Relazione Progetto deblur

Ilaria Palestini, Simone Sanna, Kusamdevi Lal

January 11, 2021

Introduzione Un'azienda vuole commercializzare un dispositivo di acquisizione immagini, del quale si sa che acquisisce con rumore Gaussiano additivo e sfocatura Gaussiana. Il modello è quindi:

$$b = Ax_{true} + \eta$$

Dove $A \in \mathbb{R}^{mn}$ è la matrice di sfocamento, $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ rumore additivo con varianza σ^2 incognita, $b \in \mathbb{R}^{mn}$ è la vettorizzazione dell'immagine corrotta (acquisita) $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x_{true} \in \mathbb{R}^{mn}$ è la vettorizzazione dell'immagine originale $X_{true} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1. Dopo aver importato le librerie necessarie, assegnare ad una variabile X l'immagine `cameraman`, ottenibile tramite la libreria `skimage.data` con il nome di `camera()`, effettuarne il `reshape` e assegnarlo alla variabile x.

2. Tramite la funzione `skimage.filters.gaussian` aggiungere sfocatura Gaussiana ad X per ottenere X_{blur}, che rappresenta il reshape ad immagine di $x_{blur} = Ax_{true}$, con A matrice di sfocatura.

3. Caricare su una variabile η, della stessa dimensione di X_{true}, una realizzazione di rumore gaussiano con varianza $\sigma = 0.1$ (fare riferimento alle slides per la formula). Utilizzare η per corrompere l'immagine X_{blur} e calcolare $B = X_{blur} + \eta$.
Visualizzare i risultati ottenuti.

Parte 1

Il problema di ricostruire l'immagine originale partendo dalla sua corruzione b, si può riscrivere come un problema di ottimizzazione

$$x^{\cdot} = \arg\min_x \frac{1}{2}||Ax - b||_2^2 \quad [0.1]$$

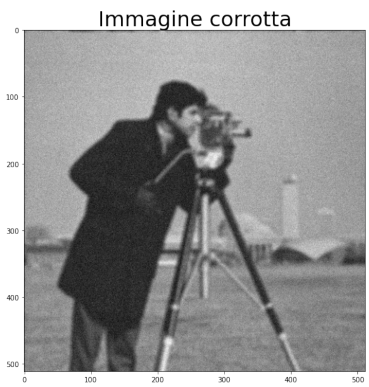
4. Risolvere il problema (1) utilizzando l'algoritmo di discesa del gradiente con scelta del passo tramite backtracking, ricordando che, se

$$f(x) = \frac{1}{2}||Ax - b||_2^2, \quad \nabla f(x) = A^T(Ax - b)$$

E chiamare la soluzione ottenuta x_{naive}.

5. Modificare l'algoritmo precedente a far restituire l'errore tra l'immagine ricostruita al passo k e l'immagine originale, per ogni k. Visualizzare il grafico dell'errore, e individuare per quale valore di k si ha semiconvergenza. Per tale valore, calcolare l'immagine ricostruita e chiamarla x_{Eta}.

Abbiamo quindi introdotto una variabile alpha che indica la lunghezza del passo e che viene ricalcolata ad ogni ciclo tramite la funzione next-step. La nuova variabile x1 serve a contenere la matrice modificata ad ogni passaggio, calcolata con l'aiuto della funzione gradf. Inoltre è presente il vettore err-y in cui vengono salvati gli errori tra matrice originale e quella dello step corrente per ogni iterazione, in modo da tener traccia dell'andamento dell'errore.
Tutto questo viene ripetuto finché le condizioni del while sono vere. E' stata inizializzata una variabile k, che tiene conto delle iterazioni fatte all'interno del ciclo e qualora questo valore dovesse superare il valore di maxit(numero arbitrario deciso inizialmente), il ciclo si interrompe. Viene controllato che il valore del gradiente calcolato non diventi troppo piccolo e si controlla che il gradiente non sia minore di zero. Si è notato che dopo una decina di iterazioni, l'errore comincia a crescere. E' stato quindi deciso di usare come valore maxit = 10.
Subito dopo abbiamo mostrato tramite l'uso di libreria grafica l'immagine corrotta e l'immagine appena ricostruita tramite l'algoritmo spiegato. Abbiamo anche aggiunto il grafico dell'errore che mostra come, aumentando le iterazioni, varia l'errore.



