Министерство науки и высшего образования РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Уфимский государственный авиационный технический университет»

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

ОТЧЁТ

к расчетно-графической работе по дисциплине

Тема: «Теория случайных процессов и математическая статистика»

Группа ПМ-453	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Шамаев И.Р.			
Принял	Маякова С.А.			

Уфа 2022

Задание 1. Оценка надежности простейших систем методом Монте-Карло.

1. Система состоит из трех блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит два элемента: A, B, второй – три элемента: C, D, E, третий – один элемент F. Элементы первого и второго блоков соединены параллельно. А) найти методом Монте-Карло оценку P * надежности системы, задав перед началом испытаний случайным образом вероятности безотказной работы элементов P(A), P(B), P(C), P(D), P(E), P(F) из диапазона [0.6, 1]. Б) найти абсолютную погрешность |P * -P|, где P – надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 50 испытаний.

2. Устройство состоит из двух узлов, соединенных последовательно. Первый узел содержит три элемента: A, B, C, а второй – два элемента: D, E. Элементы каждого узла соединены параллельно. Время безотказной работы элементов распределено по показательному закону, с параметрами λ, заданными случайным образом из диапазона [0.01, 0.1] до начала испытаний. Найти методом Монте-Карло: а) оценку P * вероятности безотказной работы устройства за время длительностью 60 часов; б) среднее время безотказной работы устройства. Произвести 50 испытаний.

Пункт 1.

Вероятности безотказной работы элементов: $P(A)=0.6, P(B)=0.65, P(C)=0.7, P(D)=0.8, P(E)=0.9, P(F)=0.62.$

№Исп.	Случайные числа моделирующие случайные величины						Заключение о работе						
							Элементов						Система
	A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F	
1	0,10	0,09	0,73	0,25	0,33	0,76	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0
2	0,37	0,54	0,20	0,48	0,05	0,64	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0
3	0,08	0,42	0,26	0,89	0,53	0,19	1,00	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1
4	0,99	0,01	0,90	0,25	0,29	0,09	0,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1
5	0,12	0,80	0,79	0,99	0,70	0,80	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0
6	0,66	0,06	0,57	0,47	0,17	0,34	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
7	0,31	0,06	0,01	0,08	0,05	0,45	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
8	0,85	0,26	0,97	0,76	0,02	0,02	0,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1

9	0,63	0,57	0,33	0,21	0,35	0,05	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
10	0,73	0,79	0,64	0,57	0,53	0,03	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0
11	0,98	0,52	0,01	0,77	0,67	0,14	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
12	0,11	0,80	0,50	0,54	0,31	0,39	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
13	0,83	0,45	0,29	0,96	0,34	0,06	0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1
14	0,88	0,68	0,54	0,02	0,00	0,86	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0
15	0,99	0,59	0,46	0,73	0,48	0,87	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0
16	0,65	0,48	0,11	0,76	0,74	0,17	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
17	0,80	0,12	0,43	0,56	0,35	0,17	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
18	0,74	0,35	0,09	0,98	0,17	0,77	0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0
19	0,69	0,91	0,62	0,68	0,03	0,66	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0
20	0,09	0,89	0,32	0,05	0,05	0,14	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
21	0,91	0,49	0,91	0,45	0,23	0,68	0,00	1,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0
22	0,80	0,33	0,69	0,45	0,98	0,26	0,00	1,00	1,00	1,00	0,00	1,00	1
23	0,44	0,10	0,48	0,19	0,49	0,85	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0
24	0,12	0,55	0,07	0,37	0,42	0,11	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
25	0,63	0,60	0,64	0,93	0,29	0,16	0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1
26	0,61	0,19	0,69	0,04	0,46	0,26	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
27	0,1	0,47	0,4	0,5	0,6	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,00	0

	5		4	2	6	5	0	0	0	0	0		
28	0,94	0,55	0,72	0,85	0,73	0,67	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0
29	0,42	0,48	0,11	0,62	0,13	0,97	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0
30	0,23	0,52	0,37	0,83	0,17	0,73	1,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0
31	0,04	0,49	0,35	0,24	0,94	0,75	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0
32	0,00	0,54	0,99	0,76	0,54	0,64	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0
33	0,35	0,69	0,31	0,53	0,07	0,26	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
34	0,59	0,80	0,80	0,83	0,91	0,45	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0
35	0,46	0,05	0,88	0,52	0,36	0,01	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1
36	0,32	0,17	0,90	0,05	0,97	0,87	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0
37	0,69	23,00	0,46	0,14	0,06	0,20	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0
38	0,19	0,56	0,54	0,14	0,30	0,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
39	0,45	0,15	0,51	0,49	0,38	0,19	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
40	0,94	0,86	0,43	0,19	0,94	0,36	0,00	0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0
41	0,98	0,08	0,62	0,48	0,26	0,45	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
42	0,33	0,18	0,51	0,62	0,32	0,41	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
43	0,80	0,95	0,10	0,04	0,06	0,96	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0
44	0,79	0,75	0,24	0,91	0,40	0,71	0,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0
45	0,1	0,63	0,3	0,2	0,3	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,00	0

	8		3	5	7	8	0	0	0	0	0		
46	0,74	0,02	0,94	0,39	0,02	0,77	0,00	1,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0
47	0,54	0,17	0,84	0,56	0,11	0,80	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0
48	0,11	0,66	0,44	0,98	0,83	0,52	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1
49	0,48	0,32	0,47	0,79	0,28	0,31	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
50	0,69	0,07	0,49	0,41	0,38	0,87	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0

Произведя 50 испытаний, получим, что в 24 из них система работала безотказно. В качестве оценки искомой надежности P примем относительную частоту $P^{¿}=\frac{24}{50}=0,48$.

