МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Курсовой проект по дисциплине:

## «МЕХАНИКА»

### Проектирование механической модели катапульты

Факультет: Институт интеллектуальной робототехники
Группа: 21932

| Студенты: | Оценка |
|---|---|
| Грищенко Александр Михайлович | |
| Солопов Илья Русланович | |
| Софронов Егор Дмитриевич | |

Преподаватель: *Сахнов А.Ю.*

НОВОСИБИРСК
2022

## 1. Задание на курсовую работу

По заданию к курсовому проекту по предмету “Механика” необходимо было создать, рассчитать и протестировать механическую модель катапульты, удовлетворяющую следующим критериям:

1. Способность метать снаряд любой выбранной массы и формы на расстояние от 50 до 80 см и отклонением от центральной оси не более 30 градусов;
2. Способность модели находиться во взведённом состоянии без приложения посторонних сил (без помощи человека);
3. Наличие механического спуска;
4. Целостность и устойчивость конструкции в течение трёх попыток метания.

## 2. Эскиз модели.

Для создания 3D-модели разработанной нами катапульты была использована система автоматизированного проектирования FreeCAD. На рисунках 1 и 2 представлены эскизы модели в разных проекция.

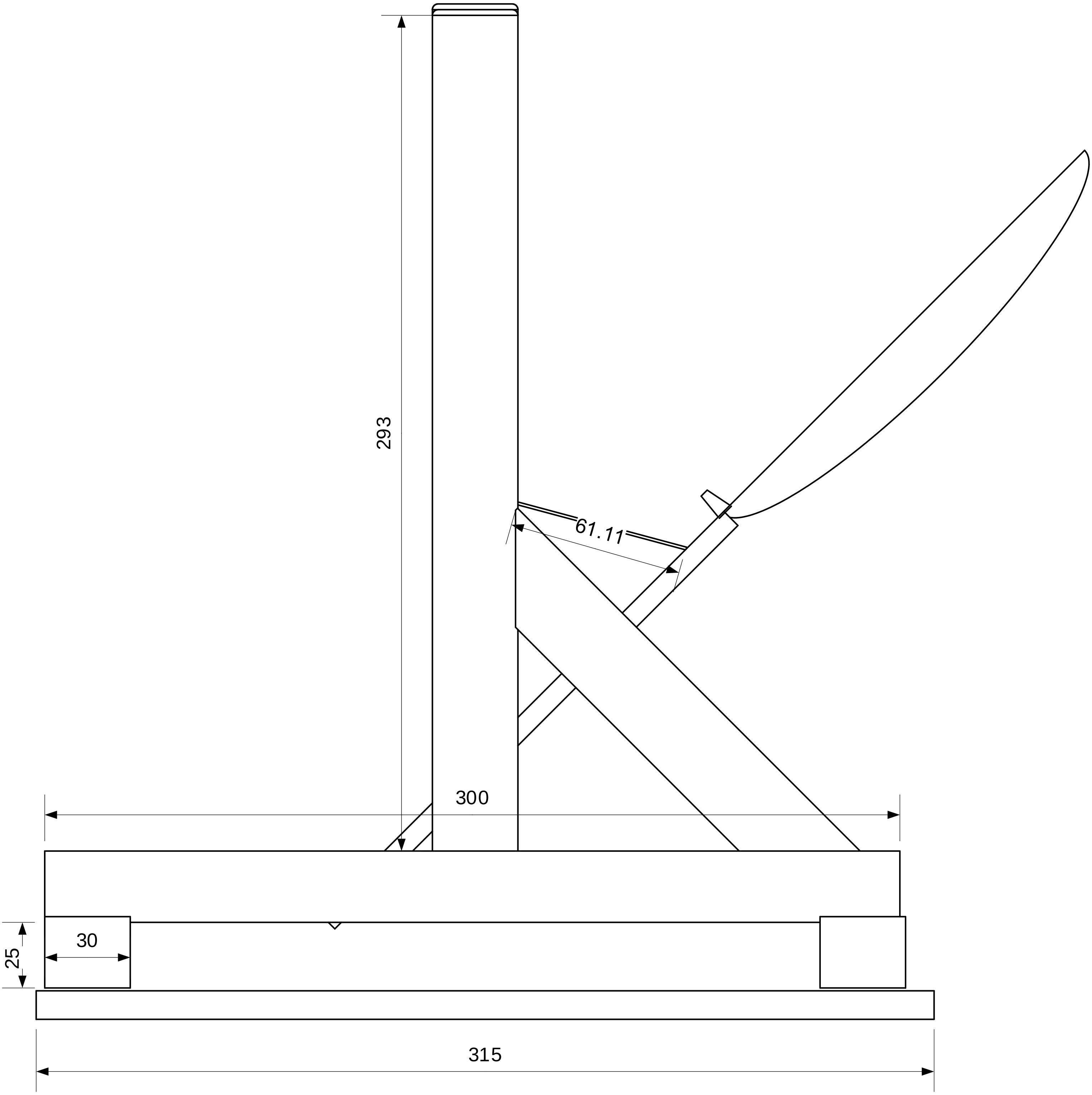


Рисунок 1 – Эскиз, вид сбоку

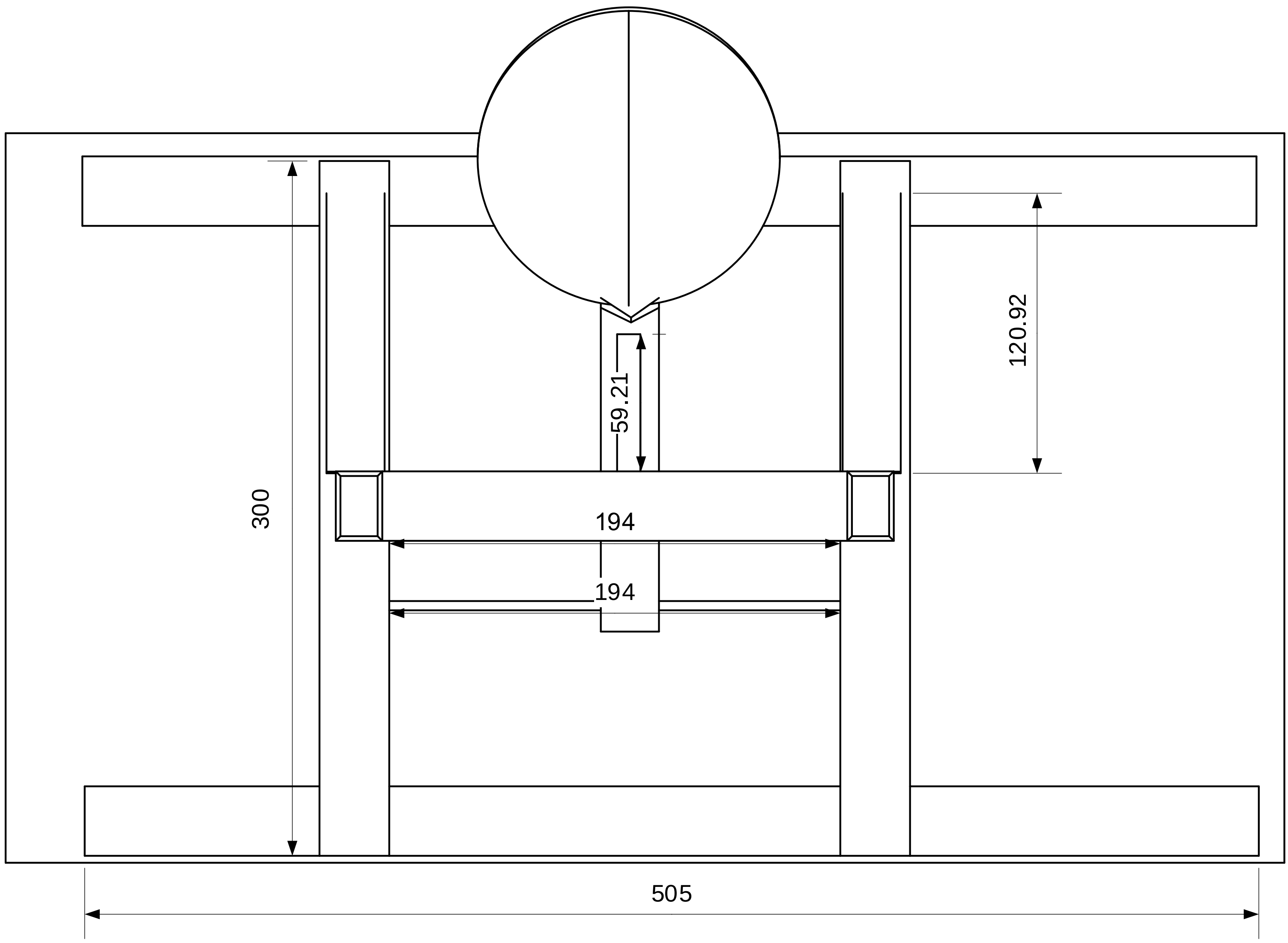


Рисунок 2 – Эскиз, вид сверху

## 3. Экспериментальное определение коэффициента жёсткости пружины (резинки)

Для определения коэффициента упругости резинки, используемой в нашей механической модели, был проведен эксперимент с подвешиванием груза. Для точности вычислений было использовано 3 грузила различной массы. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты эксперимента по вычислению коэффициента жёсткости

