Шамаев И.

Домашняя работа № 5

1) Пусть $e = (1, \dots, 1)^T \in R^n$

$y = (|x_1|, \dots, |x_n|)^T$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \Rightarrow \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |n x_i^2| = n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^2|$$

$$= n \cdot \|x\|_\infty^2$$

$$\|x\|_2^2 \leq n \cdot \|x\|_\infty^2$$

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty^2 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^2| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \Rightarrow \|x\|_2^2$$

Таким образом

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

ч.т.д

2) Пусть $x \neq 0$, $y = Ax$

$$\|y\|_2 \leq \sqrt{m} \|y\|_\infty \Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \sqrt{m} \|Ax\|_\infty \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty \|x\|_\infty \leq$$

$$\leq \sqrt{m} \|A\|_\infty \|x\|_2$$

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty \Rightarrow \|A\|_2 = \sup \frac{\|Ax\|_2}{\|Ax\|_2} \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$$

$\|y\|_\infty \le \|y\|_2 \Rightarrow \|Ax\|_\infty \le \|Ax\|_2 \le \|A\|_2 \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|A\|_2 \cdot$
$\cdot \|x\|_\infty$

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \sqrt{n}\,\|A\|_2 \Rightarrow \|A\|_\infty = \sup \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \sqrt{n}\,\|A\|_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|A\|_\infty \le \sqrt{n}\,\|A\|_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2$$

Таким образом

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\,\|A\|_\infty \quad \text{ч.т.д.}$$

---

3) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ -1 & 1 & -1 \\ \varepsilon & -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$

$|A - \lambda E| = 0$

$$\left|\begin{matrix} \varepsilon-\lambda & -1 & \varepsilon \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ \varepsilon & -1 & \varepsilon-\lambda \end{matrix}\right| \begin{matrix} \varepsilon-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \\ \varepsilon & -1 \end{matrix} = 0$$

$(\varepsilon-\lambda)^2(1-\lambda) + \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon^2(1-\lambda) - (\varepsilon-\lambda) - (\varepsilon-\lambda) = 0$

$(\varepsilon^2 - 2\varepsilon\lambda + \lambda^2)(1-\lambda) + 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^2\lambda - 2\varepsilon + 2\lambda = 0$

$\cancel{\varepsilon^2} - 2\varepsilon\lambda + \lambda^2 - \cancel{\lambda\varepsilon^2} + 2\varepsilon\lambda^2 - \lambda^3 + \cancel{2\varepsilon} - \cancel{\varepsilon^2} + \cancel{\varepsilon^2\lambda} - \cancel{2\varepsilon} + 2\lambda = 0$

$-\lambda^3 + \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda^2 + 2\lambda - 2\varepsilon\lambda = 0$

$\lambda^3 - 2\varepsilon\lambda^2 - \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda - 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - \lambda(2\varepsilon+1) + 2\varepsilon - 2) = 0$

$D = (2\varepsilon+1)^2 - 8\varepsilon + 8 = 4\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 9 = 4(\varepsilon^2 - \varepsilon + \frac{9}{4}) = 4((\varepsilon - \frac{1}{2})^2 + 2) =$

$= \left(2\sqrt{(\varepsilon-\frac{1}{2})^2 + 2}\right)^2$

$$\lambda_1 = \frac{2\varepsilon + 1 + 2\sqrt{(\varepsilon - \frac{1}{2})^2 + 2}}{2}$$

$$\lambda = \frac{2\varepsilon + 1 - 2\sqrt{(\varepsilon - \frac{1}{2})^2 + 2}}{2}$$

$$\lambda\left(\lambda - \left(\varepsilon + \frac{1}{2} + \sqrt{(\varepsilon - \frac{1}{2})^2 + 2}\right)\right)\left(\lambda - \left(\varepsilon + \frac{1}{2} - \sqrt{(\varepsilon - \frac{1}{2})^2 + 2}\right)\right) = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda = \lambda_1$

