Лабораторная работа № 5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ПЕРКОЛЯЦИИ

Цель работы: получить навык численного моделирования явлений перколяции.

Краткая теоретическая часть

Перколяция – явление протекания вещества или энергии через неоднородную среду. Наиболее часто перколяция наблюдается при протекании (фильтрации) жидкости через пористую среду или при протекании электрического тока через неупрорядоченную неоднородную среду, состоящую из смеси диэлектрика и проводника.

Для моделирования явления перколяции можно использовать методы стохастического моделирования. В этом случае моделируемая неоднородная среда разбивается на элементарные ячейки, каждой из которой сопоставляется либо значение «1» (проводник, пора), либо значение «0» (диэлектрик, порода). При стохастическом моделировании значения расставляются случайным образом по следующему правилу. Для каждой ячейки среды генерируется случайная величина $s \in [0,1]$, подчиняющаяся равномерному закону распределения, которая сравнивается с некоторым заданным значением $p \in (0,1)$. При $s \le p$ ячейке сопоставляется значение 0, иначе – значение 1.

Пусть моделируемая область является прямоугольной и интерес представляет протекание между верхней и нижней гранями. Если между гранями существует путь из 1, то говорят, что существует связной кластер. Минимальное значение p, при котором с заданной вероятностью возникает связной кластер, называется *порогом перколяции*.

Алгоритм обнаружения связного кластера

Организуется обход ячеек прямоугольной решеточной области в направлении слева направо начиная с верхнего ряда.

1) Производится замена всех единиц в первом ряду решетки на некоторое целочисленное значение X, отличное от 0 и 1.

2) Начинается последовательный обход сверху вниз остальных рядов решетки. Анализируются только ячейки с единицей: если такая ячейка граничит с ячейкой со значением X, то значение в этой ячейке также меняется на X. Граничащими считаются ячейки, расположенные относительно текущей сверху, снизу, слева и справа (но не по диагонали).

Если в процессе обхода в некотором ряду не проведено ни одной замены, то процесс останавливается – связной кластер отсутствует. В противном случае (то есть в последнем ряду появилась хотя бы одна ячейка с X) связной кластер существует.

Алгоритм определения порога протекания

Задается шаг $\Delta p << 1$ и со значением $p = p_1 \equiv 1 - \Delta p$ случайным образом генерируются M различных вариантов моделируемой среды одинакового размера. Для каждой сгенерированной среды находится связной кластер. Если для данной среды кластер найден, то значение счетчика $N(p_1)$ увеличивается на 1. Далее процесс повторяется для $p = p_2 \equiv 1 - 2\Delta p$ и так далее. Значение $p_j = 1 - j\Delta p$, при котором впервые $N(p_j) = 0$, дает нижнюю оценку порога перколяции. Соответственно, значение $p_{j-1} = 1 - (j-1)\Delta p$ дает верхнюю оценку порога перколяции. Таким образом, порог перколяции $p_c \in [p_j, p_{j-1}]$. При необходимости, значение p_c можно уточнить с любой требуемой точностью методом бисекции.

Алгоритм расчета количества кластеров

Кластером называются три и более смежные между собой ячейки с одинаковыми значениями. Алгоритм расчета количества кластеров в заданной решеточной прямоугольной области сводится к следующим шагам (для определенности, ищем кластеры из ячеек с единицами).

1) В первом ряду решетки находится первая ячейка с номером 1 и значение в ней заменяется на 2. При этом счетчик N_2 инициализируется единицей.

2) Рассматриваются ячейки-соседи для ячейки с номером 2 и если среди них находятся ячейки с номером 1, то номер в них также меняется на 2. При этом счетчик N_2 каждый раз увеличивается на единицу.

3) Шаг 2 повторяется для каждой ячейки с номером 2. Если новых ячеек не обнаружено, то переход к шагу 1 с заменой номера 2 на номер 3.

Процесс заканчивается после того, как в системе не осталось ячеек с номером 1.

Количество кластеров равно количеству счетчиков, значения которых больше 2.

Задание

Сгенерировать серии квадратных решеточных областей размером $L \times L$ для $L = 8, 16, 32, 64, 128, 256$. Для каждого размера определить порог протекания и количество кластеров. Построить графики зависимости этих величин от размера L и выполнить их аппроксимацию степенными зависимостями. Исследовать зависимость полученных результатов от величины параметра M.

Отчетность

По результатам решения задачи составить отчет по лабораторной работе, который должен содержать постановку решаемых задач, описания особенностей программной реализации приведенных алгоритмов, примеры сгенерированных сред, графики зависимостей порога протекания и количества кластеров от размера решетки, аппроксимации полученных зависимостей, анализ полученных результатов и выводы по работе.