Fondamenti di Informatica - Esercitazione 4

Fabiola Arduini e Joseph Zucchelli

ESERCIZIO 1 (Liste)

Sia A un insieme e LA l'insieme delle liste di elementi di A, e siano app, len *e* rev *le funzioni su liste definite [...] Dimostrare per induzione strutturale le seguenti uguaglianze:*

1. *Per ogni $lst_1, lst_2 \in LA$,* $\text{len}(\text{app}(lst_1, lst_2)) = \text{len}(lst_1) + \text{len}(lst_2)$.
2. *Per ogni $lst \in LA$,* $\text{len}(\text{rev}(lst)) = \text{len}(lst)$.

Ragionamento. In questo esercizio, utilizziamo due proprietà delle liste (LA) usando l'induzione strutturale.

- **Proprietà 1:** La lunghezza di due liste concatenate ('app') è semplicemente la somma delle loro lunghezze individuali.
- **Proprietà 2:** Invertire ('rev') una lista non ne altera la lunghezza.

1.1: `len(app)`

Per ogni $lst_1, lst_2 \in$ LA, $\text{len}(\text{app}(lst_1, lst_2)) = \text{len}(lst_1) + \text{len}(lst_2)$.

Dimostrazione (per induzione su lst_1).
C.B. (Caso Base): $lst_1 = []$

$$\begin{aligned}
\text{len}(\text{app}([], lst_2)) &= \text{len}(lst_2) && \text{(Def. C.B. app)}\\
&= \text{len}(lst_2) + 0 && \text{(Calcolo)}\\
&= \text{len}(lst_2) + \text{len}([]) && \text{(Def. C.B. len)}
\end{aligned}$$

C.I. (Caso Induttivo): $lst_1 = (a : lst_1')$

$$\begin{aligned}
\text{len}(\text{app}(a : lst_1', lst_2)) &= \text{len}(a : \text{app}(lst_1', lst_2)) && \text{(Def. C.I. app)}\\
&= \text{len}(\text{app}(lst_1', lst_2)) + 1 && \text{(Def. C.I. len)}\\
&= (\text{len}(lst_1') + \text{len}(lst_2)) + 1 && \text{(Ipotesi Induttiva)}\\
&= (\text{len}(lst_1') + 1) + \text{len}(lst_2) && \text{(Prop. Associativa)}\\
&= \text{len}(a : lst_1') + \text{len}(lst_2) && \text{(Def. C.I. len)}
\end{aligned}$$

■

1.2: `len(rev)`

Per ogni $lst \in \mathrm{LA}$, $\mathrm{len}(\mathrm{rev}(lst)) = \mathrm{len}(lst)$.

Dimostrazione (per induzione su lst).
C.B. (Caso Base): $lst = []$

$$\mathrm{len}(\mathrm{rev}([])) = \mathrm{len}([]) \qquad \text{(Def. C.B. rev)}$$

C.I. (Caso Induttivo): $lst = (a : lst')$

$$\begin{aligned}
\mathrm{len}(\mathrm{rev}(a : lst')) &= \mathrm{len}(\mathrm{app}(\mathrm{rev}(lst'), [a])) && \text{(Def. C.I. rev)} \\
&= \mathrm{len}(\mathrm{rev}(lst')) + \mathrm{len}([a]) && \text{(Da Esercizio 1.1)} \\
&= \mathrm{len}(lst') + \mathrm{len}([a]) && \text{(Ipotesi Induttiva)} \\
&= \mathrm{len}(lst') + 1 && \text{(Calcolo, len}([a]) = 1\text{)} \\
&= \mathrm{len}(a : lst') && \text{(Def. C.I. len)}
\end{aligned}$$

■

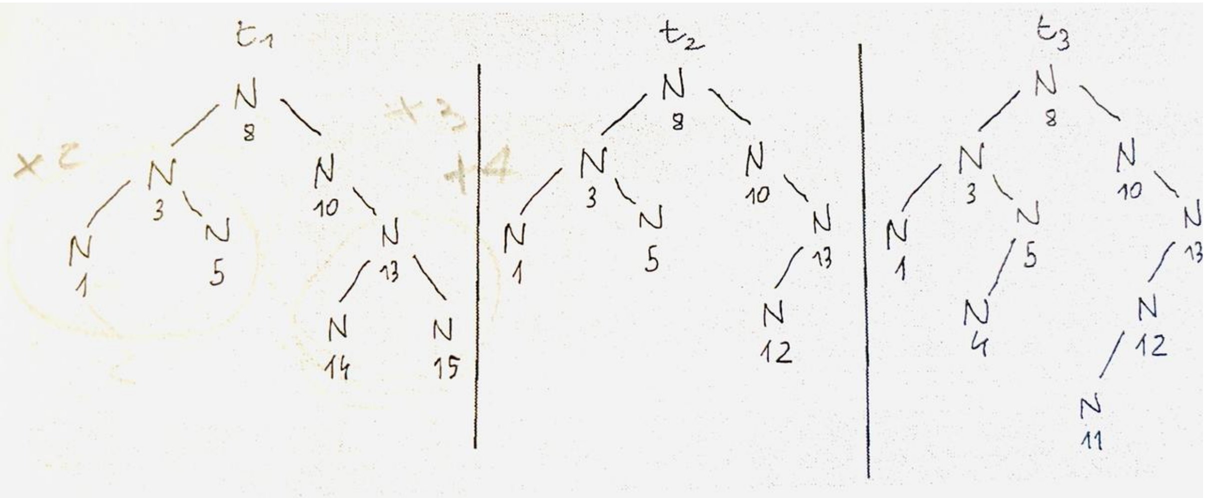
ESERCIZIO 2 (Funzioni `Max` e `Min`)

