



Dal problema di Calderón al mantello di Harry Potter

Candidato: Marco Miani

Relatore: Prof. Luigi Carlo Berselli

Università di Pisa

26 ottobre 2018

Premessa

Le equazioni di Maxwell determinano l'intera elettrodinamica.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot D = 4\pi\rho \\ \nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times H = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \end{array} \right.$$

e valgono le relazioni

$$D = \epsilon E \quad \mu H = B \quad J = \sigma E$$

Quindi $\sigma, \epsilon, \mu : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ sono gli unici parametri rilevanti.

Il problema dell'elettrostatica

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto, la nostra regione di misura.

Il problema dell'elettrostatica

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto, la nostra regione di misura.

Sia $\sigma : \Omega \rightarrow \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una condicibilità elettrica

Il problema dell'elettrostatica

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto, la nostra regione di misura.

Sia $\sigma : \Omega \rightarrow \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una condicibilità elettrica, cioè t.c.

- $\sigma(x)^T = \sigma(x) \quad \forall x \in \Omega;$

Il problema dell'elettrostatica

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto, la nostra regione di misura.

Sia $\sigma : \Omega \rightarrow \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una condicibilità elettrica, cioè t.c.

- $\sigma(x)^T = \sigma(x) \quad \forall x \in \Omega;$
- $\langle \sigma(x)\xi, \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega.$

Il problema dell'elettrostatica

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto, la nostra regione di misura.

Sia $\sigma : \Omega \rightarrow \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una condicibilità elettrica, cioè t.c.

- $\sigma(x)^T = \sigma(x) \quad \forall x \in \Omega;$
- $\langle \sigma(x)\xi, \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega.$

In assenza di cariche in Ω il potenziale elettrico u è soluzione di

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

quando imponiamo condizioni di Dirichlet $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Il problema inverso di Calderón

Definizione

Assegnata una conducibilità σ definiamo la mappa Dirichlet-To-Neumann

$$\Lambda_\sigma : \quad u|_{\partial\Omega} \longmapsto (\sigma \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}.$$

Il problema inverso di Calderón

Definizione

Assegnata una conducibilità σ definiamo la mappa Dirichlet-To-Neumann

$$\Lambda_\sigma : \quad u|_{\partial\Omega} \longmapsto (\sigma \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}.$$

Il problema di Calderón consiste nel chiedersi se la mappa

$$\mathcal{C} : \quad \Lambda_\sigma \longmapsto \sigma$$

sia ben definita.

Il problema inverso di Calderón

Definizione

Assegnata una conducibilità σ definiamo la mappa Dirichlet-To-Neumann

$$\Lambda_\sigma : \quad u|_{\partial\Omega} \longmapsto (\sigma \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}.$$

Il problema di Calderón consiste nel chiedersi se la mappa

$$\mathcal{C} : \quad \Lambda_\sigma \longmapsto \sigma$$

sia ben definita.

La risposta, come vedremo, è in generale negativa.

Tomografia ad Impedenza Elettrica

Caso isotropo

Se si hanno $\sigma_i : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$ per $i = 1, 2$, vale

$$\Lambda_{\sigma_1} = \Lambda_{\sigma_2} \implies \sigma_1 = \sigma_2$$

La mappa \mathcal{C} è quindi ben definita in questo caso.

Questo costituisce il fondamento della Tomografia ad Impedenza Elettrica.

Tomografia ad Impedenza Elettrica

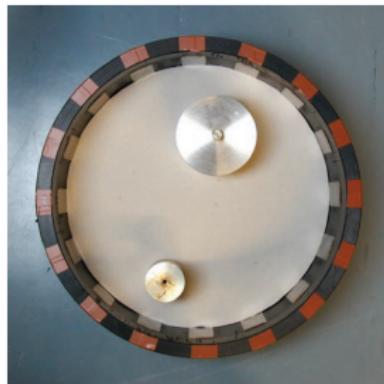
Caso isotropo

Se si hanno $\sigma_i : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$ per $i = 1, 2$, vale

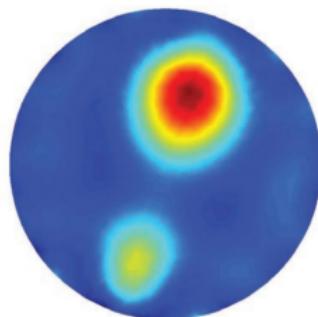
$$\Lambda_{\sigma_1} = \Lambda_{\sigma_2} \implies \sigma_1 = \sigma_2$$

La mappa \mathcal{C} è quindi ben definita in questo caso.

