però il fatto che abbiamo supposto che σ fosse ovunque isotropo, questo, come vedremo, risulterà fondamentale.

1.3 Invarianza per cambio di variabili

L'obiettivo di questo paragrafo è mostrare che, tolta l'ipotesi di isotropia della conducibilità σ , non è possibile determinare univocamente quest'ultima a partire dalla sola conoscenza di Λ_σ .

In particolare vogliamo mostrare il seguente teorema, riguardo l'invarianza per cambio di variabili della mappa Dirichlet-To-Neumann

Teorema 1. *Sia $F : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$ un diffeomorfismo C^1 tale che $F|_{\partial\Omega} = Id$*

Sia $\tilde{\sigma}$ il push-forward di σ tramite F

$$\tilde{\sigma}(y) := F_*\sigma(y) = \left. \frac{(DF(x))^T \sigma(x) (DF(x))}{\det(DF(x))} \right|_{x=F^{-1}(y)},$$

allora vale

$$\Lambda_{\tilde{\sigma}} = \Lambda_\sigma,$$

cioè le due conducibilità sono assolutamente indistinguibili tramite sole misurazioni esterne.

Prima di dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari.

Definizione. Data una conducibilità $\sigma(x)$ e un potenziale $u \in H^1$ su Ω , definiamo la potenza

$$\mathcal{P}_\sigma(u) := \int_{\Omega} \langle \vec{J}(x), \vec{E}(x) \rangle dx = \int_{\Omega} \langle \sigma \nabla u, \nabla u \rangle dx,$$

dove $\vec{J}(x)$ e $\vec{E}(x)$ sono rispettivamente la densità di corrente elettrica e il campo elettrico. Fisicamente \mathcal{P} rappresenta l'energia per unità di tempo necessaria a mantenere lo stato.

Nel seguito saremo interessati a soluzioni ad energia finita ed è chiaro che questo accade quando

$$f \in H^{1/2}(\partial\Omega) = \{f \in L^2(\partial\Omega) : f = v|_{\partial\Omega} \text{ per qualche } v \in H^1(\Omega)\}.$$

Notiamo che $\mathcal{P}_\sigma(u) \geq 0$ per ogni u in quanto $\sigma(x)$ è una matrice semidefinita positiva per ogni $x \in \Omega$. Dimostriamo inoltre che \mathcal{P} è convessa, per farlo adottiamo la notazione $P(u, v) := \int_\Omega \langle \sigma \nabla u, \nabla v \rangle$ e prendiamo un $0 < \lambda < 1$. Le seguenti condizioni sono equivalenti

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda u + (1 - \lambda)v) &\leq \lambda \mathcal{P}(u) + (1 - \lambda) \mathcal{P}(v) \\ \lambda^2 P(u, u) + (1 - \lambda)^2 P(v, v) + 2\lambda(1 - \lambda)P(u, v) &\leq \lambda P(u, u) + (1 - \lambda)P(v, v) \\ \lambda^2 P(u, u) + \lambda^2 P(v, v) - 2\lambda P(v, v) + 2\lambda(1 - \lambda)P(u, v) &\leq \lambda P(u, u) - \lambda P(v, v) \\ (\lambda^2 - \lambda)P(u, u) + (\lambda^2 - \lambda)P(v, v) + 2(\lambda - \lambda^2)P(u, v) &\leq 0 \\ (\lambda^2 - \lambda)(P(u, u) + P(v, v) - 2P(u, v)) &\leq 0 \\ (\lambda^2 - \lambda)\mathcal{P}(u - v) &\leq 0, \end{aligned}$$

e l'ultima condizione è ovviamente sempre rispettata.

Lemma. Data $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ le seguenti condizioni su u sono equivalenti:

- $\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases},$
- $\mathcal{P}_\sigma(u) = \min_{v|_{\partial\Omega}=f} \mathcal{P}_\sigma(v),$

cioè u che risolve (1.1) è lo stesso che minimizza la potenza in H^1 .

Dimostrazione. Essendo \mathcal{P} una funzione convessa si ha che il minimo coincide con il punto i cui tutte le derivate direzionali si annullano, cioè se vale che

$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\phi|_{\partial\Omega} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= D\mathcal{P}_\sigma(u)[\phi] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}_\sigma(u + \epsilon\phi) - \mathcal{P}_\sigma(u)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \frac{\langle \sigma \nabla(u + \epsilon\phi), \nabla(u + \epsilon\phi) \rangle - \langle \sigma \nabla u, \nabla u \rangle}{\epsilon} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \frac{2\epsilon \langle \sigma \nabla u, \nabla \phi \rangle - \epsilon^2 \langle \sigma \nabla \phi, \nabla \phi \rangle}{\epsilon} dx \\ &= \int_\Omega \langle \sigma \nabla u, \nabla \phi \rangle dx. \end{aligned}$$

Inoltre essendo ϕ nulla sul bordo si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \phi \sigma \nabla u dS \\ &= \int_\Omega \nabla \cdot (\phi \sigma \nabla u) dx \\ &= \int_\Omega \langle \sigma \nabla u, \nabla \phi \rangle dx + \int_\Omega \phi \nabla \cdot (\sigma \nabla u) dx, \end{aligned}$$

cioè vale

$$\int_\Omega \langle \sigma \nabla u, \nabla \phi \rangle dx = - \int_\Omega \phi \nabla \cdot (\sigma \nabla u) dx.$$

Quindi la condizione di minimo della potenza è equivalente a

$$\int_\Omega \phi \nabla \cdot (\sigma \nabla u) dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

e per il teorema fondamentale del calcolo delle variazioni otteniamo

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

cioè la prima condizione. \square

Grazie al lemma appena dimostrato sappiamo che la soluzione u di (1.1) con condizioni di Dirichlet f è anche quella che minimizza la potenza necessaria a mantenere il potenziale al contorno.

Definizione. Assegnato un parametro $\sigma(x)$ definito su tutto Ω definiamo la forma bilineare $Q_\sigma : H^{1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$Q_\sigma(f, g) := \int_{\partial\Omega} f \Lambda_\sigma(g) dS,$$

dove il prodotto di dualità è ben definito perché $\Lambda_\sigma(g) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

La mappa Dirichlet-To-Neumann è lineare per il principio di sovrapposizione e quindi la forma Q_σ appena definita risulta effettivamente una forma bilineare.

Da questa discende banalmente la forma quadratica $\mathcal{Q}_\sigma(f) := Q_\sigma(f, f)$. Notiamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\sigma(f) &= \int_{\partial\Omega} f \Lambda_\sigma(f) dS \\ &= \int_{\partial\Omega} u \langle \sigma \nabla u, \mathbf{n} \rangle dS \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (u \sigma \nabla u) dx \\ &= \int_{\Omega} \langle \nabla u, \sigma \nabla u \rangle dx + \int_{\Omega} u \underbrace{\nabla \cdot (\sigma \nabla u)}_{=0} dx = \mathcal{P}_\sigma(u) = \min_{v|_{\partial\Omega}=f} \mathcal{P}_\sigma(v).\end{aligned}$$

Cioè $\mathcal{Q}_\sigma(f)$ corrisponde al minimo della potenza al variare di tutti i potenziali $v \in H^1(\Omega)$ con condizioni al bordo f assegnate.

Lemma. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto e siano σ e η due conducibilità su Ω .

Vale

$$\mathcal{Q}_\sigma = \mathcal{Q}_\eta \iff \Lambda_\sigma = \Lambda_\eta.$$

Dimostrazione. L'implicazione (\Leftarrow) è banale in quanto la conoscenza di Λ_σ determina, per definizione, la conoscenza di \mathcal{Q}_σ .