Sia $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *l'insieme dei numeri naturali esteso con un elemento* ∞ *che, intuitivamente, rappresenta un'entità più grande di tutti i naturali [...] Si consideri l'insieme* BTN *degli alberi binari etichettati con elementi di* $\mathbb{N}$.

1. *Definire per induzione su* BTN *la funzione* $\mathrm{Max} : BTN \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ *che restituisce l'etichetta di valore massimo tra tutte quelle che appaiono in un albero. (Suggerimento:* $\mathrm{Max}(\lambda) = 0$, *dove 0 come al solito è l'albero vuoto).*

2. *Definire per induzione su* BTN *la funzione* $\mathrm{Min} : BTN \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *che restituisce l'etichetta di valore minimo tra tutte quelle che appaiono in un albero. (Suggerimento:* $\mathrm{Min}(\lambda) = \infty$, *dove* λ *è l'albero vuoto).*

Ad esempio sia t_1 *l'albero in Figura 1.1:* $\mathrm{Min}(t_1) = 1$, $\mathrm{Max}(t_1) = 15$.



Ragionamento. Qui, definiamo due funzioni ricorsive sull'insieme BTN.

- **Max:** Restituisce l'etichetta di valore massimo in un albero di tipo BTN. Per l'elemento vuoto $\lambda \in$ BTN, usiamo 0 come elemento neutro per il max.

- **Min:** Restituisce l'etichetta di valore minimo in un albero di tipo BTN. Per l'elemento vuoto $\lambda \in$ BTN, usiamo ∞ come elemento neutro per il min.

2.1: Definizione `Max`

Definire per induzione su BTN la funzione Max : BTN $\to \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Soluzione.

- **C.B.:** $\mathrm{Max}(\lambda) = 0$

- **C.I.:** $\mathrm{Max}(N(t_1, n, t_2)) = \max(n, \mathrm{Max}(t_1), \mathrm{Max}(t_2))$

2.2: Definizione `Min`

Definire per induzione su BTN la funzione $\text{Min} : \text{BTN} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Soluzione.

- **C.B.:** $\text{Min}(\lambda) = \infty$
- **C.I.:** $\text{Min}(N(t_1, n, t_2)) = \min(n, \text{Min}(t_1), \text{Min}(t_2))$

Ragionamento (Traccia di calcolo induttivo per t_1)**.** Applichiamo le definizioni induttive per calcolare $\text{Max}(t_1)$ e $\text{Min}(t_1)$, come richiesto dall'esempio del testo.
Sia $t_1 = N(t_{L1}, 8, t_{R1})$, dove $t_1 \in \text{BTN}$:

- $t_{L1} = N(N(\lambda, 1, \lambda), 3, N(\lambda, 5, \lambda))$
- $t_{R1} = N(\lambda, 10, N(N(\lambda, 14, \lambda), 13, N(\lambda, 15, \lambda)))$

Calcolo $\text{Max}(t_1) = 15$**:**

$$\begin{aligned}
\text{Max}(t_1) &= \max(8, \text{Max}(t_{L1}), \text{Max}(t_{R1})) \\
\text{Max}(t_{L1}) &= \max(3, \text{Max}(N(\lambda, 1, \lambda)), \text{Max}(N(\lambda, 5, \lambda))) \\
&= \max(3, \max(1, 0, 0), \max(5, 0, 0)) \\
&= \max(3, 1, 5) = 5 \\
\text{Max}(t_{R1}) &= \max(10, \text{Max}(\lambda), \text{Max}(N(N(\lambda, 14, \lambda), 13, N(\lambda, 15, \lambda)))) \\
&= \max(10, 0, \max(13, \text{Max}(N(\lambda, 14, \lambda)), \text{Max}(N(\lambda, 15, \lambda)))) \\
&= \max(10, 0, \max(13, \max(14, 0, 0), \max(15, 0, 0))) \\
&= \max(10, 0, \max(13, 14, 15)) \\
&= \max(10, 0, 15) = 15 \\
\text{Max}(t_1) &= \max(8, 5, 15) = 15
\end{aligned}$$

