ТЕОРИЯ ПО АЛГЕБРЕ 5-8 класс

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

на 2	последняя цифра числа четная
на 3	сумма цифр числа делится на 3
на 4	две последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 4
на 5	последняя цифра числа 0 или 5
на 6	число должно делиться на 2 и на 3 (см. соответствующие признаки делимости)
на 8	три последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 8
на 9	сумма цифр числа делится на 9
на 11	сумма цифр, стоящих на четных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, кратное 11
на 25	две последние цифры числа 00, 25, 50 или 75

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

ДЕСЯТКИ	ЕДИНИЦЫ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ПРОПОРЦИИ*)

СВОЙСТВА ПРОПОРЦИЙ

1. Произведение крайних членов равно произведению средних, т.е. если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $ad = bc$.
2. В пропорции, все члены которой отличны от нуля, можно менять местами средние и крайние члены пропорции, т.е. если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Для $n \in N$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n — четное,

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1})$$

Если n — нечетное,

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

МОДУЛЬ ЧИСЛА

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}, \quad |a| = \sqrt{a^2}$$

$|a| \geqslant 0;$ $\quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ $\quad |a + b| \leqslant |a| + |b|$

$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ $\quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$ $\quad |a - b| \geqslant ||a| - |b||$

Правила операций с обыкновенными дробями:

Сложение $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

Вычитание $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$

Умножение $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Деление $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Составная дробь $m\frac{a}{b} = \frac{m \cdot b + a}{b}$

Правила обращения со степенями:

Определение

$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a$, *если n – натуральное число*

a – основание степени, n - показатель степени

$a^0 = 1$ $\quad a^1 = a$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

Формулы

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Правила работы с арифметическим квадратным корнем:

Определение

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа *a* - ($\sqrt{a}$) - называется неотрицательное число, квадрат которого равен *a*.

Формулы

- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $(a \geq 0)$
- $\sqrt{a^2} = |a|$ $(a$ – *любое*$)$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $(a \geq 0;\ b \geq 0)$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a \geq 0;\ b > 0)$

Важнейшие равносильные преобразования уравнений:

1. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$

2. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

3.
$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x); \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. + \textit{Проверка}.$$

4. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$

ФУНКЦИИ*)

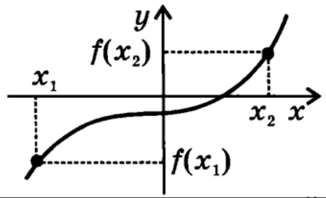
Числовой **функцией** называется соответствие, которое каждому числу x из некоторого заданного множества сопоставляет единственное число y.

Обозначение: $y = f(x)$, где x — независимая переменная (аргумент функции), y — зависимая переменная (функция).

Множество значений x называется **областью определения** функции (обычно обозначается D).

Множество значений y называется **областью значений** функции (обычно обозначается E).

Графиком функции называется множество точек плоскости с координатами $(x,\ f(x))$.



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

- ***Аналитический способ:*** функция задается с помощью математической формулы.

  Примеры: $y = x^2$, $y = \ln x$

- ***Табличный способ:*** функция задается с помощью таблицы.

  Пример.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

- ***Описательный способ:*** функция задается словесным описанием.

  Пример: функция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ для рациональных } x, \\ 0 \text{ для иррациональных } x. \end{cases}$

- ***Графический способ:*** функция задается с помощью графика.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ

Функция называется **четной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения

$$f(-x) = f(x).$$

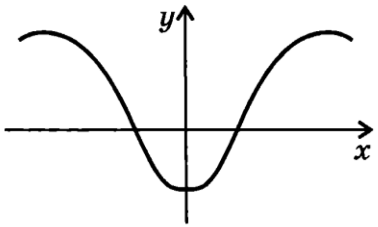


График четной функции симметричен относительно оси y.

Функция называется **нечетной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения

$$f(-x) = -f(x).$$

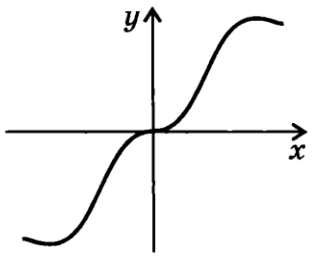
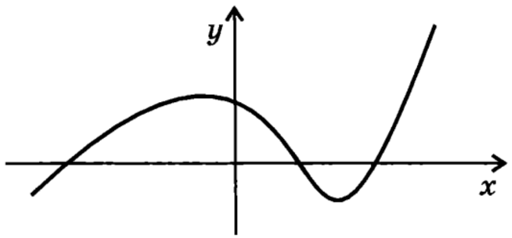


График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Многие функции не являются ни четными, ни нечетными.

Пример графика функции, не являющейся ни четной, ни нечетной:

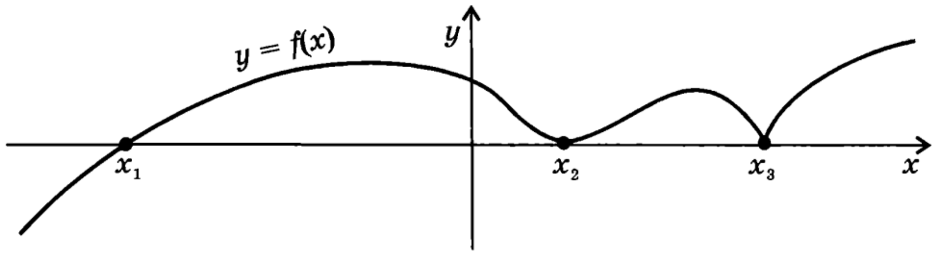


НУЛИ ФУНКЦИИ

Нулем функции $y = f(x)$ называется такое значение аргумента x_0, при котором функция обращается в нуль:

$$f(x_0) = 0.$$

В нуле функции ее график имеет общую точку с осью x.

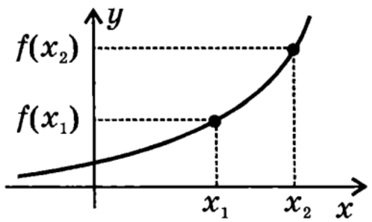


x_1, x_2, x_3 — нули функции $y = f(x)$

МОНОТОННОСТЬ (ВОЗРАСТАНИЕ, УБЫВАНИЕ)

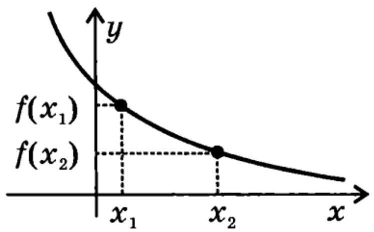
Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) < f(x_2).$$



Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) > f(x_2).$$

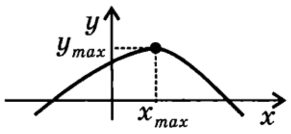


ЭКСТРЕМУМЫ (МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ)

Внутренняя точка x_{max} области определения называется **точкой максимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) < f(x_{max}).$$

Значение $y_{max} = f(x_{max})$ называется **максимумом** этой функции.

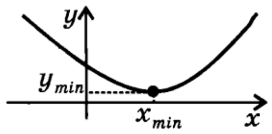


x_{max} — точка максимума
y_{max} — максимум

Внутренняя точка x_{min} области определения называется **точкой минимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) > f(x_{min}).$$

Значение $y_{min} = f(x_{min})$ называется **минимумом** этой функции.

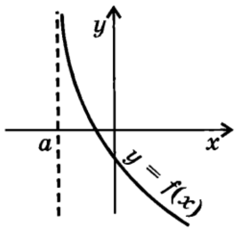


x_{min} — точка минимума
y_{min} — минимум

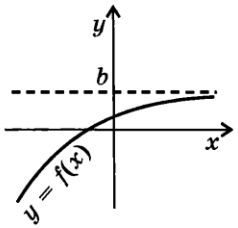
АСИМПТОТЫ

Если график функции $y = f(x)$ имеет бесконечную ветвь (ветви), у графика могут быть асимптоты.

