Metodi Matematici per l'Informatica - Esercizi 1
(a.a. 19/20, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`carlucci@di.uniroma1.it`)

Nota: Tutti gli esercizi possono risolversi con le figure della combinatoria ossia $D_{n,k}$ e $C_{n,k}$ e con le proprietà dei coefficienti binomiali viste a lezione finora (30 Settembre). Gli esercizi indicati con un asterisco sono più difficili di quelli che potrete incontrare all'esame.

Esercizio 1 *In una competizione gareggiano 10 atleti, di cui 3 italiani, 4 tedeschi e 3 inglesi. Tutti gli atleti arrivano al traguardo e non ci sono arrivi simultanei.*

- *Quanti sono gli ordini di arrivo possibili?*
- *Quante sono le possibili salite al podio? (i.e., primi tre classificati)*
- *Se i primi 5 classificati passano il turno, quanti sono i possibili passaggi di turno?*
- *Quanti sono gli ordini di arrivo con un inglese al primo posto?*
- *Quanti sono gli ordini di arrivo con un inglese all'ultimo posto?*
- *I tre atleti italiani si chiamano Tizio, Caio e Sempronio. Quanti sono gli ordini di arrivo in cui Tizio arriva prima di Caio? E quanti quelli in cui Caio arriva prima di Tizio?*
- *Quanti sono gli ordini di arrivo in cui Tizio arriva prima di Caio e Caio prima di Sempronio?*

Esercizio 2 *In una classe di 80 studenti 40 sono iscritti a Informatica e 40 a Matematica.*

- *Quante delegazioni di 6 rappresentanti posso formare?*
- *Quante delegazioni di 6 rappresentanti con 3 rappresentanti di Informatica e 3 di Matematica posso formare?*
- *Quante delegazioni di 6 rappresentanti con uno di Matematica e 5 di Informatica?*
- *Quante delegazioni di 6 rappresentanti con almeno uno di Matematica e almeno uno di Informatica? (Suggerimento: dividere in tipi le possibili delegazioni).*
- *Nelle domande precedenti, è importante o no che il numero di studenti di Matematica sia uguale al numero di studenti di Informatica?*

Esercizio 3 *In una classe di 100 studenti 30 sono di Matematica, 60 di Informatica e 10 di Fisica. Quante delegazioni di 5 posso formare con almeno un rappresentante di ogni materia?*

Esercizio 4 *Consideriamo il sistema di targhe formato da 2 lettere 3 cifre e 2 lettere, usando le 26 lettere dell'alfabeto latino.*

- *Quante targhe finiscono con A?*
- *Quante targhe finiscono con B e contengono una sola B?*

- *Quante targhe contengo almeno una C?*
- *Quante targhe contengo una sola D? (Suggerimento: dividere in tipi)*
- *Quante targhe contengono almeno una C e finiscono con Z?*
- *Quante targhe contengono esattamente una B e esattamente una Z?*

Esercizio 5 *Quanti sono i modi di formare due squadre da 8 da un gruppo di 16 persone?*

Esercizio 6 *Consideriamo l'intervallo chiuso* $[0, 20]$. *In quanti modi posso dividerlo in 9 intervalli*

$$[0, a_1), [a_1, a_2), [a_2, a_3), \dots, [a_8, n]$$

dove $a_1 < a_2 < \cdots < a_8 < n$ *con gli* a_i *naturali positivi? In quanti modi posso dividerlo in 12 intervalli? Esiste una formula generale per questo problema?*

Esercizio 7 *Quanti sono i modi di formare due squadre da 8 da un gruppo di 16 persone?*

Esercizio 8 *Quanti sono i modi di dividere in due parti non vuote un insieme di n elementi?*

Esercizio 9 *Dimostrare che* $\sum_{i=0}^{8} \binom{16}{8} = \sum_{i=8}^{16} \binom{16}{i}$ *usando una delle proprietà viste a lezione. Come si può generalizzare questa identità?*

Esercizio 10 *(*) Dare una dimostrazione combinatoria della seguente identità (somma di termini in una colonna del Triangolo di Tartaglia-Pascal), dove* $k \leq n$*:*

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}$$

Metodi Matematici per l'Informatica - Esercizi 2 (a.a. 19/20, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`carlucci@di.uniroma1.it`)

Nota: Tutti gli esercizi possono risolversi con le figure della combinatoria e con le proprietà dei coefficienti binomiali viste a lezione finora (7 Ottobre). Gli esercizi indicati con un asterisco (o due!) sono più difficili di quelli che potrete incontrare all'esame.

