

## Лабораторная работа № 1. Моделирование динамики популяций

**Цель работы:** получить навык численно-аналитического исследования математических моделей биологии, описывающих динамику популяций.

### Задание на лабораторную работу

**Задача I.** Рассматривается модель Ферхюльста

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left( 1 - \frac{N}{K} \right), \quad (1.1)$$

описывающая динамику численности одиночной популяции с учетом конкуренции за ресурсы в условиях их ограниченности.

- 1) Построить аналитическое решение уравнения (1.1).
- 2) Найти стационарные точки уравнения (1.1) и выполнить анализ их устойчивости в зависимости от исходных данных задачи. Построить графики соответствующих решений.
- 3) Выполнить конечно-разностную дискретизацию уравнения (1.1) по схеме Эйлера и показать, что она сводится к логистическому отображению

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k). \quad (1.2)$$

- 4) Определить аналитически первые четыре стационарные точки (1.2) и выполнить анализ их устойчивости.
- 5) Построить бифуркационную диаграмму отображения (1.2) и численно определить первые шесть точек бифуркации. По найденным значениям рассчитать приближения к числу Фейгенбаума

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \approx 4.669, \quad \delta_n = \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}},$$

где  $r_n$  – бифуркационные значения параметра  $r$  для  $n$ -го цикла удвоения.

- 6) Найти значения параметра  $r$  при которых происходит расщепление решения на три ветви (трифуркация).

**Задача II.** Рассмотреть обобщенную модель взаимодействия двух популяций типа хищник-жертва

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x)x - b(x, y)xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -c(y)y + d(x, y)xy, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $x(t)$  – размер популяции «жертв»,  $y(t)$  – размер популяции «хищников». Вид функций  $a(x), b(x, y), c(y), d(x, y)$  определяется индивидуально в зависимости от номера варианта в соответствии с приведенной ниже таблицей.

№ варианта	$a(x)$	$b(x, y)$	$c(y)$	$d(x, y)$
1	$A$	$\frac{B}{E+x}$	$C(y+M)$	$\frac{D}{E+x}$
2	$A(x-L)$	$\frac{B}{G+y}$	$Cy$	$\frac{D}{G+y}$
3	$A \frac{K-x}{K}$	$\frac{B}{E+x}$	$C$	$\frac{D}{E+x}$
4	$\frac{Ax}{N+x}$	$B$	$C$	$\frac{D}{P+y}$
5	$Ax$	$\frac{B}{(E+x)(G+y)}$	$C$	$\frac{D}{(E+x)(G+y)}$
6	$\frac{Ax}{N+x} \frac{K-x}{K}$	$B$	$Cy$	$D$
7	$A$	$\frac{B}{(E+x)(G+y)}$	$Cy$	$\frac{D}{(E+x)(G+y)}$
8	$A(x-L)$	$\frac{B}{E+x}$	$C$	$\frac{D}{E+x}$
9	$A \frac{K-x}{K}$	$B$	$C(y+M)$	$D$
10	$\frac{Ax}{N+x}$	$\frac{B}{G+y}$	$Cy$	$\frac{D}{G+y}$
11	$Ax$	$\frac{B}{E+x}$	$C$	$\frac{D}{(E+x)(P+y)}$
12	$\frac{Ax}{N+x} \frac{K-x}{K}$	$B$	$C$	$D$

Здесь  $A, B, C, D, E, G, K, L, M, N, P$  – положительные постоянные.

Для модели (1.3) со значениями функций, соответствующих индивидуальному заданию, выполнить следующее:

- 1) дать биологическую интерпретацию модели;
- 2) выполнить обезразмеривание модели с целью уменьшения количества значимых коэффициентов;
- 3) численно-аналитически найти стационарные точки модели и определить их тип;
- 4) исследовать найденные стационарные точки на устойчивость;
- 5) построить в окрестности каждой стационарной точки фазовый портрет.

## Отчетность

По результатам решения задач I и II составить отчет по лабораторной работе, который должен содержать постановки решенных задач, все проведенные аналитические выкладки, результаты численных расчетов, необходимые графики (в соответствии с заданием), выводы по работе.