**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Уфимский государственный авиационный технический университет"**

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

Дисциплина: Математическое моделирование

Отчет по лабораторной работе № 1

Тема: «Моделирование динамики популяций»

Группа ПМ-453	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Шамаев И.Р.			
Принял	Лукащук В.О.			

Уфа 2023

Цель работы: Получить навык численно-аналитического исследования математических моделей биологии, описывающих динамику популяций.

Задание на лабораторную работу

Задача 1. Рассматривается модель Ферхюльста

$$\frac{dN}{dt}=\alpha N\left(1-\frac{N}{K}\right),$$

описывающая динамику численности одиночной популяции с учетом конкуренции за ресурсы в условиях их ограниченности.

1. Построить аналитическое решение уравнения.
2. Найти стационарные точки уравнения и выполнить анализ их устойчивости в зависимости от исходных данных задачи. Построить графики соответствующих решений.
3. Выполнить конечно-разностную дискретизацию уравнения по схеме Эйлера и показать, что она сводится к логистическому отображению

$$x_{k+1}=r\,x_k\left(1-x_k\right).$$

4. Определить аналитически первые четыре стационарные точки и выполнить анализ их устойчивости.
5. Построить бифуркационную диаграмму отображения и численно определить первые шесть точек бифуркации. По найденным значениям рассчитать приближения к числу Фейгенбаума

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\delta_n\approx 4{,}669\,,\ \delta_n=\frac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+2}-r_{n+1}},$$

6. где r_n – бифуркационные значения параметра r для n-го цикла удвоения.
7. Найти значения параметра r при которых происходит расщепление решения на три ветви (трифуркация).

Задача 2. Рассмотреть обобщенную модель взаимодействия двух популяций типа хищник-жертва

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a(x)x-b(x,y)xy\,,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-c(y)\,y+d(x,y)xy\,,\end{cases}$$

где $x(t)$ – размер популяции «жертв», $y(t)$ – размер популяции «хищников». Вид функций $a(x), b(x,y), c(y), d(x,y)$ определяется индивидуально в зависимости от номера варианта.

Для модели со значениями функций, соответствующих индивидуальному заданию, выполнить следующее:

1. дать биологическую интерпретацию модели;
2. выполнить обезразмеривание модели с целью уменьшения количества значимых коэффициентов;
3. численно-аналитически найти стационарные точки модели и определить их тип;
4. исследовать найденные стационарные точки на устойчивость;
5. построить в окрестности каждой стационарной точки фазовый портрет.

Вариант 1:

$a(x)$	$b(x,y)$	$c(y)$	$d(x,y)$
A	$B/(E+x)$	$C(y+M)$	$D/(E+x)$

Задача 1. Модель Ферхюльста

Построение аналитического решения и определение стационарных точек уравнения Ферхюльста

Рассмотрим модель Ферхюльста динамики популяции

$$\frac{dN}{dt}=\alpha N\left(1-\frac{N}{K}\right)=\alpha N-\beta N^2,$$

где

- $K=\frac{\alpha}{\beta}-$¿ предельное значение популяции;
- $N-$¿ численность популяции;
- $\alpha-$¿ удельная скорость изменения численности особей;
- $\beta-$¿ степень изменения скорости размножения особей в связи с ограниченностью ресурсов питания.

Определим стационарные точки уравнения :

$$\alpha N\left(1-\frac{N}{K}\right)=0\Rightarrow N_1^{¿}=0,\ N_2^{¿}=K.$$

Обозначим $f(N)=\alpha N\left(1-\frac{N}{K}\right)$. Тогда:

$$\frac{df(N)}{dN}=\alpha-\frac{2\alpha N}{K}.$$

В стационарных точках из предыдущего находим:

$$\frac{df(N)}{dN}¿_{N=N_1^{¿}}=\alpha,$$
$$\frac{df(N)}{dN}¿_{N=N_2^{¿}}=-\alpha.$$

Таким образом, получаем, что при $\alpha<0$ точка $N_1^{¿}-¿$ устойчива, точка $N_2^{¿}-¿$ неустойчива. При $\alpha>0$ наоборот.

