La méthode des orbites pour le groupe de Heisenberg

Qingyu Ren et Ilan Ehrlich, sous la direction de Yi Shan

Juin 2024

Table des matières

Introduction

Au début des années 1960, Alexandre Kirillov développe sa fameuse *méthode des orbites*. Celle-ci consiste à faire une correspondance entre les orbites de l'action coadjointe d'un groupe de Lie, et ses classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles. Nous détaillons la signification précise des objets figurant dans cette correspondance dans les sections 1.1 et 2.1. Cette correspondance a de nombreuses conséquences dans des domaines divers, notamment en physique quantique, qui a en fait été la motivation d'Heisenberg pour étudier le groupe qui porte son nom.

La forme de la méthode des orbites à laquelle nous nous intéressons peut alors se présenter de la manière suivante, proposée par Kirillov lui-même dans [Kir04].

Théorème A (Méthode des orbites de Kirillov)**.** *Soit G un groupe de Lie connexe, qui est nilpotent ou semi-simple. Alors pour toute représentation unitaire irréductible π de G, il existe une unique orbite $\mathcal{O}$ dans* $\mathrm{Lie}(G)^*$*, telle que pour tout $X \in \mathrm{Lie}(G)$,*

$$\chi_\pi(e^X)\sqrt{j(X)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{m}(X)$$

où χ_π est le caractère de π, j est le déterminant jacobien de l'application $X \mapsto e^X$ sur $\mathrm{Lie}(G)$*, m est une mesure G-invariante sur $\mathcal{O}$, $\widehat{m}$ est sa transformée de Fourier et* $2d$ *est le dimension réelle de $\mathcal{O}$.*

La démonstration de la forme générale de ce théorème n'est pas l'objectif de ce mémoire. Toutefois, nous allons le démontrer dans le cas précis du groupe de Heisenberg

$$\mathrm{Heis} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} .$$

Nous procédons en quatre étapes, selon la logique du théorème de Kirillov : les deux premières sections consistent à étudier explicitement chaque partie de la correspondance, tandis que la troisième consiste à la démontrer. La quatrième consiste quant à elle à se servir de ce travail pour définir une représentation particulière.

Dans la première section, nous définissons formellement les actions coadjointes, avant de calculer explicitement leurs orbites dans le cas du groupe de Heisenberg.

Dans la deuxième, nous commençons par présenter deux représentations unitaires irréductibles de Heis : $\pi_{\alpha,\beta}$ sur $\mathbb{C}$ et π_γ sur $L^2(\mathbb{R})$. Le fameux théorème de Stone-von Neumann stipule en particulier que ces représentations sont uniques à équivalence unitaire près :

Théorème B (Stone-von Neumann)**.** *Chaque représentation unitaire irréductible de* Heis *est unitairement équivalente à $\pi_{\alpha,\beta}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ou à π_γ pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$.*

Pour le démontrer, nous allons utiliser les notions de représentations induites et de systèmes d'imprimitivité, pour lesquelles le théorème de Mackey est une étape clé.

Dans la troisième section, nous démontrons le théorème de Kirillov pour le groupe de Heisenberg. Dans une première partie, nous développons les outils nécessaires pour aborder sa forme générale, tandis que dans la deuxième partie, nous abordons sa démonstration pour Heis.

Dans la dernière section, nous nous servons de la construction ainsi établie pour explorer la *représentation de Weil*, qui est une représentation du groupe groupe métaplectique $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$. Pour cela, nous nous servirons directement du théorème de Stone-Von Neumann pour construire une représentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ à multiplication par scalaire près, puis nous en déduirons la représentation de Weil, en passant par le revêtement universel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Nos références principales sont l'ouvrage d'Alexandre Kirillov [Kir04] et le cours d'Ashkay Venkatesh [Ven], tandis que nous nous servons des ouvrages de Brian Hall [Hal10] et [Hal13] ainsi que les travaux de Michael Taylor [Tay86] et d'Isabelle Gallagher [Gal20].

Notations pour le groupe de Heisenberg

Commençons par quelques notations utiles. Soient les éléments

$$U_x \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & x & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \ V_y \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix}, \ W_z \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & & z \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} .$$

Les éléments ainsi définis nous permettent d'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix} = V_y U_x W_z \ .$$

Nous notons le changement de coordonnées

$$(x, y; z) \coloneqq \exp \begin{pmatrix} & x & z \\ & & y \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix} . \tag{0.1}$$

Avec cette notation, l'opération du groupe de Heisenberg s'écrit

$$(x, y; z)(x', y'; z') = (x + x', y + y'; z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)) . \tag{0.2}$$

1 Action coadjointe

1.1 Construction générale

Commençons par définir brièvement et formellement les actions adjointes et coadjointes d'un groupe de Lie quelconque G. Soit $\psi : G \to \mathrm{Aut}(G), \ g \mapsto (\psi_g :$

$h \mapsto ghg^{-1}$), qui est alors un homomorphisme de groupes de Lie. Pour tout $g \in G$, soit $\mathrm{Ad}_g \coloneqq (d\psi_g)_e : T_eG \to T_eG$. Notons que Ad_g est un automorphisme d'algèbre de Lie. De plus, comme $g \mapsto \psi_g$ est un homomorphisme de groupe, $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$ en est aussi un. Nous définissons donc :

Définition 1.1. Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. L'application

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),\ \ g \mapsto \mathrm{Ad}_g$$

définit une action de G sur $\mathfrak{g}$ appelée l'*action adjointe* de G. De plus, l'application $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*)$ définie pour tout $g \in G$ par

$$\mathrm{Ad}^*(g) : f \mapsto \big(X \mapsto f(\mathrm{Ad}_g^{-1}(X))\big)$$

définit une action de G sur $\mathfrak{g}^*$ appelée l'*action coadjointe* de G.

Remarque 1.2. Dans le cas des matrices, où G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g}$ est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, l'action adjointe est exactement la conjugaison : $\mathrm{Ad}(g) : X \mapsto gXg^{-1}$.