<table>
<tr><th rowspan="2">Номер опыта</th><th rowspan="2">Масса груза, кг</th><th colspan="2">Длина резинки</th><th rowspan="2">Деформация, м</th><th rowspan="2">Коэффициент упругости, Н/м</th><th rowspan="2">Средний коэффициент упругости, Н/м</th></tr>
<tr><th>Начальная, м</th><th>Конечная, м</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2,1</td><td>0,09</td><td>0,13</td><td>0,04</td><td>514,5</td><td rowspan="3">432,83</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>0,09</td><td>0,19</td><td>0,1</td><td>294</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>0,09</td><td>0,11</td><td>0,02</td><td>490</td></tr>
</table>

## 4. Динамический анализ механической модели (Расчёт разгона снаряда)

Ниже приведены исходные данные, необходимые для динамического анализа:

$k$ = 432,83 Н/м – коэффициент упругости резинки;

$M$ = 0,06 кг – масса ложки;

$m$ = 0,04504 кг – масса снаряда;

$h_2$ = 0,2 м – высота ложки в момент удара;

$h_1$ = 0,14 м – высота ложки в заряженном состоянии;

$\Delta x$ = 0,05 м – удлинение резинки.

Потенциальная энергия резинки тратится на поднятие ложки и снаряда, на придание скорости снаряду, а также на удар ложки о стенку катапульты.

$$\frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{(2M+m){v_0}^2}{2} + (M+m)g(h_2 - h_1).$$

После умножения обеих частей уравнения на 2 получим:

$$k\Delta x^2 = (2M+m){v_0}^2 + 2(M+m)g(h_2 - h_1).$$

Из получившегося уравнения выразим скорость снаряда в момент его отрыва от ложки:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k\Delta x^2 - 2(M+m)g(h_2 - h_1)}{2M+m}}.$$

Подставив исходные данные в получившуюся формулу, найдем значение скорости.

$$v_0 = \sqrt{\frac{432{,}83 \times 0{,}05^2 - 2 \times (0{,}06 + 0{,}04504) \times 9{,}8(0{,}2 - 0{,}14)}{(2 \times 0{,}06 + 0{,}04504)}} = 2{,}41 \text{ м/с}$$

## 5. Кинематический анализ механической модели (Расчёт траектории полёта снаряда)

Ниже приведены исходные данные, необходимые для кинематического анализа:

$h_2$ = 0,2 м – высота ложки в момент удара;

$v_0 = 2{,}41$ м/с – скорость снаряда в момент отрыва;

$\varphi = 60^o$ – угол вылета снаряда.

Рассмотрим зависимости проекции пройденного расстояния от времени по осям $x$ и $y$ соответственно:

$$S_x(t) = v_0 cos(\varphi)t = 2{,}41 \times \frac{1}{2}t \ = 1{,}205t;$$

$$S_y(t) = h_2 + v_0 sin(\varphi)t - \frac{gt^2}{2} = 0{,}2 + 2{,}41 \times \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{9{,}8t^2}{2} \ = 0{,}2 + 2{,}087t - 4{,}9t^2.$$

Из уравнений движения по осям $x$ и $y$ выведем зависимость $y$ от $x$ – это и будет траекторией полёта снаряда.

$$S_y(S_x) = h_2 + S_x tg(\varphi) - \frac{g{S_x}^2}{2{v_0}^2 cos^2(\varphi)} = 0{,}2 + \sqrt{3}S_x - \frac{9{,}8 \times {S_x}^2}{2 \times 2{,}41^2 \times \frac{1}{4}} =$$

$$= 0{,}2 + 1{,}73 \times S_x - 3{,}375 \times {S_x}^2$$

На рисунке 3 представлен график траектории полёта снаряда.

