

Dispensa 4

Esercizio 1)

Date $R \neq S \subseteq A \times A$:

sono **RIFLESSIVE**, cioè $\forall a \in A, aRa$, $(a, a) \in R \Leftrightarrow a \in A$

sono **SIMMETRICHE**, cioè $\forall a, b \in A$, se $aRb \Leftrightarrow bRa$, $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$

sono **TRANSITIVE**, cioè $\forall a, b, c \in A$, se aRb e $bRc \Rightarrow aRc$, (a, b) e $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Pertanto, verifichiamo che

1. $R \cap S$ sia **RIFLESSIVA, SIMMETRICA e TRANSITIVA**:

– **RIFLESSIVA**: $\forall a \in A, a(R \cap S)a$, cioè $(a, a) \in R$ e $S \Leftrightarrow a \in A$.

La condizione è verificata per definizione dato che $(a, a) \in R \Leftrightarrow a \in A$ e $(a, a) \in S \Leftrightarrow a \in A$, quindi $(a, a) \in R$ e $S \Leftrightarrow a \in A$, anche se $R \cap S = \emptyset$.

Verificata.

– **SIMMETRICA**: $\forall a, b \in A, aCb \Leftrightarrow bCa$, cioè $(a, b) \in C \Leftrightarrow (b, a) \in C$

$$C = R \cap S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \cap a \in S\}$$

Per ipotesi, $(a, b) \in R$ e $S \Leftrightarrow (b, a) \in R$ e S

$\stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in R$ e $(a, b) \in S \Leftrightarrow (b, a) \in R$ e $(b, a) \in S$. **Verificata.**

– **TRANSITIVA**: $\forall a, b, c \in A, aCb$ e $bCc \Rightarrow aCc$, cioè (a, b) e $(b, c) \in C \Rightarrow (a, c) \in C$

$$C = R \cap S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \cap a \in S\}$$

$$(a, b) \text{ e } (b, c) \in C \Rightarrow (a, c) \in C \stackrel{\text{def}}{=}$$

$(a, b) \text{ e } (b, c) \in R \text{ e } (a, b) \text{ e } (b, c) \in S \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \text{ e } (b, c) \in R \cap S$. **Verificata.**

2. $C = R \cup S$ sia **RIFLESSIVA, SIMMETRICA e TRANSITIVA**:

– **RIFLESSIVA**: $\forall a \in A, aCa$, cioè $(a, a) \in R$ o $S \Leftrightarrow a \in A$.

$$C = R \cup S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \cup a \in S\}$$

$\forall a \in A, aRa$ o $aSa \Rightarrow (a, a) \in R$ o $(a, a) \in S \stackrel{\text{def}}{=} (a, a) \in R$ o $S \stackrel{\text{def}}{=} (a, a) \in C$. **Verificata.**

– **SIMMETRICA**: $\forall a, b \in A, aCb \Leftrightarrow bCa$, cioè $(a, b) \in C \Leftrightarrow (b, a) \in C$

$$C = R \cup S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \cup a \in S\}$$

Per ipotesi, $(a, b) \in C \Leftrightarrow (b, a) \in C \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in R$ o $S \Leftrightarrow (b, a) \in R$ o S

$$\stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in R \text{ o } (a, b) \in S \Leftrightarrow (b, a) \in R \text{ o } (b, a) \in S. \text{ **Verificata.**}$$

– **TRANSITIVA**: $\forall a, b, c \in A, aCb \text{ e } bCc \Rightarrow aCc$, cioè $(a, b) \text{ e } (b, c) \in C \Rightarrow (a, c) \in C$

$$C = R \cup S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \cup a \in S\}$$

$$(a, b) \text{ e } (b, c) \in C \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in C \text{ e } (b, c) \in C \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in R \text{ o } S \text{ e } (b, c) \in R \text{ o } S$$

Per definizione, $(a, b) \text{ e } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$, $(a, b) \text{ e } (b, c) \in S \Rightarrow (a, c) \in S$

Ma $(a, b) \text{ e } (b, c) \in R \text{ o } (a, b) \text{ e } (b, c) \in S \neq (a, b) \in R \text{ o } S \text{ e } (b, c) \in R \text{ o } S$.