Calcolo $\text{Min}(t_1) = 1$**:**

$$\begin{aligned}
\text{Min}(t_1) &= \min(8, \text{Min}(t_{L1}), \text{Min}(t_{R1})) \\
\text{Min}(t_{L1}) &= \min(3, \text{Min}(N(\lambda, 1, \lambda)), \text{Min}(N(\lambda, 5, \lambda))) \\
&= \min(3, \min(1, \infty, \infty), \min(5, \infty, \infty)) \\
&= \min(3, 1, 5) = 1 \\
\text{Min}(t_{R1}) &= \min(10, \text{Min}(\lambda), \text{Min}(N(N(\lambda, 14, \lambda), 13, N(\lambda, 15, \lambda)))) \\
&= \min(10, \infty, \min(13, \text{Min}(N(\lambda, 14, \lambda)), \text{Min}(N(\lambda, 15, \lambda)))) \\
&= \min(10, \infty, \min(13, \min(14, \infty, \infty), \min(15, \infty, \infty))) \\
&= \min(10, \infty, \min(13, 14, 15)) \\
&= \min(10, \infty, 13) = 10 \\
\text{Min}(t_1) &= \min(8, 1, 10) = 1
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3 (Funzione `Ordinato`)

Si ricorda che l'insieme dei valori Booleani Bool $\equiv \{\mathit{true}, \mathit{false}\}$ *[...] Si consideri l'insieme BTN e le funzioni* Min, Max *[...] Si consideri la funzione* Ordinato : *BTN* $\to$ *Bool definita come segue:*

- *[CL. BASE]* $\text{Ordinato}(\lambda) = \textit{true}$
- *[CL. INDUTTIVA]* $\text{Ordinato}(N(t_1, n, t_2)) = \begin{cases} \textit{false} & \textit{se } n \leq \text{Max}(t_1) \\ \textit{false} & \textit{se } n \geq \text{Min}(t_2) \\ \text{Ordinato}(t_1) \wedge \text{Ordinato}(t_2) & \textit{altrimenti} \end{cases}$

Siano t_1, t_2, t_3 *gli alberi in Figura 1.1. Calcolare* $\text{Ordinato}(t_1)$, $\text{Ordinato}(t_2)$ *e* $\text{Ordinato}(t_3)$.

Ragionamento. Definiamo la funzione Ordinato, che verifica se un albero di tipo BTN è un **Albero Binario di Ricerca** (BST). Un albero $t \in \text{BTN}$ è ordinato se:

1. L'albero vuoto $\lambda \in \text{BTN}$ è ordinato (Caso Base).
2. Per un albero non vuoto $N(t_1, n, t_2) \in \text{BTN}$ (Caso Induttivo):
   - Il sottoalbero sinistro t_1 è ordinato.
   - Il sottoalbero destro t_2 è ordinato.
   - L'etichetta n è *maggiore* di ogni etichetta in t_1 (cioè $n > \text{Max}(t_1)$).
   - L'etichetta n è *minore* di ogni etichetta in t_2 (cioè $n < \text{Min}(t_2)$).

Calcolo di $\text{Ordinato}(t_1)$, $\text{Ordinato}(t_2)$ e $\text{Ordinato}(t_3)$

Soluzione. Chiamiamo $O(t)$ la funzione $\text{Ordinato}(t)$.
Siano t_1, t_2, t_3 gli alberi $\in$ BTN della Figura 1.1.
Calcolo $\text{Ordinato}(t_1)$**:** Sia $t_1 = N(t_{L1}, 8, t_{R1})$.

- $t_{L1} = N(N(\lambda, 1, \lambda), 3, N(\lambda, 5, \lambda))$
- $t_{R1} = N(\lambda, 10, N(N(\lambda, 14, \lambda), 13, N(\lambda, 15, \lambda)))$

Valutiamo $O(t_1) = \text{Ordinato}(N(t_{L1}, 8, t_{R1}))$

- $n = 8$, $\text{Max}(t_{L1}) = 5$ (calcolato prima), $\text{Min}(t_{R1}) = 10$ (calcolato prima).
- Condizione $n \leq \text{Max}(t_1)$: $8 \leq 5$ è **false**.
- Condizione $n \geq \text{Min}(t_2)$: $8 \geq 10$ è **false**.
- Caso "altrimenti": $O(t_{L1}) \wedge O(t_{R1})$.

Calcoliamo $O(t_{L1})$ e $O(t_{R1})$:

- $O(t_{L1}) = O(N(N(\lambda, 1, \lambda), 3, N(\lambda, 5, \lambda)))$
  - $n = 3$, $\text{Max}(t_{1L}) = 1$, $\text{Min}(t_{1R}) = 5$.
  - $3 \leq 1$ è false. $3 \geq 5$ è false.
  - Caso "altrimenti": $O(N(\lambda, 1, \lambda)) \wedge O(N(\lambda, 5, \lambda))$. Entrambi sono **true**.
  - Quindi $O(t_{L1}) = $ **true**.