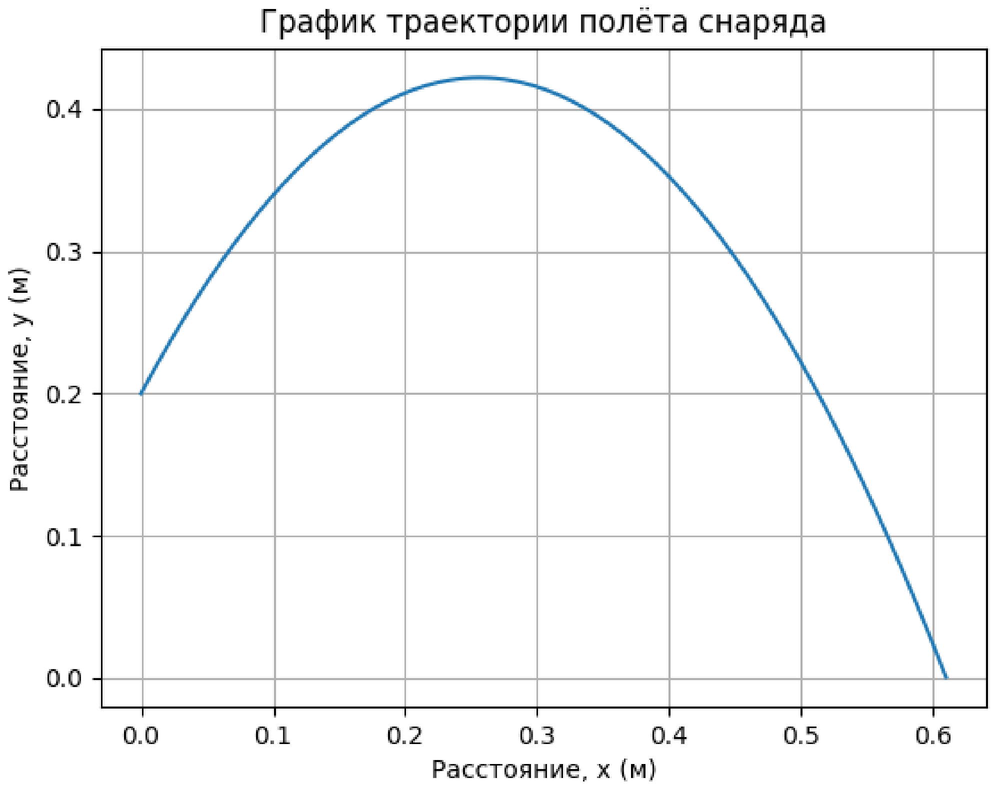


Рисунок 3 – График траектории полёта снаряда

Чтобы определить конечное расстояние, которое пролетел снаряд массы $m$ = 0,04504 кг от момента отрыва от ложки до касания горизонтальной плоскости, необходимо решить уравнение траектории относительно $S_x$:

$$S_y(S_x) = 0{,}2 + 1{,}73 \times S_x - 3{,}375 \times {S_x}^2 = 0.$$

Положительный корень $S_x = 0{,}61$ и будет искомым расстоянием.

## 6. Обоснование устойчивости механической модели (Определение центра тяжести)

Для определения центра тяжести фигуры существует несколько способов. При работе с нашей механической моделью мы использовали два метода: аналитический и практический.

**Результаты определения центра тяжести методом разбиения**

Фигура была помещена в декартову систему координат с началом в точке 0 и разбита на несколько простых прямоугольников. Их площади равны:

$$A_1 = x_1 \times y_1 = 0{,}3 \times 0{,}02 = 0{,}006;$$

$$A_2 = x_2 \times y_2 = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006;$$

$$A_3 = x_3 \times y_3 = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006;$$

$$A_4 = x_4 \times y_4 = 0{,}3 \times 0{,}02 = 0{,}006;$$

$$A_5 = x_5 \times y_5 = 0{,}3 \times 0{,}003 \ = 0{,}009;$$

$$A_6 = 2 \times S_{\text{тр}} + S_{\text{пр}} = 2 \times (0{,}5 \times 0{,}03 \times 0{,}03) + (0{,}15 \times 0{,}03) = 0{,}0054;$$

$$A_7 = x_7 \times y_7 \ = 0{,}3 \times 0{,}006 \ = 0{,}0018.$$

Так как все фигуры являются прямоугольниками, то по следствию из теоремы о центре тяжести, их центры тяжести лежат в их геометрических центрах. Тогда координаты этих центров равны:

$A_1{:}\, X_1 = 0{,}15;$

$Y_1 = 0{,}01.$

$A_2{:}\, X_2 = 0{,}015;$

$Y_2 = 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}03.$

$A_3{:}\, X_3 = 0{,}3 - 0{,}0015 = 0{,}2985;$

$Y_3 = 0{,}03.$

$A_4{:}\, X_4 = 0{,}15;$

$Y_4 = 0{,}01 + 0{,}04 = 0{,}05.$

$A_5{:}\, X_5 = 0{,}015 + 0{,}115 = 0{,}13;$

$Y_5 = 0{,}06 + 0{,}15 = 0{,}21.$

$A_6{:}\, X_6 = 0{,}13 + 0{,}015 + 0{,}1 \times cos(43^o) = 0{,}218;$

$$Y_6 = 0{,}06 + (0{,}15 + 0{,}075) \times sin(51^o) = 0{,}129.$$

$$A_7 \colon X_7 = 0{,}075 + 0{,}15 \times cos(46^o) = 0{,}175;$$

$$Y_7 = 0{,}06 - 0{,}2 + 0{,}15 \times sin(43^o) = 0{,}15.$$

Координаты общего центра тяжести фигуры:

$$X_C = \frac{A_1 \times X_1 + A_2 \times X_2 + A_3 \times X_3 + A_4 \times X_4 + A_5 \times X_5 + A_6 \times X_6 + A_7 \times X_7}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7} = 0{,}157;$$

$$Y_C = \frac{A_1 \times Y_1 + A_2 \times Y_2 + A_3 \times Y_3 + A_4 \times Y_4 + A_5 \times Y_5 + A_6 \times Y_6 + A_7 \times Y_7}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7} = 0{,}107.$$

