Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

"Уфимский государственный авиационный технический университет"

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

Дисциплина: Математическое моделирование

Отчет по лабораторной работе № 2

на тему: «Компьютерное моделирование динамики трех тел»

Группа ПМ-453	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Шамаев И.Р.			
Принял	Лукащук В.О.			

Уфа 2023

Цель работы: получить навык численного расчета траекторий движения небесных тел под действием гравитационных сил.

Задание на лабораторную работу

Задача I. Рассматривается динамика трех разновеликих небесных тел: звезды, планеты и ее спутника. В качестве примера рассматривается Солнечная система. Масса Солнца $M_1 = 2 \cdot 10^{30}$кг.

Параметры второго тела				Параметры третьего тела			
M_2, кг	R_2, км	R_{12}, млн. км	V_2, км/с	M_3, кг	R_3, км	R_{23}, тыс. км	V_3, км/с
$1.9 \cdot 10^{27}$	71500	780	13	$1.1 \cdot 10^{23}$	2400	1883	8.2

1) Составить уравнения движения второго и третьего тела в системе отсчета, связанной с первым (самым массивным) телом. Предполагается, что движение всех тел происходит в одной плоскости.

2) Написать программу численного интегрирования составленных уравнений движения и построить траектории движения тел. В качестве начальных условий принять следующие: все тела находятся на одной прямой, вектора скоростей движения второго и третьего тела сонаправлены. Расстояния между первым и вторым, а также вторым и третьим телами приведены в таблице выше. Там же указаны значения начальных скоростей второго и третьего тела. Параметры задачи представлены в нижеследующей таблице.

Задача II. На круговой орбите второго тела высотой H находится космический корабль. В тот момент, когда корабль, второе тело и третье тело находятся на одной прямой, включаются двигатели космического корабля, которые работают в течение времени T, выводя корабль на новую орбиту. Вектор тяги двигателя в любой момент времени направлен по касательной к траектории движения. Определить стартовую массу корабля из условия, что на поверхность третьего тела необходимо доставить полезный груз массой M_0. Масса корабля складывается из массы топлива, полностью выгорающего за время T, массы конструкции (0.1 стартовой массы) и массы полезной нагрузки M_0. В конце активного участка траектории (через время T) происходит отделение полезного груза, который движется далее только под действием гравитационных сил. Скорость полезного груза при посадке не ограничена.

H, км	T, с	M_0, кг	Характеристики топлива		
			Горючее	Окислитель	Скорость истечения, м/с
500	3250	50	Керосин	Азотная кислота (98%)	3070

Практическая часть

Задача 1

По условию движения всех тел происходят в одной плоскости. Поместим первое тело (Солнце) в начало координат. Определим функции координат от времени $x_2(t)$ и $y_2(t)$ для второго тела (планеты) и $x_3(t)$ и $y_3(t)$ для третьего тела (спутника) относительно первого тела. На второе тело со стороны первого действует сила $F_{21}=G\frac{M_1 M_2}{r_{12}^2}$, а со стороны третьего – сила $F_{23}=G\frac{M_2 M_3}{r_{23}^2}$. На третье тело со стороны первого действует сила $F_{31}=G\frac{M_1 M_3}{r_{13}^2}$, а со стороны второго $F_{32}=-F_{23}$ (согласно третьему закону Ньютона). Получим уравнения движения второго и третьего тела относительно первого:

$$\begin{cases} M_2 a_{x_2}=-F_{21}\frac{x_2}{r_{12}}+F_{23}\frac{x_3-x_2}{r_{23}}, \\ M_2 a_{y_2}=-F_{21}\frac{y_2}{r_{12}}+F_{23}\frac{y_3-y_2}{r_{23}}, \\ M_3 a_{x_3}=-F_{31}\frac{x_3}{r_{13}}+F_{32}\frac{x_3-x_2}{r_{23}}, \\ M_3 a_{y_3}=-F_{31}\frac{y_3}{r_{13}}+F_{32}\frac{y_3-y_2}{r_{23}}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $r_{12}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}, r_{13}=\sqrt{x_3^2+y_3^2}, r_{23}=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$,

