Dispensa 6

Esercizio 1)

$$Date\ R \neq S \subseteq A\ x\ A:$$

$$sono\ \boldsymbol{RIFLESSIVE}, \quad cioè\ \forall a \in A, aRa, \quad (a,a) \in R \Leftrightarrow a \in A$$

$$sono\ \boldsymbol{SIMMETRICHE}, \quad cioè\ \forall a,b \in A, se\ aRb \Leftrightarrow bRa, \quad (a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R$$

$$sono\ \boldsymbol{TRANSITIVE}, \quad cioè\ \forall a,b,c \in A, se\ aRb\ e\ bRc \Longrightarrow aRc, \quad (a,b)\ e\ (b,c) \in R \Longrightarrow (a,c) \in R$$

$$Pertanto, verifichiamo\ che$$

1. $R \cap S$ *sia* $\boldsymbol{RIFLESSIVA}, \boldsymbol{SIMMETRICA}$ *e* $\boldsymbol{TRANSITIVA}$:

$$-\boldsymbol{RIFLESSIVA}: \forall a \in A, a(R \cap S)a, \quad cioè\ (a,a) \in R\ e\ S \Leftrightarrow a \in A.$$

$$La\ condizione\ è\ verificata\ per\ definizione\ dato\ che\ (a,a) \in R \Leftrightarrow a \in A\ e\ (a,a) \in S \Leftrightarrow a \in A, quindi\ (a,a) \in R\ e\ S \Leftrightarrow a \in A, anche\ se\ R \cap S = \emptyset.$$
$$\boldsymbol{Verificata}.$$

$$-\boldsymbol{SIMMETRICA}: \forall a,b \in A, aCb \Leftrightarrow bCa, \quad cioè\ (a,b) \in C \Leftrightarrow (b,a) \in C$$

$$C = R \cap S \overset{\text{def}}{=} \{a | a \in R \cap a \in S\}$$

$$Per\ ipotesi, \quad (a,b) \in R\ e\ S \Leftrightarrow (b,a) \in R\ e\ S$$

$$\overset{\text{def}}{=} (a,b) \in R\ e\ (a,b) \in S \Leftrightarrow (b,a) \in R\ e\ (b,a) \in S.\ \boldsymbol{Verificata}.$$

$$-\boldsymbol{TRANSITIVA}: \forall a,b,c \in A, aCb\ e\ bCc \Longrightarrow aCc, \quad cioè\ (a,b)\ e\ (b,c) \in C \Longrightarrow (a,c) \in C$$

$$C = R \cap S \overset{\text{def}}{=} \{a | a \in R \cap a \in S\}$$

$$(a,b)\ e\ (b,c) \in C \Longrightarrow (a,c) \in C \overset{\text{def}}{=}$$

$$(a,b)\ e\ (b,c) \in R\ e\ (a,b)\ e\ (b,c) \in S \overset{\text{def}}{=} (a,b)\ e\ (b,c) \in R \cap S.\ \boldsymbol{Verificata}.$$

2. $C = R \cup S$ *sia* $\boldsymbol{RIFLESSIVA}, \boldsymbol{SIMMETRICA}$ *e* $\boldsymbol{TRANSITIVA}$:

$$-\boldsymbol{RIFLESSIVA}: \forall a \in A, aCa, \quad cioè\ (a,a) \in R\ o\ S \Leftrightarrow a \in A.$$

$$C = R \cup S \overset{\text{def}}{=} \{a | a \in R \cup a \in S\}$$

$$\forall a \in A, aRa\ o\ aSa \Longrightarrow (a,a) \in R\ o\ (a,a) \in S \overset{\text{def}}{=} (a,a) \in R\ o\ S \overset{\text{def}}{=} (a,a) \in C.\ \boldsymbol{Verificata}.$$

$$-\boldsymbol{SIMMETRICA}: \forall a,b \in A, aCb \Leftrightarrow bCa, \quad cioè\ (a,b) \in C \Leftrightarrow (b,a) \in C$$

$$C = R \cup S \overset{\text{def}}{=} \{a | a \in R \cup a \in S\}$$

$$Per\ ipotesi, \quad (a,b) \in C \Leftrightarrow (b,a) \in C \overset{\text{def}}{=} (a,b) \in R\ o\ S \Leftrightarrow (b,a) \in R\ o\ S$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (a,b) \in R \; o \; (a,b) \in S \iff (b,a) \in R \; o \; (b,a) \in S. \; \boldsymbol{Verificata}.$$

$$-\boldsymbol{TRANSITIVA}: \; \forall a,b,c \in A, aCb \; e \; bCc \implies aCc, \qquad cioè \; (a,b) \; e \; (b,c) \in C \implies (a,c) \in C$$

$$C = R \cup S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \cup a \in S\}$$

$$(a,b) \; e \; (b,c) \in C \stackrel{\text{def}}{=} (a,b) \in C \; e \; (b,c) \in C \stackrel{\text{def}}{=} (a,b) \in R \; o \; S \; e \; (b,c) \in R \; o \; S$$

$$Per \; definizione, \qquad (a,b) \; e \; (b,c) \in R \implies (a,c) \in R, \qquad (a,b) \; e \; (b,c) \in S \implies (a,c) \in S$$

$$Ma \;\; (a,b) \; e \; (b,c) \in R \; o \; (a,b) \; e \; (b,c) \in S \neq (a,b) \in R \; o \; S \; e \; (b,c) \in R \; o \; S.$$

$$La \; transitività \; vale \; solo \; se \; (a,b) \; e \; (b,c) \; provengono \; entrambi \; dalla \; stessa \; relazione, pertanto \; la \; condizione \; \boldsymbol{non} \; è \; \boldsymbol{verificata}.$$