**Результаты определения центра тяжести методом подвешивания**

В вырезанной из бумаги фигуре нашей модели было проделано 2 отверстия, через которые была пропущена нитка с грузиком. Отметив линии, через которые проходила нить, мы получили точку их пересечения. Если поместить нашу фигуру в декартову систему координат с началом в точке 0, то координаты центра $X_C$, $Y_C$ будут равны соответственно 0,149 и 0,115. На рисунке 4 представлен эскиз модели с результатами определений центров тяжести. Красная линия соответствует линии действия силы тяжести при первом подвешивании, а синяя при втором. Чёрная точка – центр тяжести, полученный методом разбиений.

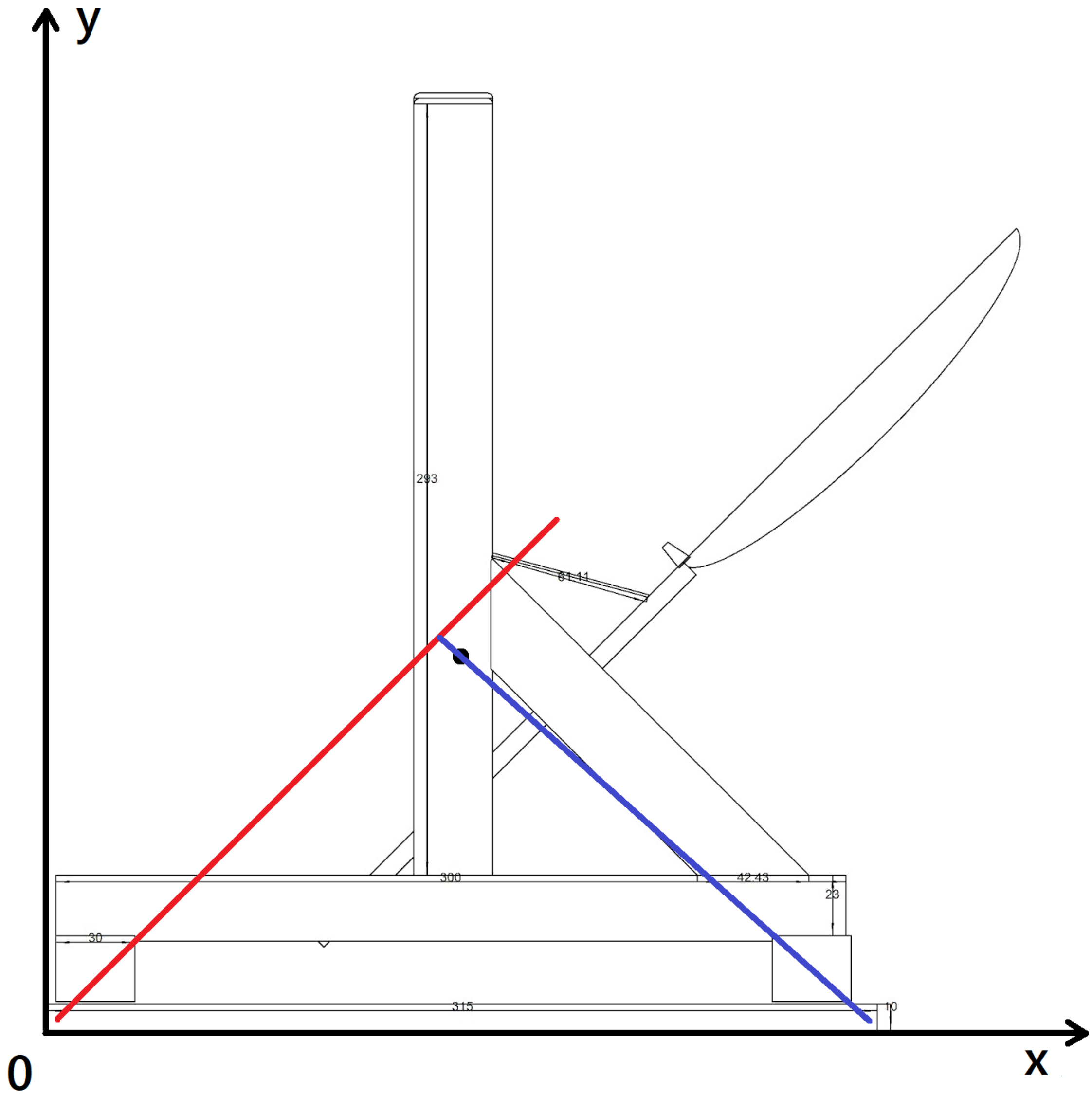


Рисунок 4 – Результаты определений центров тяжести

Значения координат центра тяжести, полученные разными методами, отличаются на 5,1% по оси X и на 6,96% по оси Y.