1.2 Calcul des orbites pour le groupe de Heisenberg

Dans cette section, nous étudions le premier ensemble du théorème de Kirillov pour Heis, à savoir l'ensemble de ses orbites pour cette action, que nous allons calculer explicitement. Soit $\mathfrak{heis}$ l'algèbre de Lie de Heis. Pour alléger la notation, nous noterons $[u, v, w]$ pour la matrice $\begin{pmatrix} & u & w \\ & & v \\ & & \end{pmatrix}$. Comme Brian Hall le démontre dans la proposition 3.26 de [Hal10],

$$\mathfrak{heis} = \{[u, v, w] | u, v, w \in \mathbb{R}\}\ \ .$$

Les éléments de $\mathfrak{heis}^*$ sont de la forme $(\alpha, \beta, \gamma) : [u, v, w] \mapsto \alpha u + \beta v + \gamma w$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Fait 1.3. Dans le cas du groupe de Heisenberg, l'action coadjointe est donnée pour tout $V_yU_xW_z \in \mathrm{Heis}$ par

$$V_yU_xW_z \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \gamma y, \beta - \gamma x, \gamma)\ .$$

Démonstration. Nous calculons grâce à la remarque 1.2 :

$$\begin{aligned}(V_yU_xW_z \cdot (\alpha, \beta, \gamma))[u, v, w] &= (\alpha, \beta, \gamma) \left(\mathrm{Ad}^{-1}_{V_yU_xW_z}[u, v, w]\right) \\ = (\alpha, \beta, \gamma)[u, v, uy + w - vx] &= (\alpha + \gamma y, \beta - \gamma x, \gamma)[u, v, w]\ .\end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant calculer ses orbites coadjointes ; nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 1.4 (Orbites de l'action coadjointe)**.** *Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, l'orbite de (α, β, γ) vaut*

$$\mathcal{O}_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{cases} \mathcal{O}_{\alpha,\beta} := \{(\alpha, \beta, 0)\} & si\ \gamma = 0 \\ \mathcal{O}_{\gamma} := \{(\alpha', \beta', \gamma) | \alpha', \beta' \in \mathbb{R}\} & si\ \gamma \neq 0 \end{cases} .$$

Démonstration. En utilisant le fait 1.3, nous distinguons deux cas.

— Si $\gamma = 0$, alors $V_y U_x W_z \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, 0)$ pour tout $V_y U_x W_z \in \text{Heis}$, donc on a l'orbite
$$\mathcal{O}_{\alpha,\beta} = \{(\alpha, \beta, 0)\} .$$

— Si $\gamma \neq 0$, alors $V_{\frac{-\alpha+\alpha'}{\gamma}} U_{\frac{\beta-\beta'}{\gamma}} W_\gamma \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha', \beta', \gamma)$ pour tous $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, donc on a l'orbite
$$\mathcal{O}_\gamma = \{(\alpha', \beta', \gamma) \,|\, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}\} .$$

□

2 Représentations unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg

Dans cette partie, nous décrivons les représentations unitaires irréductibles de Heis.

2.1 Représentations fondamentales du groupe de Heisenberg

Tout d'abord, nous nous penchons sur deux familles fondamentales de représentations unitaires irréductibles de Heis. Nous montrons dans la section 2.2.3 qu'elles sont en réalité uniques à équivalence unitaire près. Avant de commencer, définissons les représentations et les équivalences unitaires.

Définition 2.1 (Représentations et équivalences unitaires)**.** Soient G un groupe topologique et V un espace de Hilbert séparable. Une *représentation unitaire* de G sur V est un homomorphisme $\rho : G \to \mathrm{U}(V)$ dont l'action correspondante $G \times V \to V$ est continue. Si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations unitaires de G sur V_1 et V_2 respectivement, alors ρ_1 et ρ_2 sont *unitairement équivalents* s'il existe un opérateur unitaire $K : V_1 \to V_2$ tel que pour tout $g \in G$, $K\rho_1(g)K^{-1} = \rho_2(g)$.

Nous pouvons maintenant définir nos deux représentations fondamentales.

Définition 2.2 (Représentations fondamentales de Heis)**.** Premièrement, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, soit

$$\pi_{\alpha,\beta} : \text{Heis} \to \mathrm{U}(\mathbb{C}), \quad V_y U_x W_z \mapsto e^{i(\alpha x + \beta y)} . \tag{2.1}$$

Deuxièmement, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, soit

$$\pi_\gamma \colon \text{Heis} \to \mathrm{U}(L^2(\mathbb{R})) \tag{2.2}$$
$$U_x \mapsto [f \mapsto f(\bullet + x)], \quad V_y \mapsto [f \mapsto e^{i\gamma y \bullet} f], \quad W_z \mapsto [f \mapsto e^{i\gamma z} f]$$

Remarque 2.3. Soit

$$\delta_\gamma : \text{Heis} \to \text{Heis}, \quad V_y U_x W_z \mapsto V_{\gamma y} U_x W_{\gamma z} \ . \tag{2.3}$$

Alors δ_γ est un automorphisme de Heis tel que $\pi_1 \circ \delta_\gamma = \pi_\gamma$.

On a par ailleurs que celles-ci satisfont nos attentes :

Proposition 2.4. *Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\pi_{\alpha,\beta}$ défini en (2.1) et π_γ défini en (2.2) sont des représentations, qui de plus sont unitaires et irréductibles.*

Pour démontrer cette proposition, nous allons avoir besoin du lemme de Schur suivant, qu'Akshey Venkatesh démontre dans la proposition 4.4.7 de [Ven].

Théorème 2.5 (Lemme de Schur)**.** *Soient G un groupe de Lie et V une représentation unitaire de G. Alors V est irréductible si et seulement si chaque opérateur borné $A \in \text{End}\ V$ commutant avec l'action de G est un scalaire.*

Démonstration de la proposition 2.4. La seule partie délicate est de montrer que π_γ est irréductible. Par la remarque 2.3, puisque δ_γ défini en (2.3) est un automorphisme, $\pi_1(\text{Heis}) = \pi_\gamma(\text{Heis})$, donc il suffit de montrer que π_1 est irréductible.

