Teoria de la Computació

Exercicis per a l'avaluació contínua

Índex

Tema 1. Teoria de Llenguatges

Teoria

R. Cases i L. Márquez. *Teoria de la computació. Llenguatges regulars i incotextuals.*

Capítol 1.

M. Sipser,
Introduction to the Theory of Computation, Third edition, Cengage Learning, 2012
Chapter 0. Introduction

Veure els següents vídeos:

Teoria de llenguatges (1)

Teoria de llenguatges (2)

Teoria de llenguatges (3)

Exercicis per a l'avaluació contínua

Exercici 1.1. Formalitzeu els següents llenguatges utilitzant la notació clàssica de conjunts, com a parell variable de mot ($w \in \Sigma^*$) i propietat (P) definida sobre mots, de manera que el llenguatge es pot definir com el conjunt $\{w \in \Sigma^* \mid P(w)\}$. Per a definir formalment la propietat P feu servir quantificadors universals i existencials, operadors booleans i les notacions sobre mides de mots que hem introduït.

(a) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ que contenen el submot ab.

(b) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ tals que a la dreta de cada submot ab hi ha algun submot ba.

(c) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ que contenen el submot ab i el submot ba.

(d) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b, c\}$ tals que entre cada dues b's hi ha alguna a.

(e) Llenguatge de mots sobre $\{a, b\}$ tal que tota ocurrència de b està en posició parell (el primer símbol d'un mot ocupa la posició 1).

(f) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ amb algun prefix amb més b's o igual que a's.

(g) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ tals que qualsevol prefixe seu té més b's o igual que a's.

(h) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ amb algun prefix de mida parell amb més b's o igual que a's.

(i) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ tals que qualsevol prefixe seu de mida parell té més b's o igual que a's.

(*j*) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ que tenen un prefix i un sufix idèntics de mida major que 0 i menor que la mida del propi mot.

Exercici 1.2. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions sobre mots x, y, z i llenguatges A, B, C en general.

(*a*) $xy = yx$.

(*b*) $xy = xz \Rightarrow y = z$.

(*c*) $A(BC) = (AB)C$.

(*d*) $AB = BA$.

(*e*) $A \neq \emptyset \ \wedge \ AB = AC \ \Rightarrow \ B = C$.

(*f*) $A \neq \emptyset \ \wedge \ B \neq \emptyset \ \wedge \ AB = CD \ \wedge \ (\forall u \in A, v \in C : |u| = |v|) \ \Rightarrow \ A = C \ \wedge \ B = D$.

(*g*) $(A \cup B)C = AC \cup BC$ i $A(B \cup C) = AB \cup AC$.

(*h*) $(A \cap B)C \subseteq AC \cap BC$ i $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$.

(*i*) $(A \cap B)C \supseteq AC \cap BC$ i $A(B \cap C) \supseteq AB \cap AC$.

Exercici 1.3. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.

(*a*) $L^* = \{a, b\}^* \ \Rightarrow \ \{a, b\} \subseteq L$.

(*b*) $L_1^* L_2^* \subseteq (L_1 L_2)^*$.

(*c*) $L_1^* L_2^* \supseteq (L_1 L_2)^*$.

(*d*) $L_1^+ \cup L_2^+ = \{a, b\}^+ \ \wedge \ L_1^+ \cap L_2^+ = \emptyset \ \Rightarrow \ L_1 = \emptyset \ \vee \ L_2 = \emptyset$.

(*e*) $(L_1^* \cup L_2^*) \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$.

(*f*) $(L_1^* \cup L_2^*) \supseteq (L_1 \cup L_2)^*$.

(*g*) $(L_1 \cap L_2)^* \subseteq (L_1^* \cap L_2^*)$.

(*h*) $(L_1 \cap L_2)^* \supseteq (L_1^* \cap L_2^*)$.

(*i*) $L_1^* \subseteq L_2^* \ \Rightarrow \ L_1 \subseteq L_2$.

(*j*) $\overline{L^*} \subseteq \overline{L} \subseteq \overline{L}^*$.

(*k*) $\overline{L^*} \supseteq \overline{L} \supseteq \overline{L}^*$.

(*l*) $L_1 \neq \emptyset \ \wedge \ L_2 \neq \emptyset \ \wedge \ L_1 \cap L_2 = \emptyset \ \Rightarrow \ L_1^* \neq L_2^*$.

(*m*) $L^+ L^+ \subseteq L^+$.

(*n*) $L^+ L^+ \supseteq L^+$.

(*o*) $(L^2)^* \subseteq (L^*)^2$.

(*p*) $(L^2)^* \supseteq (L^*)^2$.

(*q*) $L \subseteq L^2 \Leftrightarrow (\lambda \in L) \vee (L = \emptyset)$.

(*r*) $L^2 \subseteq L \Leftrightarrow L = L^+$.

(*s*) $(\lambda \in L) \wedge (L^2 \subseteq L) \Leftrightarrow L = L^*$.

(*t*) $L = L^2 \Rightarrow (L = L^*) \vee (L = \emptyset)$.

Exercici 1.4. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.

(*a*) $(xy)^R = y^R x^R$.

(*b*) $(L_1 L_2)^R = L_2^R L_1^R$.

(*c*) $(L_1 \cup L_2)^R = L_1^R \cup L_2^R$.

(*d*) $(L_1 \cap L_2)^R = L_1^R \cap L_2^R$.

(*e*) $\overline{L}^R = \overline{L^R}$.

(*f*) $(L^*)^R = (L^R)^*$.

(*g*) $(L_1 L_2)^R = L_1^R L_2^R \;\Rightarrow\; L_1 = L_2$.

Exercici 1.5. Quines de les següents definicions de la funció σ defineixen un morfisme (és a dir, cumpleixen $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ per a mots x, y qualssevol).

(*a*) $\sigma(a_1 a_2 \cdots a_n) = a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$, essent $a_1, \ldots, a_n$, tot ells, símbols de l'alfabet.

(*b*) $\sigma(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n) = a_1 a_2 a_2 a_3 a_3 a_3 \cdots \overbrace{a_n \cdots a_n}^{n)}$, essent $a_1, \ldots, a_n$, tot ells, símbols de l'alfabet.

(*c*) $\sigma(w) = w$.

(*d*) $\sigma(w) = \lambda$.

(*e*) $\sigma(w) = a^{|w|}$.

(*f*) $\sigma(w) = w^R$.

(*g*) $\sigma(w) = \sigma_1(\sigma_2(w))$ per a morfismes σ_1, σ_2.

Exercici 1.6. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general, on σ és un morfisme.

(*a*) $\sigma(L_1 L_2) = \sigma(L_1)\sigma(L_2)$.

(*b*) $\sigma(L^n) = \sigma(L)^n$.

(*c*) $\sigma(L_1 \cup L_2) = \sigma(L_1) \cup \sigma(L_2)$.

(*d*) $\sigma(L^*) = \sigma(L)^*$.

(*e*) $\sigma(L^R) = \sigma(L)^R$.

(*f*) $\sigma(\overline{L}) = \overline{\sigma(L)}$.

(*g*) $\sigma(L) = L \;\Rightarrow\; \forall x \in L : \sigma(x) = x$.

Exercici 1.7. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.

(*a*) $|L_1| \cdot |L_2| = |L_1 \cdot L_2|$.

(*b*) $(\forall a, b \in \Sigma : (a \neq b \Rightarrow \sigma(a) \neq \sigma(b))) \Rightarrow |\sigma(L)| = |L|$, on σ és un morfisme.

(*c*) $|L^R| = |L|$.

(*d*) $|L^n| = |L|^n$.

Exercici 1.8. Donat un llenguatge L, *shiftar* L dóna lloc a un nou llenguatge, que denotem $S(L)$, i que conté als mots que s'obtenen agafant cada mot de L i rotant-lo de totes les maneres possibles, formalment: $S(L) = \{vu \mid uv \in L\}$. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.