Esercizio 1 *Dimostrare usando le proprietà del coefficiente binomiale che*

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

(Suggerimento: scrivere 3 *come un binomio).*

Esercizio 2 *Dimostrare con doppio conteggio la seguente identità*

$$k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}.$$

Esercizio 3 *Dimostrare con doppio conteggio la seguente identità*

$$\binom{n}{2} \times \binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k} \times \binom{k}{2}.$$

Esercizio 4 *Un branco di gorilla è formato tipicamente da 3 maschi e 7 femmine. Consideriamo una popolazione di gorilla composta da 30 maschi e 60 femmine.*

- *Quanti branchi posso formare?*
- *Se il* 10% *dei maschi e il* 50% *delle femmine è portatore di un gene speciale, quanti branchi posso formare composti interamente da portatori di quel gene?*
- *Se ci sono due maschi alfa, quanti branchi posso formare contenenti un unico maschio alfa?*
- *Se ci sono due maschi alfa, quanti branchi posso formare contenenti almeno un maschio alfa?*

Esercizio 5 *Estraggo simultaneamente 5 numeri da un'urna contenente i numeri da 1 a 100.*

- *Quante estrazioni possibili?*
- *Quante estrazioni con esattamente un numero dispari?*
- *Quante estrazioni con esattamente due numeri pari?*
- *Quante estrazioni con almeno un numero dispari?*

Esercizio 6 *8 bambini vanno in gelateria. Ciascuno sceglie un gusto tra i 20 gusti disponibili. Quante possibili ordinazioni può ricevere il gelataio? (N.B. l'ordine non importa).*

Esercizio 7 *Voglio spendere 15 euro dal mio fruttivendolo e posso scegliere tra 9 tipi di frutti:*

- *Se voglio almeno un frutto di ogni tipo, quanti modi ho di fare la spesa?*
- *Se non voglio prendere più di due frutti dello stesso tipo?*

Esercizio 8 *Quante coppie di parole (anche insensate) posso formare dalla parola Anarchia? (per es. aranchia, harci-naa, etc).*

Esercizio 9 *In quanti modi posso distribuire 18 biscotti tra 4 bambini dando almeno 2 e al massimo 5 biscotti a ciascun bambino?*

(Suggerimneto: riddure a un problema con un solo vincolo).

Esercizio 10 *(*) Dimostrare che*

$$\binom{13}{3} = \binom{4}{1} \times \binom{10}{3} - \binom{4}{2} \times \binom{7}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{4}{3}.$$

(Suggerimento: Il membro a sinistra conta il numero delle soluzioni non-negative dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$. Quante soluzioni esistono in cui tutte le variabili sono ≤ 2?).

Esercizio 11 *(**) Dimostrare con doppio conteggio la seguente identità:*

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \times \binom{n+N-k-1}{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} \times \binom{n-1}{N-1-i} \times 2^{N-i}.$$

(Suggerimento: l'espressione a sinistra può interpretarsi come la scelta di un sottinsieme qualunque di un insieme di N elementi X, e di un sottinsieme di altri $N-1$ elementi (distinti da quelli già scelti), scelti tra quelli di X e altri $n-1$ elementi aggiuntivi. Trovare una descrizione dell'espressione a destra che giustifichi l'identità.)

Metodi Matematici per l'Informatica - Esercizi 3
(a.a. 19/20, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`carlucci@di.uniroma1.it`)

Nota: Gli esercizi riguardano funzioni e cardinalità (lezioni fino al 28 Ottobre incluso).

Esercizio 1 *Sia* $A = \{0, 1\}$ *e* $B = \{1, 2\}$*. Descrivere per esteso i seguenti insiemi:*

1. $(A \times B) \times (B \times B)$
2. $(A \times B) \cap B$
3. $(A \cup B) \times A$
4. $(A \times B) - (B \times B)$
5. $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$.
6. $mathcal P(A \cap B)$.
7. $\mathcal{P}(A \times B)$.

Esercizio 2 *Siano* A *e* B *insiemi qualunque. Dimostrare che* $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Esercizio 3 *Siano* A *e* B *insiemi qualunque. Dimostrare che se* $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ *allora* $A \subseteq B$.

Esercizio 4 *Siano* A, B, C *insiemi qualunque* $C \neq \emptyset$*. Dimostrare che se* $A \times C = B \times C$ *allora* $A = B$.

Esercizio 5 *Siano* A, B, C *insiemi qualunque. Dimostrare che* $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Esercizio 6 *Siano* A, B, C *insiemi qualunque. Dimostrare che* $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Esercizio 7 *Dimostrare o trovare un controesempio:* $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Esercizio 8 *Dimostrare o trovare un controesempio: Se* $A = B - C$ *allora* $B = A \cup C$.

