# Лабораторная работа № 3

# Параллельный алгоритм решения краевой задачи для уравнения теплопроводности

# Цель работы

Научиться использовать принцип геометрического параллелизма для разработки и программной реализации параллельных алгоритмов решения краевых задач для уравнений эволюционного типа на примере параллельной реализации явной численной схемы для решения краевой задачи уравнения теплопроводности.

# Численное решение уравнения теплопроводности

Найти численное решение краевой задачи уравнения теплопроводности

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

с начальным условием

$$u(x,y,0)=u^0(x,y)$$

и граничными условиями

$$u(0,y,\tau)=\mu_1(y,\tau),$$
$$u(L,y,\tau)=\mu_2(y,\tau),$$
$$u(x,0,\tau)=\mu_3(x,\tau),$$
$$u(x,L,\tau)=\mu_4(x,\tau),$$

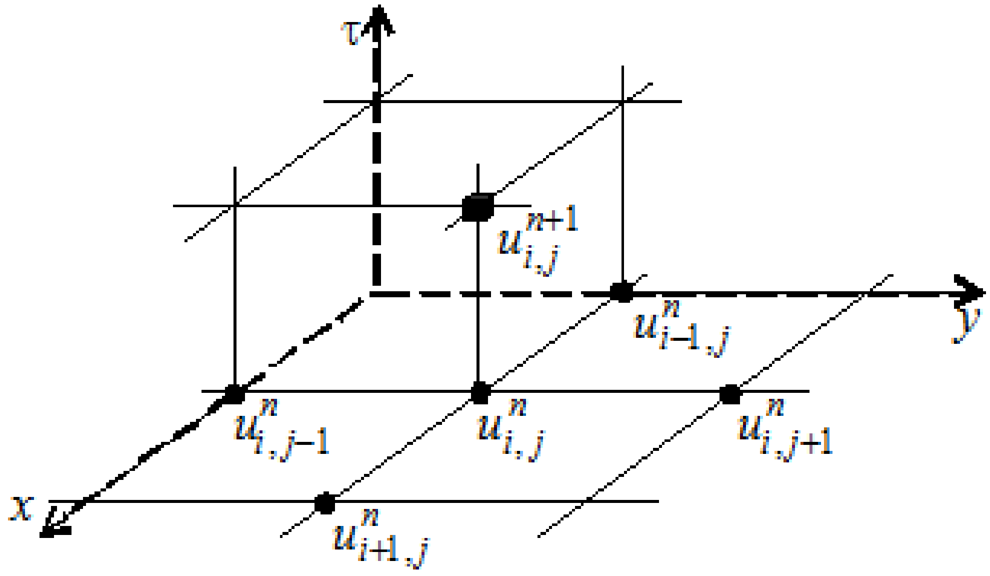
где $c(u)$ - удельная теплоемкость, $\rho(u)$ - плотность, $\lambda(u)$ - коэффициент теплопроводности, $0\le x,y\le L,\ \ 0\le t\le T$

# Численное решение уравнения теплопроводности

Введем равномерную сетку

$$\omega = \{(x_i = i\Delta x,\ y_j = j\Delta y,\ \tau_n = n\Delta\tau),\ i, j = 1,\ldots,I,\ n = 0,\ldots,N\}$$

с шагами $\Delta x = \dfrac{L}{I},\ \Delta y = \dfrac{L}{I},\ \Delta\tau = \dfrac{T}{N}.$



# Явная конечно-разностная схема

Согласно теории конечных разностей

$$c_{ij}^{n}\rho_{ij}^{n}\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta\tau}=\lambda_{i+0.5,j}^{n}\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}{\Delta x^{2}}-\lambda_{i-0.5,j}^{n}\frac{u_{i,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^{2}}+$$

$$+\lambda_{i,j+0.5}^{n}\frac{u_{i,j+1}^{n}-u_{i,j}^{n}}{\Delta y^{2}}-\lambda_{i,j-0.5}^{n}\frac{u_{i,j}^{n}-u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^{2}},$$

