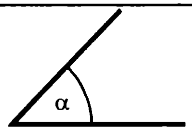
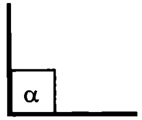
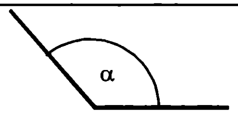
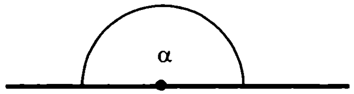
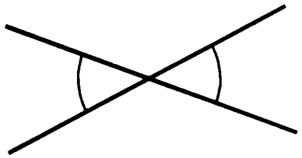
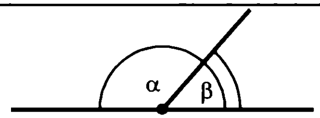
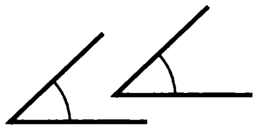
Теория по геометрии за курс 7-8 класса.

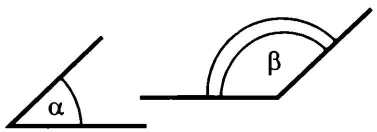
ПРЯМЫЕ И УГЛЫ НА ПЛОСКОСТИ

ВИДЫ УГЛОВ	
 **Острый угол** $0° < \alpha < 90°$.	 **Прямой угол** $\alpha = 90°$.
 **Тупой угол** $90° < \alpha < 180°$.	 **Развернутый угол** $\alpha = 180°$.
 **Вертикальные углы равны.**	 **Смежные углы составляют в сумме 180°:** $\alpha + \beta = 180°$.

УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОРОНАМИ

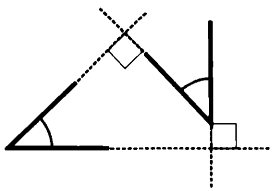


Либо равны,

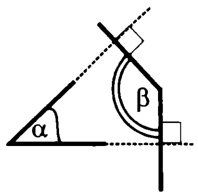


либо составляют в сумме 180°.

УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ СТОРОНАМИ

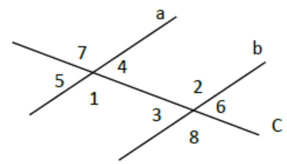


Либо равны,



либо составляют в сумме 180°.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ



Прямые a и b пересечены секущей c

∠1 и ∠2; ∠3 и ∠4 – накрест лежащие углы

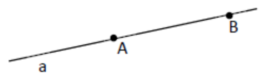
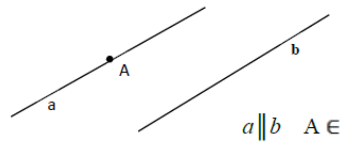
∠1 и ∠8; ∠3 и ∠5 - соответственные углы

∠2 и ∠7; ∠4 и ∠6 - соответственные углы

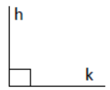
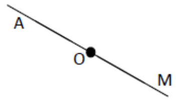
∠1 и ∠ 3; ∠2 и ∠4 - односторонние углы

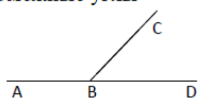
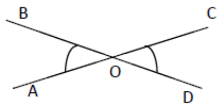
Признаки параллельности прямых	Свойства углов при параллельных прямых
$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow a \parallel b$ Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.	$a \parallel b \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.
$\angle 1 = \angle 8 \Rightarrow a \parallel b$ Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.	$a \parallel b \Rightarrow \angle 1 = \angle 8$ Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.
$\angle 1 + \angle 3 = 180° \Rightarrow a \parallel b$ Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.	$a \parallel b \Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = 180°$ Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.
$a \parallel b,\ a \parallel c \Rightarrow c \parallel b$ $\quad a \perp b,\ a \perp c \Rightarrow c \parallel b$	

НЕКОТОРЫЕ АКСИОМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

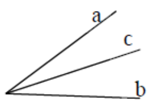
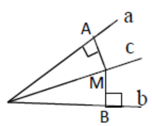
Через любые две различные точки проходит прямая, и притом только одна.  $A \in a \quad B \in a$	Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.  $a \parallel b \quad A \in a$

УГЛЫ

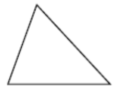
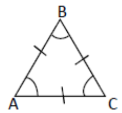
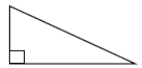
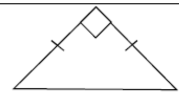
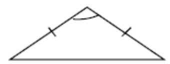
Острый угол *меньше прямого угла*	Тупой угол *больше прямого угла*	Прямой угол	Развернутый угол
 $\angle CDA < 90^\circ$	 $90^\circ < \angle ab < 180^\circ$	 $\angle hk = 90^\circ$	 $\angle AOM = 180^\circ$

Смежные углы 	$\angle ABC$ и $\angle CBD$ – смежные углы $\angle ABC + \angle CBD = 180^\circ$ Сумма смежных углов равна 180°.
Вертикальные углы 	$\angle AOB$ и $\angle COD$ – вертикальные $\angle AOB = \angle COD$ Вертикальные углы равны.

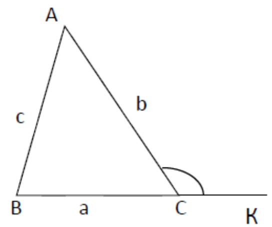
БИССЕКТРИСА УГЛА

	c – биссектриса $\angle ab$ $\angle ac = \angle cb$ Луч c делит угол $\angle ab$ пополам
	**Свойство биссектрисы** AM = BM Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от сторон угла.