Questo costituisce il fondamento della Tomografia ad Impedenza Elettrica.



$$\mathcal{C} \rightarrow$$



Tomografia ad Impedenza Elettrica - Esempi esplicativi

Per $\alpha \geq 0$ e $0 < \rho < 1$ consideriamo la conducibilità nella palla $B_1 \subset \mathbb{R}^2$

$$\sigma_{\alpha,\rho}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in B_\rho \\ 1 & \text{se } x \in B_1 \setminus B_\rho \end{cases}.$$

Tomografia ad Impedenza Elettrica - Esempi esplicativi

Per $\alpha \geq 0$ e $0 < \rho < 1$ consideriamo la conducibilità nella palla $B_1 \subset \mathbb{R}^2$

$$\sigma_{\alpha,\rho}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in B_\rho \\ 1 & \text{se } x \in B_1 \setminus B_\rho \end{cases}.$$

Caso $\alpha = 0$

$$\Lambda_{\sigma_0,\rho}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k| \frac{1 - \rho^{2|k|}}{1 + \rho^{2|k|}} \hat{f}_k e^{ik\theta}$$

Tomografia ad Impedenza Elettrica - Esempi esplicativi

Per $\alpha \geq 0$ e $0 < \rho < 1$ consideriamo la conducibilità nella palla $B_1 \subset \mathbb{R}^2$

$$\sigma_{\alpha,\rho}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in B_\rho \\ 1 & \text{se } x \in B_1 \setminus B_\rho \end{cases}.$$

Caso $\alpha = 0$

$$\Lambda_{\sigma_0,\rho}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k| \frac{1 - \rho^{2|k|}}{1 + \rho^{2|k|}} \hat{f}_k e^{ik\theta}$$

Caso $\alpha = \infty$

$$\Lambda_{\sigma_\infty,\rho}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k| \frac{1 + \rho^{2|k|}}{1 - \rho^{2|k|}} \hat{f}_k e^{ik\theta}$$

Tomografia ad Impedenza Elettrica - Esempi esplicativi

Per $\alpha \geq 0$ e $0 < \rho < 1$ consideriamo la conducibilità nella palla $B_1 \subset \mathbb{R}^2$

$$\sigma_{\alpha,\rho}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in B_\rho \\ 1 & \text{se } x \in B_1 \setminus B_\rho \end{cases}.$$

Caso $\alpha = 0$

$$\Lambda_{\sigma_0,\rho}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k| \frac{1 - \rho^{2|k|}}{1 + \rho^{2|k|}} \hat{f}_k e^{ik\theta}$$

Caso $\alpha = \infty$

$$\Lambda_{\sigma_\infty,\rho}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k| \frac{1 + \rho^{2|k|}}{1 - \rho^{2|k|}} \hat{f}_k e^{ik\theta}$$

dove $\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta$.

Invarianza per cambio di variabili

Invarianza per cambio di variabili

Teorema (del cambio di variabili)

Sia $F : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ un diffeomorfismo C^1 tale che $F|_{\partial\Omega} = Id$.

Invarianza per cambio di variabili

Teorema (del cambio di variabili)

Sia $F : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ un diffeomorfismo C^1 tale che $F|_{\partial\Omega} = Id$.

Sia $\tilde{\sigma}$ il push-forward di σ tramite F

$$\tilde{\sigma}(y) := F_*\sigma(y) = \left. \frac{(DF(x))^T \sigma(x) (DF(x))}{\det(DF(x))} \right|_{x=F^{-1}(y)}.$$

Invarianza per cambio di variabili

Teorema (del cambio di variabili)

Sia $F : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$ un diffeomorfismo C^1 tale che $F|_{\partial\Omega} = Id$.

Sia $\tilde{\sigma}$ il push-forward di σ tramite F

$$\tilde{\sigma}(y) := F_*\sigma(y) = \left. \frac{(DF(x))^T \sigma(x) (DF(x))}{\det(DF(x))} \right|_{x=F^{-1}(y)}.$$

Allora vale

$$\Lambda_{\tilde{\sigma}} = \Lambda_{\sigma},$$

cioè le due conducibilità sono assolutamente indistinguibili tramite sole misurazioni esterne.