$$u_{ij}^{0}=u(x,y,0),$$

$$u_{0j}^{n+1}=\mu_1(y,\tau),\qquad u_{Ij}^{n+1}=\mu_2(y,\tau),$$

$$u_{i0}^{n+1}=\mu_3(x,\tau),\qquad u_{iI}^{n+1}=\mu_4(x,\tau),$$

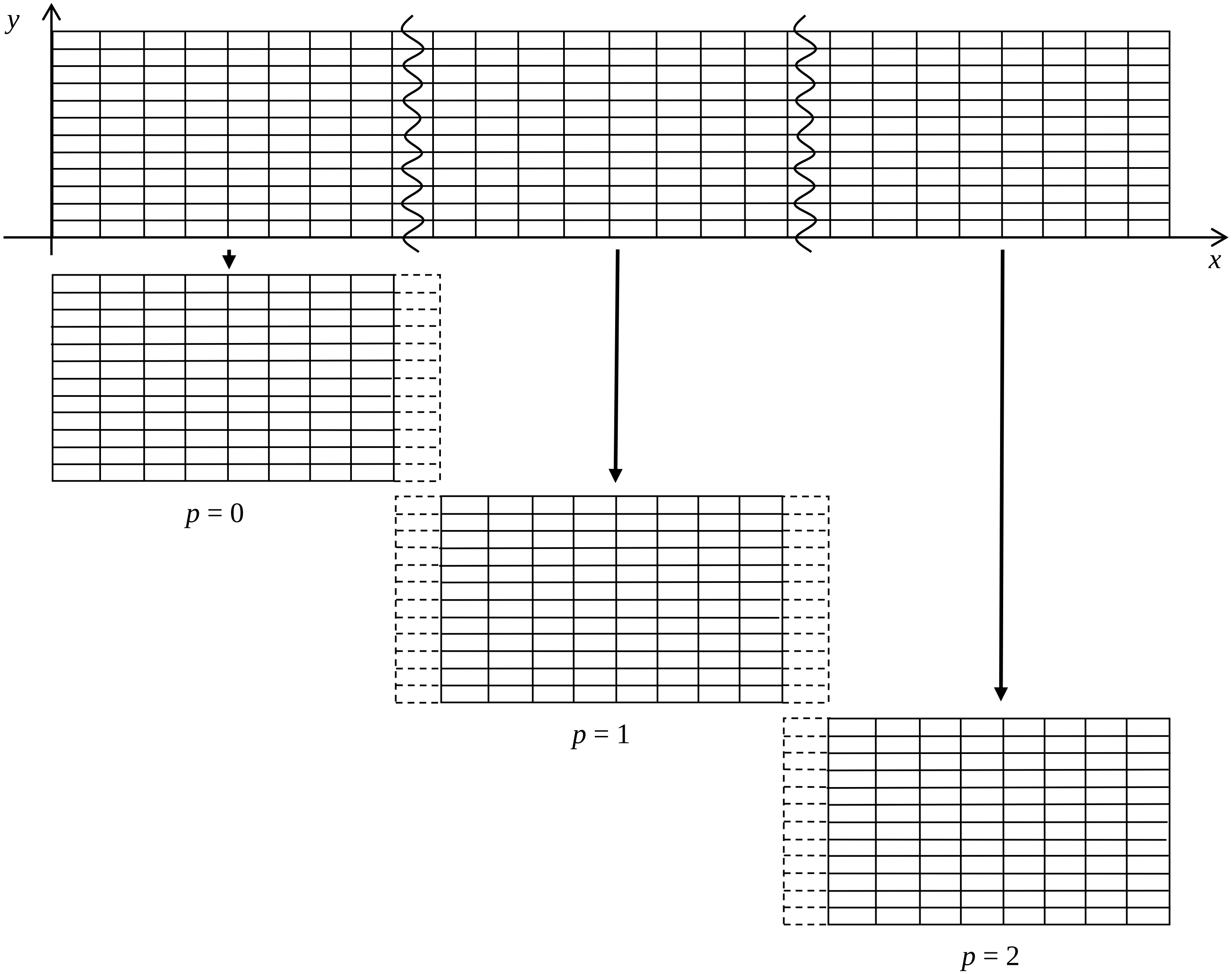
$$\lambda_{i\pm0.5,j}^{n}=\lambda\left(\frac{u_{i\pm1,j}^{n}+u_{ij}^{n}}{2}\right),$$

$$\lambda_{i,j\pm0.5}^{n}=\lambda\left(\frac{u_{i,j\pm1}^{n}+u_{ij}^{n}}{2}\right),$$