Quanto all'altra implicazione notiamo che, essendo Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , l'ipotesi di compattezza implica che anche la frontiera $\partial\Omega$ sia compatta, e quindi si ha che $C^\infty(\partial\Omega) \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$. Ricordando la formula di polarizzazione

$$\int_{\partial\Omega} f \Lambda_\sigma g dS = Q_\sigma(f, g) = \frac{\mathcal{Q}_\sigma(f+g) - \mathcal{Q}_\sigma(f-g)}{4}, \quad (1.14)$$

possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo delle variazioni facendo variare f tra le $\phi \in C_0^\infty(\partial\Omega)$. Di conseguenza la conoscenza di $Q_\sigma(\phi, g)$ per ogni ϕ determina la conoscenza di $\Lambda_\sigma(g)$, e questo vale per ogni $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Quindi la conoscenza di \mathcal{Q}_σ determina la conoscenza di Λ_σ , questo conclude la dimostrazione del lemma. \square

Vediamo ora come si comporta l'espressione della potenza con un cambio di variabili.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_\sigma(u) &= \int_{\Omega} \langle \sigma \nabla_x u, \nabla_x u \rangle dx \\
 &= \int_{\Omega} \sum \sigma_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \\
 &= \int_{\Omega} \sum \sigma_{ij} \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \det \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) dy \\
 &= \int_{\Omega} \sum \sigma_{ij} DF(x) \frac{\partial u}{\partial y_i} DF(x) \frac{\partial u}{\partial y_j} \det (DF(x)) dy \\
 &= \int_{\Omega} \langle F_* \sigma(y) \nabla_y u, \nabla_y u \rangle dy \\
 &= \mathcal{P}_{F_* \sigma}(u \circ F),
 \end{aligned}$$

dove $F_* \sigma$ è il push-forward di σ tramite F , come nelle ipotesi del lemma.

Notiamo inoltre che se $F(p) = p$ vale $\forall p \in \partial\Omega$ allora F non cambia le condizioni di Dirichlet, e quindi:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_\sigma(f) &= \int_{\partial\Omega} f \Lambda_\sigma f dS = \min_{u(x)|_{\partial\Omega}=f(x)} \int_{\Omega} \langle \sigma(x) \nabla_x u, \nabla_x u \rangle dx \\
 &= \min_{u(x)|_{\partial\Omega}=f(x)} \int_{\Omega} \langle F_* \sigma(y) \nabla_y u, \nabla_y u \rangle dy \\
 &= \min_{u(y)|_{\partial\Omega}=f(y)} \int_{\Omega} \langle F_* \sigma(y) \nabla_y u, \nabla_y u \rangle dy \\
 &= \int_{\partial\Omega} f \Lambda_{F_* \sigma} f dS \\
 &= \mathcal{Q}_{F_* \sigma}(f).
 \end{aligned}$$

Quindi σ e $F_* \sigma$ determinano la stessa forma quadratica \mathcal{Q} e quindi si ha $\Lambda_\sigma = \Lambda_{F_* \sigma}$, cioè la tesi del teorema.

Abbiamo quindi dimostrato come sia impossibile determinare univocamente σ dalle sole misurazioni al contorno e questo ci conferma una prima risposta negativa alla domanda di Calderón. Nel Capitolo 2 vedremo come sfruttare a nostro vantaggio questa caratteristica.

1.4 Risultati di unicità

Per rispondere alla domanda di Calderón è importante, come già accennato, fare una prima basilare distinzione tra il caso in cui σ sia isotropo, cioè a

valori scalari (i.e. la conducibilità dipende solo dalla posizione), e il caso in cui σ sia anisotropo, cioè a valori matriciali (i.e la conducibilità dipende sia dalla posizione che dalla direzione). Ovviamente un $\sigma(x)$ isotropo può essere considerato come anisotropo identificandolo punto per punto con il multiplo scalare dell'identità $\sigma(x)I_{n \times n}$.

Il caso isotropo è stato largamente studiato in letteratura, attualmente sono noti i seguenti risultati di unicità, il primo per il problema nel piano, il secondo per il problema in dimensione maggiore o uguale a 3.

Il primo teorema, provato da K. Astala e L. Päivärinta in [1] nel 2006, riguarda il caso in dimensione 2.

Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con frontiera regolare, siano σ_1 e σ_2 due conducibilità isotrope, finite e strettamente positive, cioè esistono due costanti positive $C_1, C_2 > 0$ t.c. $C_i^{-1} \leq \sigma_i(x) \leq C_i$ per ogni $x \in \Omega$ per $i = 1, 2$.*

Se vale

$$\Lambda_{\sigma_1} = \Lambda_{\sigma_2}$$

allora

$$\sigma_1 = \sigma_2.$$

Il secondo teorema, provato da J. Sylvester e G. Uhlmann in [10] nel 1987, riguarda il caso in dimensione $n \geq 3$ e richiede l'ipotesi aggiuntiva che σ sia C^2 .

Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$, un dominio con frontiera regolare, siano σ_1 e σ_2 due conducibilità isotrope, finite e strettamente positive, e tali che $\sigma_i \in C^2(\Omega)$ per $i = 1, 2$.*

Se vale

$$\Lambda_{\sigma_1} = \Lambda_{\sigma_2}$$

allora

$$\sigma_1 = \sigma_2.$$

Si nota che da questi teoremi e dal teorema sull'invarianza per cambio di variabili discende immediatamente che se σ è una conducibilità isotropa e \mathcal{F} un diffeomorfismo che fissa il bordo tale che il push-forward $\mathcal{F}_*\sigma$ è anch'esso isotropo, allora necessariamente \mathcal{F} è l'identità.

Nelle nostre intenzioni di nascondere un oggetto, questi teoremi vanno a nostro favore, in quanto se l'osservatore assume che la conducibilità sia isotropa allora avrà la garanzia di trovare una soluzione unica. In altre parole sarà convinto di aver determinato univocamente la conducibilità $\sigma(x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Capitolo 2

Cloaking non singolare

Nella nostra attuale semplificazione l'unica caratteristica rilevante di un materiale è la sua conducibilità $\sigma(x)$ in ciascun punto, conoscere tale conducibilità equivale a conoscere l'oggetto, vedere equivale a scoprire tale conducibilità ovunque operando solo su potenziali e correnti al bordo. Se un oggetto ha la conducibilità, punto per punto, dell'aria allora sarà assolutamente indistinguibile dall'aria stessa.

Spieghiamo ora come utilizzare i risultati precedenti per costruire un primo risultato verso il mantello dell'invisibilità, il cloaking approssimato, ovverosia un dispositivo che renda un oggetto più piccolo e di conseguenza più difficile da individuare.

Per semplicità di esposizione ci riduciamo ad un caso radiale, ma un semplice lemma finale mostrerà che il metodo trattato ha validità ben più generale.

2.1 Ordinamento tra conducibilità

Definiamo innanzitutto una norma che useremo nel seguito per stimare la bontà della soluzione trovata.

Definizione. Sia $\| \cdot \|$ la norma sugli operatori $\Lambda : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ data da

$$\|\Lambda_\sigma\| := \sup \left\{ |\mathcal{Q}_\sigma(f)| : \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Vediamo quindi un primo risultato che lega conducibilità ordinate punto per punto alle rispettive forme quadratiche.

Lemma. Date σ e η conducibilità, cioè funzioni su Ω a valori matriciali simmetrici, allora vale l'implicazione

$$\left. \begin{aligned} \langle \sigma(x)\epsilon, \epsilon \rangle &\leq \langle \eta(x)\epsilon, \epsilon \rangle \\ \forall x \in \Omega, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \right| \implies \mathcal{Q}_\sigma(f) \leq \mathcal{Q}_\eta(f) \quad \forall f \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Dimostrazione. Fissiamo una arbitraria $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, condizioni di Dirichlet, e vediamo l'ordinamento delle immagini tramite \mathcal{Q}_σ e \mathcal{Q}_η .

Siano u e v soluzioni del potenziale per (1.1) rispettivamente con σ e η , cioè

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot (\eta \nabla v) = 0 & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = f \end{cases},$$

e quindi per il lemma del capitolo precedente valgono anche

$$\mathcal{P}_\sigma(u) = \min_{w|_{\partial\Omega}=f} \mathcal{P}_\sigma(w) \quad \mathcal{P}_\eta(v) = \min_{w|_{\partial\Omega}=f} \mathcal{P}_\eta(w).$$

Quindi per ogni f vale

$$\mathcal{Q}_\sigma(f) = \mathcal{P}_\sigma(u) \leq \mathcal{P}_\sigma(v) \leq \mathcal{P}_\eta(v) = \mathcal{Q}_\eta(f),$$

dove la prima disegualanza deriva dalla caratterizzazione di $\mathcal{P}_\sigma(u)$ come minimo, mentre la seconda deriva banalmente dall'ipotesi sulla conducibilità, infatti esplicitando la definizione di \mathcal{P} la disegualanza

$$\langle \sigma(x)\nabla v, \nabla v \rangle \leq \langle \eta(x)\nabla v, \nabla v \rangle$$

vale puntualmente per ogni x e quindi a maggior ragione vale quando integriamo su Ω .