Parte 2

$$x^{*} = \arg\min_{x} \frac{1}{2}||Ax - b||_2^2 + \frac{\lambda}{2}||x||_2^2$$

con $\lambda > 0$ parametro di regolarizzazione.

6. Sfruttando il fatto che, se

$$f(x) = \frac{1}{2}||Ax - b||_2^2 + \frac{\lambda}{2}||x||_2^2, \quad \nabla f(x) = A^T(Ax - b) + \lambda x$$

Risolvere il problema (2) utilizzando l'algoritmo precedente per diversi valori di λ, e stimare il valore ottimale di λ che minimizzi l'errore tra l'immagine ricostruita e l'immagine originale (metodo euristico per il parametro di regolarizzazione). Chiamare x_λ tale soluzione.

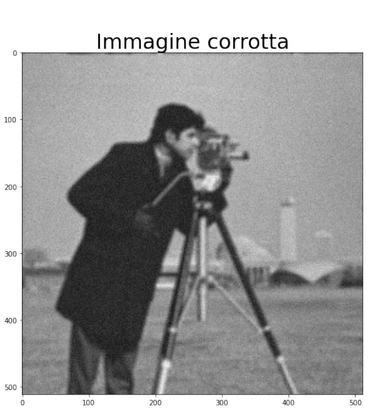
7. Stimare il valore ottimale di λ tramite principio di discrepanza, ovvero scegliere il più grande λ tale che

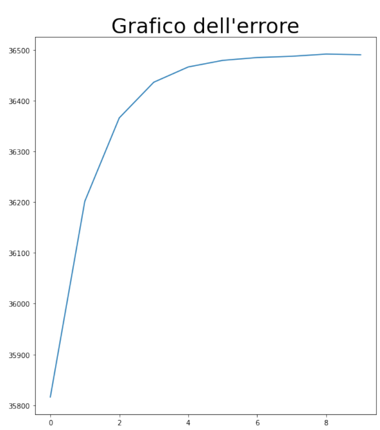
$$||Ax_\lambda - b||_2^2 \leq ||\eta||_2^2$$

Dove η è il rumore. Chiamare x_λ^{disc} la soluzione ottenuta dal λ calcolato con principio di discrepanza.

Per questa seconda parte invece, si doveva lavorare con un parametro di regolarizzazione, lambda. E' stato quindi inizializzato arbitrariamente un valore lambda. Sono state definite le funzioni del gradiente e di f come da consegna e abbiamo proceduto similarmente alla parte uno. Ci veniva quindi detto di dover trovare il lambda massimo che maggiorava il rumore eta. Viene così calcolata una prima soluzione x-lambda, che tiene conto del lambda deciso inizialmente. Dopodiché è stato implementato un ciclo esterno while che controlla questa condizione. In questo ciclo viene incrementato il valore lambda, che continua ad aumentare finché non x-lambda è minore di eta.

Allo stesso modo, si può vedere l'immagine iniziale, l'immagine con lambda e il grafico relativo all'errore.





Parte 3

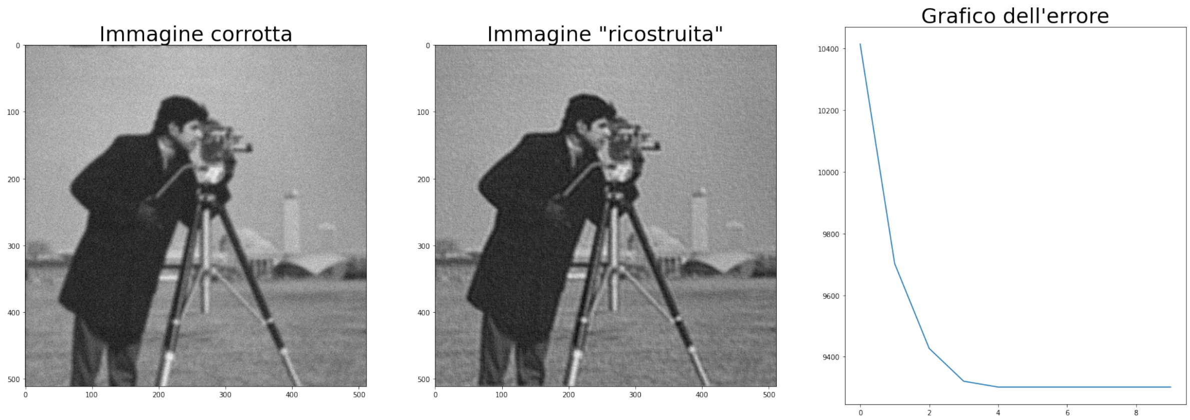
8. Ripetere quanto fatto nel punto 6, utilizzando la norma 1 come regolarizzatore, ovvero:

$$x^{\cdot} = \arg\min_{x} \frac{1}{2}||Ax - b||_2^2 + \lambda||x||$$

Dove la funzione obiettivo ha gradiente

$$A^T(Ax - b) + \lambda\, sign(x)$$

In questa terza parte è stato utilizzato come regolarizzatore la norma 1 e sono stati ripetuti gli stessi passi descritti nelle parti precedenti.



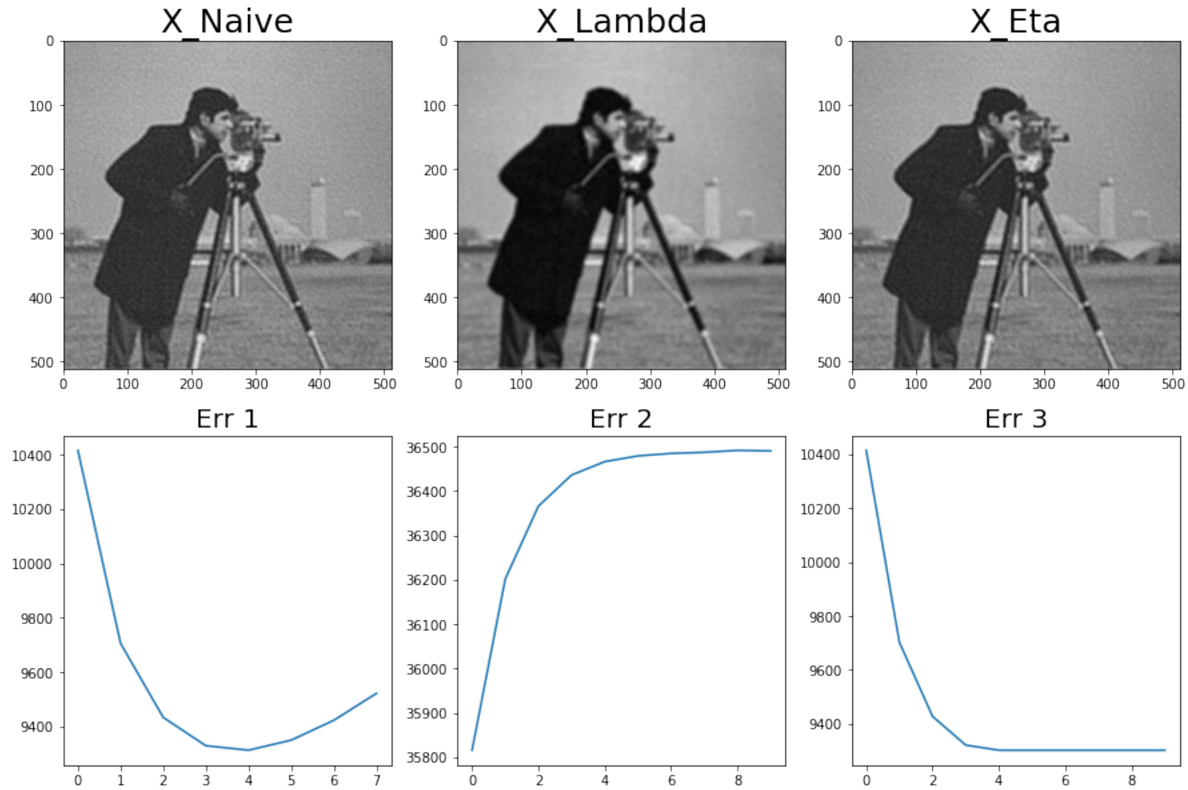
Analisi dei risultati

—

Per ognuna delle soluzioni trovate, calcolare:

* Errore relativo rispetto alla soluzione esatta x_{true}. * PSNR (Peak Signal to Noise Ratio).

Visualizzare le ricostruzioni ottenute con i vari metodi, e confrontare, sia numericamente che attraverso dei grafici, PSNR ed errore relativo ottenuti dalle ricostruzioni. Includere nel confronto, il valore delle metriche per l'immagine corrotta b.