$\lambda = \lambda_2$

$$K_2(A) = \frac{\varepsilon + \frac{1}{2} + \sqrt{(\varepsilon - \frac{1}{2})^2 + 2}}{0} \to \infty$$, т.к. матрица симметрич.

$$\left|\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right|$$

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 17 & 4 \\ 8 & 37 & 13 \end{pmatrix}$

1) $L_{11} = a_{11} = 2$

2) $L_{21} = a_{21} = 4$

3) $L_{31} = a_{31} = 8$

4) $u_{12} = \frac{7}{2}$

5) $u_{13} = \frac{1}{2}$

6) $u_{23} = \frac{1}{L_{22}}(a_{23} - L_{21}u_{13}) = \frac{1}{3}(4 - 4 \cdot \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$

6) $L_{22} = a_{22} - L_{21}u_{12} = 17 - 4 \cdot \frac{7}{2} = 3$

7) $L_{32} = a_{32} - L_{31}u_{12} = 37 - 8 \cdot \frac{7}{2} = 9$

8) $L_{33} = a_{33} - L_{31}u_{13} - L_{32}u_{23} = 13 - 8 \cdot \frac{1}{2} - 9 \cdot \frac{2}{3} = 3$

$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$,

$u = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Проверка LU

$a_{11} = 2$
$a_{21} = 4$
$a_{31} = 8$

$a_{12} = 7$
$a_{22} = 14 + 3 = 17$
$a_{23} = 28 + 9 = 37$

$a_{31} = 1$
$a_{32} = 2 + 2 = 4$
$a_{33} = 4 + 6 + 3 = 13$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 17 & 4 \\ 8 & 36 & 13 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

$\Downarrow$

Верно

5) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 26 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Матрица A симметричная, то возможно ее разложение с матрицей $D = E$, то есть $A = LL^T$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -1$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = 4$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{5-1} = 2$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}} (a_{32} - l_{21} \cdot l_{31}) = \frac{1}{2}(-2+4) = 1$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{26 - 16 - 1} = 3$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Ly=b: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 7$$

$$-y_1 + 2y_2 = -9 \Rightarrow y_2 = -1$$

$$4y_1 + y_2 + 3y_2 = 36 \Rightarrow y_3 = 3$$

$$y = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$L^T x = y: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$2x_2 + x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$3x_3 = 3$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

б) $$\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + Ax^k = b$$

$$x^{k+1} = x^k + \tau(b - Ax^k)$$

$$x^{k+1} = Rx^k + \tau b, \quad R = E - \tau A$$ – матрица перехода

Для сходимости необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы R по модулю были < 1

$$\det(R - \lambda E) = \det(-\tau A + (1-\lambda)E) = \det(-\tau(A - \mu E)) = 0$$

$\det(A - \mu E) = 0$, где $\mu = \frac{1-\lambda}{\tau}$

$$\lambda_i = 1 - \tau\mu_i$$

Для сходимости должно выполняться следующее соотношение:

$\max|1 - \tau\mu_i| < 1$ (1)

$$\det(A - \mu E) = \begin{vmatrix} 3-\mu & 1 & 5 \\ 2 & 0,1-\mu & -1 \\ 5 & -1 & 1-\mu \end{vmatrix} = (3 - 4\mu + \mu^2)(0,1-\mu) - 5 - 10 -$$

$$-2,5 + 25\mu - 2 + 2\mu - 3 + \mu = 0,3 - 0,4\mu + 0,1\mu^2 - 3\mu + 4\mu^2 -$$

$$-\mu^3 - 22,5 + 28\mu = -\mu^3 + 4,1\mu^2 + 24,6\mu - 22,2$$

$\mu_1 \approx -3,83$ (2)

$\mu_2 \approx 0,81$ (3)

$\mu_3 \approx 7,12$ (4)

Из (1) $0 < \tau\mu_i < 2$, $\mu_i > 0 \Rightarrow 0 < \tau < \frac{2}{\max \mu_i} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < \tau < \frac{2}{7,12}$

Таким образом τ не удовлетворяет (2), (3), (4) одновременно $\Rightarrow$ ИП не сходится