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases}\frac{dN}{dt}=\alpha N-\beta N^2\\ N¿_{t=0}=N_0,\end{cases}$$

где $N_0-¿$ начальное количество особей. Найдем решение системы:

$$\int_{N_0}^{N}\frac{dN}{\alpha N-\beta N^2}=\int_0^t dt,$$
$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)-\ln\left(\frac{1-\frac{N}{K}}{1-\frac{N_0}{K}}\right)=\alpha t.$$

Далее, выражая из полученного уравнения $N-¿$ количество особей в популяции в момент времени t, получим:

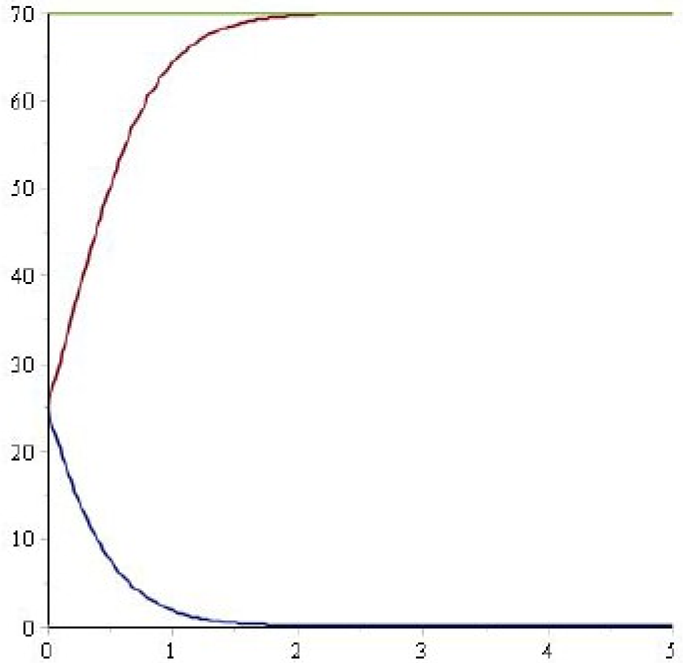
$$N=\frac{Ke^{\alpha t}}{\frac{K}{N_0}-1+e^{\alpha t}}=\frac{KN_0e^{\alpha t}}{K+N_0\left(e^{\alpha t}-1\right)}.$$

Анализ устойчивости стационарных точек уравнения Ферхюльста в зависимости от исходных данных

Положим $K=70-¿$ предельное значение популяции и проведем исследование устойчивости стационарных точек уравнения в зависимости от исходных данных.

Случай $N_0<K/2$

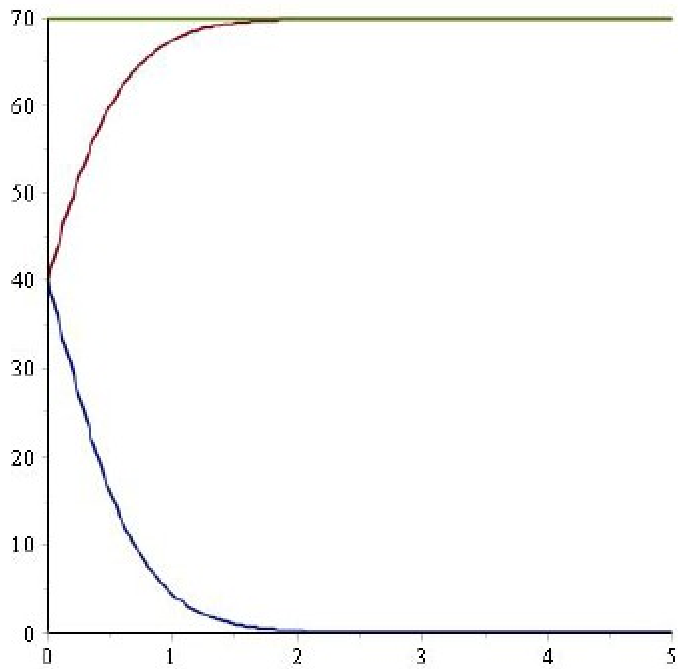
Рассмотрим $\alpha>0$. Если начальная численность популяции N_0 меньше величины экологической емкости популяции K, то с течением времени ее размер будет расти, приближаясь к своему предельному значению K. При этом, если начальная численность составляет менее половины емкости экологической ниши, на начальном этапе скорость роста популяции будет возрастать, пока численность не достигнет значения $K/2$, а затем начнет снижаться, стремясь к нулю. Данный вид кривой обусловлен постепенным усилением действия неблагоприятных факторов по мере увеличения плотности популяции.