La transitività vale solo se $(a, b) \text{ e } (b, c)$ provengono entrambi dalla stessa relazione, pertanto la condizione **non** è **verificata**.

3. $C = R - S$ sia **RIFLESSIVA**, **SIMMETRICA** e **TRANSITIVA**:

– **RIFLESSIVA**: $\forall a \in A, aCa$, cioè $(a, a) \in R - S \Leftrightarrow a \in A$.

$$C = R - S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \text{ e } a \notin S\}$$

$C \subseteq R$, quindi $\forall a \in A, aRa \text{ e } a \notin S$. Dato che $R \neq S$, l'ipotesi è **verificata**.

– **SIMMETRICA**: $\forall a, b \in A, aCb \Leftrightarrow bCa$, cioè $(a, b) \in C \Leftrightarrow (b, a) \in C$

$$C = R - S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \text{ e } a \notin S\}$$

se $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$ e se $(a, b) \in S \Leftrightarrow (b, a) \in S$, quindi

$C = \{(a, b), (b, a) | (a, b), (b, a) \in R \text{ e } (a, b), (b, a) \notin S\}$. **Verificata.**

– **TRANSITIVA**: $\forall a, b, c \in A, aCb \text{ e } bCc \Rightarrow aCc$, cioè $(a, c) \in C \Rightarrow (a, b) \text{ e } (b, c) \in C$

$$C = R - S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \text{ e } a \notin S\}$$

$$(a, b) \text{ e } (b, c) \in C \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in C \text{ e } (b, c) \in C \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in R - S \text{ e } (b, c) \in R - S$$

Per definizione, $(a, b) \text{ e } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$, $(a, b) \text{ e } (b, c) \in S \Rightarrow (a, c) \in S$

Ma $(a, b) \text{ e } (b, c) \in R \text{ e } (a, b) \text{ e } (b, c) \notin S \neq (a, b) \in R \text{ e } (a, b) \notin S \text{ o } (b, c) \in R \text{ e } (b, c) \notin S$, perché se $(a, b) \notin S \text{ o } (b, c) \notin S \Rightarrow (a, b) \text{ e } (b, c) \notin S$. **Non verificata.**

Esercizio 2)

Nonostante si tratti questa volta di relazioni d'ordine, i risultati (tranne il primo) sono tutti non verificati per gli stessi motivi per cui lo erano per le relazioni d'equivalenza.

L'intersezione tra due relazioni antisimmetriche è antisimmetrica.

Esercizio 3)

$$\forall z, z' \in \mathbb{Z}, \quad \text{se } |z - z'| = 5 \Leftrightarrow (z, z') \in R$$

La relazione non è RIFLESSIVA, poiché non esiste alcun numero che sottratto a sé stesso dia 5.

La relazione è SIMMETRICA per definizione di valore assoluto, $\forall (z, z') \in R \Leftrightarrow (z', z) \in R$,
poiché $z - z' = 5 \Leftrightarrow z' - z = -5$

La relazione non è TRANSITIVA, poiché se $|z - z'| = 5$ e $|z' - y| = 5$, $|z - y| - |z - z'| = 0$,
quindi $|z - y| = 10$

Non è una relazione di equivalenza.

Esercizio 4)