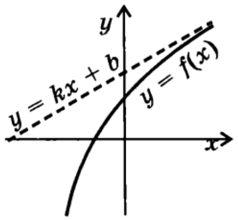
Асимптотой графика называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика при удалении этой точки по бесконечной ветви.



Вертикальная асимптота
$x = a$

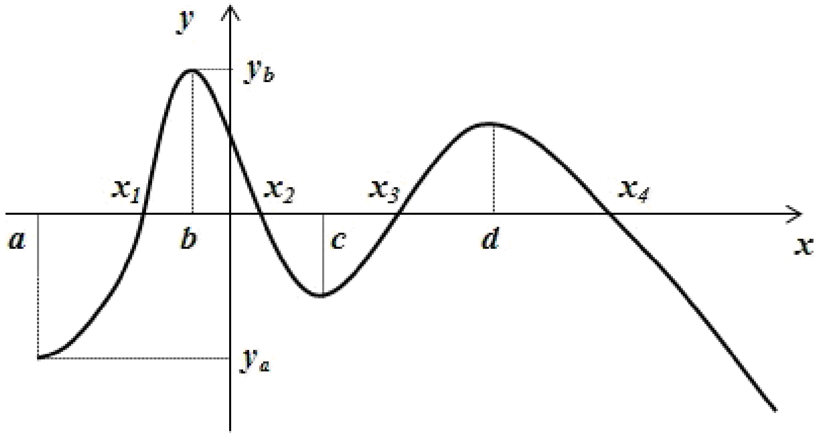


Горизонтальная асимптота
$y = b$



Наклонная асимптота
$y = kx + b$

ПРИМЕР



Область определения: $D(f): x \in [a; \infty)$

Множество значений: $E(f): y \in (-\infty; y_b]$

Корни функции: $f(x) = 0 \Rightarrow x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Критические точки $x \in \{b, d\}; \quad x = c$

Промежутки возрастания: $x \in [a, b]$, $[c, d]$

Промежутки убывания: $x \in [b, c]$, $[d, \infty)$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ x

$$f(x) \to -f(x)$$

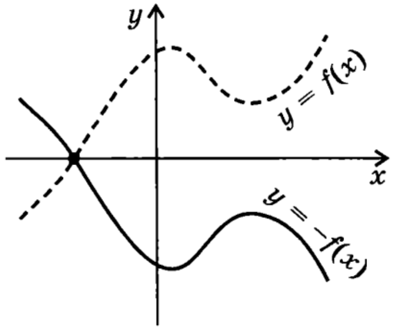
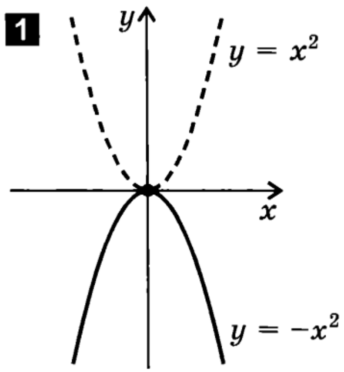


График функции $y = -f(x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси x.

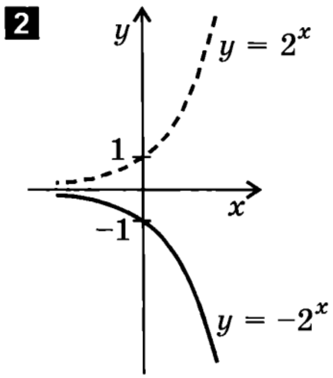
Замечание. Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.

Примеры:

1



2



ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ y

$$f(x) \to f(-x)$$

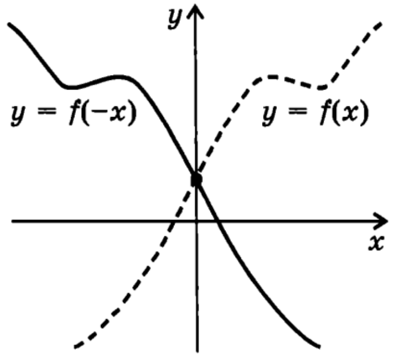


График функции $y = f(-x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси y.

Замечание. Точка пересечения графика с осью y остается неизменной.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ x

$$f(x) \to f(x - a)$$

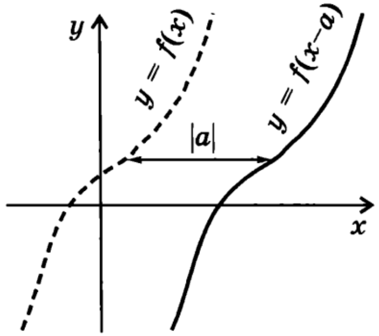
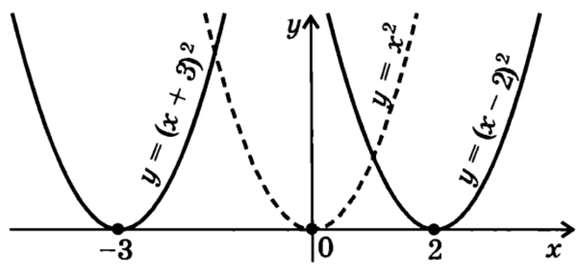


График функции $y = f(x - a)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x на $|a|$ вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$.

Примеры:

1



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ y

$$f(x) \to f(x) + b$$

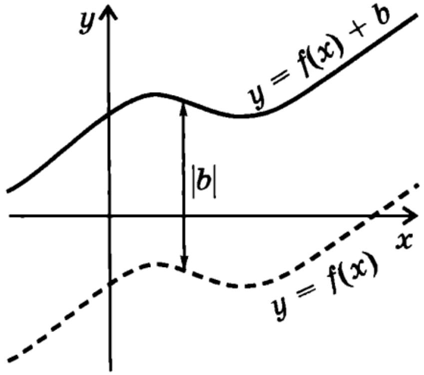
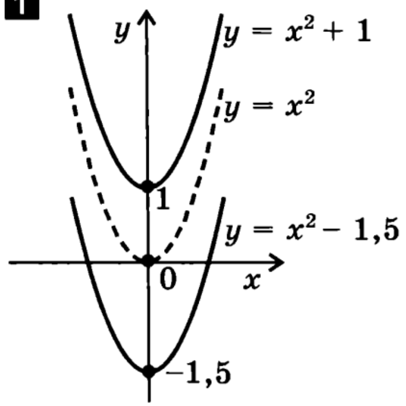


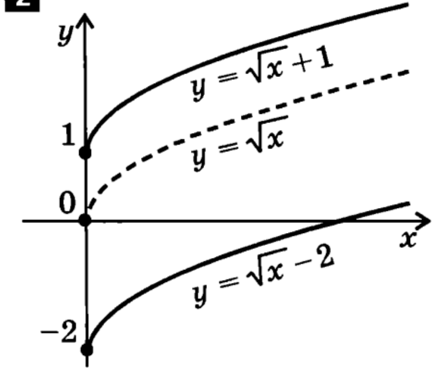
График функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y на $|b|$ вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$.

Примеры:

1



2



СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ y

$$f(x) \to kf(x), \text{ где } k > 0$$

$\boxed{k > 1}$

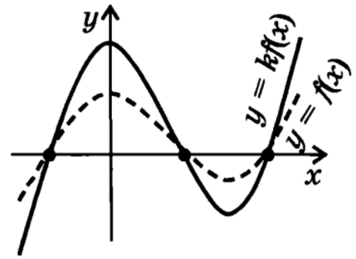


График функции $y = kf(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в k раз.

$\boxed{0 < k < 1}$

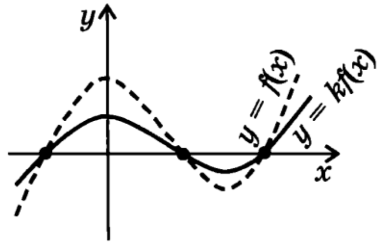
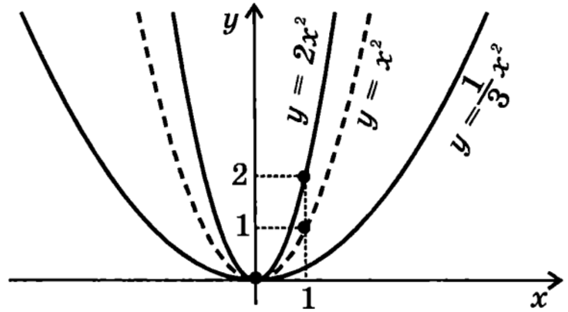


График функции $y = kf(x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в $1/k$ раз.