## 7. Деформационный анализ ключевых элементов конструкции (изгиб. кручение. растяжение-сжатие. оценка коэффициентов запаса прочности и избытка массы механической модели)

Исходные данные, необходимые для деформационного анализа:

Модуль Юнга для бамбука $E = 19{,}6$ ГПа $= 1{,}96 \times 10^{10}$ Па

Длина ложки $L$ = 0,3 м

Высота ложки $H$ = 0,006 м

Ширина ложки $B$ = 0,025 м

Расстояние от рассматриваемого волокна до нейтральной линии $\xi = \frac{H}{2} =$ 0,003 м

Радиус кривизны нейтральной линии $R = \frac{L}{2}$ = 0,15 м

Необходимо найти силу $F$, при которой ложка сломается.

Закон Гука для вычисления напряжения $\sigma = E\varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{\xi}{R}$ – это деформация. Тогда $\sigma = E\,\frac{\xi}{R}$.

Изгибающий момент $M = \int_A \ \sigma\xi \, dA = \frac{E}{R}\int_A \ \xi^2 \, dA$, где $dA$ – элемент площади рассматриваемого поперечного сечения. Так как $dA = Bd\xi$, то $M = \frac{EB}{R}\int_0^H \xi^2 \, d\xi = \frac{EB}{R} \times \frac{H^3}{3}$. Подставив значения в формулу, получаем $M = 235{,}2$ Н $\times$ м.

Формула момента силы $M = FL \Rightarrow F = \frac{M}{L} = 784$ Н.

Для того, чтоб ложка сломалась, необходимо к ней приложить силу большую, чем $F$ = 784 Н.

## 8. Сравнение фактических параметров механической модели с расчётными параметрами.

**Сравнение значений расстояния полёта снаряда**

Для определения фактического расстояния полёта снаряда нашей механической модели был проведен эксперимент с запуском груза. Для точности вычислений было произведено 3 выстрела. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты эксперимента по вычислению фактического расстояния

| **Номер опыта** | **Расстояние, *м*** | **Среднее расстояние, *м*** |
|---|---|---|
| 1 | 0,67 | 0,67 |
| 2 | 0,65 | |
| 3 | 0,69 | |

Абсолютная разница между фактическим и полученным в пункте 5 расчётным расстоянием составила $|0{,}67 - 0{,}61| = 0{,}06$ м. Относительная разница равна $(1 - \frac{0{,}61}{0{,}67}) \times 100\% = 8{,}95\%$.

**Сравнение значений координат центра тяжести**

Значения координат центра тяжести, полученные экспериментальным методом, отличаются от расчётных значений на 5,1% по оси X и на 6,96% по оси Y. Абсолютная разница для абсциссы составила $|0{,}157 - 0{,}149| = 0{,}08$ м, а для ординаты $|0{,}107 - 0{,}115| = 0{,}08$ м.

## 9. Описание электронной модели механической системы

Электронная модель механической системы была разработана с помощью языка программирования Python. Она представляет собой приложение с простым интерфейсом: полем для ввода и двумя кнопками. Программа способна произвести динамический и кинематический (построение графика траектории) расчёты, основываясь на данных, введённых пользователем. На рисунке 5 представлен скриншот интерфейса приложения.

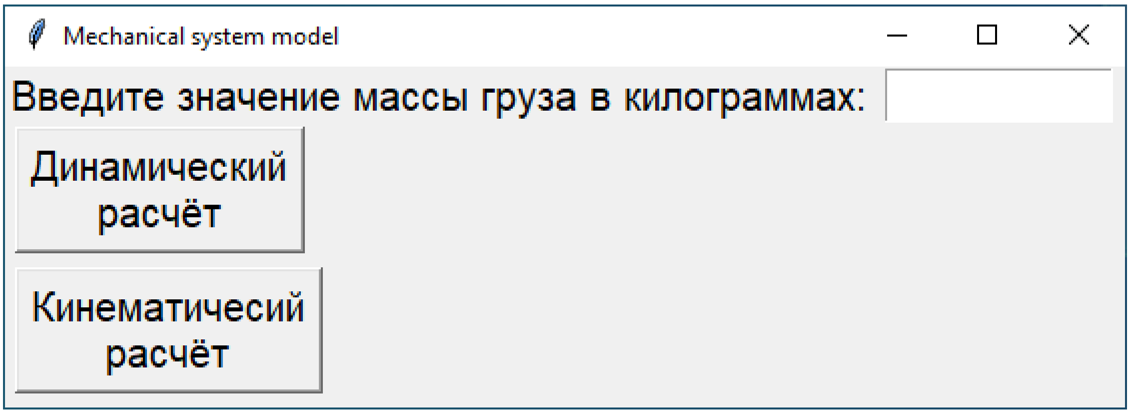


Рисунок 5 – Скриншот интерфейса приложения

Для успешного пользования электронной моделью пользователю необходимо ввести значение массы в килограммах в поле для ввода и нажать одну из кнопок, находящихся в левой части окна. При клике на кнопку “Динамический расчёт” в окне приложения появится рассчитанная начальная скорость тела заданной массы. На рисунке 6 представлен скриншот программы с результатами динамического расчёта.