(*a*) $S(L)^* \subseteq S(L^*)$.

(*b*) $S(L)^* \supseteq S(L^*)$.

(*c*) $\overline{S(L)} = S(\overline{L})$.

(*d*) $S(L^R) = S(L)^R$.

(*e*) $S(L_1 \cup L_2) = S(L_1) \cup S(L_2)$.

(*f*) $S(L_1 \cap L_2) = S(L_1) \cap S(L_2)$.

(*g*) $S(L_1 L_2) = S(L_1)S(L_2)$.

(*h*) $S(\sigma(L)) = \sigma(S(L))$, on σ és un morfisme.

Exercici 1.9. Demostreu que no hi ha cap mot w que satisfaci $aw = wb$, essent a i b símbols de l'alfabet.

Exercici 1.10. Demostreu que, per a qualsevol alfabet Σ, hi ha un únic llenguatge L que satisfà $L = \overline{\Sigma L}$. Quin és aquest llenguatge?

Tema 2. Autòmats Finits

Teoria

R. Cases i L. Márquez. *Teoria de la computació. Llenguatges regulars i incotextuals.*

Capítols 4 i 5

M. Sipser,
Introduction to the Theory of Computation, Third edition, Cengage Learning, 2012
Section 1.1 Finite Automata
Section 1.2 Nondeterminism
No conté una secció explícita per a la *Minimització d'Autòmats*, només *Problems 1.51 i 1.52.*

Veure els següents vídeos:

Autòmats finits deterministes ....

Autòmats finits indeterministes ....

Notacions de DFAs i NFAs (1) ....

Notacions de DFAs i NFAs (2) ....

Operacions sobre Reg (1) ....

Operacions sobre Reg (2) ....

Operacions sobre Reg (3) ....

Minimització de DFAs (1) ....

Minimització de DFAs (2) ....

Minimització de DFAs (3) ....

Exercicis per a l'avaluació contínua

> **ACLARIMENT**: Quan diem "**calcula explícitamente**", volem dir calculeu l'autòmat aplicant l'algorisme pertinent (intersecció d'autòmats, reunió d'autòmats, ...) explicant la costrucció de l'autòmat (intersecció, reunió, ...) i si cal l'algorisme de determinització i l'algorisme de minimització.

Exercici 2.1. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaay \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2 = \{xbby \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el DFA intersección $A_1 \cap A_2$, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.2. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaay \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2 = \{xbby \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el DFA unión $A_1 \cup A_2$, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.3. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xay \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2 = \{xbbby \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el DFA unión $A_1 \cup A_2$, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.4. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{aaw \mid w \in \{a,b\}^*\}$, y calcula explícitamente $\overline{A}$.

Exercici 2.5. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \texttt{valor}_2(w) \in \dot{3}\}$, y calcula explícitamente $\overline{A}$.

Exercici 2.6. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \in \dot{3}+1\}$, y calcula explícitamente $\overline{A}$.

Exercici 2.7. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaya \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2 = \{bxby \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el λ-NFA concatenación $A_1 \cdot A_2$, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.8. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaay \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2 = \{bxb \mid x \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el NFA concatenación $A_1 \cdot A_2$, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.9. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaya \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2 = \{bxb \mid x \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el NFA concatenación $A_1 \cdot A_2$, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.10. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{xay \in \{a,b\}^* \mid |y| = 1\}$, y calcula explícitamente el NFA estrella A^*, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.11. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{xaby \in \{a,b\}^* \mid |y| = 1\}$, y calcula explícitamente el NFA estrella A^*, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.12. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{axaby \in \{a,b\}^* \mid |y| = 1\}$, y calcula explícitamente el NFA estrella A^*, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.13. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \forall w_1, w_2(w = w_1 a w_2 \Rightarrow |w_1|_b \in \dot{2})\}$, y calcula explícitamente el NFA reverso A^R, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.14. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \forall w_1, w_2(w = w_1 a w_2 \Rightarrow |w_1|_b \in \dot{2}+1)\}$, y calcula explícitamente el NFA reverso A^R, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.15. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \forall w_1, w_2(w = w_1 a w_2 \Rightarrow |w_1| \in \dot{2})\}$, y calcula explícitamente el NFA reverso A^R, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.16. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{axbya \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$, y dado el morfismo definido por $\sigma(a) = aa$, $\sigma(b) = ba$, calcula explícitamente el NFA imagen $\sigma(A)$, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.17. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{axbyc \mid x, y \in \{a, b, c\}^*\}$, y dado el morfismo definido por $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = b$, $\sigma(c) = \lambda$, calcula explícitamente el NFA imagen $\sigma(A)$, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.18. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{xbcya \mid x, y \in \{a, b, c\}^*\}$, y dado el morfismo definido por $\sigma(a) = bbb$, $\sigma(b) = a$, $\sigma(c) = \lambda$, calcula explícitamente el NFA imagen $\sigma(A)$, determinízalo y minimízalo.

Exercici 2.19. Sea A el DFA mínimo que reconoce a los números binarios múltiples de 3. Calcula $\sigma^{-1}(A)$ tomando como σ los morfismos:

(a) $\sigma(a) = 01,\ \sigma(b) = 0,\ \sigma(c) = \lambda$.

(b) $\sigma(a) = 10,\ \sigma(b) = 0,\ \sigma(c) = \lambda$.

(c) $\sigma(a) = 00,\ \sigma(b) = 11,\ \sigma(c) = \lambda$.

(d) $\sigma(a) = 001,\ \sigma(b) = 101,\ \sigma(c) = 0$.

Exercici 2.20. Diseña un algoritmo de coste razonable para encontrar los estados no accesibles de un DFA de entrada.

Exercici 2.21. Diseña un algoritmo de coste razonable para decidir si un DFA de entrada acepta alguna palabra.

Exercici 2.22. Diseña un algoritmo de coste razonable para decidir si un DFA de entrada acepta infinitas palabras.

Exercici 2.23. Cuál es el coste del algoritmo de determinización de NFA's en DFA's.

Exercici 2.24. Cuál es el coste temporal de las siguentes operaciones de DFA's:

(a) intersección.

(b) unión.

(c) complementario.

(d) concatenación (incluyendo determinización).

(e) estrella (incluyendo determinización).

(f) reverso (incluyendo determinización).

(g) aplicación de morfismo (incluyendo determinización).

(h) aplicación de morfismo inverso.

Exercici 2.25. Cuál es el coste del algoritmo de minimización con una implementación razonable.

Exercici 2.26. Propón un algoritmo de coste razonable para saber si dos DFA's de entrada reconocen el mismo lenguaje.

Exercici 2.27. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, si dados dos DFA's de entrada, el lenguaje generado por el primero está incluido en el lenguaje generado por el segundo.

Exercici 2.28. Justifiqueu la veracitat o falsetat de les següents afirmacions per a DFAs mínims A, A_1, A_2, NFAs B, B_1, B_2, B_3 i morfisme σ. En cas que les operacions que apareixen hagin estat definides només per a DFAs, assumiu la seva extensió natural a NFAs.

(a) $A_1 \cap A_2$ és DFA mínim.

(b) $A_1 \cup A_2$ és DFA mínim.

(c) $\bar{A}$ és DFA mínim.

(d) $\sigma(A)$ és DFA.

(e) $\sigma^{-1}(A)$ és DFA mínim.

(f) $\bar{\bar{A}} = A$.

(g) $(B^R)^R = B$.

(h) $(B^*)^* = B^*$.

(i) $(B_1B_2)B_3 = B_1(B_2B_3)$.

(j) $(B_1B_2)^R = B_2^R B_1^R$.

(k) $(B^R)^* = (B^*)^R$.

(l) En el cas en que A^R també sigui DFA, llavors podem concloure que és mínim.

Exercici 2.29. Decimos que un NFA es de aceptación única si para cada palabra aceptada existe una única ejecución aceptadora. Demuestra que, para un NFA de aceptación única A, A^R es un NFA de aceptación única.