Замечание. Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.

Примеры:

1



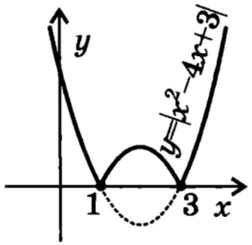
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = |f(x)|$

Части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси x и на оси x, остаются без изменения, а лежащие ниже оси x — симметрично отражаются относительно этой оси (вверх).

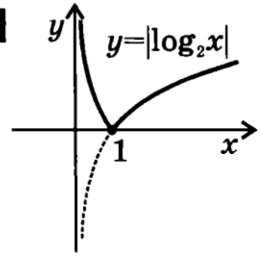
Замечание. Функция $y = |f(x)|$ неотрицательна (ее график расположен в верхней полуплоскости).

Примеры:

1



2



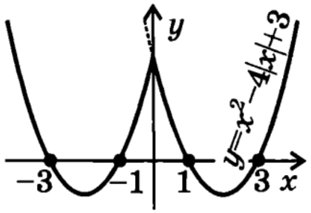
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(|x|)$

Часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси y, удаляется, а часть, лежащая правее оси y — остается без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси y (влево). Точка графика, лежащая на оси y, остается неизменной.

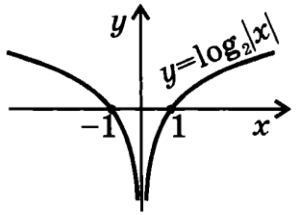
Замечание. Функция $y = f(|x|)$ четная (ее график симметричен относительно оси y).

Примеры:

1

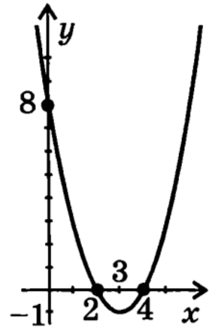
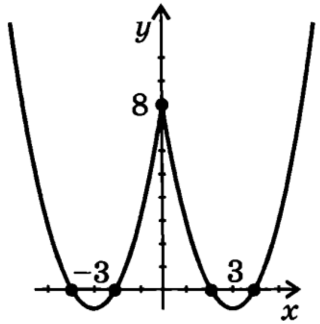
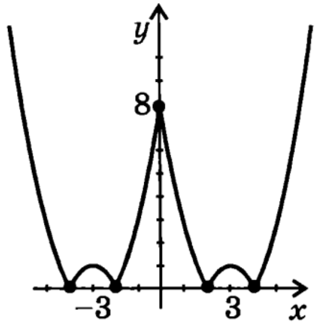


2



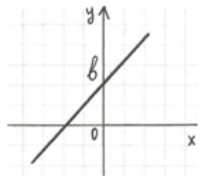
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

$$y = |x^2 - 6|x| + 8| = ||x|^2 - 6|x| + 8| = |(|x| - 3)^2 - 1|$$

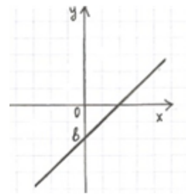
$y = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1$	$y = (\lvert x\rvert - 3)^2 - 1$	$y = \lvert(\lvert x\rvert - 3)^2 - 1\rvert$
		

Графики элементарных функций.

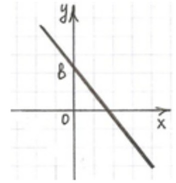
Линейная функция $y = kx + b$ $(k > 0, b > 0)$



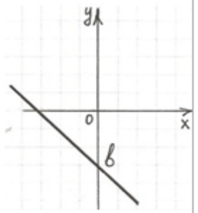
Линейная функция $y = kx + b$ $(k > 0, b < 0)$



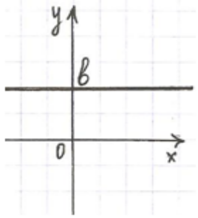
Линейная функция $y = kx + b$ $(k < 0, b > 0)$



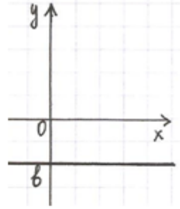
Линейная функция $y = kx + b$ $(k < 0, b < 0)$



Линейная функция $y = kx + b$ $(k = 0, b > 0)$

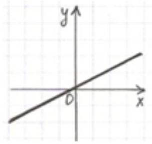


Линейная функция $y = kx + b$ $(k = 0, b < 0)$

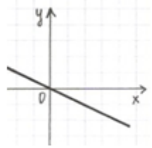


k* - угловой коэффициент прямой.** *Графиком линейной функции является* ***прямая.

Прямая пропорциональность $y = kx$ $(k > 0, b = 0)$

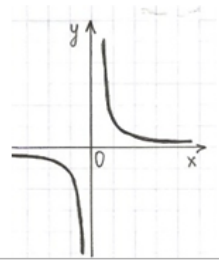


Прямая пропорциональность $y = kx$ $(k < 0, b = 0)$



k* - угловой коэффициент прямой.** *Графиком линейной функции является* ***прямая.

Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$



Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$ $(k < 0)$

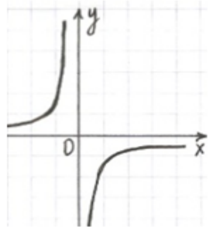
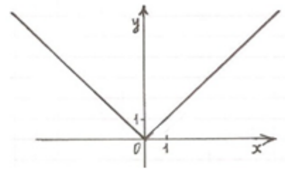


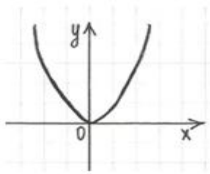
График функции $y = \frac{k}{x}$ *называется* ***гипербола .***