I valori degli **errori** sono:

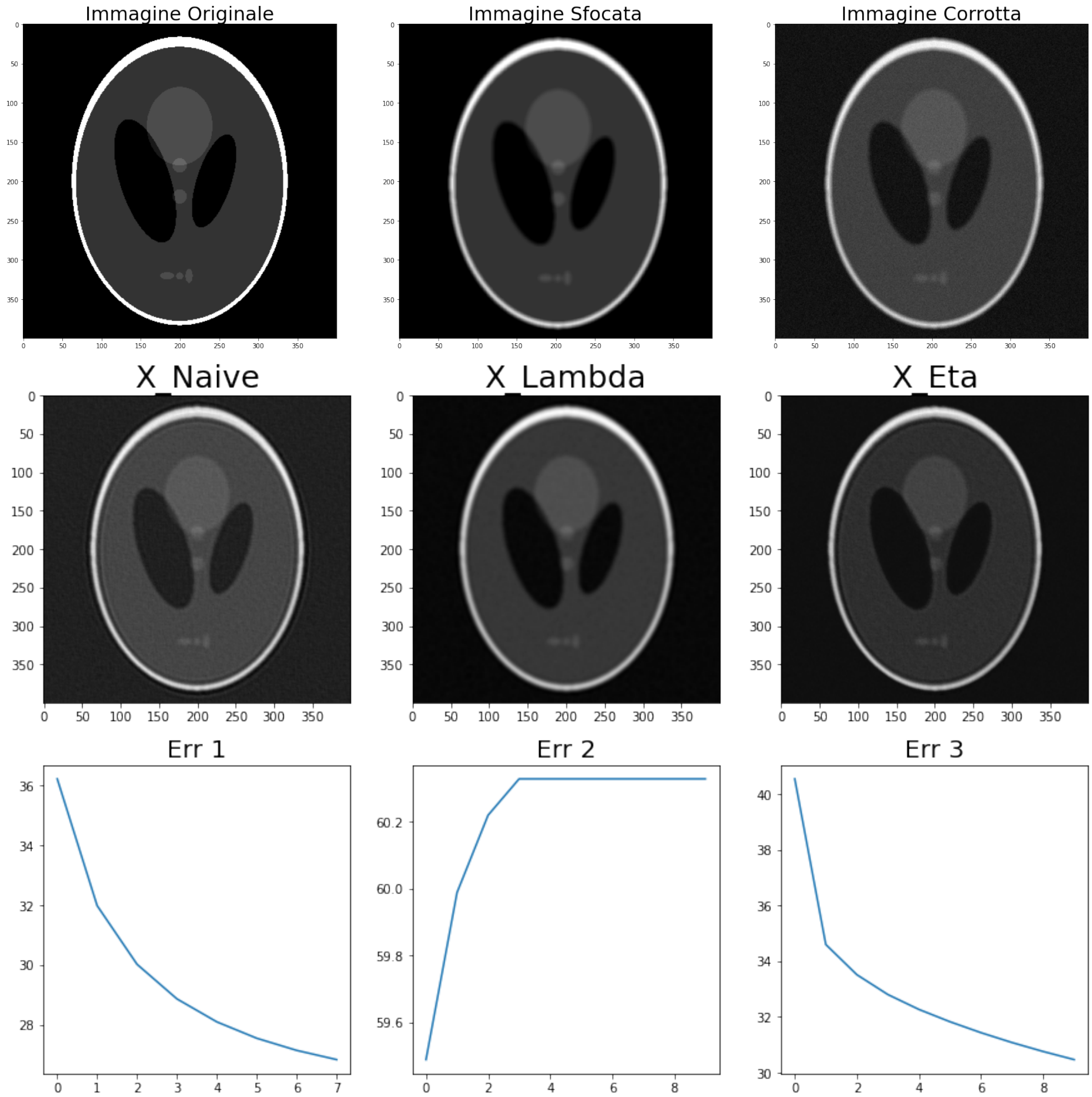
- X-Naive: 9521.760278662914
- x-lambda: 36490.30022474358
- x-Eta: 9301.785722014025

I valori dei **PSNR** sono:

- X-Naive: 22.741857959999333
- x-lambda: 11.072654097261704
- x-Eta: 22.944876212449184

Guardando i valori dei PSNR si può concludere che il primo metodo risulta essere migliore rispetto al secondo, perché X-Naive è più grande rispetto a x-lambda e possiamo dire che il x-Eta, risulta essere ancora meglio rispetto sia ad X-Naive che ad x-lambda.
Il metodo che pare essere il migliore per la ricostruzione dell'immagine è quello che utilizza la norma 1 come regolarizzatore.