$N_0=25$ - начальный размер популяции , $K=70$ - предельное значение популяции (заленый график), $\alpha=3$ (красный график), $\alpha=-3$ (синий график)

Случай $N_0>K/2$

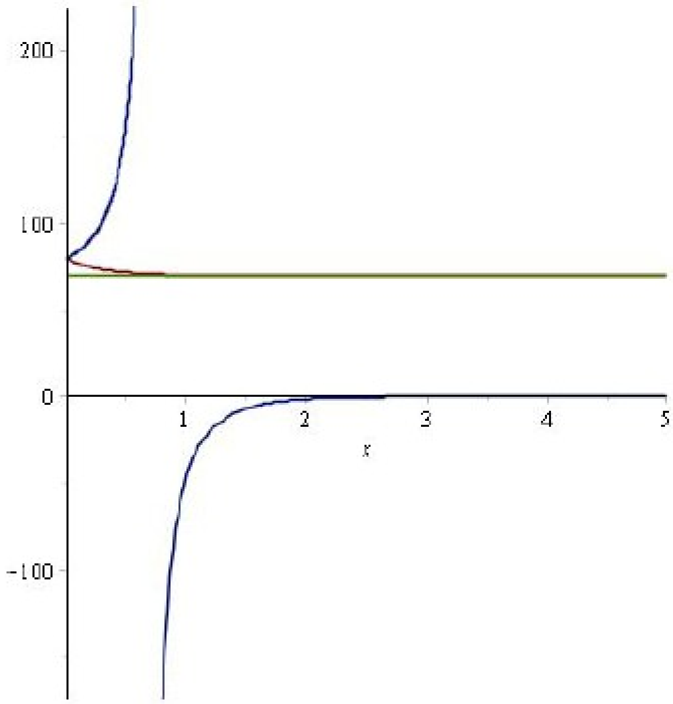
Рассмотрим $\alpha>0$. Если начальная численность популяции N_0 составляет более половины емкости экологической емкости популяции K, то размер популяции будет увеличиваться, стремясь к значению K, а скорость ее роста будет неуклонно снижаться. Данный вид кривой так же обусловлен постепенным усилением действия неблагоприятных факторов по мере увеличения плотности популяции.



$N_0 = 40$ - начальный размер популяции , $K = 70$ - предельное значение популяции (заленый график), $\alpha = 3$ (красный график), $\alpha = -3$ (синий график)

Случай $N_0 > K$

Если размер популяции в начальный момент времени больше предельно возможного значения, то численность популяции будет снижаться. Случай при $\alpha < 0$ невозможен, так как в этом случае популяция уже истратила свои ресурсы.



$N_0=80$ - начальный размер популяции , $K=70$ - предельное значение популяции (заленый график), $\alpha=3$ (красный график), $\alpha=-3$ (синий график)

Конечно-разностная дискретизация уравнения модели Ферхюльста по схеме Эйлера

Рассмотрим модель Ферхюльста динамики популяции :

$$\frac{dN}{dt}=\alpha N\left(1-\frac{N}{K}\right)=\alpha N-\beta N^2,$$

Введем дискретные моменты времени и размеры популяции:

$$\Delta t=t_{k+1}-t_k=const,$$

$$\frac{dN}{dt}¿_{t=t_k}=\frac{\Delta N}{\Delta t}¿_{t=t_k}=\frac{N_k-N_{k-1}}{\Delta t}.$$