Функция $y = |x|$

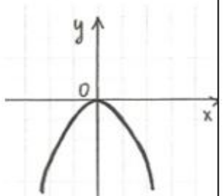


Квадратичная функция

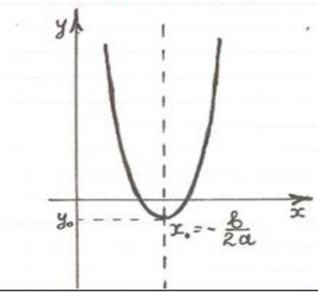
Функция $y = ax^2$ $(a > 0)$



Функция $y = ax^2$ $(a < 0)$



Функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$



Функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$

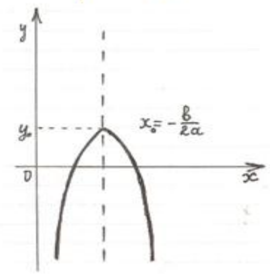
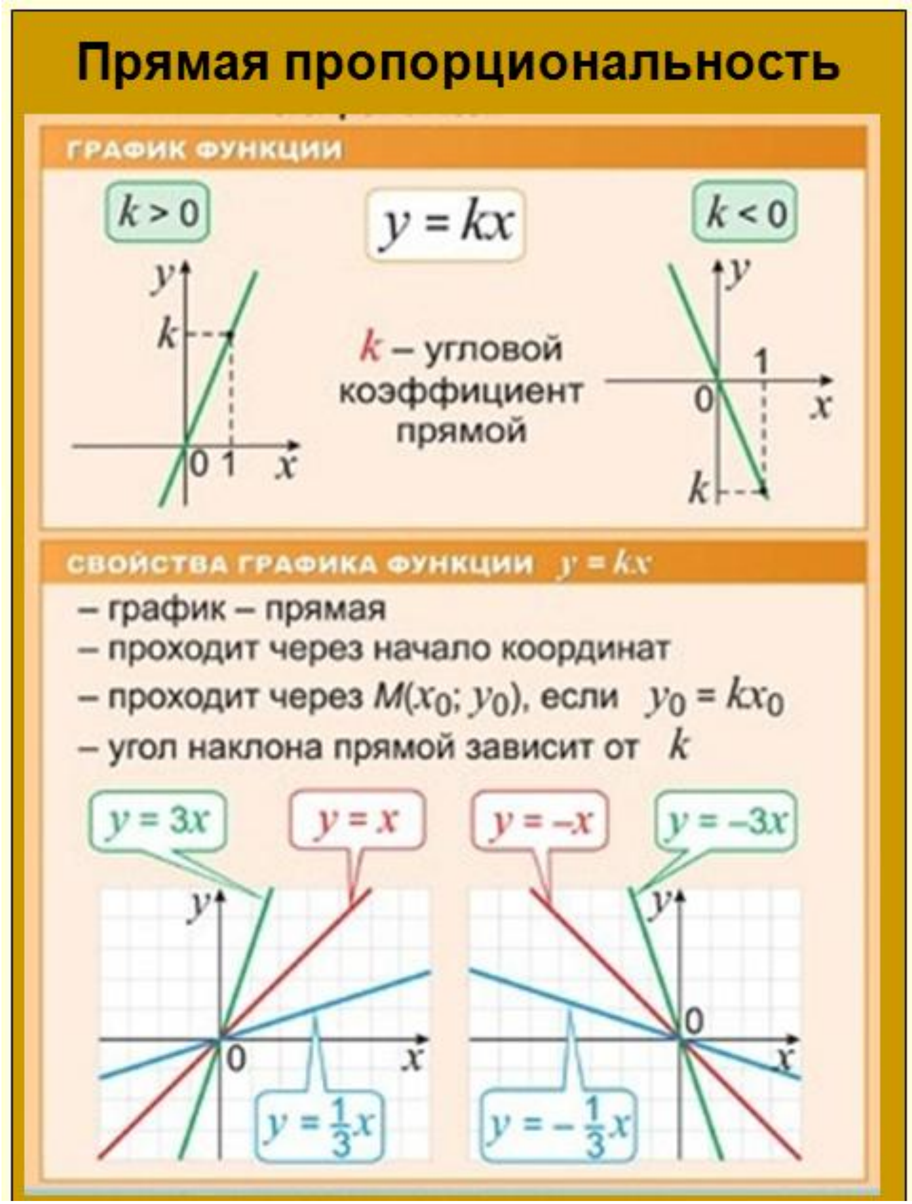


График квадратичной функции называется ***параболой.***


Линейная функция
ГРАФИК ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ
$y = kx + b$
График – прямая a
$M(x_0; y_0) \in a \Leftrightarrow y_0 = kx_0 + b$
k – угловой коэффициент прямой
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА
$y = 2x - 4$
| x | 1 | 3 |
| y | –2 | 2 |
$A(1; -2)$
$B(3; 2)$
$x = 0 \Rightarrow y = -4$
$y = 0 \Rightarrow x = 2$
$C(0; -4)$
$D(2; 0)$
СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $f(x) = kx + b$
1. Область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$
2. Множество значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$
3. Если $k > 0$, то $f(x)$ возрастает на R
Если $k < 0$, то $f(x)$ убывает на R


Прямая пропорциональность
ГРАФИК ФУНКЦИИ
$k > 0$
$y = kx$
$k < 0$
k – угловой коэффициент прямой
СВОЙСТВА ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = kx$
– график – прямая
– проходит через начало координат
– проходит через $M(x_0; y_0)$, если $y_0 = kx_0$
– угол наклона прямой зависит от k
$y = 3x$
$y = x$
$y = -x$
$y = -3x$
$y = \frac{1}{3}x$
$y = -\frac{1}{3}x$

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

$y = kx + b$, где k, b — действительные числа.

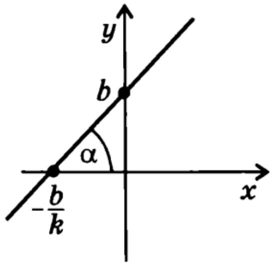
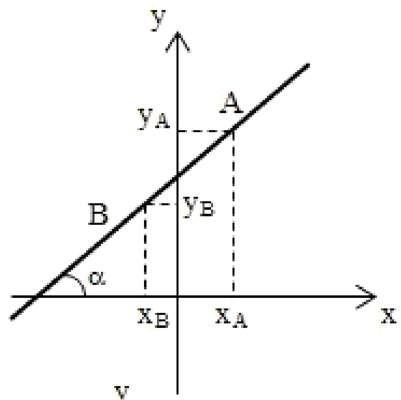


График — **прямая**.
Угловой коэффициент
$k = \operatorname{tg} \alpha$
b — ордината точки пересечения графика с осью y.



Пусть $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$.
Тогда:

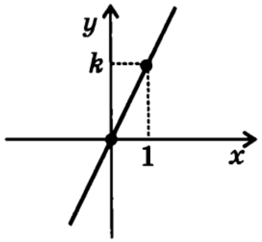
$$y_1 \,||\, y_2 \Rightarrow k_1 = k_2$$

$$y_1 \perp y_2 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

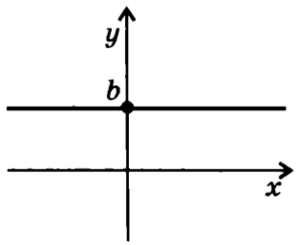
Прямая пропорциональность

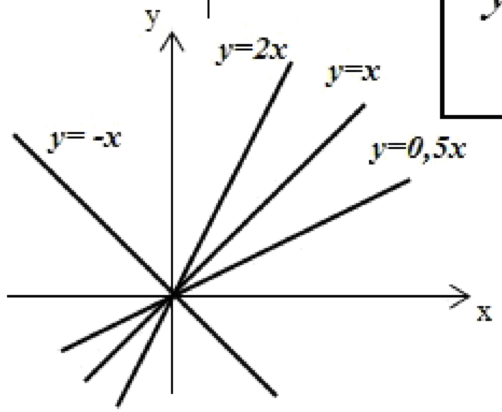
$y = kx$

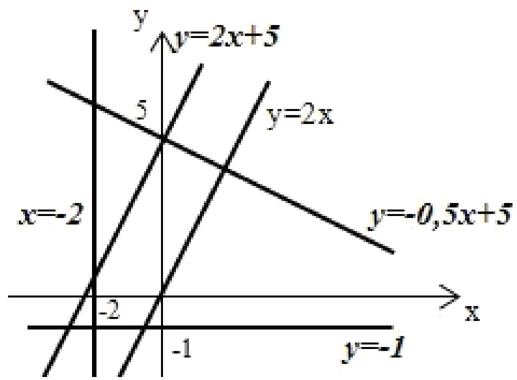


Постоянная функция

$y = b$

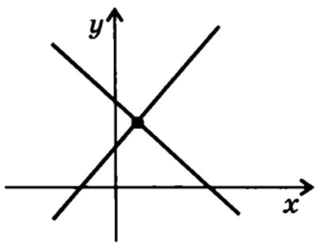




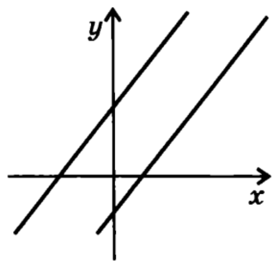


ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Если $k_1 \neq k_2$, графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются в одной точке.



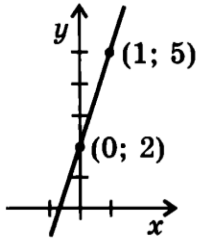
Если $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ являются параллельными прямыми.



ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ПО ДВУМ ТОЧКАМ

Часто удобно выбирать $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Соответствующие точки прямой $(0;\ b)$ и $(1;\ b + k)$.

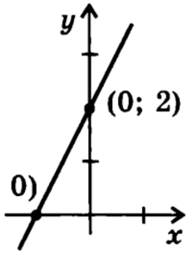
Пример.



$y = 3x + 2$
Если $x_1 = 0$, то $y_1 = 2$;
если $x_2 = 1$, то $y_2 = 5$.
Через точки (0; 2) и (1; 5) провести прямую.

Если $k \neq 0$, $b \neq 0$, можно выбирать точки $(0;\ b)$ и $(-b/k;\ 0)$ на осях координат.