Exercici 2.30. Dado un lenguaje L, definimos $\texttt{Prefijos}(L)$ como el lenguaje $\{w | \exists x : (wx \in L)\}$. Dado un DFA A, cómo se puede construir un DFA $\texttt{Prefijos}(A)$ que cumpla $\mathcal{L}(\texttt{Prefijos}(A)) = \texttt{Prefijos}(\mathcal{L}(A))$.

Exercici 2.31. Dado un lenguaje L, definimos $\texttt{Sufijos}(L)$ como el lenguaje $\{w | \exists x : (xw \in L)\}$. Dado un DFA A, cómo se puede construir un DFA $\texttt{Sufijos}(A)$ que cumpla $\mathcal{L}(\texttt{Sufijos}(A)) = \texttt{Sufijos}(\mathcal{L}(A))$.

Exercici 2.32. Donats dos llenguatges $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, definim
$\texttt{intercalAND}(L_1, L_2) = \{x_1y_1...x_ny_n | (n \geq 1) \wedge (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \Sigma) \wedge (x_1...x_n \in L_1) \wedge (y_1...y_n \in L_2)\}$
Demostreu que si L_1 i L_2 són regulars, aleshores $\texttt{intercalAND}(L_1, L_2)$ també és regular.

Exercici 2.33. Donat un llenguatge L, definim $\texttt{FirstHalf}(L) = \{x \,|\exists y : (|x| = |y| \wedge xy \in L)\}$. Demostreu que si L és regular, aleshores $\texttt{FirstHalf}(L)$ és regular.

Exercici 2.34. Dado un natural n definimos $L_n = \{w \in \{0,1\}^* | \exists k : (\texttt{valor}_2(w) = k \cdot 2^n)\}$. Justifica que cualquier L_n es regular. Cuantos estados tiene el DFA mínimo que reconoce L_n?

Exercici 2.35. Sigui $B_n = \{a^k \mid k \text{ és un múltiple de } n\}$. Demostreu que per a cada $n \geq 1$, el llenguatge B_n és regular.

Exercici 2.36. Sigui $C_n = \{x \in \{0,1\}^* \,| \texttt{valor}_2(x) \text{ és un múltiple de } n\}$. Demostreu que per a cada $n \geq 1$, el llenguatge C_n és regular.

Exercici 2.37. Demostreu que el llenguatge $L_n = \{xay \mid x, y \in \{a,b\}^* \;\wedge\; |y| = n\}$, per a $n \geq 0$, té un DFA de 2^{n+1} estats.

Exercici 2.38. Cuantos estados tiene el DFA mínimo que reconoce las palabras sobre $\{a, b, c\}$ que contienen al menos 100 ocurrencias de cada uno de estos tres símbolos?

Tema 3. Gramàtiques incontextuals

Teoria

R. Cases i L. Márquez. *Teoria de la computació. Llenguatges regulars i incotextuals.*

Capítol 2 Gramàtiques incontextuals
Capítol 3 Normalització de gramàtiques

M. Sipser,
Introduction to the Theory of Computation, Third edition, Cengage Learning, 2012
Section 2.1 Context-Free Grammars

Veure els següents vídeos:

Gramàtiques incontextuals . . . .

Operacions sobre gramàtiques . . . .

Depuració de gramàtiques (1) . . . .

Depuració de gramàtiques (2) . . . .

Depuració de gramàtiques (3) . . . .

Exercicis per a l'avaluació contínua

Exercici 3.1. Doneu una gramàtica inambígua per a generar expressions amb operadors binaris de suma, resta, producte, divisió, i també admetent parentització explícita, de manera que l'arbre sintàctic generat es correspongui a la precedéncia habitual que donem als operadors.

Exercici 3.2. Justifica l'ambigüitat o no ambigüitat de les següents CFG's:

(a) $\quad S \rightarrow (S)|SS|$

(b) $\quad S \rightarrow (S)S|$

(c)

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSb|B \\ B & \rightarrow & bAa|bCb|\lambda \\ A & \rightarrow & aAbA|bAaA|\lambda \\ C & \rightarrow & Aaa|aAa|aaA \end{array}$$

(d)

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aU_1|aS|bZ_1|bS \\
Z_1 & \rightarrow & aU_2|bF \\
U_1 & \rightarrow & bU_2 \\
U_2 & \rightarrow & bF|b \\
F & \rightarrow & aF|bF|a|b
\end{array}
$$

(e)

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & AaBA|ABaA|ACA|AbabA \\
B & \rightarrow & bb \\
C & \rightarrow & bB \\
A & \rightarrow & aA|bA|\lambda
\end{array}
$$

(f)

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aU_1|aS|bZ_1|bS \\
Z_1 & \rightarrow & aU_2|bZ_2 \\
U_1 & \rightarrow & bU_2 \\
U_2 & \rightarrow & bF \\
Z_2 & \rightarrow & aF|bF \\
F & \rightarrow & aF|bF|\lambda
\end{array}
$$

(g)

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & Z_1a|Z_2b \\
Z_1 & \rightarrow & Z_1a|U_1b \\
Z_2 & \rightarrow & U_2a|Z_3b \\
Z_3 & \rightarrow & Fa|U_2 \\
U_1 & \rightarrow & U_2|Fba \\
U_2 & \rightarrow & Fb \\
F & \rightarrow & Fa|Fb|\lambda
\end{array}
$$

Exercici 3.3. Demostreu que la gramàtica reunió $G_1 \cup G_2$ de dues gramàtiques inambígües G_1, G_2 sí podria ser ambígua.

Exercici 3.4. Demostreu que la gramàtica concatenació $G_1 \cdot G_2$ de de dues gramàtiques inambígües G_1, G_2 sí podria ser ambígua.

Exercici 3.5. Demostreu que la gramàtica estrella G^* d'una gramàtica inambígua G sí podria ser ambígua.

Exercici 3.6. Demostreu que la gramàtica imatge $\sigma(G)$ d'una gramàtica inambígua G per un morfisme σ sí podria ser ambígua.

Exercici 3.7. Demostreu que la gramàtica revessada G^R d' una gramàtica inambígua G és també inambígua.

Exercici 3.8. Expliqueu el procediment d'eliminació de produccions nul.les i analitzeu-ne el temps de computació. Feu un exemple de la seva aplicació.

Exercici 3.9. Expliqueu el procediment d'eliminació de produccions unàries i analitzeu-ne el temps de computació. Feu un exemple de la seva aplicació.

Exercici 3.10. Explicqueu el procediment d'eliminació de símbols inútils i analitze-ne el temps de computació. Feu un exemple de la seva aplicació.

Exercici 3.11. Depureu (elimineu les λ-produccions, produccions unàries i símbols inútils) les CFGs següents:

(a)

$$
S \rightarrow SS|(S)|\lambda
$$

(b)

$$S \rightarrow (S)S|\lambda$$

(c)

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AA \\ A & \rightarrow & AA|\lambda \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A \\ A & \rightarrow & B \\ B & \rightarrow & c \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & a|\lambda \\ B & \rightarrow & b|\lambda \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & aAb|\lambda \\ B & \rightarrow & bBc|\lambda \end{array}$$

(g)

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & BC|\lambda \\ A & \rightarrow & aA|\lambda \\ B & \rightarrow & bB \\ C & \rightarrow & c \end{array}$$

(h)

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & X|Y \\ X & \rightarrow & Xc|A \\ A & \rightarrow & aAb|\lambda \\ Y & \rightarrow & aY|B \\ B & \rightarrow & bBc|\lambda \end{array}$$

(i)

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A|B|C \\ A & \rightarrow & SaSbS|\lambda \\ B & \rightarrow & SbSaS|\lambda \\ C & \rightarrow & Cc|\lambda \end{array}$$

Exercici 3.12. Expliqueu el procediment de passar d'una CFG G a una CFG G' equivalent en Forma Normal de Chomsky (CNF) i analitzeu-ne el temps de computació.