Esercizio 9 *Descrivere tutte le funzioni da* $\{a, b, c\}$ *a* $\{0, 1\}$.

Esercizio 10 *Sia* $f : X \to Y$*. Esiste una funzione* $g : Y \to X$ *tale che* $g \circ f = id_X$ *se e soltanto se* f *è iniettiva. (*id_X *denota la funzione identità su* X*).*

Esercizio 11 *Sia* $f : X \to Y$*. Esiste una funzione* $g : Y \to X$ *tale che* $f \circ g = id_Y$ *se e soltanto se* f *è suriettiva. (*id_Y *denota la funzione identità su* Y*).*

Esercizio 12 *Ogni funzione può scriversi come composizione di una funzione iniettiva e di una funzione suriettiva: per ogni* $f : X \to Y$ *esiste un insieme* Z *tale che esiste una funzione* $h : Z \to Y$ *iniettiva ed esiste una funzione* $g : X \to Z$ *tali che* $f = h \circ g$.

Esercizio 13 *L'insieme* $\{(x, y) : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, 3x + y = 4\}$ *è una funzione da* $\mathbb{Z}$ *in* $\mathbb{Z}$*?*

Esercizio 14 *Dimostrare che la funzione* $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ *è iniettiva. La funzione è anche suriettiva?*

Esercizio 15 *Dimostrare che la funzione* $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definita da* $f(a, b) = (a + b, a + 2b)$ *è una biiezione.*

Esercizio 16 *Quante sono le funzioni* f *da* $\{a, b, c, d, e\}$ *a* $\{1, 2, 3, 4\}$*? Quante sono suriettive, quante iniettive e quante biiettive?*

Esercizio 17 *Quante sono le funzioni* f *da* $\{a, b, c, d\}$ *a* $\{1, 2, 3, 4\}$*? Quante sono suriettive, quante iniettive e quante biiettive?*

Esercizio 18 *Sia* $f : A \to B$ *e* $X, Y \subseteq A$*. Dimostrare che* $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$*.*

Metodi Matematici per l'Informatica - Esercizi 4
(a.a. 19/20, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`carlucci@di.uniroma1.it`)

Nota: Gli esercizi riguardano le relazioni, il principio del minimo numero e l'induzione.

1 Relazioni

Esercizio 1 *Siano R e S due relazioni di equivalenza sullo stesso insieme A. Quali dei punti seguenti sono veri e quali falsi?*

1. $R \cap S$ *è una relazione di equivalenza.*
2. $R \cup S$ *è una relazione di equivalenza.*
3. $R - S$ *è una relazione di equivalenza.*

Esercizio 2 *Siano R e S due relazioni d'ordine sullo stesso insieme A. Quali dei punti seguenti sono veri e quali falsi?*

1. $R \cap S$ *è un ordine.*
2. $R \cup S$ *è un ordine.*
3. $R - S$ *è un ordine.*

Esercizio 3 *Sia R una relazione transitiva sugli interi $\mathbb{Z}$ tale che per ogni $z, z' \in \mathbb{Z}$, se $|z - z'| = 5$ allora $(z, z') \in R$. R è una relazione di equivalenza?*

Esercizio 4 *Sia $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relazione così definita:*

$$(a, b)R(c, d) \text{ se e solo se } a \geq b \,\&\, c \leq d.$$

Di quali proprietà gode R?

Esercizio 5 *Disegnare il diagramma di Hasse dell'ordine per inclusione sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.*

Esercizio 6 *Si consideri la relazione di divisibilità sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Applicare il teorema visto a lezione sull'esistenza di una immersione in $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, 10\})$ (ordinato per inclusione) specificando le immagini di ogni elemento e disegnando il diagramma di Hasse.*

Esercizio 7 *Si consideri la relazione di divisibilità sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 12\}$. Disegnare il diagramma di Hasse. Indicare un sottinsieme su cui l'ordine per divisibilità è un odine totale.*

Esercizio 8 *Per una relazione $R \subseteq A \times A$ denotiamo con $R^{-1} = \{(a', a) : (a, a') \in R\}$ la sua inversa. Dimostrare che se R è un ordine su A allora R^{-1} è un ordine su A.*

Esercizio 9 *Dato un insieme A denotiamo con D_A la relazione $\{(a,a) : a \in A\}$ su A, detta diagonale di A. Dimostrare che una relazione $R \subseteq A \times A$ è antisimmetrica se $R \cap R^{-1} \subseteq D_A$.*

Esercizio 10 *Sia $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relazione sui numeri reali definita come segue:*

$$(r,s) \in S \text{ se e solo se } r^2 = s^2.$$

Dimostrare che S è una equivalenza. Descrivere le sue classi di equivalenza.