- $O(t_{R1}) = O(N(\lambda, 10, N(N(\lambda, 14, \lambda), 13, N(\lambda, 15, \lambda))))$
  - $n = 10$, $\text{Max}(t_{1L}) = 0$, $\text{Min}(t_{1R}) = \min(13, 14, 15) = 13$.
  - $10 \leq 0$ è false. $10 \geq 13$ è false.
  - Caso "altrimenti": $O(\lambda) \wedge O(N(N(\lambda, 14, \lambda), 13, N(\lambda, 15, \lambda)))$.
  - Dobbiamo calcolare $O(N(\dots, 13, \dots))$:
    * $n = 13$, $\text{Max}(t_L) = 14$, $\text{Min}(t_R) = 15$.
    * Condizione $n \leq \text{Max}(t_1)$: $13 \leq 14$ è **true**.
    * La funzione restituisce **false**.
  - Quindi $O(t_{R1}) = \text{true} \wedge \textbf{false} = \textbf{false}$.

Il risultato finale per $O(t_1) = O(t_{L1}) \wedge O(t_{R1}) = \textbf{true} \wedge \textbf{false} = \textbf{false}$.
Calcolo Ordinato(t_2)**:** Sia $t_2 = N(t_{L2}, 9, t_{R2})$.

- $t_{L2} = N(N(\lambda, 1, \lambda), 3, N(\lambda, 5, \lambda))$
- $t_{R2} = N(\lambda, 10, N(N(\lambda, 12, \lambda), 13, \lambda))$

Valutiamo $O(t_2) = O(N(t_{L2}, 9, t_{R2}))$.

- $n = 9$, $\text{Max}(t_{L2}) = 5$, $\text{Min}(t_{R2}) = \min(10, \infty, \min(13, 12, \infty)) = 10$.
- Condizione $9 \leq 5$ è **false**.
- Condizione $9 \geq 10$ è **false**.
- Caso "altrimenti": $O(t_{L2}) \wedge O(t_{R2})$.

Calcoliamo $O(t_{L2})$ e $O(t_{R2})$:

- $O(t_{L2}) = \textbf{true}$ (come calcolato prima).
- $O(t_{R2}) = O(N(\lambda, 10, N(N(\lambda, 12, \lambda), 13, \lambda)))$
  - $n = 10$, $\text{Max}(t_L) = 0$, $\text{Min}(t_R) = \min(13, 12, \infty) = 12$.
  - $10 \leq 0$ è false. $10 \geq 12$ è false.
  - Caso "altrimenti": $O(\lambda) \wedge O(N(N(\lambda, 12, \lambda), 13, \lambda))$.
  - Calcoliamo $O(N(\dots, 13, \dots))$:
    * $n = 13$, $\text{Max}(t_L) = 12$, $\text{Min}(t_R) = \infty$.
    * $13 \leq 12$ è false. $13 \geq \infty$ è false.
    * Caso "altrimenti": $O(N(\lambda, 12, \lambda)) \wedge O(\lambda)$. Entrambi **true**.
  - Quindi $O(t_{R2})$ è $\textbf{true} \wedge \textbf{true} = \textbf{true}$.

Il risultato finale per $O(t_2) = O(t_{L2}) \wedge O(t_{R2}) = \textbf{true} \wedge \textbf{true} = \textbf{true}$.
Calcolo Ordinato(t_3)**:** Sia $t_3 = N(t_{L3}, 8, t_{R3})$.

- $t_{L3} = N(N(\lambda, 1, \lambda), 3, N(N(\lambda, 4, \lambda), 5, \lambda))$
- $t_{R3} = N(\lambda, 10, N(\lambda, 13, N(N(\lambda, 11, \lambda), 12, \lambda)))$

Valutiamo $O(t_3) = O(N(t_{L3}, 8, t_{R3}))$.

- $n = 8$.
- $\text{Max}(t_{L3}) = \max(3, 1, \max(5, 4, 0)) = 5$.
- $\text{Min}(t_{R3}) = \min(10, \infty, \min(13, \infty, \min(12, 11, \infty))) = \min(10, 11) = 10$.
- Condizione $8 \leq 5$ è **false**.
- Condizione $8 \geq 10$ è **false**.
- Caso "altrimenti": $O(t_{L3}) \wedge O(t_{R3})$.

Calcoliamo $O(t_{L3})$ e $O(t_{R3})$:

- $O(t_{L3}) = O(N(N(\lambda, 1, \lambda), 3, N(N(\lambda, 4, \lambda), 5, \lambda)))$
  - $n = 3$, $\text{Max}(t_L) = 1$, $\text{Min}(t_R) = \min(5, 4, \infty) = 4$.
  - $3 \leq 1$ è false. $3 \geq 4$ è false.
  - Caso "altrimenti": $O(N(\lambda, 1, \lambda)) \wedge O(N(N(\lambda, 4, \lambda), 5, \lambda))$.
  - Entrambi sono **true** (per $N(\dots, 5, \dots)$: $5 \leq 4$ false, $5 \geq \infty$ false).
  - Quindi $O(t_{L3}) =$ **true**.
- $O(t_{R3}) = O(N(\lambda, 10, N(\lambda, 13, N(N(\lambda, 11, \lambda), 12, \lambda))))$
  - $n = 10$, $\text{Max}(t_L) = 0$, $\text{Min}(t_R) = \min(13, \infty, \min(12, 11, \infty)) = 11$.
  - $10 \leq 0$ è false. $10 \geq 11$ è false.
  - Caso "altrimenti": $O(\lambda) \wedge O(N(\lambda, 13, N(N(\lambda, 11, \lambda), 12, \lambda)))$.
  - Calcoliamo $O(N(\dots, 13, \dots))$:
    * $n = 13$, $\text{Max}(t_L) = 0$, $\text{Min}(t_R) = \min(12, 11, \infty) = 11$.
    * Condizione $n \geq \text{Min}(t_2)$: $13 \geq 11$ è **true**.
    * La funzione restituisce **false**.
  - Quindi $O(t_{R3}) = \text{true} \wedge$ **false** = **false**.

Il risultato finale per $O(t_3) = O(t_{L3}) \wedge O(t_{R3}) =$ **true** $\wedge$ **false** = **false**.

ESERCIZIO 4 (Funzione `Ins`)

Si vuole definire una funzione Ins : $\mathbb{N} \times BTN \to BTN$ *che, preso in input un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ e un albero $t \in BTN$, aggiunge a t una foglia etichettata con n. [...] si vuole che questa operazione preservi la proprietà* ***`Ordinato`*** *[...]*

1. *Definire per induzione su BTN la funzione* Ins : $\mathbb{N} \times BTN \to BTN$.
2. *Sia $t = N(N(\lambda, 2, \lambda), 5, N(N(\lambda, 7, \lambda), 9, \lambda)) \in BTN$. Valutare esplicitamente, usando la funzione proposta,* Ins$(4, t)$, Ins$(6, t)$ *e* Ins$(9, t)$.

Ragionamento. Definiamo la funzione $\mathrm{Ins}(n, t)$ (inserimento). Per questa operazione, stabiliamo una logica che rispetti la proprietà di *ordinamento* (BST):

- **Caso Base ($t = \lambda$):** Se l'albero $t \in \mathrm{BTN}$ è vuoto (λ), creiamo un nuovo albero $N(\lambda, n, \lambda)$.
- **Caso Induttivo ($t = N(t_1, m, t_2) \in$ BTN):** Confrontiamo n con la radice m:
  - Se $n < m$, inseriamo n nel sottoalbero *sinistro*: $N(\mathrm{Ins}(n, t_1), m, t_2)$.
  - Se $n > m$, inseriamo n nel sottoalbero *destro*: $N(t_1, m, \mathrm{Ins}(n, t_2))$.
  - Se $n = m$, non inseriamo il duplicato e restituiamo l'albero t com'è.

4.1: Definizione della funzione `Ins`

$\mathrm{Ins} : \mathbb{N} \times \mathrm{BTN} \to \mathrm{BTN}$.

Soluzione.
- **C.B.:** $\mathrm{Ins}(n, \lambda) = N(\lambda, n, \lambda)$
- **C.I.:** $\mathrm{Ins}(n, N(t_1, m, t_2)) = \begin{cases} N(\mathrm{Ins}(n, t_1), m, t_2) & \text{se } n < m \\ N(t_1, m, \mathrm{Ins}(n, t_2)) & \text{se } n > m \\ N(t_1, m, t_2) & \text{altrimenti (se } n = m) \end{cases}$

4.2: Valutazione d'esempio

Sia $t = N(N(\lambda, 2, \lambda), 5, N(N(\lambda, 7, \lambda), 9, \lambda))$. Valutare $\mathrm{Ins}(4, t)$, $\mathrm{Ins}(6, t)$ e $\mathrm{Ins}(9, t)$.

Soluzione.
Valutazione $\mathrm{Ins}(4, t)$**:**

$$\begin{aligned} \mathrm{Ins}(4, t) &= \mathrm{Ins}(4, N(\dots, 5, \dots)) && 4 < 5 \\ &= N(\mathrm{Ins}(4, N(\lambda, 2, \lambda)), 5, N(\dots, 9, \dots)) && 4 > 2 \\ &= N(N(\lambda, 2, \mathrm{Ins}(4, \lambda)), 5, N(\dots, 9, \dots)) && \text{C.B.} \\ &= N(N(\lambda, 2, N(\lambda, 4, \lambda)), 5, N(N(\lambda, 7, \lambda), 9, \lambda)) \end{aligned}$$