$$a_{x_2}=\frac{d^2 x_2}{dt^2}, a_{y_2}=\frac{d^2 y_2}{dt^2}, a_{x_3}=\frac{d^2 x_3}{dt^2}, a_{y_3}=\frac{d^2 y_3}{dt^2},$$

$$F_{21}=G\frac{M_1 M_2}{r_{12}^2}, F_{31}=G\frac{M_1 M_3}{r_{13}^2}, F_{23}=-F_{32}=G\frac{M_2 M_3}{r_{23}^2}.$$

Система (1.1) является системой четырех дифференциальных уравнений второго порядка. Преобразуем ее в систему из восьми дифференциальных уравнений первого порядка, учитывая, что

$$a_{x_2}=\frac{dv_{x_2}}{dt}, a_{y_2}=\frac{dv_{y_2}}{dt}, a_{x_3}=\frac{dv_{x_3}}{dt}, a_{y_3}=\frac{dv_{y_3}}{dt};$$

$$v_{x_2}=\frac{d\,x_2}{dt},\,v_{y_2}=\frac{d\,y_2}{dt},\,v_{x_3}=\frac{d\,x_3}{dt},\,v_{y_3}=\frac{d\,y_3}{dt}.$$

Получим

$$\begin{cases} v_{x_2}=\dfrac{d\,x_2}{dt}, \\ v_{y_2}=\dfrac{d\,y_2}{dt}, \\ v_{x_3}=\dfrac{d\,x_3}{dt}, \\ v_{y_3}=\dfrac{d\,y_3}{dt}, \\ M_2\dfrac{d\,v_{x_2}}{dt}=-F_{21}\dfrac{x_2}{r_{12}}+F_{23}\dfrac{x_3-x_2}{r_{23}}, \\ M_2\dfrac{d\,v_{y_2}}{dt}=-F_{21}\dfrac{y_2}{r_{12}}+F_{23}\dfrac{y_3-y_2}{r_{23}}, \\ M_3\dfrac{d\,v_{x_3}}{dt}=-F_{31}\dfrac{x_3}{r_{13}}+F_{32}\dfrac{x_3-x_2}{r_{23}}, \\ M_3\dfrac{d\,v_{y_3}}{dt}=-F_{31}\dfrac{y_3}{r_{13}}+F_{32}\dfrac{y_3-y_2}{r_{23}}, \end{cases} \quad (1.2)$$

Решение системы

Изначально все тела находятся на одной прямой. Без ограничения общности примем, что в начальный момент времени все тела находятся на оси Ox. Тогда начальные условия для системы (1.2) будут иметь вид

$$\begin{cases} x_2|_{t=0}=R1+R12+R2, \\ y_2|_{t=0}=0, \\ x_3|_{t=0}=R1+R12+2*R2+R23+R3, \\ y_3|_{t=0}=0, \\ v_{x_2}|_{t=0}=0, \\ v_{y_2}|_{t=0}=V_2, \\ v_{x_3}|_{t=0}=0, \\ v_{y_3}|_{t=0}=V_2+V_3. \end{cases} \quad (1.3)$$

Для решения задачи (1.2)-(1.3) был использован программный пакет Maple (код представлен в Приложении А) с применением метода Рунге-Кутта-

Фельберга 4-5-ого порядка. На Рисунке 1 представлены траектории движения планеты и спутника относительно Солнца за 4000 часов. Видно, что траектория движения планеты является эллиптической, а спутник вращается вокруг планеты.

