PROGETTO MAPLE

Ilaria Leotta, matricola 190036

Ripuliamo l'area di lavoro Maple

$restatt : with(inttrans) : with(plots) :$

PUNTO A

Scrivo la risposta al gradino che descrive il mio sistema lineare e stazionario a tempo continuo:

$$y := t \to \left(2 \cdot t^2 \cdot \exp\left(-\frac{t}{2}\right) + \frac{16}{5} \cdot \exp\left(-\frac{t}{2}\right) + \frac{12}{5} \cdot \exp(-t) \cdot \sin(t) + \frac{4}{5} \exp(-t) \cdot \cos(t) - 4\right) \cdot \mathrm{Heaviside}(t)$$

$$y := t \mapsto \left(2 \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{2}} + \frac{16 \cdot e^{-\frac{t}{2}}}{5} + \frac{12 \cdot e^{-t} \cdot \sin(t)}{5} + \frac{4 \cdot e^{-t} \cdot \cos(t)}{5} - 4\right) \cdot \mathrm{Heaviside}(t) \quad \textbf{(1)}$$

Scrivo come ingresso il gradino unitario:

$u := t \to 1 \cdot \mathrm{Heaviside}(t)$

$$u := t \mapsto \mathrm{Heaviside}(t) \quad \textbf{(2)}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO, POLI E ZERI

Il **primo punto** richiede di calcolare la sua funzione di trasferimento ed i suoi poli e zeri.
Iniziamo con il calcolare e spiegare cosa è la Funzione Di Trasferimento.
La funzione di Trasferimento di un sistema lineare è il rapporto tra la L-Trasformata dell'ingresso e la L-Trasformata dell'uscita. Sappiamo inoltre che la Trasformata di Laplace è funzione di variabile complessa e, siccome si tratta di un sistema lineare e stazionario, sappiamo anche che la trasformata di Laplace dell'**uscita forzata** (Y(s)) è data dal prodotto tra la **funzione di trasferimento** (G(s)) e la **trasformata dell'ingresso** (U(s)**).**
Possiamo, adesso, trovare la nostra **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO**. Iniziamo con il calcolare le trasformate di Laplace di Y(s) e U(s), sottolineamo però che ci è possibile fare le trasformate perchè Y e U rispettano i criteri del **Teorema della trasformabilità di Laplace** ovvero che:
- La funzione y(t) deve essere right-sided e continua a tratti
- La funzione y(t) deve essere di ordine esponenziale alpha

$Y := s \to laplace(y(t), t, s)$

$$Y := s \mapsto laplace(y(t), t, s) \quad \textbf{(3)}$$

$U := s \to laplace(u(t), t, s)$

$$U := s \mapsto laplace(u(t), t, s) \quad \textbf{(4)}$$

$Y(s)$

$$\frac{8\,(3\,s-1)}{s\,(1+2\,s)^3\,\left((s+1)^2+1\right)} \quad \textbf{(5)}$$

$U(s)$

$$\frac{1}{s} \quad \textbf{(6)}$$

Come già detto prima: la funzione di trasferimento del sistema è pari a **G(s)= Y(s)/U(s).** Quindi sapendo che **U(s)=1/s** vediamo a quanto è uguale la **funzione di trasferimento:**

$G := s \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)}$

$$G := s \mapsto \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{7}$$

$G(s)$

$$\frac{8\,(3\,s-1)}{(1+2\,s)^3\,\left((s+1)^2+1\right)} \tag{8}$$

$n_{G(s)} := numer(G(s))$

$$n_{G(s} := 24\,s-8 \tag{9}$$

$d_{G(s)} := denom(G(s))$

$$d_{G(s} := (1+2\,s)^3\,\left(s^2+2\,s+2\right) \tag{10}$$

Notiamo che siccome il denominatore è di grado maggiore rispetto al numeratore, il sistema è sicuramente proprio.
Adesso dobbiamo calcolare i poli e gli zeri della funzione.
Diamo, innanzitutto, una definizione di "zeri della funzione": gli zeri della funzione si ottengono ponendo uguale a 0 il polinomio che sta a numeratore della funzione di trasferimento. In pratica gli zeri della funzione sono i valori che si ottengono dalla risoluzione dell'equazione NUMERATORE=0.
Quindi:
$zeri := solve(numer(G(s)), s)$

$$zeri := \frac{1}{3} \tag{11}$$

I poli della funzione sono quei numeri complessi o reali che rendono infinita la nostra G(s). Li otteniamo ponendo a 0 il polinomio che sta a denominatore della funzione di trasferimento.
$poli := solve(denom(G(s)), s)$

$$poli := -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1+\mathrm{I}, -1-\mathrm{I} \tag{12}$$

Il sistema presenta 5 poli, 3 reali e coincidenti e 2 complessi coniugati, ma la cosa che a noi interessa è che hanno tutti la parte reale strettamente negativa, quindi in base a quello che ci dice un noto teorema sulla bibostabilità possiamo affermare che il sistema è **BIBO STABILE.**
E, sapendo che i numeri dei poli ci indicano anche la dimensione del sistema, sappiamo che stiamo lavorando con un sistema del QUINTO ordine.

MODI DI EVOLUZIONE LIBERA E RISPOSTA ALL'IMPULSO

Viene chiesto di determinare i modi di evoluzione libera e la risposta all'impulso.
I **modi di evoluzione** libera rappresentano il contributo alla risposta da parte del sistema, e vengono generati dalle componenti della funzione di trasferimento. Si ricavano facendo l'antitrasformata di Laplace e il loro numero è dato dal numero di radici del polinomio caratteristico ovvero dal grado del denominatore della funzione di Trasferimento.
Possiamo quindi già affermare, ancor prima di calcolarli, che i modi di evoluzione libera del sistema sono sicuramente CINQUE.
Facciamo l'antitrasformata di Laplace, riccordando però che l'antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento rappresenta proprio la **risposta all'impulso**, quindi noi sappiamo già che la nostra g(t) sarà proprio la risposta all'impulso.

$invlaplace(G(s), s, t)$

$$\frac{8\,e^{-t}\,(\cos(t)-2\sin(t))}{5}-\frac{e^{-\frac{t}{2}}\,(5\,t^2-20\,t+8)}{5} \tag{13}$$

Espandiamo la funzione
expand(**(13)**, exp)

$$\frac{8\,e^{-t}\cos(t)}{5}-\frac{16\,e^{-t}\sin(t)}{5}-t^2\,e^{-\frac{t}{2}}+4\,e^{-\frac{t}{2}}\,t-\frac{8\,e^{-\frac{t}{2}}}{5} \tag{14}$$

La risposta all'impulso di un sistema del **V** ordine presenta fino a **cinque** addendi. Ci sono cinque funzioni che caratterizzano questi addendi, che rappresentano i modi di evoluzione libera del sistema. Avevo già anticipato, dopo aver visto i poli, che i modi di evoluzione libera del sistema sarebbero stati cinque e sono: cos(t)* exp(-t), sin(t)* exp(-t), t^2* exp(-t/2),t* exp(-t/2), exp(-t/2).

$g := t \rightarrow$ **(14)**$\cdot$Heaviside(t)

$$g := t \mapsto \left(\frac{8\cdot e^{-t}\cdot\cos(t)}{5}-\frac{16\cdot e^{-t}\cdot\sin(t)}{5}-t^2\cdot e^{-\frac{t}{2}}+4\cdot e^{-\frac{t}{2}}\cdot t-\frac{8\cdot e^{-\frac{t}{2}}}{5}\right)\cdot\mathrm{Heaviside}(t) \tag{15}$$

$g(t)$

$$\left(\frac{8\,e^{-t}\cos(t)}{5}-\frac{16\,e^{-t}\sin(t)}{5}-t^2\,e^{-\frac{t}{2}}+4\,e^{-\frac{t}{2}}\,t-\frac{8\,e^{-\frac{t}{2}}}{5}\right)\mathrm{Heaviside}(t) \tag{16}$$