Soit $A \in \text{End}\ V$ un opérateur borné commutant avec l'action de G. Par le théorème 2.5, il suffit de montrer que A est un scalaire. En particulier, nous avons pour tout $y \in \mathbb{R}$ que $A\pi_1(V_y) = \pi_1(V_y)A$. Nous allons utiliser la transformée de fourier inverse : pour toute fonction $b \in S(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz, $b(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{b}(y) e^{ixy} dy$. Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$, en appliquant A à bu, nous trouvons

$$A(b \cdot u) = b \cdot A(u) \tag{2.4}$$

dans $L^2(\mathbb{R})$. Nous allons montrer que cela implique qu'il existe une fonction $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $A(u) = a \cdot u$. Pour tout $\nu > 0$, notons χ_ν la fonction caractéristique de $B_\nu \coloneqq (-\nu, \nu)$ et soit $a_\nu \coloneqq A(\chi_\nu)$. Notons que si $\mu \geq \nu$, alors pour tout $f \in C_0^\infty(B_\nu)$, en appliquant (2.4) à $b = f$ et $u = \chi_\mu$, on trouve $A(f) = A(f \cdot \chi_\mu) = f \cdot a_\mu$, ce qui veut dire que $a_\mu|_{B_\nu} = a_\nu|_{B_\nu}$, pour peu que $\mu \geq \nu$. Par conséquent, en posant $a(x) = a_\nu(x)$ sur B_ν, a est bien définie presque partout, et nous trouvons bien que

$$A(u) = a \cdot u \tag{2.5}$$

pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, avec $||a||_\infty = ||A||$ et (2.5) est vraie pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$.

De plus, comme A commute avec l'action de Heis, nous avons en particulier que $A\pi_1(U_x) = \pi_1(U_x)A$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui implique que

$$a(t) \cdot u(t+x) = a(t+x) \cdot u(t+x)$$

pour tous $x, t \in \mathbb{R}$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$. Cela implique finalement que $a(x)$ est constante presque partout, ce implique que A est scalaire et qui conclut. ☐

Ceci achève notre étude des représentations fondamentales de Heis. Nous sommes prêts à nous pencher sur la classification.

2.2 Classification des représentations unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg

Le résultat principal sur la classification des représentations unitaires irréductibles de Heis est le théorème de Stone–von Neumann (section 2.2.3), dont la démonstration exige de développer certains outils. Nous commençons par étudier les représentations induites (section 2.2.1), puis les systèmes d'imprimitivité (section 2.2.2). Un fameux théorème dû à Mackey nous permettra de classifier certains de ces systèmes, ce qui constituera une étape essentielle de la démonstration du théorème de Stone-von Neumann.

2.2.1 Représentations induites

Soient G un groupe de Lie et $H \leq G$ un sous-groupe fermé. On suppose que G/H est muni d'une mesure μ G-invariante. Considérons une représentation unitaire ρ de H sur un Hilbert V. Nous allons construire une représentation de G à partir de celle de H. Pour $f : G \to V$ mesurable, soit la condition

$$\forall g \in G, h \in H : f(gh^{-1}) = \rho(h)f(g) \ . \tag{2.6}$$

Comme ρ est unitaire, la condition (2.6) implique que $|f|$ est constante sur les classes de G/H, ce qui nous permet de donner un sens à l'expression $|f(\overline{g})|$, où $\overline{g} \in G/H$ désigne la classe de $g \in G$.

Définition 2.6 (Représentation induite)**.** Soit

$$\mathcal{H}_\rho \coloneqq \left\{ f : G \to V \mid f \text{ satisfait (2.6) et } \int_{G/H} |f(\overline{g})|^2 d\mu(\overline{g}) < \infty \right\} \ .$$

Par la condition (2.6) et puisque ρ est unitaire, $\langle f(x), f'(x)\rangle_V$ est constante sur les classes de G/H. On peut donc définir le produit scalaire sur $\mathcal{H}_\rho$: $\langle f, f'\rangle_{\mathcal{H}_\rho} \coloneqq \int_{G/H} \langle f(\overline{g}), f'(\overline{g})\rangle_V \, d\mu(\overline{g})$, qui en fait un espace de Hilbert. Nous définissons la *représentation induite* $\mathrm{Ind}_{H,\rho}^G$ de G sur $\mathcal{H}_\rho$ pour tous $g, g' \in G$ et $f \in \mathcal{H}_\rho$ par

$$\mathrm{Ind}_{H,\rho}^G(g)(f)(g') \coloneqq f(g^{-1}g') \ .$$

On montre par calculs directs que celle-ci est bien une représentation, qui de plus est unitaire.

2.2.2 Systèmes d'imprimitivité

Nous commençons notre étude par la définition suivante.

Définition 2.7 (Système d'imprimitivité)**.** Soient G un groupe de Lie, ρ une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert V, X un G-espace topologique, et P une mesure spectrale de $(X, \mathcal{B}(X))$ sur V. On dit que (G, ρ, X, P) est un *système d'imprimitivité* si pour tous $g \in G$, $B \in \mathcal{B}(X)$:

$$\rho(g)P(B)\rho(g)^{-1} = P(g \cdot B) \ .$$

On dit que le système d'imprimitivité (G, ρ, X, P) est *transitif* si G agit transitivement sur X. Dans ce cas, $X \cong G/G_x$ pour chaque stabilisateur G_x.

Exemple 2.8. Soient G un groupe de Lie, $H \leq G$ un sous-groupe fermé, ρ une représentation de H sur un espace de Hilbert V et la mesure spectrale P^ρ de G/H sur $\mathcal{H}_\rho$ définie pour tous $B \in \mathcal{B}(G/H)$, $f \in \mathcal{H}_\rho$ et $g \in G$ par

$$P^\rho(B)(f)(g) = 1_B(\overline{g})f(g) \ .$$

Alors un calcul direct montre que $(G, \mathrm{Ind}_{G,\rho}^H, G/H, P^\rho)$ définit un système d'imprimitivité.

Nous allons maintenant présenter un théorème important de Mackey sur l'unicité de nombreux systèmes d'imprimitivité, que nous admettrons, et dont la démonstration peut être trouvée dans l'ouvrage de Michael Taylor [Tay86, Chapitre 5, §1].

Théorème 2.9 (d'imprimitivité, Mackey)**.** *Soit (G, ρ, X, P) un système d'imprimitivité transitif, où ρ est une représentation sur un Hilbert V. Alors il existe un espace de Hilbert W, une représentation L de $H = G_x$ (un stabilisateur quelconque) sur W, et un opérateur unitaire*

$$K : V \to \mathcal{H}_\rho$$

tel que pour tous $g \in G$, $B \subseteq G/H \cong X$ borélien :

$$K\rho(g)K^{-1} = \mathrm{Ind}_{H,L}^G(g) \ \textit{et}\ KP(\pi^{-1}(B))K^{-1} = P^L(B)$$

où $\pi : G \to G/H$ est l'application quotient.