Invarianza per cambio di variabili - Idea dimostrazione

Definizioni

Sia $\mathcal{Q}_\sigma : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{Q}_\sigma(f) := \int_{\partial\Omega} f \Lambda_\sigma(f) dS$$

Invarianza per cambio di variabili - Idea dimostrazione

Definizioni

Sia $\mathcal{Q}_\sigma : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{Q}_\sigma(f) := \int_{\partial\Omega} f \Lambda_\sigma(f) dS$$

Lemma

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto e siano σ e η due conducibilità su Ω . Vale

$$\mathcal{Q}_\sigma = \mathcal{Q}_\eta \iff \Lambda_\sigma = \Lambda_\eta.$$

Definizioni

Siano $\mathcal{Q}_\sigma : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{P}_\sigma(u) : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ date da

$$\mathcal{Q}_\sigma(f) := \int_{\partial\Omega} f \Lambda_\sigma(f) \, dS \quad \mathcal{P}_\sigma(u) := \int_{\Omega} \langle \sigma \nabla u, \nabla u \rangle \, dx$$

Lemma

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto e siano σ e η due conducibilità su Ω . Vale

$$\mathcal{Q}_\sigma = \mathcal{Q}_\eta \iff \Lambda_\sigma = \Lambda_\eta.$$

Definizioni

Siano $\mathcal{Q}_\sigma : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{P}_\sigma(u) : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ date da

$$\mathcal{Q}_\sigma(f) := \int_{\partial\Omega} f \Lambda_\sigma(f) \, dS \quad \mathcal{P}_\sigma(u) := \int_{\Omega} \langle \sigma \nabla u, \nabla u \rangle \, dx$$

Lemma

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto e siano σ e η due conducibilità su Ω . Vale

$$\mathcal{Q}_\sigma = \mathcal{Q}_\eta \iff \Lambda_\sigma = \Lambda_\eta.$$

Lemma

Data $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ le seguenti condizioni su $u \in H^1(\Omega)$ sono equivalenti:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}, \quad \mathcal{P}_\sigma(u) = \min_{v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = f} \mathcal{P}_\sigma(v).$$

Costruzione Cloaking non singolare

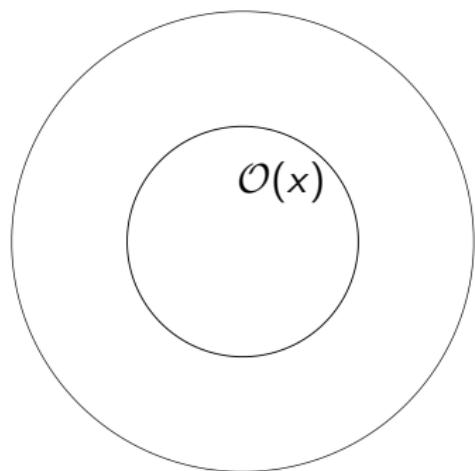
Consideriamo $\Omega = B_2$.

Costruzione Cloaking non singolare

Consideriamo $\Omega = B_2$.

Prendiamo un qualsiasi oggetto contenuto nella palla di raggio 1 e sia $\mathcal{O} : B_1 \rightarrow \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ la sua conducibilità in ciascun punto.

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ & \end{cases}$$



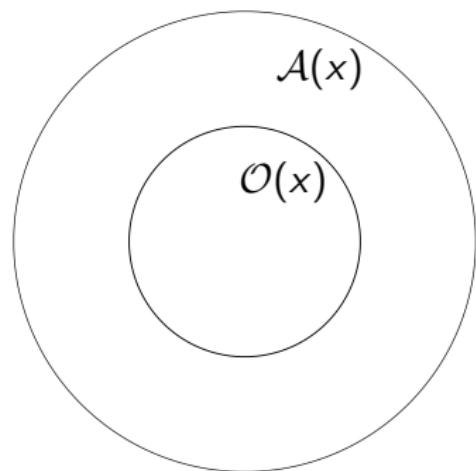
Costruzione Cloaking non singolare

Consideriamo $\Omega = B_2$.

Prendiamo un qualsiasi oggetto contenuto nella palla di raggio 1 e sia $\mathcal{O} : B_1 \rightarrow \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ la sua conducibilità in ciascun punto.

Per nascondere l'oggetto supponiamo di avvolgerlo con un guscio sferico $B_2 \setminus B_1$ con una conducibilità ancora da stabilire.