$plot(g(t), t=-1..25)$

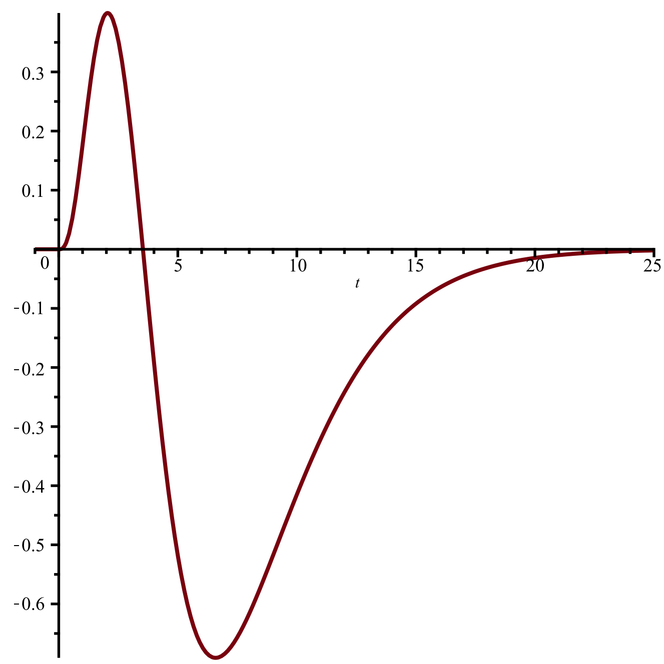


GRAFICO DELLA RISPOSTA AL GRADINO

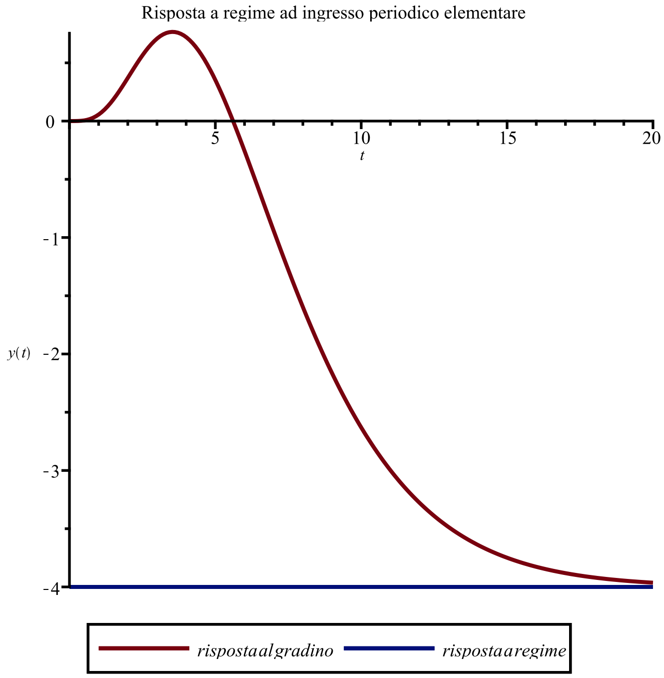
Siccome il sistema è BIBO STABILE, possiamo calcolare (ed ha senso farlo) la RISPOSTA A REGIME (steady-state).
$y_{ss} := t \rightarrow limit(y(t), t=+\infty)$

$$y_{ss} := t \mapsto \lim_{t\rightarrow\infty} y(t) \tag{17}$$

$y_{ss}(t)$

$$-4 \tag{18}$$

$plot\left(\left[y(t), y_{ss}(t)\right], t=0..20, legend = ['risposta\ al\ gradino','risposta\ a\ regime'], labels = ['t','y(t)'], title = \text{"Risposta a regime ad ingresso periodico elementare"}\right)$



LA RISPOSTA ALLA RAMPA

Consideriamo adesso in ingresso la funzione **rampa unitaria** che è così definita:

$$u_{tr} := \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$u_{tr} := \begin{cases} t & 0 \leq t \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{19}$$

Possiamo notare che si tratta, anche in questo caso, di una funzione right-sided. Inoltre, sappiamo che è possibile ricavarci la L-Trasormata perchè stiamo lavorando una funzione continua sul dominio ed è anche di ordine esponenziale alpha..

$u_{tr} := t \rightarrow t \cdot \text{Heaviside}(t)$

$$u_{tr} := t \mapsto t \cdot \text{Heaviside}(t) \tag{20}$$

$U_{tr} := s \rightarrow laplace\left(u_{tr}(t), t, s\right)$

$$U_{tr} := s \mapsto laplace\left(u_{tr}(t), t, s\right) \tag{21}$$

$U_{tr}(s)$

$$\frac{1}{s^2} \tag{22}$$

$y_{-2} := t \rightarrow invlaplace\left(\frac{G(s)}{s^2}, s, t\right) \cdot \text{Heaviside}(t)$

$$y_{-2} := t \mapsto invlaplace\left(\frac{G(s)}{s^2}, s, t\right) \cdot \mathrm{Heaviside}(t) \quad \textbf{(23)}$$

$y_{-2}(t)$

$$\left(40 - 4\,t - \frac{4\,e^{-t}\,(2\cos(t) + \sin(t))}{5} - \frac{4\,e^{-\frac{t}{2}}\,(5\,t^2 + 20\,t + 48)}{5}\right) \mathrm{Heaviside}(t) \quad \textbf{(24)}$$

MODELLO I-U CON FUNZIONE DI TRASFERIMENTO OTTENUTA SOPRA.

Rappresentare un modello Ingresso-Uscita significa rappresentare un sistema lineare e stazionario tramite un'equazione differenziale a coefficienti costanti di ordine **n** alla quale vanno aggiunte **n** condizioni iniziali.

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \ldots + a_{n-2} y''(t) + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + b_2 u^{(n-2)}(t) + \ldots + b_{n-2} u''(t) + b_{n-1} u'(t) + b_n u(t)$$

con condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \\ y^{(n-2)}(0) = y_0^{(n-2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots \\ y''(0) = y_0'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(0) = y_0' \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Noi sappiamo che la funzione di trasferimento si può esprimere sia come $G(s) = \frac{n_{G(s)}}{d_{G(s)}}$ che come rapporto delle L-Trasformate dell'ingresso e dell'uscita(come abbiamo visto al primo punto) e quindi $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. Da questa uguaglianza, possiamo partire e scrivere:

$$eq\_diff\_in\_s := expand\left(d_{G(s)} \cdot Y_u(s) = n_{G(s)} \cdot U_i(s)\right)$$

$$eq\_diff\_in\_s := 8\,Y_u(s)\,s^5 + 28\,Y_u(s)\,s^4 + 46\,Y_u(s)\,s^3 + 37\,Y_u(s)\,s^2 + 14\,Y_u(s)\,s + 2\,Y_u(s) = 24\,U_i(s)\,s - 8\,U_i(s) \quad \textbf{(25)}$$

Ci dobbiamo adesso "servire" del Teorema della Derivata (generalizzato all'ordine n); questo ci serve per poterla rendere una vera e propria equazione differenziale, in quanto possiamo notare che nell'equazione precedente non compaiono le condizioni iniziali.

Vediamo, dapprima, cosa enuncia questo teorema:

TEOREMA DELLA DERIVATA

Sia f una funzione di classe L, continua su [0, ∞). Se indico con F(s) la sua L-Trasformata allora:

L(F(t))= sF(s)-F(0+)

La regione di convergenza della L-Trasformata della sua derivata prima è uguale a quella di F(s).

Faccio l'antitrasformata di Laplace sul denominatore:

$$membro\_1 := invlaplace\left(d_{G(s)}, s, t\right)$$

$$membro\_1 := 2\,\mathrm{Dirac}(t) + 14\,\mathrm{Dirac}(1, t) + 37\,\mathrm{Dirac}(2, t) + 46\,\mathrm{Dirac}(3, t) + 28\,\mathrm{Dirac}(4, t) + 8\,\mathrm{Dirac}(5, t) \quad \textbf{(26)}$$

$$membro\_1 := subs\left(\left\{\mathrm{Dirac}(t) = y_u(t), \mathrm{Dirac}(1, t) = \mathrm{D}^{(1)}(y_u)(t), \mathrm{Dirac}(2, t) = \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(t), \mathrm{Dirac}(3, t) = \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(t), \mathrm{Dirac}(4, t) = \mathrm{D}^{(4)}(y_u)(t), \mathrm{Dirac}(5, t) = \mathrm{D}^{(5)}(y_u)(t)\right\}, membro\_1\right)$$

$$membro\_1 := 2\,y_u(t) + 14\,\mathrm{D}(y_u)(t) + 37\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(t) + 46\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(t) + 28\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(t) + 8\,\mathrm{D}^{(5)}(y_u)(t) \quad \textbf{(27)}$$

$$membro\_2 := invlaplace\left(n_{G(s)}, s, t\right)$$

$$membro\_2 := 24\,\mathrm{Dirac}(1, t) - 8\,\mathrm{Dirac}(t) \quad \textbf{(28)}$$

$$membro\_2 := subs\left(\left\{\mathrm{Dirac}(1, t) = \mathrm{D}^{(1)}(u_i)(t), \mathrm{Dirac}(t) = u_i(t)\right\}, membro\_2\right)$$

$$membro\_2 := 24\,\mathrm{D}(u_i)(t) - 8\,u_i(t) \quad \textbf{(29)}$$

$$eq\_diff\_finale := membro\_1 = membro\_2$$

$$eq\_diff\_finale := 2\,y_u(t) + 14\,\mathrm{D}(y_u)(t) + 37\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(t) + 46\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(t) + 28\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(t) + 8\,\mathrm{D}^{(5)}(y_u)(t) = 24\,\mathrm{D}(u_i)(t) - 8\,u_i(t) \quad \textbf{(30)}$$