3. $C = R - S$ *sia* $\boldsymbol{RIFLESSIVA}, \boldsymbol{SIMMETRICA}$ *e* $\boldsymbol{TRANSITIVA}$:

$$-\boldsymbol{RIFLESSIVA}: \forall a \in A, aCa, \qquad cioè \; (a,a) \in R - S \iff a \in A.$$

$$C = R - S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \; e \; a \notin S\}$$

$$C \subseteq R, quindi \; \forall a \in A, aRa \; e \; a \notin S. \; Dato \; che \; R \neq S, l'ipotesi \; è \; \boldsymbol{verificata}.$$

$$-\boldsymbol{SIMMETRICA}: \; \forall a,b \in A, aCb \iff bCa, \qquad cioè \; (a,b) \in C \iff (b,a) \in C$$

$$C = R - S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \; e \; a \notin S\}$$

$$se \;\; (a,b) \in R \iff (b,a) \in R \; e \; se \; (a,b) \in S \iff (b,a) \in S, quindi$$

$$C = \{(a,b),(b,a) | (a,b),(b,a) \in R \; e \; (a,b),(b,a) \notin S\}. \; \boldsymbol{Verificata}.$$

$$-\boldsymbol{TRANSITIVA}: \; \forall a,b,c \in A, aCb \; e \; bCc \implies aCc, \qquad cioè \; (a,c) \in C \implies (a,b) \; e \; (b,c) \in C$$

$$C = R - S \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in R \; e \; a \notin S\}$$

$$(a,b) \; e \; (b,c) \in C \stackrel{\text{def}}{=} (a,b) \in C \; e \; (b,c) \in C \stackrel{\text{def}}{=} (a,b) \in R - S \; e \; (b,c) \in R - S$$

$$Per \; definizione, \qquad (a,b) \; e \; (b,c) \in R \implies (a,c) \in R, \qquad (a,b) \; e \; (b,c) \in S \implies (a,c) \in S$$

$$Ma \;\; (a,b) \; e \; (b,c) \in R \; e \; (a,b) \; e \; (b,c) \notin S \neq (a,b) \in R \; e \; (a,b) \notin S \; o \; (b,c) \in R \; e \; (b,c) \notin S, perché \; se \; (a,b) \notin S \; o \; (b,c) \notin S \not\Rightarrow (a,b) \; e \; (b,c) \notin S. \boldsymbol{Non \; verificata}.$$

Esercizio 2)

$$Nonostante \; si \; tratti \; questa \; volta \; di \; relazioni \; d'ordine, i \; risultati \; (tranne \; il \; primo) \; sono \; tutti \; non \; verificati \; per \; gli \; stessi \; motivi \; per \; cui \; lo \; erano \; per \; le \; relazioni \; d'equivalenza.$$

$$L'intersezione \; tra \; due \; relazioni \; antisimmetriche \; è \; antisimmetrica.$$

Esercizio 3)

$$\forall z, z' \in Z, \qquad se\ |z - z'| = 5 \Leftrightarrow (z, z') \in R$$

$$La\ relazione\ non\ è\ RIFLESSIVA, poiché\ non\ esiste\ alcun\ numero\ che\ sottratto\ a\ sé\ stesso\ dia\ 5.$$

$$La\ relazione\ è\ SIMMETRICA\ per\ definizione\ di\ valore\ assoluto, \forall(z, z') \in R \Leftrightarrow (z', z) \in R,$$
$$poiché\ z - z' = 5 \Leftrightarrow z' - z = -5$$

$$La\ relazione\ non\ è\ TRANSITIVA, poiché\ se\ |z - z'| = 5\ e\ |z' - y| = 5, |z - y| - |z - z'| = 0,$$
$$quindi\ |z - y| = 10$$

$$Non\ è\ una\ relazione\ di\ equivalenza.$$

Esercizio 4)