En d'autres termes, n'importe quel système d'imprimitivité transitif est « équivalent » à celui de l'exemple 2.8. Nous sommes maintenant prêts à aborder le théorème de Stone-von Neumann.

2.2.3 Théorème de Stone-von Neumann

Le théorème se formule ainsi :

Théorème 2.10 (Stone–von Neumann)**.** *Chaque représentation unitaire irréductible de* Heis *est unitairement équivalente à $\pi_{\alpha,\beta}$ défini en (2.1) pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ou à π_γ défini en (2.2) pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$.*

Pour sa démonstration, nous avons besoin du corollaire suivant du lemme de Schur 2.5, dont la preuve en est une application directe.

Corollaire 2.11. *Soit G un groupe abélien. Alors toutes ses représentations irréductibles ont dimension 1.*

Démonstration du théorème 2.10. Nous commençons par étudier le centre de Heis. Nous pouvons facilement calculer qu'il vaut

$$Z(\text{Heis}) = \{(0,0;z) | z \in \mathbb{R}\} \ .$$

Soit ρ une représentation unitaire irréductible de Heis sur un espace de Hilbert H. Nous avons que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\rho(0,0;z)$ commute avec l'action de Heis. Par le lemme de Schur 2.5, cela implique qu'il agit par scalaire. Comme ρ est unitaire et est un morphisme de groupes, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\rho(0,0;z) = e^{i\gamma z} \ .$$

Nous distinguons maintenant deux cas, si $\gamma = 0$, c'est-à-dire que l'action du centre est triviale, ou si $\gamma \neq 0$, c'est-à-dire l'inverse.

Action du centre triviale On suppose que $\gamma = 0$. Dans ce cas, $Z(\text{Heis}) \subseteq \ker \rho$, donc il existe un homomorphisme de groupes $\tilde{\rho} : \text{Heis}/Z(\text{Heis}) \to \mathrm{U}(H)$ tel que $\rho = \tilde{\rho} \circ q$ où $q : \text{Heis} \to \text{Heis}/Z(\text{Heis})$ est l'homomorphisme quotient. Or, nous pouvons aisément calculer que $\text{Heis}/Z(\text{Heis}) \cong (\mathbb{R}^2, +)$. Comme $(\mathbb{R}^2, +)$ est abélien, le corollaire 2.11 nous indique que H est de dimension 1. Comme ρ est unitaire, trivial sur $Z(\text{Heis})$ et est un homomorphisme de groupe, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\rho(x,y;z) = e^{i(\alpha x + \beta y)} \ .$$

Cela correspond exactement à (2.1) et conclut le cas $\gamma = 0$.

Action du centre non triviale On suppose que $\gamma \neq 0$. Par la remarque 2.3, on peut se contenter de démontrer que $\rho \cong \pi_1$ lorsque $\gamma = 1$. Supposons ainsi que $\rho(0,0;z) = e^{iz}$. Soient les applications α et β définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\alpha(x) \coloneqq \rho(x,0;0) \text{ et } \beta(y) \coloneqq \rho(0,y;0) \ .$$

Ainsi α et β sont des représentations unitaires de $\mathbb{R}$. Par le théorème de Stone pour les groupes unitaires à un paramètre (Théorème 10.15 [Hal13]), il existe un unique opérateur A sur un sous-espace dense de H, auto-adjoint, tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\beta(y) = e^{iyA}$. Par ailleurs, par le théorème spectral (Théorème D.3.2 [Gal20]) et le théorème de convergence dominée, il existe une unique mesure spectrale P de $\mathbb{R}$ sur H telle que

$$\beta(y) = e^{iyA} = \int_{\mathbb{R}} e^{ity} dP(t) \ .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $\tau_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ t \mapsto t + x$. Soit $\alpha'(x) \coloneqq \alpha(-x)$, qui est alors visiblement une représentation de $\mathbb{R}$ sur H. Notre but maintenant est de montrer que $(\mathbb{R}, \alpha', (\mathbb{R}, \tau_\bullet), P)$ est un système d'imprimitivité transitif, pour pouvoir lui appliquer le théorème 2.9. Nous pouvons calculer que

$$\alpha(x)\beta(y) = \rho((x,0,0)(0,y,0)) = \rho((0,0,xy)(0,y,0)(x,0,0)) = e^{ixy}\beta(y)\alpha(x) \ .$$

Par conséquent, nous avons

$$\beta(y) = \alpha(x)^{-1} e^{ixy} \int_{\mathbb{R}} e^{ity} dP(t) \alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ity} d(\alpha(x)^{-1}(P \circ \tau_{-x}(t))\alpha(x)) \ .$$

Par l'unicité de la mesure spectrale μ satisfaisant $\beta(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{ity} d\mu$, nous obtenons donc $P = \alpha(x)^{-1}(P \circ \tau_{-x}(\bullet))\alpha(x)$. Ainsi, pour tout borélien $B \subseteq \mathbb{R}$, cela donne $P(B) = \alpha(x)^{-1} P(B-x)\alpha(x) = \alpha(-x)P(B-x)\alpha(-x)^{-1}$, c'est-à-dire

$$P(B+x) = \alpha(-x)P(B)\alpha(-x)^{-1} \ .$$

Par ailleurs, notons que l'action $\tau_\bullet$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ est transitive, donc

$$(\mathbb{R}, \alpha', (\mathbb{R}, \tau_\bullet), P) \text{ est un système d'imprimitivité transitif.}$$