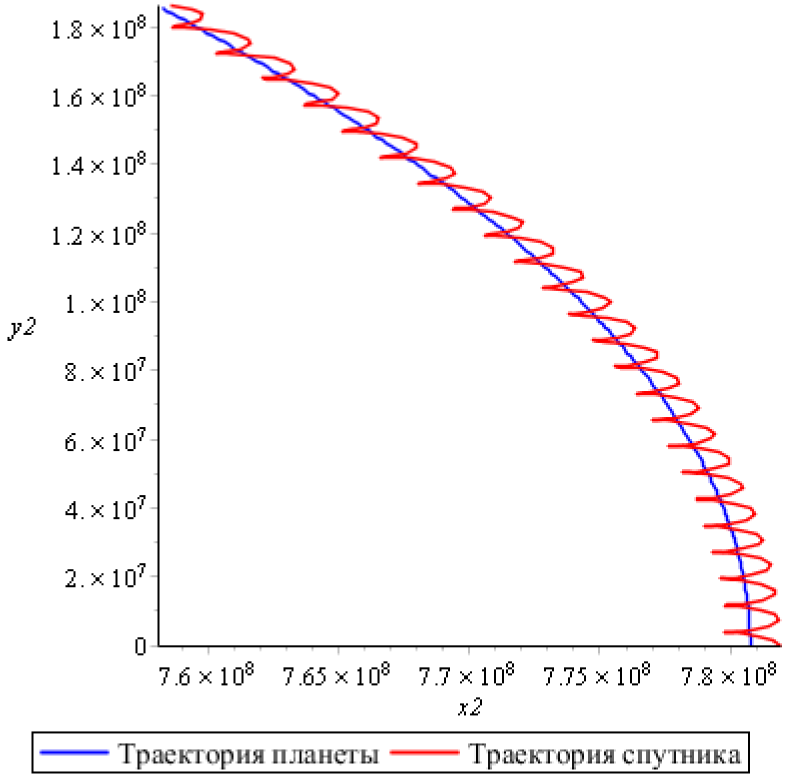

*Рисунок **1**. Траектория движения спутника вокруг движущейся планеты*

Задача 2

Для описания движения космического корабля воспользуемся уравнением Мещерского в классическом виде:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=-\vec{u}\frac{dm}{dt}+\sum\vec{F},(2.1)$$

где $\vec{v}$ – скорость ракеты, $\vec{u}$ – скорость истечения продуктов сгорания в пустоте.

Возьмем $\lambda=\frac{m_{\text{к}}}{M_{\text{общая}}}=0{,}0001$, где $m_{\text{к}}$ – масса конструкции ракеты, а $M_{\text{общая}}=m_{\text{к}}+m_{\text{т}}+M_0$ – общая масса ракеты, $m_{\text{т}}$ – масса топлива, M_0 – масса полезной нагрузки. Тогда масса ракеты вычисляется по формуле:

$$m(t)=\begin{cases}\frac{M_0+m_{\text{т}}}{1-\lambda}-\frac{m_{\text{т}}}{T}t,\ t<T,\\ M_0,\ t\geq T.\end{cases}(2.2)$$

Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}m(t)\frac{dv_x(t)}{dt}=-u\frac{v_x(t)}{v(t)}\frac{dm(t)}{dt}-F_{\text{с}}\frac{x(t)}{r_{\text{с}}(t)}-\text{¿}-F_{\text{ю}}\frac{(x(t)-x_{\text{ю}}(t))}{r_{\text{ю}}(t)}-F_{\text{г}}\frac{(x(t)-x_{\text{г}}(t))}{r_{\text{г}}(t)},\\ m(t)\frac{dv_y(t)}{dt}=-u\frac{v_y(t)}{v(t)}\frac{dm(t)}{dt}-F_{\text{с}}\frac{y(t)}{r_{\text{с}}(t)}-\text{¿}-F_{\text{ю}}\frac{(y(t)-y_{\text{ю}}(t))}{r_{\text{ю}}(t)}-F_{\text{г}}\frac{(y(t)-y_{\text{г}}(t))}{r_{\text{г}}(t)},\end{cases}(2.3)$$

где $r_{\text{с}}=\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2},r_{\text{ю}}=\sqrt{(x(t)-x_{\text{ю}}(t))^2+(y(t)-y_{\text{ю}}(t))^2},r_{\text{г}}=\sqrt{(x(t)-x_{\text{г}}(t))^2+(y(t)-y_{\text{г}}(t))^2}$,

$$F_{\text{с}}=G\frac{m(t)M_{\text{с}}}{r_{\text{с}}^2},F_{\text{ю}}=G\frac{m(t)M_{\text{ю}}}{r_{\text{ю}}^2},F_{\text{г}}=G\frac{m(t)M_{\text{г}}}{r_{\text{г}}^2},$$

$x(t),y(t)$ – координаты ракеты.