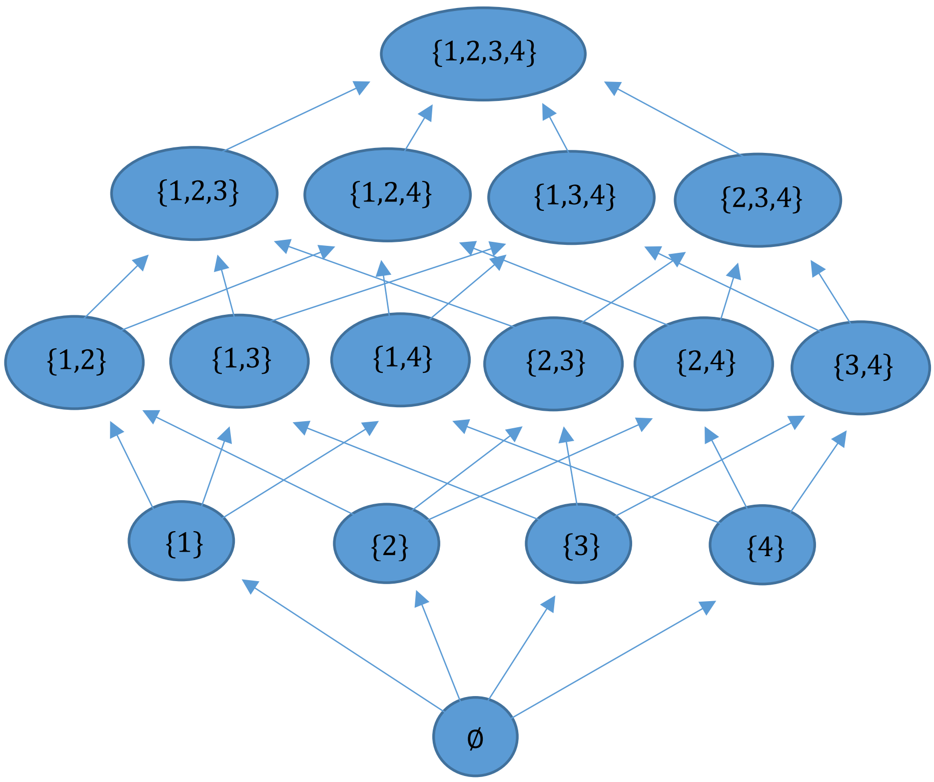
$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \geq b\ e\ c \leq d$$

$$La\ relazione\ è\ RIFLESSIVA, perché\ a \geq a\ e\ a \leq a$$

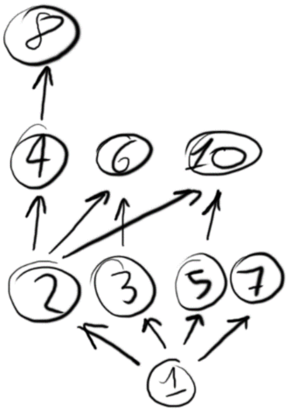
$$La\ relazione\ è\ ANTISIMMETRICA, perché\ a \geq b\ e\ b \geq a \Leftrightarrow a = b$$

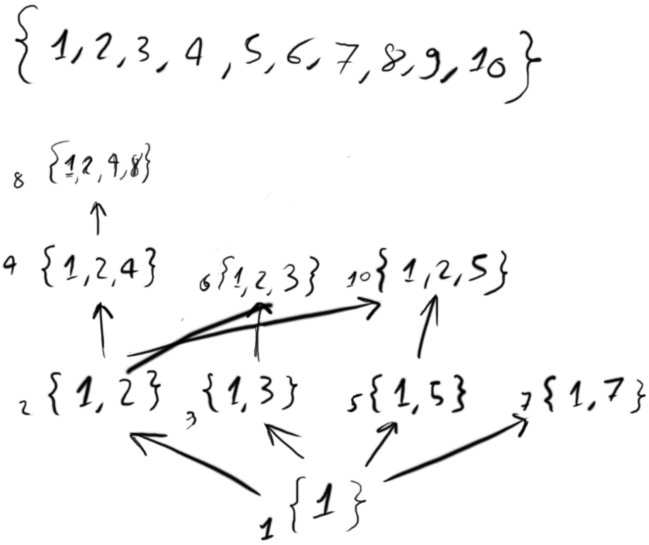
$$La\ relazione\ è\ TRANSITIVA, perché\ se\ a \geq b\ e\ c \leq d, b \geq e\ e\ d \leq f, allora\ a \geq e\ e\ c \leq f$$

Esercizio 5)