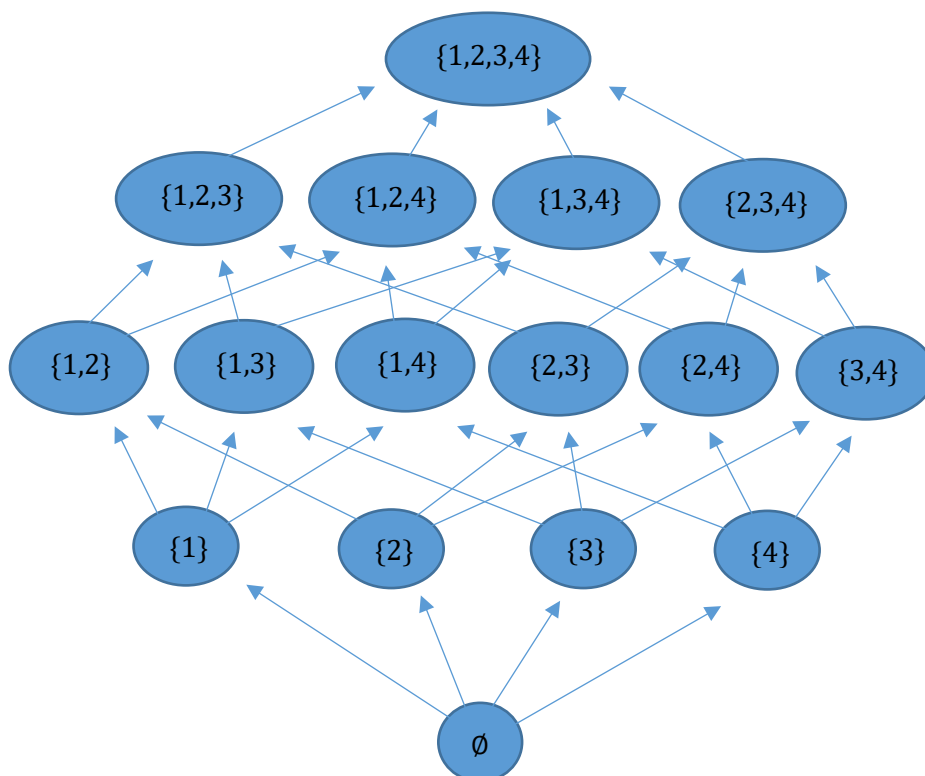
$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \geq b \text{ e } c \leq d$$

La relazione è RIFLESSIVA, perché $a \geq a$ e $a \leq a$

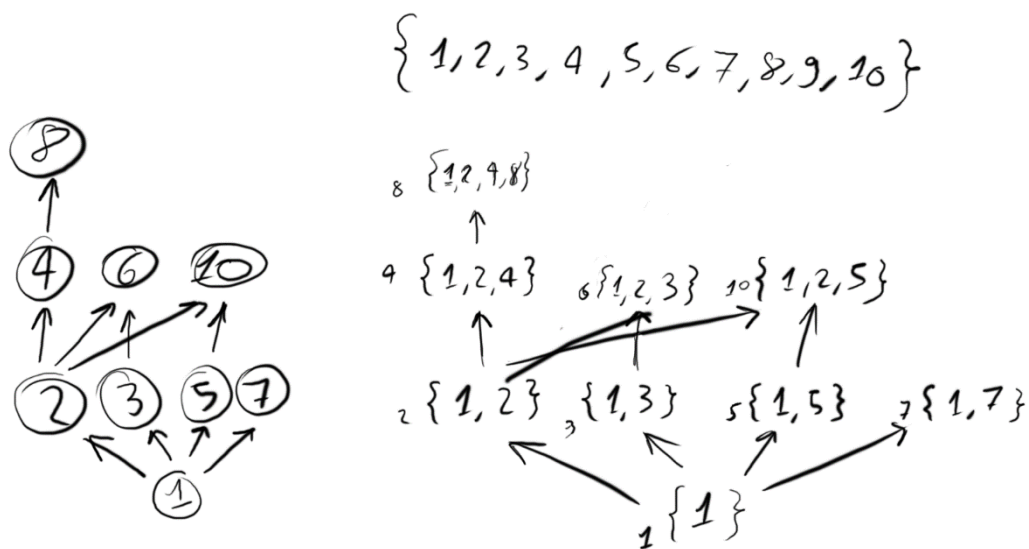
La relazione è ANTISIMMETRICA, perché $a \geq b$ e $b \geq a \Leftrightarrow a = b$

La relazione è TRANSITIVA, perché se $a \geq b$ e $c \leq d$, $b \geq e$ e $d \leq f$, allora $a \geq e$ e $c \leq f$