CONDIZIONI INIZIALI IN CORRISPONDENZA DELLE QUALI IL TRANSITORIO DELLA RISPOSTA AL GRADINO è NULLO

Adesso dobbiamo determinare le condizioni iniziali per le quali il transitorio della risposta al gradino è nullo.
Supponiamo che le condizioni iniziali siano incognite, quindi non le assegnamo, ed applichiamo Laplace sull'equazione differenziale ottenuta al punto precedente.

$$laplace(eq\_diff\_finale, t, s)$$

$$2\,\mathcal{L}(y_u(t), t, s) + 14\,s\,\mathcal{L}(y_u(t), t, s) - 14\,y_u(0) + 37\,s^2\,\mathcal{L}(y_u(t), t, s) - 37\,\mathrm{D}(y_u)(0) - 37\,s\,y_u(0) + 46\,s^3\,\mathcal{L}(y_u(t), t, s) - 46\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) - 46\,s\,\mathrm{D}(y_u)(0) - 46\,s^2\,y_u(0) + 28\,s^4\,\mathcal{L}(y_u(t), t, s) - 28\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) - 28\,s\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) - 28\,s^2\,\mathrm{D}(y_u)(0) - 28\,s^3\,y_u(0) + 8\,s^5\,\mathcal{L}(y_u(t), t, s) - 8\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) - 8\,s\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) - 8\,s^2\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) - 8\,s^3\,\mathrm{D}(y_u)(0) - 8\,s^4\,y_u(0) = 24\,s\,\mathcal{L}(u_i(t), t, s) - 24\,u_i(0) - 8\,\mathcal{L}(u_i(t), t, s) \quad \textbf{(31)}$$

Una volta ottenute le condizioni inizali, sostituisco agli operatori di Laplace su y_u ed u_i i simboli Y_u (s) e U_i(s):

$eq\_diff\_in\_s\_sost := subs\left(\left\{laplace\left(y_u(t), t, s\right) = Y_u(s), laplace\left(u_i(t), t, s\right) = U_i(s)\right\}, \mathbf{(31)}\right)$

$$eq\_diff\_in\_s\_sost := 2\, Y_u(s) + 14\, Y_u(s)\, s - 14\, y_u(0) + 37\, Y_u(s)\, s^2 - 37\, \mathrm{D}(y_u)(0) - 37\, s\, y_u(0) + 46\, Y_u(s)\, s^3 - 46\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) - 46\, s\, \mathrm{D}(y_u)(0) - 46\, s^2\, y_u(0) + 28\, Y_u(s)\, s^4 - 28\, \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) - 28\, s\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) - 28\, s^2\, \mathrm{D}(y_u)(0) - 28\, s^3\, y_u(0) + 8\, Y_u(s)\, s^5 - 8\, \mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) - 8\, s\, \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) - 8\, s^2\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) - 8\, s^3\, \mathrm{D}(y_u)(0) - 8\, s^4\, y_u(0) = 24\, U_i(s)\, s - 24\, u_i(0) - 8\, U_i(s) \quad \mathbf{(32)}$$

$eq\_diff\_in\_s\_sost := subs\left(\left\{u_i(0) = 0\right\}, eq\_diff\_in\_s\_sost\right)$

$$eq\_diff\_in\_s\_sost := 2\, Y_u(s) + 14\, Y_u(s)\, s - 14\, y_u(0) + 37\, Y_u(s)\, s^2 - 37\, \mathrm{D}(y_u)(0) - 37\, s\, y_u(0) + 46\, Y_u(s)\, s^3 - 46\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) - 46\, s\, \mathrm{D}(y_u)(0) - 46\, s^2\, y_u(0) + 28\, Y_u(s)\, s^4 - 28\, \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) - 28\, s\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) - 28\, s^2\, \mathrm{D}(y_u)(0) - 28\, s^3\, y_u(0) + 8\, Y_u(s)\, s^5 - 8\, \mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) - 8\, s\, \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) - 8\, s^2\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) - 8\, s^3\, \mathrm{D}(y_u)(0) - 8\, s^4\, y_u(0) = 24\, U_i(s)\, s - 8\, U_i(s) \quad \mathbf{(33)}$$

Mi ricavo la soluzione Y_u(s) dall'equazione ottenuta nella (34)

$solve\left(eq\_diff\_in\_s\_sost, Y_u(s)\right)$

$$\frac{1}{8\, s^5 + 28\, s^4 + 46\, s^3 + 37\, s^2 + 14\, s + 2}\left(8\, s^4\, y_u(0) + 8\, s^3\, \mathrm{D}(y_u)(0) + 28\, s^3\, y_u(0) + 8\, s^2\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 28\, s^2\, \mathrm{D}(y_u)(0) + 46\, s^2\, y_u(0) + 28\, s\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 8\, s\, \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) + 46\, s\, \mathrm{D}(y_u)(0) + 37\, s\, y_u(0) + 24\, U_i(s)\, s + 46\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 28\, \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) + 8\, \mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) + 37\, \mathrm{D}(y_u)(0) + 14\, y_u(0) - 8\, U_i(s)\right) \quad \mathbf{(34)}$$

Adesso, con il comando "collect", separo la componente forzata Y_u(s) dalla risposta libera:

$collect\left(\mathbf{(34)}, U_i(s)\right)$

$$\frac{(24\, s - 8)\, U_i(s)}{8\, s^5 + 28\, s^4 + 46\, s^3 + 37\, s^2 + 14\, s + 2} + \frac{1}{8\, s^5 + 28\, s^4 + 46\, s^3 + 37\, s^2 + 14\, s + 2}\left(8\, s^4\, y_u(0) + 8\, s^3\, \mathrm{D}(y_u)(0) + 28\, s^3\, y_u(0) + 8\, s^2\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 28\, s^2\, \mathrm{D}(y_u)(0) + 46\, s^2\, y_u(0) + 28\, s\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 8\, s\, \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) + 46\, s\, \mathrm{D}(y_u)(0) + 37\, s\, y_u(0) + 46\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 28\, \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) + 8\, \mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) + 37\, \mathrm{D}(y_u)(0) + 14\, y_u(0)\right) \quad \mathbf{(35)}$$

$Y_{uf} := s \rightarrow op(1, \mathbf{(35)})$

$$Y_{uf} := s \mapsto op\left(1, \frac{(24 \cdot s - 8) \cdot U_i(s)}{8 \cdot s^5 + 28 \cdot s^4 + 46 \cdot s^3 + 37 \cdot s^2 + 14 \cdot s + 2} + \frac{1}{8 \cdot s^5 + 28 \cdot s^4 + 46 \cdot s^3 + 37 \cdot s^2 + 14 \cdot s + 2}\left(8 \cdot s^4 \cdot y_u(0) + 8 \cdot s^3 \cdot \mathrm{D}(y_u)(0) + 28 \cdot s^3 \cdot y_u(0)\right.\right. \quad \mathbf{(36)}$$

$$+ 8\cdot s^2\cdot \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 28\cdot s^2\cdot \mathrm{D}(y_u)(0) + 46\cdot s^2\cdot y_u(0) + 28\cdot s\cdot \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 8\cdot s \cdot \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) + 46\cdot s\cdot \mathrm{D}(y_u)(0) + 37\cdot s\cdot y_u(0) + 46\cdot \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 28\cdot \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) + 8 \cdot \mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) + 37\cdot \mathrm{D}(y_u)(0) + 14\cdot y_u(0)\Big)\Big)$$