De plus, le stabilisateur de n'importe quel point est $\{0\}$. Le théorème d'imprimitivité 2.9 nous fournit un espace de Hilbert W et une représentation L de $\{0\}$ sur W. Notons que comme L est triviale, $\mathcal{H}_L = L^2(\mathbb{R})$. Le théorème nous fournit aussi un opérateur unitaire $K : H \to L^2(\mathbb{R})$ tel que pour tout borélien $B \subseteq \mathbb{R}$

$$K\alpha'(\bullet)K^{-1} = \mathrm{Ind}_{0,L}^{\mathbb{R}}(\bullet) \text{ et } KP(B)K^{-1} = P'(B)$$

où $P'(B) : f \mapsto 1_B \cdot f$. D'une part, nous constatons que pour tous $x, t \in \mathbb{R}$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Ind}_{0,L}^{\mathbb{R}}(x)(f)(t) = f(t-x) = \pi_1(-x, 0; 0)(f)(t)$. Nous en déduisons donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K\alpha(-x)K^{-1} = \pi_1(-x, 0; 0)$, d'où

$$K\rho(x, 0; 0)K^{-1} = \pi_1(x, 0; 0) \ .$$

D'autre part, nous calculons

$$K\beta(y)K^{-1} = K \int_{\mathbb{R}} e^{ity} dPK^{-1} = \int_{\mathbb{R}} e^{ity} d(KPK^{-1}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ity} dP'$$

et pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, par définition de P',

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{ity} dP'(t) \right)(f) = e^{iy\bullet} f = \pi_1(0, y; 0)(f)$$

ce qui donne bien

$$K\rho(0, y; 0)K^{-1} = \pi_1(0, y; 0) \ .$$

Ainsi, $K\rho(\bullet)K^{-1}$ et π_1 coïncident sur les éléments de la base $(x, 0; 0)$, $(0, y; 0)$ et $(0, 0; z)$, donc ils sont égaux. Cela donne l'unicité de ρ à équivalence unitaire près, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Nous avons ainsi achevé la classification des représentations unitaires et irréductibles à isomorphisme près de Heis, ce qui constituait le deuxième ensemble de notre correspondance, que nous démontrons maintenant.

3 Théorème de Kirillov pour le groupe de Heisenberg

La bijection entre les orbites coadjointes et les représentations unitaires irréductibles est l'objet du théorème de Kirillov dans sa forme générale (théorème A). Pour cela, nous commençons par développer des préliminaires qui lui seront nécessaires, puis nous le démontrons pour le groupe de Heisenberg. Nous nous référerons principalement à l'ouvrage de Kirillov [Kir04, Chapitre 1, §2].

3.1 Préliminaires de la version générale du théorème de Kirillov

Nous décrivons la structure symplectique sur les orbites coadjointes et une mesure G-invariante déduite. Définissons la 2-forme suivante :

Définition 3.1. Soit G un groupe de Lie et $\mathcal{O}$ une orbite coadjointe de G. Alors on peut construire une 2-forme canonique ω sur $\mathcal{O}$, de la manière suivante. Pour tous $\xi \in \mathcal{O}, t_1, t_2 \in \mathrm{T}_\xi\mathcal{O}$, on choisit $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ tels que $t_1 = X \cdot \xi, t_2 = Y \cdot \xi$ et on définit

$$\omega(t_1, t_2) \coloneqq \xi([X, Y]).$$

Remarque 3.2. On peux vérifier que la 2-forme ω ne dépend pas du choix de X, Y.

Nous obtenons les propriétés suivantes pour ω.

Lemme 3.3. *La 2-forme ω sur $\mathcal{O}$ est non dégénérée, symplectique et G-invariante, donc $\mathcal{O}$ est une variété symplectique munie d'une action de G.*

Démonstration. Par définition il est clair que ω est G-invariante et non dégénérée. Donc il reste à prouver que ω est fermée.

Soit $X \in \mathrm{Lie}(G)$, nous définisons un champ de vecteurs v_X sur $\mathcal{O}$ par $v_X|_\xi = X \cdot \xi$. Alors

$$\begin{aligned} d\omega|_\xi(X\xi, Y\xi, Z\xi) &= v_X(\xi([Y, Z])) + v_Y(\xi([Z, X])) + v_Z(\xi([X, Y])) \\ &\quad + \xi([X, [Y, Z]]) + \xi([Y, [Z, X]]) + \xi([Z, [X, Y]]) \ . \end{aligned}$$

Et par la définition de l'action coadjointe,

$$v_X(\xi([Y, Z])) = \frac{d}{dt}(e^X\xi)([Y, Z])\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\xi(\mathrm{Ad}_{e^X}[Y, Z])\big|_{t=0} = \xi([X, [Y, Z]]) \ .$$

Alors par l'identité de Jacobi, on a $d\omega = 0$, donc ω est symplectique. □

Nous en déduisons directement la mesure m désirée :

Corollaire 3.4. *L'orbite coadjointe $\mathcal{O}$ est de dimension paire $2d$, et elle admet une mesure G-invariante $m = \omega^{\wedge d}$.*

Cela achève notre étude des outils nécessaire à la forme générale du théorème de Kirillov.

3.2 Théorème de Kirillov pour le groupe de Heisenberg

Nous allons maintenant nous concentrer sur le théorème de Kirillov, dans le cas particulier du groupe de Heisenberg.

Tout d'abord, nous commençons par obtenir une expression explicite pour la mesure m définie dans le corollaire 3.4, dans le cas de Heis. Le lemme suivant peut se démontrer par calcul direct.

Lemme 3.5. *Soit $m_{\mathcal{O}}$ la mesure sur une orbite coadjointe $\mathcal{O}$ de* Heis *induite par la forme symplectique ω. Alors on a :*

- *Pour tout point $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2$, l'orbite $\mathcal{O}_{\alpha_0,\beta_0} = \{(\alpha_0, \beta_0, 0)\}$ est un point, et la mesure de ce point égale* 1*.*
- *Pour $\gamma_0 \neq 0 \in \mathbb{R}$, l'orbite $\mathcal{O}_{\gamma_0} = \{(\alpha, \beta, \gamma_0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un plan, sur lequel la mesure $m_{\mathcal{O}_{\gamma_0}}$ coïncide avec la mesure usuelle sur $\mathbb{R}^2$ multipliée par $\frac{1}{\gamma_0}$.*

Nous sommes maintenant prêts à présenter et démontrer le théorème de Kirillov pour le groupe de Heisenberg.

Théorème 3.6 (Kirillov, pour Heis)**.** *Il existe une correspondance entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de* Heis *et l'ensemble des orbites coadjointes de* Heis*, satisfaisant la formule des caractères : pour toute orbite $\mathcal{O} \subset \mathfrak{heis}^*$ et la représentation $\pi_{\mathcal{O}}$ correspondante, on a pour tout $X \in$* Heis

$$\chi_{\pi_{\mathcal{O}}}(e^X) = \operatorname{Tr} \pi_{\mathcal{O}}(e^X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}\dim \mathcal{O}}} \widehat{m_{\mathcal{O}}}(X) \tag{3.1}$$

où $\widehat{m_{\mathcal{O}}}$ est la transformée de Fourier de la mesure $m_{\mathcal{O}}$.