Non avendo supposto alcuna ipotesi aggiuntiva su f , il ragionamento appena fatto vale per ogni $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, e quindi si ha la tesi. \square

2.2 Costruzione

Supponiamo $\Omega = B_2(0) =: B_2$ la nostra regione di spazio sul bordo della quale effettueremo le misure. Il nostro obiettivo sarà nascondere un arbitrario oggetto contenuto in $B_1 := B_1(0)$ mettendo *qualcosa* nel guscio sferico $B_2 \setminus B_1$

che lo avvolge. Possiamo riassumere la situazione supponendo assegnata su B_2 una conducibilità:

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ \mathcal{A}(x) & \text{se } x \in B_2 \setminus B_1 \end{cases},$$

dove $\mathcal{O}(x)$ è la conducibilità dell'oggetto che vogliamo nascondere e $\mathcal{A}(x)$ è l'arbitraria conducibilità del guscio sferico che lo circonda. Supponiamo che $\mathcal{O}(x)$ sia assegnato a priori, poiché chiaramente vogliamo che il nostro mantello possa nascondere qualsiasi oggetto, non che ci sia bisogno di uno specifico mantello per ogni oggetto assegnato. Lasciamo invece libertà nella scelta di $\mathcal{A}(x)$.

L'ovvia domanda che ci poniamo è: quali valori deve assumere $\mathcal{A}(x)$ affinché l'oggetto diventi più difficile da individuare? A priori non è nemmeno ben chiaro cosa significhi “più difficile da individuare”, chiariremo formalmente questo concetto nel seguito, l'idea è che vogliamo che la differenza tra le mappe Dirichlet-To-Neumann associate rispettivamente all'oggetto e al vuoto sia, in norma, prossima a 0.

Detto ciò fissiamo un parametro $\rho > 0$, detta $B_\rho := B_\rho(0)$, consideriamo la seguente funzione radiale $\mathcal{F}_\rho : B_2 \rightarrow B_2$ dipendente da ρ

$$\mathcal{F}_\rho(x) = \begin{cases} \frac{x}{\rho} & \text{se } x \in B_\rho \\ \left(1 + \frac{|x| - \rho}{2 - \rho}\right) \frac{x}{|x|} & \text{se } x \in B_2 \setminus B_\rho \end{cases}.$$

Notiamo che \mathcal{F}_ρ è C^1 a tratti, che $\mathcal{F}_\rho|_{\partial\Omega} = \text{Id}$.

Rendiamola quindi C^1 ovunque aggiungendo una funzione ψ di raccordo, così da poter applicare il Teorema sul cambio di variabili del Capitolo 1.

Sia quindi $\epsilon > 0$ e sia $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$ definita puntualmente da

$$\tilde{\mathcal{F}}_\rho(x) = \begin{cases} \frac{x}{\rho} & \text{se } x \in B_{\rho-\epsilon}(0) \\ \psi(|x|) \frac{x}{|x|} & \text{se } x \in B_\rho \setminus B_{\rho-\epsilon}(0) \\ \left(1 + \frac{|x| - \rho}{2 - \rho}\right) \frac{x}{|x|} & \text{se } x \in B_2 \setminus B_\rho \end{cases},$$

con ϵ abbastanza piccolo e $\psi : [\rho - \epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 che verifica $\psi(\rho - \epsilon) = \frac{\rho - \epsilon}{\rho}$, $\psi(\rho) = 1$, $\psi'(\rho - \epsilon) = \frac{1}{\rho}$, $\psi'(\rho) = \frac{1}{2 - \rho}$, per esempio possiamo prendere un polinomio di quarto grado con opportuni coefficienti.

In tal modo $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$ è C^1 ovunque e continua a valere $\tilde{\mathcal{F}}_\rho|_{\partial\Omega} = Id$. Si nota facilmente inoltre che $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$ mappa la palla di raggio ρ nella palla di raggio 1, evidenziate in grigio nella Figura 2.1.

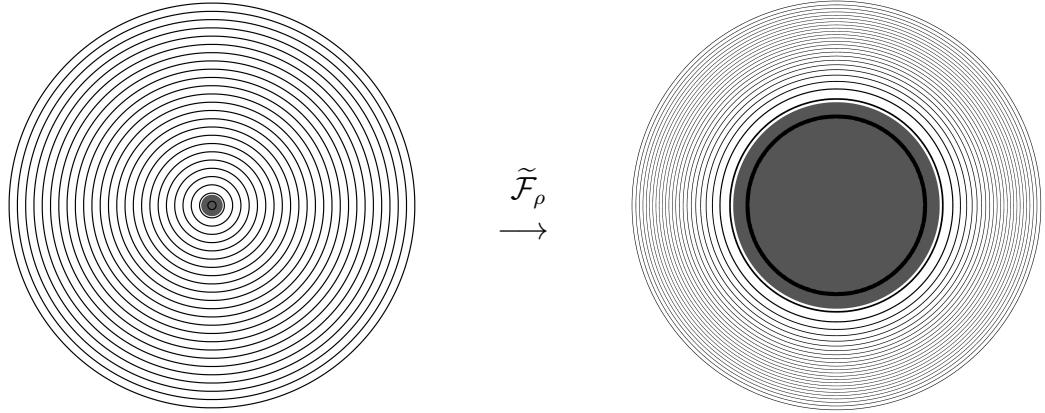


Figura 2.1: Rappresentazione grafica di $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$. A sinistra cerchi concentrici con raggi in progressione aritmetica, a destra le rispettive immagini.

Consideriamo ora la conducibilità $\mathbb{1}(x)$ definita sul guscio sferico $B_2 \setminus B_\rho$ che vale identicamente 1, cioè è isotropa e costante. Consideriamone il push-forward, ovverosia la conducibilità $(\tilde{\mathcal{F}}_\rho|_{B_2 \setminus B_\rho})_* \mathbb{1}(x)$ definita sul guscio sferico $B_2 \setminus B_1$.

Affermiamo quindi che un guscio sferico $B_2 \setminus B_1$ che assume punto per punto tale conducibilità realizza a tutti gli effetti una prima rude versione del mantello di Harry Potter.

Per verificare questa affermazione supponiamo di mettere un qualsiasi oggetto all'interno di tale guscio, questa situazione sarà rappresentabile dalla seguente conducibilità, definita su tutto B_2 e parametrica in $\mathcal{O}(x)$ conducibilità dell'oggetto da nascondere.

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ (\tilde{\mathcal{F}}_\rho|_{B_2 \setminus B_\rho})_* \mathbb{1}(x) & \text{se } x \in B_2 \setminus B_1 \end{cases}. \quad (2.1)$$

Consideriamone adesso il push-forward tramite l'inversa di $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$, anch'essa diffeomorfismo C^1 che fissa $\partial\Omega$

$$(\tilde{\mathcal{F}}_\rho^{-1})_* \sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} (\tilde{\mathcal{F}}_\rho^{-1}|_{B_1})_* \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_\rho \\ \mathbb{1} & \text{se } x \in B_2 \setminus B_\rho \end{cases}. \quad (2.2)$$

Per il Teorema sull’invarianza per cambio di variabili concludiamo che

$$\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}} = \Lambda_{(\tilde{\mathcal{F}}_{\rho}^{-1})_* \sigma_{\mathcal{O}}},$$

cioè le conducibilità $\sigma_{\mathcal{O}}$ e $(\tilde{\mathcal{F}}_{\rho}^{-1})_* \sigma_{\mathcal{O}}$ sono assolutamente indistinguibili tramite sole misurazioni di potenziali e correnti al bordo ∂B_2 . In altre parole la nostra palla di raggio 2 con all’interno il nostro oggetto di raggio 1 apparirà a misurazioni esterne esattamente come una palla vuota, i.e. di materiale isotropo e omogeneo, con solo un piccolo oggetto di raggio ρ posto al centro con conducibilità $(\tilde{\mathcal{F}}_{\rho}^{-1}|_{B_1})_* \sigma_{\mathcal{O}}(x)$.

Notiamo però che, seppur intuitivamente un oggetto più piccolo sia più difficile da individuare, con i risultati attuali non possiamo dire nulla su come questa difficoltà scali al diminuire di ρ . Infatti l’oggetto risultante dal push-forward non sarà l’oggetto di partenza rimpicciolito linearmente, ma una sua deformazione dalle proprietà non ovvie a priori.