Найдем надежность системы аналитически.

$$P_1=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.14=0.86$$

$$P_2=1-P(\overline{C})P(\overline{D})P(\overline{E})=1-0.009=0.991$$

$$P_3=P(F)=0.62$$

Вероятность безотказной работы системы.

$$P=P_1P_2P_3=0.86*0.991*0.62=0,528401$$

Искомая абсолютная погрешность $|P-P^{¿}|=¿0.48-0.528401\vee¿0,048401\approx0.05$

Пункт 2.

Вероятности безотказной работы элементов: $P(A)=0.07, P(B)=0.03, P(C)=0.01, P(D)=0.08, P(E)=0.05$

№	Случайные числа моделирующие случайные величины					Время безотказной работы							
						элементов					узлов		Устройства
	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	I	II	
1	0,10	0,09	0,73	0,25	0,33	32,89	80,26	31,47	17,33	22,17	80,26	22,17	22,17
2	0,37	0,54	0,20	0,48	0,05	14,20	20,54	160,94	9,17	59,91	160,94	59,91	59,91

3	0,08	0,42	0,26	0,89	0,53	36,08	28,92	134,71	1,46	12,70	134,71	12,70	12,70
4	0,99	0,01	0,90	0,25	0,29	0,14	153,51	10,54	17,33	24,76	153,51	24,76	24,76
5	0,12	0,80	0,79	0,99	0,70	30,29	7,44	23,57	0,13	7,13	30,29	7,13	7,13
6	0,66	0,06	0,57	0,47	0,17	5,94	93,78	56,21	9,44	35,44	93,78	35,44	35,44
7	0,31	0,06	0,01	0,08	0,05	16,73	93,78	460,52	31,57	59,91	460,52	59,91	59,91
8	0,85	0,26	0,97	0,76	0,02	2,32	44,90	3,05	3,43	78,24	44,90	78,24	44,90
9	0,63	0,57	0,33	0,21	0,35	6,60	18,74	110,87	19,51	21,00	110,87	21,00	21,00
10	0,73	0,79	0,64	0,57	0,53	4,50	7,86	44,63	7,03	12,70	44,63	12,70	12,70
11	0,98	0,52	0,01	0,77	0,67	0,29	21,80	460,52	3,27	8,01	460,52	8,01	8,01
12	0,11	0,80	0,50	0,54	0,31	31,53	7,44	69,31	7,70	23,42	69,31	23,42	23,42
13	0,83	0,45	0,29	0,96	0,34	2,66	26,62	123,79	0,51	21,58	123,79	21,58	21,58
14	0,88	0,68	0,54	0,02	0,01	1,83	12,86	61,62	48,90	92,10	61,62	92,10	61,62
15	0,99	0,59	0,46	0,73	0,48	0,14	17,59	77,65	3,93	14,68	77,65	14,68	14,68
16	0,65	0,48	0,11	0,76	0,74	6,15	24,47	220,73	3,43	6,02	220,73	6,02	6,02
17	0,80	0,12	0,43	0,56	0,35	3,19	70,68	84,40	7,25	21,00	84,40	21,00	21,00
18	0,74	0,35	0,09	0,98	0,17	4,30	34,99	240,79	0,25	35,44	240,79	35,44	35,44
19	0,69	0,91	0,62	0,68	0,03	5,30	3,14	47,80	4,82	70,13	47,80	70,13	47,80
20	0,09	0,89	0,32	0,05	0,05	34,40	3,88	113,94	37,45	59,91	113,94	59,91	59,91
21	0,91	0,49	0,91	0,45	0,23	1,35	23,78	9,43	9,98	29,39	23,78	29,39	23,78
22	0,80	0,33	0,69	0,45	0,98	3,19	36,96	37,11	9,98	0,40	37,11	9,98	9,98
23	0,44	0,10	0,48	0,19	0,49	11,73	76,75	73,40	20,76	14,27	76,75	20,76	20,76
24	0,12	0,55	0,07	0,37	0,42	30,29	19,93	265,93	12,43	17,35	265,93	17,35	17,35
25	0,63	0,60	0,64	0,93	0,29	6,60	17,03	44,63	0,91	24,76	44,63	24,76	24,76
26	0,61	0,19	0,69	0,04	0,46	7,06	55,36	37,11	40,24	15,53	55,36	40,24	40,24
27	0,15	0,47	0,44	0,52	0,66	27,10	25,17	82,10	8,17	8,31	82,10	8,31	8,31
28	0,94	0,55	0,72	0,85	0,73	0,88	19,93	32,85	2,03	6,29	32,85	6,29	6,29
29	0,42	0,48	0,11	0,62	0,13	12,39	24,47	220,73	5,98	40,80	220,73	40,80	40,80

