Dal problema di Calderón al mantello di Harry Potter

Candidato: Marco Miani
Relatore: Prof. Luigi Carlo Berselli

Lo scopo di questa trattazione è di illustrare l'idea che sta alla base del cosiddetto *cloaking*, ovvero come rendere un oggetto invisibile a rilevazioni effettuate tramite onde elettromagnetiche. L'obiettivo è quello di impedire agli osservatori non solo di vedere l'oggetto, ma anche di essere a conoscenza che qualcosa sta venendo nascosto.
Mostreremo come rendere un'oggetto invisibile alla Tomografia ad Impedenza Elettrica (EIT), che è l'analogo del "vedere" ristretto ai soli campi statici. Nonostante questa restrizione, vedremo che le idee matematiche trattate si applicano a contesti molto più generali, come i campi a frequenza non zero, cioè all'intera elettrodinamica.

Preso uno spazio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e una conducibilità $\sigma(x)$ a valori tensoriali, in assenza di sorgenti di carica è ben noto che il potenziale $u(x)$ verifica

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0 \qquad\qquad u|_{\partial\Omega} = f$$

dove f è il potenziale al contorno assegnato. Possiamo quindi definire la mappa Dirichlet-To-Neumann

$$\Lambda_\sigma : f \mapsto (\sigma \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$$

Il problema che si pose Calderón riguarda la determinazione di σ a partire dalla conoscenza Λ_σ.
Si dimostra che, dato un diffeomorfismo F che ristretto a $\partial\Omega$ sia l'identità, considerando il push-forward di σ tramite F otteniamo

$$\Lambda_{F_*\sigma} = \Lambda_\sigma$$

Questo risultato può essere utilizzato per costruire un primo cloaking approssimato, che rende gli oggetti meno visibili, non invisibili. Passando per la trasformata di Fourier daremo una stima in norma L^2 dell'efficacia di questo metodo.

Dopo di ché tratteremo in modo rigoroso il limite per la dimensione apparente dell'oggetto che va a zero ed evidenzieremo i problemi che si riscontrano. Nel limite infatti la conducibilità esce dalle ipotesi assunte per i teoremi precedenti, in particolare non esistono più due costanti $c_0, c_1 > 0$ tali che $c_0 x \leq \sigma(x) \leq c_1 x$ per ogni $x \in \Omega$. Adotteremo quindi un approccio differente per trattare in modo rigoroso anche questo caso.

Concluderemo con un teorema che estende i risultati trovati, calcolati per comodità di trattazione in un contesto a simmetria sferica, a forme arbitrarie sufficientemente regolari.