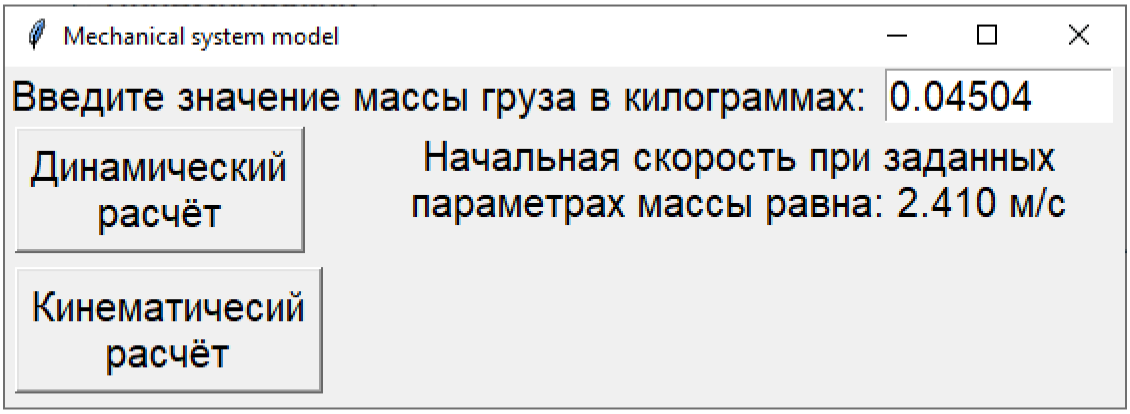


Рисунок 6 – Скриншот программы с результатами динамического расчёта

Нажатие на кнопку с надписью “Кинематический расчёт” приведет к открытию второго окна, в котором будет нарисован график траектории полёта снаряда заданной массы. На рисунке 7 представлен скриншот результатов кинематического расчёта.