Exercici 3.13. Demostreu que totes les transformacions de gramàtiques exposades ens els exercicis anteriors preserven la no ambigüitat de la gramàtica original.

Exercici 3.14. Quin és el cost de l'algorisme CKY (o conegut també per CYK) per a decidir si una CFG G donada genera un mot w donat? Es a dir, descriviu i analitzeu el cost en temps de l'agorisme CYK tal que donada una CFG G i donat un mot w, decideix si $w \in L(G)$.

Quin és el cost temporal si se suposa que G és fixa i que per tant l' entrada només conté w?

Exercici 3.15. Sigui n el nombre de passos de derivació necessaris per a generar una certa palabra w amb una certa CFG G en forma normal de Chomsky. Podem establir alguna relació entre n i $|w|$?

Exercici 3.16. Justifiqueu la veracitat o falsetat de les següents afirmacions per a CFGs G, G_1, G_2, G_3.

(a) $(G^R)^R = G$.

(b) $(G_1 \cup G_2)^R = G_1^R \cup G_2^R$.

(c) $(G^R)^* = (G^*)^R$.

(d) $(G_1 \cup G_2)G = (G_1G) \cup (G_2G)$.

(e) $\sigma(G_1 \cup G_2) = \sigma(G_1) \cup \sigma(G_2)$.

(f) $G_1(G_2G_3) = (G_1G_2)G_3$.

(g) $(G_1G_2)^R = G_2^R G_1^R$.

Exercici 3.17. Proposeu un algorisme de cost raonable per a decidir si una CFG d' entrada genera algun mot.

Exercici 3.18. Proposeu un algorisme de cost raonable per a decidir si una CFG d' entrada genera infinits mots.

Exercici 3.19. Proposeu un algorisme de cost raonable per a decidir si una CFG d' entrada genera algun mot de longitud parell.

Exercici 3.20. Proposeu un algorisme de cost raonable per a decidir si una CFG d' entrada genera infinits mots de londitud parell.

Exercici 3.21. Proposeu un algorisme de cost raonable per a calcular, donats una CFG G i un natural n d'entrada, quants arbres de derivació diferents de mots de mida n genera G.

Exercici 3.22. Sigui L un llenguatge incontextual infinit. Demostreu que hi ha una CFG G tal que $\mathcal{L}(G) = L$ i totes les variables de G generen un llenguatge infinit.

Tema 4. Expressions Regulars

Teoria

R. Cases i L. Márquez. *Teoria de la computació. Llenguatges regulars i incotextuals.*

Capítol 6, des de la secció 6.1 fins la secció 6.4.

M. Sipser,
Introduction to the Theory of Computation, Third edition, Cengage Learning, 2012
Section 1.3 Regular Expressions.

Veure els següents vídeos:

Expressions regulars (1) ....

Expressions regulars (2) ....

Exercicis per a l'avaluació contínua

Exercici 4.1. Trobeu expressions regulars que representin els següents llenguatges transformant un DFA en una expressió regular segons el mètode basat en el lema d'Arden.

(a) Mots sobre $\{a, b\}$ amb un nombre parell de a's.

(b) Mots sobre $\{a, b\}$ amb o bé un nombre parell de a's, o bé un nombre parell de b's.

(c) Mots sobre $\{a, b\}$ acabats en $ababa$.

(d) Mots sobre $\{a, b\}$ que no contenen el submot aba.

(e) Mots sobre $\{a, b, c\}$ tals que, entre cada dues a's hi ha almenys una b.

(f) Mots sobre $\{0, 1\}$ amb almenys dos 0's consecutius.

Exercici 4.2. Donada una expressió regular, com construirieu una altra expressió regular, de manera senzilla, que generi el llenguatge revers de la primera?

Exercici 4.3. Donada una expressió regular r i un morfisme σ, com construirieu una altra expressió regular, de manera senzilla, que generi $\sigma(\mathcal{L}(r))$?

Exercici 4.4. Demostreu les equivalències següents entre expressions regulars:

(a) $a^*(b + ca^*)^* = (a + b^*c)^*b^*$

(b) $(bb + ba + a)^*baa^* = a^*b(aa^*b + ba^*b)^*aa^*$

(c) $(\Lambda + b)a^*(b + bba^*)^* = b^*(a + bb + bbb)^*b^*$.

Exercici 4.5. Donades dues expressions regulars r_1 i r_2, com decidirieu:

(a) $\mathcal{L}(r_1) = \mathcal{L}(r_2)$.

(b) $\mathcal{L}(r_1) \subseteq \mathcal{L}(r_2)$.

(c) $\mathcal{L}(r_1) = \emptyset$.

(d) $|\mathcal{L}(r_1)| = \infty$.

(e) $|\mathcal{L}(r_1) \cap \mathcal{L}(r_2)| = 0$.

(f) $|\mathcal{L}(r_1) \cap \mathcal{L}(r_2)| = \infty$.

Exercici 4.6 (Lema d'Arden (bis))**.** Demostra que BA^* és solució de l'equació $X = XA + B$, que tota solució d'aquesta equació conté BA^*, i que en el cas de que A no contingui λ, aleshores BA^* n'és l'única solució.

Exercici 4.7. Aprofitant el resultat de l'exercici anterior (Lema d'Arden (bis)), obteniu una expressió regular pel complementari de les paraules que representen un múltiple de 3 (és a dir, $\overline{\{w \in \{0,1\}^* \mid \mathtt{valor}_2(w) \in \dot{3}\}}$). Per a això, escriu l'autòmat mínim per aquest llenguatge, crea una variable X_q per a cada estat q, i crea equacions (amb la incògnita a l'esquerra com en el Lema d' Arden (bis)) amb la idea de que la solució de cada X_q sigui el llenguatge dels mots que ens porten des de l' estat inicial a l'estat q.

Exercici 4.8. Utilitza el mètode de l'exercici anterior per obtenir expressions regulars dels llenguatges següents aplicant el Lema d' Arden (bis). Compara-les amb expressions regulars que s'obtenen aplicant el Lema d'Arden tal i com s'explica en els vídeos.

(a) Mots sobre $\{a, b\}$ amb un nombre parell de a's.

(b) Mots sobre $\{a, b\}$ amb o bé un nombre parell de a's, o bé un nombre parell de b's.

(c) Mots sobre $\{a, b\}$ acabats en $ababa$.

(d) Mots sobre $\{a, b\}$ que no contenen el submot aba.

(e) Mots sobre $\{a, b, c\}$ tals que, entre cada dues a's hi ha almenys una b.

(f) Mots sobre $\{0, 1\}$ amb almenys dos 0's consecutius.

Tema 5. Autòmats amb pila. Jerarquia de Chomsky

No regularitat

Teoria

R. Cases i L. Márquez. *Teoria de la computació. Llenguatges regulars i incotextuals.*

Secció 7.1 Propietats d'iteració

M. Sipser,
Introduction to the Theory of Computation, Third edition, Cengage Learning, 2012
Section 1.4 Nonregular Languages.

Veure els següents vídeos:

No regularitat (1) ....

No regularitat (2) ....

Exercicis per a l'avaluació contínua

Exercici 5.1. Demostreu la no-regularitat dels següents llenguatges:

(a) $\{a^n b^n | n \in \dot{2}\}$.

(b) $\{a^n b^n | n \in \dot{3}\}$.

(c) $\{a^n b^m | n \neq m\}$.

(d) $\{a^{2n} b^n | n \in \dot{2}\}$.

(e) $\{w \in \{a,b\}^* | \ |w|_a = |w|_b\}$.

(f) $\{a^n b^m | n \leq m\}$.

(g) $\{a^n b^m | n \geq m\}$.

(h) $\{c^m a^n b^n | (n, m \geq 0)\}$.

(i) $\{a,b\}^* \cup \{c^m a^n b^n | (m \geq 1) \wedge (n \geq 0)\}$.