$Y_{uf}(s)$

$$\frac{(24\,s-8)\,U_i(s)}{8\,s^5+28\,s^4+46\,s^3+37\,s^2+14\,s+2} \tag{37}$$

$Y_{ul} := s \rightarrow op(2, \mathbf{(35)})$

$$Y_{ul} := s \mapsto op\Bigg(2, \frac{(24\cdot s-8)\cdot U_i(s)}{8\cdot s^5+28\cdot s^4+46\cdot s^3+37\cdot s^2+14\cdot s+2} + \frac{1}{8\cdot s^5+28\cdot s^4+46\cdot s^3+37\cdot s^2+14\cdot s+2}\Big(8\cdot s^4\cdot y_u(0) + 8\cdot s^3\cdot \mathrm{D}(y_u)(0) + 28\cdot s^3\cdot y_u(0) + 8\cdot s^2\cdot \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 28\cdot s^2\cdot \mathrm{D}(y_u)(0) + 46\cdot s^2\cdot y_u(0) + 28\cdot s\cdot \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 8\cdot s \cdot \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) + 46\cdot s\cdot \mathrm{D}(y_u)(0) + 37\cdot s\cdot y_u(0) + 46\cdot \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 28\cdot \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) + 8 \cdot \mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) + 37\cdot \mathrm{D}(y_u)(0) + 14\cdot y_u(0)\Big)\Bigg) \tag{38}$$

$Y_{ul}(s)$

$$\frac{1}{8\,s^5+28\,s^4+46\,s^3+37\,s^2+14\,s+2}\Big(8\,s^4\,y_u(0) + 8\,s^3\,\mathrm{D}(y_u)(0) + 28\,s^3\,y_u(0) + 8\,s^2\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 28\,s^2\,\mathrm{D}(y_u)(0) + 46\,s^2\,y_u(0) + 28\,s\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 8\,s\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) + 46\,s\,\mathrm{D}(y_u)(0) + 37\,s\,y_u(0) + 46\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 28\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) + 8\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) + 37\,\mathrm{D}(y_u)(0) + 14\,y_u(0)\Big) \tag{39}$$

$eval\left(Y_{uf}(s),\, U_i(s) = \frac{1}{s}\right)$

$$\frac{24\,s-8}{(8\,s^5+28\,s^4+46\,s^3+37\,s^2+14\,s+2)\,s} \tag{40}$$

Devo prendere la risposta al gradino nel dominio 's' e sottrarre la componente di regime (che sarà, il gradino di ampiezza (-4))

$Y_{trg} := s \rightarrow simplify\left(\mathbf{(40)} - \left(\frac{-4}{s}\right)\right)$

$$Y_{trg} := s \mapsto simplify\left(\frac{24\cdot s-8}{(8\cdot s^5+28\cdot s^4+46\cdot s^3+37\cdot s^2+14\cdot s+2)\cdot s} + \frac{4}{s}\right) \tag{41}$$

$Y_{trg}(s)$

$$\frac{32\,s^4+112\,s^3+184\,s^2+148\,s+80}{(1+2\,s)^3\,(s^2+2\,s+2)} \tag{42}$$

$convert(\mathbf{(42)}, parfrac)$

$$\frac{4\,s+16}{5\,(s^2+2\,s+2)}+\frac{32}{(1+2\,s)^3}+\frac{32}{5\,(1+2\,s)} \tag{43}$$

$Y_{trg}(s)+Y_{ul}(s)$

$$\frac{32\,s^4+112\,s^3+184\,s^2+148\,s+80}{(1+2\,s)^3\,(s^2+2\,s+2)}+\frac{1}{8\,s^5+28\,s^4+46\,s^3+37\,s^2+14\,s+2}\big(8\,s^4\,y_u(0) + 8\,s^3\,\mathrm{D}(y_u)(0)+28\,s^3\,y_u(0)+8\,s^2\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0)+28\,s^2\,\mathrm{D}(y_u)(0)+46\,s^2\,y_u(0) + 28\,s\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0)+8\,s\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0)+46\,s\,\mathrm{D}(y_u)(0)+37\,s\,y_u(0)+46\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 28\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0)+8\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0)+37\,\mathrm{D}(y_u)(0)+14\,y_u(0)\big) \tag{44}$$

La somma della risposta transitoria al gradino e della risposta libera (funzione dei parametri "condizioni iniziali"), fornisce la RISPOSTA TRANSITORIA COMPLESSIVA
La risposta transitoria complessiva deve essere IDENTICAMENTE NULLA, scegliendo opportunamente le condizioni iniziali.
Nel dominio 's' la risposta transitoria è una frazione ed essa sarà identicamente nulla se identicamente nullo sarà il suo numeratore! Devo quindi estrarre il numeratore dalla (45)

$numer\big(Y_{trg}(s)+Y_{ul}(s)\big)$

$$160+1416\,s+270\,s\,y_u(0)+610\,s\,\mathrm{D}(y_u)(0)+1128\,s^2\,y_u(0)+700\,s\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 2069\,s^2\,\mathrm{D}(y_u)(0)+2713\,s^3\,y_u(0)+408\,s\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0)+2110\,s^2\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 3812\,s^3\,\mathrm{D}(y_u)(0)+4204\,s^4\,y_u(0)+17840\,s^5+17488\,s^4+11956\,s^3+5400\,s^2 + 16\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0)+56\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0)+92\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0)+74\,\mathrm{D}(y_u)(0)+28\,y_u(0) + 64\,y_u(0)\,s^9+448\,y_u(0)\,s^8+64\,\mathrm{D}(y_u)(0)\,s^8+1520\,y_u(0)\,s^7+448\,\mathrm{D}(y_u)(0)\,s^7 + 64\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0)\,s^7+3168\,y_u(0)\,s^6+1520\,\mathrm{D}(y_u)(0)\,s^6+448\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0)\,s^6 + 64\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0)\,s^6+64\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0)\,s^5+4412\,y_u(0)\,s^5+3168\,\mathrm{D}(y_u)(0)\,s^5 + 1520\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0)\,s^5+448\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0)\,s^5+224\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0)\,s^4+4300\,\mathrm{D}(y_u)(0)\,s^4 + 2872\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0)\,s^4+1152\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0)\,s^4+368\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0)\,s^3+3264\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0)\,s^3 + 1584\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0)\,s^3+296\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0)\,s^2+1148\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0)\,s^2+112\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0)\,s + 256\,s^9+1792\,s^8+6080\,s^7+12672\,s^6 \tag{45}$$

$coeff\big(numer\big(Y_{trg}(s)+Y_{ul}(s)\big),s,0\big)$

$$160+16\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0)+56\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0)+92\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0)+74\,\mathrm{D}(y_u)(0)+28\,y_u(0) \tag{46}$$

$coeff\big(numer\big(Y_{trg}(s)+Y_{ul}(s)\big),s,1\big)$

$$1416+270\,y_u(0)+610\,\mathrm{D}(y_u)(0)+700\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0)+408\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0)+112\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) \tag{47}$$

$coeff\big(numer\big(Y_{trg}(s)+Y_{ul}(s)\big),s,2\big)$

$$1128\,y_u(0)+2069\,\mathrm{D}(y_u)(0)+2110\,\mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0)+5400+296\,\mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) + 1148\,\mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) \tag{48}$$

$coeff\big(numer\big(Y_{trg}(s)+Y_{ul}(s)\big),s,3\big)$

$$2713\, y_u(0) + 3812\, \mathrm{D}(y_u)(0) + 11956 + 368\, \mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) + 3264\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 1584\, \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) \tag{49}$$

$coeff\left(numer\left(Y_{trg}(s) + Y_{ul}(s)\right), s, 4\right)$

$$4204\, y_u(0) + 17488 + 224\, \mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) + 4300\, \mathrm{D}(y_u)(0) + 2872\, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) + 1152\, \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) \tag{50}$$

$soluzione\_c\_i\_gradino := solve\left(\left\{coeff\left(numer\left(Y_{trg}(s) + Y_{ul}(s)\right), s, 0\right) = 0, coeff\left(numer\left(Y_{trg}(s) + Y_{ul}(s)\right), s, 1\right) = 0, coeff\left(numer\left(Y_{trg}(s) + Y_{ul}(s)\right), s, 2\right) = 0, coeff\left(numer\left(Y_{trg}(s) + Y_{ul}(s)\right), s, 3\right) = 0, coeff\left(numer\left(Y_{trg}(s) + Y_{ul}(s)\right), s, 4\right) = 0\right\}, \left\{y_u(0), \mathrm{D}(y_u)(0), \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0), \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0), \mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0)\right\}\right)$

$$soluzione\_c\_i\_gradino := \left\{y_u(0) = -4, \mathrm{D}(y_u)(0) = 0, \mathrm{D}^{(2)}(y_u)(0) = 0, \mathrm{D}^{(3)}(y_u)(0) = 0, \mathrm{D}^{(4)}(y_u)(0) = -3\right\} \tag{51}$$

PUNTO B

Il **Diagramma di Bode** è una rappresentazione grafica separata della risposta in frequenza di un sistema lineare tempo-invariante. Con la rappresentazione tramite il Diagramma di Bode si costruiscono due grafici che rappresentano rispettivamente il **modulo** e la **fase** della risposta in frequenza **G(jw)**.