Решение системы

Начальные условия для системы (2.3) будут иметь вид

$$\begin{cases} x|_{t=0}=R_{12}+R_1-h, \\ y|_{t=0}=0, \\ v_x|_{t=0}=0, \\ v_y|_{t=0}=V_3+V_{1к}, \end{cases} \qquad (2.4)$$

где $V_{1к}=\sqrt{\dfrac{GM_2}{R_2+H}}$ – первая космическая скорость.

Для решения задачи (2.3)-(2.4) был использован программный пакет Maple (код представлен в Приложении Б) с применением метода Рунге-Кутта-Фельберга 4-5-ого порядка. На Рис. 2 представлены траектории движения спутника и ракеты до момента попадания полезного груза на спутник. По результатам расчетов было получено, что необходимое количество топлива для доставки полезного груза на спутник составляет $16.1345*10^3$ кг. Расстояние между ракетой и спутником равно 2628.4636 км, а радиус спутника – 2634 км. Время полета составляет 4.8415 земных дней.

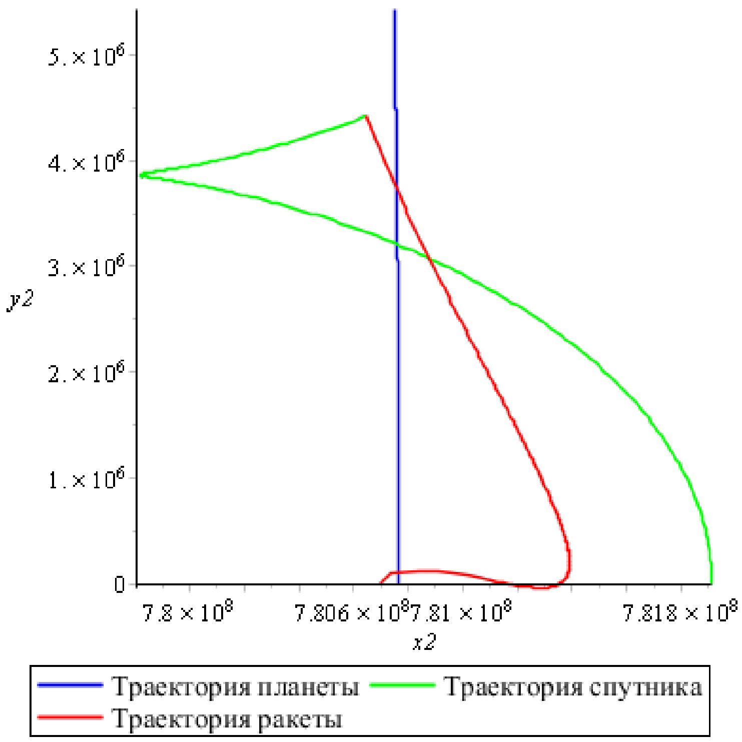

Рисунок 2. Траектория движения ракеты к спутнику

Были получены следующие результаты:

Первая космическая скорость = $1.510344332\ 10^5$

Вторая космическая скорость = $2.135949438\ 10^5$

Максимальная скорость = $1.98770095661362\ 10^5$

Масса топлива = 16134.5000 *кг*

Рисунок 3. Результаты вычислений

Заключение

В ходе данной лабораторной работы были построены траектории движения планеты, спутника и ракеты, которая запускалась с планеты. Отношение массы конструкции к общей массе ракеты было взято равное 0,0001. Было получено, что в момент выпуска всего топлива скорость ракеты была больше первой, но меньше второй космической. Траектория движения ракеты – эллиптическая. Минимальное расстояние составило 2628.464 км, которое было достигнуто за 4.841 земных дней. Таким образом, полезный груз был успешно доставлен.