Далее, учитывая - , уравнение будет иметь вид:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{t=t_k}=\alpha N_k-\beta N_k^2,$$

$$N_{k+1}=\Delta t\alpha N_k\left(1-\frac{\beta}{\alpha}N_k\right)+N_k,$$

$$\gamma x_{k+1}=\Delta t\alpha\gamma x_k\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\gamma x_k\right)+\gamma x N_k,$$

$$x_{k+1}=(1+\alpha\Delta t)x_k[1-\gamma\alpha\Delta t x_k]/(1+\alpha\Delta t),$$

Упрощая полученное выражение и обозначая $\gamma=\frac{1+\alpha\Delta t}{\alpha\Delta t}, r=1+\alpha\Delta t$, получим:

$$x_{k+1}=r x_k(1-x_k).$$

Таким образом, показали, что конечно-разностная дискретизация уравнения Ферхюльста сводит его к уравнению , которое назывется логистическим отображением.

Определение стационарных точек логистического отображения и анализ их устойчивости

Рассмотрим уравнение $x_{k+1}=f(x_k,r)$. Стационарной точкой данного уравнения будет являться решение системы $x_k^{¿}=x_{k+1}^{¿}=f(x_k,r)$.

Возьмем $x_k=x^{¿}+\Delta x_k, x_{k+1}=x^{¿}+\Delta x_{k+1}$. Тогда:

$$x^{¿}+\Delta x_{k+1}=f(x^{¿}+\Delta x_k,r)\approx f(x^{¿},r)+\frac{\partial f}{\partial x}¿_{x=x^{¿}}\Delta x_k,$$

откуда получим

$$\Delta x_{k+1}=\frac{\partial f}{\partial x}¿_{x=x^{¿}}\Delta x_k .$$

Рассмотрим последовательность $\Delta x_k : \Delta x_{k+1} < \Delta x_k , \forall k .$ Условие устойчивости стационарной точки имеет вид:

$$¿\frac{\partial f}{\partial x}(x=x^{¿})\vee ¿1.$$

Таким образом, стационарными точками логистического отображения будут являться следующие точки:

$$x_1^{¿}=0,$$

$$x_2^{¿}=\frac{r-1}{r},$$

$$x_{3,4}^{¿}=r+1\pm\sqrt{¿¿}¿$$

Теперь проверим устойчивость полученных стационарных точек - :

$$¿$$

Используя условие устойчивости получаем:

1. при $r\in(0,1)\,x_1^{¿}$ устойчива;
2. при $r\in(1,3)\,x_2^{¿}$ устойчива;
3. при $r\in(3,1+\sqrt{6})\,x_{3,4}^{¿}$ устойчива;

Бифуркационная диаграмма

Проведем для модели Ферхюльста аналитическое нахождение первой точки бифуркации.

Для точки бифуркации справедлива следующая система:

$$\begin{cases} f(x_2)=x_1 \\ f(x_1)=x_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=r\,x_2(1-x_2) \\ x_2=r\,x_1(1-x_1). \end{cases}$$

Произведем сложение обоих уравнений, затем вычтем из первого уравнения второе, и после некоторых преобразований получим систему:

$$\begin{cases} (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)\left(\frac{r-1}{r}\right) \\ x_1-x_2=(x_1+x_2)(r(x_1+x_2)-r), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1+x_2)=\frac{1+r}{r} \\ x_1x_2=\frac{1+r}{r^2}. \end{cases}$$

Решая систему , получаем выражение для x_1 и x_2:

$$x_{1,2}=\frac{1+r\pm\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$

Из найденной формулы делаем вывод, что точка бифуркации может существовать при значениях $r\geq 3$.

Также легко убедиться, что при $r=3$ происходит раздвоение решения, так как $\frac{\partial f}{\partial x}¿_{r=3}=-1$.

Найдем первую точку неустойчивости решения при $r\geq 3$. Для этого надо использовать правило дифференцирования сложной функции:

$$\left[f\left(f\left(x_1\right)\right)\right]'=f'\left(f\left(x_1\right)\right)f'\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right)f'\left(x_1\right),$$

так как

$$f'(x)=r(1-2x)\Rightarrow r^2\left(1-2x_1\right)\left(1-2x_2\right)=r^2\left(1-2\left(x_1+x_2\right)+4x_1x_2\right)=r^2\left(1-2\frac{1+r}{r}+4\frac{1+r}{r^2}\right)=-r^2+2r+4.$$

Далее, чтобы найти значение r, нужно решить следующее уравнение:

$$-r^2+2r+4=-1\Rightarrow r=1+\sqrt{6}\approx 3{,}499.$$

Следовательно, так же можно найти остальные точки бифуркации.

