Dispensa 2

Esercizio 1)

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * 2^k$$

Secondo il **teorema dei coefficienti binomiali**, siano a e b due numeri reali e sia n un numero intero positivo. Allora:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^k b^{n-k}$$

Riscrivendo 3^n sotto forma di binomio, otteniamo $(1+2)^n$ che possiamo adesso ricondurre al teorema sopra illustrato. Quindi:

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * 2^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * 2^k$$

Notiamo che l'identità ottenuta è quasi completa. L'unica differenza tra i due membri dell'identità è il fattore $\mathbf{1^{n-k}}$. Quest'ultimo però si tratta di una potenza di 1: pertanto, qualsiasi sia il valore dell'esponente, il risultato del fattore in questione è sempre **1** e può essere tralasciato.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * 2^k$$

Abbiamo dimostrato l'identità utilizzando la **proprietà del coefficiente binomiale**.

Esercizio 2)

$$k * \binom{n}{k} = n * \binom{n-1}{k-1}$$

Prendere una squadra di k studenti e tra questi nominare un leader equivale a nominare un leader tra gli n studenti e poi tra i rimanenti n-1 studenti scegliere k -1 studenti per completare il resto della squadra.

Esercizio 3)

$$\binom{n}{2} * \binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k} * \binom{k}{2}$$

Scegliere 2 personaggi principali in una serie TV da n personaggi e poi *k - 2* personaggi secondari tra i rimanenti *n - 2* personaggi è come scegliere *k* personaggi secondari tra tutti gli *n* disponibili e tra questi k sceglierne 2 che saranno personaggi principali.

Esercizio 4)

- $\binom{30}{3} * \binom{60}{7}$ $\quad$ $\left(le\ possibilità\ di\ scegliere\ 3\ maschi\ tra\ 30\ gorilla\ maschi\ * \right.$ $\left. le\ possibilità\ di\ scegliere\ 7\ femmine\ tra\ 60\ gorilla\ femmine\right)$

- $\binom{3}{3} * \binom{30}{7}$ $\quad$ $\left(le\ possibilità\ di\ scegliere\ 3\ maschi\ tra\ 3\ gorilla\ maschi\ con\ gene\ speciale\ * \right.$ $\left. le\ possibilità\ di\ scegliere\ 7\ femmine\ tra\ 30\ gorilla\ femmine\ con\ gene\ speciale\right)$

- $2 * \binom{28}{2} * \binom{60}{7}$ $\quad$ $\left(le\ possibilità\ di\ scegliere\ tra\ due\ maschi\ alpha\ * \right.$ $le\ possibilità\ di\ scegliere\ gli\ altri\ 2\ maschi\ tra\ i\ 28\ gorilla\ maschi\ non\ alpha\ *$ $\left. le\ possibilità\ di\ scegliere\ 7\ femmine\ tra\ 60\ gorilla\ femmine\right)$

- $\binom{30}{3} * \binom{60}{7} - \binom{28}{3} * \binom{60}{7}$ $\quad$ $\left(le\ possibilità\ di\ creare\ un\ branco\ qualsiasi\ - \right.$ $le\ possibilità\ di\ scegliere\ 3\ maschi\ tra\ i\ 28\ gorilla\ maschi\ non\ alpha\ *$ $\left. le\ possibilità\ di\ scegliere\ 7\ femmine\ tra\ 60\ gorilla\ femmine\right)$

Esercizio 5)

- $\binom{100}{5}$ $\quad$ $(le\ possibilità\ di\ scegliere\ 5\ numeri\ da\ 100\ numeri)$
- $50 * \binom{50}{4}$ $\quad$ $\left(le\ possibilità\ di\ scegliere\ 1\ numero\ tra\ 50\ numeri\ dispari\ * \right.$ $\left. le\ possibilità\ di\ scegliere\ 4\ numeri\ tra\ 50\ numeri\ pari\right)$
- $\binom{50}{2} * \binom{50}{3}$ $\quad$ $\left(le\ possibilità\ di\ scegliere\ 2\ numeri\ tra\ 50\ numeri\ pari\ * \right.$ $\left. le\ possibilità\ di\ scegliere\ 3\ numeri\ tra\ i\ restanti\ 50\ \ numeri\ dispari\right)$
- $\binom{100}{5} - \binom{50}{5}$ $\quad$ $\left(le\ possibilità\ di\ scegliere\ cinque\ numeri\ qualsiasi\ da\ 100\ numeri\ - \right.$ $\left. le\ possibilità\ di\ scegliere\ tutti\ numeri\ pari\right)$