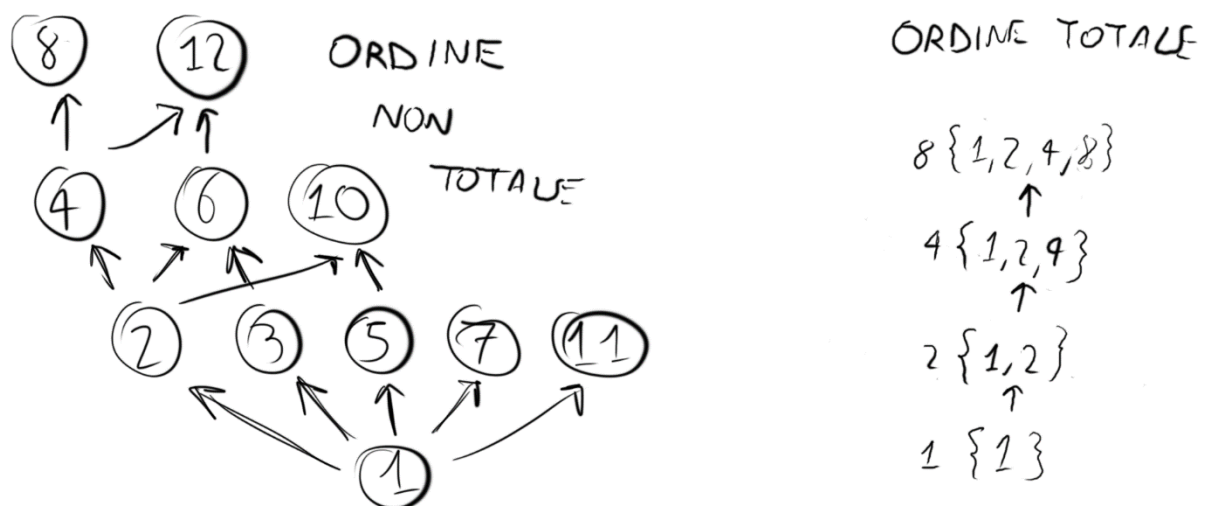
Esercizio 5)



Esercizio 6)



Esercizio 7)



Esercizio 8)

$$R = \{(a, a') \mid a, a' \in A\}$$

$$R' = \{(a', a) \mid (a, a') \in R\}$$

Se R è riflessiva, allora aRa .

Quindi $\forall (a, a') \in R : a = a' \exists (a', a) \in R' : (a, a') \in R \text{ e } a = a'$. **Verificata.**

Se R è antisimmetrica, allora $aRa' \text{ e } a'Ra \rightarrow a = a'$. Quindi $\forall (a, a'), (a', a) \in R, a = a'$.

$\forall (a, a'), (a', a) \in R \exists (a', a), (a, a') \in R': a = a'$. **Verificata.**

Se R è transitiva, allora se aRb e bRc , allora aRc .

Quindi, $\forall (a, b), (b, c) \in R, (a, c) \in R$.

Se $R' = \{(a', a) | (a, a') \in R\}$, allora se $\forall (a, b), (b, c), (a, c) \in R \exists (b, a), (c, b), (c, a) \in R$. **Verificata.**

Esercizio 10)

Dato $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(r, s) \in S \Leftrightarrow r^2 = s^2$

S è **RIFLESSIVA**, perché per definizione $r^2 = r^2 \forall r \in S$.

S è **SIMMETRICA**, perché per definizione di uguaglianza, se $r^2 = s^2$ allora $s^2 = r^2$

S è **TRANSITIVA**, perché per definizione se $r^2 = s^2$ e $s^2 = t^2$, allora $r^2 = t^2$

Le classi di equivalenza sono 2: quella in cui le due variabili r e s hanno lo stesso

segno e quella in cui le due variabili r e s hanno segni opposti.

Queste classi sono a due a due disgiunte perché due numeri discordi di segno, per definizione, non possono essere concordi.

$$S[(r_1, s_1)] = \{(r, s) : | \operatorname{sgn}(r) = \operatorname{sgn}(s) \}$$

$$S[(r_2, s_2)] = \{(r, s) : | \operatorname{sgn}(r) \neq \operatorname{sgn}(s) \}$$

Esercizio 11)

$$R = \forall a \in \mathbb{Z}, \exists a \bmod 5$$

Le classi di equivalenza sono 5, una per ogni possibile resto che può restituire la funzione di modulo: 0, 1, 2, 3, e 4.

