

## חקירת ההתנהגות הכאוטית בטפטוף טיפות מים

עילי מליניאק 305434896

איתמר קרבי 204258511

### תקציר

בניסוי נחקרה הדינמיקה המורכבת של טיפות מים המטפטפות דרך פיה. המערכת בעלת מאפיינים לא לינאריים ותחת תנאים מסויימים מפגינה התנהגות כאוטית, אולם בבסיסה היא נגזרת ממודל מפשט המתאר את טיפת המים על הפיה כאוסילטור חד מימדי מאולץ מרוסן. החקירה התבצעה לאחר התמקדות בחתך פואנקרה שבוחן את הפרשי הזמנים בין נפילת שתי טיפות סמוכות. הכלים בהם השתמשנו לשם ניתוח התופעות היו מפות החזרה (return map) לניתוח דינמיקת המערכת, מפות הביפורקציה (bifurcation map) לניתוח תלות השטף בעוצמת האי לינאריות במערכת.

במהלך הניסוי צפינו בתופעת הכפלת מחזורים (period doubling), כאוס ממימדים שונים ובתופעות מעניינות אשר לא צפינו- קשר בין הטיפה ה- $n$  לטיפה ה- $n+2$  ותופעות של 'זיכרון' של טיפות מים. בנוסף הצענו תיאוריה הקושרת את קוטר הפיה לשטף בו המערכת מפגינה התנהגות לא לינארית. כמו כן הצענו הרחבות אפשריות אשר יעזרו באישוש תיאוריה זו ובבחינת התופעות אשר חזינו בהן ועדיין אין לנו הסבר עליהן.

### מבוא

הנושא של התנהגות טפטוף טיפות הינו נושא אשר נחקר רבות בשנים האחרונות. המוטיבציה למחקר הרב נובעת הן הודות לאפליקציות הרבות שלו בתעשייה (מדפסות הזרקת דיו, סידור והפרדת ביו-שבבים (bio-chip) תרסיסי ציפוי (spray coating) ועוד), והן הודות לתופעות הפיסיקליות בתחום הכאוס ומערכות לא לינאריות אשר נצפות בניסויים אלו. בניסוי זה בחנו את המאפיינים הכאוטיים של טיפות מים דרך מערכת טפטוף פשוטה ביותר. זווית ההסתכלות שלנו בניסוי היתה בחינת טפטוף הטיפות וניתוח תופעות כאוטיות בדינמיקת טפטוף המים.

### רקע תיאורטי

#### הכוחות הפועלים בניסוי ופירוט על מתח פנים

בניסוי בחנו תופעות כאוטיות שנגרמות בעת נפילת טיפות מפית זכוכית דולפת בשטף מים מסוים. ראשית נציג מודל תיאורטי שמנסה לתאר את תנועת הטיפה עד רגע ההתנתקות, נסביר מדוע מדובר בתופעה כאוטית ונציג עקרונות בסיסיים בבחינת ומדידת כאוס בהם השתמשנו בניתוח התוצאות.

הכוחות הפועלים על הטיפה הם כוח הכבידה, אשר גדל עם הגידול במשקל הטיפה כתוצאה מהשטף הקבוע. הכוח השני שפועל במערכת הוא כוח מתח הפנים. בסיסו של הכוח הוא משיכה בין מולקולות המים על שפת הפייה. הכוח נובע ממשיכה חשמלית בין מולקולות מים והוא מונע מהטיפה להתנתק ממסת המים שנמצאת בתוך המבחנה, ודורש ממנה להיות בעלת מסה גדולה מספיק כדי ליפול.

$$[\gamma] = \frac{J}{m^2}$$

הקשר בין מתח פנים ללחץ בין שני זורמים (מים ואוויר לדוגמה) נתון ע"י משוואת יאנג-לפלאס (young-laplace):

$$(1) \Delta p = \gamma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$(1.5) F_c = 2\pi r \gamma$$

כאשר  $\Delta p$  מתאר את הפרש הלחצים בין הזורמים,  $\gamma$  הוא מתח הפנים של הנוזל ו  $r_1$   $r_2$  הם רדיוסי העקמומיות בצירים מאונכים של הנוזל. ניתן לראות שהלחץ הפועל על טיפת מים קטן ככל שהטיפה גדלה. את הכוח הפועל על הטיפה נקבל מהכפלת משוואה (1) בשטח הפנים של הטיפה ונקבל שהכוח גדל ככל שרדיוס הטיפה גדל. במקרה של ספירה מושלמת נקבל את הכוח הקפילרי (משוואה 1.5) התלוי בהיקף<sup>1</sup>.

מודל מקובל שמתאר את האינטרקציה בין שני הכוחות האלה על שפת הפייה הוא של אוסילטור הרמוני ומשוואת התנועה המוכרת היא :

$$(2) \frac{d(mv)}{dt} = mg - ky - \alpha v$$

כאשר :

- $mv$  הוא התנע, ומדובר במשוואה הנובעת מהחוק השני של ניוטון כאשר המסה לא קבועה.
- $mg$  הוא כוח הגרביטציה שפועל על הטיפה כלפי מטה. כאשר בפועל מתקיים  $m = m_0 + \varphi t$  - מסת הטיפה שווה לסכום של המסה ההתחלתית עם המכפלה של השטף בזמן (שינוי המסה בזמן).
- $ky$  – הינו קירוב לינארי של כוח מתח הפנים הנובע ממשוואה (1), סביב נקודת שיווי המשקל.  $y$  הינו המרחק מנקודת שיווי המשקל ו- $k$  הינו קבוע של המערכת אשר תלוי בכוח מתח הפנים אשר תלוי בעצמו ברדיוס העקמומיות של הטיפה, ובתכונות של המים כמו טמפרטורת המים ריכוז סבון וכו'.
- $\alpha v$  הוא כוח מרסן אשר פרופורציונלי למהירות הטיפה ולא נעמיק בו.

משוואה (2) אשר מתארת את תנועת הטיפה על שפת הפייה היא של אוסילטור הרמוני מאולץ ומרוסן. המשוואה מתקיימת עד הרגע בו הטיפה מגיעה למצב קריטי אשר בו היא מתנתקת- מצב הקשור לגודלה, מיקומה ומהירותה. משיקולי רציפות- מיקום, מהירות ומסת הטיפה ברגע ההתנתקות קובעים את הערכים ההתחלתיים של הטיפה הבאה, כלומר את תנאי ההתחלה של משוואה (2) עבור הטיפה הבאה, וספציפית מתקיים שמהירות ומיקום הטיפה החדשה בתחילתה שווים למיקום ומהירות הטיפה הקודמת בהתנתקותה, ומסת הטיפה החדשה בתחילתה מושפעת (פונקציה של) ממסת הטיפה הקודמת בהתנתקותה. או במשוואות :

$$(3) y_{n+1}^i = y_n^f ; v_{n+1}^i = v_n^f ; m_{n+1}^i = f(m_n^f)$$

אם כן, ממשוואה (3) נבין שכדי לפתור את משוואה (2) עבור הטיפה ה- $n$  נידרש לדעת את תנאי ההתחלה של המשוואה ולשם כך נהיה חייבים לפתור את המשוואה עבור הטיפה ה- $n-1$ , לאפיין את רגע ההתנתקות וכך תיאורטית נוכל לקבוע את תנאי ההתחלה של המשוואה עבור הטיפה ה- $n$ . מתמטית מדובר במערכת מד"ר אשר מצומדות זו לזו דרך תנאי הסיום וההתחלה, ובפועל תנועת טיפה ורגע נפילתה תלויים בתנועת הטיפה הקודמת. מערכת משוואות מסוג זה יכולה לגרום לתופעות כאוטיות במקרים מסוימים כפי שנציג בהמשך.