Esercizio 6)

- $\binom{27}{8}$ $\quad$ $(diverse\ combinazioni\ con\ ripetizione\ di\ 8\ gusti\ sui\ 20\ disponibli)$

Esercizio 7)

- $\binom{15-9+8}{6} = \binom{14}{6}$ $\quad$ $(combinazioni\ con\ ripetizione\ di\ 6\ euro\ distribuiti\ tra\ 9\ frutti\ (n+k-1=14))$
- $\binom{15+9-1}{8} - 9 * \binom{15-3+9-1}{8} + \binom{9}{2} * \binom{15-6+9-1}{8} - \binom{9}{3} * \binom{15-9+9-1}{8} + \binom{9}{4} * \binom{15-12+9-1}{8} - \binom{9}{5} * \binom{9-1}{8} = \binom{23}{8} - 9 * \binom{20}{8} + \binom{9}{2} * \binom{17}{8} + \binom{9}{3} * \binom{14}{8} + \binom{9}{4} * \binom{11}{8} + \binom{9}{5} * \binom{8}{8}$
  $(combinazioni\ con\ ripetizione\ in\ cui\ al\ totale\ sottraggo\ le\ combinazioni\ di\ frutti\ almeno\ 3\ volte,\ e\ riaggiungo\ tutte\ quelle\ tolte\ 2\ volte,\ e\ così\ via)$

Esercizio 8)

- $\frac{7*8!}{3!}$ $\quad$ $(considerando\ il\ trattino\ come\ una\ lettera,\ calcoliamo\ le\ permutazioni\ con\ ripetizione\ (o\ anagrammi))$

  Attenzione! Le coppie di parole generate dal trattino posto all'inizio o alla fine della frase non sono valide, pertanto a $\frac{9*8!}{3!}$ sottraiamo $\frac{2*8!}{3!}$, ottenendo $\frac{7*8!}{3!}$

Esercizio 9)

Ho a disposizione 18 biscotti da distribuire tra 4 bambini dandone almeno 2 a testa e massimo 5 a testa. Questo significa che, se togliamo ai 18 biscotti i due che distribuiamo ad ogni bambino, ci rimangono 10 biscotti. Adesso il problema è distribuire questi dieci biscotti dandone massimo 3 (dato che 2 ne abbiamo già distribuiti) ad ogni bambino.
Per farlo, ci calcoliamo $\bar{P}$, che poi sottrarremo alle possibilità totali. La proprietà opposta a questa è quella di distribuire i 10 biscotti rimanenti dando ad almeno un bambino almeno 4 biscotti.

- $\bar{P} = \binom{4}{1} * \binom{6+4-1}{4-1} - \binom{4}{2} * \binom{2+4-1}{4-1}$
- $P = \binom{13}{3} - \bar{P}$

Esercizio 10)

Il problema, come suggerito dall'esercizio stesso, conta il numero delle soluzioni non-negative dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$.
Prima di tutto analizziamo il motivo per cui il problema può essere rappresentato in questo modo.

Abbiamo a che fare con un problema di tipico stile "stars & bars", in cui si vogliono contare i modi di dividere in un numero k di gruppi differenti (ma uguali per ordine) di n entità.

Per rendere il problema più comprensibile, scomponiamo il numero 10 in 10 unità.

Le disporremo attraverso questo modo di rappresentazione: due unità vicine formano il numero due, tre unità vicine formano il tre, quattro unità formano il quattro e così via… (per comodità, assegniamo il nome "A" alle unità).

Esempio. AAA = 3, AAAAA = 5, A = 1

Abbiamo a disposizione 10 A, a significare che il numero massimo che possiamo raggiungere è 10.

ATTENZIONE: È IMPORTANTE TENERE CONTO CHE IL MOTIVO PER CUI QUESTO METODO DI RAPPRESENTAZIONE FUNZIONA È PERCHE' SI CONSENTE ALLE VARIABILI DI ASSUMERE IL VALORE 0 E PERCHE' I VALORI CHE ESSE POSSONO ASSUMERE SONO TUTTI NON NEGATIVI.

Però, adesso che abbiamo un metodo per rappresentare le unità, dobbiamo trovare un metodo per rendere riconoscibili le varie variabili, per delimitare quando inizia lo spazio dedicato ad una variabile e quando finisce l'altra.