Essendo mod una funzione, un valore del dominio \mathbb{Z} non può restituire due moduli differenti.

$$R[0] = \{a | a \bmod 5 = 0\}$$

$$R[1] = \{a | a \bmod 5 = 1\}$$

$$R[2] = \{a | a \bmod 5 = 2\}$$

$$R[3] = \{a | a \bmod 5 = 3\}$$

$$R[4] = \{a | a \bmod 5 = 4\}$$

$$R[5] = \{a | a \bmod 5 = 0\}$$

$$R[6] = \{a | a \bmod 5 = 1\}$$

Esercizio 12)

$$F = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

S è **RIFLESSIVA**, perché per definizione $(a, a)R(a, a)$ significa che $aa = aa$, che è sempre vero.

S è **SIMMETRICA**, perché per definizione di uguaglianza, se $ad = bc$ allora $bc = ad$

S è **TRANSITIVA**, perché per definizione se $ad = bc$ e $bc = fe$, $ab = fe$

$$R[(1, 1)] = (1, 1)R(c, d) \Leftrightarrow d = c$$

$$\forall (a, b) \in F : a = b \text{ e } b \neq 0, R[(a, b)] = \{(c, d) | c = d\}$$

$$R[(1,2)] = (1,2)R(c,d) \Leftrightarrow d = 2c$$

$$\forall (a,b) \in F: a \neq b \text{ e } b \neq 0, \quad R[(a,b)] = \{(c,d) \mid c \neq d\}$$

$$R[(1,2)] = R[(1,3)] = R[(1,4)]$$

Esercizio 13)

- 1) Negare la tesi: esiste un'affrancatura ottenibile da francobolli da 10 e 15 c. non divisibile per 5.
- 2) $C = \{n \mid n \text{ non divisibile per } 5\}$ dove $n = k * 10 + j * 15$ dove k è un numero generico di francobolli da 10, e j è un numero generico di francobolli da 15
- 3) $m = \min C$. 10 è divisibile per 5 e quindi è valida
- 4) m è divisibile per 5 perché $m = 5(k * 2 + j * 3)$
 m è divisibile per 5, quindi $m \notin C$.

Esercizio 14)

- 1) Negare la tesi: esiste un intero m t.c. $0 \leq m < 2^{n+1}$ e non c'è una scelta di buste contenenti 1,2,4,8, ..., 2^n il cui contenuto somma a m intero (proprietà P negata)
- 2) $C = \{m \mid 0 \leq m < 2^{n+1}, m \text{ non può essere ricavato dalla somma di una qualunque scelta di buste}\}$
- 3) $m = \min C$
 La proprietà P è verificata per $m = 0$ perché basta non prendere alcuna busta, quindi $1 \leq m \leq 2^{n+1}$
- 4) Ogni numero m può essere scomposto in una somma di potenze di 2, infatti $m + 1 = m + 2^0$.
 A sua volta, per definizione, ogni potenza ennesima di $2 \geq 0$ può essere scritta come $2 * 2^{n-1}$, quindi $2^n = 2 * 2^{n-1}$ e il viceversa $2 * 2^{n-1} = 2^n$ è altrettanto vero.
 Dato che ogni numero ≥ 0 può essere scritto come somma di 1, e avere la somma di due potenze di 2 uguali significa avere una potenza di 2 di grado superiore, esiste sempre un modo di scrivere un numero $< 2^{n+1}$ e > 0 come somma diverse potenze di 2 di grado inferiore.
 $2^{n+1} - 1$ può essere scritto come $2 * 2^n - 2^0$.