Scriviamo la nostra funzione di trasferimento:

$G := s \rightarrow \dfrac{40\,(30\, s + 1)}{s^2 \cdot (s^2 - 4\, s + 4)}$

$$G := s \mapsto \frac{1200 \cdot s + 40}{s^2 \cdot (s^2 - 4 \cdot s + 4)} \tag{52}$$

$G(s)$

$$\frac{1200\, s + 40}{s^2\, (s^2 - 4\, s + 4)} \tag{53}$$

Calcolo i poli e gli zeri della Funzione di Trasferimento

$poliG0 := [solve(denom(G(s)), s)]$

$$poliG0 := [0, 0, 2, 2] \tag{54}$$

$zeri := [solve(numer(G(s)), s)]$

$$zeri := \left[-\frac{1}{30}\right] \tag{55}$$

$num\_poliinstabili := 2$

$$num\_poliinstabili := 2 \tag{56}$$

$\mu := numboccur(poliG0, 0)$

$$\mu := 2 \tag{57}$$

μ indica la molteplicità dei poli nell'origine.

$$2 \tag{58}$$

Quindi, ricapitolando, il sistema presenta: due poli reali e coincidenti stabili in 2, due poli semplici nell'origine e uno zero a fase minima in -1/30.

Elimino i poli nell'origine dalla lista dei poli per poter calcolare le pulsazioni di taglio

$poliG := remove(x \to x = 0, poliG0)$

$$poliG := [2, 2] \tag{59}$$

Inizio a calcolare le pulsazioni di taglio (che non sono altro che i valori assoluti dei poli e degli zeri) della funzione di Trasferimento, iniziando dalle pulsazioni di taglio degli zeri, che indico con la lettera greca omega.

$\Omega_t := \mathrm{abs}\sim(zeri)$

$$\Omega_t := \left[\frac{1}{30}\right] \tag{60}$$

Quelle dei poli invece:

$\omega_t := \mathrm{abs}\sim(poliG)$

$$\omega_t := [2, 2] \tag{61}$$

Determino ora il numero di zeri ed il numero di poli (al netto degli effetti integrali) della funzione di trasferimento

$nz := numelems(zeri)$

$$nz := 1 \tag{62}$$

$np := numelems(poliG)$

$$np := 2 \tag{63}$$

Costruisco ora la funzione che approssima i moduli (tale funzione e' unica per polo e zero, dipende dal segno considerato:se è zero, il segno è positivo, se è polo il segno è negativo).

Inoltre questa funzione sarà così costruita:

Nel primo campo avremo l'approssimazione in bassa frequenza dell'elemento dinamico, nel secondo campo invece avremo la zona di alta frequenza del modulo, cioè l'approssimazione in alta frequenza.

Inoltre ricordo che ϖ indica la pulsazione mentre ϖc indica la pulsazione di taglio.

$$f := (\omega, \omega_c) \to \begin{cases} 0 & \dfrac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 20 \cdot \log10\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right) & \dfrac{\omega}{\omega_c} \geq 1 \end{cases}$$

$$f := (\omega, \omega_c) \mapsto \begin{cases} 0 & \dfrac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 20 \cdot \log10\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right) & 1 \leq \dfrac{\omega}{\omega_c} \end{cases} \tag{64}$$

associo la funzione "vera" che calcola il modulo. In pratica calcola l'errore che si commette nell'approssimare il modulo con i suoi asintoti.

$$f_0 := (\omega, \omega_c) \to 20 \cdot \log 10\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right)$$

$$f_0 := (\omega, \omega_c) \mapsto 20 \cdot \log 10\left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}\right) \tag{65}$$

Adesso bisogna costruire una funzione che mi serve per approssimare la fase, questa è anche una funzione a tratti che però contiene 3 elementi: bassa frequenza, media frequenza ed alta frequenza. In particolare: la bassa frequenza restituisce 0 e la bassa frequenza delle fasi di e che è 1/10. La media frequenza invece è un segmento di pendenza Pi/4 rad/dec mentre l'alta frequenza è Pi/2 valutato per tutte le pulsazioni che valutate rispetto alle pulsazioni di taglio sono maggiori o uguali di 10.

$$g := (\omega, \omega_c) \to \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{Pi}{4} \cdot \log 10\left(\frac{\omega}{\frac{\omega_c}{10}}\right) & \frac{1}{10} \le \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ \frac{Pi}{2} & \frac{\omega}{\omega_c} \ge 10 \end{cases}$$

$$g := (\omega, \omega_c) \mapsto \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi \cdot \log 10\left(\frac{10 \cdot \omega}{\omega_c}\right)}{4} & \frac{1}{10} \le \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ \frac{\pi}{2} & 10 \le \frac{\omega}{\omega_c} \end{cases} \tag{66}$$

Adesso gli associo la funzione effettiva delle fasi:

$$g_0 := (\omega, \omega_c) \to \arg\left(1 + I \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right)$$

$$g_0 := (\omega, \omega_c) \mapsto arg\left(1 + \frac{I \cdot \omega}{\omega_c}\right) \tag{67}$$

Ora bisogna calcolare il guadagno di Bode. La teoria ci dice che il guadagno di bode è pari al limite di s^μ· G(s) :

$$K_b := \lim_{s \to 0} s^2 \cdot G(s)$$

$$K_b := 10 \tag{68}$$

Faccio uso delle approssimazioni asintotiche per calcolarmi la funzione modulo complessiva ed è così composta:
il contributo del valore assoluto di Kb (20 log10(|Kb|)) - il contributo dei poli nell'origine che sappiamo che è una retta di pendenza (-μ·20·log10(ϖ)) che passa per l'origine della pulsazione + la funzione prototipo f (seleziono per ciascun elemento appartenente ad Ωt la pulsazione di taglio e costruisco l'addendo che vado a sommare nz volte) - la stessa cosa con la sommatoria che va da 1 a np e gli elementi appartenenti ad ϖt.

$$modulo := \omega \rightarrow 20 \cdot \log10(|K_b|) - \mu \cdot 20 \cdot \log10(\omega) + \sum_{i=1}^{nz} f(\omega, Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} f(\omega, omega_t[i])$$

$$modulo := \omega \mapsto 20 \cdot \log10(|K_b|) - 20 \cdot \mu \cdot \log10(\omega) + \left(\sum_{i=1}^{nz} f\left(\omega, \Omega_{t_i}\right)\right) - \left(\sum_{i=1}^{np} f\left(\omega, \omega_{t_i}\right)\right) \tag{69}$$

Ora faccio la stessa cosa per calcolarmi la funzione fase complessiva. La funzione fase sarà cosi composta: ad omega devo associare l'argomento del Kb che si costruisce facendo (1- sgn(Kb)/2·(Pi) - il contributo dei poli nell'origine che è (-μ·PI/2) + gli zeri nella quale utilizziamo la funzione sgn che ci indica se si attiverà un contributo in anticipo o in ritardo - la stessa cosa per i poli.

$$fase := \omega \rightarrow \frac{1 - \mathrm{signum}(K_b)}{2} \cdot \mathrm{Pi} - \frac{\mu \cdot \mathrm{Pi}}{2} + \sum_{i=1}^{nz} \mathrm{signum}(-zeri[i]) \cdot g(\omega, Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} \mathrm{signum}(-poliG[i]) \cdot g(\omega, omega_t[i])$$

$$fase := \omega \mapsto \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{signum}(K_b)}{2}\right) \cdot \pi - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + \left(\sum_{i=1}^{nz} \mathrm{signum}(-zeri_i) \cdot g\left(\omega, \Omega_{t_i}\right)\right) - \left(\sum_{i=1}^{np} \mathrm{signum}(-poliG_i) \cdot g\left(\omega, \omega_{t_i}\right)\right) \tag{70}$$

Ora mi calcolo le funzioni effettive:

$$modulovero := \omega \rightarrow 20 \cdot \log10(|K_b|) - \mu \cdot 20 \cdot \log10(\omega) + \sum_{i=1}^{nz} f_0(\omega, \mathrm{Omega}_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} f_0(\omega, \mathrm{omega}_t[i])$$

$$modulovero := \omega \mapsto 20 \cdot \log10(|K_b|) - 20 \cdot \mu \cdot \log10(\omega) + \left(\sum_{i=1}^{nz} f_0\left(\omega, \Omega_{t_i}\right)\right) - \left(\sum_{i=1}^{np} f_0\left(\omega, \omega_{t_i}\right)\right) \tag{71}$$

$$fasevera := \omega \rightarrow \frac{1 - \mathrm{signum}(K_b)}{2} \cdot \mathrm{Pi} - \frac{\mu \cdot \mathrm{Pi}}{2} + \sum_{i=1}^{nz} \mathrm{signum}(-zeri[i]) \cdot g_0(\omega, Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} \mathrm{signum}(-poliG[i]) \cdot g_0(\omega, omega_t[i])$$

$$fasevera := \omega \mapsto \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{signum}(K_b)}{2}\right) \cdot \pi - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + \left(\sum_{i=1}^{nz} \mathrm{signum}(-zeri_i) \cdot g_0\left(\omega, \Omega_{t_i}\right)\right) \tag{72}$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{np} \operatorname{signum}\left(-poliG_i\right) \cdot g_0\left(\omega, \omega_{t_i}\right)\right)$$