Условие устойчивости

$$\frac{2\lambda}{c\rho}\Delta\tau\le\left(\frac{1}{\Delta x^{2}}+\frac{1}{\Delta y^{2}}\right)^{-1}.$$

# Декомпозиция пространственной области по оси Ox при трех процессах



# Задание

В качестве пространственной области выбрать квадрат с длиной стороны $L = 0.01$

Удельную теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности принять равными

$$c(u) = \frac{1}{2.25 \cdot 10^{-3} - 6.08 \cdot 10^{-10} u^2},$$

$$\rho(u) = 7860 + \frac{41500}{u},$$

$$\lambda(u) = 1.45 + 2.3 \cdot 10^{-2} u - 2 \cdot 10^{-6} u^2.$$

Число слоев сетки по пространству

$$I_1 = 100,\ I_2 = 500,\ I_3 = 1000$$

# Задание

Шаг по времени выбирать из условия устойчивости, т.е.

$$\Delta\tau \approx \frac{0.9}{2k}\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}\right)^{-1},$$

где $k = \dfrac{\max\limits_u \lambda}{\min\limits_u c\rho}$ - вычисляется отдельно и используется в параллельной программе как константа.

# Задание

Предельное время счета $\mathrm{T}$ подобрать для каждого $I$ так, чтобы время работы программы при **p = 1** составляло около 600 с.
Отлаженную программу запустить на кластере при числе процессов **p = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.**

Результаты замеров времени работы программы занести в таблицу. Вычислить ускорение и эффективность, построить их графики в зависимости от числа процессов.

В отчет включить поле температур, построенное графически при t=0 и t=T для $I_1, I_2, I_3$ с использованием gnuplot или других инструментов визуализации.

# Варианты

В таблице $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\tau}$ – безразмерные координаты: $\tilde{x} = \dfrac{x}{L}, \tilde{y} = \dfrac{y}{L}, \tilde{\tau} = \dfrac{\tau}{T}$.

| | |
|---|---|
| 1<br>$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = 100(3+\tilde{y})(2-\tilde{x}),$<br>$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 200(3+\tilde{y}) + \tilde{\tau}(400 - 100\cos(\pi\tilde{y})),$<br>$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 100(3+\tilde{y}) + \tilde{\tau}\left(300\sin\left(\frac{(1+\tilde{y})\pi}{2}\right)+100\right),$<br>$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 300(2-\tilde{x}) + 100\tilde{\tau}(3+\tilde{x}),$<br>$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 400(2-\tilde{x}) + 100\tilde{\tau}(5-4\tilde{x}).$ | 2<br>$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = 500\exp(\tilde{x}+\tilde{y}),$<br>$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 500\exp(\tilde{y}) + \tilde{\tau}(200\tilde{y}+100),$<br>$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 500\exp(1+\tilde{y}) + \frac{300\tilde{\tau}}{\tilde{y}+1},$<br>$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 500\exp(\tilde{x}) + 100\tilde{\tau}(2-\cos(\pi\tilde{x})),$<br>$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 500\exp(\tilde{x}+1) + \tilde{\tau}(300-150\tilde{x}).$ |
| 3<br>$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = 120 + 100\cos(\pi\tilde{y}) + 400\tilde{x},$<br>$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 120 + 100\cos(\pi\tilde{y}) + \frac{400\tilde{\tau}}{1+\tilde{y}},$<br>$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 520 + 100\cos(\pi\tilde{y}) + 300\tilde{\tau}(2-\tilde{y}),$<br>$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 220 + 400\tilde{x} + 100\tilde{\tau}\sqrt{16+20\tilde{x}},$<br>$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 20 + 400\tilde{x} + \tilde{\tau}\left(300\sin\left(\frac{\pi\tilde{x}}{2}\right)+200(1-\tilde{x})\right).$ | 4<br>$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{400\exp(\tilde{y})}{\sqrt{16+9\tilde{x}^2}},$<br>$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 100\exp(\tilde{y}) + 400\tilde{\tau}\lvert\cos(2\pi\tilde{y})\rvert + 200\tilde{\tau}\sin\left(\frac{\pi\tilde{y}}{2}\right),$<br>$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 80\exp(\tilde{y}) + \frac{1000\tilde{\tau}}{1+\tilde{y}},$<br>$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = \frac{400}{\sqrt{16+9\tilde{x}^2}} + \tilde{\tau}(400+600\tilde{x}),$<br>$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = \frac{400\exp(1)}{\sqrt{16+9\tilde{x}^2}} + 500\tilde{\tau}\lvert\cos(2\pi\tilde{x})\rvert + 100\tilde{\tau}(1-\tilde{x}).$ |