## מערכות לא לינאריות וכאוס

מערכות פיסיקליות אשר המשוואות המתמטיות שמתארות אותן הן לא לינאריות הן מורכבות ולעתים רבות לא ניתנות לפתרון. מצב זה מעיד למעשה שהמערכת יכולה להיות לא לא דטרמיניסטית, ולא ניתן יהיה לחזות את התנהגות המערכת בזמן, ולאפיין את התפתחות המערכת בטווח הארוך ולעתים גם בטווח הקצר.

ניתן לתאר דינמיקה של מערכת באמצעות הערכים שהיא מקבלת במרחב הפאזה ובכך לאפיין את הדינמיקה. תחום במרחב הפאזה בו מסלולים בתחום זה נמשכים למסלול מסוים נקרא אגן משיכה (basin of attractor) ומסלול הגבול נקרא **אטרקטור (attractor)**. האטרקטור הפשוט ביותר הוא נקודת שבת במרחב הפאזה.

כאמור, היכולת לתאר באופן מלא מערכת פיסיקלית מתבססת על מרחב הפאזה. אולם, לעתים רבות מדובר במרחב ממימד גבוה אשר קשה למדוד אותו באופן מלא. כדי להתגבר על מגבלות אלה כלי חזק הוא להתבונן על תת מרחב של מרחב הפאזה ולנתח את התנהגות המערכת באמצעות תת המרחב. תת מרחב מסוים מתוך מרחב הפאזה נקרא חתך פואנקרה (Poincaré conjecture) (איור 2).

כך למשל, בניסוי זה מרחב הפאזה הוא תלת מימדי- ומתאר בכל רגע נתון את מיקום הטיפה, מהירותה והמסה שלה (כל אחד מהם חד מימדי). הערך אותו מדדנו היה משך הזמן בין נפילת שתי טיפות. בכך צמצמנו את ההתבוננות שלנו על תת מרחב דו-מימדי.

בהסתכלות על חתך פואנקרה של מרחב הפאזה חשוב לתאר שני כלים מרכזיים של ניתוח הדינמיקה. הכלי הראשון הוא **מפת החזרות** (Poincaré return map): לאחר צמצום מרחב הפאזה לחתך פואנקרה ניתן לנתח את מפת התוצאות הדיסקרטית שהחתך מספק ובכך לבחון את המצבים האפשריים של המערכת. במפת החזרות ניתן לצפות באטרקטורים של המערכת וכך לאפיין את מחזוריות המערכת. לדוגמא- במפה המתארת מערכת בעלת מחזוריות מוגדרת נקודות החיתוך יהיו תחומות היטב בין אזורים דיסקרטים בעוד במפה המתארת מערכת כאוטית (בעלת מחזוריות אינסופית) נקודות החיתוך יתפרשו על פני שטח רציף בתחום המפה.

כלי משמעותי נוסף לתיאור מערכות כיאוטיות הוא **מפות ביפורקציה**. בדינמיקה של מערכות לא לינאריות ביפורקציה היא התופעה לפיה שינוי קטן בפרמטר רציף משפיע על התנהגות המערכת - משנה את דינמיקת המערכת בצורה איכותית. באמצעות מפות ביפורקציה ניתן לראות כיצד הדינמיקה של המערכת משתנה עם שינוי הפרמטר הרציף, בניסוי זה מדובר בשטף המים, ובאופן ספציפי כיצד האטרקטור משתנה כתוצאה מכך.

מערכות לא לינאריות, בתנאים מסוימים יכולות לתאר מצבים כאוטיים וניתן לאפיין אותן באמצעות:

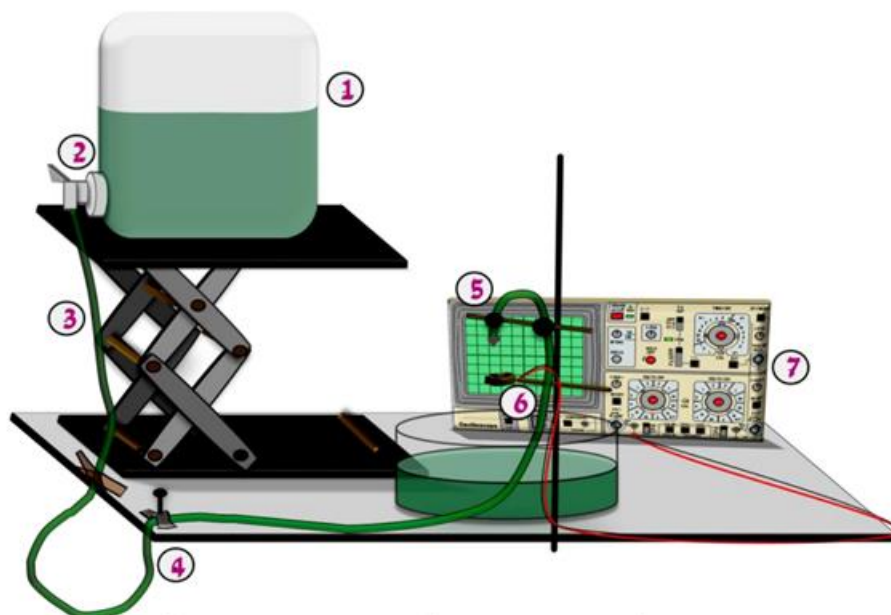
- רגישות גבוהה לתנאי התחלה- במצב כאוטי, שינוי מזערי (אינפניטיסימלי) בתנאי ההתחלה יכול לשנות באופן משמעותי את דינמיקת המערכת. כך למשל **במפת החזרות** נראה דינמיקה שונה לחלוטין עבור בעיה זחה, עם תנאי התחלה שונים.
- ספקטרום רציף של ערכים חתך פואנקרה- במצב מחזורי הערכים יכולים להימדד רק ערכים מסוימים בחתך פואנקרה. כאשר מדובר במצב כאוטי המערכת תמלא רצף מסוים של ערכים בחתך (אטרקטור רציף למערכת). כך למשל נוכל לאפיין הגעה לכאוס **במפת ביפורקציה** כאשר נקבל ספקטרום ערכים רציף של הערך הנמדד בחתך פואנקרה.

## מהלך הניסוי

בניסוי השתמשנו במערכת המתוארת באיור 1. קיבענו את מיכל המים בגובה 27cm ומילאנו את המיכל (1) במים עם ריכוז סבון של  $0.10 \pm 0.06\%$  (סבון כלים בריכוז של 18% חומר פעיל). מיקמנו פיה בקוטר מסוים (5) ומיקמנו אותה בגובה 22.8cm, לאורך הניסוי לא שינינו את גובה המיכל והפייה.

לאחר הרכבת המערכת פתחנו את ברז המיכל בעדינות עד שנוצר טפטוף. טיפות המים אשר נפלו מהפיה עוברות דרך שער אופטי והמעבר דרך השער מבוטא בהפרעה אשר יוצרת, ע"י מחולל מתח, עלייה חדה (פולס) במתח. בעזרת אוסצילוסקופ, אשר מחובר למחולל המתח, מדדנו את הפולסים כפונקציה של הזמן וכך התקבל ביטוי לזמן שבו כל טיפה עברה את השער. הפרש הזמנים טיפה  $T_n$  (sec) לטיפה שאחריה  $T_{n+1}$  (sec) היווה את חתך פואנקרה בניסוי שלנו ועבורו מדדנו מפות החזרה.