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ \mathcal{A}(x) & \text{se } x \in B_2 \setminus B_1 \end{cases}$$



Costruzione Cloaking non singolare

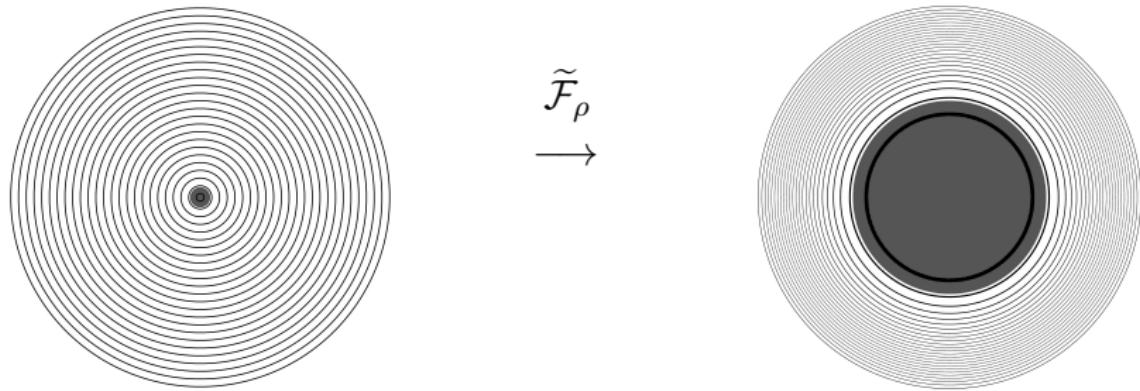
Fissiamo un parametro $0 < \rho < 1$ e consideriamo la seguente funzione radiale $\mathcal{F}_\rho : \overline{B_2} \rightarrow \overline{B_2}$

$$\mathcal{F}_\rho(x) = \begin{cases} \frac{x}{\rho} & \text{se } x \in B_\rho \\ \left(1 + \frac{|x| - \rho}{2 - \rho}\right) \frac{x}{|x|} & \text{se } x \in \overline{B_2} \setminus B_\rho \end{cases}.$$

Costruzione Cloaking non singolare

Fissiamo un parametro $0 < \rho < 1$ e consideriamo la seguente funzione radiale $\mathcal{F}_\rho : \overline{B_2} \rightarrow \overline{B_2}$

$$\mathcal{F}_\rho(x) = \begin{cases} \frac{x}{\rho} & \text{se } x \in B_\rho \\ \left(1 + \frac{|x| - \rho}{2 - \rho}\right) \frac{x}{|x|} & \text{se } x \in \overline{B_2} \setminus B_\rho \end{cases}.$$



Costruzione Cloaking non singolare

Sia $\mathbb{1} : \overline{B_2} \setminus B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ la conducibilità isotropa che vale identicamente 1.

Costruzione Cloaking non singolare

Sia $\mathbb{1} : \overline{B_2} \setminus B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ la conducibilità isotropa che vale identicamente 1.

Situazione effettiva

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Costruzione Cloaking non singolare

Sia $\mathbb{1} : \overline{B_2} \setminus B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ la conducibilità isotropa che vale identicamente 1.

Situazione effettiva

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ \left(\tilde{\mathcal{F}}_\rho|_{B_2 \setminus B_\rho}\right)_* \mathbb{1}(x) & \text{se } x \in \overline{B_2} \setminus B_1 \end{cases}$$

Costruzione Cloaking non singolare

Sia $\mathbb{1} : \overline{B_2} \setminus B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ la conducibilità isotropa che vale identicamente 1.

Situazione effettiva

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ \left(\tilde{\mathcal{F}}_\rho|_{B_2 \setminus B_\rho}\right)_* \mathbb{1}(x) & \text{se } x \in \overline{B_2} \setminus B_1 \end{cases}$$

Situazione apparente

$$(\tilde{\mathcal{F}}_\rho^{-1})_* \sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \left(\tilde{\mathcal{F}}_\rho^{-1}|_{B_1}\right)_* \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_\rho \\ \mathbb{1}(x) & \text{se } x \in \overline{B_2} \setminus B_\rho \end{cases}$$

Costruzione Cloaking non singolare

Sia $\mathbb{1} : \overline{B_2} \setminus B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ la conducibilità isotropa che vale identicamente 1.