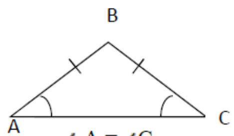
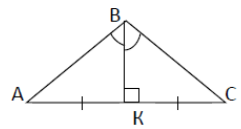
ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Треугольник	Разносторонний	Равнобедренный	Равносторонний
Остроугольный (все углы острые)	 *все стороны разной длины*	 *две стороны равны*	 *все стороны равны*
Прямоугольный (один из углов – прямой)			$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ $P = 3a$, где a - сторона, P- периметр
Тупоугольный (один из углов – тупой)			

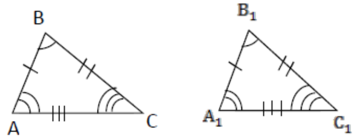
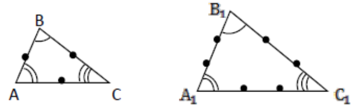
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

	**Сумма углов** треугольника равна 180˚. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ **Свойство внешнего угла**: $\angle ACK = \angle A + \angle B$
	Неравенство треугольника $a < b+c \quad b < a+c \quad c < a+b$ Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. $a > b - c$, где $b > c$
	Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника $b > c \Rightarrow \angle B > \angle C$ и $\angle B > \angle C \Rightarrow b > c$ В треугольнике против большей стороны лежит больший угол. Против большего угла лежит большая сторона.

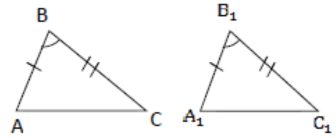
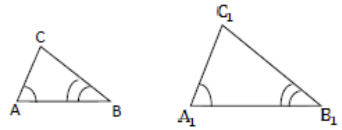
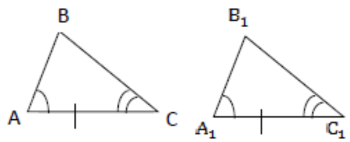
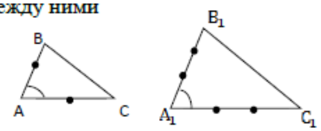
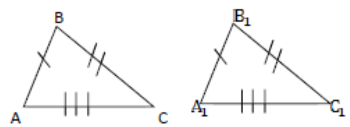
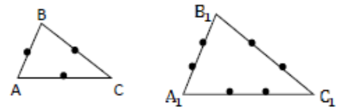
СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕНННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны  $\angle A = \angle C$, AC – основание AB и BC – боковые стороны	Биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой  BK – биссектриса BK – медиана BK - высота

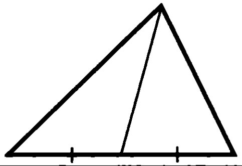
РАВНЫЕ И ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ (определение)

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, значит, $AB = A_1B_1$ $CB = C_1B_1$ $CA = C_1A_1$ $\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$ $\angle C = \angle C_1$. 	ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$, значит, $\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$ $\angle C = \angle C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ 

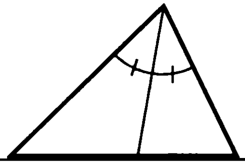
Равные углы лежат напротив *равных сторон*	***Равные углы*** лежат напротив *сходственных сторон*

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ	ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ
По двум сторонам и углу между ними  $AB = A_1B_1$ $CB = C_1B_1$ $\angle B = \angle B_1$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.	По двум углам  $\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$ ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$ Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
По стороне и двум прилежащим углам  $AC = A_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$ $\angle C = \angle C_1$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	По двум сходственным сторонам и углу между ними  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ $\angle A = \angle A_1$ ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$ Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.
По трем сторонам  $AB = A_1B_1$ $CB = C_1B_1$ $AC = A_1C_1$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.	По трем сходственным сторонам  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$ Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

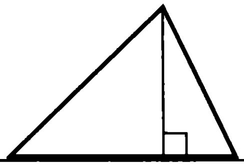
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА



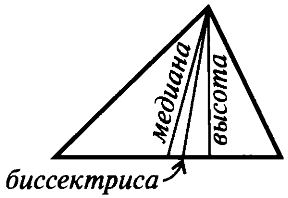
Медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.



Биссектриса – отрезок, который соединяет вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне и делит внутренний угол пополам.



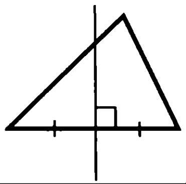
Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону треугольника.



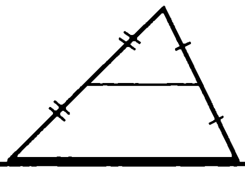
Взаимное расположение медианы, биссектрисы и высоты

Биссектриса лежит внутри угла, образованного высотой и медианой, проведенными из той же вершины.

В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.

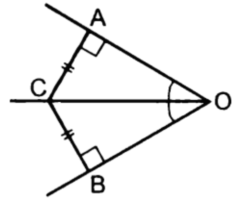


Серединный перпендикуляр – прямая, перпендикулярная стороне треугольника и делящая ее пополам.



Средняя линия – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

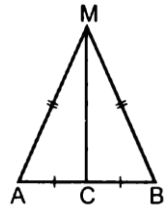
Свойства биссектрисы угла



1. Если OC – биссектриса угла O, то $AC = BC$

2. Если $AC = BC$, то OC – биссектриса угла O

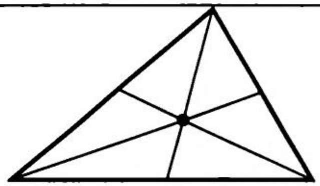
Свойства серединного перпендикуляра к отрезку



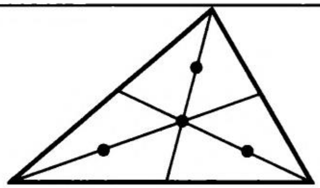
1. Если MC – серединный перпендикуляр к отрезку AB, то $MA = MB$

2. Если $MA = MB$, то M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB

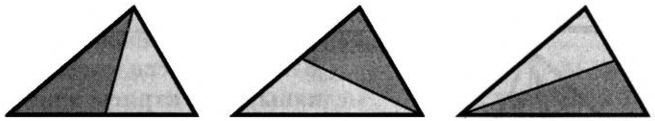
СВОЙСТВА МЕДИАН



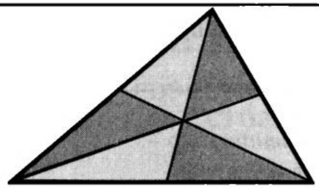
Три медианы пересекаются *в одной точке*, которая всегда находится *внутри* треугольника (центр масс треугольника).