Pour les orbites $\mathcal{O}$ de dimension 2*, la formule (3.1) s'entend au sens de distributions, c'est-à-dire pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{heis})$, on a*

$$\operatorname{Tr}\Big(\int f(X) e^X \, dX\Big) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{O}} \hat{f}(\xi) \, dm_{\mathcal{O}}(\xi) \ .$$

Démonstration. Pour l'orbite $\mathcal{O}_{\alpha_0,\beta_0} = \{(\alpha_0, \beta_0, 0)\}$, la représentation correspondante π_{α_0,β_0} définie en (2.1) et de dimension 1 convient.

Fixons $\gamma_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Nous allons montrer que la représentation correspondant à l'orbite $\mathcal{O}_{\gamma_0} = \{(\alpha, \beta, \gamma_0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est π_{γ_0} définie en (2.2). Nous vérifierons la formule de caractère (3.1) pour π_{γ_0}. Il se trouve que $\pi_{\gamma_0}(g)$ n'est jamais de classe trace, donc nous devons calculer d'abord le trace des fonctions sur Heis.

Nous pouvons definir un opérateur $\pi_{\gamma_0}(A)$ sur $L^2(R)$, pour tout $A \in L^1(\text{Heis})$ par

$$\pi_{\gamma_0}(A) f = \int_{\text{Heis}} A(g) \pi_{\gamma_0}(g) f \, dg \ .$$

Alors $\pi_{\gamma_0}(A)$ est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$, donc nous pouvons calculer sa trace. Nous écrivons l'opérateur $\pi_{\gamma_0}(A)f$ explicitement :

$$\pi_{\gamma_0}(A) f(t) = \int_{\mathbb{R}^3} A \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix} e^{i\gamma_0(ty+z)} f(t+x) \, dxdydz \ .$$

Pour simplifier cette formule, nous intégrons sur z d'abord. Soit

$$B(x,y) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} A\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix} e^{i\gamma_0 z}\, dz$$

donc

$$\pi_{\gamma_0}(A)f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} B(x,y) e^{i\gamma_0 t y} f(t+x)\, dxdy\ .$$

Soit $\widehat{B}_y$ la transformée de Fourier de B par rapport à y, alors

$$\pi_{\gamma_0}(A)f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{B}_y(x, \gamma_0 t) f(t+x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{B}_y(s-t, \gamma_0 t) f(s)\, ds\ .$$

Donc $K(t,s) = \widehat{B}_y(s-t, \gamma_0 t)$ est la fonction de noyau de l'opérateur $\pi_{\gamma_0}(A)$. Par un résultat d'analyse fonctionnelle, nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \pi_{\gamma_0}(A) &= \int_{\mathbb{R}} K(x,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{B}_y(0, \gamma_0 x)\, dx = \frac{2\pi}{\gamma_0} B(0,0) \\ &= \frac{2\pi}{\gamma_0} \int_{\mathbb{R}} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} e^{i\gamma_0 z}\, dz. \end{aligned} \quad . \tag{3.2}$$

Soit χ le caractère de π_{γ_0}, qui est une distribution sur Heis. On devrait avoir

$$\operatorname{Tr} \pi_{\gamma_0}(A) = \int \chi(g) A(g)\, dg = \langle \chi, A \rangle.$$

En comparant cette identité avec l'équation (3.2), nous avons

$$\chi = \frac{2\pi}{\gamma_0} e^{i\gamma_0 z} \delta_z\ .$$

D'autre part, la transformée de Fourier de la mesure sur $\mathcal{O}_{\gamma_0}$ est

$$\widehat{m_{\mathcal{O}}} = (2\pi)^2 \frac{1}{\gamma_0} e^{i\gamma_0 z} \delta_z\ .$$

Donc nous avons $\chi = \frac{1}{2\pi} \widehat{m_{\mathcal{O}}}$ comme le dit le théorème. $\square$

4 Représentation de Weil

L'objet de ce paragraphe est une application du théorème de Kirillov aux représentations de Weil. Pour cela, prenons $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ le groupe spécial linéaire. Notons que celui-ci agit naturellement sur Heis, et il préserve ses orbites coadjointes. Par le théorème de Kirillov, il y a une bijection entre les classes d'équivalence unitaire de représentations irréductibles unitaires de Heis et les orbites coadjointes de Heis. Ainsi, intuitivement, nous nous attendons à ce que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

agisse sur les représentations irréductibles unitaires de Heis. Dans cette section, nous définirons la *représentation de Weil*, qui est presque une représentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, donnée par la correspondance de Kirillov.

Plus précisément, nous commençons par utiliser le théorème de Stone-Von Neumann 2.10 pour définir une application $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{U}(L^2(\mathbb{R}))/S^1$ (les opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R})$ à multiplication par scalaire près). Nous travaillons ensuite, notamment avec le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ pour en déduire la représentation de Weil du groupe métaplectique $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R}) \coloneqq \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})/\langle u^2\rangle \to \mathrm{U}(L^2(\mathbb{R}))$.

4.1 Représentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ à sclaire près

Par souci de symétrie, nous réutiliserons la notation $(x, y; z)$ donnée en (0.1). D'abord, nous donnons l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur Heis.

Définition 4.1. Pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et tout $(x, y; z) \in$ Heis, nous définissons

$$g \cdot (x, y; z) = (x', y'; z)$$

où $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Cela donne une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur Heis.

Remarque 4.2. En s'inspirant de (0.2), soit $\langle [x, y], [x', y'] \rangle \coloneqq xy' - x'y$. C'est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^2$. Donc $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe au sous-groupe de Aut(Heis) constitué des automorphismes de Heis qui fixent le centre de Heis.

