Dispensa 3

Esercizio 2)

$$Per\ ipotesi, \qquad P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

$$\forall x\big(x \in P(A)\big) \xrightarrow{def} x \subseteq A$$

$$\forall x\big(x \in P(B)\big) \xrightarrow{def} x \subseteq B$$

$$\forall x\big(x \in P(A \cup B)\big) \xrightarrow{def} x \subseteq (A\ o\ B)$$

$$\forall x\Big(x \in \big(P(A) \cup P(B)\big)\Big) \xrightarrow{def} x \subseteq A\ o\ x \subseteq B \xrightarrow{def} x \subseteq A\ o\ B$$

Esercizio 3)

$$Per\ ipotesi, \qquad P(A) \subseteq P(B) \rightarrow A \subseteq B$$

$$\forall x\big(x \in P(A)\big) \xrightarrow{def} x \subseteq A \xrightarrow{ipot} x \in P(B) \xrightarrow{def} x \subseteq B$$

Esercizio 4)

$$Per\ ipotesi, \qquad A \times C = B \times C \rightarrow A = B\ dove\ C \neq \emptyset$$

$$Per\ definizione, \qquad A \times C = \{(x,y) : x \in A\ e\ y \in C\}$$

$$Per\ ipotesi, \qquad \{(x,y) : x \in A\ e\ y \in C\} = \{(x,y) : x \in B\ e\ y\ \in C\} \xrightarrow{def} x \in A\ e\ x \in B \xrightarrow{def} A = B$$

È necessario che C non sia un insieme vuoto, perché altrimenti il risultato dei prodotti cartesiani darebbe insieme vuoto indipendentemente da se A e B sono uguali. Questo perché:

$$A \times \emptyset$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) : x \in A\ e\ y \in \emptyset\}$$
$$\xrightarrow{def}\ insieme\ vuoto\ non\ ha\ elementi, quindi\ il\ risultato\ \text{è}\ \emptyset, qualunque\ valore\ assuma\ A.$$

Esercizio 5)

$$Per\ ipotesi, \qquad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) : x\ \in A\ e\ y\ \in (B\ e\ C)\}$$

$$(A \times B) \cap (A \times C) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) : x\ \in A\ e\ y\ \in B\}\ e\ \{(x,y) : x\ \in A\ e\ y\ \in C\} \xrightarrow{def} y\ \in B\ e\ y\ \in C$$

$$\xrightarrow{def} y \in (B\ e\ C)$$

Esercizio 6)

$$Per\ ipotesi, \qquad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$A - (B \cap C) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x\ \in A\ e\ x\ \notin\ A\ e\ (B\ e\ C)\} \xrightarrow{def} \{x \in A\ e\ x\ \notin (A\ e\ B)\ o\ (A\ e\ C)\}$$

Esercizio 7)

$$P(A) \cap\ P(B) =\ P(A\ \cap\ B)$$

$$P(A)\ e\ P(B) \xrightarrow{def} \{x|x\ \subseteq A\}\ e\ \{x|x \subseteq B\} \xrightarrow{def} \{x|x \subseteq\ A\ e\ B\} \stackrel{\text{def}}{=}\ P(A\ e\ B)$$

Esercizio 8)

$$A\ =\ B\ -\ C \xrightarrow{ipot} B\ =\ A\ \cup\ C$$

$$\xrightarrow{ipot} A = B - C \xrightarrow{def} \{x|x\ \in B\ e\ \ x \notin C\} \xrightarrow{def} \{x|x\ \in B\ e\ \ x \notin (B\ \cap C)\}$$

$$\xrightarrow{tes} B\ =\ A\ \cup\ C \xrightarrow{def} \{x|x \in A\ o\ x \in C\}$$

$$B = (B - C) \cup\ C \xrightarrow{tes} B =\ \{x|x\ \in B\ e\ \ x \notin (B\ \cap C)\}\ \cup C$$

$$Però, \qquad B\ \neq\ \{x|x\ \in B\ e\ \ x \notin (B\ \cap C)\}\ \cup C, \qquad infatti$$

$$B =\ \{x|x\ \in B\ e\ \ x \notin (B\ \cap C)\}\ \cup (B \cap C)$$

$$Pertanto, la\ tesi\ \text{è}\ vera\ soltanto\ se\ (B \cap C) =\ C.$$

Esercizio 10)

$$Per\ ipotesi, data\ f{:}\, X \rightarrow Y, \qquad \exists g{:}\, Y\ \rightarrow X\ tale\ che\ g\ \circ\ f\ =\ id_X \Leftrightarrow f\ \text{è}\ iniettiva$$

$$id_X \xrightarrow{def} f(x) = x$$

$$\xrightarrow{def} g\big(f(x)\big) = x$$

$$Se\ per\ assurdo\ f\ non\ \text{è}\ iniettiva,$$

$$vuol\ dire\ che\ esiste\ almeno\ un\ caso\ in\ f(X)\ tale\ che\ x\ \neq x'\ e\ f(x) = f(x')$$

$$Dato\ g\big(f(x)\big) = x, \qquad vuol\ dire\ che\ g\big(f(x)\big) = x\ e\ g\big(f(x')\big) = x'.$$

$$Ma, f(x)\ e\ f(x'), per\ la\ premessa, sono\ uguali, quindi\ g\ non\ \text{è}\ una\ funzione.$$

$$Quindi, l'ipotesi\ \text{è}\ sbagliata\ ed\ f\ \text{è}\ iniettiva.$$

$$Al\ contrario, data\ f{:}\, X \rightarrow Y, se\ f\ \text{è}\ iniettiva, \qquad \exists g{:}\, Y\ \rightarrow X\ tale\ che\ g\ \circ\ f\ =\ id_X$$

$$Sia\ y\ in\ Y.$$

$$Se\ y\ \text{è}\ in\ f(x)\ allora\ definisco\ g(x) = l'unico\ x\ in\ X\ tale\ che\ f(x) = y.$$

$$Se\ y\ non\ \text{è}\ in\ f(X)\ allora\ definisco\ g(y) = un\ arbitrario\ elemento\ di\ X, fissato.$$

g soddisfa che $\mathrm{g}\big(\mathrm{f(x)}\big) = \mathrm{x}$: f(x) è sempre in f(X) e $\mathrm{g}\big(\mathrm{f(x)}\big)$ è per definizione x.