Приведем первые точки бифуркации:

$$r_1=1;$$
$$r_2=3;$$
$$r_3=3{,}4494;$$
$$r_4=3{,}5441;$$
$$r_5=3{,}5645;$$
$$r_6=3{,}5688;$$
$$r_7=3{,}5697.$$

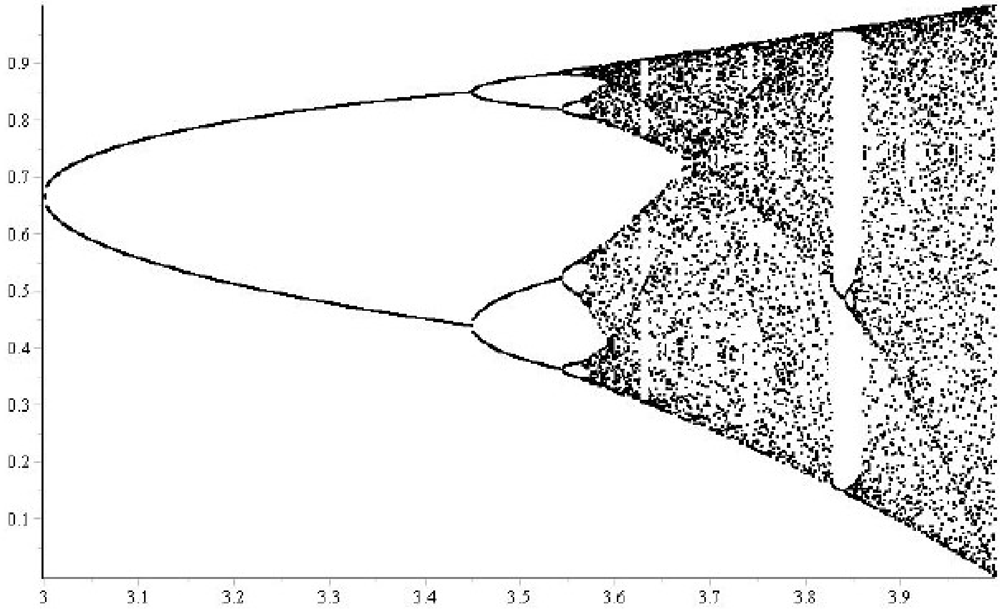
и точку трифуркации:

$$r_8=3{,}8285.$$

На языке C++ была реализована программа, которая вычисляет:

- точки бифуркации, алгоритм нахождения которых следующий: при достаточно большом времени при варьировании параметра r в полуинтервале ¿ с шагом $t=0.01$ запоминается n точек, которые являются решением уравнения (3);
- точку трифуркации;
- несколько первых приближений к числу Фейгенбаума, равное $\lim ¿_{n\to\infty}\delta_n=\delta_0=4{,}669.¿$

С помощью математического пакета Maple было построено бифуркационное дерево



Бифуркационная диаграмма

Задача 2. Модель Лотки-Вольтера

Пусть биологическая модель описывается системой двух автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x)x - b(x,y)xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -c(y)y + d(x,y)xy, \end{cases}$$

Биологическая интерпретация модели

Согласно индивидуальному заданию система Лотки-Вольтера принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax - \dfrac{B}{E+x}xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -C(y+M)y + \dfrac{D}{E+x}xy, \end{cases}$$

Биологическая интерпретация модели следующая:

1. $a(x) = A$ означает, что популяция жертв растет линейно;

2. $b(x,y) = \dfrac{B}{E+x}$ показывает, что смертность жертв будет убывать с ростом популяции;

3. $c(y)=C(y+M)$ означает, что популяция хищников будет убывать квадратично со сдвигом на M;

4. $d(x,y)=\frac{D}{E+x}$ показывает, что рождаемость хищников будет снижаться с ростом популяции жертв;

где $A, B, C, D, E, M -¿$ произвольные положительные константы.