Immagini Test In questa sezione si mostrano alcuni risultati avuti su diverse immagini usate.



I valori degli **errori** sono:

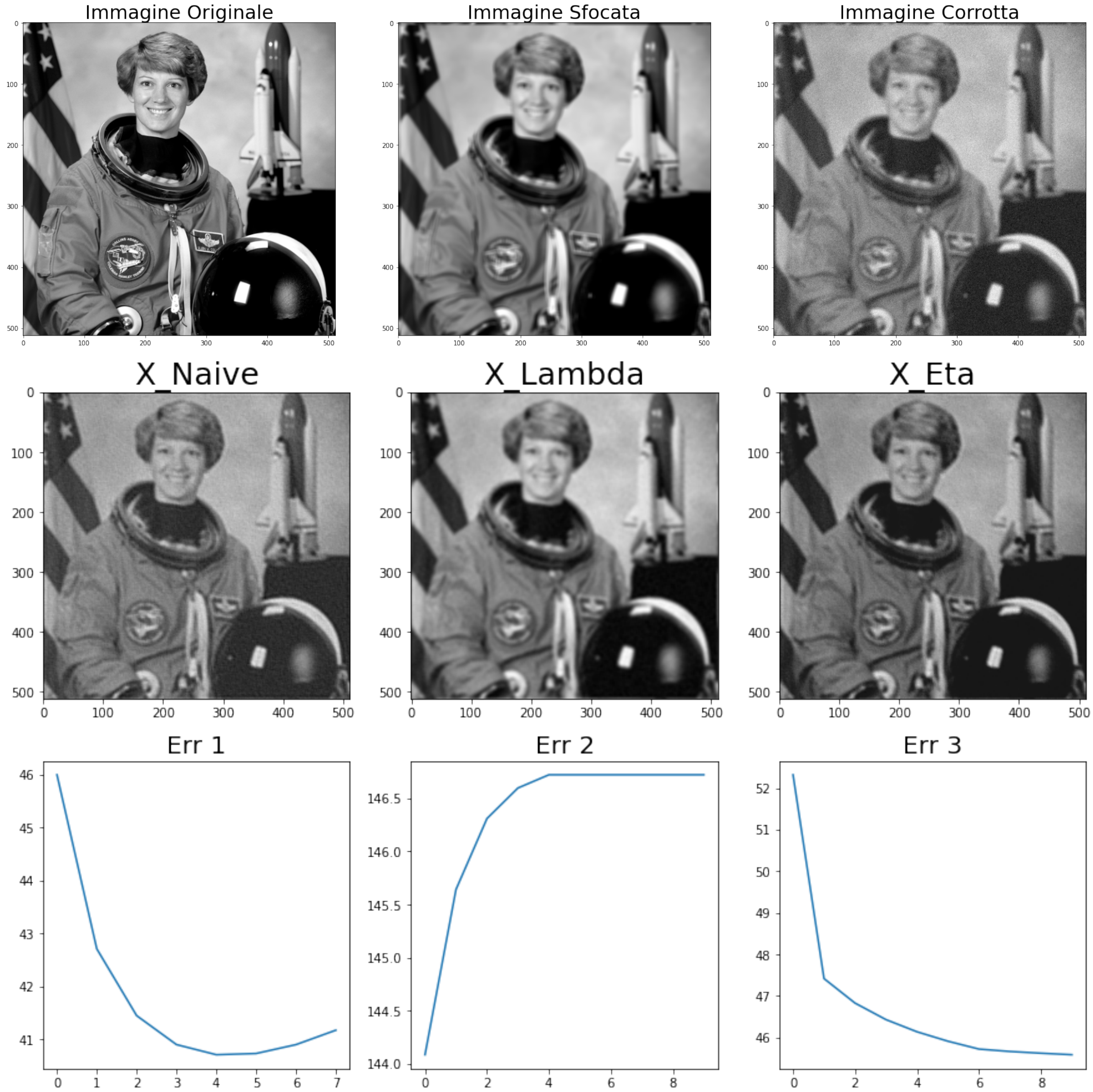
- X-Naive: 26.844634524294232
- x-lambda: 60.32891093025889
- x-Eta: 30.466961901024472

I valori dei **PSNR** sono:

- X-Naive: 71.59485352230799
- x-lambda: 64.56149372693714
- x-Eta: 70.49542044556904

In questo caso si può dire che il primo metodo risulta essere migliore in confronto agli altri due.