Adesso posso rappresentare il diagramma dei moduli approssimato ma prima di far questo, devo determinare la pulsazione di taglio piu' a bassa ed alta frequenza sui moduli

$$omegaleftmodulo := \min\left(\min\left(\omega_t\right), \min\left(\Omega_t\right)\right)$$

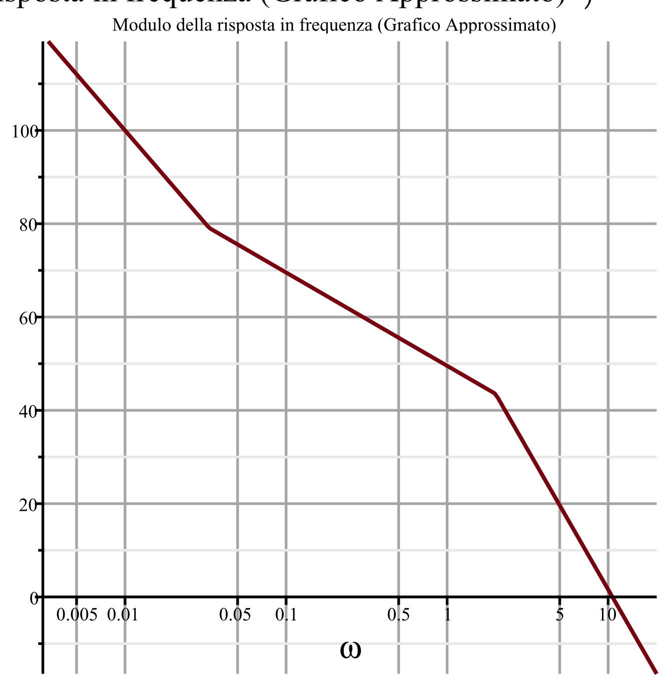
$$omegaleftmodulo := \frac{1}{30} \tag{73}$$

$$omegarightmodulo := \max\left(\max\left(\mathrm{omega}_t\right), \max\left(\mathrm{Omega}_t\right)\right)$$

$$omegarightmodulo := 2 \tag{74}$$

Scriviamo il comando che ci restituisce il grafico e scegliamo appositamente di dimensionare le ascisse cosi: prendiamo una decade prima della pulsazione di taglio più bassa e la pulsazione destra la prendiamo facendo 10 volte la pulsazione più alta.

$$semilogplot\left(modulo(\omega), \omega = 0.1 \cdot omegaleftmodulo \,..\, 10 \cdot omegarightmodulo, axis = [gridlines], title = \text{"Modulo della risposta in frequenza (Grafico Approssimato)"}\right)$$



Adesso devo rappresentare il diagramma delle fasi. Per poterlo rappresentare mi devo prima calcolare le pulsazioni sinistra e destra che mi servono per dimensionare l'asse delle ascisse, cioè devo prendere tutte le pulsazioni che sono un decade prima e lo faccio sia per i poli che per gli zeri

$$omegaleftfase := \min\left(\min\left(\frac{\omega_t}{10}\right), \min\left(\frac{\Omega_t}{10}\right)\right)$$

$$omegaleftfase := \frac{1}{300} \tag{75}$$

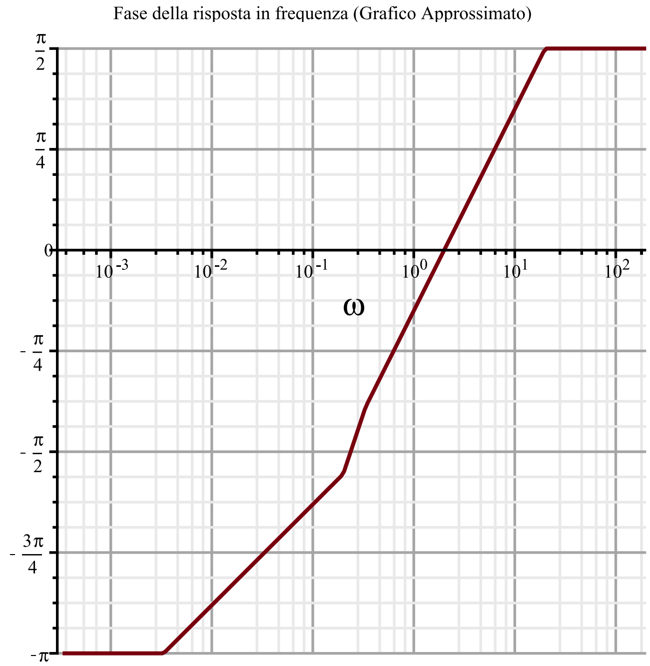
Mentre qui sono tutte pulsazioni una decade dopo:

$$omegarightfase := \max\left(\max\left(10 \cdot \mathrm{omega}_t\right), \max\left(10 \cdot \mathrm{Omega}_t\right)\right)$$

$$omegarightfase := 20 \tag{76}$$

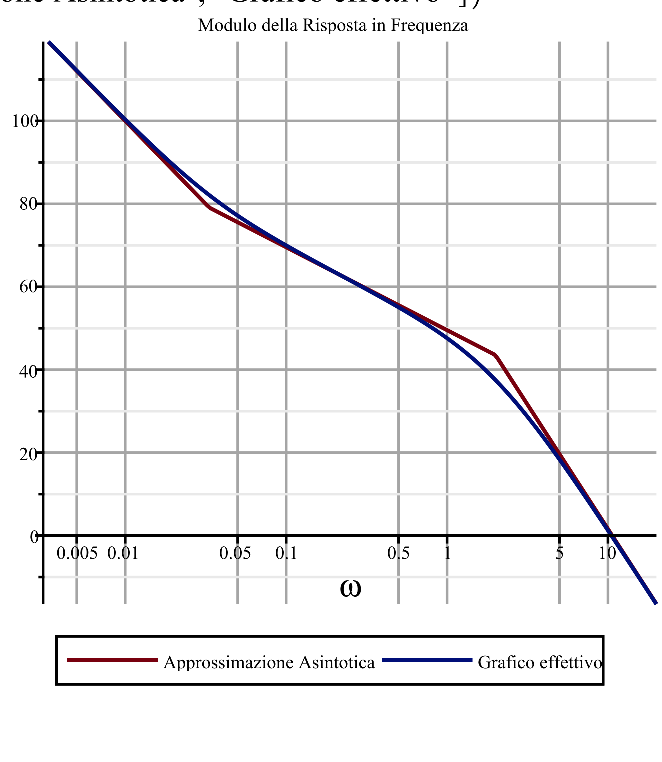
Con l'espressione tickmarks e inserendo all'interno [default, piticks] faccio in modo che sull'asse delle ordinate siano rappresentati i radianti mentre sull'asse delle ascisse resta tutto da "default".

$$semilogplot\left(fase(\omega), \omega = 0.1 \cdot omegaleftfase\,..10 \cdot omegarightfase, axis = [gridlines], tickmarks = [default, piticks], title = \text{"Fase della risposta in frequenza (Grafico Approssimato)"}\right)$$



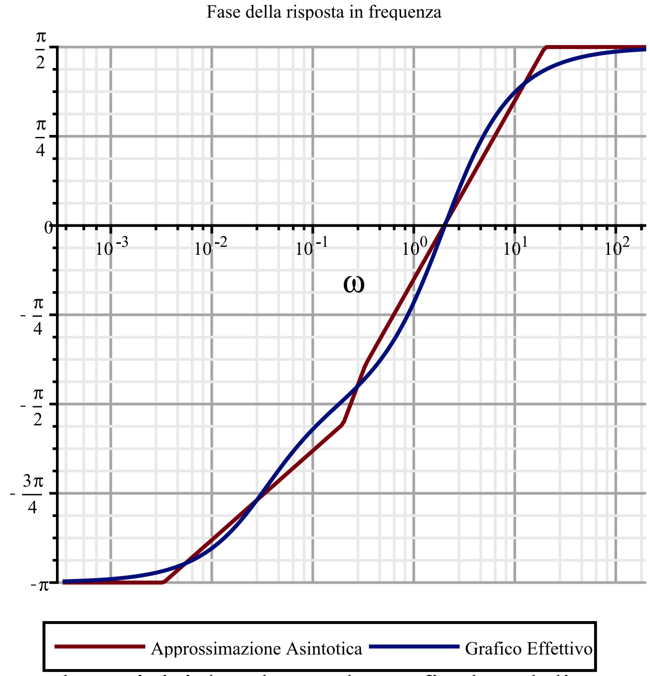
Rappresentiamo sullo stesso grafico il diagramma del modulo approssimato e il diagramma del modulo effettivo.

$$semilogplot\left([modulo(\omega), modulovero(\omega)], \omega = 0.1 \cdot omegaleftmodulo\,..\,10 \cdot omegarightmodulo, axis = [gridlines], title = \text{"Modulo della Risposta in Frequenza"}, legend = [\text{"Approssimazione Asintotica"}, \text{"Grafico effettivo"}]\right)$$



Faccio la stessa cosa per il diagramma delle fasi, ci aspettiamo che si noti ancora di più la differenza. Cioè qui si nota di più che le spezzate sono approssimazioni asintotiche.