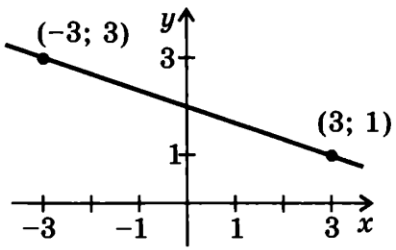
Пример.



$y = 2x + 2$
Если $x_1 = 0$, то $y_1 = 2$;
если $y_2 = 0$, то $x_2 = -1$.
Через точки (0; 2) и (−1; 0) провести прямую.

Если коэффициент перед x дробный, удобно выбирать x_1 и x_2 так, чтобы y_1 и y_2 были целыми.

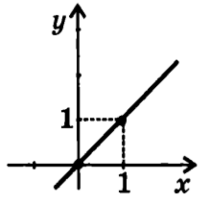
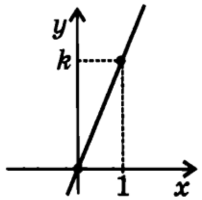
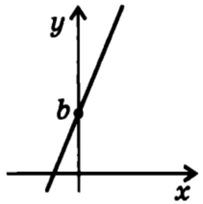
Пример.



$y = -\frac{1}{3}x + 2$
Если $x_1 = 3$, то $y_1 = 1$;
если $x_2 = -3$, то $y_2 = 3$.
Через точки (3; 1) и (−3; 3) провести прямую.

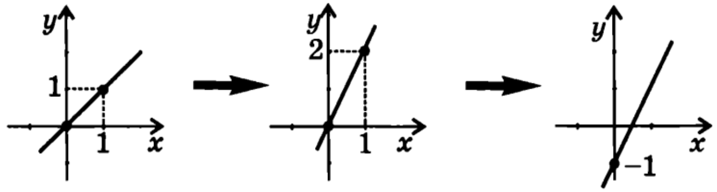
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ $y = kx + b$ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = x$

Этапы преобразования графика

1. $y = x$	**2.** $y = kx$	**3.** $y = kx + b$
		
Построить график функции $y = x$.	Произвести растяжение (при $\lvert k \rvert > 1$) или сжатие (при $\lvert k \rvert < 1$) графика вдоль оси y (если $k < 0$, произвести, кроме того, зеркальное отражение относительно любой из координатных осей).	Произвести параллельный перенос графика вдоль оси y на $\lvert b \rvert$ (вверх при $b > 0$, вниз при $b < 0$).

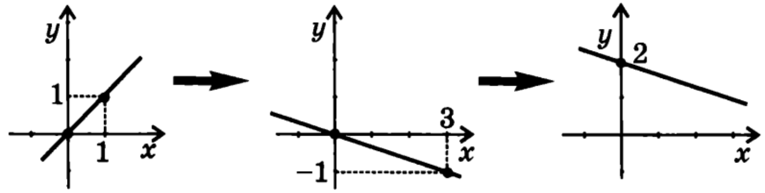
Примеры:

1. $y = 2x - 1$



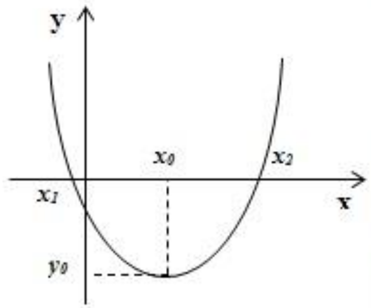
$y = x$ $\quad$ $y = 2x$ $\quad$ $y = 2x - 1$

2. $y = -x/3 + 2$



$y = x$ $\quad$ $y = -x/3$ $\quad$ $y = -x/3 + 2$

$y = ax^2 + bx + c,$ $\quad D = b^2 - 4ac$ - дискриминант



$M(x_0, y_0)$ – вершина параболы:

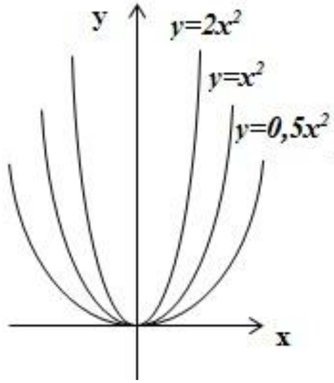
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

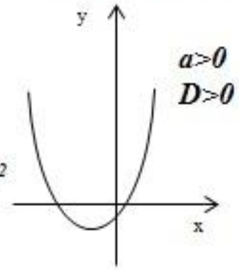
Уравнение параболы, проходящей через точку M:

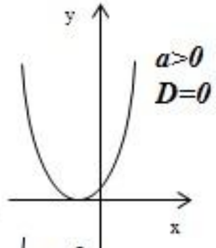
$y = a(x - x_0)^2 + y_0$

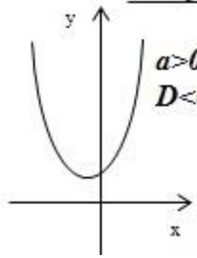
x_1, x_2 – корни параболы:

$ax^2 + bx + c = 0$









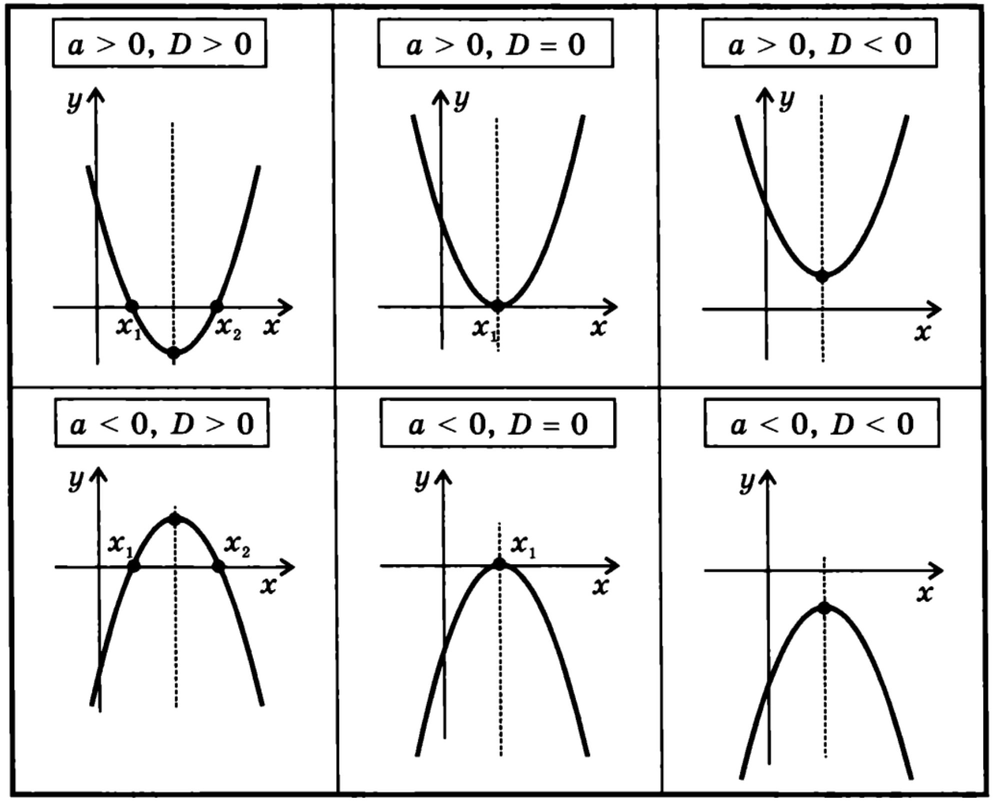
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0.$$

График — **парабола**.