Immagine fotografica



I valori degli **errori** sono:

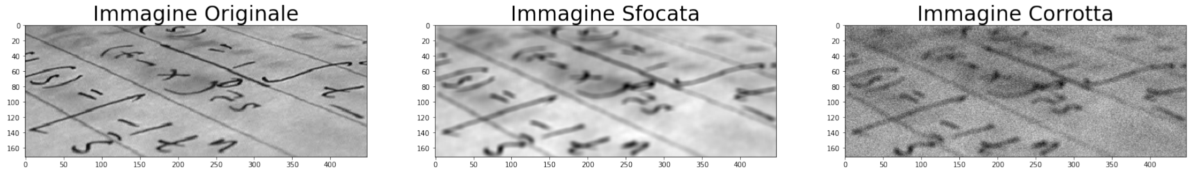
- X-Naive: 41.170227427706166
- x-lambda: 146.72251585555406
- x-Eta: 45.58759036581372

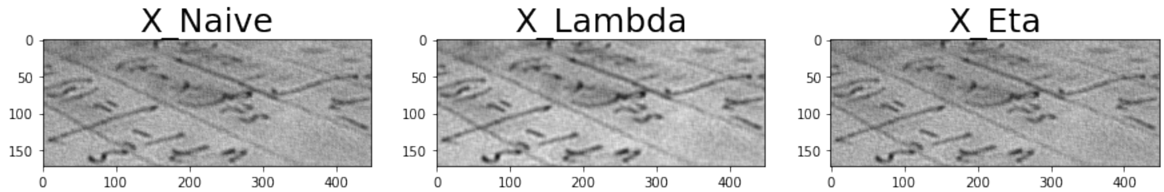
I valori dei **PSNR** sono:

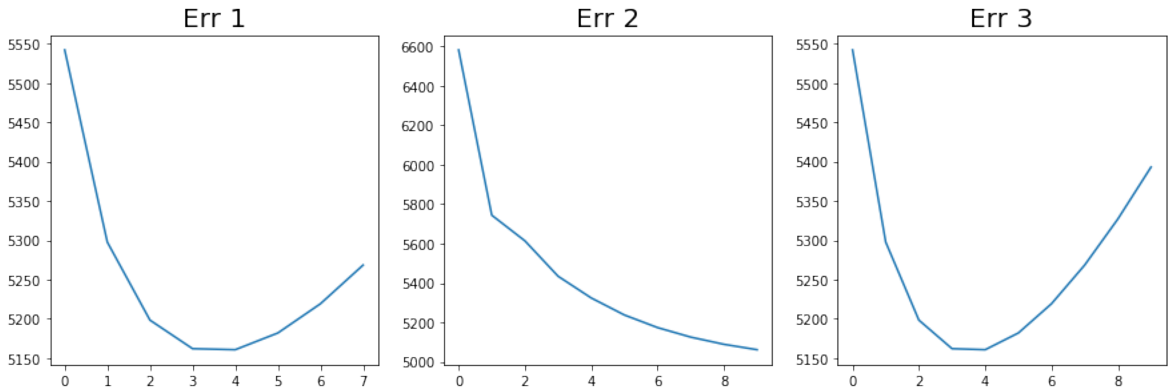
- X-Naive: 70.02453750654816
- x-lambda: 58.986267523179436
- x-Eta: 69.13927008417285

Anche in questo caso, valutando i valori del PSNR, si può notare che il risultato X-Naive, confrontato con gli altri valori, risulta essere migliore rispetto ad x-lambda ed x-Eta.