(j) $\{w \in \{a,b\}^* | w = w^R\}$.

(k) $\{ww \in \{a,b\}^*\}$

(l) $\{a^{n^2} | n \geq 0\}$.

(m) $\{a^{2^n} | n \geq 0\}$.

(n) $\{a^n | n$ apareix a la successió de Fibonacci$\}$.

(o) $\{a^n | n$ és primer$\}$.

(p) $\{a^n|n$ és parell o primer$\}$.

(q) $\{abab^2ab^3\dots ab^n|n \geq 0\}$.

(r) $\{w_1\#w_2|w_1,w_2 \in \{0,1\}^* \wedge (|w_1| < |w_2| \vee |w_1| \in \dot{2})\}$.

(s) $\{u\#v|u,v \in \{a,b\}^* \wedge v$ és submot de $u\}$.

(t) $\{w \in (a+b+c)^* \mid |w|_a \geq |w|_b \vee |w|_b \geq |w|_c\}$.

(u) Qualsevol subconjunt infinit del llenguatge $\{a^nb^n\}$.

(v) $\{w \in \{a,b\}^* \mid (|w| \in \dot{3} \Rightarrow |w|_a = |w|_b)\}$.

(w) $\{w_1\#w_2|w_1,w_2 \in \{0,1\}^* \wedge \mathtt{valor}_2(w_1) = \mathtt{valor}_2(w_2)\}$.

(x) $\{w_1\#w_2|w_1,w_2 \in \{0,1\}^* \wedge \mathtt{valor}_2(w_1) = 1 + \mathtt{valor}_2(w_2)\}$.

(y) $\{w_1\#w_2\#w_3|w_1,w_2,w_3 \in \{0,1\}^* \wedge \mathtt{valor}_2(w_1) + \mathtt{valor}_2(w_2) = \mathtt{valor}_2(w_3)\}$.

(z) $\{xy \in \{a,b\}^* \mid |x|_a = 2|y|_b\}$

Exercici 5.2. Considerem el llenguatge $L_k = \{w \in (0+1)^*|\mathtt{valor}_2(w) \leq k\}$. Quins dels següents llenguatges són regulars per a qualsevol k:

(a) L_k.

(b) $\bigcup_{k\geq 1} L_k$.

(c) $\{w\#w|w \in L_k\}$.

(d) $\{1w\#1w|1w \in L_k\}$.

(e) $\{1w\#1w|w \in L_k\}$.

(f) $\{w\#w|w \in L_k \ \wedge\ |w| \leq \mathtt{valor}_2(w)\}$.

(g) $\{w\#w|1w \in L_k\}$.

(h) $\{w_1\#w_2|w_1,w_2 \in L_k \wedge \mathtt{valor}_2(w_1) = \mathtt{valor}_2(w_2)\}$.

(i) $\{w_1\#w_2|\exists k : (w_1,w_2 \in L_k \ \wedge\ \mathtt{valor}_2(w_1) = \mathtt{valor}_2(w_2))\}$.

Exercici 5.3. Quins dels següents llenguatges podem assegurar que són no-regulars sabent que A i B són no-regulars i que σ és un morfisme.

(a) $\bar{A}$.

(b) $A \cup B$.

(c) $A \cap B$.

(d) $A \cdot B$.

(e) A^R.

(f) A^*.

(g) $S(A)$ (recordeu la definició de shiftar un llenguatge dels exercicis del primer tema).

(h) $\sigma(A)$.

(i) $\sigma^{-1}(A)$.

Exercici 5.4. Determineu quin llenguatge genera cadascuna de les següents CFG's, i justifiqueu si aquest llenguatge és regular o no.

(a)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & AB|CD \\ A & \to & 0A0|0 \\ B & \to & 1B1|\lambda \\ C & \to & 0C0|\lambda \\ D & \to & 1D1|\lambda \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aA|bB|\lambda \\ A & \to & Sa|Sb \\ B & \to & Sb \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & AB \\ A & \to & 0A0|1 \\ B & \to & 1B1|0 \end{array}$$

(d)

$$S \to 0S0|0S1|\lambda$$

(e)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & AB \\ A & \to & 0A0|0A1|\lambda \\ B & \to & 0B|1B|\lambda \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & A|B \\ A & \to & 0S0|1S1|\lambda \\ B & \to & 0S1|1S0|\lambda \end{array}$$

(g)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & A|B \\ A & \to & 0A0|1A1|\lambda \\ B & \to & 0B1|1B0|\lambda \end{array}$$

(h)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aSa|bSb|X \\ X & \to & aXb|bXa|a|b|\lambda \end{array}$$

(i)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & WXW' \\ X & \to & aX|bX|\lambda \\ W & \to & aW|bW|\lambda \\ W' & \to & W'a|W'b|\lambda \end{array}$$

Autómatas amb pila y jerarquía de Chomsky

Veure els següents vídeos:

Autòmats amb pila (PDA) . . . .

Equivalència entre CFG i PDA (1) . . . .

Equivalència entre CFG i PDA (2) . . . .

Operacions sobre PDA, i Jerarquia de Chomsky . . . .

Exercici 5.5. Muestra un ejemplo de lenguaje inambiguo que no sea DCFL.

Exercici 5.6. Muestra un ejemplo de DCFL que no sea regular.

Exercici 5.7. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por morfismo directo.

Exercici 5.8. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por intersección.

Exercici 5.9. Muestra que los DCFL no son cerrados por reverso.

Exercici 5.10. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por concatenación.

Exercici 5.11. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por estrella.

Exercici 5.12. Sigui A regular, B CFL, C DCFL i σ un morfisme. Quins dels següents llenguatges podem assegurar que són regulars, quins podem assegurar que són DCFL, i quins podem assegurar que són CFL? Raoneu les respostes, i doneu contraexemples quan sigui necessari.

(a) $\sigma^{-1}(B) \cap A$.

(b) $\overline{\sigma^{-1}(C)}$.

(c) C^R.

(d) $S(C)$ (recordeu la definició de shiftar un llenguatge donada en els problemes del primer tema).

(e) $S(A)$.

(f) $(\overline{A \cap C} \cup B)$.

(g) $(\sigma(B) \cap B)C$.

(h) $(\overline{A} - \sigma(B) \cap \overline{C})$.

(i) $(\sigma^{-1}(\sigma(B)) \cap B)C$.

(j) $\overline{(\overline{\sigma(A)} \cap C)}\sigma(B \cap A)$.

(k) $\sigma(\sigma^{-1}(B) \cap A)\sigma^{-1}(C)$.

Exercici 5.13. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, dado un DFA A y una CFG G, si se cumple $\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(A)$.

Exercici 5.14. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, dado un DFA A y una CFG G, si G genera infinitas palabras no aceptadas por A.

Exercici 5.15. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, dado un DFA A y una CFG G, si G genera alguna palabra de tamaño par no aceptada por A.

Tema 6. Màquines de Turing. Decidibilitat, semidecidibilitat, computabilitat.

Teoria

M. Sipser,
Introduction to the Theory of Computation, Third edition, Cengage Learning, 2012
Chapter 3. The Church-Turing Thesis
Section 4.1 Decidable Languages.

Veure els següents vídeos:

Màquines de Turing (1) ....

Màquines de Turing (2) ....

Equivalència TM-programes ....

Assumpcions sobre TM-programes ....

Operacions sobre TM-programes ....

Exercicis per a l'avaluació contínua

Exercici 6.1. Escrivid TM sencillas para los siguientes lenguajes:

(a) $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

(b) $\{w_1 \# w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge \texttt{valor}_2(w_1) = \texttt{valor}_2(w_2) + 1\}$.

(c) $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

(d) $\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$

Exercici 6.2. Escrivid 2-TM (o 3-TM o 4-TM en caso de necesidad) sencillas para los siguientes lenguajes:

(a) $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

(b) $\{w_1 \# w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge \texttt{valor}_2(w_1) = \texttt{valor}_2(w_2) + 1\}$.