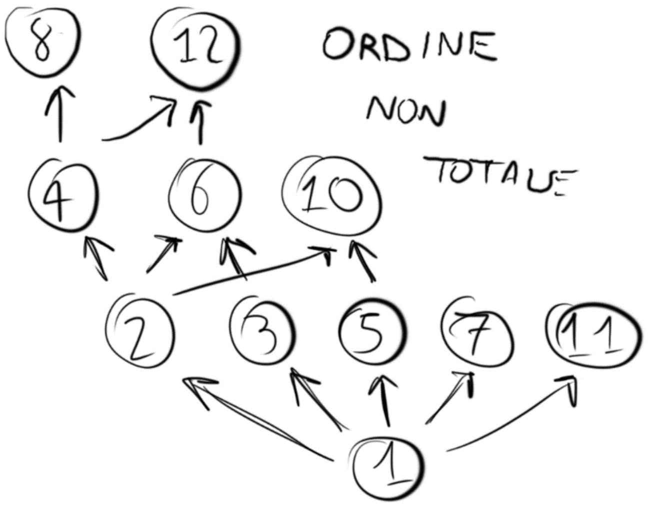


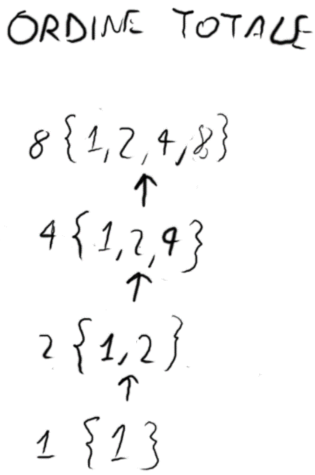
Esercizio 6)





Esercizio 7)





Esercizio 8)

$$R = \{(a, a') |\ a, a' \in\ A\}$$

$$R' = \{(a', a) |\ (a, a') \in R\}$$

$$Se\ R\ \grave{e}\ riflessiva, allora\ aRa.$$

$$Quindi\ \forall(a, a')\ \in R:\ a = a'\ \exists\ (a', a)\ \in\ R':\ (a, a') \in R\ e\ a = a'.\ \boldsymbol{Verificata}.$$

$$Se\ R\ \grave{e}\ antisimmetrica, allora\ aRa'\ e\ a'Ra\ \rightarrow a = a'.\ Quindi\ \forall(a, a'), (a', a) \in R,\ \ a = a'.$$

$$\forall(a, a'), (a', a) \in R \ \exists \ (a', a), (a, a') \ \in R': a = a'. \ \boldsymbol{Verificata}.$$

$$Se \ R \ \text{è} \ transitiva, allora \ se \ aRb \ e \ bRc, allora \ aRc.$$

$$Quindi, \forall(a, b), (b, c) \ \in R, (a, c) \in R.$$

$$Se \ R' = \{(a', a) | (a, a') \in R\}, allora \ se \ \forall(a, b), (b, c), (a, c) \in R \ \exists \ (b, a), (c, b), (c, a) \in R. \ \boldsymbol{Verificata}.$$

Esercizio 10)

$$Dato \ S \ \subseteq \mathbb{R} \ x \ \mathbb{R}, \qquad (r, s) \in S \Leftrightarrow r^2 = s^2$$

S è $\boldsymbol{RIFLESSIVA}$, $perché \ per \ definizione \ r^2 = r^2 \ \forall r \ \in S.$
S è $\boldsymbol{SIMMETRICA}$, $perché \ per \ definizione \ di \ uguaglianza, \qquad se \ r^2 = s^2 \ allora \ s^2 = r^2$
S è $\boldsymbol{TRANSITIVA}$, $perché \ per \ definizione \ se \ r^2 = s^2 \ e \ s^2 = t^2, \qquad allora \ r^2 = t^2$

Le classi di equivalenza sono 2: quella in cui le due variabili r e s hanno lo stesso segno e quella in cui le due variabili r e s hanno segni opposti.
Queste classi sono a due a due disgiunte perché due numeri discordi di segno, per definizione, non possono essere concordi.

$$S[(r_1, s_1)] = \{(r, s): | \ sgn(r) = sgn(s)\}$$

$$S[(r_2, s_2)] = \{(r, s): | \ sgn(r) \neq sgn(s)\}$$

Esercizio 11)

$$R = \forall a \in \mathbb{Z}, \exists \ \text{a mod 5}$$

Le classi di equivalenza sono 5, *una per ogni possibile resto che può restituire la funzione di modulo*: 0,1,2,3, *e* 4.
Essendo mod una funzione, un valore del dominio $\mathbb{Z}$ *non può restituire due moduli differenti.*

$$R[0] = \{a | \ a \ mod \ 5 = 0\}$$
$$R[1] = \{a | \ a \ mod \ 5 = 1\}$$
$$R[2] = \{a | \ a \ mod \ 5 = 2\}$$
$$R[3] = \{a | \ a \ mod \ 5 = 3\}$$
$$R[4] = \{a | \ a \ mod \ 5 = 4\}$$
$$R[5] = \{a | \ a \ mod \ 5 = 0\}$$
$$R[6] = \{a | \ a \ mod \ 5 = 1\}$$

Esercizio 12)

$$F = \{(p, q): p, q \ \in \mathbb{Z}, q \ \neq 0\}$$

$$(a, b)R(c, d) \ \Leftrightarrow ad = bc$$

S è $\boldsymbol{RIFLESSIVA}$, $perché \ per \ definizione \ \ (a, a)R(a, a) \ significa \ che \ aa = aa, che$ è $sempre \ vero.$
S è $\boldsymbol{SIMMETRICA}$, $perché \ per \ definizione \ di \ uguaglianza, \qquad se \ ad = bc \ allora \ bc = ad$
S è $\boldsymbol{TRANSITIVA}$, $perché \ per \ definizione \ se \ ad = bc \ e \ bc = fe, \qquad ab = fe$

$$R[(1,1)] = (1,1)R(c, d) \ \Leftrightarrow d = c$$
$$\forall(a, b) \in F: a = b \ e \ b \neq 0, \ \ R[(a, b)] = \{(c, d) | \ c = d\}$$

$$R[(1,2)] = (1,2)R(c,d) \iff d = 2c$$
$$\forall (a,b) \in F: a \neq b \text{ e } b \neq 0, \qquad R[(a,b)] = \{(c,d) | \ c \neq d\}$$
$$R[(1,2)] = R[(1,3)] = R[(1,4)]$$