# Варианты

В таблице $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\tau}$ – безразмерные координаты: $\tilde{x} = \dfrac{x}{L}, \tilde{y} = \dfrac{y}{L}, \tilde{\tau} = \dfrac{\tau}{T}$.

| | |
|---|---|
| 5<br>$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = 200\left(\left\|\cos(2\pi\tilde{x})\right\|\sin\left(\dfrac{\pi\tilde{y}}{2}\right)+1\right),$<br>$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 200\left(\sin\left(\dfrac{\pi\tilde{y}}{2}\right)+1\right)+400\tilde{\tau}\left\|\cos(2\pi\tilde{y})\right\|,$<br>$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 200\left(\sin\left(\dfrac{\pi\tilde{y}}{2}\right)+1\right)+\tilde{\tau}(200+400\tilde{y}),$<br>$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 200+200\tilde{\tau}\left(\cos\left(\dfrac{\pi\tilde{x}}{2}\right)+\left\|\cos(2\pi\tilde{x})\right\|\right),$<br>$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 200\left(\left\|\cos(2\pi\tilde{x})\right\|+1\right)+400\tilde{\tau}\left(\tilde{x}+\dfrac{1}{1+\tilde{x}}\right).$ | 6<br>$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = 100\left(\cos\left(\dfrac{\pi\tilde{x}\tilde{y}}{2}\right)+1\right),$<br>$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 200+200\tilde{\tau}\exp(\tilde{y}),$<br>$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 100\left(\cos\left(\dfrac{\pi\tilde{y}}{2}\right)+1\right)+800\tilde{\tau}\left\|\cos(2\pi\tilde{y})\right\|,$<br>$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 200+700\tilde{\tau}\sin\left(\dfrac{\pi\tilde{x}}{2}\right)+\dfrac{200\tilde{\tau}}{\tilde{x}+1},$<br>$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 100\left(\cos\left(\dfrac{\pi\tilde{x}}{2}\right)+1\right)+\tilde{\tau}(800\tilde{x}+200\exp(1)(1-\tilde{x})).$ |
| 7<br>$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = 300+100\tilde{x}\tilde{y}\sin\left(\dfrac{\pi\tilde{x}}{2}\right),$<br>$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 300+\dfrac{300\tilde{\tau}}{\tilde{y}+2},$<br>$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 300+100\tilde{y}+500\tilde{\tau}\left\|\cos(2\pi\tilde{y})\right\|,$<br>$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 300+\tilde{\tau}\left(30+320\tilde{x}+30\sqrt{9\tilde{x}^2+16}\right),$<br>$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 300+100\tilde{x}\sin\left(\dfrac{\pi\tilde{x}}{2}\right)+\tilde{\tau}(100+400\tilde{x}).$ | 8<br>$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = 100\exp(\tilde{y})+150\sin\left(\dfrac{\pi\tilde{x}}{2}\right),$<br>$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 100\exp(\tilde{y})+\dfrac{400\tilde{\tau}}{3\tilde{y}+1},$<br>$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 150+100\exp(\tilde{y})(1-\tilde{\tau})+500\tilde{\tau}(1+\tilde{y}),$<br>$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 100+150\sin\left(\dfrac{\pi\tilde{x}}{2}\right)+400\tilde{\tau}\left\|\cos(2\pi\tilde{x})\right\|,$<br>$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 100\exp(1)+150\sin\left(\dfrac{\pi\tilde{x}}{2}\right)+\tilde{\tau}(800\tilde{x}-100\exp(\tilde{x})+200).$ |

