Dispensa 2

Esercizio 2)

$$Per\ ipotesi, \quad P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

$$\forall x\big(x \in P(A)\big) \xrightarrow{def} x \subseteq A$$

$$\forall x\big(x \in P(B)\big) \xrightarrow{def} x \subseteq B$$

$$\forall x\big(x \in P(A \cup B)\big) \xrightarrow{def} x \subseteq (A\ o\ B)$$

$$\forall x\Big(x \in \big(P(A) \cup P(B)\big)\Big) \xrightarrow{def} x \subseteq A\ o\ x \subseteq B \xrightarrow{def} x \subseteq A\ o\ B$$

Esercizio 3)

$$Per\ ipotesi, \quad P(A) \subseteq P(B) \rightarrow A \subseteq B$$

$$\forall x\big(x \in P(A)\big) \xrightarrow{def} x \subseteq A \xrightarrow{ipot} x \in P(B) \xrightarrow{def} x \subseteq B$$

Esercizio 4)

$$Per\ ipotesi, \quad A \times C = B \times C \rightarrow A = B\ dove\ C \neq \emptyset$$

$$Per\ definizione, \quad A \times C = \{(x,y) : x \in A\ e\ y \in C\}$$

$$Per\ ipotesi, \quad \{(x,y) : x \in A\ e\ y \in C\} = \{(x,y) : x \in B\ e\ y\ \in C\} \xrightarrow{def} x \in A\ e\ x \in B \xrightarrow{def} A = B$$

È necessario che C non sia un insieme vuoto, perché altrimenti il risultato dei prodotti cartesiani darebbe insieme vuoto indipendentemente da se A e B sono uguali. Questo perché:

$$A \times \emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) : x \in A\ e\ y \in \emptyset\} \xrightarrow{def} insieme\ vuoto\ non\ ha\ elementi, quindi\ il\ risultato\ è\ \emptyset, qualunque\ valore\ assuma\ A.$$

Esercizio 5)

$$Per\ ipotesi, \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) : x\ \in A\ e\ y\ \in (B\ e\ C)\}$$

$$(A \times B) \cap (A \times C) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) : x\ \in A\ e\ y\ \in B\}\ e\ \{(x,y) : x\ \in A\ e\ y\ \in C\} \xrightarrow{def} y\ \in B\ e\ y\ \in C$$

$$\xrightarrow{def} y \in (B\ e\ C)$$

Esercizio 6)

$$Per\ ipotesi, \quad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$A - (B \cap C) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\ |x\ \in A\ e\ x\ \notin\ A\ e\ (B\ e\ C)\} \xrightarrow{def} \{x \in A\ e\ x\ \notin (A\ e\ B)\ o\ (A\ e\ C)\}$$

Esercizio 7)

$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(A)\ e\ P(B) \xrightarrow{def} \{x | x \subseteq A\}\ e\ \{x|x \subseteq B\} \xrightarrow{def} \{x|x \subseteq A\ e\ B\} \stackrel{\text{def}}{=} P(A\ e\ B)$$

Esercizio 8)

$$A = B - C \xrightarrow{ipot} B = A \cup C$$

$$\xrightarrow{ipot} A = B - C \xrightarrow{def} \{x|x \in B\ e\ x \notin C\} \xrightarrow{def} \{x|x \in B\ e\ x \notin (B \cap C)\}$$

$$\xrightarrow{tes} B = A \cup C \xrightarrow{def} \{x|x \in A\ o\ x \in C\}$$

$$B = (B - C) \cup C \xrightarrow{tes} B = \{x|x \in B\ e\ x \notin (B \cap C)\} \cup C$$

$$Però, \quad B \neq \{x|x \in B\ e\ x \notin (B \cap C)\} \cup C, \quad infatti$$

$$B = \{x|x \in B\ e\ x \notin (B \cap C)\} \cup (B \cap C)$$

$$Pertanto, la\ tesi\ è\ vera\ soltanto\ se\ (B \cap C) = C.$$

Esercizio 10)

$$Per\ ipotesi, data\ f: X \to Y, \quad \exists g: Y \to X\ tale\ che\ g \circ f = id_X \Leftrightarrow f\ è\ iniettiva$$

$$id_X \xrightarrow{def} f(x) = x$$

$$\xrightarrow{def} g(f(x)) = x$$

$$Se\ per\ assurdo\ f\ non\ è\ iniettiva,$$

$$vuol\ dire\ che\ esiste\ almeno\ un\ caso\ in\ f(X)\ tale\ che\ x \neq x'\ e\ f(x) = f(x')$$

$$Dato\ g(f(x)) = x, \quad vuol\ dire\ che\ g(f(x)) = x\ e\ g(f(x')) = x'.$$

$$Ma, f(x)\ e\ f(x'), per\ la\ premessa, sono\ uguali, quindi\ g\ non\ è\ una\ funzione.$$

$$Quindi, l'ipotesi\ è\ sbagliata\ ed\ f\ è\ iniettiva.$$

$$Al\ contrario, data\ f: X \to Y, se\ f\ è\ iniettiva, \quad \exists g: Y \to X\ tale\ che\ g \circ f = id_X$$

$$Sia\ y\ in\ Y.$$

$$Se\ y\ è\ in\ f(x)\ allora\ definisco\ g(x) = l'unico\ x\ in\ X\ tale\ che\ f(x) = y.$$

$$Se\ y\ non\ è\ in\ f(X)\ allora\ definisco\ g(y) = un\ arbitrario\ elemento\ di\ X, fissato.$$

$$\text{g soddisfa che } g(f(x)) = x\text{: f(x) è sempre in f(X) e } g(f(x)) \text{ è per definizione x.}$$