Situazione effettiva

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ \left(\tilde{\mathcal{F}}_\rho|_{B_2 \setminus B_\rho}\right)_* \mathbb{1}(x) & \text{se } x \in \overline{B_2} \setminus B_1 \end{cases}$$

Situazione apparente

$$(\tilde{\mathcal{F}}_\rho^{-1})_* \sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \left(\tilde{\mathcal{F}}_\rho^{-1}|_{B_1}\right)_* \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_\rho \\ \mathbb{1}(x) & \text{se } x \in \overline{B_2} \setminus B_\rho \end{cases}$$

Per il Teorema sull'invarianza per cambio di variabili concludiamo che

$$\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}} = \Lambda_{(\tilde{\mathcal{F}}_\rho^{-1})_* \sigma_{\mathcal{O}}}.$$

Stima bontà della soluzione

Definizione

Sia $\| \cdot \|$ la norma sugli operatori $\Lambda : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ data da

$$\|\Lambda_\sigma\| := \sup \left\{ |\mathcal{Q}_\sigma(f)| : \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Stima bontà della soluzione

Definizione

Sia $\| \cdot \|$ la norma sugli operatori $\Lambda : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ data da

$$\|\Lambda_\sigma\| := \sup \left\{ |\mathcal{Q}_\sigma(f)| : \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Lemma

Date σ e η conducibilità, cioè funzioni su Ω a valori matriciali simmetrici

$$\begin{array}{l} \langle \sigma(x)\xi, \xi \rangle \leq \langle \eta(x)\xi, \xi \rangle \\ \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad \left| \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}_\sigma(f) \leq \mathcal{Q}_\eta(f) \quad \forall f \in H^{1/2}(\partial\Omega) \right..$$

Stima bontà della soluzione

Definizione

Sia $\| \cdot \|$ la norma sugli operatori $\Lambda : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ data da

$$\|\Lambda_\sigma\| := \sup \left\{ |\mathcal{Q}_\sigma(f)| : \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Lemma

Date σ e η conducibilità, cioè funzioni su Ω a valori matriciali simmetrici

$$\begin{array}{l} \langle \sigma(x)\xi, \xi \rangle \leq \langle \eta(x)\xi, \xi \rangle \\ \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad \left| \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}_\sigma(f) \leq \mathcal{Q}_\eta(f) \quad \forall f \in H^{1/2}(\partial\Omega) \right..$$

$$\langle \sigma_{0,\rho}(x)\xi, \xi \rangle \leq \langle (\tilde{\mathcal{F}}_\rho^{-1})_* \sigma_{\mathcal{O}}(x)\xi, \xi \rangle \leq \langle \sigma_{\infty,\rho}(x)\xi, \xi \rangle \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Stima bontà della soluzione

In dimensione 2 si può calcolare esplicitamente la norma di $\Lambda_{\sigma_0, \rho} - \Lambda_{\mathbb{1}}$ e $\Lambda_{\sigma_\infty, \rho} - \Lambda_{\mathbb{1}}$, ma in generale vale

Stima bontà della soluzione

In dimensione 2 si può calcolare esplicitamente la norma di $\Lambda_{\sigma_0,\rho} - \Lambda_{\mathbb{1}}$ e $\Lambda_{\sigma_\infty,\rho} - \Lambda_{\mathbb{1}}$, ma in generale vale

Teorema

Sia $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ la palla di raggio 1 con conducibilità $\sigma_{\alpha,\rho}$ definita prima, per ogni n esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|\Lambda_{\sigma_0,\rho} - \Lambda_{\mathbb{1}}\| \leq C\rho^n \|\Lambda_{\mathbb{1}}\|$$

$$\|\Lambda_{\sigma_\infty,\rho} - \Lambda_{\mathbb{1}}\| \leq C\rho^n \|\Lambda_{\mathbb{1}}\|.$$

Stima bontà della soluzione

In dimensione 2 si può calcolare esplicitamente la norma di $\Lambda_{\sigma_0, \rho} - \Lambda_{\mathbb{1}}$ e $\Lambda_{\sigma_\infty, \rho} - \Lambda_{\mathbb{1}}$, ma in generale vale