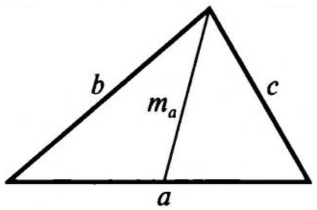
Каждая медиана точкой пересечения медиан делится в отношении 2 : 1, считая от вершины.



Каждая медиана делит треугольник на 2 равновеликих треугольника (одинаковой площади).



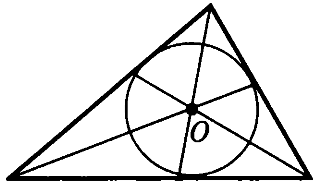
Три медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.



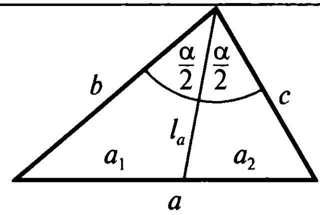
Длина медианы

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

СВОЙСТВА БИССЕКТРИС

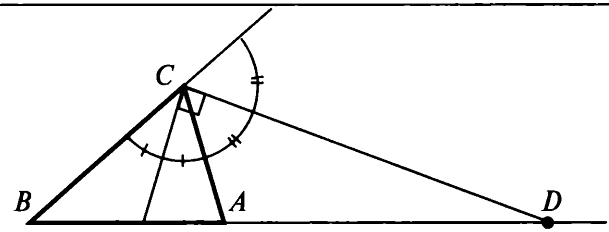


Три биссектрисы пересекаются *в одной точке*, которая всегда лежит *внутри* треугольника. Эта точка является *центром вписанной окружности*.



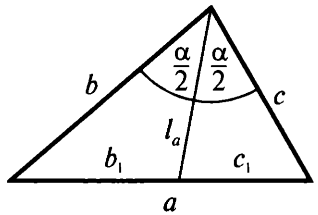
Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{c}.$$



Биссектрисы внутреннего и внешнего углов *перпендикулярны.*

Если биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противолежащей стороны, то $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BC}{AC}$.

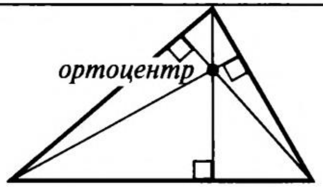


Длина биссектрисы

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$$

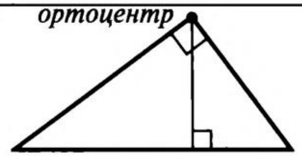
$$l_a^2 = bc - b_1c_1$$

СВОЙСТВА ВЫСОТ

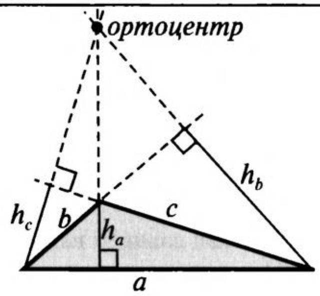


Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются *в одной точке*. Эта точка называется *ортоцентром*.

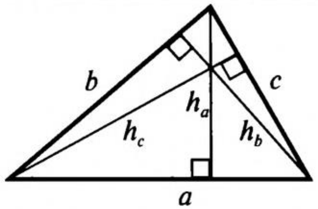
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри треугольника.



Ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла.

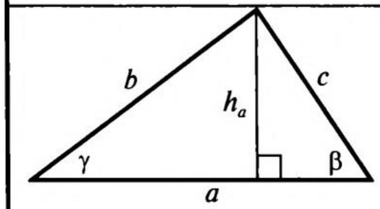


Ортоцентр тупоугольного треугольника лежит вне треугольника (на рисунке треугольник выделен серым цветом, а продолжения высот и сторон, образующих тупой угол, проведены пунктиром).



Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$



Длина высоты

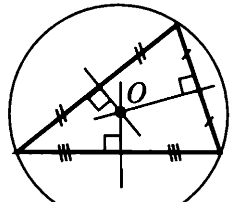
$$h_a = b \sin\gamma = c \sin\beta;$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

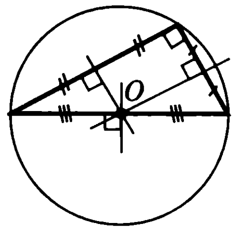
где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

СВОЙСТВА СЕРЕДИННЫХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРОВ

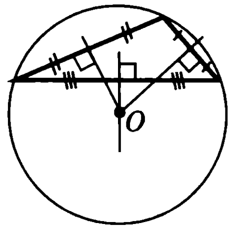
Три серединных перпендикуляра пересекаются *в одной точке*. Эта точка является *центром описанной окружности*.



В случае *остроугольного* треугольника точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности) лежит *внутри* треугольника.

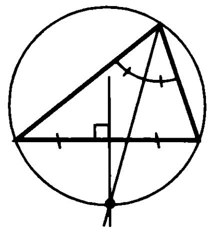


В случае *прямоугольного* треугольника точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности) *совпадает с серединой гипотенузы*.



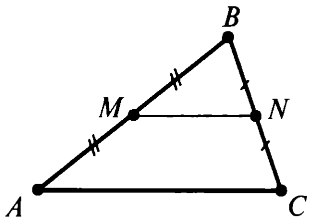
В случае *тупоугольного* треугольника точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности) лежит *вне треугольника*.