Esercizio 15)

- 1) Negare la tesi: Esiste un numero $n \geq 0$ per cui non vale l'identità $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$
- 2) $C = \{m \mid m \geq 0 \text{ e non vale l'identità } \sum_{k=0}^m k^2 = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}\}$
- 3) $m = \min C$
 La proprietà P è verificata per $m = 0$, $0^2 = \frac{0 * (0 + 1) * (0 + 1)}{6}$, $0 = 0$.
- 4) Per ipotesi, supponiamo che l'identità sia verificata per

$$\sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m * (m + 1) * (2m + 1)}{6}$$

Verifichiamo che sia verificata anche per

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2 = \frac{(m - 1) * (m - 1 + 1) * (2(m - 1) + 1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2 + m^2 = \frac{(m-1) * (m-1+1) * (2(m-1)+1)}{6} + m^2$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2 + m^2 = \frac{(m) * (m-1) * (2m-1) + 6m^2}{6} = \frac{(m) * (2m^2 + 3m + 1)}{6} =$$

$$= \frac{(m) * (m+1) * (2m+1)}{6} = \sum_{k=0}^m k^2$$

Essendo verificata per $m = 0$, la proprietà è pertanto verificata per tutte le $m \geq 0$.

Esercizio 16)

1) Negare la tesi: Esiste un numero $n \geq 1$ per cui non vale l'identità

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n \times (n + 1).$$

2) $C = \{m | m \geq 1 \text{ e non vale la proprietà } P\}$

3) $m = \min C$

La proprietà $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2m = m \times (m + 1)$ è valida per $m = 1$ poichè $2 = 1 * (2)$, quindi $m = 1 \notin C$.

4) Per ipotesi, supponiamo che l'identità sia verificata per una m qualsiasi:

$$\sum_{i=1}^m 2 * i = m \times (m + 1)$$

Verifichiamo che sia verificata anche per $m - 1$:

$$\sum_{i=0}^{m-1} 2 * i = (m - 1) \times (m)$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} 2 * i + 2 * m = (m - 1) \times (m) + 2 * m = 2 * m + m^2 - m = m^2 + m =$$

$$= m \times (m + 1) = \sum_{i=1}^m 2 * i$$

Essendo verificata per $m = 1$, la proprietà è pertanto verificata per tutte le $m \geq 1$.

Esercizio 17)

1) Negare la tesi: Esiste un numero naturale $n \geq 1$ per cui non vale l'identità

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

2) $C = \{m | m \geq 1 \text{ e non vale la proprietà } P\}$

3) $m = \min C$

La proprietà $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2m - 1 = m^2$ è verificata $m = 1$, $2 * 1 - 1 = 1$.

4) Per ipotesi, supponiamo che l'identità sia verificata per una m qualsiasi:

$$\sum_{i=1}^m 2i - 1 = m^2$$

Verifichiamo che sia verificata anche per $m - 1$:

$$\sum_{i=1}^{m-1} 2i - 1 + 2m - 1 = (m - 1)^2 = m^2 - 2m + 1 + 2m - 1 = m^2$$

Essendo verificata per $m = 1$, la proprietà è pertanto verificata per tutte le $m \geq 1$.

Esercizio 18)

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 1$, $6^n - 1$ è divisibile per 5.

1) Passo base: $6^1 - 1 = 5$, che è chiaramente divisibile per 5.

2) Passo induttivo: Supponiamo che $6^k - 1$ sia divisibile per 5 e dimostriamo che

$$\forall k : k \geq 1, \quad 6^{k+1} - 1 \bmod 5 = 0$$

Chiamiamo \parallel la relazione "essere divisibili per":

$$6^{k+1} - 1 \parallel 5 \Rightarrow 6^{k+1} - 1 - 5 + 5 \parallel 5$$

Se $6^{k+1} - 1 - 5$ è divisibile per 5, allora lo stesso numero, sommato a 5, sarà a sua volta divisibile per 5, pertanto possiamo tralasciarlo.

$$6^{k+1} - 1 - 5 \parallel 5 \Rightarrow 6^{k+1} - 6 \parallel 5 \Rightarrow 6(6^k - 1) \parallel 5$$

Per ipotesi, sappiamo che $(6^k - 1)$ è divisibile per 5, e un numero moltiplicato per 5 è a sua volta divisibile per 5. Pertanto, $6^{k+1} - 1$ è divisibile per 5.