Teorema

Sia $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ la palla di raggio 1 con conducibilità $\sigma_{\alpha, \rho}$ definita prima, per ogni n esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|\Lambda_{\sigma_0, \rho} - \Lambda_{\mathbb{1}}\| \leq C\rho^n \|\Lambda_{\mathbb{1}}\|$$

$$\|\Lambda_{\sigma_\infty, \rho} - \Lambda_{\mathbb{1}}\| \leq C\rho^n \|\Lambda_{\mathbb{1}}\|.$$

e grazie all'ordinamento otteniamo che per ogni conducibilità $\mathcal{O}(x)$

$$\|\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}} - \Lambda_{\mathbb{1}}\| \leq C\rho^n \|\Lambda_{\mathbb{1}}\|$$

Studio degli autovalori

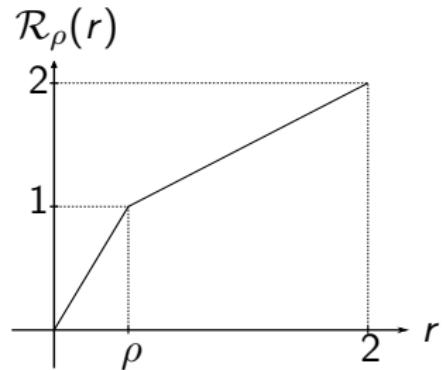
Consideriamo il caso in
dimensione 2 e guardiamo \mathcal{F}_ρ
in coordinate polari

$$\mathcal{F}_\rho((r, \theta)) = (\mathcal{R}_\rho(r), \theta).$$

Studio degli autovalori

Consideriamo il caso in dimensione 2 e guardiamo \mathcal{F}_ρ in coordinate polari

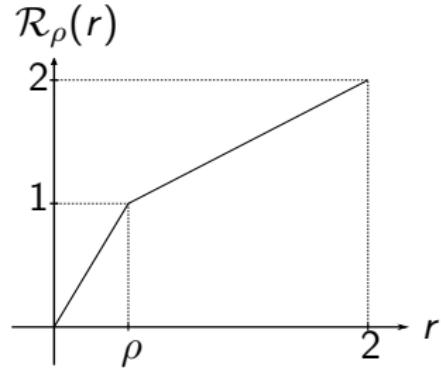
$$\mathcal{F}_\rho((r, \theta)) = (\mathcal{R}_\rho(r), \theta).$$



Studio degli autovalori

Consideriamo il caso in dimensione 2 e guardiamo \mathcal{F}_ρ in coordinate polari

$$\mathcal{F}_\rho((r, \theta)) = (\mathcal{R}_\rho(r), \theta).$$



Il push-forward della conducibilità $\mathbb{1}$ è

$$\mathcal{F}_*\mathbb{1}((r, \theta)) = \frac{(D\mathcal{F})^T(D\mathcal{F})}{\det(D\mathcal{F})} \circ \mathcal{F}^{-1}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}'(\mathcal{R}^{-1}(r)) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathcal{R}'(\mathcal{R}^{-1}(r))} \end{pmatrix}.$$

Cloaking Singolare

Cloaking Singolare

Facciamo il limite puntuale di \mathcal{F}_ρ per $\rho \rightarrow 0$, questo limite esiste ovunque ad esclusione del punto 0.

Cloaking Singolare

Facciamo il limite puntuale di \mathcal{F}_ρ per $\rho \rightarrow 0$, questo limite esiste ovunque ad esclusione del punto 0. Otteniamo $\mathcal{F} : \overline{B_2} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{B_2} \setminus \overline{B_1}$ data da

$$\mathcal{F}(x) := \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{F}_\rho(x) = \left(1 + \frac{|x|}{2}\right) \frac{x}{|x|}.$$

Cloaking Singolare

Facciamo il limite puntuale di \mathcal{F}_ρ per $\rho \rightarrow 0$, questo limite esiste ovunque ad esclusione del punto 0. Otteniamo $\mathcal{F} : \overline{B_2} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{B_2} \setminus \overline{B_1}$ data da

$$\mathcal{F}(x) := \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{F}_\rho(x) = \left(1 + \frac{|x|}{2}\right) \frac{x}{|x|}.$$

Questo non è più nemmeno un diffeomorfismo di $\overline{B_2}$ in se, e quindi non possiamo più utilizzare il Teorema sul cambio di variabili.

Condizioni necessarie

Teorema (Astali, Päivärinta)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con frontiera C^3 , siano $\sigma, \eta \in C^3(\Omega)$ due condutibilità anisotrope, finite e strettamente positive.

Teorema (Astali, Päivärinta)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con frontiera C^3 , siano $\sigma, \eta \in C^3(\Omega)$ due conducibilità anisotrope, finite e strettamente positive.