СВОЙСТВО СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА И БИССЕКТРИСЫ



Продолжение биссектрисы пересекается с серединным перпендикуляром в точке, лежащей на окружности, описанной около треугольника.

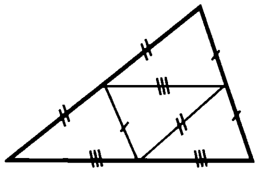
СВОЙСТВА СРЕДНЕЙ ЛИНИИ



Средняя линия параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине:

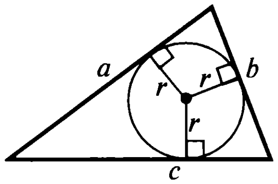
$$MN \parallel AC; \quad MN = \frac{1}{2}AC.$$

Она отсекает треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия 1/2.



Три средние линии треугольника делят его на 4 равных треугольника, подобных данному, с коэффициентом подобия 1/2.

ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ



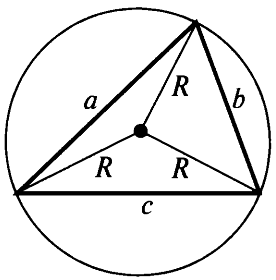
В любой треугольник можно *вписать окружность*.

Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис.

Радиус вписанной окружности

$r = S/p$, где S — площадь треугольника,

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$



Около любого треугольника можно *описать окружность*.

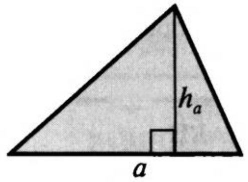
Центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров.

Радиус описанной окружности

$$R = \frac{abc}{4S},$$

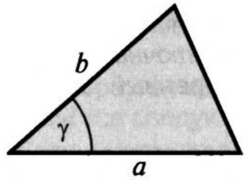
где S – площадь треугольника.

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА



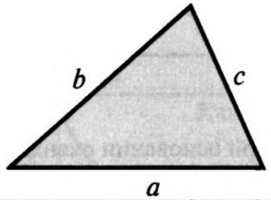
Через сторону и высоту, проведенную к ней:

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$



Через две стороны и угол между ними:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

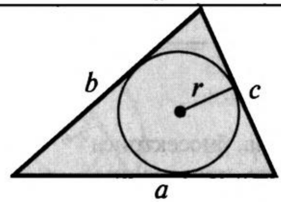


Формула Герона

Через три стороны:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

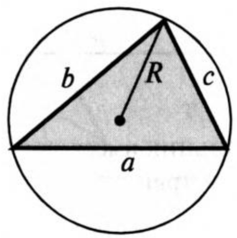
$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$



Через полупериметр и радиус вписанной окружности:

$$S = pr,$$

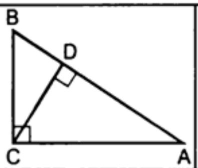
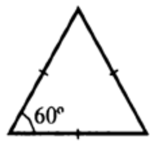
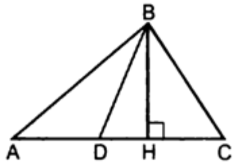
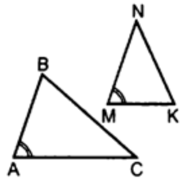
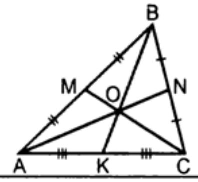
$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$



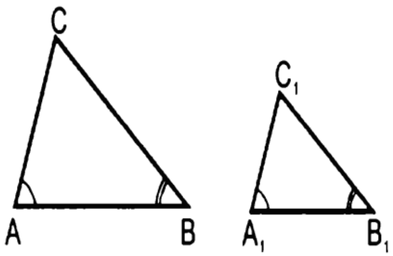
Через произведение сторон и радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Площадь треугольника. Отношение площадей.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC,$ $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB}$ 	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ 
$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{DC}$ 	$\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \frac{AB \cdot AC}{MN \cdot MK}$ 
$S_{AOM} = S_{BOM} = S_{BON} = S_{CON} = S_{AOK} = S_{COK}$ 	

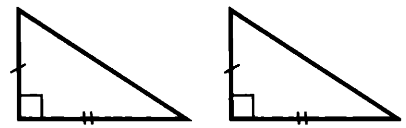
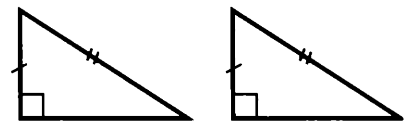
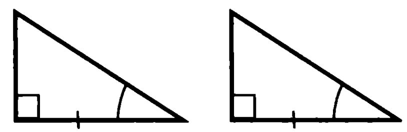
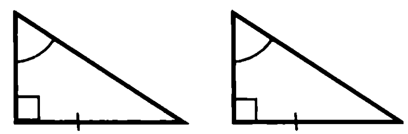
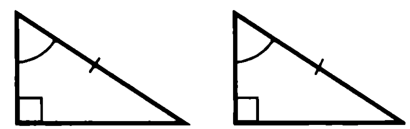
Подобные треугольники



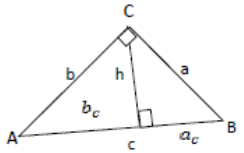
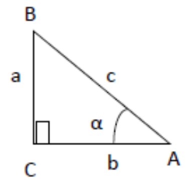
$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = k; \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = k^2.$$

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

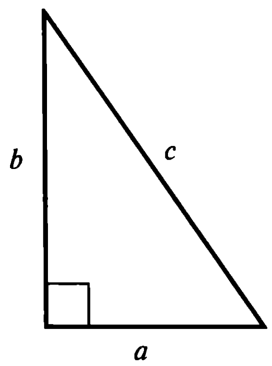
Так называется треугольник, у которого один угол прямой. Стороны, прилежащие к прямому углу, называются катетами,
а сторона, противолежащая прямому углу — гипотенузой.