30	0,23	0,52	0,37	0,83	0,17	21,00	21,80	99,43	2,33	35,44	99,43	35,44	35,44
31	0,04	0,49	0,35	0,24	0,94	45,98	23,78	104,98	17,84	1,24	104,98	17,84	17,84
32	0,01	0,54	0,99	0,76	0,54	65,79	20,54	1,01	3,43	12,32	65,79	12,32	12,32
33	0,35	0,69	0,31	0,53	0,07	15,00	12,37	117,12	7,94	53,19	117,12	53,19	53,19
34	0,59	0,80	0,80	0,83	0,91	7,54	7,44	22,31	2,33	1,89	22,31	2,33	2,33
35	0,46	0,05	0,88	0,52	0,36	11,09	99,86	12,78	8,17	20,43	99,86	20,43	20,43
36	0,32	0,17	0,90	0,05	0,97	16,28	59,07	10,54	37,45	0,61	59,07	37,45	37,45
37	0,69	23,00	0,46	0,14	0,06	5,30	-104,52	77,65	24,58	56,27	77,65	56,27	56,27
38	0,19	0,56	0,54	0,14	0,30	23,72	19,33	61,62	24,58	24,08	61,62	24,58	24,58
39	0,45	0,15	0,51	0,49	0,38	11,41	63,24	67,33	8,92	19,35	67,33	19,35	19,35
40	0,94	0,86	0,43	0,19	0,94	0,88	5,03	84,40	20,76	1,24	84,40	20,76	20,76
41	0,98	0,08	0,62	0,48	0,26	0,29	84,19	47,80	9,17	26,94	84,19	26,94	26,94
42	0,33	0,18	0,51	0,62	0,32	15,84	57,16	67,33	5,98	22,79	67,33	22,79	22,79
43	0,80	0,95	0,10	0,04	0,06	3,19	1,71	230,26	40,24	56,27	230,26	56,27	56,27
44	0,79	0,75	0,24	0,91	0,40	3,37	9,59	142,71	1,18	18,33	142,71	18,33	18,33
45	0,18	0,63	0,33	0,25	0,37	24,50	15,40	110,87	17,33	19,89	110,87	19,89	19,89
46	0,74	0,02	0,94	0,39	0,02	4,30	130,40	6,19	11,77	78,24	130,40	78,24	78,24
47	0,54	0,17	0,84	0,56	0,11	8,80	59,07	17,44	7,25	44,15	59,07	44,15	44,15
48	0,11	0,66	0,44	0,98	0,83	31,53	13,85	82,10	0,25	3,73	82,10	3,73	3,73
49	0,48	0,32	0,47	0,79	0,28	10,49	37,98	75,50	2,95	25,46	75,50	25,46	25,46
50	0,69	0,07	0,49	0,41	0,38	5,30	88,64	71,33	11,14	19,35	88,64	19,35	19,35

Произведя 50 испытаний, получим, что в 2 из них устройство работало 60 часов (и более). а) Искомая оценка надежности устройства (вероятности его безотказной работы за время длительностью 60 ч) $P^{¿}=\frac{2}{50}=0,04$.

Для сравнения приведем аналитическое решение. Вероятности безотказной работы элементов:

$$R_A(60)=\exp(-P(A)*60)=0,015$$

$$R_B(60)=\exp\left(-P(B)*60\right)=0{,}165$$

$$R_C(60)=\exp\left(-P(C)*60\right)=0{,}549$$

$$R_D(60)=\exp\left(-P(D)*60\right)=0{,}008$$

$$R_E(60)=\exp\left(-P(E)*60\right)=0{,}05$$

Вероятность безотказной работы первого узла за время длительностью 60 ч:

$$P_1=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0{,}629$$

Вероятность безотказной работы второго узла за время длительностью 60 ч:

$$P_2=1-P(\overline{D})P(\overline{E})=0{,}058$$

Вероятность безотказной работы устройства за время длительностью 60 ч:

$$P=P_1P_2=0{,}036$$

Абсолютная погрешность $¿P-P^{¿}\vee¿\vee 0{,}036-0{,}04\vee¿0{,}004$.