Esercizio 11 *Si consideri la relazione di equivalenza $\equiv_5$ sull'insieme degli interi $\mathbb{Z}$. Quante sono le classi di equivalenza? Descrivere le classi di equivalenza di $0,1,2,3,4,5,6$.*

Esercizio 12 *Consideriamo l'insieme $F = \{(p,q) : p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Definiamo $R \subseteq F \times F$ come segue: $(a,b)R(c,d)$ se e solo se $ad = bc$. Dimostrare che R è una equivalenza. Descrivere le classi di equivalenza di $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$.*

2 Minimo Numero e Induzione

Esercizio 13 *Dimostrare usando il Principio del Minimo Numero la seguente proposizione: Ogni affrancatura ottenibile con francobolli da 10 e da 15 centesimi è divisibile per 5.*

Esercizio 14 *Dimostrare usando il Principio del Minimo Numero la seguente proposizione per ogni $n \geq 0$: Ho a disposizione delle buste contenenti $1,2,4,8,\ldots,2^n$ euro. Per ogni intero $0 \leq m < 2^{n+1}$ c'è una scelta di buste il cui contenuto somma a n euro.*

Esercizio 15 *Dimostrare usando il Principio del Minimo Numero la seguente proposizione: Per ogni $n \geq 0$ vale la seguente identità:*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}.$$

Esercizio 16 *Dimostrare usando il Principio del Minimo Numero la seguente proposizione: Per ogni $n \geq 1$ vale la seguente identità:*

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n \times (n+1).$$

Esercizio 17 *Dimostrare usando il Principio del Minimo Numero la seguente proposizione: Per ogni $n \geq 1$ vale la seguente identità:*

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

Esercizio 18 *Dimostrare per Induzione la seguente proposizione: Per ogni $n \geq 1$, $6^n - 1$ è divisibile per 5.*

Esercizio 19 *Dimostrare per Induzione la seguente proposizione: Per ogni $n \geq 0$, $n(n^2+5)$ è divisibile per 6.*

Esercizio 20 *Dimostrare per Induzione la seguente proposizione: Per ogni $n \geq 12$, esistono $\ell, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tali che $n = 5 \times \ell + 4 \times p$.*

Esercizio 21 *Dimostrare per Induzione la seguente proposizione: Per ogni $n \geq 1$, il prodotto dei primi n numeri naturali positivi pari è uguale a $2^n \times n!$*

Esercizio 22 *Dimostrare per Induzione la seguente proposizione: Per ogni $n \geq 4$, $2^n < n!$.*

Esercizio 23 *Dimostrare per Induzione la seguente proposizione: Per ogni* $n \geq 1$ *vale la seguente identità:*

$$\sum_{i=1}^{n} i \times 2^i = (n-1) \times 2^{n+1} + 2.$$

Esercizio 24 *Dimostrare per Induzione la seguente proposizione: Per ogni* $n \geq 2$ *vale la seguente disegua-glianza:*

$$1 + 1/4 + 1/9 + \cdots + 1/n^2 < 2 - 1/n.$$

Esercizio 25 *Dimostrare per Induzione la seguente proposizione: Per ogni* $n \geq 0$,

$$F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1,$$

dove gli F_n *sono i numeri di Fibonacci così definiti:* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *e, per* $n \geq 2$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

Esercizio 26 *Dimostrare per Induzione Forte la seguente proposizione: Per ogni* $d \geq 1$ *numero dispari,*

$$\sum_{i=1}^{d} (F_i \times F_{i+1}) = (F_{d+1})^2,$$

dove gli F_n *sono i numeri di Fibonacci.*

Esercizio 27 *Dimostrare per Induzione Forte la seguente proposizione: Per ogni* $n \geq 0$,

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1,$$

dove gli F_n *sono i numeri di Fibonacci.*

Esercizio 28 *Trovare l'errore nella seguente dimostrazione per Induzione Forte.*

Tesi: Ogni $n \geq 2$ *ha una fattorizzazione unica in fattori primi.*

Base: 2 *ha una fattorizzazione unica in fattori primi.*

Passo: Assumiamo che ogni $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ *ha una fattorizzazione unica in fattori primi e dimostriamo che* $n+1$ *ha una fattorizzazione unica in fattori primi. Ragioniamo per casi. Se* $n+1$ *è primo, ovviamente ha una fattorizzazione unica in fattori primi. Se* $n+1$ *non è primo, allora* $n+1 = a \times b$ *per qualche* $a, b \in \{1, \ldots, n\}$. *Per ipotesi induttiva,* a *e* b *hanno fattorizzazioni uniche in fattori primi. Dato che* $n+1 = a \times b$, *anche* $n+1$ *ha una fattorizzazione unica in fattori primi.*