Приложение А. Листинг решения задачи 1 в математическом пакете Maple

> $restart;$

> $M1 := 2\cdot 10^{30} : M2 := 1.9\cdot 10^{27} : M3 := 1.5\cdot 10^{23} :$

> $R1 := 695508 : R2 := 71500 : R3 := 2634 :$

> $R12 := 78\cdot 10^{7} : R23 := 107\cdot 10^{4} :$

> $V2 := 13\cdot 3600 : V3 := 10.0\cdot 3600 :$

> $G := 6.67\cdot 10^{-20}\cdot 3600^{2} :$

> $r12 := (t) \rightarrow \left((x2(t))^2 + (y2(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} :$
$r13 := (t) \rightarrow \left((x3(t))^2 + (y3(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} :$
$r23 := (t) \rightarrow \left((x3(t) - x2(t))^2 + (y3(t) - y2(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} :$

> $F21 := (t) \rightarrow \frac{G\cdot M1\cdot M2}{(r12(t))^2} :$
$F31 := (t) \rightarrow \frac{G\cdot M1\cdot M3}{(r13(t))^2} :$
$F23 := (t) \rightarrow \frac{G\cdot M2\cdot M3}{(r23(t))^2} :$
$F32 := (t) \rightarrow -F23(t) :$

> $sys := \left\{ M2\cdot \frac{d}{dt} vx2(t) = -\frac{F21(t)\cdot x2(t)}{r12(t)} + \frac{F23(t)\cdot (x3(t) - x2(t))}{r23(t)}, \right.$
$M2\cdot \frac{d}{dt} vy2(t) = -\frac{F21(t)\cdot y2(t)}{r12(t)} + \frac{F23(t)\cdot (y3(t) - y2(t))}{r23(t)},$
$M3\cdot \frac{d}{dt} vx3(t) = -\frac{F31(t)\cdot x3(t)}{r13(t)} + \frac{F32(t)\cdot (x3(t) - x2(t))}{r23(t)},$
$M3\cdot \frac{d}{dt} vy3(t) = -\frac{F31(t)\cdot y3(t)}{r13(t)} + \frac{F32(t)\cdot (y3(t) - y2(t))}{r23(t)},$
$\frac{d}{dt} x2(t) = vx2(t),$
$\frac{d}{dt} y2(t) = vy2(t),$
$\frac{d}{dt} x3(t) = vx3(t),$
$\frac{d}{dt} y3(t) = vy3(t),$
$x2(0) = R1 + R12 + R2,$
$y2(0) = 0,$
$x3(0) = R1 + R12 + 2\cdot R2 + R23 + R3,$
$y3(0) = 0,$
$vx2(0) = 0,$
$vy2(0) = V2,$
$vx3(0) = 0,$
$\left. vy3(0) = V2 + V3 \right\} :$

```
> slv := dsolve(sys, {x2(t), y2(t), x3(t), y3(t), vx2(t), vy2(t), vx3(t), vy3(t)}, type
      = numeric, method = rkf45, output = listprocedure) :
> with(plots) :
> planet := odeplot(slv, [x2(t), y2(t)], t = 0 ..4000, color = blue, legend
      = "Траектория планеты");
                                  planet := PLOT(...)
> satellite := odeplot(slv, [x3(t), y3(t)], t = 0 ..4000, color = red, legend
      = "Траектория спутника");
                                  satellite := PLOT(...)
> display(planet, satellite);
```