(c) $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

(d) $\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$

(e) $\{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$

Exercici 6.3. Argumenta a grandes rasgos que las máquinas de Turing no-deterministas no son más expresivas que las máquinas de Turing deterministas.

Exercici 6.4. Considera el modelo de máquina que definimos a grandes rasgos así: una variante de los autómatas con pila donde, en vez de una pila, tenemos dos pilas, las transiciones dependen del contenido de la cima de ambas pilas, y en la acción de cada transición se puede o bien borrar el elemento de la cima o bien añadir nuevos elementos, todo ello en ambas pilas. Justifica a grandes rasgos que este modelo puede simular una máquina de Turing, y que, por tanto, es Turing-completo.

Exercici 6.5. Considera el modelo de máquina que definimos a grandes rasgos así: una variante de los autómatas con pila donde, en vez de una pila, tenemos una cola, las transiciones dependen del contenido del inicio de la cola, y en la acción de cada transición se puede borrar el elemento del inicio, y también añadir nuevos elementos al final de la cola. Justifica a grandes rasgos que este modelo puede simular una máquina de Turing, y que, por tanto, es Turing-completo.

Exercici 6.6. Demuestra que los lenguajes decidibles son cerrados por las siguientes operaciones:

(a) Intersección.

(b) Complementario.

(c) Resta (de conjuntos).

(d) Reverso.

(e) Concatenación.

(f) Estrella.

(g) Morfismo inverso.

(h) Shiftado.

Exercici 6.7. Demuestra que los lenguajes decidibles no son cerrados por morfismo directo.

Exercici 6.8. Demuestra que los lenguajes semidecidibles son cerrados por las siguientes operaciones:

(a) Intersección.

(b) Concatenación.

(c) Reverso.

(d) Estrella.

(e) Morfismo directo.

(f) Morfismo inverso.

(g) Shiftado.

Exercici 6.9. Demuestra que los siguientes conjuntos son semidecidibles:

(a) $\{\langle x, y\rangle \mid M_x(y)\downarrow\}$.

(b) $\{x \mid \exists y : M_x(y)\downarrow\}$.

(c) $\{\langle u, v, R\rangle \mid u \to_R^* v\}$.

(d) $\{G \in \texttt{CFG} \mid G \text{ ambigua}\}$.

(e) $\{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1, G_2 \in \texttt{CFG} \ \wedge\ \mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) \neq \emptyset\}$.

Exercici 6.10. Sea B un conjunto semidecidible y sea C un conjunto que cumple $C = \{x \mid \exists y : \langle x, y \rangle \in B\}$. Demuestra que C es semidecidible.

Exercici 6.11. Sea C un conjunto infinito. Demuestra que C es decidible si y solo si existe una función computable, total, inyectiva y creciente cuya imagen es C.

Exercici 6.12. Sea C un conjunto infinito. Demuestra que C es semidecidible si y solo si existe una función computable total e inyectiva cuya imagen es C.

Exercici 6.13. Sea f una función computable e inyectiva. Es f^{-1} computable e inyectiva?

Exercici 6.14. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estríctamente decreciente. Podemos asegurar que es computable?

Exercici 6.15. Sean A y B dos conjuntos tales que $(A \cup B) - (A \cap B)$ es decidible y A es decidible. Eso implica que B es decidible?

Exercici 6.16. Sean A y B dos conjuntos tales que $(A \cup B) - (A \cap B)$ es decidible y A es semidecidible. Eso implica que B es semidecidible?

Tema 7. Indecidibilitat, no semidecidibilitat, no computabilitat.

Teoria

M. Sipser,
Introduction to the Theory of Computation, Third edition, Cengage Learning, 2012
Section 4.2 Undecidability
Chapter 5. Reducibility

Veure els següents vídeos:

No decidibilitat ....

No semidecidibilitat ....

No computabilitat ....

Exercicis per a l'avaluació contínua

Exercici 7.1. Clasifica como decidibles, no decidibles pero semidecidibles, o no semidecidibles, los siguientes conjuntos.

(a) $\{p \mid \mathcal{L}_p \text{ es finito}\}$.

(b) $\{p \mid \mathcal{L}_p \text{ es infinito}\}$.

(c) $\{p \mid M_p(p) = p\}$.

(d) $\{p \mid \exists y : M_y(p) = p\}$.

(e) $\{p \mid |\texttt{Dom}(\varphi_p)| \geq 10\}$.

(f) $\{p \mid |\texttt{Dom}(\varphi_p)| \geq 0\}$.

(g) $\{p \mid |\texttt{Im}(\varphi_p)| \geq 10\}$.

(h) $\{p \mid |\texttt{Im}(\varphi_p)| \geq 0\}$.

(i) $\{p \mid |\texttt{Im}(\varphi_p)| < |\texttt{Dom}(\varphi_p)| < \infty\}$.

(j) $\{p \mid |\texttt{Dom}(\varphi_p)| < |\texttt{Im}(\varphi_p)| < \infty\}$.

(k) $\{p \mid \varphi_p \text{ es inyectiva y total}\}$.

(l) $\{p \mid \varphi_p \text{ es exhaustiva y total}\}$.

(m) $\{p \mid \varphi_p \text{ es creciente y total}\}$.

(n) $\{p \mid \varphi_p \text{ es total y estríctamente decreciente}\}$.

(o) $\{p \mid \varphi_p \text{ es inyectiva parcial}\}$.

(p) $\{p \mid \varphi_p \text{ es exhaustiva parcial}\}$.

(q) $\{p \mid \varphi_p \text{ es creciente parcial}\}$.

(r) $\{p \mid \varphi_p$ es estríctamente decreciente parcial$\}$.

Exercici 7.2. Clasifica como decidibles, no decidibles pero semidecidibles, o no semidecidibles, los siguientes conjuntos.

(a) $\{\langle p, q\rangle \mid \forall z : ((M_p(z)\downarrow \wedge M_q(z)\uparrow) \vee (M_p(z)\uparrow \wedge M_q(z)\downarrow))\}$.

(b) $\{\langle p, z\rangle \mid \exists y : M_p(y) = z\}$.

(c) $\{\langle p, z\rangle \mid \exists y : M_p(y) \neq z\}$.

(d) $\{p \mid \mathcal{L}_p$ es incontextual$\}$.

(e) $\{p \mid \mathcal{L}_p$ no es incontextual$\}$.

(f) $\{p \mid \mathtt{Dom}(\varphi_p) \in \mathtt{Dec}\}$.

(g) $\{p \mid \mathtt{Dom}(\varphi_p) \notin \mathtt{Dec}\}$.

(h) $\{p \mid \mathtt{Dom}(\varphi_p) \notin \mathtt{semi}-\mathtt{Dec}\}$.

(i) $\{p \mid \mathtt{Im}(\varphi_p) \in \mathtt{Dec}\}$.

(j) $\{p \mid \mathtt{Im}(\varphi_p) \notin \mathtt{Dec}\}$.

(k) $\{p \mid \mathtt{Im}(\varphi_p) \in \mathtt{semi}-\mathtt{Dec}\}$.

(l) $\{p \mid \mathtt{Im}(\varphi_p) \notin \mathtt{semi}-\mathtt{Dec}\}$.

(m) $\{p \mid p \leq 100 \wedge \mathtt{Dom}(\varphi_p) \in \mathtt{Dec}\}$.

(n) $\{p \mid p \geq 100 \wedge \mathtt{Dom}(\varphi_p) \in \mathtt{semi}-\mathtt{Dec}\}$.

(o) $\{p \mid \forall y > p : \varphi_y$ es biyectiva$\}$.

(p) $\{p \mid \forall y < p : \varphi_y$ es biyectiva$\}$.

(q) $\{p \mid \exists y > p : \varphi_y$ es biyectiva$\}$.

(r) $\{p \mid \exists y < p : \varphi_y$ es biyectiva$\}$.