Свойства функции и вид ее графика определяются, в основном, значениями коэффициента a и *дискриминанта*

$$D = b^2 - 4ac.$$



РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

1. ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

2. РАЗЛОЖЕНИЕ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

при $D > 0$ $\quad y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

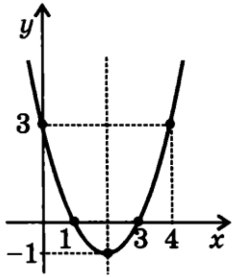
при $D = 0$ $\quad y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

при $D < 0$ $\quad$ разложить на множители нельзя

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ВЕТВЕЙ, ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ И ОСИ СИММЕТРИИ ПАРАБОЛЫ

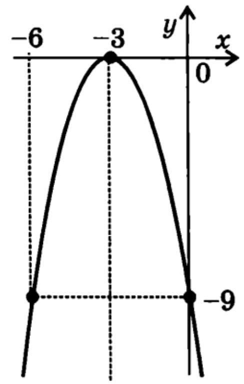
Примеры:

$\boxed{y = x^2 - 4x + 3}$



1. *Ветви направлены вверх*, т.к. $a = 1 > 0$.
2. *Координаты вершины* $(2; -1)$, т.к.
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2;$$
$$y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$
3. *Ось симметрии* параболы
$$x = -\frac{b}{2a} = 2.$$
4. *Координаты точек пересечения с осью x:*
$(x_1; 0) = (1; 0)$ и $(x_2; 0) = (3; 0)$.
5. *Координаты точки пересечения с осью y:*
$(0; c) = (0; 3)$;
симметричная ей точка относительно оси параболы: $\left(-\dfrac{b}{a}; c\right) = (4; 3)$.

$\boxed{y = -x^2 - 6x - 9}$



1. *Ветви* направлены *вниз*, т.к. $a = -1 < 0$.
2. *Координаты вершины* $(-3; 0)$, т.к.
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{-2} = -3;$$
$$y(3) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 9 = 0.$$
3. *Ось симметрии* параболы $x = -\dfrac{b}{2a} = -3$.
4. *Координаты точки касания с осью x:*
$(x_1; 0) = (-3; 0)$.
5. *Координаты точки пересечения с осью y:*
$(0; c) = (0; -9)$;
симметричная ей точка относительно оси параболы: $\left(-\dfrac{b}{a}; c\right) = (-6; -9)$.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = x^2$

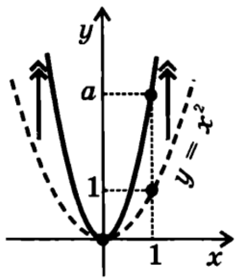
С помощью выделения полного квадрата (см. стр. 30) любую квадратичную функцию можно представить в виде:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - m)^2 + n,$$

$$\text{где } m = -\frac{b}{2a},\ n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

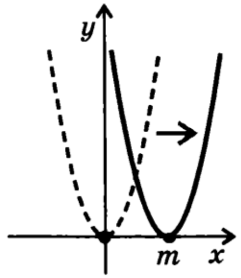
Это позволяет построить график квадратичной функции с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x^2$.

Этапы построения графика функции $y = a(x - m)^2 + n$:



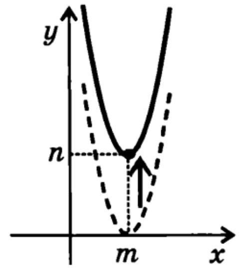
1. *Растяжение* графика $y = x^2$ вдоль оси y в $|a|$ раз (при $|a| < 1$ — это сжатие в $1/|a|$ раз).
Если $a < 0$, произвести, кроме того, зеркальное отражение графика относительно оси x (ветви параболы будут направлены вниз).

Результат: график функции $y = ax^2$.



2. *Параллельный перенос* графика функции $y = ax^2$ вдоль оси x на $|m|$ (вправо при $m > 0$ и влево при $m < 0$).

Результат: график функции $y = a(x - m)^2$.

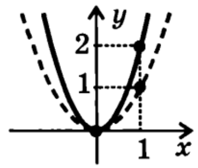


3. *Параллельный перенос* графика функции $y = a(x - m)^2$ вдоль оси y на $|n|$ (вверх при $n > 0$ и вниз при $n < 0$).

Результат: график функции $y = a(x - m)^2 + n$.

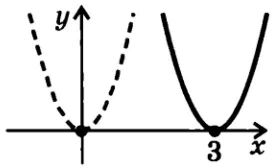
Примеры:

$$\boxed{y = 2x^2 - 12x + 19 = 2(x - 3)^2 + 1}$$



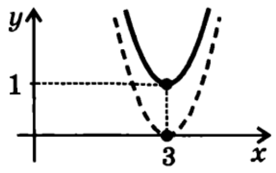
- - - - $y = x^2$
—— $y = 2x^2$

1. Растяжение графика функции $y = x^2$ вдоль оси y в 2 раза.



- - - - $y = 2x^2$
—— $y = 2(x-3)^2$

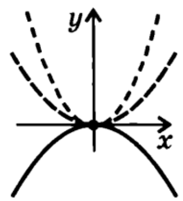
2. Параллельный перенос графика функции $y = 2x^2$ вдоль оси x на 3 вправо.



- - - - $y = 2(x-3)^2$
—— $y = 2(x-3)^2+1$

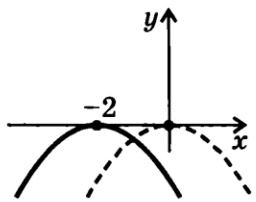
3. Параллельный перенос графика функции $y = 2(x - 3)^2$ вдоль оси y на 1 вверх.

$$\boxed{y = -\frac{x^2}{2} - 2x - 3 = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1}$$



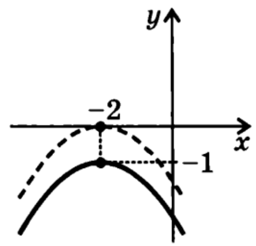
- - - $y = x^2$
- - - $y = x^2/2$
—— $y = -x^2/2$

1. Сжатие графика функции $y = x^2$ вдоль оси y в 2 раза и преобразование симметрии относительно оси x.



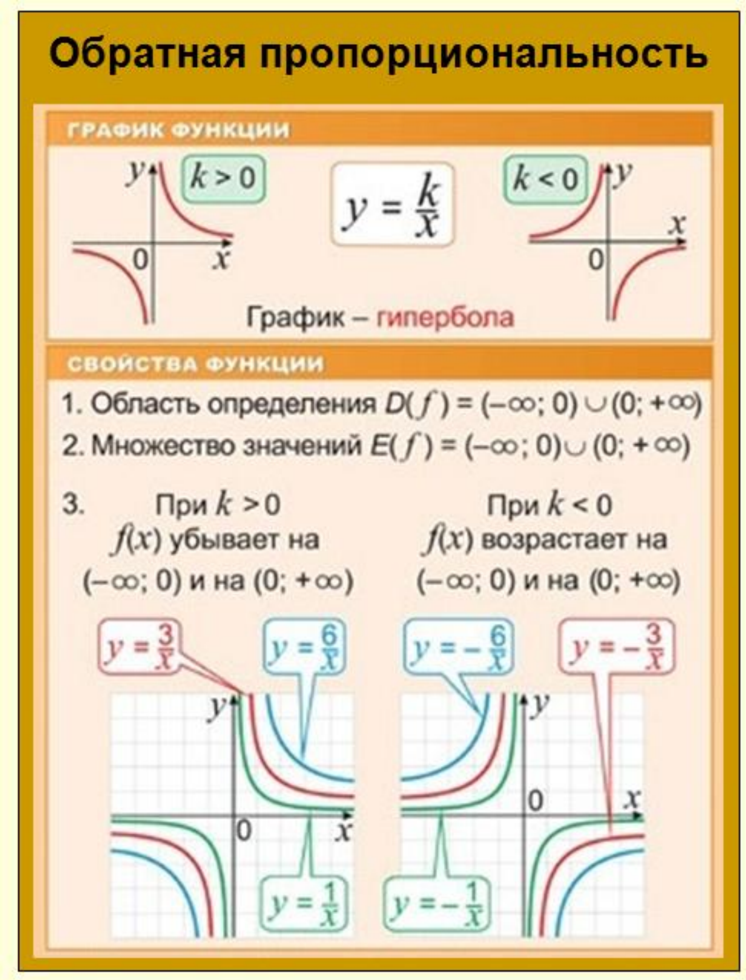
- - - $y = -x^2/2$
—— $y = -(x+2)^2/2$

2. Параллельный перенос графика функции $y = -x^2/2$ вдоль оси x на 2 влево.