Esercizio 29 *Trovare l'errore nella seguente dimostrazione per Induzione Forte.*

Tesi: Ogni $n \geq 2$ *ha una fattorizzazione unica in fattori primi.*

Base: 2 *ha una fattorizzazione unica in fattori primi.*

Passo: Assumiamo che ogni $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ *ha una fattorizzazione unica in fattori primi e dimostriamo che* $n+1$ *ha una fattorizzazione unica in fattori primi. Ragioniamo per casi. Se* $n+1$ *è primo, ovviamente ha una fattorizzazione unica in fattori primi. Se* $n+1$ *non è primo, allora* $n+1 = a \times b$ *per qualche* $a, b \in \{1, \ldots, n\}$. *Per ipotesi induttiva,* a *e* b *hanno fattorizzazioni uniche in fattori primi. Dato che* $n+1 = a \times b$, *anche* $n+1$ *ha una fattorizzazione unica in fattori primi.*

Esercizio 30 *Trovare l'errore nella seguente dimostrazione per Induzione Forte.*

Tesi: Per ogni $n \geq 0$, $9 \times n = 0$.

Base: $9 \times 0 = 0$.

Passo: Assumiamo che per ogni $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *valga* $9 \times k = 0$ *e e dimostriamo che* $9 \times (k+1) = 0$. *Siano* $\ell, p > 0$ *tali che* $k+1 = \ell + p$ *e* $\ell, p < k+1$. *Per ipotesi induttiva* $9 \times \ell = 0$ *e* $9 \times p = 0$. *Dunque* $9 \times (k+1) = 9 \times (\ell + p) = (9 \times \ell) + (9 \times p) = 0 + 0 = 0$.

Metodi Matematici per l'Informatica - Esercizi 5
(a.a. 19/20, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`carlucci@di.uniroma1.it`)

Nota Alcuni degli esercizi seguenti sono tratti da E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic* e da M. D. Davis, R. Sigal e E. J. Weyuker, *Computability, Complexity, and Languages.*

Esercizio 1 *Formalizzare le seguenti frasi in linguaggio proposizionale e decidere se l'ultima frase è conseguenza logica dell'insieme delle precedenti (usando tavole di verità o un ragionamento sulla definizione di conseguenza logica).*

1. *Se il Partito dei Logici vince le elezioni le tasse cresceranno se il deficit resterà alto.*
2. *Se il Partito dei Logici vince le elezioni, il deficit resterà alto.*
3. *Se il Partito dei Logici vince le elezioni, cresceranno le tasse.*

Esercizio 2 *Formalizzare le seguenti frasi in linguaggio proposizionale e decidere se l'ultima è conseguenza logica dell'insieme delle precedenti (usando tavole di verità o un ragionamento sulla definizione di conseguenza logica).*

1. *Se il numero n finisce con* 0 *è divisibile per* 5.
2. *Il numero n non è divisibile per* 5.
3. *Il numero n non finisce con* 0.

Esercizio 3 *Formalizzare le seguenti frasi in linguaggio proposizionale e decidere se l'ultima è conseguenza logica dell'insieme delle precedenti (usando tavole di verità o un ragionamento sulla definizione di conseguenza logica).*

1. *O il testimone è stato minacciato o, se Giulia si è suicidata, ha lasciato un biglietto.*
2. *Se il testimone è stato minacciato, allora Giulia non si è suicidata.*
3. *Se ha lasciato un biglietto allora Giulia si è suicidata.*

Esercizio 4 *Formalizzare le seguenti frasi in linguaggio proposizionale e decidere se l'ultima è conseguenza logica dell'insieme delle precedenti (usando tavole di verità o un ragionamento sulla definizione di conseguenza logica).*

1. *Il contratto è valido se la costruzione viene completata entro il 30 Novembre.*
2. *La costruzione viene completata entro il 30 Novembre se e solo se l'elettricista finisce il lavoro entro il 10 Novembre.*
3. *La banca perde i soldi se e solo se il contratto è invalidato.*
4. *L'elettricista finisce il lavoro entro il 10 Novembre se e solo se la banca perde i soldi.*