Valutazione $\mathrm{Ins}(6, t)$**:**

$$\begin{aligned} \mathrm{Ins}(6, t) &= \mathrm{Ins}(6, N(\dots, 5, \dots)) && 6 > 5 \\ &= N(N(\lambda, 2, \lambda), 5, \mathrm{Ins}(6, N(N(\lambda, 7, \lambda), 9, \lambda))) && 6 < 9 \\ &= N(N(\lambda, 2, \lambda), 5, N(\mathrm{Ins}(6, N(\lambda, 7, \lambda)), 9, \lambda)) && 6 < 7 \\ &= N(N(\lambda, 2, \lambda), 5, N(N(\mathrm{Ins}(6, \lambda), 7, \lambda), 9, \lambda)) && \text{C.B.} \\ &= N(N(\lambda, 2, \lambda), 5, N(N(N(\lambda, 6, \lambda), 7, \lambda), 9, \lambda)) \end{aligned}$$

Valutazione $\mathrm{Ins}(9, t)$**:**

$$\begin{aligned} \mathrm{Ins}(9, t) &= \mathrm{Ins}(9, N(\dots, 5, \dots)) && 9 > 5 \\ &= N(N(\lambda, 2, \lambda), 5, \mathrm{Ins}(9, N(N(\lambda, 7, \lambda), 9, \lambda))) && 9 = 9 \\ &= N(N(\lambda, 2, \lambda), 5, N(N(\lambda, 7, \lambda), 9, \lambda)) \\ &= t && \text{(L'albero non cambia)} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5 (Proprietà `Ordinato(Ins)`)

> *Con riferimento alla funzione* `Ordinato` *dell'Esercizio 3 e alla funzione* `Ins` *dell'Esercizio 4, dimostrare per induzione strutturale che per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ e $t \in BTN$ vale che: Se* $\text{Ordinato}(t) = \textit{true}$*, allora* $\text{Ordinato}(\text{Ins}(n, t)) = \textit{true}$*.*

Ragionamento. In questo esercizio, dimostriamo una proprietà cruciale: se partiamo da un albero $t \in \text{BTN}$ che è *già* un albero binario di ricerca (cioè $\text{Ordinato}(t) = \text{true}$), quando inseriamo un nuovo elemento n tramite la nostra funzione Ins, l'albero $\text{Ins}(n, t) \in \text{BTN}$ risultante sarà *ancora* un albero binario di ricerca.

Dimostrazione della proprietà

$\forall n \in \mathbb{N}, t \in \text{BTN}$. Se $\text{Ordinato}(t) = \text{true}$, allora $\text{Ordinato}(\text{Ins}(n, t)) = \text{true}$.

Dimostrazione (per induzione strutturale su t).
C.B. (Caso Base): $t = \lambda$

- **Ipotesi:** $\text{Ordinato}(\lambda) = \text{true}$ (per definizione).
- **Tesi:** $\text{Ordinato}(\text{Ins}(n, \lambda)) = \text{true}$.

Svolgiamo la Tesi:

$$\begin{aligned}
\text{Ordinato}(\text{Ins}(n, \lambda)) &= \text{Ordinato}(N(\lambda, n, \lambda)) && \text{(Def. C.B. Ins)} \\
&= \text{Ordinato}(\lambda) \wedge \text{Ordinato}(\lambda) \wedge (n > \text{Max}(\lambda)) \wedge (n < \text{Min}(\lambda)) && \text{(Def. Ordinato)} \\
&= \text{true} \wedge \text{true} \wedge (n > 0) \wedge (n < \infty) && \text{(Def. C.B. Max/M}
\end{aligned}$$

L'espressione è true (assumendo $n \geq 0$ e $\text{Max}(\lambda) = 0, \text{Min}(\lambda) = \infty$). Il caso base è verificato.
C.I. (Caso Induttivo): $t = N(t_1, m, t_2)$

- **Ipotesi Induttiva (I.H.):**
  - $\text{Ordinato}(t_1) \Rightarrow \text{Ordinato}(\text{Ins}(n, t_1)) = \text{true}$
  - $\text{Ordinato}(t_2) \Rightarrow \text{Ordinato}(\text{Ins}(n, t_2)) = \text{true}$
- **Assunzione:** $\text{Ordinato}(t) = \text{Ordinato}(N(t_1, m, t_2)) = \text{true}$. Questo implica:
  1. $\text{Ordinato}(t_1) = \text{true}$
  2. $\text{Ordinato}(t_2) = \text{true}$
  3. $m > \text{Max}(t_1)$
  4. $m < \text{Min}(t_2)$
- **Tesi:** $\text{Ordinato}(\text{Ins}(n, t)) = \text{true}$.

Analizziamo i 3 casi della definizione induttiva di $\text{Ins}(n, t)$:

Caso 1: $n < m$

$$\begin{aligned}\text{Ordinato}(\text{Ins}(n,t)) &= \text{Ordinato}(N(\text{Ins}(n,t_1), m, t_2)) && \text{(D} \\ &= \text{Ordinato}(\text{Ins}(n,t_1)) \wedge \text{Ordinato}(t_2) \wedge (m > \text{Max}(\text{Ins}(n,t_1))) \wedge (m < \text{Min}(t_2))\end{aligned}$$

Verifichiamo i 4 predicati:

a) $\text{Ordinato}(\text{Ins}(n,t_1))$: Vero. Per (1) $\text{Ordinato}(t_1) = \text{true}$, e per I.H.

b) $\text{Ordinato}(t_2)$: Vero. Per (2).

c) $m > \text{Max}(\text{Ins}(n,t_1))$: Vero. $\text{Max}(\text{Ins}(n,t_1)) = \max(\text{Max}(t_1), n)$. Per (3) $m > \text{Max}(t_1)$ e per l'ipotesi di caso $m > n$. Dunque m è maggiore di entrambi.

d) $m < \text{Min}(t_2)$: Vero. Per (4).