б) Найдем среднее время безотказной работы устройства, учитывая, что в 50 испытаниях оно работало безотказно всего 139,9 ч:

$$t^{¿}=\frac{139{,}9}{50}=2{,}797$$

Для сравнения приведем аналитическое решение. Среднее время работы элементов: $t_A=\frac{1}{0{,}07}=14{,}29;\ t_B=\frac{1}{0{,}03}=33{,}33;\ t_C=\frac{1}{0{,}01}=100;\ t_D=\frac{1}{0{,}08}=12{,}5;\ t_E=\frac{1}{0.05}=20.$

Среднее время работы узлов: $\overline{t_1}=max(14{,}29;33{,}33;100)=100;\ \overline{t_2}=max(12{,}5;20)=20.$

Среднее время работы устройства: $t=min(100{,}20)=20.$

Абсолютная погрешность $¿t-t^{¿}\vee¿17{,}203$.

Задание 2. Простейшие случаи криволинейной корреляции, множественная корреляция

1. Составить экспериментальную выборку исследуемых признаков Y и X (взять два произвольных столбца матрицы экспериментов (не нормированной) из индивидуальной части задания к лабораторной работе № 1). А) рассчитать выборочный коэффициент линейной корреляции и выборочное корреляционное отношение. Сделать вывод о наличии функциональной зависимости (линейной или не линейной) между рассматриваемыми признаками. Б) по имеющимся экспериментальным данным построить уравнения линейной, квадратичной, экспоненциальной и логарифмической регрессии. Построить их графики (на одном рисунке), отметить на графике экспериментальные точки. Среди перечисленных выше выбрать уравнение регрессии наилучшим образом, приближающее экспериментальную зависимость (сравнивая между собой значения среднеквадратичных отклонений экспериментальных точек от линий регрессии).

2. Составить экспериментальную выборку признаков Z, X, Y (взять три столбца матрицы экспериментов из индивидуальной части задания к лабораторной работе № 1). Привести уравнение многомерной линейной регрессии для указанных признаков (из результатов лабораторной №1). Построить график полученной плоскости, отметить на нем экспериментальные точки. Оценить тесноту линейной связи между Z и обоими признаками X, Y, между Z и X (при фиксированном Y), между Z и Y (при фиксированном X), рассчитав выборочный совокупный коэффициент корреляции, и частные выборочные коэффициенты корреляции.

Пункт 1. В качестве выборки возьмем 18 значений курсов акций за промежуток от 1.12.20 до 24.12.20 компаний «Газпром» и «Роснефть»

№пп	«Роснефть»	«Газпром»
	Y	X
1	444	185,64
2	444,45	186,98
3	433,75	185
4	442,95	188,76
5	440,45	190,02
6	429,6	190,3
7	432,9	189,99
8	449,35	192
9	446,15	200,68
10	447,5	198,86
11	442,95	200,4
12	436,85	205,99

13	440,9	214
14	443,4	211,03
15	418,35	204,84
16	433	207,9
17	426,9	206,93
18	430,1	206

Выборочный коэффициент корреляции

$$r_B=\frac{\sum n_{xy}xy-n\bar{x}\bar{y}}{n\bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y}=-0{,}23426,$$

где x, y – наблюдающиеся значения, $n_{xy}=1$ – частота пары вариант $(x, y¿$, $n=18$ = объем выборки, $\bar{x}=198{,}0733;\bar{y}=437{,}975$– выборочные средние , $\bar{\sigma}_x=9{,}260024;\bar{\sigma}_y=8{,}05661$ – выборочные средние квадратические отклонения.

Так как $r_B\neq 0$, то корреляционная зависимости между X и Y имеется.

Выборочное корреляционное отношение

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\bar{\sigma}_y},$$

$$\sigma_{\bar{y}_x}=\sqrt{D_{межгр}}=\sqrt{\frac{\left(\sum n_x\left(\bar{y}_x-\bar{y}\right)^2¿¿\right)}{n}},$$

$$\bar{\sigma}_y=\sqrt{D_{общ}}=\sqrt{\frac{\left(\sum n_y\left(y-\bar{y}\right)^2¿¿\right)}{n}},$$

$\bar{y}$ – общая средняя признака Y, $\bar{y}_x$ – условная средняя признака Y.

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum n_y y=437{,}975,\bar{\sigma}_y=8{,}05661.$$

$$\bar{y}_x=\rho_{yx}x+b,$$

коэффициенты ρ_{yx}, bопределим из системы

$$\begin{cases}\rho_{yx}\sum x^2+b\sum x=\sum xy\\ \rho_{yx}\sum x+nb=\sum y\end{cases}=¿\begin{cases}\rho_{yx}707738{,}3+3565{,}32b=1561206{,}45\\ \rho_{yx}3565{,}32+18b=7883{,}55\end{cases},$$

В результате имеем

$$\bar{y}_x=-0{,}2038x+478{,}3447.$$

$$\sigma_{\bar{y}_x}=\sqrt{\frac{\left(\sum n_x\left(\bar{y}_x-\bar{y}\right)^2¿¿\right)}{n}}=\sqrt{\frac{64{,}114}{18}}=1{,}8873.$$

Искомое корреляционное отношение

$$\eta_{yx}=\frac{1{,}8873}{8{,}05661}=0{,}2342.$$

Найденный коэффициент меньше 1, значит признак Y связан с признаком X корреляционной зависимостью.

Таким образом между признаками X и Y имеется корреляционная зависимость.