2.3 Stima della “bontà” della soluzione

Per capire quanto questo cloaking sia efficace possiamo calcolare quanto la mappa Dirichlet-To-Neumann ad esso associata differisca dalla mappa Dirichlet-To-Neumann associata allo spazio vuoto, i.e. con conducibilità costante e isotropa, senza perdita di generalità $\sigma \equiv 1$.

Per poter svolgere agilmente i conti restringiamoci al caso in dimensione 2 e consideriamo una palla di raggio unitario, in questo contesto avevamo già calcolato la soluzione esplicita per Λ_{σ} nel capitolo dedicato all’EIT. Poste condizioni al bordo di Dirichlet f , ricordiamo le conducibilità $\sigma_{0,\rho}$ e $\sigma_{\infty,\rho}$ usate nel primo capitolo e chiamiamo $\mathbb{1}$ quella isotropa e costante, cioè tale che $\mathbb{1}(x) = 1$ per ogni $x \in B_2$.

$$\sigma_{0,\rho}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B_{\rho} \\ 1 & \text{se } x \in B_1 \setminus B_{\rho} \end{cases} \quad \sigma_{\infty,\rho}(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x \in B_{\rho} \\ 1 & \text{se } x \in B_1 \setminus B_{\rho} \end{cases}.$$

Siano u_0 , $u_{\mathbb{1}}$ e u_{∞} le relative soluzioni per il potenziale a

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma_{0,\rho} \nabla u_0) = 0 \\ u_0|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot (\nabla u_{\mathbb{1}}) = 0 \\ u_{\mathbb{1}}|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot (\sigma_{\infty,\rho} \nabla u_{\infty}) = 0 \\ u_{\infty}|_{\partial\Omega} = f \end{cases}.$$

Con conti analoghi a quelli già svolti nel Capitolo 1 si ricava facilmente che

$$\Lambda_{\mathbb{1}}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| f_k e^{ik\theta}.$$

La differenza tra le immagini delle mappe nei casi limiti e la mappa $\Lambda_{\mathbb{1}}$ è quindi data da

$$\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_{\mathbb{1}}}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k| \frac{-2\rho^{2|k|}}{1 + \rho^{2|k|}} f_k e^{ik\theta}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u_{\infty}}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_{\mathbb{1}}}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k| \frac{2\rho^{2|k|}}{1 - \rho^{2|k|}} f_k e^{ik\theta}. \quad (2.4)$$

Un modo conveniente di misurare tale differenza è calcolarne la norma in $L^2(\partial\Omega)$ utilizzando l'identità di Parseval.

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_{\mathbb{1}}}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{4k^2 \rho^{4|k|}}{(1 + \rho^{2|k|})^2} |f_k|^2,$$

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_{\infty}}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_{\mathbb{1}}}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{4k^2 \rho^{4|k|}}{(1 - \rho^{2|k|})^2} |f_k|^2.$$

Visto che siamo interessati a valori di ρ piccoli, i.e. prossimi a 0, possiamo considerare le stime $\frac{\rho^{4|k|}}{(1+\rho^{2|k|})^2} \leq \frac{\rho^{4|k|}}{(1-\rho^{2|k|})^2} \leq 2\rho^4$ valide per $0 < \rho \leq 1/2$ e $|k| \geq 1$. Grazie a queste stime possiamo limitare dall'alto entrambe le norme L^2 con lo stesso valore

$$16\pi\rho^4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |f_k|^2 = 8\rho^4 \left\| \frac{\partial u_{\mathbb{1}}}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right\|_{L^2(\partial B_1)}^2,$$

dove abbiamo usato di nuovo l'identità di Parseval. Prendendo poi le radici quadrate da entrambi i lati delle diseguaglianze otteniamo che esiste $C > 0$ una costante tale che

$$\left\| \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u_{\mathbb{1}}}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L^2(\partial B_1)} \leq C\rho^2 \left\| \frac{\partial u_{\mathbb{1}}}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L^2(\partial B_1)} \quad (2.5)$$

$$\left\| \frac{\partial u_{\infty}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u_{\mathbb{1}}}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L^2(\partial B_1)} \leq C\rho^2 \left\| \frac{\partial u_{\mathbb{1}}}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L^2(\partial B_1)}, \quad (2.6)$$

cioè

$$\|\Lambda_{\sigma_{0,\rho}}(f) - \Lambda_{\mathbb{1}}(f)\|_{L^2(\partial B_1)} \leq C\rho^2 \|\Lambda_{\mathbb{1}}(f)\|_{L^2(\partial B_1)}$$

$$\|\Lambda_{\sigma_{\infty,\rho}}(f) - \Lambda_{\mathbb{1}}(f)\|_{L^2(\partial B_1)} \leq C\rho^2 \|\Lambda_{\mathbb{1}}(f)\|_{L^2(\partial B_1)}.$$

Questo vale per ogni $f \in L^2(\partial B_1)$ condizioni di Dirichlet imposte, e quindi, sfruttando la linearità della mappa Dirichlet-To-Neumann, otteniamo

$$\|\Lambda_{\sigma_{0,\rho}} - \Lambda_1\|_{L^2} \leq C\rho^2 \|\Lambda_1\|_{L^2}$$

$$\|\Lambda_{\sigma_{\infty,\rho}} - \Lambda_1\|_{L^2} \leq C\rho^2 \|\Lambda_1\|_{L^2},$$

cioè la differenza tra le mappe in norma operatoriale L^2 nel caso del disco in dimensione 2 è limitata dall'alto proporzionalmente a ρ^2 .

Un risultato analogo si può mostrare in dimensione n generica e con qualsiasi dominio Ω sufficientemente regolare utilizzando la norma discendente dalla forma quadratica sopra definita, cioè per ogni $n \geq 2$ esiste $C > 0$ una costante tale che

$$\|\Lambda_{\sigma_{0,\rho}} - \Lambda_1\| \leq C\rho^n \|\Lambda_1\|$$

$$\|\Lambda_{\sigma_{\infty,\rho}} - \Lambda_1\| \leq C\rho^n \|\Lambda_1\|.$$

Adesso, ricordando la $\sigma_{\mathcal{O}}(x)$ definita in (2.1) risulta evidente che

$$\langle \sigma_{0,\rho}(x)\epsilon, \epsilon \rangle \leq \langle (\tilde{\mathcal{F}}_{\rho}^{-1})_* \sigma_{\mathcal{O}}(x)\epsilon, \epsilon \rangle \leq \langle \sigma_{\infty,\rho}(x)\epsilon, \epsilon \rangle \quad \forall x \in \Omega, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^n.$$

E quindi per il Lemma sull'ordinamento tra conducibilità abbiamo

$$\langle \Lambda_{\sigma_{0,\rho}} f, f \rangle \leq \langle \Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}} f, f \rangle \leq \langle \Lambda_{\sigma_{\infty,\rho}} f, f \rangle \quad \forall f \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Sottraendo $\langle \Lambda_1 f, f \rangle$ a tutti i membri, sfruttando la linearità del prodotto scalare, otteniamo

$$\langle (\Lambda_{\sigma_{0,\rho}} - \Lambda_1) f, f \rangle \leq \langle (\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}} - \Lambda_1) f, f \rangle \leq \langle (\Lambda_{\sigma_{\infty,\rho}} - \Lambda_1) f, f \rangle \quad \forall f \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

E quindi, per le stime fatte prima sui casi limite $\sigma_{0,\rho}$ e $\sigma_{\infty,\rho}$, vale

$$-C\rho^n \|\Lambda_1\| \leq \langle (\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}} - \Lambda_1) f, f \rangle \leq C\rho^n \|\Lambda_1\|,$$

da cui

$$\|\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}} - \Lambda_1\| \leq C\rho^n \|\Lambda_1\|, \tag{2.7}$$

per ogni conducibilità $\mathcal{O}(x)$ assegnata su B_1 .

In sostanza, se l'oggetto posto al centro del nostro dominio è piccolo la differenza nei dati di Neumann sarà piccola, proporzionalmente al volume dell'oggetto stesso, cioè $C\rho^n$.

In conclusione se l'osservatore fa le sue misurazioni in precisione finita e noi conosciamo un bound dal basso di tale precisione allora possiamo rendergli invisibile qualsiasi oggetto scegliendo un ρ sufficientemente piccolo.