# Варианты

В таблице $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\tau}$ – безразмерные координаты: $\tilde{x} = \dfrac{x}{L}, \tilde{y} = \dfrac{y}{L}, \tilde{\tau} = \dfrac{\tau}{T}$.

**9**

$$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = 400 + 50\tilde{x}^2 + 50\tilde{y}^2,$$
$$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 400 + 50\tilde{y}^2 + 100\tilde{\tau}\sqrt{16 + 20\tilde{y}^2},$$
$$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 450 + 50\tilde{y}^2 + 150\tilde{\tau}(1 - \tilde{y}),$$
$$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 400 + 50\tilde{x}^2 + 400\tilde{\tau}\cos(2\pi\tilde{x}) - 250\tilde{\tau}\tilde{x},$$
$$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 450 + 50\tilde{x}^2 + 600\tilde{\tau}\cos\left(\frac{\pi\tilde{x}}{2}\right).$$

**10**

$$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = (200 + 50\tilde{y})\left(\cos\left(\frac{\pi\tilde{x}}{2}\right) + \tilde{x}\right),$$
$$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 200 + 50\tilde{y} + \tilde{\tau}\exp(5\tilde{y}),$$
$$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 200 + 50\tilde{y} + \tilde{\tau}(550 + 200\tilde{y}),$$
$$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 200\left(\cos\left(\frac{\pi\tilde{x}}{2}\right) + \tilde{x}\right) + \tilde{\tau}\left(550\sin\left(\frac{\pi\tilde{x}}{2}\right) + 1 - \tilde{x}\right),$$
$$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 250\left(\cos\left(\frac{\pi\tilde{x}}{2}\right) + \tilde{x}\right) + \tilde{\tau}(750\tilde{x} + (1 - \tilde{x})\exp(5)).$$

**11**

$$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = 300\exp\left(-(\tilde{x} - \tilde{y})^2\right),$$
$$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 300\exp(-\tilde{y}^2) + \frac{600\tilde{\tau}}{1 + \tilde{y}},$$
$$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 300\exp\left(-(1 - \tilde{y})^2\right) + 200\tilde{\tau}(1 - \tilde{y}),$$
$$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 300\exp(-\tilde{x}^2) + 200\tilde{\tau} + 400\tilde{\tau}\cos\left(\frac{\pi\tilde{x}}{2}\right),$$
$$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 300\exp\left(-(\tilde{x} - 1)^2\right) + 300\tilde{\tau}\cos\left(\frac{\pi\tilde{x}}{2}\right).$$

**12**

$$u^0(\tilde{x},\tilde{y}) = 100(1 + \tilde{y})\sqrt{25 - 16\tilde{x}^2},$$
$$\mu_1(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 500(1 + \tilde{y}) + 200\tilde{\tau}\cos(2\pi\tilde{y}),$$
$$\mu_2(\tilde{y},\tilde{\tau}) = 300(1 + \tilde{y}) + \tilde{\tau}\left(250\sin\left(\frac{\pi\tilde{y}}{2}\right) + 350\right),$$
$$\mu_3(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 100\sqrt{25 - 16\tilde{x}^2} + \tilde{\tau}(150\tilde{x} + 200),$$
$$\mu_4(\tilde{x},\tilde{\tau}) = 200\sqrt{25 - 16\tilde{x}^2} + \tilde{\tau}\left(200\sin\left(\frac{\pi\tilde{x}}{2}\right) + 200(1 + \tilde{x})\right).$$