Esercizio 13)

1) $Negare\ la\ tesi: esiste\ un'affrancatura\ \ ottenibile\ da\ francobolli\ da\ 10\ e\ 15\ c. non\ divisibile\ per\ 5.$
2) $C = \{n | n\ non\ divisibili\ per\ 5\}\ dove\ n = k * 10 + j * 15\ dove$
   $k\ \text{è}\ un\ numero\ generico\ di\ francobolli\ da\ 10, e\ j\ \text{è}\ un\ numero\ generico\ di\ francobolli\ da\ 15$
3) $m = \min C.\ 10\ \text{è}\ divisibile\ per\ 5\ e\ quindi\ \text{è}\ valido.$
4) $m\ \text{è}\ divisibile\ per\ 5\ perch\acute{e}\ m = 5(k * 2 + j * 3)$
   $m\ \text{è}\ divisibile\ per\ 5, quindi\ m\ \notin C.$

Esercizio 14)

1) $Negare\ la\ tesi: esiste\ un\ intero\ m\ t.c. 0 \leq m < 2^{n+1}\ e\ non\ c'\text{è}\ una\ scelta\ di\ buste$
   $contenenti\ 1,2,4,8, \dots, 2^n\ il\ cui\ contenuto\ somma\ a\ m\ euro\ (propriet\text{à}\ P\ negata)$
2) $C = \{m | 0 \leq m < \ 2^{n+1},$
   $m\ non\ pu\text{ò}\ essere\ ricavato\ dalla\ somma\ \ di\ una\ qualunque\ scelta\ di\ buste\}$
3) $m = \min C$
   $La\ propriet\text{à}\ P\ \text{è}\ verificata\ per\ m = 0\ perch\acute{e}\ basta\ non\ prendere\ alcuna\ busta,$
   $quindi\ 1 \leq m \leq\ 2^{n+1}$
4) $Ogni\ numero\ m\ pu\text{ò}\ essere\ scomposto\ in\ una\ somma\ di\ potenze\ di\ 2, infatti$
   $m + 1 = m + 2^{\,0}.$
   $A\ sua\ volta, per\ definizione, ogni\ potenza\ ennesima\ di\ 2 \geq 0\ pu\text{ò}\ essere\ scritta$
   $come\ 2 * 2^{n-1}, quindi\ 2^n\ = 2 * 2^{n-1}\ e\ il\ viceversa\ 2 * 2^{n-1}\ = 2^{\,n}\ \text{è}\ altrettanto\ vero.$
   $Dato\ che\ ogni\ numero \geq 0\ pu\text{ò}\ essere\ scritto\ come\ somma\ di\ 1, e\ avere\ la\ somma\ di$
   $due\ potenze\ di\ 2\ uguali\ significa\ avere\ una\ potenza\ di\ 2\ di\ grado\ superiore,$
   $esiste\ sempre\ un\ modo\ di\ scrivere\ un\ numero < di\ 2^{n+1}\ e > 0\ come\ somma\ diverse$
   $potenze\ di\ 2\ di\ grado\ inferiore.$
   $2^{n+1} - 1\ pu\text{ò}\ essere\ scritto\ come\ 2 * 2^n - 2^0.$

Esercizio 15)

1) $Negare\ la\ tesi: Esiste\ un\ numero\ n \geq 0\ per\ cui\ non\ vale\ l'identit\text{à}\ \sum_{n=0}^{k} k^2 = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$
2) $C = \left\{m \middle| m \geq 0\ e\ non\ vale\ l'identit\text{à}\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}\right\}$
3) $m = \min C$
   $La\ propriet\text{à}\ P\ \text{è}\ verificata\ per\ m = 0, \qquad 0^2 = \dfrac{0 * (0+1) * (0+1)}{6}, \qquad 0 = 0.$
4) $Per\ ipotesi, supponiamo\ che\ l'identit\text{à}\ sia\ verificata\ per$

$$\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m * (m+1) * (2m+1)}{6}$$

$Verifichiamo\ che\ sia\ verificata\ anche\ per$

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2 = \frac{(m-1) * (m-1+1) * (2(m-1)+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2 + m^2 = \frac{(m-1)*(m-1+1)*(2(m-1)+1)}{6} + m^2$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2 + m^2 = \frac{(m)*(m-1)*(2m-1)+6m^2}{6} = \frac{(m)*(2m^2+3m+1)}{6} =$$

$$= \frac{(m)*(m+1)*(2m+1)}{6} = \sum_{k=0}^{m} k^2$$

$Essendo\ verificata\ per\ m = 0, \quad la\ proprietà\ è\ pertanto\ verificata\ per\ tutte\ le\ m \geq 0.$