Esercizio 5 *Per preparare una festa Marta chiede le preferenze ai suoi possibili invitati Dario, Bruna, Carlo e Anna. Formalizzare le asserzioni seguenti e indicare quali sono i possibili insieme di invitati compatibili. Indicare se l'ultima proposizione è conseguenza logica delle precedenti.*

1. *Se Dario viene vengono anche Bruna e Carlo.*
2. *Carlo viene solo se Bruna e Anna non vengono.*
3. *Se Dario viene allora se Carlo non viene viene Anna.*
4. *Carlo viene solo se Dario non viene ma, se Dario viene, Bruna non viene.*
5. *Condizione necessaria e sufficiente perché venga Anna è che se Bruna e Carlo non vengono, venga Dario.*
6. *Anna, Bruna e Carlo vengono se e solo se Dario non viene ma, se Anna e Bruna non vengono, allora Dario viene solo se viene Carlo.*

Esercizio 6 *Siete morti e vi trovate davanti a tre porte: una bianca, una rossa e una verde, ciascuna custodita da un guardiano. Il guardiano della porta bianca dice: "Questa porta conduce al Paradiso e, se la porta verde conduce al Paradiso, allora anche la rossa." Il guardiano della porta rossa dice: "Né la porta bianca né la verde conducono al Paradiso." Il guardiano della porta verde dice: "La porta bianca conduce al Paradiso, ma la porta rossa no." Sapete che tutti e tre i guardiani mentono. Formalizzare il problema in logica proposizionale in modo da decidere quale porta scegliere (se volete andare in Paradiso).*

Esercizio 7 *Siete in un paese abitato soltanto da due tipi di persone: i sinceri (che dicono sempre la verità) e i bugiardi (che dicono sempre il falso); entrambi i tipi rispondono soltanto a domande sì/no. Diretti alla capitale, giungete a un incrocio, presieduto da un abitante del luogo. Scrivere una domanda (a risposta sì/no) che vi permetta con certezza di individuare quale delle due strade dell'incrocio conduce alla capitale. (Suggerimento: considerate la variabile p per "Tu sei sincero" e la variabile q per "La strada a destra porta alla capitale". Scrivere una formula proposizionale usando p e q in modo tale che la sua tavola di verità assicuri che, se l'abitante del luogo risponde di sì alla domanda espressa dalla vostra proposizione, q è vera, e viceversa).*

Esercizio 8 *Un giocatore di strada particolarmente incline alla logica vi propone la seguente variante del gioco delle tre carte: vi mostra tre carte coperte ciascuna con una scritta. La prima e la seconda dicono "L'asso non è qui". La terza dice: "L'asso è la carta due". Sapete che solo una delle carte è un asso e che solo una delle scritte è vera. Formalizzare in logica proposizionale e decidere quale carta è l'asso (usando le tavole di verità).*

Esercizio 9 *Scegliere un linguaggio adeguato e scrivere una formula che descriva il più precisamente possibile il seguente insieme di stringhe nell'alfabeto a, b:*

$$aaaaaa, baaaaa, bbaaaa, bbbaaa, bbbbaa, bbbbba, bbbbbb,$$

$$abbbbb, aabbbb, aaabbb, aaaabb, aaaaab$$

Esercizio 10 *Considerate la mappa di Norvegia, Svezia, Finlandia e Russia. Formulare l'asserzione: "esiste una colorazione in tre colori tale che due nazioni confinanti hanno colori diversi" usando il linguaggio proposizionale composto dalle variabili $p_{i,j,c}$ dove i, j variano nell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ e c varia in $\{1, 2, 3\}$, indicando il significato intuitivo delle variabili. Decidere se la formula è soddisfacibile (usando un metodo a piacere).*

Esercizio 11 *Rispondere a tutti gli esercizi precedenti riguardanti la conseguenza logica scrivendo le formule in CNF e usando la regola di risoluzione.*

Esercizio 12 *Scrivere le formule seguenti in CNF e in DNF:*

$$\neg(p \to q) \vee (\neg p \vee r)$$

$$p \leftrightarrow ((\neg p \wedge q) \vee r)$$

Esercizio 13 *Se v è un assegnamento tale che $v(p) = 1 = v(q)$ e $v(r) = 0$, determinare il valore di $v(F)$ per ognuna delle seguenti formule F:*

1. $p \leftrightarrow (\neg q \vee r)$
2. $(q \vee \neg r) \to p$
3. $(q \vee p) \to (q \to \neg r)$
4. $(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$

Esercizio 14 *Determinare quale dei seguenti insieme di formule è soddisfacibile, usando un metodo a piacere:*