(s) $\{p \mid \exists y : \mathtt{Dom}(\varphi_p) \subseteq \mathtt{Dom}(\varphi_y)\}$.

(t) $\{p \mid \exists y : \mathtt{Dom}(\varphi_p) \supseteq \mathtt{Dom}(\varphi_y)\}$.

(u) $\{p \mid \mathtt{Dom}(\varphi_p) \subseteq \dot{2}\}$.

(v) $\{p \mid \mathtt{Dom}(\varphi_p) \supseteq \dot{2}\}$.

Exercici 7.3. Clasifica como decidibles, no decidibles pero semidecidibles, o no semidecidibles, los siguientes conjuntos.

(a) $K \times K$.

(b) $\bar{K} \times K$.

(c) $\bar{K} \times \bar{K}$.

(d) $\overline{\bar{K} \times K}$.

(e) $\{x \mid$ el decimal 3 aparece x veces en el número $\pi\}$.

(f) $\{\langle x, y\rangle \mid 0 \leq x \leq 9 \wedge$ el decimal x aparece y veces consecutivas en la secuencia de decimales del número $\pi\}$.

Exercici 7.4. Demuestra que K no se puede reducir a $\bar{K}$.

Exercici 7.5. Demuestra que puede ocurrir que C sea decidible, f computable, y sin embargo $f(C)$ no sea decidible.

Exercici 7.6. Demuestra que puede ocurrir que C sea decidible, f computable y total, y sin embargo $f(C)$ no sea decidible.

Exercici 7.7. Demuestra que si C es semidecidible y f es computable, entonces $f(C)$ es semidecidible.

Exercici 7.8. Para cada una de las siguientes funciones indica si son computables, totales y cuál es su imagen.

$(a)\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n : M_n(x)\downarrow \\ \uparrow & \text{si } \nexists n : M_n(x)\downarrow \end{cases}$

$(b)\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall n : M_n(x)\downarrow \\ \uparrow & \text{si } \not\forall n : M_n(x)\downarrow \end{cases}$

$(c)\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n : M_x(n)\downarrow \\ \uparrow & \text{si } \nexists n : M_x(n)\downarrow \end{cases}$

$(d)\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall n : M_x(n)\downarrow \\ \uparrow & \text{si } \not\forall n : M_x(n)\downarrow \end{cases}$

Exercici 7.9. La función característica de un conjunto C se define como:
$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si } x \notin C \end{cases}$
Demuestra que C es decidible si y solo si su función característica χ_C es computable.

Exercici 7.10. Justifica si los siguientes conjuntos de parejas son funciones, y si son funciones computables.

(a) φ_3.

(b) $\{\langle x, y\rangle \mid M_x(x) = y\}$.

(c) $\{\langle x, y\rangle \mid M_x(x) \leq y\}$.

(d) $\{\langle x, y\rangle \mid M_x(x) \geq y\}$.

(e) $\{\langle x, y\rangle \mid M_x(x) = M_y(y)\}$.

(f) $\{\langle x, y\rangle \mid M_x(x) \text{ para en } y \text{ pasos o más}\}$.

(g) $\{\langle x, y\rangle \mid M_x(x) \text{ para en exactamente } y \text{ pasos}\}$.

(h) $\{\langle x, 1\rangle \mid M_x(x)\downarrow\} \cup \{\langle x, 0\rangle \mid M_x(x)\uparrow\}$.

(i) $\{\langle x, 1\rangle \mid M_x(x)\downarrow\}$.

(j) $\{\langle x, 0\rangle \mid M_x(x)\uparrow\}$.

(k) $\{\langle x, y\rangle \mid y = |\{z | M_x(z)\downarrow\}|\}$.

Tema 8. Problemes naturals indecidibles

Teoria

M. Sipser,
Introduction to the Theory of Computation, Third edition, Cengage Learning, 2012
Section 5.2 A Simple Undecidable Problem
Section 6.2 Decidability of Logical Theories.

Veure els següents vídeos:

Accessibilitat i PCP-INI . . . .

PCP, Intersecció no buida, ambigüitat . . . .

No universalitat, Lògica dels mots . . . .

Exercicis per a l'avaluació contínua

Exercici 8.1. Demostrad que los siguientes problemas son indecidibles reduciendo desde accesibilidad de palabras.

(a) $\{\langle u, v, R\rangle | \exists w_1, w_2 : u \to_R^* w_1 v w_2\}$.

(b) $\{\langle u, v, R\rangle | u \to_R^* vv\}$.

(c) $\{\langle u, v, R\rangle | uu \to_R^* v\}$.

(d) $\{\langle u, v, w, R\rangle | u \to_R^* v$ sin pasar por $w\}$.

(e) $\{\langle u, v, R\rangle | u \to_R^* v \wedge \forall (l \to r) \in R : |l| = 1 \vee |r| = 1\}$.

(f) $\{\langle u, v, R = \{l_1 \to r_1, \ldots, l_n \to r_n\}\rangle \mid u \to_R^* v \wedge |l_1|, |r_1|, \ldots, |l_n|, |r_n| \leq 2 \wedge |u| = |v| = 1\}$.

(g) $\{\langle u, v, R\rangle | u \to_R^* v$ usando cada regla de R al menos una vez$\}$.

Exercici 8.2. Demostrad que los siguientes problemas son indecidibles reduciendo desde PCP o PCP-INI.

(a) $\{\langle u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n\rangle | n \in \dot{2} + 1 \wedge \exists 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n : (k > 0 \ \wedge \ u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k})\}$.

(b) $\{\langle u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n\rangle | \exists 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n : (k \in \dot{2} \wedge u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k})\}$.

(c) $\{\langle u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n\rangle | \ |u_1|, |v_1|, \ldots, |u_n|, |v_n| \in \dot{2} \wedge \exists 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n : (k > 0 \ \wedge \ u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k})\}$.

(d) $\{\langle u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n\rangle | u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n \in \{0, 1\}^* \wedge \exists 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n : (k > 0 \ \wedge \ u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k})\}$.

Exercici 8.3. Demostrad que los siguientes problemas son indecidibles reduciendo desde intersección vacía, o desde intersección no vacía.

(a) $\{\langle G_1, G_2\rangle \mid |\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2)| \geq 3\}$.

(b) $\{\langle G_1, G_2\rangle \mid |\mathcal{L}(G_1)\cap\mathcal{L}(G_2)| = 3\}$.

(c) $\{\langle G_1, G_2\rangle \mid |\mathcal{L}(G_1)\cap\mathcal{L}(G_2)| = \infty\}$.

(d) $\{\langle G_1, G_2\rangle \mid |\mathcal{L}(G_1)| = |\mathcal{L}(G_2)| = \infty \wedge |\mathcal{L}(G_1)\cap\mathcal{L}(G_2)| \neq \infty\}$.

(e) $\{\langle G_1, G_2\rangle \mid \Sigma_{G_1} = \Sigma_{G_2} = \{a,b\}^* \wedge \mathcal{L}(G_1)\cap\mathcal{L}(G_2) \neq \emptyset \wedge \mathcal{L}(G_1)\cap\mathcal{L}(G_2)\cap\{aa,bb\}^* = \emptyset\}$.

(f) $\{\langle G_1, G_2\rangle \mid \mathcal{L}(G_1)\cap\mathcal{L}(G_2) \neq \emptyset \wedge \nexists w \in (\mathcal{L}(G_1)\cap\mathcal{L}(G_2)) : |w| \in \dot{2}+1\}$.

(g) $\{\langle G_1, G_2\rangle \mid \mathcal{L}(G_1)\cap\mathcal{L}(G_2) \neq \emptyset \wedge \nexists w \in (\mathcal{L}(G_1)\cap\mathcal{L}(G_2)) : |w| \in \dot{2}\}$.

Exercici 8.4. Demostrad que los siguientes problemas son indecidibles reduciendo desde no universalidad.

(a) $\{G \mid \mathcal{L}(G) \neq \Sigma^* - \{\lambda\}\}$.