2.4 Studio degli autovalori

La mappa \mathcal{F}_ρ considerata è radiale e può quindi essere scritta come

$$\mathcal{F}_\rho(x) = \frac{\mathcal{R}_\rho(\|x\|)}{\|x\|}x.$$

Sfruttando la sua particolare forma possiamo calcolare esplicitamente la matrice $(\mathcal{F}_\rho)_*\mathbb{1}(x)$, in particolare siamo interessati ai suoi autovettori ed autovalori. Ci mettiamo in dimensione 2 ed utilizziamo le coordinate polari.

$$\mathcal{F}_\rho((r, \theta)) = (\mathcal{R}_\rho(r), \theta).$$

Esplicitando il differenziale otteniamo

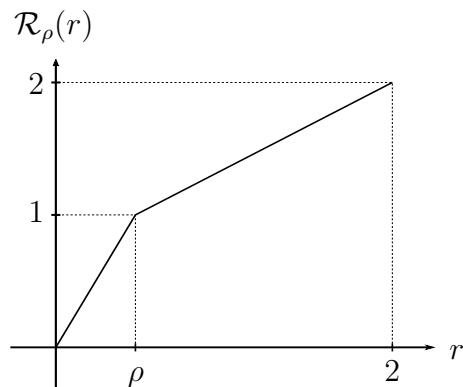
$$D\mathcal{F}_\rho((r, \theta)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial r} & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_\theta}{\partial r} & \frac{\partial \mathcal{F}_\theta}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}'_\rho(r) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dal quale è facile ricavare la forma esplicita di $\mathcal{F}_*\mathbb{1}((r, \theta))$ per $0 < r < 2$ sapendo che $\mathbb{1}(r, \theta)$ vale identicamente 1

$$(\mathcal{F}_\rho)_*\mathbb{1}((r, \theta)) = \frac{(D\mathcal{F}_\rho)^T(D\mathcal{F}_\rho)}{\det(D\mathcal{F}_\rho)} \circ \mathcal{F}_\rho^{-1}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}'_\rho(\mathcal{R}_\rho^{-1}(r)) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathcal{R}'_\rho(\mathcal{R}_\rho^{-1}(r))} \end{pmatrix}.$$

Notiamo che le due matrici, in coordinate polari, sono già in forma diagonale. Questo ci dice che \hat{r} e $\hat{\theta}$ sono una base di autovettori in ogni punto del dominio.

A questo punto tutto dipende dalla scelta specifica di $\mathcal{R}_\rho(r)$, sapendo che deve essere $C^1([0, 2])$ e che deve valere $\mathcal{R}_\rho(2) = 2$ e $\mathcal{R}_\rho(\rho) = 1$, cioè



a meno di piccole modifiche intorno a $r = \rho$ per renderla differenziabile.

Risulta evidente che più piccolo scegliamo ρ e maggiore sarà $\mathcal{R}'_\rho(r)$ per valori di r prossimi a 0. Di conseguenza gli autovalori, che dipendono uno direttamente e l'altro inversamente da \mathcal{R}'_ρ , andranno rispettivamente a 0 e $+\infty$ nel limite di ρ infinitesimo.

Con conti analoghi, che svolgeremo più in dettaglio nel seguito per il caso limite, si può mostrare che in dimensione $n \geq 3$ gli autovalori convergono a 0 in direzione radiale e ad una quantità finita in tutte le direzioni tangenziali.

Capitolo 3

Cloaking singolare

Considerati i risultati precedenti viene quasi naturale considerare il limite per $\rho \rightarrow 0$, così da rendere davvero l'oggetto completamente invisibile.

Obiettivo del cloaking singolare è fare in modo che la mappa Dirichlet-To-Neumann Λ_{σ_O} sia completamente indipendente dalla conducibilità $O(x)$, cioè nascondere l'oggetto completamente, ad ogni livello di precisione di misura dell'osservatore.

Un primo ostacolo che incontriamo è nel limite degli autovalori, appena calcolati in funzione di ρ ,

$$\lambda_1 = \mathcal{R}'_\rho(\mathcal{R}_\rho^{-1}(r)) \quad \lambda_2 = \frac{1}{\mathcal{R}'_\rho(\mathcal{R}_\rho^{-1}(r))},$$

dove \mathcal{R}_ρ è la funzione che mappa $[0, \rho]$ in $[0, 1]$ e mappa $[\rho, 2]$ in $[1, 2]$.

Nel limite infatti questi vanno a 0 radialmente e a ∞ tangenzialmente. Sappiamo che valori di σ uguali a 0 e a ∞ corrispondono rispettivamente a un materiale perfettamente isolante e a un materiale perfettamente conduttore, l'anisotropia si traduce quindi nella necessità di un materiale che sia un perfetto isolante in una direzione e un perfetto conduttore in un'altra direzione. Questo, benché sia matematicamente trattabile in modo rigoroso, non è ancora assolutamente realizzabile nella pratica, per ora. Scegliamo di ignorare questo grosso problema costruttivo e di concentrarci sull'aspetto matematico.

Il problema costruttivo, però, non è l'unico problema, infatti nella dimostrazione dell'invarianza per cambio di variabili della mappa Dirichlet-To-Neumann si è usato in modo cruciale che \mathcal{F} fosse un diffeomorfismo $\overline{B_2} \rightarrow \overline{B_2}$,

questa ipotesi smette valere nel caso singolare. Quindi non possiamo più utilizzare quel risultato. Ciò significa che dobbiamo adottare un approccio differente per studiare in modo rigoroso il caso singolare.

3.1 Condizioni necessarie

Mostriamo in questa sezione che il divergere degli autovalori di σ nel limite per $\rho \rightarrow 0$ evidenziato nel capitolo precedente non era semplicemente conseguenza di una specifica funzione \mathcal{F} mal scelta, ma si rivela in realtà una caratteristica assolutamente necessaria per la realizzabilità del cloaking perfetto.

Abbiamo mostrato, nel Capitolo 1, l'invarianza delle mappe Dirichlet-To-Neumann per cambio di variabili. Avendo questo risultato, il nuovo problema inverso di Calderón che viene naturale porsi è se questa sia l'unica invarianza possibile. In altre parole, se due conducibilità danno luogo alle stesse mappe Dirichlet-To-Neumann, deve necessariamente esistere un diffeomorfismo tra loro? Questo problema, nella sua forma più generale, è tutt'ora aperto.

Se però imponiamo la condizione aggiuntiva che σ sia strettamente positiva e finita, cioè che esista una costante positiva $c > 0$ t.c. $c^{-1}x \leq \sigma(x) \leq cx$ per ogni $x \in \Omega$ allora sono noti alcuni risultati in letteratura.

Con questa ipotesi risulta conveniente vedere il problema in una formulazione geometrica, in particolare data l'invarianza per cambio di variabili è naturale considerare una varietà Riemanniana n -dimensionale (M, g) con frontiera ∂M abbastanza regolare. Il tensore metrico è definito in ogni sistema di coordinate locali come una matrice $g_{ij}(x)$ simmetrica e definita positiva.

L'operatore analogo a (1.1) in questo contesto è l'operatore di Laplace-Beltrami, definito da

$$\Delta_g u = \sum_{j,k=1}^n \det(g)^{1/2} \partial_j (\det(g)^{-1/2} g^{jk} \partial_k u), \quad (3.1)$$

e quindi la mappa Dirichlet-To-Neumann è definita risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{in } M \\ u|_{\partial M} = f \end{cases}.$$

L'operatore analogo a Λ_σ è, in forma esplicita

$$\Lambda_g(f) = \det(g)^{-1/2} \sum_{j,k=1}^n \nu_j g^{jk} \partial_k u|_{\partial M},$$

con ν il vettore unitario ortogonale a ∂M .

Ora un diffeomorfismo $\Psi : M \rightarrow M$ che fissa ∂M definisce un'isometria, cioè una mappa che preserva le distanze. Risultati noti in letteratura cercano quindi di generalizzare il problema originale ponendolo come: la mappa Λ_g determina la varietà Riemanniana (M, g) a meno di isometria?