- - - $y = -(x+2)^2/2$
—— $y = -(x+2)^2/2 - 1$

3. Параллельный перенос графика функции $y = -(x + 2)^2/2$ вдоль оси y на 1 вниз.



Чтобы построить график функции $y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$ надо:

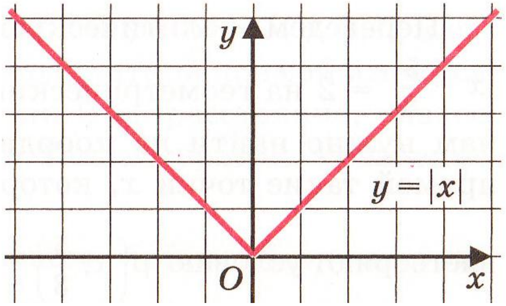
1) построить график функции $y = \dfrac{k}{x}$,

2) затем сначала сдвинуть построенный график на $|x_0|$ единиц вправо, если $x_0>0$, и влево, если $x_0<0$,

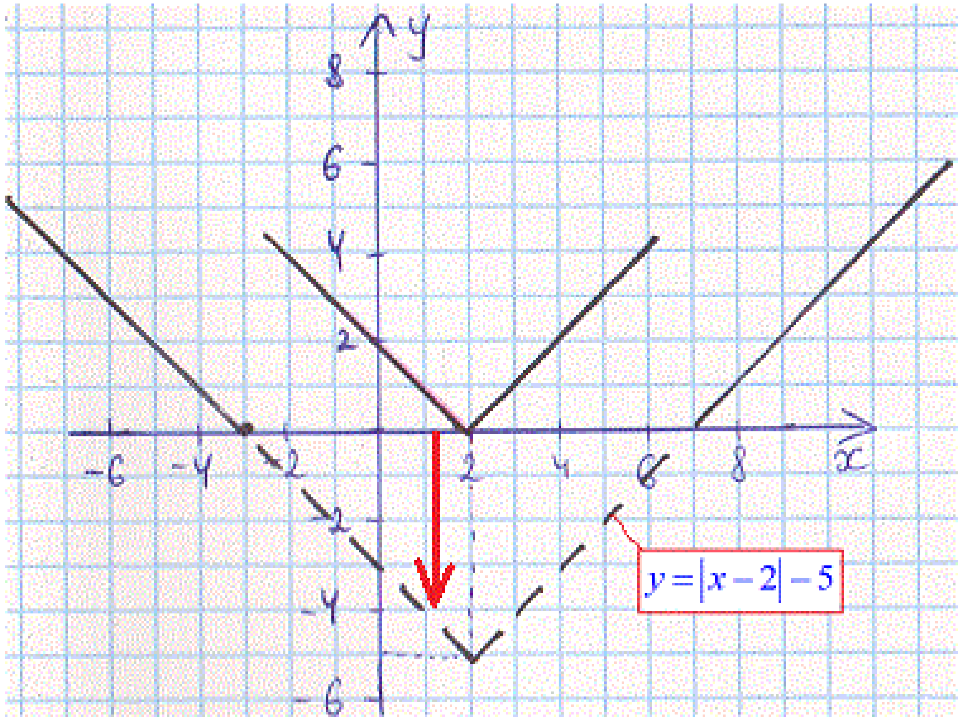
3) вверх, если $y_0>0$, и вниз, если $y_0<0$.

Чтобы построить график функции $y = \dfrac{-3}{x-1} + 2$ надо сдвинуть график функции $y = \dfrac{-3}{x}$ на 1 единицу вправо и на 2 единицы вверх.

График функции $y = |x|$



1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2. $E(f) = [0, +\infty)$;
3. чётная;
4. убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$;
5. непрерывна;
6. ограничена снизу, не ограничена сверху;
7. $y_{наим} = 0$, $y_{наиб}$ = не существует;
8. $y = 0$ при $x = 0$.



УРАВНЕНИЯ*)

Уравнением называется равенство, содержащее одно или несколько неизвестных.

Общий вид уравнения

с одним неизвестным:

$$f_1(x) = f_2(x),$$

с n неизвестными:

$$f_1(x_1,\dots,x_n) = f_2(x_1,\dots,x_n).$$

Часто все функции переносят в одну часть уравнения, и тогда уравнения принимают вид:

$$f(x) = 0;$$
$$f(x_1,\dots,x_n) = 0.$$

Областью допустимых значений уравнения называется область определения функций $f(x)$ или $f(x_1,\dots,x_n)$.

Пример. Областью допустимых значений уравнения $\sqrt{x-2} = \sqrt{3-x}$ является $x \in [2;\ 3]$.

Решением уравнения с одним неизвестным (корнем уравнения) называется такое значение неизвестного, при подстановке которого уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Примеры. Решить уравнение $x^2 - 4 = 0$ — значит найти его корни $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; решить уравнение $x^2 + 4 = 0$ — значит доказать, что корней нет.

Равносильными называются уравнения, множества корней которых совпадают.

В частности, равносильны все уравнения, не имеющие корней.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$ax + b = 0,$$

где a и b —действительные числа

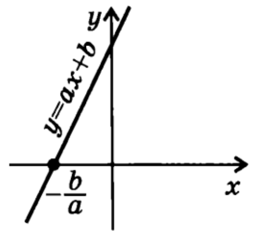
Наличие корней и их число зависит от значений a и b.

$\boxed{a \neq 0,\ b \text{ — любое число}}$

Уравнение $ax + b = 0$ имеет один корень:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Прямая $y = ax + b$ пересекает ось x в одной точке.

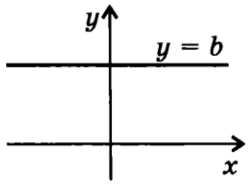


Пример: $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5$

$\boxed{a = 0,\ b \neq 0}$

Уравнение $0\cdot x + b = 0$ не имеет корней.

Прямая $y = 0\cdot x + b$ не пересекает ось x.

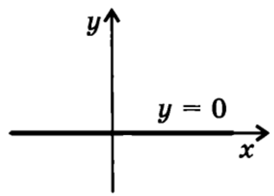


Пример: $0\cdot x + 2 = 0$ — уравнение не имеет корней.

$\boxed{a = 0,\ b = 0}$

Уравнение $0\cdot x + 0 = 0$ имеет бесконечно много корней: корнем является любое число.

Прямая $y = 0\cdot x + 0$ совпадает с осью x.



Пример: $0\cdot x + 2 = 2 \Leftrightarrow 0\cdot x = 0$ — корнем является любое число.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0$$

Уравнение в общем виде можно решить с помощью *выделения полного квадрата* (см. стр. 30). Число корней зависит от значения *дискриминанта* $D = b^2 - 4ac$.

Замечание. Если $a < 0$, удобно умножить уравнение на -1, чтобы получить уравнение с положительным коэффициентом при x^2.

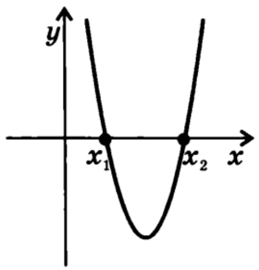
Пример: $-2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0$

$\boxed{D > 0}$

Уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Парабола пересекает ось x в двух точках.



Замечание. Если b — четное число, для нахождения корней обычно используется формула

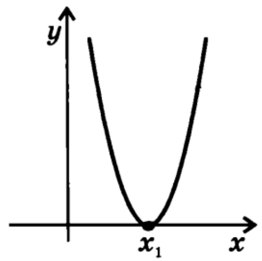
$$x_{1,2} = \frac{-b/2 \mp \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$$

$\boxed{D = 0}$

Уравнение имеет один (двукратный) корень:

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

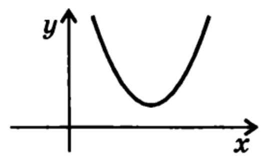
Парабола касается оси x.



$\boxed{D < 0}$

Уравнение не имеет корней.