$semilogplot([fase(\omega), fasevera(\omega)], \omega = 0.1 \cdot omegaleftfase..10 \cdot omegarightfase, axis = [gridlines], tickmarks = [default, piticks], title = \text{"Fase della risposta in frequenza"}, legend = [\text{"Approssimazione Asintotica"}, \text{"Grafico Effettivo"}])$



Dobbiamo calcolarci la pendenza iniziale e la pendenza finale sul diagramma dei moduli. :
La pendenza iniziale si calcola facendo -20·μ, che è il numero di poli nell'origine, mentre per la finale bisogna fare la somma algebrica tra pendenza iniziale e 20·(numero zeri - il numero dei poli). Essendo che stiamo lavorando con una funzione propria (num zeri < num poli), ci aspettiamo una pendenza finale sicuramente negativa.

$Pendenza\_iniziale := -20 \cdot \mu$

$$Pendenza\_iniziale := -40 \tag{77}$$

$Pendenza\_finale := -20 \cdot \mu + 20 \cdot (nz - np)$

$$Pendenza\_finale := -60 \tag{78}$$

Adesso dobbiamo calcolarci la fase iniziale e la fase finale. Per fare questo dobbiamo separare i poli (al netto dei poli nell'origine) e gli zeri fra i fattori che si trovano nel semipiano sinistro ed i fattori che si trovano nel semipiano destro. Per far questo uso il comando numelems e remove, con la quale rimuovo gli zeri che si trovano nella parte negativa, poi così via..

$nzp := numelems(remove(x \rightarrow \mathrm{Re}(x) < 0, zeri))$

$$nzp := 0 \tag{79}$$

$nzm := numelems(remove(x \rightarrow \mathrm{Re}(x) > 0, zeri))$

$$nzm := 1 \tag{80}$$

$npp := numelems(remove(x \rightarrow \mathrm{Re}(x) < 0, poliG))$

$$npp := 2 \tag{81}$$

$npm := numelems(remove(x \rightarrow \mathrm{Re}(x) > 0, poliG))$

$$npm := 0 \tag{82}$$

La fase iniziale è data dal contributo del Kb + i contributi dei poli nell'origine, sarà negativa perchè abbiamo solo due poli nell'origine e il Kb è positivo.

$$Fase\_iniziale := \frac{(1 - \mathrm{signum}(K_b))}{2} \cdot \mathrm{Pi} - \frac{\mu \cdot \mathrm{Pi}}{2}$$

$$Fase\_iniziale := -\pi \tag{83}$$

Mentre la fase finale è data dalla somma algebrica tra fase iniziale e i contributi dei zeri e dei poli:

$$Fase\_finale := Fase\_iniziale + \frac{(nzm - nzp) \cdot \mathrm{Pi}}{2} - \frac{(npm - npp) \cdot \mathrm{Pi}}{2}$$

$$Fase\_finale := \frac{\pi}{2} \tag{84}$$

Ora dobbiamo calcolare lo Sfasamento relativo che sarebbe la differenza tra fase finale e fase iniziale.

$$Sfasamento\_Relativo := Fase\_finale - Fase\_iniziale$$

$$Sfasamento\_Relativo := \frac{3\,\pi}{2} \tag{85}$$

Dobbiamo calcolare le pendenze dei moduli e delle fasi negli intervalli intermedi. Per fare questo dobbiamo mettere insieme e in ordine le pulsazioni per le quali il diagramma dei moduli ed il diagramma delle fasi cambiano pendenza. Le pulsazioni si ottengono così: determiniamo gli intervalli di variazione di pendenza del diagramma dei moduli. Questi si ottengono prendendo le pulsazioni di taglio di zeri e dei poli, bisogna fare un unione, eliminando gli elementi comuni e poi riordinarle.

$$Puls\_taglio\_moduli := sort\left(convert\left(convert\left(\Omega_t, set\right) \mathbf{union}\ convert\left(\omega_t, set\right), list\right)\right)$$

$$Puls\_taglio\_moduli := \left[\frac{1}{30}, 2\right] \tag{86}$$

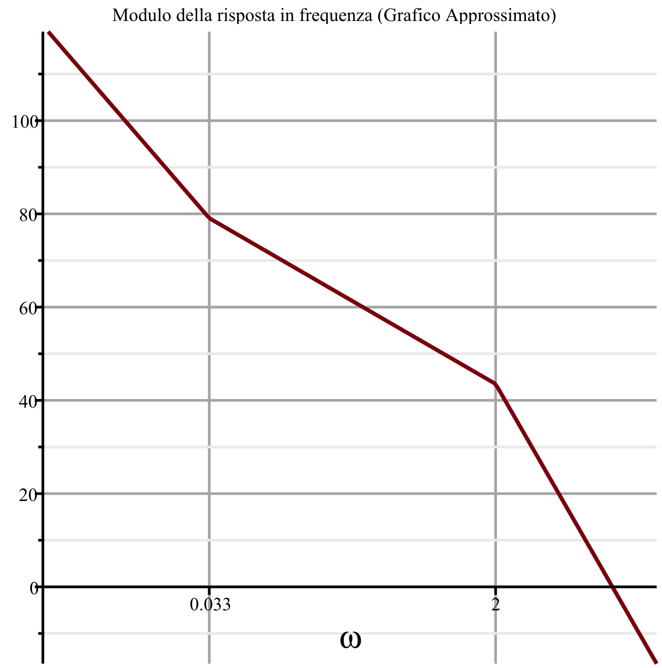
Ora lo faccio con le fasi: per farlo devo dapprima unire le pulsazioni una decade prima sugli zeri con le pulsazioni una decade prima sui poli con le pulsazioni di taglio una decade dopo degli zeri e le pulsazioni di taglio una decade dopo dei poli, ovviamente tutto convertito in insiemi (cosi da formare un inico insieme), poi la converto in lista e me lo restituisce riordinato

$$Puls\_taglio\_fasi := sort\left(convert\left(convert\left(\frac{\Omega_t}{10}, set\right) \mathbf{union}\ convert\left(\frac{\omega_t}{10}, set\right) \mathbf{union}\ convert\left(10 \cdot \Omega_t, set\right) \mathbf{union}\ convert\left(10 \cdot \omega_t, set\right), list\right)\right)$$

$$Puls\_taglio\_fasi := \left[\frac{1}{300}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 20\right] \tag{87}$$

Ora ridisegno il diagramma dei moduli (solo sulle approssimazioni)

$$semilogplot(modulo(\omega), \omega = 0.1 \cdot omegaleftmodulo\, ..\, 10 \cdot omegarightmodulo, axis = [gridlines], tickmarks = [Puls\_taglio\_moduli, default], title = \text{"Modulo della risposta in frequenza (Grafico Approssimato)"})$$