Per domini in dimensione due, J. Sylvester [9] ha dimostrato, usando coordinate isoterme che si può ricondurre il problema anisotropo a quello isotropo, in particolare grazie a queste coordinate si può determinare un diffeomorfismo grazie al quale il push-forward diventa una conducibilità isotropa. Combinando questo risultato con quello, già citato, di K. Astala e L. Päiväranta [1] sul caso isotropo, otteniamo il seguente risultato:

Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con frontiera C^3 , siano $\sigma_1, \sigma_2 \in C^3(\Omega)$ due conducibilità anisotrope, finite e strettamente positive.*

Se vale

$$\Lambda_{\sigma_1} = \Lambda_{\sigma_2}$$

allora esiste un diffeomorfismo $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \Omega$ con $\mathcal{F}|_{\partial\Omega} = Id$ tale che

$$\sigma_1 = F_* \sigma_2.$$

Quanto al caso in dimensione $n \geq 3$, nel 1989 J. Lee e G. Uhlmann hanno mostrato in [6] che vale

Teorema. *Sia \overline{M} una n -varietà compatta, connessa e analitica, $n \geq 3$, con frontiera ∂M analitica e sia g una metrica analitica su M . Allora la mappa Λ_g determina univocamente la varietà Riemanniana (M, g) a meno di isometria.*

In sostanza, sotto buone ipotesi di regolarità, con σ finito e positivo, si riesce sempre a determinare la conducibilità a meno di diffeomorfismo. Questo risultato ha profonde implicazioni sulla realizzabilità del cloaking, in particolare ci dice che l'ipotesi che σ sia finito e positivo rende il cloaking perfetto a tutti gli effetti impossibile.

Questa considerazione si può esplicare facilmente. Notiamo che nel cloaking perfetto, in cui l'oggetto è completamente invisibile, la mappa Dirichlet-To-Neumann deve essere assolutamente indipendente dalla conducibilità $\mathcal{O}(x)$ dell'oggetto stesso. Supponiamo quindi di avere due arbitrari oggetti distinti con \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 le rispettive conducibilità, i due teoremi appena enunciati ci

garantiscono l'esistenza di un diffeomorfismo \mathcal{F} che lega le due conducibilità tramite push-forward. Ma questo è ovviamente impossibile in generale essendo i due oggetti completamente arbitrari, una ciambella non sarà mai diffeomorfa ad una palla.

3.2 Costruzione

Accettato il fatto che dovremo obbligatoriamente utilizzare σ non strettamente positive e finite ovunque, vediamo come si può realizzare in modo rigoroso un cloaking perfetto. Cominciamo facendo il limite puntuale per $\rho \rightarrow 0$ nella \mathcal{F} definita prima. Questo limite esiste ovunque ad esclusione del punto 0, otteniamo così una funzione definita da $\overline{B}_2 \setminus \{0\}$ a $\overline{B}_2 \setminus \overline{B}_1$

$$\mathcal{F}(x) := \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{F}_\rho(x) = \left(1 + \frac{|x|}{2}\right) \frac{x}{|x|}.$$

Questa non è più un diffeomorfismo di \overline{B}_2 in se, infatti non è nemmeno ben definita per il punto 0, e quindi a priori non possiamo dire nulla sulla mappa Dirichlet-To-Neumann risultante dalla conducibilità $\mathcal{F}_*\mathbb{1}$.

Vediamo ora due teoremi che ci garantiranno un risultato positivo.

Teorema 2. *Sia $\mathcal{F} : \overline{B}_2 \setminus \{0\} \rightarrow \overline{B}_2 \setminus \overline{B}_1$ un diffeomorfismo C^∞ tale che $\mathcal{F}|_{\partial\Omega} = Id$, \mathcal{F} sia radiale, cioè $\mathcal{F}(x) = \mathcal{R}(|x|) \frac{x}{|x|}$, e che $\exists c_0 > 0$ che verifica*

$$D\mathcal{F}(x) \geq c_0 I \quad \lim_{|y| \rightarrow 1} (\mathcal{F}_*\mathbb{1}(y)) \mathbf{n} = 0.$$

Sia $\sigma_{\mathcal{O}}$ definita da

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ \mathcal{F}_*\mathbb{1}(x) & \text{se } x \in B_2 \setminus B_1 \end{cases},$$

con $\mathcal{O}(x)$ arbitrario ma finito e strettamente positivo. Allora, assegnata f condizione di Dirichlet, la PDE

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma_{\mathcal{O}} \nabla v) = 0 & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = f \end{cases}, \quad (3.2)$$

ammette come unica soluzione

$$v(y) = \begin{cases} w(\mathcal{F}^{-1}(y)) & \text{per } y \in B_2 \setminus B_1 \\ w(0) & \text{per } y \in B_1 \end{cases}, \quad (3.3)$$

con w funzione armonica con le stesse condizioni di Dirichlet, cioè

$$\nabla \cdot \nabla w = 0 \text{ in } B_2 \quad w = f \text{ in } \partial B_2.$$

Per la dimostrazione di questo teorema procediamo per fasi. L'obiettivo è dimostrare che il campo $\sigma_{\mathcal{O}} \nabla v$ ha divergenza nulla in tutto B_2 . Per farlo dimostreremo prima che ha divergenza nulla sui domini $B_2 \setminus B_1$ e B_1 , fatto questo sarà sufficiente dimostrare che il flusso del campo è continuo attraverso la superficie ∂B_1 per concludere.

Proposizione 1. Se v risolve (3.2) e non diverge su ∂B_1 , cioè esistono $C > 0$ e $1 < R < 2$ tali che $|v(y)| \leq C$ per $|y| \leq R$, allora vale

$$v(y) = w(\mathcal{F}^{-1}(y)) \quad \text{per } y \in B_2 \setminus \overline{B_1},$$

con w funzione armonica con le stesse condizioni di Dirichlet, cioè

$$\nabla \cdot \nabla w = 0 \text{ in } B_2 \quad w = f \text{ in } \partial B_2.$$

Dimostrazione. Prendiamo $\phi \in C_0^\infty(B_2 \setminus \overline{B_1})$. Di conseguenza $\phi(\mathcal{F}(x)) \in C_0^\infty(B_2 \setminus \{0\})$. Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_2 \setminus \overline{B_1}} \phi \nabla \cdot (\sigma_{\mathcal{O}} \nabla v) \, dy \\ &= - \int_{B_2 \setminus \overline{B_1}} \langle \sigma_{\mathcal{O}} \nabla v, \nabla \phi \rangle \, dy \\ &= - \int_{B_2 \setminus \{0\}} \langle \nabla(v \circ \mathcal{F}), \nabla(\phi \circ \mathcal{F}) \rangle \, dx \\ &= \int_{B_2 \setminus \{0\}} (\phi \circ \mathcal{F})(\nabla \cdot \nabla(v \circ \mathcal{F})) \, dx, \end{aligned}$$

dove abbiamo fatto due integrali per parti e un cambio di variabili. Quindi facendo variare $\phi \circ \mathcal{F}$ tra le $C_0^\infty(\overline{B_2} \setminus \{0\})$, che possiamo fare liberamente essendo \mathcal{F} diffeomorfismo C^∞ , possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo delle variazioni e ricavare che $v \circ \mathcal{F}$ verifica $\nabla \cdot \nabla(v \circ \mathcal{F}) = 0$ in $B_2 \setminus \{0\}$.

Ricordiamo un ben noto teorema di rimozione di singolarità per funzioni armoniche: se $\nabla \cdot \nabla w = 0$ in $\Omega \setminus \{x_0\}$ verifica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x)|x - x_0|^{n-2} = 0 \quad \text{se } n \geq 3, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w(x)}{\log(x - x_0)} = 0 \quad \text{se } n = 2,$$

allora x_0 è una singolarità rimovibile, cioè esiste \tilde{w} armonica ovunque tale che $\tilde{w}(x) = w(x)$ per ogni $x \neq x_0$.

Tornando alla dimostrazione della Proposizione 1, per ipotesi avevamo assunto che $v(x)$ fosse limitato per $|x| \downarrow 1$, di conseguenza anche $(v \circ \mathcal{F})(x)$ è limitato per $|x| \downarrow 0$. Per il teorema appena citato possiamo quindi rimuovere la singolarità ed estendere $v \circ \mathcal{F}$ per continuità anche in 0.

Abbiamo così ottenuto che esiste $w(x) := v(\mathcal{F}(x))$ armonica su tutto B_2 , essendo poi $F|_{\partial\Omega} = Id$, vale anche che $w = f$ in ∂B_2 .