Обезразмеривание модели

Индивидуальное задание:

$$b(x,y)=\frac{B}{E+x};$$
$$d(x,y)=\frac{D}{E+x};$$
$$c(y)=C(y+M);$$
$$a(x)=A,$$

где $A, B, C, D, E, M -¿$ произвольные положительные константы.

Перейдем к обезразмериванию модели:

$$\bar{x}=\frac{x}{X}, \bar{y}=\frac{y}{Y}, \bar{t}=\frac{t}{T}.$$

Таким образом, при учете индивидуального задания и введении переменных для обезразмеривания, биологическую модель можно представить следующей системой:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}=AT\bar{x}-\frac{B}{E+\bar{x}X}TY\bar{x}\bar{y}, \\ ¿\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}=-C(\bar{y}Y+M)T\bar{y}+\frac{D}{E+\bar{x}X}TX\bar{x}\bar{y}. \end{cases}$$

После проведения операции обезразмеривания, система принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\bar{x}}{d\bar{t}}=\alpha\bar{x}-\beta\frac{\bar{x}\bar{y}}{1+\bar{x}}, \\ ¿\frac{\bar{y}}{d\bar{t}}=-\bar{y}(\bar{y}+1)+\gamma\frac{\bar{x}\bar{y}}{1+\bar{x}}, \end{cases}$$

где $\alpha=A/CM, \beta=B/CE, \gamma=D/CM.$

Определение стационарных точек модели и анализ их устойчивости

Система имеет одну вещественную неотрицательную стационарную точку в начале координат:

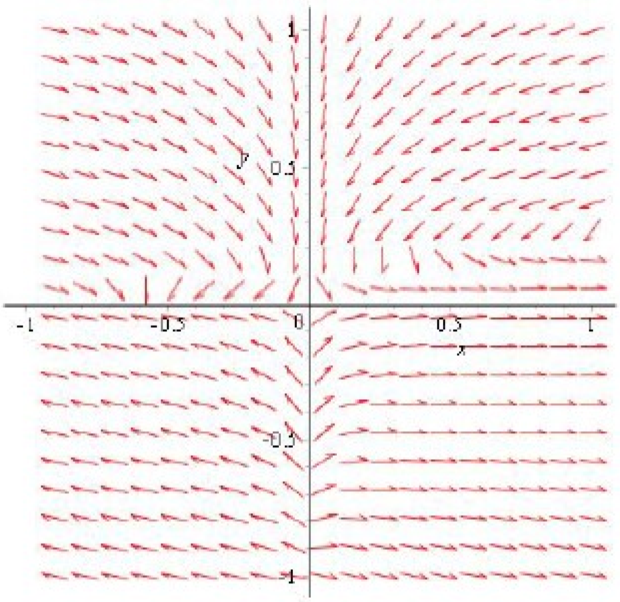
$$x_1=0, y_1=0.$$

А также вещественную неотрицательную точку

$x_1=3, y_1=\frac{1}{2}$, получаемую при разрешении образуемого квадратного уравнения α=1, β=8, γ=2

Рассмотрим окрестность точки $(0;0)$:

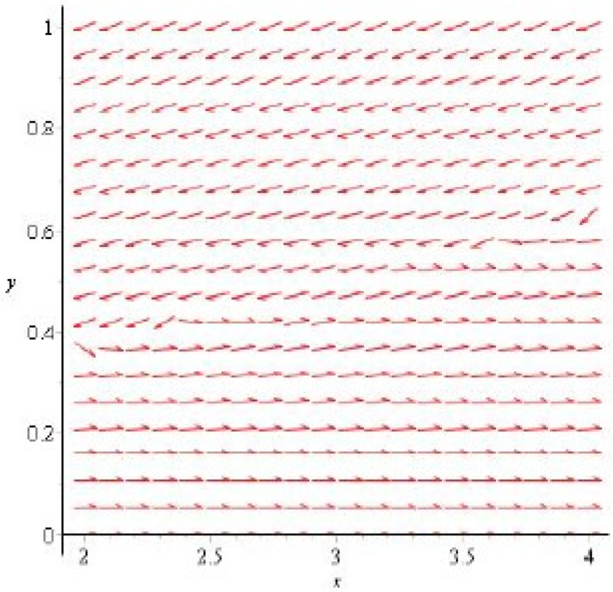
$$A_{(0;0)}=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0.$$