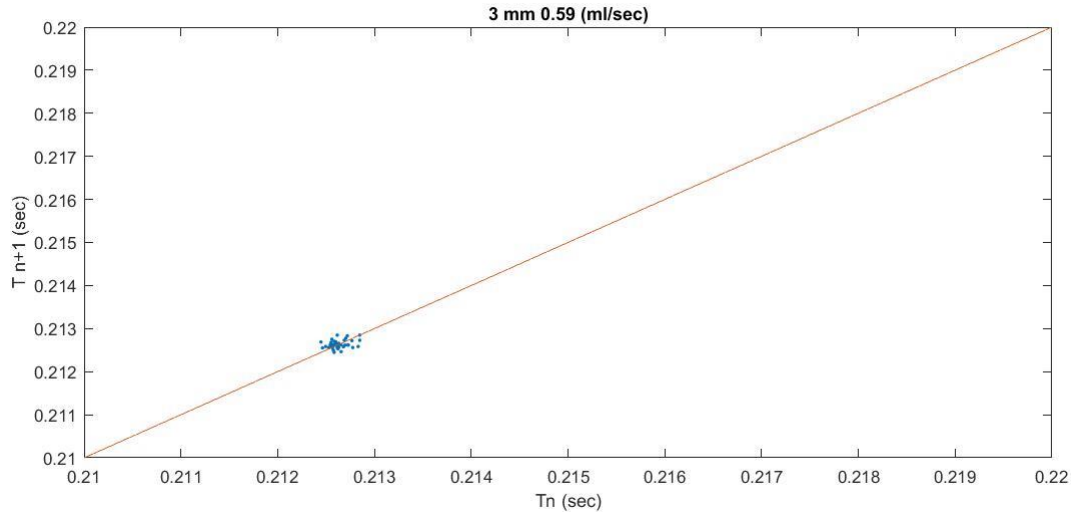
את שטף המים מדדנו בעזרת כלי קיבול אשר ממוקם מתחת לשער האופטי. מדדנו את זמן מילוי הכלי בעזרת שעון ולאחר כל מדידה שקלנו אותו. ע"י חלוקת משקל המים בזמן המילוי קיבלנו את שטף המים למדידה. חזרנו על המדידות כאשר בכל פעם הגדלנו את שטף המים עד להגעה לזרם עמיד. השטף היווה את הפרמטר הרציף אותו שינינו ובחנו כיצד שינויו משנה את דינמיקת המערכת. חזרנו על ניסוי זה 4 פעמים כל פעם עם פיה בקוטר שונה, כאשר הקטרים היו של 1.5, 2, 2.5 ו 3 מ"מ.



איור 1- מערכת הניסוי. 1-מיכל נוזלים. 2-ברז המיכל. 3- רגליים מתכווננות. 4- צינורית. 5- פיה. 6- שער אופטי. 7- אוסצילוסקופ. לא באיור: מחולל מתח אשר מחבר בין השער האופטי לאוסצילוסקופ.

## ניתוח של מפות החזרה

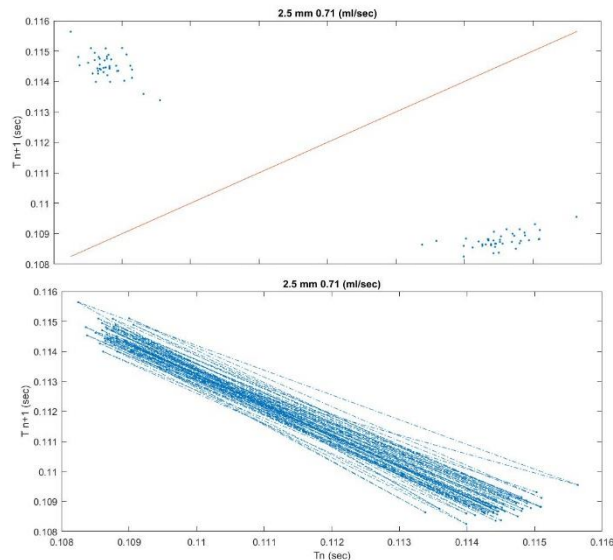
ראשית לכל, נדגיש כי סוגי הדינמיקה שארבע הפיות איפשרו דומה, ונבדלת זו מזו רק בערכי השטף עבורם מתקיים השינוי האיכותי בדינמיקה ולכן ניתוח מפות החזרה שלנו יוצג במקביל עבור הטיפות בקטרים השונים. ניתן להתרשם שבארבע הפיות דינמיקת הטפטוף בשטפים הנמוכים היא בעלת מחזור אחד. הדבר בא לידי ביטוי במקבץ בודד של נקודות אשר יושבות בקירוב על הישר  $T(n+1)=T(n)$ , (איור 2).



איור 2- מפת החזרה המתארת חתך פואנקרה של המערכת. המשתנים אשר מרכיבים את החתך הם זמן המחזור של הטיפה  $T_n$  (בציר x) וזמן המחזור של הטיפה  $n+1$  ( $T_{n+1}$  בציר y). קוטר הפיה הוא 3 מ"מ ושטף המים במדידה הוא  $0.59 \pm 0.01$  ml/sec. ניתן לראות שכל הנקודות מקובצות בתחום אחד (זמן מחזור של 0.2125 שני) ושהן נמצאות על הישר  $T_n = T_{n+1}$  המסומן באדום. במדידה זו המערכת בעלת מחזור אחד.

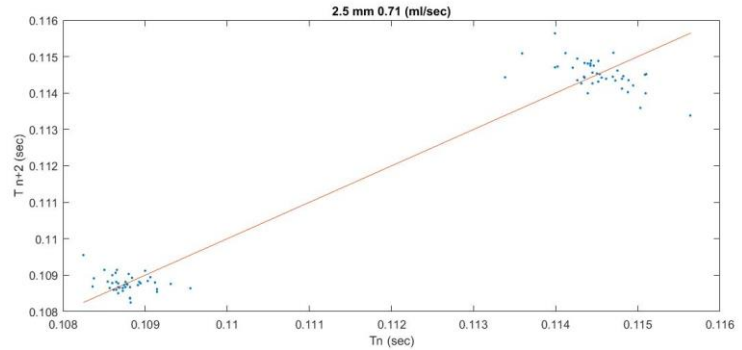
הגדלת השטף גרר פיצול של זמן המחזור לשני זמני מחזור (double period), אשר הינו צורת התפתחות מוכרת של מערכות כאוטיות. מצב זה מתבטא בשני מקבצי נקודות אשר משתקפים בצורה סימטרית סביב הציר  $T_{n+1} = T_n$  (איורים 3-5). מניית מפות double period נזהה את התלות בין מחזור קצר לארוך- מחזור קצר גורר אחריו מחזור ארוך ולהיפך (ראה איור מס' 4). דינמיקה זו של double period למערכת יש דטרמניזם ברור- לפיו באם ידוע מה ההפרש בין הטיפה האחרונה לקודמתה ניתן לקבוע מה משך הזמן שיקח לטיפה הבאה ליפול (מצב אינו מובן מאליו כאשר הדינמיקה היא אוטית). כמו כן, ניתן לשרטט את התלות בין  $T(n+2)$  ל- $T(n)$  ובמקרה של double period מובן כי הנקודות אמורות לשבת על הישר  $T(n+2) = T(n)$  (איור 5). נדגיש אם כן, כי ניתוח מפת החזרה וחתך הפואנקרה לא מאפשר ניתוח של דינמיקת הטיפה במלואה (במדידה של חתך הפואנקרה בלבד אובד חלק מהמידע) אבל נוכל לקבוע כי הטיפה נופלת ב-2 מצבים שונים אשר מבוטאים באמצעות זמני המחזור (חתך פואנקרה).

איור 3- קוטר הפיה 2.5 מ"מ ושטף המים  $0.71 \pm 0.02$  ml/sec. ניתן לזהות בבירור את שני המוקדים בהם מרוכזות על הנקודות. המוקדים סימטריים סביב הציר  $T_n = T_{n+1}$  (מסומן באדום). במערכת ישנם אם כן, שני מחזורים (double period)



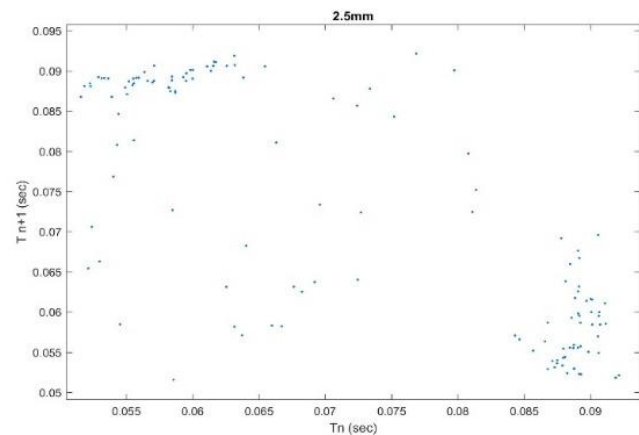
איור 4- אותה המערכת אשר מוצגת באיור 3 בהגדלה סביב שני המחזורים כאשר נוספו קווים המקשרים בין נקודות עוקבות. ניתן שכל שתי נקודות עוקבות נמצאות במחזורים שונים. נסיק מכך שמחזור קצר גורר אחריו מחזור ארוך ולהיפך.