По имеющимся экспериментальным данным построили уравнения линейной, квадратичной, экспоненциальной и логарифмической регрессии.

Уравнение линейной регрессии

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a x_i - b\right)^2 \rightarrow min$$

¿

$$\begin{cases} a*707738,3+3565,32b=1561206,45 \\ a*3565,32+18b=7883,55 \end{cases}$$

$$y=-0,2038x+478,3447.$$

Уравнение квадратичной регрессии.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - c - a\left(x_i\right)^2 - b x_i\right)^2 \rightarrow min$$

Частные производные функции приравниваем к нулю

¿

Получаем следующую систему

$$\begin{cases} a\sum x^4+b\sum x^3+c\sum x^2=\sum x^2 y \\ a\sum x^3+b\sum x^2+c\sum x=\sum xy \\ a\sum x^2+b\sum x+cn=\sum y \end{cases} = ¿ \begin{cases} 28070596829a+140796638,9b+707738,2816c=309847163,1 \\ 140796638,9a+707738,2816b+3565,32c=1561206,45 \\ 707738,2816a+3565,32b+18c=7883,55 \end{cases}$$

тогда уравнение квадратичной регрессии примет вид

$$\overline{y} = 0,453304551e\text{-}2x^2 - 2,002852207x + 656,4527330.$$

Уравнение экспоненциальной регрессии в общем виде

$$y=a*\exp(x)+b.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - b - a\exp x_i\right)^2 \rightarrow min$$

Для наших данных система уравнений имеет вид

¿

Уравнение регрессии

$$y=3,89\,10^{-93}\exp(x)+437.7769617.$$

Уравнение логарифмической регрессии

$$y = a \ln x + b.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b - a \ln x_i \right)^2 \rightarrow min$$

Для наших данных система уравнений примет вид

¿

$$y = -40.46293612 \ln x + 651.9246094.$$

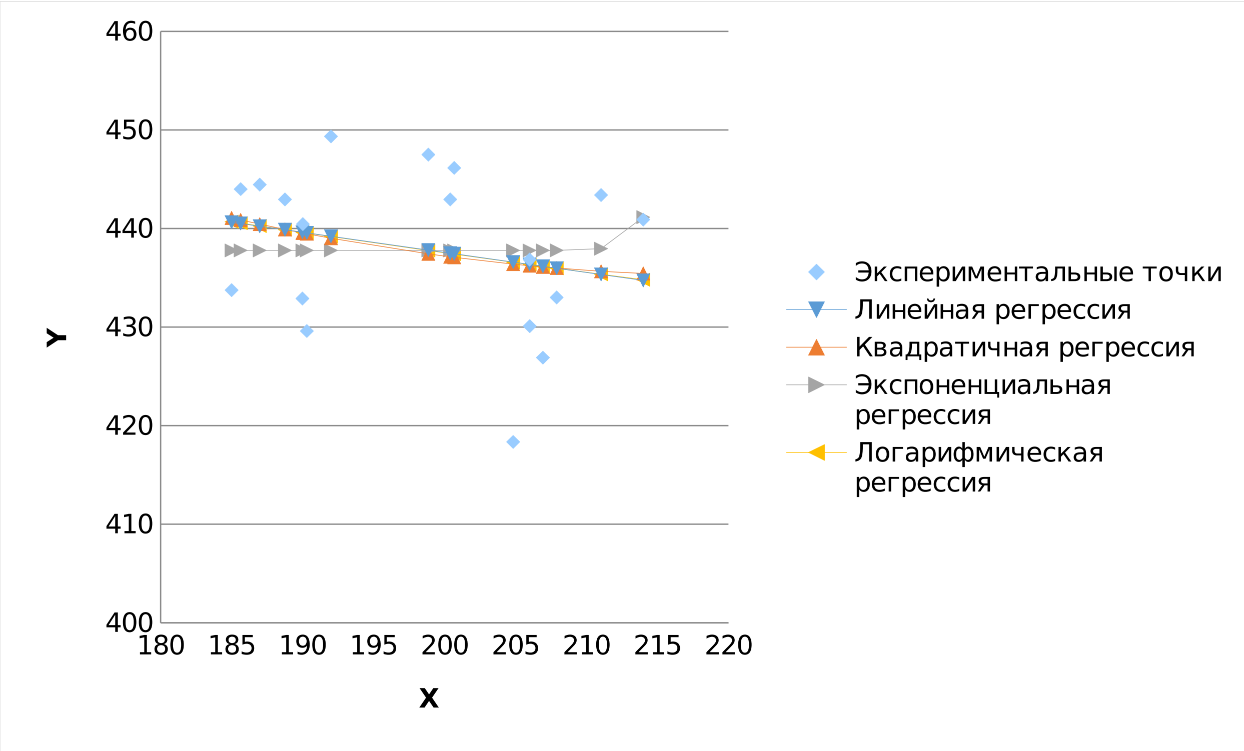

Рисунок 1. Графики регрессий

Среднеквадратические отклонения

$$\bar{\sigma}_y = 8{,}05661$$

$$\bar{\sigma}_{лин} = 1{,}8872, R = \left| \bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_{лин} \right| = 6{,}1694,$$

$$\bar{\sigma}_{кв} = 1{,}9096, R = 6{,}147,$$

$$\bar{\sigma}_{эксп} = 0{,}7723, R = 7{,}2843,$$

$$\bar{\sigma}_{лог} = 1{,}8906, R = 6{,}166.$$

Сравнивая между собой значения среднеквадратичных отклонений экспериментальных точек от линий регрессии, приходим к выводу, что уравнение квадратичной регрессии наилучшим образом приближает экспериментальную зависимость.