Парабола не имеет общих точек с осью x.



НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$ax^2 + bx = 0, \; ax^2 + c = 0, \; ax^2 = 0$$

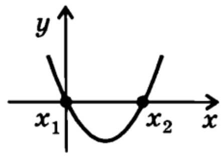
Такие уравнения решают обычно без применения общей формулы для корней квадратного уравнения.

$\boxed{ax^2 + bx = 0, \; b \neq 0}$

Уравнение всегда имеет два корня. Решается с помощью разложения левой части уравнения на множители:

$$x\,(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0; \; x_2 = -\frac{b}{a}.$$



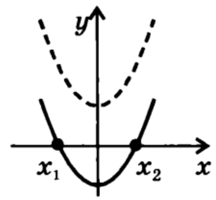
Парабола пересекает ось x в двух точках, одна из которых является началом координат.

Пример: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x\,(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; \; x_2 = 2$

$\boxed{ax^2 + c = 0, \; c \neq 0}$

Уравнение не имеет корней, если знаки a и c совпадают; уравнение имеет два корня, если знаки a и c различны:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}; \; x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$



Парабола или не пересекает ось x, или пересекает ее в двух точках, симметричных относительно начала координат.

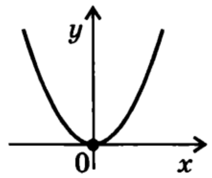
Примеры: $x^2 + 1 = 0$ — нет решений

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1; \; x_2 = 1$

$\boxed{ax^2 = 0}$

Уравнение имеет один (двукратный) корень: $x_1 = 0$.

Парабола касается оси x в начале координат.



ТЕОРЕМЫ ВИЕТА

1. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -b/a$; $x_1 \cdot x_2 = c/a$.

2. Если x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 \cdot x_2 = c/a$, то x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К КВАДРАТНЫМ

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0$$

СХЕМА РЕШЕНИЯ

1. С помощью введения новой переменной $t = f(x)$ уравнение приводят к виду
$$at^2 + bt + c = 0$$

2. Если это уравнение имеет корни t_1 и t_2 (или один корень t_1), решения исходного уравнения ищут как решения совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = t_1 \\ f(x) = t_2 \end{array}\right.$ (или одного уравнения $f(x)=t_1$).

Частный случай уравнений, сводящихся к квадратным — *биквадратные уравнения* (уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$). В этом случае вводят переменную $t = x^2$.

Примеры:

Биквадратное уравнение

$x^4 - x^2 - 2 = 0$; замена $t = x^2$

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 = -1 & \text{корней нет} \\ x^2 = 2 & x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Иррациональное уравнение

$$x^2 + \sqrt{x^2 - 2} = 4 \Leftrightarrow (x^2 - 2) + \sqrt{x^2 - 2} - 2 = 0;$$

замена $t = \sqrt{x^2 - 2}$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x^2 - 2} = -2 & \text{корней нет} \\ \sqrt{x^2 - 2} = 1 & x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как правило, иррациональное уравнение сводится к равносильной системе, содержащей уравнения и неравенства.

1. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$

Замечание. Из двух систем выбирают ту, которая решается проще.

Пример: $\sqrt{3 - x} = \sqrt{x^2 - 5x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = x^2 - 5x - 2 \\ 3 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0 \\ x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

2. $\sqrt{f(x)} = a$

Если $a < 0$, уравнение не имеет корней.
Если $a \geqslant 0$, уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^2$.

Замечание. Иногда иррациональное уравнение можно свести к приведенному виду с помощью введения новой переменной.

Пример: $x - \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow (x+1) - \sqrt{x+1} - 6 = 0$

$$z = \sqrt{x+1}, \quad z^2 - z - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2 \\ z = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = -2 \\ \sqrt{x+1} = 3 \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности не имеет корней, корень второго уравнения $x = 8$.

3. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

Пример: $\sqrt{7 - x} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ 7 - x = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называется **пара** чисел (x_0, y_0), при подстановке которых вместо соответствующих переменных x, y **оба** уравнения системы обращаются в верные числовые равенства.

Примеры:

1. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ Решение системы: (3; 1)

2. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Решения системы: (−1; 1) и (2; 4)

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Равносильными называются системы, множества решений которых совпадают.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

Этапы решения	Примеры	
1. С помощью какого-либо из уравнений выразить одно неизвестное через другое.	$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ из первого уравнения $y = 2x - 4$	$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ из второго уравнения $y = 2 - x$
2. Подставить найденное выражение в другое уравнение системы: в результате получится одно уравнение с одним неизвестным.	$x + 3(2x - 4) = 9;$ $7x = 21$	$x^2 + x(2 - x) -$ $- (2 - x)^2 = 1;$ $x^2 - 6x + 5 = 0$
3. Найти корень (корни) этого уравнения, то есть найти значение (значения) одного из неизвестных системы.	$x = 3$	$x_1 = 1;$ $x_2 = 5$
4. Использовать найденное выражение одного неизвестного через другое (подстановку), то есть найти значение (соответствующие значения) второго неизвестного.	$y = 2x - 4 =$ $= 2 \cdot 3 - 4 = 2$	$y_1 = 2 - x_1 =$ $= 2 - 1 = 1;$ $y_2 = 2 - x_2 =$ $= 2 - 5 = -3$
5. Записать ответ.	(3; 2)	(1; 1), (5; −3)

МЕТОД СЛОЖЕНИЯ

Этапы решения	Примеры	
1. Сложить почленно уравнения системы, умножив предварительно каждое из уравнений на подходящее число так, чтобы в результате сложения получилось одно уравнение с одним неизвестным.	$\begin{cases}4x+5y=19 \mid \times 4\\ 7x-4y=-5 \mid \times 5\end{cases}$ $\begin{cases}16x+20y=76\\ 35x-20y=-25\end{cases}$ $51x = 51$	$\begin{cases}2xy+x^2=2 \mid \times 3\\ 3xy-4x=5 \mid \times(-2)\end{cases}$ $\begin{cases}6xy+3x^2=6\\ -6xy+8x=-10\end{cases}$ $3x^2+8x=-4$
2. Найти корень (корни) этого уравнения, то есть найти значение (значения) одного из неизвестных системы.	$x=1$	$x_1=-2$; $x_2=-2/3$
3. Подставить найденное значение (значения) одного из неизвестных в любое из уравнений системы: в результате снова получится уравнение (уравнения) с одним неизвестным.	Подстановка в первое уравнение дает: $4\cdot 1+5y=19$; $5y=15$	Подстановка во второе уравнение дает: при $x=x_1=-2$ $6y=3$; при $x=x_2=-2/3$ $2y=-7/3$
4. Найти решение (решения) этого уравнения (этих уравнений), то есть найти значение (соответствующие значения) второго неизвестного.	$y=3$	$y_1=1/2$; $y_2=-7/6$
5. Записать ответ.	(1; 3)	(−2; 1/2), (−2/3; −7/6)

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Надо построить графики обоих уравнений и найти координаты общих точек этих графиков — эти координаты являются решениями системы.

Пример:

$$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ xy=12\end{cases}$$

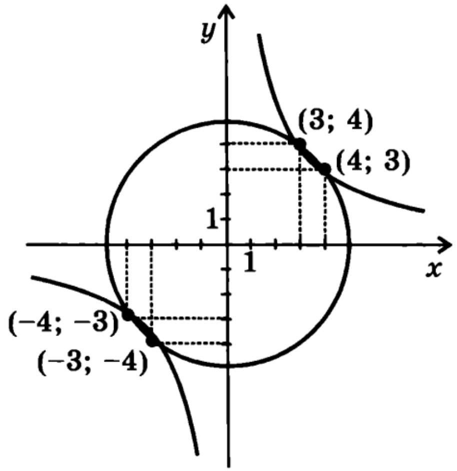


График первого уравнения — окружность радиуса 5 с центром в начале координат, график второго уравнения — гипербола $y=\dfrac{12}{x}$. Эти два графика пересекаются в четырех точках с координатами (−4; −3), (−3; −4), (4; 3) и (3; 4).

При графическом способе проверка обязательна!!!