איור 5- מערכת זהה לזו אשר באיור 3, בעלת דינמיקה של *period doubling*. כאשר הפעם המשתנים במפה הם  $T_n$  ו  $T_{n+2}$ . ניתן לראות שהנקודות נמצאות על הישר  $T_n=T_{n+2}$  (מסומן באדום).



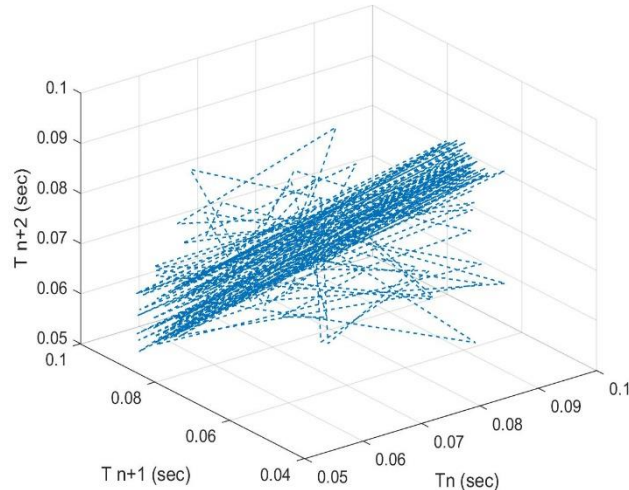
נוכל להגדיר שרירותית שכאשר ישנו זמן מחזור קצר תנאי הנפילה על המיקום, מהירות והמסה הם-  $T_{short}$   $y_1$ ;  $v_1$ ;  $m_1$ , וכאשר זמן הנפילה ארוך התנאים הם-  $y_2$ ;  $v_2$ ;  $m_2$ ,  $T_{long}$  ותחת ההנחה של משוואה (3) (תנאי סיום הם תנאי התחלה) נסיק כי נפילת טיפה ב-  $T_{long}$  גוררת את תנאי ההתחלה של  $T_{short}$ . כדי לבחון את ההשערה לפיה זמני המחזור השונים נותנים ביטוי לתנאי נפילה שונים נמליץ לבצע מחקר נוסף באמצעות מצלמה מהירה אשר תאפשר את מדידת מיקום ומסת (ומהירות כתלות ברזולוציה) הטיפה בעת הנפילה, כאשר הציפייה היא לראות כי עבור כל זמן מחזור תנאי הנפילה קבועים, אך שונים בין זמני מחזור שונים.

על אף שבקירוב לאחר שינוי השטף המעבר הוא מדינמיקה של מחזור אחד לשני מחזורים, ניתן להבחין בכך שהמערכת רגישה. במספר מפות החזרה ניתן לראות שישנן נקודות אשר אינן חלק מ-2 המחזורים המובהקים של המערכת (ראה איור מס' 6). דבר זה מצביע על רגישות המאפיינים הכאוטיים של המערכת- התנודתיות של זמני המחזור כתלות בשינוי



איור 6 - קוטר הפיה 2.5 מ"מ ושטף המים  $0.93 \pm 0.02$  ml/sec. מפה זו מציגה מצב של *double period* עם רעשים בדמות נקודות אשר מפורזות על פני המפה בצורה שנראית אקראית.

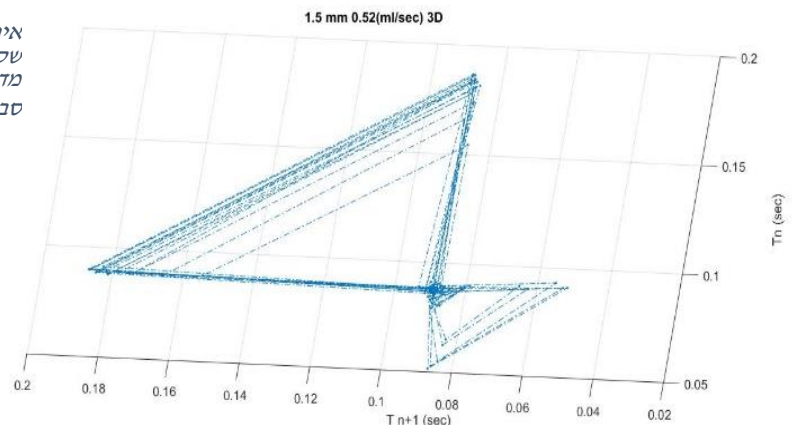
בשטף גדולה מאוד. על מנת להתמודד עם רגישות זו ניתחנו את הנתונים בדרכים נוספות. אחת הדרכים הוא הוספה של מימד נוסף לגרף והוא  $T_{n+2}$  ובכך הרחבת חתך פואנקרה ל תלת מימדי. נזכיר שאנו צופים לקשר שעבור זמן מחזור כפול הנקודות אמורות לשבת על הישר  $T_{(n+2)}=T_{(n)}$  כפי שניתן לראות באיור 7.



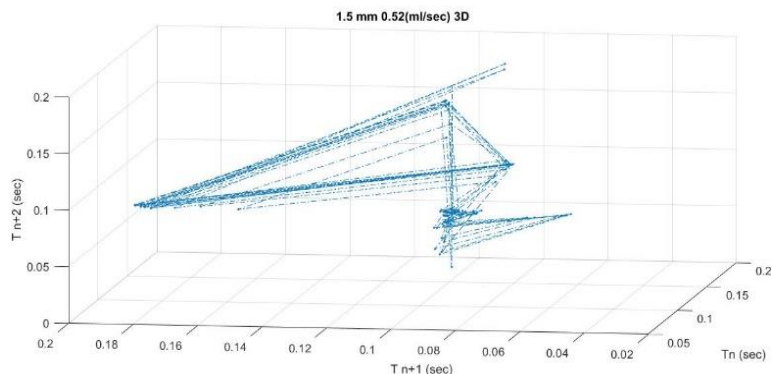
איור 7 - מפה לוגיסטית תלת מימדית של מערכת הזזה לזו אשר מוצגת באיור 6 אשר מציגה את  $T_n, T_{n+1}, T_{n+2}$ . במפה זו ניתן לראות בבירור את התרומה של מימד  $T_{n+2}$  להבנת המפה, וניתן לזהות באופן ברור יותר שהמערכת במצב של *double period*.

עם המשך ההגדלה של השטף, דינמיקת המערכת ממשיכה להשתנות וזמני המחזור של המערכת משתנים גם הם. כאשר נגדיל עוד יותר את השטף נגיע להכפלה נוספת של זמן המחזור. גם במקרה זה נעזרו בהוספת מימד  $T_{n+2}$  לגרף. דרך זו שפכה המקרים קשה לנתח את המפת ההחזרה באופן ישיר. גם במקרה זה נעזרו בהוספת מימד  $T_{n+2}$  לגרף. דרך זו שפכה אור על מפות אשר נראות כלא דטרמיניסטיות (מפות אשר עבור  $T_n$  מסוים ישנו יותר מ- $T_{n+1}$  אפשרי ולכן חיזוי הדינמיקה אינו אפשרי בהן) כאשר המימד הנוסף במקרים מסוימים הופך את המפה לדטרמיניסטית (ראה איורים 9-18). הוספת המימד  $T_{n+2}$  לחתך פואנקרה מרמזת כי מחזוריות הטפטוף היא כבר לא של 2 טיפות אלא של 4 טיפות, בהתאם להתפתחות המוכרת של דינמיקה לא לינארית לעבר האיזור של ההתנהגות הכאוטית.