Esercizio 19)

*Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 0$, $n * (n^2 + 5)$ è divisibile per 6.*

- 1) *Passo base: $0 * (0 + 5) = 0$ che è chiaramente divisibile per 5.*
- 2) *Passo induttivo: Supponiamo per ipotesi che $n * (n^2 + 5)$ sia divisibile per 6 e dimostriamo che $(n + 1) * ((n + 1)^2 + 5)$ sia divisibile per 6.*

$$\begin{aligned}(n + 1) * ((n + 1)^2 + 5) &= (n + 1) * ((n^2 + 2n + 1) + 5) = n^3 + 2n^2 + 6n + n^2 + 2n + 6 \\&= n^3 + 3n^2 + 8n + 6 = n * (n^2 + 5) + 3n^2 + 3n + 6 = n * (n^2 + 5) + 3n^2 + 3n + 6 \\&= n * (n^2 + 5) + 3n * (n + 1) + 6\end{aligned}$$

*Essendo $n * (n^2 + 5)$ divisibile per 6, e sapendo che un numero divisibile per 6 addizionato ad un numero divisibile per 6 da comunque un numero divisibile per 6, possiamo tralasciare tutti i numeri divisibili per 6.*

$$3 * n * (n + 1)$$

Eliminando tutti gli addendi divisibili per 6 otteniamo questa espressione.

E' semplice verificare che anche questa espressione è sempre divisibile per 6, poiché se n è dispari, $n + 1$ sarà pari e quindi divisibile per 2; viceversa, se $n + 1$ è dispari allora n è parie quindi divisibile per 2, ed essendo il risultato in entrambi i casi moltiplicato per 3, allora il risultato è sempre divisibile per 6.

Esercizio 20)

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 12$, esistono $l, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tali che
$$n = 5 \times l + 4 \times p.$$

- 1) *Passo base: $12 = 4 + 4 + 4$. **Verificato.***
- 2) *Supponiamo per ipotesi che anche $n + 1$ sia componibile dalla somma di l volte 5 e p volte 4.*

$$\begin{array}{l} \text{per } l \leq 3 \\ n \Rightarrow n + 1 \text{ come } 4 \Rightarrow 5 \end{array}$$

$$\text{per } l > 3$$

$$n \Rightarrow n + 1 \text{ come } 5 + 5 + 5 \Rightarrow 4 + 4 + 4 + 4$$

La condizione è sempre verificata.

Esercizio 21)

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 1$, il prodotto dei primi n numeri naturali positivi pari è uguale a $2^n \times n!$

- 1) *Passo base: $n = 1 \rightarrow 2^1 \times 1! = 2$. **Verificato***
- 2) *Passo induttivo: supponiamo per ipotesi che la proprietà sia verificata anche per $n + 1$.*

$$2^{n+1} \times (n + 1)! = 2 \times (n + 1) \times 2^n \times n!$$

$2^n \times n!$ è il prodotto dei primi n numeri naturali positivi pari, a questi numeri moltiplichiamo l' $(n + 1)$ esimo numero naturale positivo pari, ossia $(n + 1) \times 2$.

Esercizio 22)

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 4$, $2^n < n!$

- 1) *Passo base: $n = 4 \rightarrow 2^4 < 4!$. **Verificato.***
- 2) *Passo induttivo: supponiamo per ipotesi che la proprietà sia verificata anche per $n + 1$.*

$$2^{n+1} < (n + 1)! \rightarrow 2 \times 2^n < n! \times (n + 1)$$

$2^n < n!$ è sempre verificata per ipotesi induttiva, e dato che moltiplichiamo 2 per il membro a sinistra e $(n + 1)$ per quello a destra, sapendo che $n \geq 4$, sappiamo che qualunque valore nel dominio assuma n , $(n + 1)$ sarà sempre maggiore di 2, e pertanto la disuguaglianza persiste e anzi si fa più decisa con l'aumentare di n . **Verificato.**

Esercizio 23)

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{i=1}^n i \times 2^i = (n - 1) \times (2^{n+1}) + 2$$