Esercizio 16)

1) $Negare\ la\ tesi: Esiste\ un\ numero\ n \geq 1\ per\ cui\ non\ vale\ l'identità$
   $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n \times (n + 1).$
2) $C = \{m | m \geq 1\ e\ non\ vale\ la\ proprietà\ P\}$
3) $m = \min C$
   $La\ proprietà\ 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2m = m \times (m + 1)\ è\ valida\ per\ m = 1$
   $poichè\ 2 = 1 * (2), \quad quindi\ m = 1 \notin C.$
4) $Per\ ipotesi, supponiamo\ che\ l'identità\ sia\ verificata\ per\ una\ m\ qualsiasi:$

$$\sum_{i=1}^{m} 2 * i = m \times (m + 1)$$

$Verifichiamo\ che\ sia\ verificata\ anche\ per\ m - 1:$

$$\sum_{i=0}^{m-1} 2 * i = (m-1) \times (m)$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} 2 * i + 2 * m = (m-1) \times (m) + 2 * m = 2 * m + m^2 - m = m^2 + m =$$

$$= m \times (m + 1) = \sum_{i=1}^{m} 2 * i$$

$Essendo\ verificata\ per\ m = 1, \quad la\ proprietà\ è\ pertanto\ verificata\ per\ tutte\ le\ m \geq 1.$

Esercizio 17)

1) $Negare\ la\ tesi: Esiste\ un\ numero\ naturale\ n \geq 1\ per\ cui\ non\ vale\ l'identità$
   $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1 = n^2$
2) $C = \{m | m \geq 1\ e\ non\ vale\ la\ prorpietà\ P\}$
3) $m = \min C$
   $La\ proprietà\ 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2m - 1 = m^2\ è\ verificata\ m = 1, \quad 2 * 1 - 1 = 1.$

4) $Per\ ipotesi, supponiamo\ che\ l'identità\ sia\ verificata\ per\ una\ m\ qualsiasi:$

$$\sum_{i=1}^{m} 2i - 1 = m^2$$

$$Verifichiamo\ che\ sia\ verificata\ anche\ per\ m-1:$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} 2i-1+2m-1=(m-1)^2=m^2-2m+1+2m-1=\ m^2$$

$$Essendo\ verificata\ per\ m=1, \qquad la\ propriet\text{à}\ \text{è}\ pertanto\ verificata\ per\ tutte\ le\ m \geq 1.$$

Esercizio 18)

$$Dimostriamo\ per\ induzione\ che\ per\ ogni\ n \geq 1, \qquad 6^n-1\ \text{è}\ divisibile\ per\ 5.$$

1) $Passo\ base\text{:}\ \ 6^1-1=\ 5,\ \ che\ \text{è}\ chiaramente\ divisibile\ per\ 5.$

2) $Passo\ induttivo\text{:}\ \ Supponiamo\ che\ 6^k-1\ sia\ divisibile\ per\ 5\ e\ \ dimostriamo\ che$

$\qquad \forall k : k \geq 1, \qquad 6^{k+1}-1\ mod\ 5=0$

$$Chiamiamo\ \backslash\backslash\ la\ relazione\ \text{"essere divisibili per":}$$

$$6^{k+1}-1\ \backslash\backslash\ 5\ \Longrightarrow 6^{k+1}-1-5+5\ \backslash\backslash\ 5$$

$$Se\ 6^{k+1}-1-5\ \text{è}\ divisibile\ per\ 5, allora\ lo\ stesso\ numero, sommato\ a\ 5,$$
$$sar\text{à}\ a\ sua\ volta\ divisibile\ per\ 5,\ \ pertanto\ possiamo\ tralasciarlo.$$

$$6^{k+1}-1-5\ \backslash\backslash\ 5\ \Longrightarrow\ 6^{k+1}-6\ \backslash\backslash\ 5\ \Longrightarrow\ 6\left(6^k-1\right)\ \backslash\backslash\ 5$$

$$Per\ ipotesi, sappiamo\ che\ \left(6^k-1\right)\ \text{è}\ divisibile\ per\ 5,\ \ e\ un\ numero\ moltiplicato\ per\ 5\ \text{è}$$
$$a\ sua\ volta\ divisibile\ per\ 5. Pertanto, \qquad 6^{k+1}-1\ \text{è}\ divisibile\ per\ 5.$$

Esercizio 19)

$$Dimostriamo\ per\ induzione\ che\ per\ ogni\ n \geq 0, \qquad n*(n^2+5)\ \text{è}\ divisibile\ per\ 6.$$