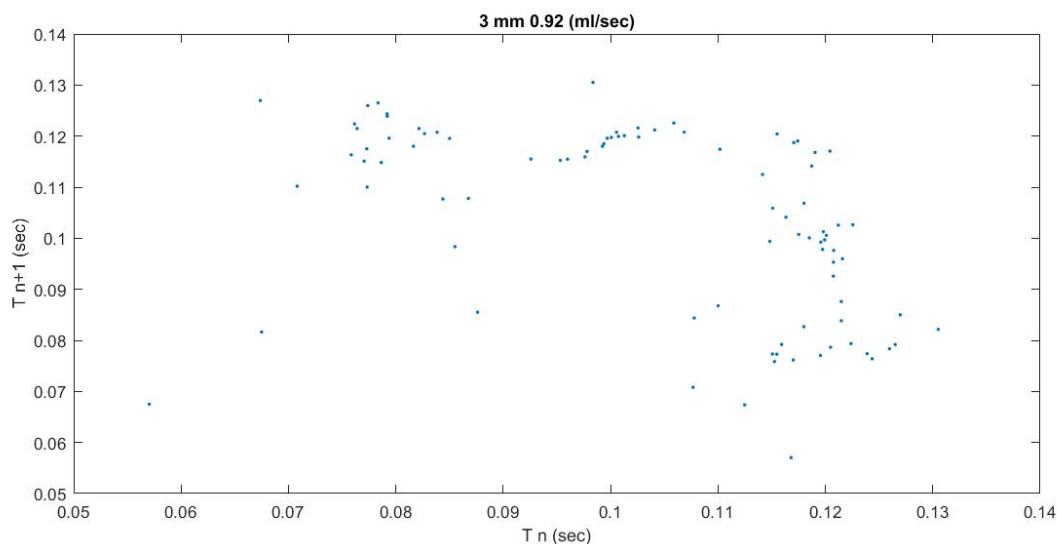
איור 8 - קוטר הפיה 1.5 מ"מ ושטף המים  $0.52 \pm 0.01$  ml/sec. ניתן לראות בבירור שקיימים יותר מ-2 מחזורים במערכת, אולם קשה לנתח את המחזוריות באופן מדויק מכיוון שהמפה אינה דטרמיניסטית. נוהה כי קיימת נקודת צומת מרכזית סביב  $(T_n, T_{n+1}) = (0.09, 0.09)$ .



איור 9- אותה המערכת אשר מוצגת באיור 8 כאשר הפעם המפה היא תלת מימדית (ציר  $T_{n+2}$  נוסף). ניתן לראות שהוספת המימד מפרידה בין נקודות הצומת ( $0.09, 0.09$ ) וניתן לראות כי למעשה מדובר ב-2 אוספי נקודות בעלי ערך  $T_{n+2}$  שונה. בכך הוספת המימד פותרת את שאלת הדטרמיניסטיות ומפשטת את ניתוח המחזוריים במערכת. במערכת זו יש ארבעה מחזוריים עיקריים.

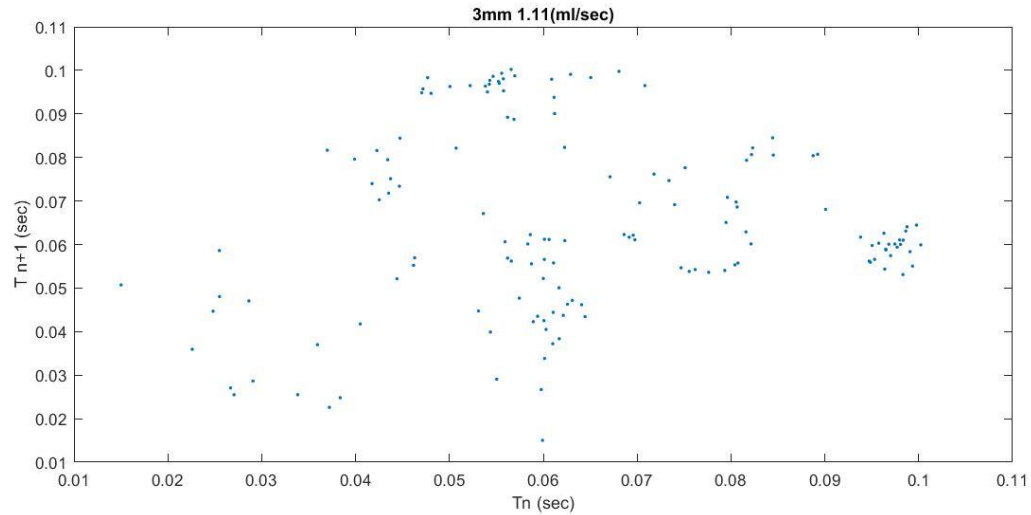


מפות ההחזרה שהוצגו עד כה הראו מחזוריות ברורה, בין קבוצות ערכים דיסקרטיות. הגדלת השטף אף יותר מייצגת דינמיקה שאינה בעלת מחזור מוגדר. בחלק מהמקרים ניתן לראות כי ע"ג חתך פואנקרה הנקודות מהוות בקירוב חלק ממסילה (איור 10) במקרים אלה מדובר בדינמיקה שאינה בעלת מחזוריות מוגדרת (יש מספר רציף של ערכים אפשריים ע"ג מישור פואנקרה) אולם הודנה דטרמיניסטית, זאת משום שעבור כל ערך של  $T_n$  ישנו ערך יחיד בקרוב של  $T_{n+1}$ , כלומר ניתן לזהות התנהגות כאוטית ממימד נמוך. אולם, עם העלאת השטף המחזוריות מורכבת אף יותר (איור 11) וגם הוספה של מימד לחתך פואנקרה אינה הופכת את המפה לדטרמיניסטית. מערכת כזו מתארת התנהגות כאוטית ממימד גבוה.

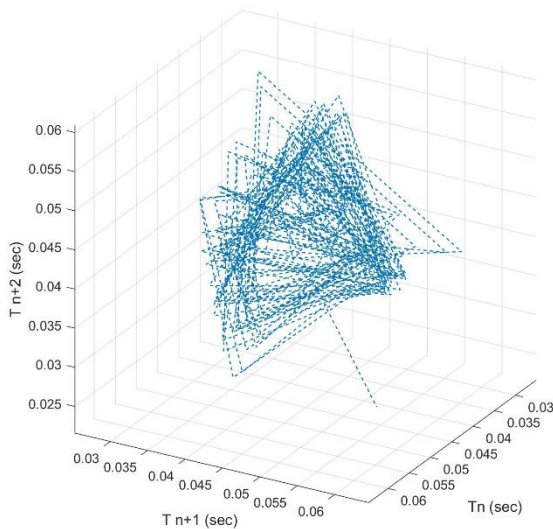


איור 10- קוטר הפיה 3 מ"מ ושטף המים הוא  $0.92 \pm 0.02$  ml/sec. ניתן לראות שבמפה זו אין שני מחזוריים מובהקים ומספר המחזוריים הקיימים במערכת גדול מ-2. יחד עם זאת ניתן להבחין שקיימים שני גושים עיקריים אשר מרכזים חלק גדול מהנקודות ואשר מקיימים סימטריה סביב הציר  $T_n = T_{n+1}$ , בנוסף ניתן להבחין בעקומה אשר נוצרת מפזיור הנקודות על המפה ומחברת את שני הגושים. עקומה זו מהווה חלק משחזור הפונקציה המתארת את הדינמיקה של המערכת. זוהי תחילתו של אטרקטור רציף והמערכת במצב של כאוס ממימד נמוך.