Immagine contenente del testo







I valori degli **errori** sono:

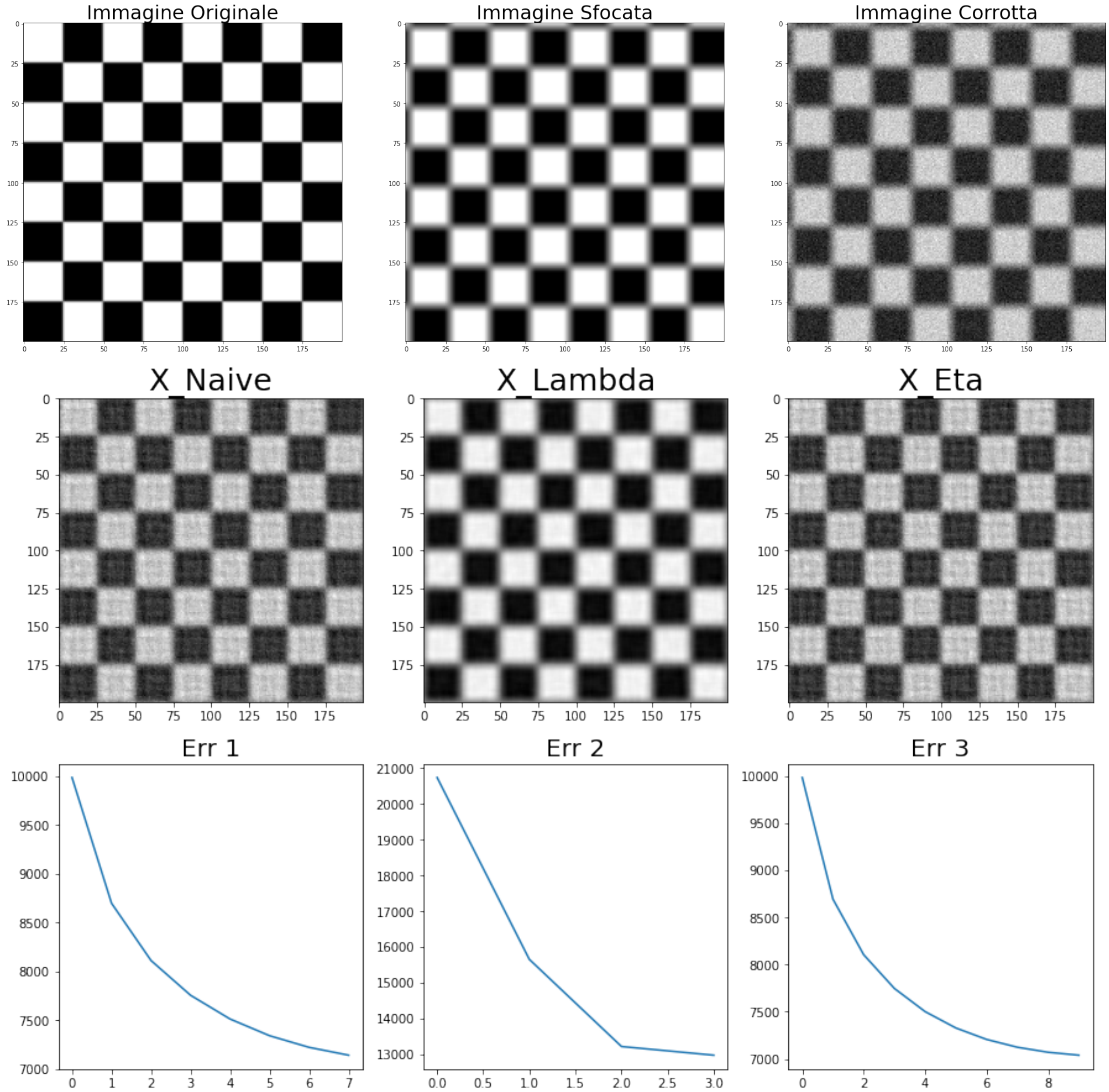
- X-Naive: 5268.491405874185
- x-lambda: 5062.048291291377
- x-Eta: 5393.232057436847

I valori dei **PSNR** sono:

- X-Naive: 22.5651426986748
- x-lambda: 22.912342538623086
- x-Eta: 22.361886071583047

Nel caso dell'immagine testuale, guardando i valori del PSNR, risulta essere migliore il valore di x-lambda. Quindi in questo il metodo che risulta essere il migliore è quello con parametro di regolarizzazione lambda.

Immagine geometrica



I valori degli **errori** sono:

- X-Naive: 7138.864479554514
- x-lambda: 15648.93050671212
- x-Eta: 7039.470887320392

I valori dei **PSNR** sono:

- X-Naive: 17.07882076957855
- x-lambda: 10.261710282909743
- x-Eta: 17.200603178186945

Guardando i valori PSNR, si può vedere che il valore di x-Eta è il valore più grande confrontandolo agli altri valori calcolati. Quindi in questo caso il metodo che usa la norma 1 come regolarizzatore, risulta essere il migliore.