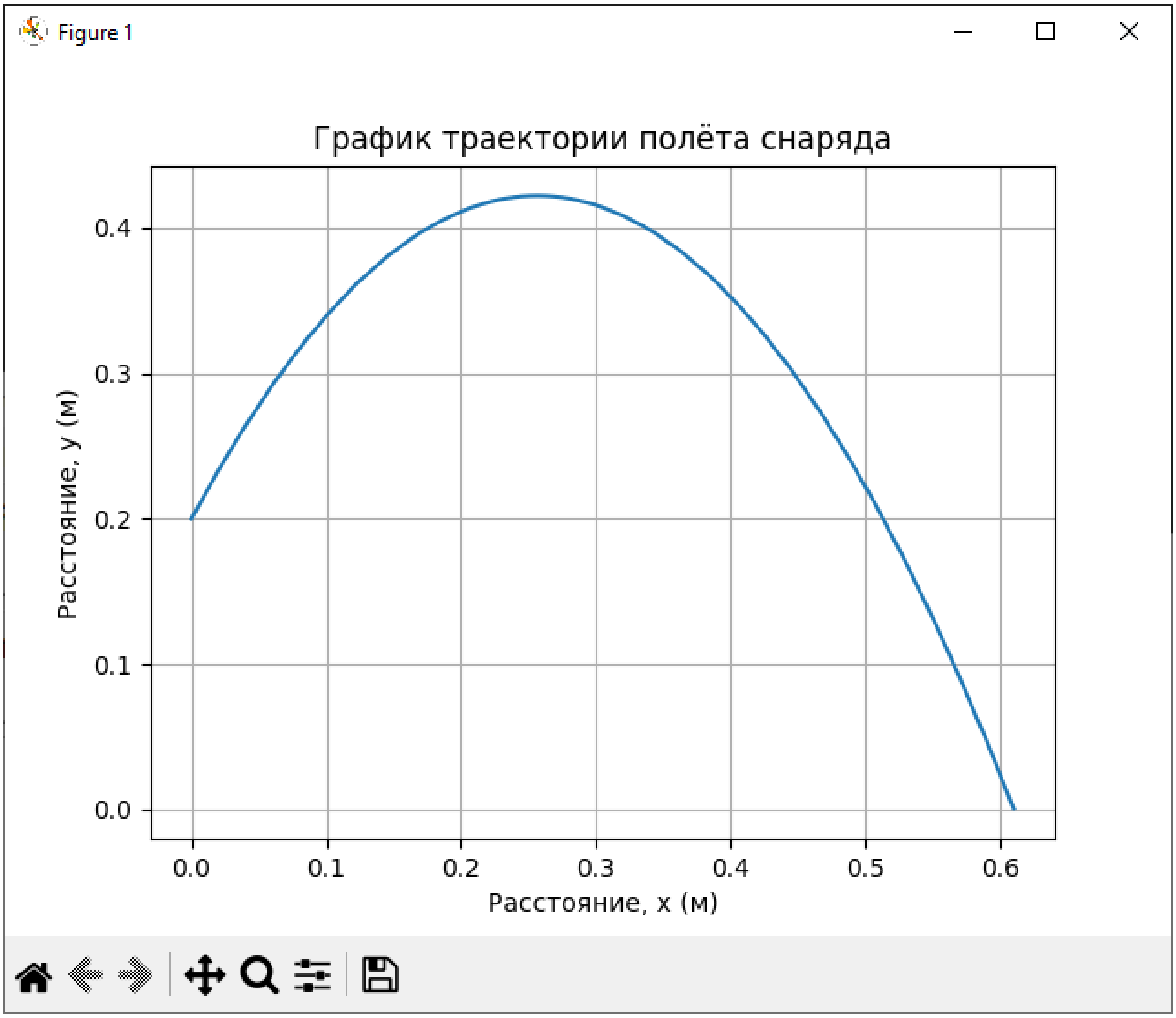


Рисунок 7 – Скриншот результатов кинематического расчёта

Ниже представлен код программы.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sqrt, cos, sin, pi

# определение констант
```

```
g = 9.80665
k = 432.83  # коэф. сжатия резинки
spoon_weight = 0.06
loaded_h = 0.14
shot_h = 0.2
delta_x = 0.05
angle = pi / 3  # в радианах

# изменяемые величины
starting_speed = 0
bullet_weight = 0



def dynamics():
    return sqrt((k * (delta_x ** 2) - 2 * (spoon_weight + bullet_weight) * g *
(shot_h - loaded_h)) /
                (2 * spoon_weight + bullet_weight))



def kinematics():
    time_interval = np.arange(0, 1, step=0.001)

    def spaceX(t):
        return starting_speed * cos(angle) * t

    def spaceY(t):
        return shot_h + starting_speed * sin(angle) * t - 0.5 * g * (t ** 2)

    ys = list(map(spaceY, time_interval))
    ys = [n for n in ys if n > 0]
```

```
    xs = list(map(spaceX, time_interval))
    xs = xs[:len(ys)]
    plt.plot(xs, ys)
    plt.title("График траектории полёта снаряда")
    plt.xlabel('Расстояние, x (м)')
    plt.ylabel('Расстояние, y (м)')
    plt.show()


if __name__ == "__main__":
    from tkinter import *
    from tkinter import messagebox


    def isValidWeight():
        if bullet_weight > 0.85:
            messagebox.showinfo("Ошибка", "Слишком большое значение массы!")
            return False
        if bullet_weight <= 0:
            messagebox.showinfo("Ошибка", "Отрицательное или нулевое значение массы!")
            return False
        return True


    def updateData():
        if txt_inp.get() == "":
            messagebox.showinfo("Пустое поле", "Введите значение массы!")
            return False
```

```
    global bullet_weight, starting_speed
    try:
        bullet_weight = float(txt_inp.get())
    except ValueError:
        bullet_weight = 0
        messagebox.showinfo("Ошибка", "Некорректное значение массы!")
        return False
    if not isValidWeight():
        return False
    starting_speed = dynamics()
    return True


def dyn_clicked():
    if updateData():
        lbl_speed.configure(
            text="Начальная скорость при заданных\nпараметрах массы равна: {:.3f} м/с".format(starting_speed),
            state="active")


def kin_clicked():
    if updateData():
        kinematics()


def close():
    plt.ion()
    plt.close("all")
```

```
    window.destroy()


plt.grid()
window = Tk()
window.title("Mechanical system model")
window.geometry("560x170")

lbl = Label(window, text="Введите значение массы груза в килограммах: ", font=("Arial Bold", 15))
lbl.grid(column=0, row=0)
lbl_speed = Label(window, font=("Arial Bold", 15), state="disabled")
lbl_speed.place(x=200, y=30)

txt_inp = Entry(window, width=10, font=("Arial Bold", 15))
txt_inp.grid(column=1, row=0)
txt_inp.focus()

btn_dyn = Button(window, text="Динамический\nрасчёт", font=("Arial Bold", 15), command=dyn_clicked)
btn_dyn.place(x=5, y=30)
btn_kin = Button(window, text="Кинематичесий\nрасчёт", font=("Arial Bold", 15), command=kin_clicked)
btn_kin.place(x=5, y=100)

window.protocol("WM_DELETE_WINDOW", close)
window.mainloop()
```

## 10. Список литературы


- Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов.-10-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986.
- https://sopromat.xyz/lectures?node=1929