- 1) *Passo base: $2 = 0 + 2$.*
- 2) *Passo induttivo: supponiamo per ipotesi che la proprietà sia verificata anche per $n + 1$.*

$$\sum_{i=1}^n i \times 2^i + (n + 1) \times 2^{n+1} = (n + 1 - 1) \times (2^{n+1+1}) + 2$$

$$(n - 1) \times (2^{n+1}) + 2 + (n + 1) \times 2^{n+1} = (n) \times (2^{n+2}) + 2$$

$$(2^{n+2}) \times ((n - 1) + (n + 1)) + 2 = (n) \times (2^{n+2}) + 2$$

$$(2^{n+1}) \times (2n) + 2 = (n) \times (2^{n+2}) + 2$$

$$(2^{n+2}) \times (n) + 2 = (n) \times (2^{n+2}) + 2$$

L'identità è stata verificata.

Esercizio 24)

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 2$, vale:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

1) *Passo base:* $1 + \frac{1}{4} < 2 - \frac{1}{2}$.

2) *Passo induttivo:* $1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$.

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$-\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$0 < \frac{(n+1)^2 - n * (n+1) - n}{n * (n+1)^2}$$

$$0 < \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - n - n}{n * (n+1)^2}$$

$$0 < \frac{1}{n * (n+1)^2}$$

Poiché il secondo membro è sempre positivo per valori di $n \geq 2$, allora la proprietà è sempre dimostrata.

Esercizio 25)

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 0$, vale:

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

1) *Passo base:* $0 = 1 - 1$.

2) *Passo induttivo:* $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$

$$F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$

$$F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$$

Abbiamo dimostrato che la proprietà è valida poiché è la proprietà di Fibonacci.

Esercizio 26)

Dimostriamo per Induzione Forte per ogni $d \geq 1$ numero dispari, vale:

$$\sum_{i=1}^d (F_i * F_{i+1}) = (F_{d+1})^2$$

1) *Passo base:* $1 * 1 = 1 * 1$, $F_0 = 1$ e $F_1 = 1, F_d = 1$

2) *Passo induttivo forte:*

$$\sum_{i=1}^d (F_i * F_{i+1}) = (F_{d+1})^2$$

$$\sum_{i=1}^d (F_i * F_{i+1}) = (F_d + F_{d-1})^2 \rightarrow \sum_{i=1}^d (F_i * F_{i+1}) = F_d^2 + 2 * (F_{d-1} * F_d) + F_{d-1}^2$$

$$\sum_{i=1}^{d-2} (F_i * F_{i+1}) + (F_{d-1} * F_d) + (F_d * F_{d+1}) = F_d^2 + 2 * (F_{d-1} * F_d) + F_{d-1}^2$$

$$\sum_{i=1}^{d-2} (F_i * F_{i+1}) + \cancel{(F_{d-1} * F_d)} + (F_d * (F_{d-1} + F_d)) = F_d^2 + 2 * (F_{d-1} * F_d) + F_{d-1}^2$$

$$\sum_{i=1}^{d-2} (F_i * F_{i+1}) + (F_d * F_{d-1}) + F_d^2 = F_d^2 + 2 * (F_{d-1} * F_d) + F_{d-1}^2$$

$$\sum_{i=1}^{d-2} (F_i * F_{i+1}) = F_{d-1}^2$$

La proprietà è dimostrata.

Esercizio 27)

Dimostriamo per Induzione Forte per ogni $n \geq 0$, vale:

$$F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

1) *Passo base:* $1 = 2 - 1$, $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$, $F_{n+2} = 2$

2) *Passo induttivo forte:*

$$F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_n + F_{n+1} - 1$$

$$F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$$

La proprietà è dimostrata poiché, a partire da un numero della sequenza di fibonacci, siamo riusciti a dimostrare tutti i precedenti.

Esercizio 28)

$$n + 1 = a * b, \quad \text{ma } a, b \in \{2, n\}, \quad \text{non } \{1, n\}$$

Infatti, il valore 1 è fuori dal dominio della tesi e pertanto non è scomponibile in fattori primi.