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ	
	По двум катетам.
	По одному катету и гипотенузе.
	По катету и прилежащему острому углу.
	По катету и противолежащему острому углу.
	По гипотенузе и острому углу.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Основные соотношения в прямоугольном треугольнике		
	**Теорема Пифагора** $c^2=a^2+b^2$ Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.	Пропорциональные отрезки $h^2=a_c b_c$ $a^2=a_c c$ $b^2=b_c c$ $h=\frac{ab}{c}$
 $\angle C=90^0$ $\angle A=\alpha$ c = AB – гипотенуза a = BC – катет, противолежащий к α b = AC – катет, прилежащий к углу α	СИНУС Отношение противолежащего катета к гипотенузе	$\sin\alpha=\frac{a}{c}$
	КОСИНУС Отношение прилежащего катета к гипотенузе	$\cos\alpha=\frac{b}{c}$
	ТАНГЕНС Отношение противолежащего катета к прилежащему	$\text{tg}\,\alpha=\frac{a}{b}$
	КОТАНГЕНС Отношение прилежащего катета к противолежащему	$\text{ctg}\,\alpha=\frac{b}{a}$

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:

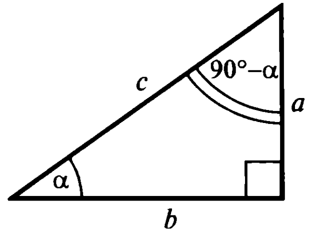
$$a^2+b^2=c^2.$$

Справедливо и *обратное* утверждение: если для сторон *a, b, c* треугольника выполняется соотношение

$$a^2+b^2=c^2,$$

то треугольник является прямоугольным,
причем стороны *a* и *b* — его катеты,
а сторона *c* — гипотенуза.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



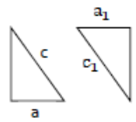
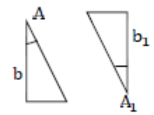
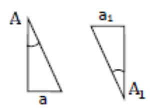
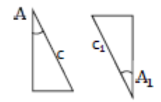
$$\frac{a}{c}=\sin\alpha=\cos(9^{\circ}{}^{\circ}-\alpha)$$

$$\frac{b}{c}=\cos\alpha=\sin(9^{\circ}{}^{\circ}-\alpha)$$

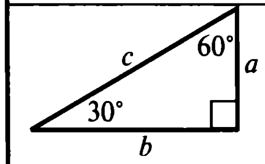
$$\frac{a}{b}=\text{tg}\alpha=\text{ctg}(9^{\circ}{}^{\circ}-\alpha)$$

$$\frac{b}{a}=\text{ctg}\alpha=\text{tg}(9^{\circ}{}^{\circ}-\alpha)$$

Свойства прямоугольного треугольника			
$\angle A+\angle B=90^{\circ}$ Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°	$\angle A=30^{\circ}\Rightarrow a=\frac{1}{2}c$ Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы	$a=\frac{1}{2}c\Rightarrow\angle A=30^{\circ}$ Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°	$m=\frac{1}{2}c=R$ Медиана, проведенная к гипотенузе, равна её половине и является радиусом описанной окружности

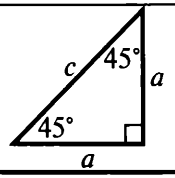
Признаки равенства прямоугольных треугольников			
По гипотенузе и катету  $a=a_1$ $c=c_1$	По катету и прилежащему острому углу  $\angle A=\angle A_1$ $b=b_1$	По катету и противолежащему острому углу  $\angle A=\angle A_1$ $a=a_1$	По гипотенузе и острому углу  $\angle A=\angle A_1$ $c=c_1$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$a = \frac{c}{2}$

$b = \frac{\sqrt{3}c}{2}$



$a = \frac{c}{\sqrt{2}}$

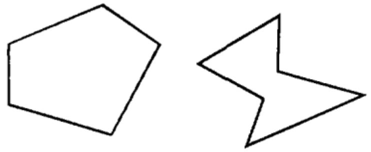
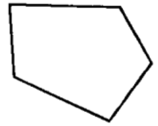
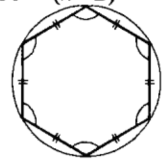
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 1$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ – **основное тригонометрическое тождество** $\left.\begin{aligned}&\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha\\&\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha\\&\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha\\&\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha\end{aligned}\right\}$ формулы приведения

ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Многоугольники

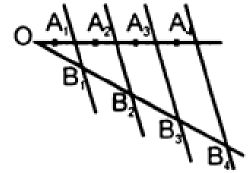
Многоугольники	**Выпуклые многоугольники**
	Сумма углов равна $180^\circ \cdot (n-2)$  

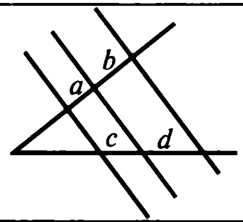
Правильные многоугольники

Внутренний угол $\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$; Внешний угол $\beta = \frac{360^\circ}{n}$

Теорема Фалеса

Если $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$
и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$,
то $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

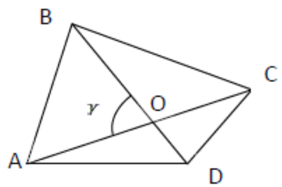




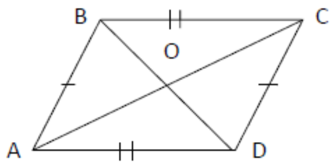
Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

ABCD - четырехугольник $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ 	$S = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\gamma}{2}$ AC, BD - диагонали

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ (определение)

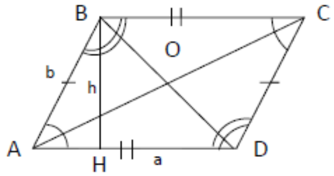


ABCD- параллелограмм

AB || CD
BC || AD

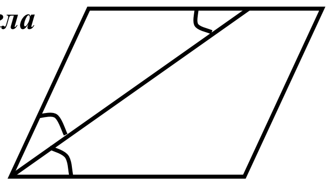
Параллелограммом называется четырехугольник, у которого стороны попарно параллельны.

СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

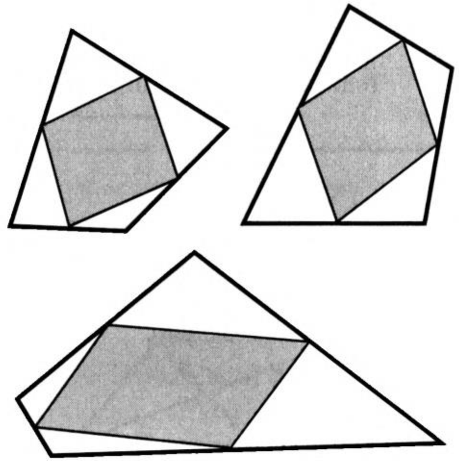


Свойства параллелограмма	Признаки параллелограмма
1) AB=CD; BC=AD ∠A= ∠C; ∠B=∠D В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны 2) AC ∩ BD = O, AO = OC, BO = OD Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам. 3) $\angle A + \angle B = 180^0$ В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180^0 4) $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ где $d_1 = AC$; $d_2 = BD$ – диагонали; $a = AD$; $b = AB$; $c = BC$; $d = CD$ – стороны 5) $P = 2(a + b)$ – периметр параллелограмма, где a = AD; b = AB	1) (AB‖CD; AB = CD) ⟹ (ABCD-параллелограмм) Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм. 2) (AB = CD; BC = AD) ⟹ (ABCD-параллелограмм) Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм 3) (AO = OC; BO = OD, где O = AC ∩ BD) ⟹ (ABCD-параллелограмм) Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм

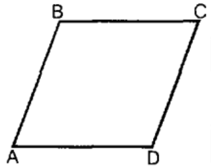
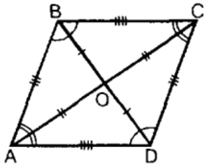
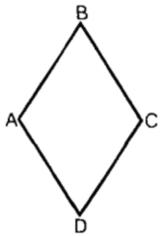
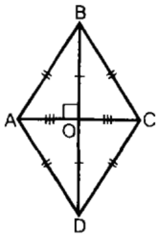
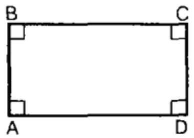
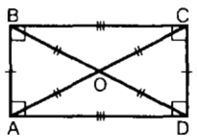
В параллелограмме биссектриса угла отсекает равнобедренный треугольник!!!

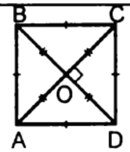
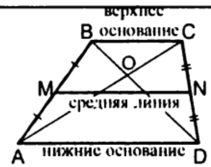
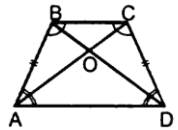
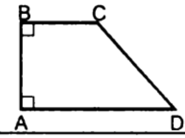


СВОЙСТВО ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, СВЯЗАННОЕ С ПАРАЛЛЕЛОГРАММОМ

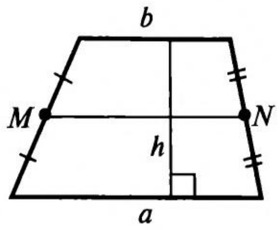


Если соединить отрезками середины соседних сторон любого четырехугольника, получится параллелограмм.

Определение	*Свойства*	*Признаки*
	Параллелограмм	
 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$	 1) $AO = CO$, $BO = DO$, $O = AC \cap BD$ 2) $AB = CD$, $BC = AD$ 3) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ 4) $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D =$ $= \angle B + \angle C = \angle A + \angle D = 180°$	$ABCD$ – параллело-грамм, если: 1) $AB = CD$, $AB \parallel CD$ или $BC = AD$, $BC \parallel AD$ 2) $AB = CD$ и $BC = AD$; 3) $AC \cap BD = O$, $AO = CO$, $BO = DO$.
	Ромб	
 $ABCD$ – парал-лелограмм, $AB = BC =$ $= CD = DA$.	 1) $AC \perp BD$ 2) AC – биссектриса $\angle A$ и $\angle C$ BD – биссектриса $\angle B$ и $\angle D$. Ромб обладает всеми свой-ствами параллелограмма.	$ABCD$ – ромб, если: 1) $ABCD$ – параллело-грамм и $AC \perp BD$; 2) $ABCD$ – параллело-грамм и AC и BD – биссектрисы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ и $\angle D$; 3) $AB = BC = CD =$ $= DA$.
	Прямоугольник	
 $ABCD$ – парал-лелограмм, $\angle A = \angle B =$ $= \angle C = \angle D$.	 1) $AC = BD$ Прямоугольник обладает всеми свойствами паралле-лограмма.	$ABCD$ – прямоуголь-ник, если: 1) $ABCD$ – параллело-грамм и $AC = BD$; 2) $ABCD$ – параллело-грамм и $\angle A = 90°$ ($\angle B$, $\angle C$, $\angle D$) 3) $\angle A = \angle B = \angle C = 90°$

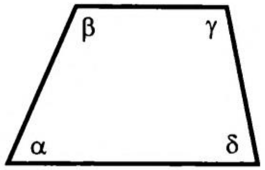
	Квадрат	
 ***ABCD* – прямоуголь-ник,** $AB = BC = CD = DA$	**Квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоуголь-ника**	$ABCD$ – квадрат, если: 1. $ABCD$ – прямоугольник и $AC \perp BD$ 2. $ABCD$ – ромб и $AC = BD$ 3. $ABCD$ – ромб и $\angle A = 90°$ 4. $ABCD$ – прямоугольник и AC и BD – биссектрисы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$
	Трапеция	
 $BC \parallel AD$, AB **не па-раллельна** CD $MN = 0{,}5\,(BC + AD)$ $\Delta AOD \sim \Delta COB$	**Равнобокая трапеция:** $AC = BD$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ **Прямоугольная трапеция:**	 

СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ



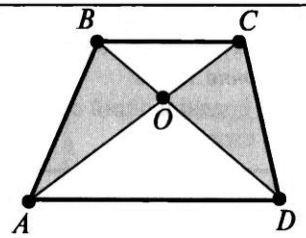
Средняя линия параллельна основаниям, равна их полусумме и делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, содержащих основания, (например, высоту трапеции) пополам:

$MN \parallel a,\ MN \parallel b,\ MN = \dfrac{a+b}{2}$.

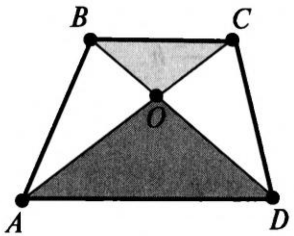


Сумма углов, прилежащих к любой боковой стороне, равна 180°:

$\alpha + \beta = 180°,$
$\gamma + \delta = 180°.$



Треугольники *AOB* и *DOC*, образованные боковыми сторонами и отрезками диагоналей, равновелики (имеют равные площади).

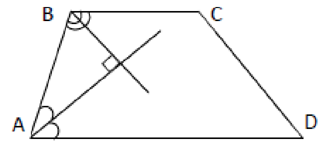


$\Delta AOD \backsim \Delta COB$

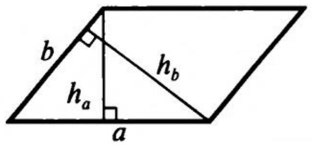
Треугольники *AOD* и *COB*, образованные основаниями и отрезками диагоналей, подобны.
Коэффициент подобия k равен отношению оснований:

$k = \dfrac{AD}{BC}$.

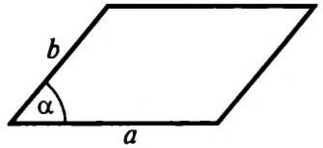
Отношение площадей этих треугольников равно k^2.

	Биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне, перпендикулярны

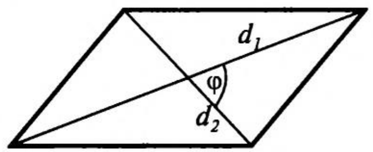
ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА



Через сторону и опущенную на нее высоту:
$S = ah_a = bh_b$.



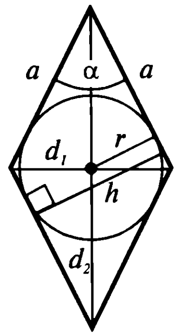
Через две прилежащие стороны и угол между ними:
$S = ab \sin\alpha$.



Через диагонали и угол между ними:

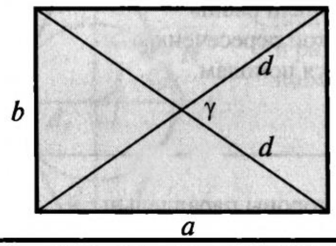
$S = \dfrac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$.

ПЛОЩАДЬ РОМБА



Через сторону и высоту: $S = ah$.
Через сторону и радиус вписанной окружности:
$S = 2ar$.
Через сторону и угол ромба:
$S = a^2 \sin\alpha$.
Через диагонали: $S = \dfrac{d_1 d_2}{2}$

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА



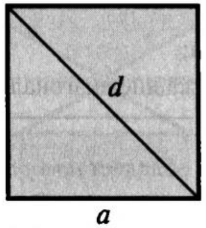
Через стороны:

$S = ab.$

Через диагональ и угол между диагоналями:

$$S = \frac{d^2 \sin\gamma}{2}.$$

ПЛОЩАДЬ КВАДРАТА



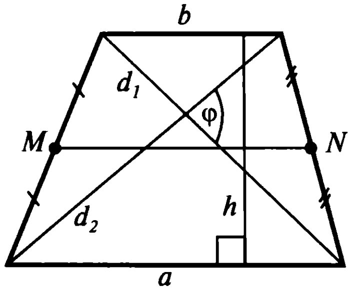
Через сторону:

$S = a^2.$

Через диагональ:

$$S = \frac{d^2}{2}$$

ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ



Через полусумму оснований и высоту:

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

Через среднюю линию и высоту:

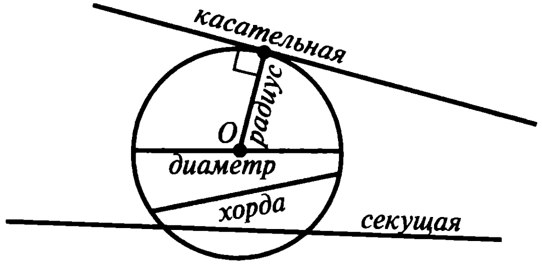
$$S = MN \cdot h.$$

Через диагонали и угол между ними:

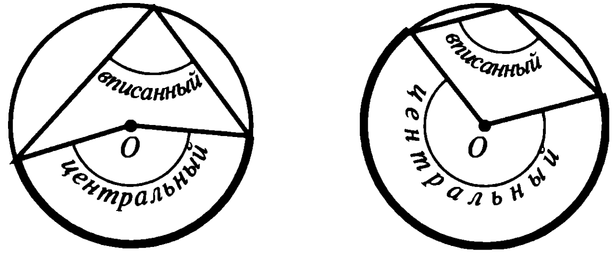
$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}.$$

ОКРУЖНОСТЬ

ПРЯМЫЕ И ОТРЕЗКИ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ

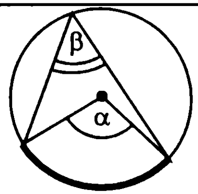


УГЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ
УГЛОВАЯ МЕРА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ



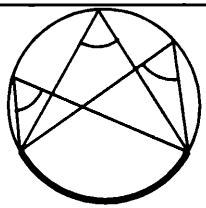
Угловой мерой дуги окружности является центральный угол, который опирается на эту дугу.