(b) $\{G \mid \mathcal{L}(G) \neq \Sigma^* - \{aab\}\}$.

(c) $\{G \mid \mathcal{L}(G) \not\supseteq (aab\Sigma^*)\}$.

(d) $\{G = \langle V, \Sigma, \delta, S\rangle \mid \Sigma = \{a,b\} \wedge \mathcal{L}(G) \neq \Sigma^*\}$.

(e) $\{G = \langle V, \Sigma, \delta, S\rangle \mid \Sigma = \{a,b\} \wedge \mathcal{L}(G) \neq (aa+bb)^*\}$.

(f) $\{G = \langle V, \Sigma, \delta, S\rangle \mid \Sigma = \{a,b\} \wedge \mathcal{L}(G) \neq (aa+bb+ab+ba)^*\}$.

(g) $\{G = \langle V, \Sigma, \delta, S\rangle \mid \Sigma = \{a,b,c\} \wedge \mathcal{L}(G) \neq \Sigma^*\}$.

(h) $\{G \mid |\overline{\mathcal{L}(G)}| = \infty\}$.

Exercici 8.5. Sea L un lenguaje regular. Demuestra que o bien $\{G \mid \mathcal{L}(G) = L\}$ o bien $\{G \mid \mathcal{L}(G) = \bar{L}\}$ es indecidible. Pista: Procede por reducción al absurdo suponiendo que ambos son decidibles y concluyendo que entonces universalidad es decidible.

Exercici 8.6. Demuestra que los siguientes problemas son indecidibles reduciendo desde veracidad de fórmulas de lógica de primer orden interpretadas sobre palabras.

(a) El problema de saber si una descripción de la forma $\{w|F(w)\}$, donde F es una fórmula de lógica de palabras con variable libre w, representa al lenguaje $(a+b)^*$.

(b) El problema de saber si una descripción de la forma $\{w|F(w)\}$, donde F es una fórmula de lógica de palabras con variable libre w, representa al lenguaje vacío.

(c) El problema de saber si una descripción de la forma $\{w|F(w)\}$, donde F es una fórmula de lógica de palabras con variable libre w, representa al lenguaje a^*b^*.

(d) El problema de saber si una descripción de la forma $\{w|F(w)\}$, donde F es una fórmula de lógica de palabras con variable libre w, representa al lenguaje de las palabras palíndromas sobre $\{a,b\}$.

(e) El problema de saber si una descripción de la forma $\{w|F(w)\}$, donde F es una fórmula de lógica de palabras con variable libre w, representa algun lenguaje finito.

(f) El problema de saber si una descripción de la forma $\{w|F(w)\}$, donde F es una fórmula de lógica de palabras con variable libre w, representa algun lenguaje incontextual.

Exercici 8.7. Demuestra que los siguientes problemas son decidibles:

(a) $\{\langle u, v, R = \{l_1 \to r_1, \ldots, l_n \to r_n\}\rangle \mid u \to_R^* v \wedge \forall 1 \leq i \leq n : |l_i| \geq |r_i|\}$.

(b) $\{\langle u, v, R = \{l_1 \to r_1, \ldots, l_n \to r_n\}\rangle \mid u \to_R^* v \wedge \forall 1 \leq i \leq n : |l_i| \leq |r_i|\}$.

(c) $\{\langle u, v, R = \{l_1 \to r_1, \dots, l_n \to r_n\}\rangle \mid u \to_R^* v \wedge |R| = 1\}$.

(d) $\{\langle u, v, R = \{l_1 \to r_1, \dots, l_n \to r_n\}\rangle \mid u \to_R^* v \wedge |u|, |v|, |l_1|, |r_1|, \dots, |l_n|, |r_n| \leq 10 \wedge \Sigma = \{0, 1\}\}$.

(e) $\{\langle u, v, R = \{l_1 \to r_1, \dots, l_n \to r_n\}\rangle \mid u \to_R^* v \wedge u, v, l_1, r_1, \dots, l_n, r_n \in a^*\}$.

(f) $\{\langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\rangle | u_1, v_1, \dots, u_n, v_n \in a^* \exists 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n : u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}\}$.

(g) $\{\langle G, A\rangle \in \texttt{CFG} \times \texttt{DFA} \mid \mathcal{L}(G) \not\subseteq \mathcal{L}(A)\}$.

Exercici 8.8. Completa la siguiente reducción de PCP a intersección no vacía: $\langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\rangle \mapsto \langle S \to u_1 S v_1^R | \cdots | u_n S v_n^R | u_1 \# v_1^R | \cdots | u_n \# v_n^R\ , \ \dots ? \dots\rangle$.

Exercici 8.9. Cuales de los siguientes problemas pueden ser decidibles y cuales pueden ser indecidibles:

(a) $\{\langle u, v\rangle \mid u \to_R^* v\}$ donde R es un sistema de reescritura fijado de antemano.

(b) $\{R \mid u \to_R^* v\}$ donde u, v son palabras diferentes fijadas de antemano.

(c) $\{\langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\rangle | \exists 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n : u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}\}$ donde k es un número fijado de antemano.

(d) $\{\langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\rangle | \exists 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n : u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}\}$ donde n es un número fijado de antemano.

(e) $\{G | \mathcal{L}(G) \supseteq \mathcal{L}(G')\}$ donde G' es una gramática fijada de antemano.

(f) $\{G | \mathcal{L}(G) \not\subseteq \mathcal{L}(G')\}$ donde G' es una gramática fijada de antemano. Pista: piensa en la reducción de PCP a intersección no vacía del problema 8.8.

(g) $\{G | \mathcal{L}(G) \cap \mathcal{L}(G') \neq \emptyset\}$ donde G' es una gramática fijada de antemano. Pista: piensa en la reducción de PCP a intersección no vacía del problema 8.8.

(h) $\{G \in \texttt{CFG} \mid \mathcal{L}(G) \not\supseteq \mathcal{L}(A)\}$ donde A es un DFA fijado de antemano.

Exercici 8.10. Dado un sistema de reescritura $R = \{l_1 \to r_1, \dots, l_n \to r_n\}$ sobre el alfabeto $\{a, b\}$, llamaremos w_R a la palabra $\# l_1 \$ r_1 \# l_2 \$ r_2 \# \dots \# l_n \$ r_n \#$, donde $\#$ y $\$$ son símbolos nuevos. Esencialmente, w_R es una palabra que codifica el sistema de reescritura. Demuestra que existe una fórmula de lógica de primer orden sobre palabras $F(x, y, z)$, donde x, y y z son variables libres, que cumple lo siguiente: dadas dos palabras u, v y un sistema de reescritura R, todos ellos sobre el alfabeto $\{a, b\}$, resulta que $u \to_R^* v \Leftrightarrow F(u, v, w_R)$.

Exercici 8.11. Aprovechando el resultado del ejercicio anterior, Demuestra que los siguientes problemas son indecidibles reduciendo desde veracidad de fórmulas de lógica de primer orden interpretadas sobre palabras.

(a) El problema de saber si una descripción de la forma $\{w | F(w)\}$, donde F es una fórmula de lógica de palabras con variable libre w, representa algun lenguaje decidible.

(b) El problema de saber si una descripción de la forma $\{w | F(w)\}$, donde F es una fórmula de lógica de palabras con variable libre w, representa algun lenguaje semidecidible.

Exercici 8.12. Justifica que $\{G | \mathcal{L}(G)$ no es regular$\}$ es indecidible.
[*Pista*: retoca la reducción de PCP a intersección no vacía $\langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\rangle \mapsto \langle G_1, G_2\rangle$ así: $\langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\rangle \mapsto \langle \{a^m b^m\} \cdot G_1, \{a^m b^m\} \cdot G_2\rangle$, donde a y b son símbolos nuevos. Haz lo mismo con la reducción de PCP a no-universalidad. Justifica que la gramática resultante, si no es universal, entonces el lenguaje que genera no es regular.]