Приложение Б. Листинг решения задачи 2 в математическом пакете Maple

$> m\_p := 50 : \#\text{полезная масса ракеты}$

$> lam := 0.0001\ \#\text{Отношение массы конструкции к общей массе ракеты}$

$$lam := 0.0001$$

$> T := \frac{3250}{3600} : \#\text{время работы двигателя}$

$> H := 500 :$

$> u := \frac{3070 \cdot 3600}{1000} :$

$> V1k := \sqrt{\frac{G \cdot M2}{R2 + H}} :$

$V2k := \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M2}{R2 + H}} :$

$> m\_fuel := 16.1345 \cdot 10^3 ; \#\text{масса топлива}$

$M0 := \frac{(m\_p + m\_fuel)}{1 - lam} : \#\text{масса ракеты}$

$$m\_fuel := 16134.5000$$

$>$

$> x\_pl := eval(x2(t), slv) :$

$y\_pl := eval(y2(t), slv) :$

$x\_sat := eval(x3(t), slv) :$

$y\_sat := eval(y3(t), slv) :$

$> m := (t) \rightarrow piecewise\left(t < T, M0 - \frac{m\_fuel \cdot t}{T}, t \geq T, m\_p\right) :$

$> v := (t) \rightarrow \sqrt{(vx(t))^2 + (vy(t))^2} :$

$r := (t) \rightarrow \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} :$

$r\_pl := (t) \rightarrow \sqrt{(x(t) - x\_pl(t))^2 + (y(t) - y\_pl(t))^2} :$

$r\_sat := (t) \rightarrow \sqrt{(x(t) - x\_sat(t))^2 + (y(t) - y\_sat(t))^2} :$

$F\_pl := (t) \rightarrow \frac{G \cdot m(t) \cdot M2}{(r\_pl(t))^2} :$

$F\_sat := (t) \rightarrow \frac{G \cdot m(t) \cdot M3}{(r\_sat(t))^2} :$

$F := (t) \rightarrow \frac{G \cdot m(t) \cdot M1}{(r(t))^2} :$

$> sys2 := \left\{ m(t) \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = -\frac{u \cdot vx(t)}{v(t)} \cdot \frac{d}{dt} m(t) - \frac{F(t) \cdot x(t)}{r(t)} - \frac{F\_pl(t) \cdot (x(t) - x\_pl(t))}{r\_pl(t)} - \frac{F\_sat(t) \cdot (x(t) - x\_sat(t))}{r\_sat(t)}, m(t) \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -\frac{u \cdot vy(t)}{v(t)} \cdot \frac{d}{dt} m(t) - \frac{F(t) \cdot y(t)}{r(t)} - \frac{F\_pl(t) \cdot (y(t) - y\_pl(t))}{r\_pl(t)} - \frac{F\_sat(t) \cdot (y(t) - y\_sat(t))}{r\_sat(t)}, \frac{d}{dt} x(t) = vx(t), \frac{d}{dt} y(t) = vy(t), x(0) = R1 + R12 - H, y(0) = 0, vx(0) = 0, vy(0) = V1k + V2 \right\} :$

$> slv2 := dsolve(sys2, \{x(t), y(t), vx(t), vy(t)\}, numeric, method = rkf45, maxfun = 1500000, output = listprocedure) :$

```
> x := eval(x(t), slv2) :
  y := eval(y(t), slv2) :
  vx := eval(vx(t), slv2) :
  vy := eval(vy(t), slv2) :
  tend := 116.1948 :
  min_lenght := sqrt((x(tend) - x_sat(tend))^2 + (y(tend) - y_sat(tend))^2) :
  print(Расстояние между ракетой т центром спутника = min_lenght (км));
  print(Радиус спутника = R3 (км));
  print(Время полета = tend/24 (дней));
  print(Первая космическая скорость = V1k);
  print(Вторая космическая скорость = V2k);
  print(Максимальная скорость = sqrt((vx(T))^2 + (vy(T))^2));
  print(Масса топлива = m_fuel (кг));

  with(plots) :

  planet := odeplot(slv, [x2(t), y2(t)], t = 0 ..tend, color = blue, legend
      = "Траектория планеты", frames = 20) :
  satellite := odeplot(slv, [x3(t), y3(t)], t = 0 ..tend, color = green, legend
      = "Траектория спутника", frames = 20) :
  spaceship := odeplot(slv2, [x(t), y(t)], t = 0 ..tend, color = red, legend
      = "Траектория ракеты", frames = 20) :
  display(planet, satellite, spaceship);
```