СВОЙСТВА ВПИСАННЫХ УГЛОВ

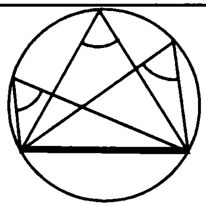


Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу:

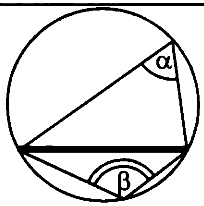
$$\beta = \frac{\alpha}{2}.$$



Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

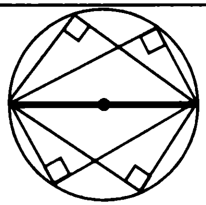


Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по одну сторону от этой хорды, равны.



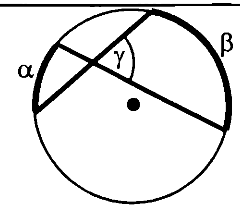
Любая пара углов, опирающихся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по разные стороны хорды, составляют в сумме 180°:

$$\alpha + \beta = 180°.$$



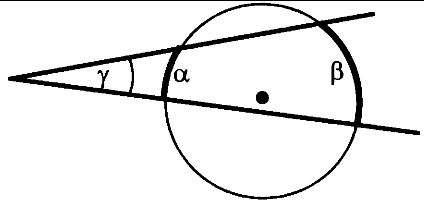
Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые.

УГЛЫ МЕЖДУ ХОРДАМИ, КАСАТЕЛЬНЫМИ И СЕКУЩИМИ



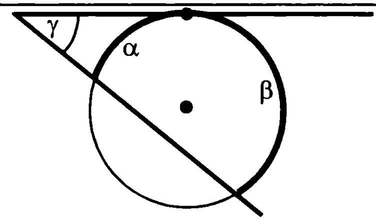
Угол между пересекающимися хордами:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$



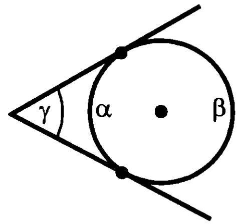
Угол между секущими, пересекающимися вне окружности:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$



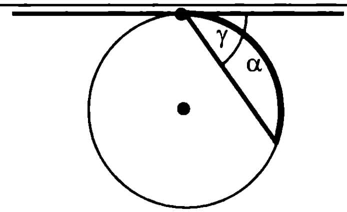
Угол между касательной и секущей:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$



Угол между касательными:

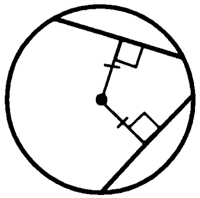
$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2} = \pi - \alpha.$$



Угол между касательной и хордой:

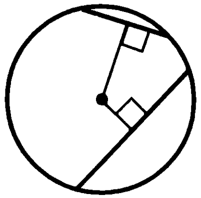
$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$

СВОЙСТВА ХОРД

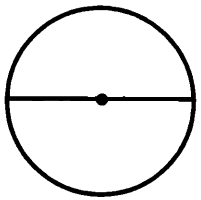


Если хорды равноудалены
от центра окружности,
то они равны.

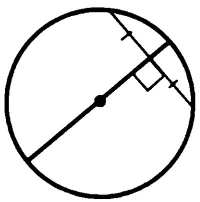
Если хорды равны,
то они равноудалены
от центра окружности.



Большая из двух хорд
находится ближе
к центру окружности.



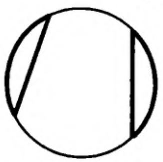
Наибольшая хорда
является диаметром.



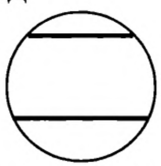
Если диаметр делит хорду пополам,
то он перпендикулярен ей.

Если диаметр перпендикулярен хорде,
то он делит ее пополам.

СВОЙСТВА ДУГ И ХОРД

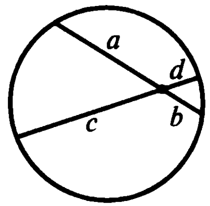


Равные дуги стягиваются равными хордами.



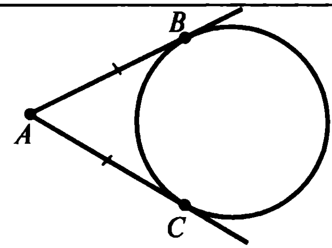
Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДЛИНАМИ ХОРД, ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ И СЕКУЩИХ



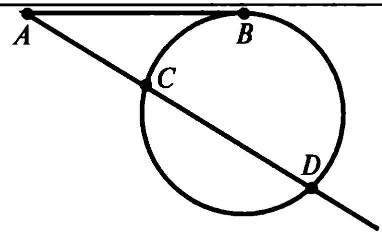
Отрезки пересекающихся хорд связаны соотношением:

$ab = cd.$



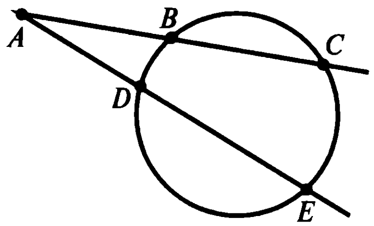
Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны:

$AB = AC.$



Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, проведенной из той же точки:

$AB^2 = AC \cdot AD.$



Произведения отрезков секущих, проведенных из одной точки, равны:

$AB \cdot AC = AD \cdot AE.$