À partir de maintenant, nous allons nous pencher sur $\pi \coloneqq \pi_1$, la représentation de Heis sur $L^2(\mathbb{R})$ définie en (2.2). Pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, nous avons une représentation π^g de Heis, aussi réalisée sur $L^2(\mathbb{R})$, définie pour tous $h \in$ Heis et $f \in L^2(\mathbb{R})$ par $\pi^g(h)f = \pi(gh)f$. Comme l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est triviale sur le centre de Heis, π et π^g coïncident dessus, donc par la démonstration du théoème de Stone-von Neumann 2.10, nous devons avoir $\pi^g \cong \pi$ comme représentation de Heis. Autrement dit, il existe un opérateur unitaire A_g sur $L^2(\mathbb{R})$, tel que pour tout $h \in$ Heis

$$A_g \pi(h) A_g^{-1} = \pi^g(h) = \pi(gh) \ .$$

De plus, par le lemme de Schur, A_g est unique à multiplication par scalaire près, donc nous avons

$$A_g A_{g'} = A_{gg'} \cdot (\text{scalaire}) \ .$$

En résumant ce qui précède, nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.3. *Il existe une représentation unitaire* projective *de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *sur* $L^2(\mathbb{R})$*, c'est-à-dire un morphisme de groupes*

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) &\to \mathrm{U}(L^2(\mathbb{R}))/S^1 \\ g &\mapsto [A_g] \end{aligned}$$

Pour obtenir la représentation usuelle désirée, le revêtement universel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ nous sera bien utile.

4.2 Représentation du revêtement universel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Nous commençons par définir :

Définition 4.4. Soit $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ le revêtement universel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Par la théorie de Lie, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie avec algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Comme démontré par Brian Hall ([Hal10], Conclusion 13.13) le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, donc $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ est une extension de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par $\mathbb{Z}$. Autrement dit, nous avons une suite exacte courte :

$$1 \to \mathbb{Z} \to \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to 1 \ . \tag{4.1}$$

Nous travaillons maintenant en plusieurs étapes. D'abord, nous allons factoriser le revêtement universel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par un morphisme $\psi : G \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, où G sera un groupe de Lie utile à cet effet. Cela nous permettra ensuite de faire le lien avec $\mathrm{U}(L^2(\mathbb{R}))$ et de nous affranchir du quotient $\mathrm{U}(L^2(\mathbb{R}))/S^1$ de la proposition 4.3. Nous parviendrons à cela en factorisant la composition $\phi \circ \psi$ par le quotient $\mathrm{U}(L^2(\mathbb{R})) \to \mathrm{U}(L^2(\mathbb{R}))/S^1$. On peut ensuite en déduire une application $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{U}(L^2(\mathbb{R}))$, qu'il nous suffit finalement de faire passer au quotient pour obtenir la représentation de Weil.

Commençons donc par établir le lemme suivant.

Lemme 4.5. *Soit*

$$G := \{(g, \text{un choix de } A_g) \mid g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\},$$

qui est un groupe de Lie. Alors il existe un morphisme $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \to G$ avec un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[dr] & G \arrow[d] \\ & \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \end{tikzcd} \ .$$

Démonstration. Nous avons l'extension

$$1 \to S^1 \to G \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to 1 \ .$$

En passant aux algèbres de Lie, nous avons

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to 0 \ .$$

Nous voulons construire une section du morphisme $\mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Soient

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui constituent une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Prenons $\bar{e}, \bar{h}, \bar{f} \in \mathrm{Lie}(G)$ qui correspondent à e, h, f respectivement. Alors on peut vérifier que le morphisme

$$\phi\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Lie}(G),\ e \mapsto \frac{1}{2}[\bar{h}, \bar{e}], h \mapsto [\bar{e}, \bar{f}], f \mapsto -\frac{1}{2}[\bar{h}, \bar{f}]$$

est une section de $\mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, et il est indépendant des choix de $\bar{e}, \bar{h}, \bar{f}$ car $\mathbb{R}$ est commutatif.

Comme $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ est simplement connexe, nous obtenons le morphisme $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \to G$ désiré. □

Nous pouvons en déduire l'application désirée, dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.6. *Il existe une représentation unitaire ρ de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$, donnée par $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \to G \to \mathrm{U}(L^2(\mathbb{R}))$, qui satisfait pour tous $g \in \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, $h \in \mathrm{Heis}$*

$$\rho(g)\pi(h)\rho(g^{-1}) = \pi(\bar{g}h)$$

où $\bar{g}$ est l'image de g dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Nous sommes maintenant prêts à entamer la dernière étape de la construction de la représentation de Weil, qui consiste à faire passer ρ au quotient, dans la prochaine section

4.3 Passage au groupe métaplectique

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.7 (Représentation de Weil)**.** *Soit $u \in \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ un générateur de l'image de $\mathbb{Z}$ sous (4.1). Alors $\rho(u^2) = 1$, donc la représentation ρ passe au quotient par $\langle u^2 \rangle$. Cela nous donne une représentation de $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R}) \coloneqq \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})/\langle u^2 \rangle$ appelée* la représentation de Weil*.*

Remarque 4.8. $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R})$ est *le groupe métaplectique*, qui est un revêtement double de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. En général, $\mathrm{Mp}_n(\mathbb{R})$ est un revêtement double du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. La démonstration du théorème est compliquée, et nous travaillons en plusieurs étapes.

Étape 1. D'abord nous calculons A_g pour certains $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Par la définition de A_g, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L^2(\mathbb{R}) \arrow[r, "\pi(h)"] \arrow[d, "A_g"] & L^2(\mathbb{R}) \arrow[d, "A_g"] \\ L^2(\mathbb{R}) \arrow[r, "\pi(gh)"] & L^2(\mathbb{R}). \end{tikzcd}$$

Et nous avons $\pi(x, 0; 0)f(t) = f(t + x), \pi(0, y; 0)f(t) = e^{iyt}f(t)$.

— Soit $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$. Alors $g(0, y; 0) = (0, y; 0)$, donc A_g commute avec $f(t) \mapsto e^{iyt} f(t)$.

Donc A_g est la multiplication par une fonction $m(t)$. Par $g(x, 0; 0) = (x, \theta x; 0)$ nous poulons calculer $m(t) = \exp(-\frac{i\theta t^2}{2})$.

— Soit $g = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}$. Alos $g(x, 0; 0) = (sx, 0; 0), g(0, y; 0) = (0, s^{-1}y; 0)$. Nous poulons prendre $A_g f(t) = s^{-\frac{1}{2}} f(\frac{t}{s})$.

— Soit $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors g échange x et y. Donc A_g est la transformée de Fourier, $A_g f(t) = \hat{f}(t)$.

Étape 2. Pour calculer le scalaire de $\rho(u)$, nous devons passer à l'algèbre de Lie.