Пункт 2.

№пп	«Роснефть»	«Газпром»	«РУСАЛ»

	Y	X	Z
1	444	185,64	41,89
2	444,45	186,98	41
3	433,75	185	40
4	442,95	188,76	37,08
5	440,45	190,02	39
6	429,6	190,3	44,49
7	432,9	189,99	41,30
8	449,35	192	42,1
9	446,15	200,68	41,55
10	447,5	198,86	39,29
11	442,95	200,4	39,95
12	436,85	205,99	36,80
13	440,9	214	34,81
14	443,4	211,03	36,06
15	418,35	204,84	36,98
16	433	207,9	34,80
17	426,9	206,93	36,86
18	430,1	206	34,02

Уравнение многомерной линейной регрессии для данных признаков имеет вид

$$Z = AX + BY + C$$

Найдем коэффициенты A, B, C методом наименьших квадратов.

$$\sum (-z + Ax + By)^2 \to min$$

$$\begin{cases} 2\sum(-z + Ax + By)x = 0 \\ 2\sum(-z + Ax + By)y = 0 \\ 2\sum(-z + Ax + By)x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \sum x^2 \sum xy \sum x \\ \sum xy \sum y^2 \sum y \\ \sum x \sum y\, n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum xz \\ \sum yz \\ \sum z \end{pmatrix}$$

$$A = -0.2245404163$$

$$B = 0.0424708413$$

$$C = 64.65096868$$

Уравнение многомерной линейной регрессии для данных признаков имеет вид

$$z = f(x, y) = -0.2245404163\,x + 0.0424708413\,y + 64.65096868$$

Построим график плоскости $f(x, y)$

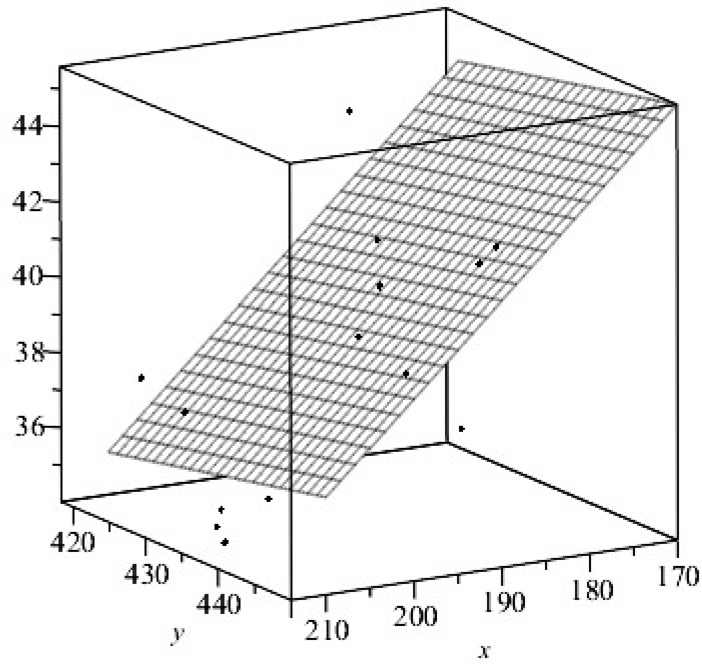

Рисунок 2. График плоскости и экспериментальные точки

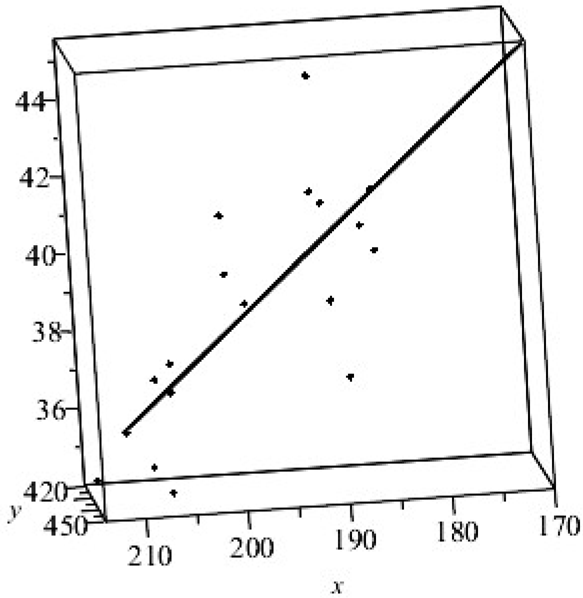

Рисунок 3. График плоскости и экспериментальные точки (вид сбоку)