Questo è importante perché il problema ci chiede di contare in quanti modi posso assegnare valori diversi alle variabili mantenendo sempre la costanza del risultato.
Le variabili sono quindi distinguibili e assegnare dei certi valori alle variabili in un certo ordine NON EQUIVALE ad assegnarli in ordine diverso.

Notiamo subito che è proprio il segno dell'addizione che ci permette di separare un numero da un altro. Poiché le variabili sono quattro, abbiamo bisogno di tre separatori per creare quattro sottogruppi. Per comodità, chiameremo il segno dell'addizione B.

Abbiamo adesso ottenuto una parola da 13 lettere, 10 A e 3 B, in cui la posizione diversa delle B rispetto alle A o delle A rispetto alle B ci consente di distinguere i valori di ogni variabile.

Esempio.

AAABAAAABABAA = 3 + 4 + 1 + 2

ABAAABAAAAABA = 1 + 3 + 5 + 1

BAAABAAABAAAA = 0 + 3 + 3 + 4 (le variabili possono assumere anche valore 0!)

AAAABAAABABAA = 4 + 3 + 1 + 2 (anche se i valori assegnati sono uguali al primo esempio, l'ordine è diverso da prima quindi sono considerati diversi!)

I modi di contare la somma di 4 variabili che dà come risultato 10 sono quindi $\binom{13}{3}$, ossia gli anagrammi della parola composta da 10 A e 3 B o i modi di scegliere 4 - 1 oggetti da 13 elementi.

La domanda posta dall'esercizio ci chiede quante soluzioni esistano in cui tutte le variabili hanno valore minore o uguale a 2: il risultato, senza pensarci troppo, è 0.
Il motivo è che si è costretti ad assegnare ad almeno una variabile un valore maggiore di 2 per ottenere 10 come risultato (2 * 4 infatti fa 8, che è il valore massimo che si riuscirebbe ad ottenere non assegnando ad alcuna variabile valore maggiore di 2).

L'esercizio sfrutta questa caratteristica per utilizzare un metodo alternativo per calcolare la quantità di anagrammi della parola che ci siamo ricavati, che come già sappiamo è $\binom{13}{4}$.

Conoscendo che almeno un numero deve avere un valore maggiore di 3, si può sotto-intendere questa informazione e contare semplicemente i modi di distribuire le restanti 10 lettere (13 totali - 3) nella parola. Contando semplicemente il valore di $\binom{10}{3}$ però, si tralascia un'informazione importante: le 3 unità iniziali che abbiamo poi tralasciato, infatti, possono essere assegnate ad una delle quattro variabili. Pertanto, le probabilità che abbiamo calcolato devono essere moltiplicate per $\binom{4}{1}$, ossia le possibilità di scegliere una variabile tra le 4.

Non abbiamo finito però, perché così facendo contiamo due volte le situazioni in cui assegniamo 3 unità a due variabili (le contiamo prima nella selezione di una variabile e poi in quella dell'altra) e il resto delle unità le distribuiamo tra tutte le variabili: perciò, dobbiamo sottrarre la possibilità di distribuire 7 lettere nella parola restante $\binom{13-3-3}{3} = \binom{7}{3}$. Come prima però, le due variabili che scegliamo non sono fisse, e l'operazione dev'essere eseguita per tutte le coppie di variabili che scegliamo, quindi dobbiamo moltiplicare $\binom{7}{3}$ per $\binom{4}{2}$, ossia i modi di scegliere 2 tra le 4 variabili.

Ancora non è finita, perché in questo modo abbiamo sottratto per due volte le situazioni in cui assegniamo 3 unità a tre variabili e in cui il resto delle unità le distribuiamo tra tutte. Come abbiamo già fatto, calcoliamo $\binom{13-3-3-3}{3} = \binom{4}{3}$ e moltiplichiamo il risultato per le possibilità di scegliere 3 variabili tra 4, ossia $\binom{4}{3}$.
Questa volta però, dobbiamo addizionare.

Adesso possiamo dire di aver terminato, poiché le possibilità di assegnare 3 unità a 4 variabili usando soltanto 10 unità sono 0.

Abbiamo pertanto dimostrato che, contare le possibilità di scegliere come distribuire 10 unità tra 4 variabili, in cui almeno una variabile deve avere un valore maggiore di 2, è uguale alle possibilità di assegnare 3 unità ad una delle variabili e distribuire il resto, togliendo in cascata le combinazioni che contiamo due volte.