1. $\{p \to q, q \to r, (r \vee s) \to \neg q\}$
2. $\{\neg(\neg q \vee p), p \vee \neg r, q \to \neg r\}$
3. $\{s \to q, p \vee \neg q, \neg(s \wedge p), s\}$

Esercizio 15 *Dimostrare che la seguente formula è una tautologia scrivendo la negazione in CNF e applicando la unit rule per dimostrare che è insoddisfacibile:*

$$\neg((p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \to (\neg p \to q))$$

Esercizio 16 *Decidere se la seguente formula in CNF (insieme di clausole) è soddisfacibile, usando unit rule, pure literal rule, resolution rule.*

$$\{\{p, \neg q, r, s\}, \{\neg p, q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg q, r\}, \{p, \neg s\}\}$$

Metodi Matematici per l'Informatica - Esercizi 6
(a.a. 19/20, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`carlucci@di.uniroma1.it`)

Nota Alcuni degli esercizi seguenti sono tratti da E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic* e da M. D. Davis, R. Sigal e E. J. Weyuker, *Computability, Complexity, and Languages*.

Nota In data 17.01.20 sono stati corretti alcuni refusi negli esercizi 1, 6, 7.

Esercizio 1 *I seguenti i enunciati sono validi, insoddisfacibili o soddisfacibili (ma non validi)?*

1. $(\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$;
2. $(\forall x \exists y A(x,y) \rightarrow \forall z B(z)) \rightarrow \forall z B(z)$.
3. $(\exists x P(x) \wedge \forall y \neg P(y))$
4. $\forall x \exists y R(x,y) \rightarrow \exists y \forall x R(x,y)$
5. $\exists y \forall x R(x,y) \rightarrow \forall x \exists y R(x,y)$
6. $\exists x \forall y R(x,y)$
7. $\exists x P(x) \rightarrow \exists x \forall y P(x)$

Esercizio 2 *Formalizzare le proposizioni seguenti con enunciati nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da un solo simbolo $\in (x,y)$ di relazione binaria il cui significato intuitivo è $x \in y$. Per esempio in questo linguaggio,* Esiste l'insieme vuoto *si esprime con l'enunciato $\exists x \forall y \neg(y \in x)$ (esiste un insieme, x tale che nessun y è elemento di x.*

1. *Ogni insieme x è sottinsieme di un qualche insieme y.*
2. *Per ogni insieme x esiste l'insieme y complemento di x.*
3. *Per ogni coppia di insiemi x e y esiste l'insieme intersezione $x \cap y$.*
4. *Esiste un insieme che è sottinsieme di tutti gli insiemi.*

Esercizio 3 *Formalizzare le proposizioni seguenti con enunciati nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da due simboli di predicato a un posto $P(x)$ (da leggersi come x è un programma) e $I(x)$ (da leggersi come x è un input), un simbolo di relzione a due posti $U(x,y)$ (da leggersi x è identico a y) e da un simbolo di predicato a tre posti $A(x,y,z)$ (da leggersi come il progamma x sull'input y termina l'esecuzione entro il tempo z).*

1. *Nessun programma è più veloce di tutti i programmi su tutti gli input.*
2. *Qualche programma è più veloce di tutti i programmi su qualche input.*

3. *Per ogni programma esiste un altro programma più veloce del primo su tutti gli input.*

4. *Qualche programma non termina l'esecuzione (ossia va in loop) su qualche input.*

5. *Esiste un programma ovunque indefinito (i.e. che va in loop su ogni input).*

Esercizio 4 *Formalizzare le seguenti proposizioni nel linguaggio composto da un singolo simbolo di predicato a due posti $E(x, y)$ (da leggersi intuitivamente come* esiste un arco tra i vertici x *e y).*

1. *Esiste un vertice isolato (ossia non connesso da un arco a nessun altro vertice).*

2. *I vertici sono tutti connessi tra di loro (i.e. il grafo è* completo*).*

3. *Non esistono archi tra un vertice e se stesso.*

Esercizio 5 *Formalizzare le seguenti proposizioni nel linguaggio composto da un singolo simbolo di predicato a due posti $R(x, y)$ e un simbolo di predicato a due posti $U(x, y)$ (da leggersi come l'identità).*

1. *R è un ordine.*

2. *R è un ordine totale.*

3. *R è ha un elemento minimo.*

4. *R non ha un massimo.*

Esercizio 6 *Tradurre la seguente proposizione in linguaggio naturale interpretando $P(x)$ com x è una persona, $G(x, y)$ come x è nonno/nonna di y, e $I(x, y)$ come $x = y$.*

$$\forall x(P(x) \to \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (\neg I(x_1, x_2) \wedge \neg I(x_1, x_3) \wedge \neg I(x_1, x_4) \wedge \neg I(x_2, x_3) \wedge \neg I(x_2, x_4) \wedge \neg I(x_3, x_4)$$

$$\wedge G(x_1, x) \wedge G(x_2, x) \wedge G(x_3, x) \wedge G(x_4, x) \wedge \forall y (G(y, x) \to (I(y, x_1) \vee I(y, x_2) \vee I(y = x_3) \vee I(y, x_4)))))$$

.