Найдем тесноту связи признака Z с признаками X, Y по следующей формуле

$$R=\sqrt{\frac{r_{xz}^2-2r_{xy}r_{xz}r_{yz}+r_{yz}^2}{1-r_{xy}^2}}$$

где r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} – коэффициенты корреляции между признаками.

$$r_{xz}=\frac{\overline{xz}-\bar{x}\,\bar{z}}{\sigma_x\sigma_z}=0{,}746028357,$$

$$r_{xy}=0{,}234255998,$$

$$r_{yz}=\frac{8{,}452-3{,}457*2{,}445}{0{,}126*0{,}024}=0{,}286486999$$

$$R=0{,}754828215$$

Оценим тесноту линейной связи между Z и X, между Z и Y

$$r_{xz}(y)=\frac{r_{xz}-r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{yz}^2)}}=0{,}9327,$$

$$r_{yz}(x)=\frac{r_{yz}-r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}}=0{,}8201.$$

Найденные коэффициенты R, $r_{xz}(y)$, близки к 1, значит соответствующие признаки связаны функциональной зависимостью. Между Z и обоими признаками X, Y и между Z и X имеется высокая связь, между Z и Y связь - низкая.

Задание 3. Ранговая корреляция

1. Два эксперта оценили качество твердого сорта сыра, выпускаемого 12 производителями по стобалльной системе, и выставили следующие оценки (в первой строке указаны баллы, выставленные первым экспертом, во второй – вторым).

98	94	88	80	76	70	63	61	60	58	56	51
99	91	91	74	78	65	64	66	52	53	50	62

Рассчитать выборочные коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла. Проверить гипотезу о наличии существенной связи между мнениями экспертов с уровнем значимости 0,05 для каждого из коэффициентов. Совпадают ли результаты проверки гипотезы в обоих случаях?

Решение:

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена

$$\rho_B = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n}, d_i = x_i - y_i.$$

ранги x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Оценка 1	98	94	88	80	76	70	63	61	60	58	56	51
ранги y_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Оценка 2	99	91	91	78	74	66	65	64	62	53	52	50

Таблица рангов

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	1	2	3	5	4	7	8	6	11	10	12	9
d_i	0	0	0	-1	1	-1	-1	2	-2	0	-1	3

Отсюда

$$\sum d_i^2 = 1+1+1+1+1+4+4+9 = 22.$$

Тогда

$$\rho_B = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6*22}{12^3 - 12} = 0{,}923077.$$

Найдем критическую точку k = 12 – 2 = 10 – число степеней свободы

$t_{кр}$ (0,05;10) = 2,228

$$T_{кр}=t_{кр}\sqrt{\frac{1-\rho_B^2}{n-2}}=2{,}228*\sqrt{\frac{1-0{,}923077^2}{12-2}}=0{,}27098274.$$

Таким образом, $T_{кр}=0{,}27098274\,,\rho_B=0{,}923077\,,$ так как $T_{кр}<\rho_B$ – нулевая гипотеза о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции Спирмена отвергается, имеется ранговая корреляционная связь между мнениями экспертов.

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла

$$\tau_B=\frac{4R}{n(n-1)}-1.$$

$$R=11+10+9+7+7+5+4+4+1+2+0=60.$$

$$\tau_B=\frac{4*60}{12*11}-1=0{,}8182.$$

Проверка гипотезы. Найдем $z_{кр}$

$$\Phi(z_{кр})=\frac{1-\alpha}{2}=0{,}475.\ z_{кр}=1{,}96.$$

$$T_{кр}=z_{кр}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}=0{,}433073737$$

.

Так как $T_{кр}<\tau_B$ – нулевая гипотеза отвергается, имеется ранговая корреляционная связь между мнениями экспертов.

Задание 4. Однофакторный дисперсионный анализ

1. Произведено по 8 испытаний на каждом из 6 уровней фактора. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в таблице. Здесь rnd – случайное число из диапазона (110; 130), причем для каждого столбца свое.

2. Произведено 13 испытаний, из них 4 – на первом уровне фактора, 6 – на втором, 3 – на третьем. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты приведены в таблице. Здесь rnd – случайное число из диапазона (50; 70), причем для каждого столбца свое.

Пункт 1.