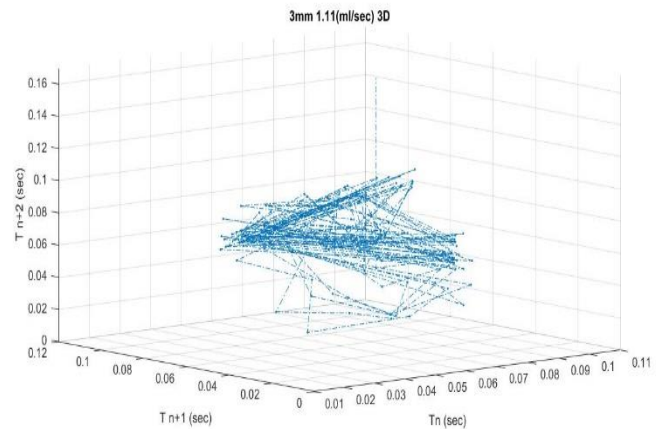




איור 11- קוטר הפיה 3 מ"מ ושטף המים  $1.11 \pm 0.03 \text{ ml/sec}$ . ניתן לראות שהאטרקטורים ממלאים חלק רחב מהמפה ושלא קיימים מקבצים בודדים. המחזוריות של המערכת אם כן, גדולה מאוד וההתנהגות היא כאוטית.

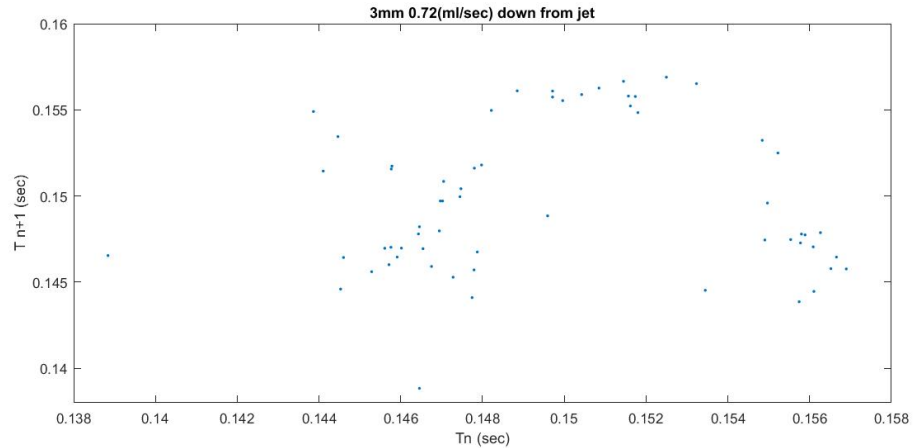


איור 12- מפה תלת מימדית של המערכת המוצגת באיור 11



איור 13- מפה תלת מימדית של מערכת במצב של כאוס. קוטר הפיה 2 מ"מ ושטף המים  $0.96 \pm 0.02 \text{ ml/sec}$

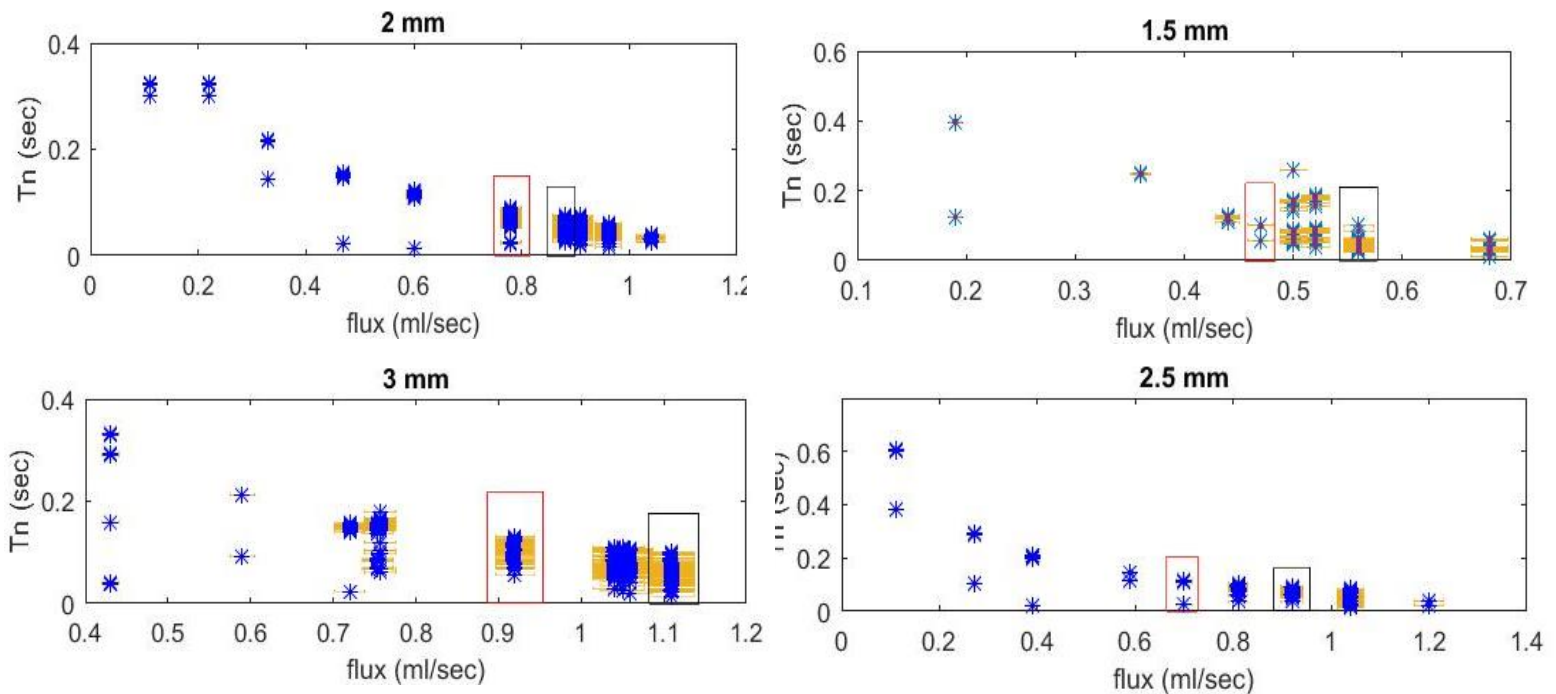
תופעה מעניינת נוספת אשר היינו עדים לה היא הזיכרון (Hysteresis) של טיפות המים. התופעה באה לידי ביטוי בכך שהדינמיקה של טפטוף הטיפות עבור שטף זהה שונה באם ההגעה לשטף היתה משטף נמוך (עלייה בשטף) או משטף גבוה (ירידה בשטף). כך למשל נזהה כי דינמיקת טפטוף המים עבור שטף של  $0.72 \pm 0.02 \text{ ml/sec}$  כאשר הורדנו את השטף (איור 14) דומה מאוד לדינמיקת הטפטוף עבור שטף של  $0.92 \pm 0.02 \text{ ml/sec}$  (איור 10) שההגעה אליו היתה תוך העלאת השטף. ההבדל מקבל משנה תוקף כאשר אנו בוחנים את מפת הביפורקציה עבור טיפה של 3 מ"מ (איור 4-15) בה ניתן לזהות כי עבור הפרש שטפים אלה, כאשר מדובר בעלייה בשטף, דינמיקת המערכת שונה באופן מאוד. התופעה, אשר לא הצלחנו לאפיין מבחינה כמותית, מעלה תאוריה לפיה לא די בערך שטף מסוים כדי לקבוע את דינמיקת המערכת אלא יש מספר מצבים אפשריים של דינמיקה עבור כל שטף, ואחד הגורמים המשפיעים הוא אופן טפטוף המים שכבר מתקיים בפועל. בדיקת מאפייני הזיכרון יכול להוות ניסוי המשך.



איור 14- קוטר הפיה 3 מ"מ. שטף המים הוא  $0.72 \pm 0.02$  ml/sec. מדידה זו התבצעה בירידה משטף גבוה וממצב של זרם. ניתן לזהות במפה המוצגת עקומה אשר מהווה חלק משחזור הפונקציה המתארת את הדינמיקה של המערכת בדומה לזו אשר נצפתה באיור 10. ההבדל בין השטפים בין שני הגרפים (20 ml/sec) מבטא את 'זיכרון' המערכת.