Se vale

$$\Lambda_\sigma = \Lambda_\eta$$

allora esiste un diffeomorfismo $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \Omega$ con $\mathcal{F}|_{\partial\Omega} = Id$ tale che

$$\sigma = F_* \eta.$$

Teorema (Astali, Päivärinta)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con frontiera C^3 , siano $\sigma, \eta \in C^3(\Omega)$ due conducibilità anisotrope, finite e strettamente positive.

Se vale

$$\Lambda_\sigma = \Lambda_\eta$$

allora esiste un diffeomorfismo $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \Omega$ con $\mathcal{F}|_{\partial\Omega} = Id$ tale che

$$\sigma = F_* \eta.$$

Questo teorema è stato dimostrato anche in dimensione $n \geq 3$ da Lee e Uhlmann con l'ipotesi aggiuntiva che la frontiera e le conducibilità siano analitiche.

Teorema

Sia $\mathcal{F} : \overline{B_2} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{B_2} \setminus \overline{B_1}$ radiale un diffeomorfismo C^∞ tale che $\mathcal{F}|_{\partial\Omega} = Id$, tale che $\lim_{|y| \rightarrow 1} (\mathcal{F}_* \mathbb{1}(y)) \mathbf{n} = 0$ e tale che $D\mathcal{F}(x) \geq c_0 I$.

Costruzione Cloaking singolare

Teorema

Sia $\mathcal{F} : \overline{B_2} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{B_2} \setminus \overline{B_1}$ radiale un diffeomorfismo C^∞ tale che $\mathcal{F}|_{\partial\Omega} = Id$, tale che $\lim_{|y| \rightarrow 1} (\mathcal{F}_* \mathbb{1}(y)) \mathbf{n} = 0$ e tale che $D\mathcal{F}(x) \geq c_0 I$.

Sia $\sigma_{\mathcal{O}}$ definita da

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ \mathcal{F}_* \mathbb{1}(x) & \text{se } x \in B_2 \setminus B_1 \end{cases},$$

con $\mathcal{O}(x)$ arbitrario ma finito e strettamente positivo.

Costruzione Cloaking singolare

Teorema

Sia $\mathcal{F} : \overline{B_2} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{B_2} \setminus \overline{B_1}$ radiale un diffeomorfismo C^∞ tale che $\mathcal{F}|_{\partial\Omega} = Id$, tale che $\lim_{|y| \rightarrow 1} (\mathcal{F}_* \mathbb{1}(y)) \mathbf{n} = 0$ e tale che $D\mathcal{F}(x) \geq c_0 I$.

Sia $\sigma_{\mathcal{O}}$ definita da

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in B_1 \\ \mathcal{F}_* \mathbb{1}(x) & \text{se } x \in B_2 \setminus B_1 \end{cases},$$

con $\mathcal{O}(x)$ arbitrario ma finito e strettamente positivo.

Allora vale

$$\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}} = \Lambda_{\mathbb{1}},$$

cioè le due conducibilità sono assolutamente indistinguibili tramite sole misurazioni esterne.

Costruzione Cloaking singolare - Idea dimostrazione

Il sistema

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma_{\mathcal{O}} \nabla v) = 0 & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

Costruzione Cloaking singolare - Idea dimostrazione

Il sistema

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma_{\mathcal{O}} \nabla v) = 0 & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

ammette come unica soluzione

$$v(y) = \begin{cases} w(\mathcal{F}^{-1}(y)) & \text{per } y \in B_2 \setminus B_1 \\ w(0) & \text{per } y \in B_1 \end{cases},$$

con w funzione armonica con le stesse condizioni di Dirichlet, cioè

$$\nabla \cdot \nabla w = 0 \text{ in } B_2 \quad w = f \text{ in } \partial B_2.$$

Generalizzazione a forme arbitrarie

Teorema

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto connesso. Sia $\mathcal{G} : B_2 \rightarrow \Omega$ una mappa Lipschitziana con inversa Lipschitziana e sia $D := \mathcal{G}(B_1)$.