Esercizio 7 *Tradurre le seguenti proposizioni in linguaggio naturale interpretando $P(x)$ com x è un punto, $S(x)$ come x è una retta, $L(x, y)$ come x giace su y, $C(x, y, z)$ come x, y, z sono collineari e $I(x, y)$ come $x = y$.*

1. $\forall x(P(x) \to \neg S(x))$

2. $\forall x \forall y(L(x, y) \to (P(x) \wedge S(y)))$

3. $\forall x(S(x) \to \exists y \exists z(\neg I(y, z) \wedge L(y, x) \wedge L(z, x)))$

4. $\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y) \wedge \neg I(x, y)) \to (\exists z)(S(z) \wedge L(x, z) \wedge L(y, z)))$

5. $\forall x \forall y \forall z \forall w((P(x) \wedge P(y) \wedge \neg I(x, y) \wedge S(z) \wedge S(w) \wedge L(x, z) \wedge L(y, z) \wedge L(x, w) \wedge L(y, w)) \to I(z, w))$

6. $\exists x \exists y \exists z(P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge \neg C(x, y, z))$

Esercizio 8 *Usando il linguaggio dell'esercizio precedente tranne il predicato $C(x, y, z)$ scrivere una formula $F(x, y, z)$ che esprima il fatto che x, y, z sono collineari.*

Esercizio 9 *Tradurre in linguaggio naturale il seguente enunciato (nel linguaggio formale dell'esercizio precedente):*

$$\forall u \forall v((S(u) \wedge S(v) \wedge \neg I(u,v)) \rightarrow \forall x \forall y((L(x,u) \wedge L(x,v) \wedge L(y,u) \wedge L(y,v)) \rightarrow I(x,y))$$

Esercizio 10 *Consideriamo il linguaggio composto da una costante c, da un simbolo di relazione a due posti $S(x,y)$ e da un simbolo di relazione a tre posti $R(x,y,z)$. Per ognuno degli enunciati seguenti descrivere una interpretazione in cui l'enunciato è vero e una in cui è falso.*

1. $\forall x \exists y \forall z(S(x,c) \rightarrow R(x,y,z))$.
2. $\exists y \forall x \forall z(S(x,c) \rightarrow R(x,y,z))$.
3. $\forall x \forall y(S(x,y) \rightarrow S(y,x))$.

Esercizio 11 *Consideriamo il linguaggio composto da un unico simbolo di relazione $R(x,y)$ a due posti. Scrivere un enunciato vero nell'interpretazione $\mathbf{A}_1$ con dominio $\mathbf{N}$ e $\leq$ come interpretazione di R ma falso nell'interpretazione $\mathbf{A}_2$ con dominio $\mathbf{Q}$ e $\leq$ come interpretazione di R. Stessa cosa rispetto a $\mathbf{A}_3$ con dominio $\mathbb{Z}$ e R interpretata sempre con $\leq$.*

Esercizio 12 *Consideriamo un linguaggio $\mathcal{L}$ contenente, tra l'altro, un simbolo di predicato a due posti $I(x,y)$ da interpretare come l'identità tra x e y. Tradurre in $\mathcal{L}$ le seguenti proposizioni:*

1. *Maria ha avuto almeno tre mariti.*
2. *Al massimo due persone in questa festa conoscono tutti.*

Esercizio 13 *Consideriamo un linguaggio $\mathcal{L}$ contenente, tra l'altro, un simbolo di predicato a due posti $I(x,y)$ da interpretare come l'identità tra x e y. Sia $F(x)$ una formula in questo linguaggio, contenente x come sola variabli libera (i.e., non quantificata). Scrivere, usando $F(x)$ e il predicato I una formula che esprima il fatto che esiste* un unico *x tale che $F(x)$.*

Esercizio 14 *Nel linguaggio con un simbolo di predicato a due posti $I(x,y)$ da interpretare come l'identità tra x e y scrivere, per ogni $n \in \mathbf{N}$, un enunciato E_n che esprima:* esistono almeno n elementi distinti. *Scrivere un enunciato che esprima* eistono esattamente n elementi distinti.