### ניתוח של מפות הביפורקציה

נעבור כעת לנתח את התפתחות המערכת, והשינויים האיכותיים בדינמיקה כאשר משנים באופן רציף את שטף המים הזורם במערכת. כלי חזק לסוג לניתוח מסוג זה הוא מפות הביפורקציה שכבר הוזכרו.

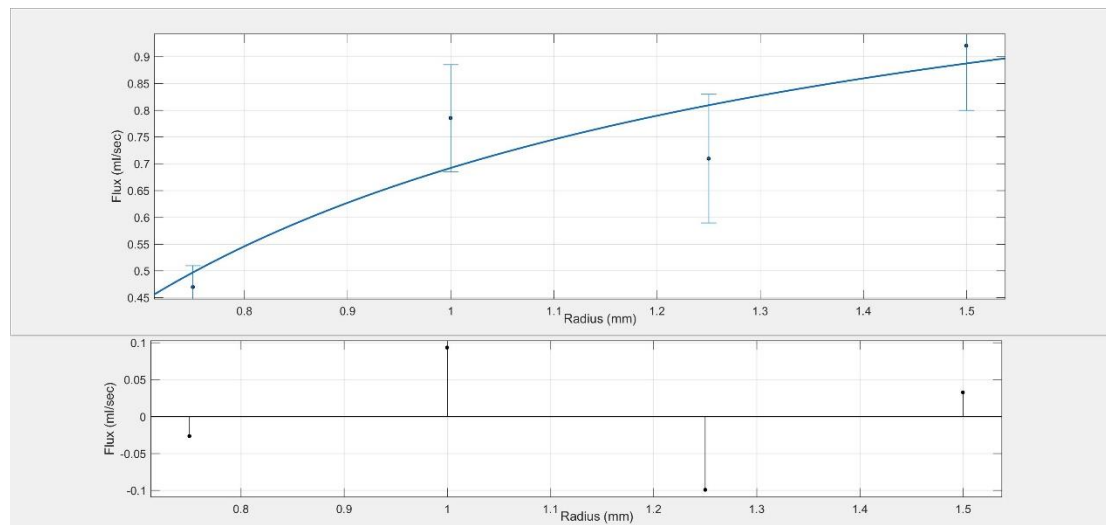


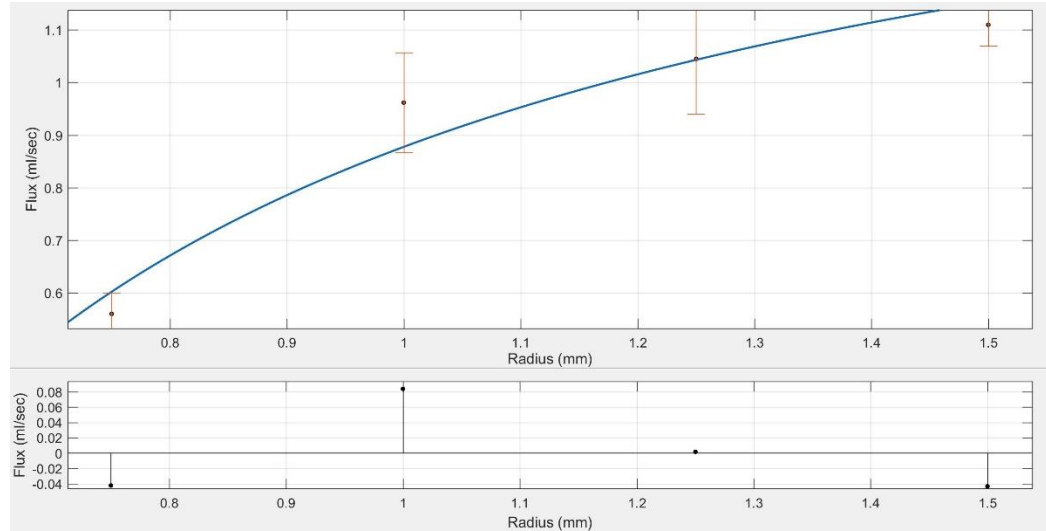
איור 15 (1-4) 1- ימין עליון ונומ 1.5, 2- שמאל עליון ונומ 2, 3- ימין תחתון ונומ 2.5, 4- שמאל תחתון ונומ 3): מפות ביפורקציה המתארות את התלות בין המרחק בין שתי טיפות ( $T_n$ ) לשטף המים. הגרפים נבדלים אלה מאלה בקוטר הפיה דרכה התבצע הטפטוף. מהגרפים ניתן לנתח את השינוי האיכותי באופן טפטוף המים עם העלייה הרציפה בשטף. בגרפים סומנו שני מלבנים בכל גרף- האדום מסמן את השטף בו נמדד

מעבר ל- $2p$  והשחור מסמן את השטף בו נמדד מעבר לכאוס. נקודות אלה נבחרו באמצעות ניתוח של מפות החזרה של השטפים השונים וזיהוי השטפים בהם קרה השינוי.

ניתן ללמוד מספר דברים ממפות אלה:

1. **הצטופפות הטפטוף עם עליית השטף:** נזהה ראשית כי מעבר לשינוי האיכותי בסוג הנקודות עם עליית השטף ישנו בסיס לא כאוטי למפת הביפורקציה. הבסיס הוא הדעיכה של המרחק בין כל שתי טיפות ככל שהשטף עולה (כאשר מגיעים לגיט הטיפות צמודות בפועל ולא ניתן להגדיר הפרש זמנים). התופעה אינה מפתיעה אך חשוב לזהות כי כלל השינויים האיכותיים באופן הטפטוף מתווספים לגרף המתאר את דעיכת  $T(n)$  עם הגידול בשטף.
2. **אופן התבטאות הכאוס במפות:** ניתן לזהות היטב במפות את הגעת המערכת לכאוס באמצעות זיהוי כי מדובר בספקטרום רציף של ערכי  $Tn$  (אטרקטור רציף). חשוב לשים לב שמלבד לכך שהגידול בשטף המערכת גורר התקדמות לכאוס וגורמת לאטרקטור להפוך לרציף, הוא גם משתנה בשל הצטופפות הנקודות עם עליית השטף כפי שכבר הוזכר. ניתן לזהות כי בכלל הגרפים האטרקטור עבור השטף הנמוך ביותר (נקודה- 1 period) אינו נכלל באטרקטור של התנהגות הכיאוטית הכיאוטית.
- אל מול היכולת לזהות שהמערכת במצב של 1-period ובמצב של כאוס במפות הביפורקציה, לא ניתן לזהות באופן ברור כי המערכת נמצאת במצב של 2-period. ההסבר לכך להבנתנו הוא רגישות המערכת והיותה אי יציבה (ובפרט ב 2 period). כפי שראינו במפות ההחזרה, המפות שמדדו 2 period זלגו וחזרו לכאוס וכך במפות הביפורקציה ערכי ה- $Tn$  נדמים רציפים. בנוסף לכך, הפרש הזמנים בין זמני המחזור במקרה של two period הינו קטן וקשה לבחינו בסקאלה של מפות הביפורקציה (ראה הפרשי סקאלות בין איור 3 ואיור 15-3)
3. **פערים בשטף בו המערכת משנה את אופן הטפטוף בין הפיות השונות:** ניתן לזהות שבמפות עבור הפיות בקטרים השונים המערכת הגיעה ל-2-period ואחר כך לכאוס עבור ערכי שטף שונים. בחנו קשר זה באופן מעמיק באמצעות שרטוט בחינת הקשר בין השטפים בהם קרה השינוי האיכותי בדינמיקת הטפטוף לקוטר הפייה.