Essendo a, b, c, d veri, la tesi è verificata.

Caso 2: $n > m$

$$\begin{aligned}\text{Ordinato}(\text{Ins}(n,t)) &= \text{Ordinato}(N(t_1, m, \text{Ins}(n,t_2))) && \text{(D} \\ &= \text{Ordinato}(t_1) \wedge \text{Ordinato}(\text{Ins}(n,t_2)) \wedge (m > \text{Max}(t_1)) \wedge (m < \text{Min}(\text{Ins}(n,t_2)))\end{aligned}$$

Verifichiamo i 4 predicati:

a) $\text{Ordinato}(t_1)$: Vero. Per (1).

b) $\text{Ordinato}(\text{Ins}(n,t_2))$: Vero. Per (2) $\text{Ordinato}(t_2) = \text{true}$, e per I.H.

c) $m > \text{Max}(t_1)$: Vero. Per (3).

d) $m < \text{Min}(\text{Ins}(n,t_2))$: Vero. $\text{Min}(\text{Ins}(n,t_2)) = \min(\text{Min}(t_2), n)$. Per (4) $m < \text{Min}(t_2)$ e per l'ipotesi di caso $m < n$. Dunque m è minore di entrambi.

Essendo a, b, c, d veri, la tesi è verificata.

Caso 3: $n = m$

$$\begin{aligned}\text{Ordinato}(\text{Ins}(n,t)) &= \text{Ordinato}(N(t_1, m, t_2)) && \text{(Def. Ins, } n = m) \\ &= \text{Ordinato}(t)\end{aligned}$$

Questo è true per l'Assunzione $\text{Ordinato}(t) = \text{true}$. ■

ESERCIZIO 6 (Aritmetica su `NTerm`)

> *Ricordando le definizioni induttive dell'insieme dei termini sintattici NTerm [...] e della funzione* add *[...] e della sua proprietà* $\text{val}(\text{add}(x,y)) = \text{val}(x) + \text{val}(y)$ *[...]*
>
> 1. *Sulla falsariga della definizione di* add *[...] definire per induzione la funzione* $\text{mul} : \mathit{NTerm} \times \mathit{NTerm} \to \mathit{NTerm}$ *[...] e dimostrare* $\text{val}(\text{mul}(x,y)) = \text{val}(x) \times \text{val}(y)$.

2. *Sulla falsariga della definizione di* add *e* mul *[...] definire per induzione la funzione* exp : $NTerm \times NTerm \to NTerm$ *[...] e dimostrare* $\mathrm{val}(\exp(x, y)) = \mathrm{val}(x)^{\mathrm{val}(y)}$.
3. *Calcolare* $\mathrm{val}(\exp(\exp(Z, Z), S(Z)))$ *e* $\mathrm{val}(\exp(\exp(Z, S(Z)), Z))$, *[...] E vero che* $\mathrm{val}(\exp(x, y)) = \mathrm{val}(\exp(y, x))$*? [...] (a) Quante sono le funzioni* $j : \{1\} \to \emptyset$*? (b) Quante sono le funzioni* $f : \emptyset \to \{1\}$*?*

Ragionamento. In questo esercizio, definiamo l'aritmetica sull'insieme NTerm (numeri naturali definiti induttivamente) usando il costruttore $S(x)$ (successore) e 0 (zero). Definiamo 'add' (addizione), 'mul' (moltiplicazione) e 'exp' (elevamento a potenza) e proviamo le loro proprietà rispetto all'interpretazione $\mathrm{val}(x)$.

Definizione (add)**.** $\mathrm{add} : \mathrm{NTerm} \times \mathrm{NTerm} \to \mathrm{NTerm}$

- **C.B.:** $\mathrm{add}(0, y) = y$
- **C.I.:** $\mathrm{add}(S(x), y) = S(\mathrm{add}(x, y))$

Proprietà $\mathrm{val}(\mathrm{add}(x, y)) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y)$.

6.1: Funzione `mul`

Definire $\mathrm{mul} : \mathrm{NTerm} \times \mathrm{NTerm} \to \mathrm{NTerm}$ e dimostrare $\mathrm{val}(\mathrm{mul}(x, y)) = \mathrm{val}(x) \times \mathrm{val}(y)$.