Inoltre, per definizione, si ha che $v(y) = w(\mathcal{F}^{-1}(y))$ per ogni $y \in B_2 \setminus \overline{B_1}$, come richiesto. \square

Per la proposizione quindi si ha che v verifica (3.2) in $B_2 \setminus \overline{B_1}$ e c'è unicità in questa regione.

Passiamo quindi a mostrare che il campo $\sigma_{\mathcal{O}} \nabla v$ ha divergenza nulla anche in B_1 . Questo in effetti è ovvio in quanto, in questa regione, $v(x)$ è costante e di conseguenza $\nabla v = 0$ e quindi (3.2) è banalmente soddisfatta anche in B_1 . L'unicità segue dall'ipotesi su $\mathcal{O}(x)$ di finitezza e positività.

Resta da verificare che il flusso $(\sigma_{\mathcal{O}} \nabla v) \cdot \mathbf{n}$ è continuo attraverso ∂B_1 .

Proposizione 2. Sia v definito in (3.3), allora vale $(\sigma_{\mathcal{O}} \nabla v) \cdot \mathbf{n} \rightarrow 0$ uniformemente per $|y| \downarrow 1$

Dimostrazione. Poiché la funzione \mathcal{F} è radiale il differenziale $D\mathcal{F}$ è simmetrico, utilizzando la chain-rule si ricava che

$$\nabla_y v = (D\mathcal{F}^{-1})^T \nabla_x w = (D\mathcal{F})^{-1} \nabla_x w,$$

ma $D\mathcal{F}$ era per ipotesi limitato dal basso, quindi $(D\mathcal{F})^{-1}$ è uniformemente limitato dall'alto. Essendo w armonica sappiamo che ∇w è uniformemente limitato e quindi in particolare lo è per $|x| \downarrow 0$, di conseguenza otteniamo che anche ∇v è uniformemente limitato per $|y| \downarrow 0$.

Dalla definizione di $\sigma_{\mathcal{O}}$ si ottiene che

$$\sigma_{\mathcal{O}} \nabla_y v = \mathcal{F}_* \mathbb{1} \nabla_y v$$

vale per $y \in B_2 \setminus \overline{B_1}$.

Notiamo che $\mathbf{n} = \frac{y}{|y|} = \frac{x}{|x|}$ è autovettore sia per $D\mathcal{F}$ che per $\mathcal{F}_* \mathbb{1}$ in quanto

\mathcal{F} è radiale. Avendo per ipotesi che il relativo autovalore di $D\mathcal{F}$ è limitato dall'alto, ci basta ottenere che l'autovalore di $\mathcal{F}_*\mathbb{1}$ tende a 0 per $|y| \downarrow 1$.

Ma questo è stato assunto per ipotesi, e quindi concludiamo.

□

Quanto al limite dal basso, cioè $(\sigma_{\mathcal{O}} \nabla v) \cdot \mathbf{n} \rightarrow 0$ per $|y| \uparrow 1$, risulta banale da verificare essendo $v(y)$ costante in B_1 .

Poiché esistono entrambi i limiti e sono entrambi 0 abbiamo che il flusso è continuo attraverso la superficie, come volevamo. E quindi $\sigma_{\mathcal{O}} \nabla v$ è un campo a divergenza nulla in tutto B_2 . Questo conclude la dimostrazione del teorema.

Teorema 3. *Sia $\mathcal{F} : \overline{B_2} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{B_2} \setminus \overline{B_1}$ come nelle ipotesi del Teorema 2.*

Sia $\sigma_{\mathcal{O}}$ definita da

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ \mathcal{F}_*\mathbb{1}(x) & \text{se } x \in B_2 \setminus B_1 \end{cases},$$

con $\mathcal{O}(x)$ arbitrario ma finito e strettamente positivo.

Allora vale

$$\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}} = \Lambda_{\mathbb{1}},$$

cioè le due conducibilità sono assolutamente indistinguibili tramite sole misurazioni esterne.

Dimostrazione. Per quanto detto precedentemente, è sufficiente provare che le due conducibilità inducono le stesse forme quadratiche. Grazie al Teorema precedente conosciamo la forma esplicita del potenziale v soluzione di (1.1) con conducibilità $\sigma_{\mathcal{O}}$ e condizioni di Dirichlet f assegnate. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\sigma_{\mathcal{O}}}(f) &:= \int_{B_2} \langle \sigma_{\mathcal{O}} \nabla v, \nabla v \rangle dy \\ &= \int_{B_2 \setminus B_1} \langle \sigma_{\mathcal{O}} \nabla v, \nabla v \rangle dy \\ &= \int_{B_2 \setminus \{0\}} \langle \nabla w, \nabla w \rangle dx \\ &= \int_{B_2} \langle \nabla w, \nabla w \rangle dx = \mathcal{Q}_{\mathbb{1}}(f), \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\nabla v \equiv 0$ in B_1 , un cambio di variabili e la regolarità di w in 0. Questo conclude la dimostrazione. \square

Le ipotesi sulla mappa $\overline{B_2} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{B_2} \setminus \overline{B_1}$ assunte in questi due teoremi in realtà possono essere leggermente rilassate. Nello specifico va bene qualsiasi ipotesi che consenta di mostrare che la componente radiale di $\mathcal{F}_*\mathbb{1}$ vada a 0 su ∂B_1 , ad esempio si possono assumere condizioni su $\det(D\mathcal{F})$ insieme a bound dall'alto su $D\mathcal{F}$.

Ora che abbiamo questi risultati, mostriamo che la \mathcal{F} trovata come limite puntuale rispetta effettivamente le ipotesi.

Innanzitutto riscriviamo la \mathcal{F} in forma più facilmente trattabile.

$$\mathcal{F}(x) = \left(1 + \frac{1}{2}|x|\right) \frac{x}{|x|} = \left(\frac{x}{|x|} + \frac{x}{2}\right),$$

da cui, derivando singolarmente gli addendi, otteniamo il differenziale

$$D\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}\text{Id} + \frac{1}{|x|}\text{Id} - \frac{x \cdot x^T}{|x|^3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|}\right)\text{Id} - \frac{x \cdot x^T}{|x|^3}.$$

Da questa forma esplicita si nota facilmente che x è autovettore di autovalore $\frac{1}{2}$, mentre x^\perp è un autospazio di dimensione $n-1$ con autovalore $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|}\right)$.

Calcoliamo quindi il push-forward tramite \mathcal{F} della conducibilità $\mathbb{1}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_*\mathbb{1}(y) &= \mathcal{F}_*(\mathcal{F}(x)) \\ &= \frac{D\mathcal{F}(x)D\mathcal{F}(x)}{\det D\mathcal{F}(x)} \\ &= \frac{1}{\det D\mathcal{F}(x)} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|}\right)^2 \text{Id} - \left(\frac{1}{|x|^3} + \frac{2}{|x|^4}\right)x \cdot x^T + \frac{|x|^2}{|x|^6}x \cdot x^T \right] \\ &= \frac{2^n|x|^{n-1}}{(|x|+2)^{n-1}} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^2}\right)\text{Id} - \left(\frac{1}{|x|^3} + \frac{1}{|x|^4}\right)x \cdot x^T \right] \\ &= \frac{2^n}{(|x|+2)^{n-1}} \left[\left(\frac{1}{4}|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + |x|^{n-3}\right)\text{Id} + \right. \\ &\quad \left. - (|x|^{n-4} + |x|^{n-5})x \cdot x^T \right], \end{aligned}$$

da cui ricaviamo facilmente che x è autovettore di autovalore

$$\frac{2^{n-2}|x|^{n-1}}{(|x|+2)^{n-1}},$$

che ovviamente tende a 0 per $|x| \rightarrow 0$ o per $|y| \downarrow 1$, come volevamo.

3.3 Generalizzazione

La trattazione finora è stata svolta in un contesto sferico per pura semplicità di esposizione, ma, come avevamo accennato, questi risultati sono validi in una forma ben più generale. Il seguente teorema chiarisce questa idea.