איור 17

איור 16-17 גרפים המקשרים בין השטף בו המערכת הגיע *double period* (16) ולכאוס (17) לרדיוס הפיה עבורה בוצעה המדידה. בחירת הנקודות נעשתה על בסיס ניתוח איכותי של מפות ההחזרה של כלל המדידות, זיהוי המדידות הראשונות בהן היו תופעות של  $2p$  או כאוס ותיעוד השטף

שלחן. בשני הגרפים נלקחו התאמות של  $f(x) = a + \frac{b}{x}$ . ההתאמות שבוצעו: איור 16 -  $a = 1.3 \pm 0.5$   $b = -0.6 \pm 0.5$  איור 17 -  $a = -17$   $b = -0.8 \pm 0.6$   $1.7 \pm 0.6$

השגיאה המשמעותית נובעת מכך, ומשום שהחיפוש הוא אחר ערך שטף בו קורה שינוי איכותי באופן הטפטוף ולכן בפועל השגיאה הינה המרחק בין הנקודה בה זיהינו כי התקיים השינוי לנקודה שלפניה, זאת מתוך הבנה שבפועל השינוי יכל היה לקרות בכל מקום ביניהם. התוצאות סבירות אך בגלל השגיאה המשמעותית וההסתמכות על 4 נקודות לא ניתן לקבוע כי זו אכן ההתאמה שמתארת את הקשר.

מהגרפים ניתן לזהות כי ישנה תלות ברורה בין רדיוס הפיה לשטף בו אופן הטפטוף משתנה מבחינה איכותית, וניתן לראות כי השטף בו מתבצע השינוי עולה עם הרדיוס אך עלייתו דועכת כפי מה שנדמה כמו התקרבות לערך חוסם (אסימפטטה אופקית). ביצענו התאמות ל-2 הגרפים וההתאמה המוצלחת ביותר שמצאנו היא מסוג  $\phi(r) = a + \frac{b}{r}$ . נדגיש כי מדובר בתוצאה עם שגיאה גדולה (ראה פירוט באיור 17 ובנספח) ולא ניתן לקבוע אם זו התלות, או תלות אחרת המתארת גידול דועך.

להערכתנו ניתן להסביר את הממצאים לפיהם השטף בו קורה השינוי גדל עם הרדיוס באופן דועך באמצעות כוח מתח הפנים וזאת משום שכוח מתח הפנים מושפע מרדיוס הפייה (משוואה 1.5). נדגיש כי בקביעה כי כוח זה מושפע מהרדיוס לא די כדי להסביר את המגמה שזיהינו ונדרשת העמקה בחקירת התנאים המובילים להתנתקות הטיפה.

נקודה נוספת שדורשת התייחסות היא ההשפעה של השטף על דינמיקת הטפטוף. אנליזת יחידות פשוטה מלמדת כי מכך שלשטף יש יחידות של  $\frac{[g]}{[s]}$  עולה כי לאופן התנהגות המערכת חייב להיות תלות זמנית כלשהי. כך כאשר ערך השטף עובר

את ההתדירות האופיינית של המערכת ההתנהגות הלא לינארית של המערכת משתלטת על הדינמיקה והמערכת מתחילה להראות תופעות כאוטיות. העמקה בשקולי הכוחות במערכת, והסקת הזמן האופייני הרלוונטי יכול לסייע בהבנת הדינמיקה של המערכת ואפיון השטף בו התופעות הכאוטיות ישתלטו על הדינמיקה.

## סיכום

במאמר זה הצגנו את עיקר תוצאותינו מחקר הדינמיקה של טיפות מים והמעבר מהתחום הלינארי לתחום הלא לינארי ולכאוס. המודל המפשט עליו התבססנו והכלים לניתוח מרחב הפאזה המצומצם אפשרו לנו לצפות ולנתח את תהליך המעבר ממערכת מחזורית למערכת כאוטית. עיקר ההתמקדות שלנו הייתה בבחינת הקשר בין שטף המים לדינמיקת הטפטוף ותפקיד השטף במעבר ממערכת מחזורית למערכת כאוטית. בתחום זה הצענו התאמה בין קוטר הפיה, לשטף בו קורית השינוי בדינמיקה.

על מנת לבחון את התאוריה בצורה מדויקת יותר ולהסביר תופעות נוספות אשר היינו עדים להן במהלך הניסוי אנו ממליצים להרחיב את הניסוי במספר אופנים. ראשית ניתן לחזור על הניסוי עבור פיות ברדיוסים נוספים ולראות האם הם מתאימים למגמה שזיהינו. כמו כן, כדי לבחון האם הגורם העיקרי לשינוי הוא אכן כוח מתח הפנים (התלוי בהיקף) ניתן לחזור על הניסוי עבור מספר פיות בעלות שטח זהה והיקף משתנה, ולבחון את הציפייה לפיה ערכי השטף בו קורה השינוי האיכותי בטפטוף קטן ככל שההיקף קטן.

מהלך חשוב נוסף אותו נמליץ הוא שינוי השטפים בהם מבצעים את המדידה באופן עדין יותר (למשל שינוי השטף באמצעות שינוי גובה המיכל או הגדלת ידית הברז) וכך ניתן יהיה להצביע באופן טוב יותר על הערך המדויק בו קרה השינוי האיכותי.

על מנת להעמיק בהבנת התנאים להתנתקות הטיפה אנו ממליצים להוסיף למערכת הניסוי מצלמה מהירה (תמונות רלוונטיות ניתן למצוא בנספח) אשר תצלם את הטיפות לפני ואחרי ההתנתקות ותאפשר לנו לנתח את מיקום, מסה, ומהירות (כתלות ברזולוציית המצלמה) הטיפה ברגע ההתנתקות.

## נספח א' - שגיאות

- על מנת לחשב את השגיאה בשטף ראשית הערכנו את השגיאה בזמן המדידה. מכיוון שמדידת הזמן התבצעה באופן ידני, מדדנו את הזמן הלוקח להכניס את כלי הקיבול מתחת לשער האופטי וקיבלנו את שגיאת הזמן (0.75 ש'). כעת, ביחד עם שגיאת מכשיר המדידה של המשקל (0.05 גר') חישבנו את השגיאה בשטף.
- על מנת לחשב את השגיאות בגרף הבוחן את הקשר בין השטף בו התקיים השינוי האיכותי בדינמיקת הטפטוף לרדיוס הפייה השגיאות שנלקחו הן המרחק בין הנקודה בה זוהה המעבר לנקודה הצמודה הרחוקה יותר וזאת מתוך ההבנה שייתכן כי בפועל המעבר קרה בכל נקודה על רצף זה.

## נספח ב' - קודים רלוונטיים

קוד אשר בעזרתו יצרנו את מפות ההחזרה:

```
function [a]=periodpeak(c1,d)
d1=-d;
c=(linspace(c1(1),c1(length(c1)),length(d)))';
[pks,locs]=findpeaks(d1,c,'MinPeakHeight',-1);
locs2=[1,(locs)'];
locs=[(locs)',1];
b=-(locs2-locs);
a=b(find(b>0.01));
figure;
plot(a(2:length(a)-3),a(3:length(a)-2),'.');
```

```

xlabel('Tn (sec)');
ylabel('T n+1 (sec)');
figure;
plot3(a(2:length(a)-2),a(3:length(a)-1),a(4:length(a)),'.');
grid on
xlabel('Tn (sec)');
ylabel('T n+1 (sec)');
zlabel('T n+2 (sec)');

```

קוד אשר בעזרתו יצרנו את מפות הביפורקציה:

```

function [b,f,e]=bifurcation(c,d,n)
d1=-d;
t= linspace(c(1),c(length(c)),length(d1));
[pks,locs]=findpeaks(d1,t,'MinPeakHeight',-1);
locs2=[1,(locs)];
locs=[(locs),1];
a1=-(locs2-locs);
a=a1(2:length(a1)-1);
b=a(find(a>0.01));
f=n*ones(1,length(b));

```

#### נספח ג'- תיעוד הטיפות

להלן תיעוד ראשוני של התפתחות טיפה טרום נפילתה. טרם ניתחנו מידע זה.