Définition 4.9. Soient H un groupe de Lie, π une représentation unitaire de H sur V et

$$V^\infty := \{v \in V \mid \text{l'application } h \mapsto hv \text{ est lisse}\} .$$

Alors $\mathrm{Lie}(H)$ agit sur V^∞ de la manière suivante.

$$Xv = \frac{d}{dt} \pi(e^X) v\Big|_{t=0} .$$

Maintenant nous avons une représentation de G sur $L^2(\mathbb{R})$. Comme dans le lemme 4.5, soient $\bar{e}, \bar{h}, \bar{f} \in \mathrm{Lie}(G)$ avec l'image $e, h, f \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Par exemple, soient

$$\bar{f} = \frac{d}{d\theta} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}, \phi(t) \mapsto e^{-\frac{i\theta t^2}{2}} \phi(t) \right) \Big|_{\theta=0},$$
$$\bar{h} = \frac{d}{ds} \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \phi(t) \mapsto s^{-\frac{1}{2}} \phi(\frac{t}{s}) \right) \Big|_{s=1},$$
$$\bar{e} = \frac{d}{d\theta} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}, \phi(t) \mapsto \mathcal{F}^{-1} \big(e^{-\frac{i\theta t^2}{2}} \bar{\phi}(t) \big) \right) \Big|_{\theta=0}.$$

Alors nous pouvons donner une morphisme $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Lie}(G)$ comme dans le lemme 4.5. En fait, le morphisme est exactement $f \mapsto \bar{f}, e \mapsto \bar{e}, h \mapsto \bar{h}$.

Après quelques calculs, les actions de $\bar{f}, \bar{h}, \bar{e}$ (ainsi que celles de f, h, e) sur $L^2(\mathbb{R})^\infty$ sont

$$\bar{h}\phi(t) = (-\frac{1}{2} - tD)\phi(t), \qquad \bar{f}\phi(t) = -\frac{iD^2}{2}\phi(t), \qquad \bar{e}\phi(t) = -\frac{it^2}{2}\phi(t)$$

où $D = \frac{d}{dt}$. Nous avons aussi $L^2(\mathbb{R})^\infty = H(\mathbb{R})$, l'espace de Sobolev.

Étape 3. Maintenant soit $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Nous avons $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cong S^1 =$

$\mathbb{R}/\langle 2\pi \rangle$. Alors nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \langle u \rangle \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \langle 2\pi \rangle \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[u] & 1 \end{tikzcd}.$$

L'algèbre de $\mathbb{R}$ au-dessus est la même que celle de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, qui est généralisée par $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = e - f$. Et p agit sur $L^2(\mathbb{R})^\infty$ comme $p\phi(t) = -\frac{i}{2}(D^2 - t^2)\phi(t)$. En posant $\phi_0 = e^{-\frac{t^2}{2}}$, qui est une fonction caractéristique de p, on obtient $p\phi_0 = \frac{i}{2}\phi_0$. Donc $e^{\theta p}\phi_0 = e^{\frac{i\theta}{2}}\phi_0$.

Par ailleurs, l'élément $u \in \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ est identifié à $2\pi = e^{2\pi p} \in \mathbb{R}$. Comme u appartient au noyau de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, il agit sur $L^2(\mathbb{R})$ comme une scalaire. Or, $\rho(u)\phi_0 = e^{2\phi p}\phi_0 = e^{i\pi}\phi_0 = -\phi_0$, donc $\rho(u) = -1$. Par conséquent, $\rho(u^2) = 1$, et la représentation ρ passe au quotient, ce qui conclut. $\square$

Nous achevons ainsi la construction de la représentation de Weil.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la méthode des orbites de Kirillov dans le cas du groupe de Heisenberg. Notre but était donc de démontrer la correspondance entre les orbites de l'action coadjoite du groupe de Heisenberg, et ses classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles.

Ainsi, nous avons commencé par construire les actions adjointe et coadjointe, avant d'en calculer explicitement les orbites dans le cas du groupe de Heisenberg. Nous avons ainsi trouvé les orbites suivantes : pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, l'orbite de (α, β, γ) vallait

$$\mathcal{O}_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{cases} \{(\alpha, \beta, 0)\} & \text{si } \gamma = 0 \\ \{(\alpha', \beta', \gamma) | \alpha', \beta' \in \mathbb{R}\} & \text{si } \gamma \neq 0 \end{cases}.$$

Ceci constituait la première partie de notre travail. Par la suite, nous nous sommes intéressés aux représentations unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg. Nous avons exploré ses deux familles de représentations fondamentales. Celles-ci, l'une sur $\mathbb{C}$, l'autre sur $L^2(\mathbb{R})$, valaient pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha,\beta} &: V_y U_x W_z \mapsto e^{i(\alpha x + \beta y)} \\ \pi_\gamma &: U_x \mapsto [f \mapsto f(\bullet + x)], \quad V_y \mapsto [f \mapsto e^{i\gamma y \bullet} f], \quad W_z \mapsto [f \mapsto e^{i\gamma z} f] \end{aligned}$$

Nous avons démontré qu'elles étaient unitaires et irréductibles. Le fameux théorème de Stone-Von Neumann nous a ensuite permis de démontrer que celles-ci étaient uniques à équivalence unitaire près.

Par la suite, nous avons démontré le théorème central de notre recherche, le théorème de Kirillov, qui établissait une correspondance entre les deux ensembles précédemment étudiés, à l'aide de la formule de Kirillov : pour toute orbite $\mathcal{O} \subset \mathfrak{heis}^*$ et la représentation $\pi_{\mathcal{O}}$ correspondante, on a pour tout $X \in \mathrm{Heis}$

$$\chi_{\pi_{\mathcal{O}}}(e^X) = \operatorname{Tr} \pi_{\mathcal{O}}(e^X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}\dim \mathcal{O}}} \widehat{m_{\mathcal{O}}}(X) \tag{5.1}$$

Enfin, nous nous sommes servis de cette étude pour étudier la représentation de Weil.

Références

[Tay86] Michael E. Taylor. *Non commutative harmonic analysis*. American Mathematical Society, 1986.

[Kir04] A. A. Kirillov. *Lectures on the orbit method*. T. 64. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[Hal10] Brian C. Hall. *Lie groups, Lie algebras and representaitons*. T. 222. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2010.

[Hal13] Brian C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2013.

[Gal20] Isabelle Gallagher. *Analyse fonctionnelle*. 2020.

[Ven] Akshay Venkatesh. *Geometric quantization and representation theory*. Notes by Tony Feng and Niccolo Ronchetti.