Teorema 4. *Sia $\mathcal{F} : \overline{B_2} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{B_2} \setminus \overline{B_1}$ data da*

$$\mathcal{F}(x) = \left(1 + \frac{|x|}{2}\right) \frac{x}{|x|}.$$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto connesso. Sia $\mathcal{G} : \overline{B_2} \rightarrow \Omega$ una mappa Lipschitziana con inversa Lipschitziana e sia $D := \mathcal{G}(B_1)$. Allora $\mathcal{H} := \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G}^{-1} : \Omega \rightarrow \Omega$ agisce come l'identità su $\partial\Omega$ mentre espande il punto $z_0 = \mathcal{G}(0)$ a tutto D . Consideriamo $\sigma_{\mathcal{O}} : \Omega \rightarrow \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una conducibilità definita da

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in D \\ \mathcal{H}_* \mathbb{1}(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus D \end{cases},$$

con $\mathcal{O}(x)$ arbitrario ma finito, positivo e simmetrico.

Allora la mappa Dirichlet-To-Neumann $\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}}$ è indipendente da $\mathcal{O}(x)$ e vale

$$\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}} = \Lambda_{\mathbb{1}},$$

cioè le due conducibilità sono assolutamente indistinguibili tramite sole misurazioni esterne.

La dimostrazione di questo teorema ricalca esattamente quella svolta nel caso sferico, risulta semplicemente più tediosa la notazione da utilizzare. La bilipschitzianità della funzione \mathcal{G} garantisce che l'uniforme limitatezza delle funzioni venga conservata nel passaggio da B_2 a Ω .

Chiaramente si può fare l'analogo di questo teorema per il caso non singolare, ottenendo lo stesso risultato.

Conclusioni

Abbiamo quindi dimostrato che, restringendoci alla sola elettrostatica, il mantello di Harry Potter è effettivamente realizzabile, almeno in teoria.

Infatti fissata la forma del mantello che vogliamo realizzare, purché questa sia abbastanza regolare, se riusciamo a costruirlo in modo che ogni punto assuma la specifica conducibilità data dal push-forward, allora avremo realizzato a tutti gli effetti un mantello dell'invisibilità. Abbiamo infatti dimostrato che con quei particolari valori di σ sul guscio, o mantello che dir si voglia, qualsiasi oggetto venga messo all'interno non sarà in alcun modo rilevabile a misurazioni effettuate all'esterno tramite campi statici.

Il lettore più attento si sarà però accorto del fatto che gli esseri umani non vedono gli oggetti utilizzando i soli campi statici, ma utilizzando la luce, cioè onde elettromagnetiche. Quanto fatto fin'ora potrebbe quindi sembrare di poco interesse pratico, ma non è affatto così.

Estensione all'elettrodinamica

A. Greenleaf in [3] estende il Teorema 4 alle ben note equazioni di Maxwell, che modellizzano e determinano l'intera elettrodinamica,

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = 4\pi\rho \\ \nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times H = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \end{cases},$$

dove la conducibilità σ e le permeabilità elettrica ϵ e magnetica μ compaiono nelle relazioni tra i campi elettrici e magnetici E , D , B e H e le densità di carica e corrente ρ e J . In particolare valgono $D = \epsilon E$, $\mu H = B$ e $J = \sigma E$.

Nell'articolo viene infatti mostrato come ϵ e μ trasformino tramite push-forward esattamente come la conducibilità. Di conseguenza tutte le conside-

razioni di carattere matematico trattate in questa tesi si estendono facilmente all'elettrodinamica.

A scopo illustrativo supponiamo di costruire il nostro cloaking singolare nel guscio sferico $B_{R_2} \setminus B_{R_1}$ e che valga $R_1, R_2 \gg \lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda, con questa ipotesi possiamo metterci nell'approssimazione della luce come raggi e possiamo rappresentare il vettore di Poynting. Le seguenti figure, realizzate da Pendry, Schurig e Smith in [7] tramite integrazione numerica delle equazioni di Maxwell, rappresentano proprio il vettore di Poynting in ciascun punto, cioè la direzione seguita dai raggi di luce.

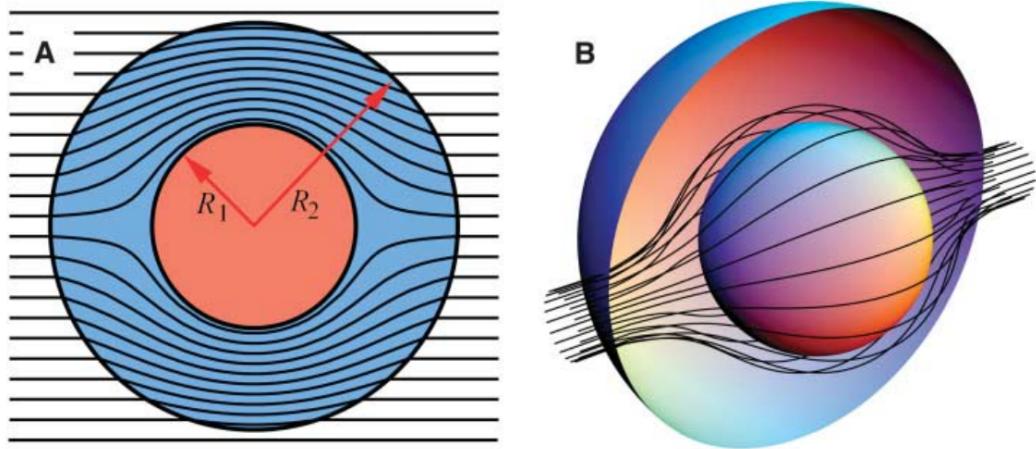


Figura 3.1: Simulazione di un fascio di luce con sorgente all'infinito nel piano (Figura A) e in tre dimensioni (Figura B)

Abbiamo visto che per valori di r prossimi a R_1 la conducibilità era molto alta in direzione radiale e prossima a 0 in direzione tangenziale, cosa che guardando le figure potevamo in qualche modo aspettarci considerando che vogliamo che i campi elettromagnetici in qualche modo evitino l'oggetto, girandogli intorno.

Frequenza non fissata

Un punto cruciale da notare in questa estensione è che i parametri ϵ e μ dipendono, oltre che dalla posizione, anche dalla frequenza dell'onda elettromagnetica in quel punto. Di conseguenza tutti questi ragionamenti funzionano molto bene a frequenza ω fissata.

Nella pratica invece quello che ci piacerebbe ottenere è un cloaking efficacie in ogni frequenza, o quantomeno in un range di frequenze il più ampio possibile. Sfortunatamente non si può sperare, nemmeno in teoria, di costruire un cloaking efficace in un range di frequenze eccessivamente ampio in quanto la velocità di gruppo non può mai superare la velocità della luce nel vuoto e questo porta ad un insormontabile problema con la fase.

Una delle maggiori evidenze sperimentali ad oggi è stata ottenuta in [8] con le microonde, in particolare in un range di frequenze tra 8 e 12 GHz. Possiamo quindi forse sperare in un cloaking per lo spettro visibile, che è approssimativamente tra 770 e 430 THz, questo infatti garantirebbe la totale invisibilità alla vista umana. Il grosso problema resta quindi la necessità di materiali le cui permeabilità cambino con la frequenza esattamente nei parametri dati dal push-forward. Di fatto la scienza delle costruzioni è sfortunatamente ben lontana dal realizzare materiali con questa precisione, per ora.

CONCLUSIONI

Bibliografia

- [1] K. Astala and L. Päivärinta. Calderón’s inverse conductivity problem in the plane. *Annals of Mathematics*, 163(1):265–299, 2006.
- [2] K. Bryan and T. Leise. Impedance imaging, inverse problems, and harry potter’s cloak. *SIAM Review*, 52(2):359–377, 2010.
- [3] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, and G. Uhlmann. Full-wave invisibility of active devices at all frequencies. *Communications in Mathematical Physics*, 275(3):749–789, Nov 2007.
- [4] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, and G. Uhlmann. Cloaking devices, electromagnetic wormholes, and transformation optics. *SIAM Review*, 51(1):3–33, 2009.
- [5] D. Isaacson, J. L. Mueller, J. C. Newell, and S. Siltanen. Imaging cardiac activity by the d-bar method for electrical impedance tomography. *Physiological Measurement*, 27(5):S43, 2006.
- [6] J. M. Lee and G. Uhlmann. Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(8):1097–1112.
- [7] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith. Controlling electromagnetic fields. *Science*, 312(5781):1780–1782, 2006.
- [8] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, and D. R. Smith. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, 314(5801):977–980, 2006.
- [9] J. Sylvester. An anisotropic inverse boundary value problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(2):201–232.
- [10] J. Sylvester and G. Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Annals of Mathematics*, 125(1):153–169, 1987.