1) $Passo\ base$: $0*(0+5)=0$ $che\ \text{è}\ chiaramente\ divisibile\ per\ 5.$
2) $Passo\ induttivo$: $Supponiamo\ per\ ipotesi\ che\ n*(n^2+5)\ sia\ divisibile\ per\ 6$ $e\ dimostriamo\ che\ (n+1)*((n+1)^2+5)\ sia\ divisibile\ per\ 6.$

$$(n+1)*((n+1)^2+5) = (n+1)*\left((n^2+2n+1)+5\right) = n^3+2n^2+6n+n^2+2n+6$$
$$= n^3+3n^2+8n+6 = n*(n^2+5)+3n^2+3n+6 = n*(n^2+5)+3n^2+3n+6$$
$$= n*(n^2+5)+3n*(n+1)+6$$

$Essendo\ n*(n^2+5)\ divisibile\ per\ 6, e\ sapendo\ che\ un\ numero\ divisibile\ per\ 6\ addizionato$ $ad\ un\ numero\ divisibile\ per\ 6\ da\ comunque\ un\ numero\ divisibile\ per\ 6, possiamo\ tralasciare\ tutti\ i$ $numeri\ divisibili\ per\ 6.$

$$3*n*(n-1)$$

$Eliminando\ tutti\ gli\ addendi\ divisibili\ per\ 6\ otteniamo\ questa\ espressione.$
$E'semplice\ verificare\ che\ anche\ questa\ espressione\ \text{è}\ sempre\ divisibile\ per\ 6, poich\text{é}\ se\ n\ \text{è}\ dispari,$ $n+1\ sar\text{à}\ pari\ e\ quindi\ divisibile\ per\ 2; viceversa, se\ n+1\ \text{è}\ dispari$
$allora\ n\ \text{è}\ parie\ quindi\ divisibile\ per\ 2, ed\ essendo\ il\ risultato\ in\ entrambi\ i\ casi\ moltiplicato\ per\ 3,$ $allora\ il\ risultato\ \text{è}\ sempre\ divisibile\ per\ 6.$

Esercizio 20)

$$Dimostriamo\ per\ induzione\ che\ per\ ogni\ n \geq 12, esistono\ l,p\ \in\ N\ \cup\ \{0\}\ tali\ che$$
$$n\ =\ 5\ \times\ l+\ 4\ \times\ p.$$

1) $Passo\ base$: $12 = 4+4+4.$ $\boldsymbol{Verificato}.$
2) $Supponiamo\ per\ ipotesi\ che\ anche\ n+1\ sia\ componibile\ dalla\ somma\ di$ $l\ volte\ 5\ e\ p\ volte\ 4.$

$$per\ l \leq 3$$

$$n \Rightarrow n+1\ come\ 4 \Rightarrow 5$$

$$per\ l > 3$$

$$n \Rightarrow n+1\ come\ 5+5+5 \Rightarrow 4+4+4+4$$

$$La\ condizione\ \text{è}\ sempre\ verificata.$$

Esercizio 21)

$Dimostriamo\ per\ induzione\ che\ per\ ogni\ n \geq 1, il\ prodotto\ dei\ primi\ n\ nuneri\ naturali$ $positivi\ pari\ è\ uguale\ a\ 2^n \times\ n!$

1) $Passo\ base$: $n = 1 \ \rightarrow\ 2^1 * 1! = 2.$ $\boldsymbol{Verificato}$
2) $Passo\ induttivo: supponiamo\ per\ ipotesi\ che\ la\ proprietà\ sia\ verificata$ $anche\ per\ n + 1.$

$2^{n+1} \times (n + 1)! = 2 \times (n + 1) \times\ 2^n\ \times n!$

$2^n\ \times n!$ $è\ il\ prodotto\ dei\ primi\ n\ numeri\ naturali\ positivi\ pari,\qquad a\ questi\ numeri$ $moltiplichiamo\ l'(n + 1)esimo\ numero\ naturale\ positivi\ pari, ossia\ (n + 1) \times 2.$

Esercizio 22)

$Dimostriamo\ per\ induzione\ che\ per\ ogni\ n \geq 4,\qquad 2^n < n!$

1) $Passo\ base$: $n = 4\ \rightarrow\ 2^4 < 4!.$ $\boldsymbol{Verificato}.$
2) $Passo\ induttivo$: $supponiamo\ per\ ipotesi\ che\ la\ proprietà\ sia\ verificata$ $anche\ per\ n + 1.$

$2^{n+1} < (n + 1)!\ \rightarrow\ 2 * 2^n < n! * (n + 1)$

$2^n < n!$ $è\ sempre\ verificata\ per\ ipotesi\ induttiva, e\ dato\ che\ moltiplichiamo\ 2\ per\ il\ membro$ $a\ sinistra\ e\ (n + 1)\ per\ quello\ a\ destra, sapendo\ che\ n \geq 4, sappiamo\ che\ qualunque\ valore\ nel$ $dominio\ assuma\ n, (n + 1)\ sarà\ sempre\ maggiore\ di\ 2, e\ pertanto\ la\ disugualianza\ persiste$ $e\ anzi\ si\ fa\ più\ decisa\ con\ l'aumentare\ di\ n.$ $\boldsymbol{Verificato}.$