Фазовый портрет точки (0; 0)

Данная вырожденная стационарная точка типа “седло” является неустойчивой. Рассмотрим теперь окрестность точки (3;1/2):

$$A_{\left(3;\frac{1}{2}\right)}=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0.$$



Фазовый портрет точки (1/2)

Данная точка так же является вырожденной. И на основе полученного фазового портрета позволяет сделать вывод, что каждая точка данной фазовой плоскости есть положение равновесия.

Заключение

В ходе первой части проделанной лабораторной работы была реализована модель Ферхюльста, построено бифуркационное дерево и посчитаны приближенные значения числа Фейгенбаума. Второй частью лабораторной работы была исследована модель Лотки-Вольтера в рамках нахождения особых точек системы обыкновенных дифференциальных уравнений и определения их типов.

Проанализировав предоставленную модель, была получена одна особая точка. Из полученного результата делаем вывод, что поведение системы устроено одинаково и каждая её точка является положением равновесия.

```
#define _USE_MATH_DEFINES
#include <iostream>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <iomanip>
#include <stdlib.h>
#include <fstream>

using namespace std;

#define S 50
#define N 1000

struct double_pair
{
    double first;
    double second;
};

struct double_int
{
    int value;
    double key;
};

double_int find(int num, double_int* mas, int max)
{
    double_int result;
    for (int i = 0; i < max; i++)
    {
        if (mas[i].value == num)
        {
            if (num != 3)
            {
                result.key = mas[i].key;
                result.value = num;
                return result;
            }
            else
            {
                if (mas[i].key > double(3.55))
                {
```

```
                        result.key = mas[i].key;
                        result.value = num;
                        return result;
                    }
                }
            }
        }
}

int main()
{
    int SpecialSolutionCount[] = { 2,4,8,16,3 };
    double begin = 3, end = 4, x = double(2.0 / 3.0), eps = 0.0001, step =
0.000001;
    double_int* solution_num = new double_int[1000000];
    int solution_count = 0;
    int tmp = 0;
    double func = x;
    double i = begin;
    while (i < end)
    {
        int unique_count = 0;
        double_int* unique_solutions = new double_int[100];
        for (int j = N; j > 1; j--)
        {
            func = func * i * (1.0 - func);
            if (j < S)
            {
                bool unique = true;
                for (int k = 0; k < unique_count; k++)
                {
                    if (abs(unique_solutions[k].key - func) < eps)
                    {
                        unique = false;
                        unique_solutions[k].value++;
                    }
                }
                if (unique)
                {
                    unique_solutions[unique_count].key = func;
                    unique_solutions[unique_count].value = 1;
                    unique_count++;
                }
            }
        }
        solution_num[tmp].key = i;
        solution_num[tmp].value = unique_count;
        tmp++;
        delete[] unique_solutions;
        i += step;
    }
    ofstream out;
    out.open("bif.csv");
    for (int i = 0; i < tmp; i++)
    {
        out << solution_num[i].key << ";" << solution_num[i].value << endl;
    }
    out.close();

    double_int* first_result = new double_int[5];
    for (int i = 0; i < 5; i++)
    {
        first_result[i] = find(SpecialSolutionCount[i], solution_num, tmp);
    }
    for (int i = 0; i < 5; i++)
```

```
    {
        cout << first_result[i].value << " " << first_result[i].key << " ";
        if (i > 1 && i <= 3)
        {
            double diff = (first_result[i - 1].key - first_result[i - 2].key) /
(first_result[i].key - first_result[i - 1].key);
            cout << diff;
        }
        cout << endl;
    }
    _getch();
    return 0;
}
```