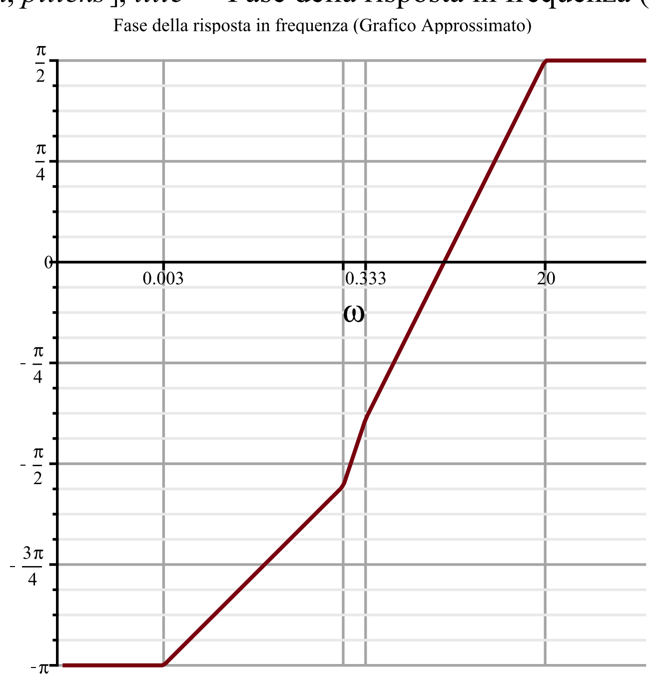
Abbiamo 3 fasce in cui la pendenza è costante, le 3 fasce sono individuate da bassa frequenza, 0.033 e 2.
Se vogliamo calcolare la pendenza nell'intervallo [0.033,2] possiamo fare così:
Prendiamo 2 numeri che stanno in quell'intervallo e mi calcolo la pendenza logaritmica sui moduli (lo faccio in formato numerico con evalf).
Prendo 1 e 1.5:

$$evalf\left(\frac{(modulo(1.5) - modulo(1))}{\log10(1.5) - \log10(1)}\right)$$

$$-19.9999999 \qquad \textbf{(88)}$$

Non dimentichiamo che è calcolata in dB/decade.

$semilogplot(fase(\omega), \omega = 0.1 \cdot omegaleftfase..10 \cdot omegarightfase, axis = [gridlines], tickmarks = [Puls\_taglio\_fasi, piticks], title =$ "Fase della risposta in frequenza (Grafico Approssimato)"$)$



PUNTO C

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$G := s \rightarrow \frac{1}{((0.2 \cdot s+1)^2 \cdot (2 \cdot s+1))}$$

$$G := s \mapsto \frac{1}{(0.2 \cdot s+1)^2 \cdot (2 \cdot s+1)} \tag{89}$$

mi viene chiesto di determinare un regolatore C(s) di struttura semplice che soddisfi queste specifiche:
1. errore di inseguimento al gradino inferiore al 30%
2. picco di risonanza $M_{r,\,dB} \le 3$ dB, banda passante $0.1 \le \varpi_{BW} \le 1$ $\frac{rad}{sec}$.

Ho appena detto che mi viene chiesto di determinare un regolatore C(s) di struttura semplice. Questo vuol dire che deve rispettare il PRINCIPIO DI PARSIMONIA ovvero che non deve avere elementi dinamici sovrabbondanti ma il minimo sindacale.
Il primo punto del sistema è un problema di precisione statica, diamo una definizione di precisione statica per capire di cosa stiamo parlando:
da un punto di vista matematico consiste nello studio delle seguenti grandezze:

$$\begin{cases} \lim_{t \to +\infty} y(t) \\ \lim_{t \to +\infty} e(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{t \to +\infty} u(t) \\ \end{cases}$$

Definiamo E(s):
$E := s \rightarrow S(s) \cdot R(s)$ con la funzione di sensitività pari a $S := s \rightarrow simplify\left(\frac{1}{1+L(s)}\right)$.
In questo caso avremo un ingresso polinomiale, più precisamente un gradino quindi sappiamo già che la trasformata di laplace del gradino unitario è pari ad 1/s, quindi avremo che R(s)=1/s.
Quindi quando si parla di errore di inseguimento al gradino abbiamo che:

$$\boldsymbol{\lim_{t \to +\infty} e(t) = e_{\infty}}$$

e sfruutando il teorema del valore finale avremo:
$\lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s \cdot 1}{C(s) \cdot G(s)} \cdot R(s)$ che quindi è uguale a:

$$\frac{R}{1+\lim_{s \to 0} L(s)}$$

l'errore di inseguimento quindi dipende dal guadagno statico della sensitività che è legato al guadagno statico della funzione di anello:

$$kp := \lim_{s \to 0} C(s) \cdot G(s) = \lim_{s \to 0} L(s)$$

L'errore di inseguimento al gradino è definito come problema di asservimento di posizione:

$$\lim_{t \to +\infty} e(t) = e_{\infty} = \frac{R}{1+k_p}$$

Nel senso pratico invece $e_{p,\infty}$ è finito solo se L(s) è tipo 0 e cioè se L(s) non ha effetti integrali(poli nell'origine).
Questa è già di tipo 0 quindi :

$C(s) := K$

Dobbiamo poi mettere $e_{p,\infty} < 30\,\% = 0,3 = \frac{3}{10}$.

$$e_{p,\infty} := \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + K \cdot G(s)} < \frac{3}{10} = \frac{1}{1+k} < \frac{3}{10}$$

e in conclusione avremo che K> 2.33.

Io scelgo K=2.5, quindi avrò C(s)=2.5.

Quesito c, punto 2

Parto dal presupposto che la pulsazione di attraversamento è un minorante della banda passante

$w_c \le w_{BW}$

quindi

$0.1 \le w_c \le \frac{1\ rad}{\sec}$

sul picco so che (ipotesi)

$\frac{\varpi_n^2}{s^2 + 2\,\delta\varpi_n s + \varpi_n^2}$ sia approssimabile da un sistema del II ordine con una coppia di poli complessi e coniugati.

So che il picco è legato a $M_r := \frac{1}{2\,\delta\sqrt{1-\delta^2}}$ e che è inversamente proporzionale al valore dello smorzamento.

Quindi se calcolo δ_{cr} tale che $M_{r,\,dB} := \left.\frac{1}{2\,\delta_{cr}\sqrt{1-\delta_{cr}^2}}\right|_{dB} = 3\ dB$

Quindi trovato questo valore, qualsiasi valore δ> δ_{cr} ha come conseguenza che $M_r < 3\ dB$.

Quindi determino il δ_{cr} con la funzione smorz_Mr e scrivo che $\delta_{cr} < 0.39$ e sfruttando $\delta = \frac{\phi_m{}^\circ}{100}$ determino il margine di fase $\phi_m > 39\,°$

Quindi abbiamo convertito le specifiche sul dominio della funzione.
Adesso scegliamo un omega nuovo e mi calcolo il modulo e il margine effettivo.

Il modulo è > 1 quindi bisogna attenuarlo, mentre il margine effettivo è maggiore del margine obiettivo quindi possiamo "lasciarlo così com'è". Ci serve una rete attenuatrice, e taup deve essere maggiore di tauz.

Facendo i dovuti calcoli mettendo m=1/modulo e theta=-13 avremo che effettivamente taup sarà più grande di tauz.

taup	38.0952
tauz	13.3892

A questo punto ci scriviamo la funzione attenuatrice che è pari a :

$$Cd := \frac{(1 + s \cdot tauz)}{(1 + s \cdot taup)}$$

Definisco la funzione di anello compensata

$Lthat := series(L, Cd)$;

Calcolo il sistema retroazionato

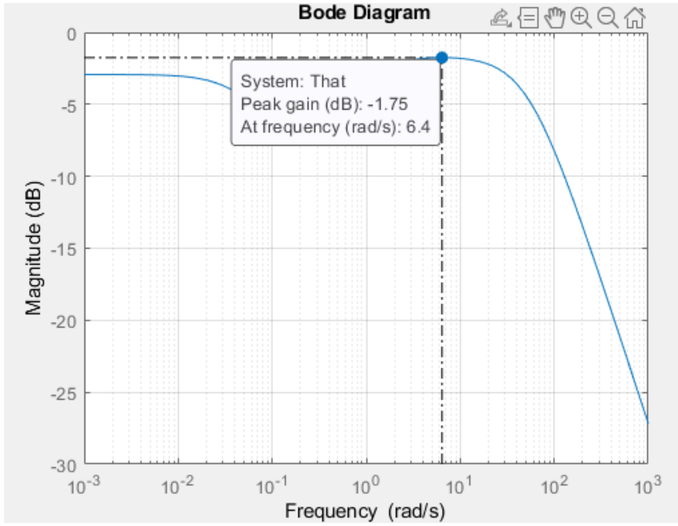
$That := feedback(Lhat, 1)$;

```
That =

    43.934 (s+0.07469) (s+0.5)
  --------------------------------
  (s+53.01) (s+0.9041) (s+0.04792)
```

Disegno solo il diagramma dei moduli della funzione:

bodemag(That);



E per ultimo vedo la banda passante se rientra nelle specifiche:

omegab=bandwidth(That);