Esercizio 23)

$Dimostriamo\ per\ induzione\ che\ per\ ogni\ n \geq 1,\qquad vale:$

$$\sum_{i=1}^{n} i * 2^i = (n - 1) \times (2^{n+1}) + 2$$

1) $Passo\ base$: $2 = 0\ +\ 2\ .$
2) $Passo\ induttivo$: $supponiamo\ per\ ipotesi\ che\ la\ proprietà\ sia\ verificata$ $anche\ per\ n + 1.$

$$\sum_{i=1}^{n} i * 2^i + (n + 1) \times 2^{n+1} = (n + 1 - 1) \times (2^{n+1+1}) + 2$$

$$(n - 1) \times (2^{n+1}) + 2 + (n + 1) \times 2^{n+1} = (n) \times (2^{n+2}) + 2$$

$$(2^{n+2}) \times \big((n - 1) + (n + 1)\big) + 2\ = (n) \times (2^{n+2}) + 2$$

$$(2^{n+1}) \times (2n) + 2\ = (n) \times (2^{n+2}) + 2$$

$$(2^{n+2}) \times (n) + 2\ = (n) \times (2^{n+2}) + 2$$

$L'identità\ è\ stata\ verificata.$

Esercizio 24)

$$Dimostriamo\ per\ induzione\ che\ per\ ogni\ n \geq 2, \qquad vale:$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

1) *Passo base*: $1 + \frac{1}{4} < 2 - \frac{1}{2}$.
2) *Passo induttivo*: $1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$.

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$-\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$0 < \frac{(n+1)^2 - n*(n+1) - n}{n*(n+1)^2}$$

$$0 < \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - n - n}{n*(n+1)^2}$$

$$0 < \frac{1}{n*(n+1)^2}$$

Poiché il secondo membro è sempre positivo per valori di $n \geq 2$, *allora la proprietà è sempre dimostrata.*

Esercizio 25)

$$Dimostriamo\ per\ induzione\ che\ per\ ogni\ n \geq 0, \qquad vale:$$

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

1) *Passo base*: $0 = 1 - 1$.
2) *Passo induttivo*: $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$

$$F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$

$$F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$$

Abbiamo dimostrato che la proprietà è valida poiché è la proprietà di Fibonacci.

Esercizio 26)

$$Dimostriamo\ per\ Induzione\ Forte\ per\ ogni\ d \geq 1\ numero\ dispari, \qquad vale:$$

$$\sum_{i=1}^{d} (F_i * F_{i+1}) = (F_{d+1})^2$$

1) *Passo base*: $1 * 1 = 1 * 1$, $F_0 = 1$ *e* $F_1 = 1, F_d = 1$
2) *Passo induttivo forte*:

$$\sum_{i=1}^{d}(F_i * F_{i+1}) = (F_{d+1})^2$$

$$\sum_{i=1}^{d}(F_i * F_{i+1}) = \ (F_d + F_{d-1})^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{d}(F_i * F_{i+1}) = \ {F_d}^2 + 2 * (F_{d-1} * F_d) + \ {F_{d-1}}^2$$

$$\sum_{i=1}^{d-2}(F_i * F_{i+1}) + (F_{d-1} * F_d) + (F_d * F_{d+1}) = \ {F_d}^2 + 2 * (F_{d-1} * F_d) + \ {F_{d-1}}^2$$

$$\sum_{i=1}^{d-2}(F_i * F_{i+1}) + \cancel{(F_{d-1} * F_d)} + \big(F_d * (F_{d-1} + F_d)\big) = \ {F_d}^2 + \cancel{2} * (F_{d-1} * F_d) + \ {F_{d-1}}^2$$

$$\sum_{i=1}^{d-2}(F_i * F_{i+1}) + (F_d * F_{d-1}) + {F_d}^2 = \ {F_d}^2 + \cancel{2} * (F_{d-1} * F_d) + \ {F_{d-1}}^2$$

$$\sum_{i=1}^{d-2}(F_i * F_{i+1}) = {F_{d-1}}^2$$

La proprietà è dimostrata.

Esercizio 27)

Dimostriamo per Induzione Forte per ogni $n \geq 0$, *vale*:

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = \ F_{n+2} - 1$$

1) *Passo base*: $1 = 2 - 1$, $F_0 = 1$ *e* $F_1 = 1$, $F_{n+2} = 2$
2) *Passo induttivo forte*:

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = \ F_{n+2} - 1$$

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_{n-1} + F_n = \ F_n + F_{n+1} - 1$$

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_{n-1} = \ F_{n+1} - 1$$

La propietà è dimostrata poiché, a partire da un numero della sequenza di fibonacci, siamo riusciti a dimostrare tutti i precedenti.

Esercizio 28)

$$n + 1 = a * b, \qquad ma\ a, b\ \in \{2, n\}, \qquad non\ \{1, n\}$$

Infatti, il valore 1 è *fuori dal dominio della tesi e pertanto non* è *scomponibile in fattori primi.*