Generalizzazione a forme arbitrarie

Teorema

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto connesso. Sia $\mathcal{G} : B_2 \rightarrow \Omega$ una mappa Lipschitziana con inversa Lipschitziana e sia $D := \mathcal{G}(B_1)$. Allora $\mathcal{H} := \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G}^{-1} : \Omega \rightarrow \Omega$ agisce come l'identità su $\partial\Omega$ mentre espande il punto $z_0 = \mathcal{G}(0)$ a tutto D . Sia $\sigma_{\mathcal{O}} : \Omega \rightarrow \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ definita da

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in D \\ \mathcal{H}_* \mathbb{1}(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus D \end{cases},$$

con $\mathcal{O}(x)$ arbitrario ma finito e strettamente positivo.

Generalizzazione a forme arbitrarie

Teorema

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compatto connesso. Sia $\mathcal{G} : B_2 \rightarrow \Omega$ una mappa Lipschitziana con inversa Lipschitziana e sia $D := \mathcal{G}(B_1)$. Allora $\mathcal{H} := \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G}^{-1} : \Omega \rightarrow \Omega$ agisce come l'identità su $\partial\Omega$ mentre espande il punto $z_0 = \mathcal{G}(0)$ a tutto D . Sia $\sigma_{\mathcal{O}} : \Omega \rightarrow \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ definita da

$$\sigma_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(x) & \text{se } x \in D \\ \mathcal{H}_* \mathbb{1}(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus D \end{cases},$$

con $\mathcal{O}(x)$ arbitrario ma finito e strettamente positivo.

Allora la mappa Dirichlet-To-Neumann $\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}}$ è indipendente da $\mathcal{O}(x)$ e vale

$$\Lambda_{\sigma_{\mathcal{O}}} = \Lambda_{\mathbb{1}},$$

cioè le due conducibilità sono assolutamente indistinguibili tramite sole misurazioni esterne.

Conclusioni

Conclusioni

Supponiamo di costruire il nostro cloaking singolare nel guscio sferico $B_{R_2} \setminus B_{R_1}$ e che valga $R_1, R_2 \gg \lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda. Con questa ipotesi possiamo rappresentare il vettore di Poynting.

Conclusioni

Supponiamo di costruire il nostro cloaking singolare nel guscio sferico $B_{R_2} \setminus B_{R_1}$ e che valga $R_1, R_2 \gg \lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda. Con questa ipotesi possiamo rappresentare il vettore di Poynting.

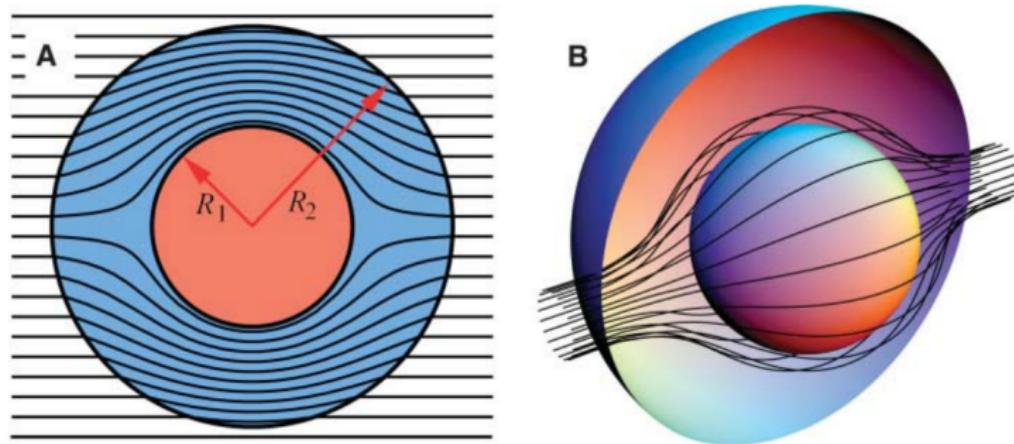


Figura: Immagini ottenute da Pendry, Schurig e Smith tramite integrazione numerica delle equazioni di Maxwell

Bibliografia

-  Kurt Brian, Tanya Leise, *Impedance Imaging, Inverse Problems, and Harry Potter's Cloak.* (2009)
-  Kari Astala and Lassi Päivärinta, *Calderón's Inverse Conductivity Problem in the Plane.* Annals of Mathematics, vol. 163, no. 1, 2006, pp. 265–299.
-  John M. Lee and Gunther Uhlmann, *Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measurements.* (1989) Comm. Pure Appl. Math., 42: 1097-1112.
-  J. B. Pendry, D. Schurig, D. R. Smith, *Controlling Electromagnetic Fields*
-  D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, D. R. Smith, *Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies.* Science 10 Nov 2006 : 977-980