Soluzione (Definizione `mul`)**.**
- **C.B.:** $\mathrm{mul}(0, y) = 0$
- **C.I.:** $\mathrm{mul}(S(x), y) = \mathrm{add}(\mathrm{mul}(x, y), y)$

Dimostrazione (per induzione su x).
C.B. (Caso Base): $x = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{val}(\mathrm{mul}(0, y)) = \mathrm{val}(0) & \qquad \text{(Def. C.B. mul)} \\ 0 = 0 \times \mathrm{val}(y) & \qquad \text{(Def. val)} \\ 0 = 0 & \qquad \text{(Vero)} \end{aligned}$$

C.I. (Caso Induttivo): $x = S(x')$

- **I.H.:** $\mathrm{val}(\mathrm{mul}(x', y)) = \mathrm{val}(x') \times \mathrm{val}(y)$
- **Tesi:** $\mathrm{val}(\mathrm{mul}(S(x'), y)) = \mathrm{val}(S(x')) \times \mathrm{val}(y)$

Svolgiamo la Tesi:

$$\begin{aligned} \mathrm{val}(\mathrm{mul}(S(x'), y)) &= \mathrm{val}(\mathrm{add}(\mathrm{mul}(x', y), y)) && \text{(Def. C.I. mul)} \\ &= \mathrm{val}(\mathrm{mul}(x', y)) + \mathrm{val}(y) && \text{(Prop. val(add))} \\ &= (\mathrm{val}(x') \times \mathrm{val}(y)) + \mathrm{val}(y) && \text{(I.H.)} \\ &= (\mathrm{val}(x') + 1) \times \mathrm{val}(y) && \text{(Aritmetica)} \\ &= \mathrm{val}(S(x')) \times \mathrm{val}(y) && \text{(Def. val(S))} \end{aligned}$$

■

6.2: Funzione `exp`

Definire exp : NTerm × NTerm → NTerm e dimostrare $\text{val}(\exp(x, y)) = \text{val}(x)^{\text{val}(y)}$.

Soluzione (Definizione `exp`).
- **C.B.:** $\exp(x, 0) = S(0)$
- **C.I.:** $\exp(x, S(y)) = \text{mul}(\exp(x, y), x)$

Dimostrazione (per induzione su y).
C.B. (Caso Base): $y = 0$

$$\begin{aligned} \text{val}(\exp(x, 0)) &= \text{val}(S(0)) && \text{(Def. C.B. exp)} \\ \text{val}(x)^{\text{val}(0)} &= 1 && \text{(Def. val)} \\ \text{val}(x)^0 &= 1 \\ 1 &= 1 && \text{(Vero, assumendo } x \neq 0\text{. } 0^0 = 1 \text{ è convenzione)} \end{aligned}$$

C.I. (Caso Induttivo): $y = S(y')$
- **I.H.:** $\text{val}(\exp(x, y')) = \text{val}(x)^{\text{val}(y')}$
- **Tesi:** $\text{val}(\exp(x, S(y'))) = \text{val}(x)^{\text{val}(S(y'))}$

Svolgiamo la Tesi:

$$\begin{aligned} \text{val}(\exp(x, S(y'))) &= \text{val}(\text{mul}(\exp(x, y'), x)) && \text{(Def. C.I. exp)} \\ &= \text{val}(\exp(x, y')) \times \text{val}(x) && \text{(Prop. val(mul))} \\ &= (\text{val}(x)^{\text{val}(y')}) \times \text{val}(x) && \text{(I.H.)} \\ &= \text{val}(x)^{(\text{val}(y')+1)} && \text{(Aritmetica)} \\ &= \text{val}(x)^{\text{val}(S(y'))} && \text{(Def. val(S))} \end{aligned}$$

■

6.3: Calcolo e Funzioni

Sia $Z = 0$ e $1 = S(0)$.

1. Calcolare $\text{val}(\exp(\exp(Z, Z), S(Z)))$ e $\text{val}(\exp(\exp(Z, S(Z)), Z))$.
2. (a) Quante sono le funzioni $j : \{1\} \to \emptyset$? (b) Quante sono le funzioni $f : \emptyset \to \{1\}$?

Soluzione. 6.3.1 Calcolo:
- $\text{val}(\exp(Z, Z)) = \text{val}(\exp(0, 0)) = \text{val}(0)^{\text{val}(0)} = 0^0 = 1$
- $\text{val}(\exp(Z, S(Z))) = \text{val}(\exp(0, S(0))) = \text{val}(0)^{\text{val}(S(0))} = 0^1 = 0$

Calcoliamo i due termini:

$$\begin{aligned} \text{val}(\exp(\exp(Z, Z), S(Z))) &= \text{val}(\exp(S(0), S(0))) && \text{(poiché } \exp(Z, Z) = S(0)\text{)} \\ &= \text{val}(S(0))^{\text{val}(S(0))} = 1^1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{val}(\exp(\exp(Z, S(Z)), Z)) &= \text{val}(\exp(0, 0)) && \text{(poiché } \exp(Z, S(Z)) = 0\text{)} \\ &= \text{val}(0)^{\text{val}(0)} = 0^0 = 1 \end{aligned}$$

I due valori sono uguali (entrambi 1).