Номер испытания i	Уровни фактора					
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	100	92	74	68	64	69
2	101	102	87	80	83	71
3	126	104	88	83	83	80
4	**115**	115	93	87	84	80
5	133	119	94	96	90	81
6	141	122	101	97	96	82
7	147	**118**	102	106	101	86
8	148	146	105	**128**	**116**	99
$\overline{x}_{гр\ j}$	126,38	114,75	93	93,125	89,625	81

Решение:

Для упрощения вычислений было произведено преобразование данных

$$y_{ij}=x_{ij}-x_{0,0}$$

№	y_{i1}	y_{i2}	y_{i3}	y_{i4}	y_{i5}	y_{i6}
1	0	-8	-26	-32	-36	-31
2	1	2	-13	-20	-17	-29
3	26	4	-12	-17	-17	-20
4	15	15	-7	-13	-16	-20
5	33	19	-6	-4	-10	-19
6	41	22	1	-3	-4	-18
7	47	18	2	6	1	-14
8	48	46	5	28	16	-1
T_j	211	118	-56	-55	-83	-152

№	y_{i1}^2	y_{i2}^2	y_{i3}^2	y_{i4}^2	y_{i5}^2	y_{i6}^2
1	0	64	676	1024	1296	961
2	1	4	169	400	289	841
3	676	16	144	289	289	400
4	225	225	49	169	256	400
5	1089	361	36	16	100	361
6	1681	484	1	9	16	324
7	2209	324	4	36	1	196
8	2304	2116	25	784	256	1
Q_j	8185	3594	1104	2727	2503	3484

$$\sum T_j = -17.$$

$$\sum T_j^2 = 94599.$$

$$\sum Q_j = 21597.$$

Найдем общую и факторную суммы квадратов отклонений. $p=6$ – уровни фактора, $q=8$ – число испытаний.

$$S_{общ} = \sum Q_j - \frac{1}{pq}\left(\sum T_j\right)^2 = 21590{,}97917,$$

$$S_{факт} = \frac{1}{q}\sum T_j^2 - \frac{1}{pq}\left(\sum T_j\right)^2 = 11818{,}85417,$$

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт} = 9772{,}125,$$

$$S_{факт}^2 = \frac{S_{факт}}{p-1} = 2363{,}770833,$$

$$S_{ост}^2 = \frac{S_{ост}}{p(q-1)} = 232{,}6696429.$$

$$F_{набл} = \frac{S_{факт}^2}{S_{ост}^2} \approx 10{,}15934354,$$

$$F_{кр}(0.99, 5, 42) = 3.488235$$

Так как $F_{набл} > F_{крит}$, нулевая гипотеза отвергается. Следовательно, групповые средние не равны между собой.

Пункт 2.

Номер испытания i	Уровни фактора		
	F_1	F_2	F_3
1 2 3 4 5 6	37 47 40 **56**	**60** 86 67 92 95 98	**57** 100 98
$\overline{x}_{гр\,j}$	45	83	85

Решение:

$p=3$ уровни факторов и $q_1=4\,, q_2=6\,, q_3=3$ испытаний для соответствующих уровней фактора, $y_{ij}=x_{ij}-x_{0,0}$

№	y_{i1}	y_{i2}	y_{i3}	y_{i1}^2	y_{i2}^2	y_{i3}^2
1	0	23	20	0	529	400
2	10	49	63	100	2401	3969
3	3	30	61	9	900	3721
4	19	55		361	3025	
5		58			3364	
6		61			3721	
T_j	32	276	144	-	-	-
Q_j	-	-	-	470	13940	8090

$$\sum T_j=452$$

$$\sum \frac{T_j^2}{q_i}=19864\,,$$

$$\sum Q_j=22500.$$

$$p=3\,, \{q_i\}=\{4\,,6\,,3\}\,, n=13$$

$$S_{общ}=\sum Q_j-\frac{1}{n}\left(\sum T_j\right)^2=6784{,}307692$$

$$S_{факт}=\sum \frac{T_j^2}{q_i}-\frac{1}{n}\left(\sum T_j\right)^2=4148{,}308$$

$$S_{ост}=S_{общ}-S_{факт}=2636$$

$$S_{факт}^2=\frac{S_{факт}}{p-1}=2074{,}153846$$

$$S_{ост}^2=\frac{S_{ост}}{n-p}=\frac{2636}{(4+6+3)-3}=263{,}6.$$

Выдвинем гипотезу:

H_0: групповые средние равны между собой,

H_1: групповые средние не равны между собой.

Для проверки этой гипотезы воспользуемся критерием Фишера. По таблице найдем квантиль распределения $F_{крит}(0{,}01;2;10)=7{,}559$. При этом

$$F_{набл}=\frac{S_{факт}^2}{S_{ост}^2}=7{,}869.$$

Так как $F_{набл}>F_{крит}$, нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная. Следовательно, групповые средние не равны между собой.

Задание 5. Проверка однородности выборок с помощью критерия Вилкоксона

Эффективность каждого из двух рационов (А и В) откорма скота характеризуется выборками объемов $n_1=10$ и $n_2=12$ (в первой строке приведен вес в кг животных, которых откармливали по рациону А, во второй строке – по рациону В):

$$x_i: 26\ 25\ 27\ 27\ 30\ 32\ 33\ 34\ 35\ 36$$

$$y_i: 21\ 21\ 22\ 23\ 25\ 25\ 25\ 25\ 27\ 27\ 29\ 29$$

Используя критерий Вилкоксона, при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об одинаковой эффективности рационов А и В, приняв в качестве конкурирующей гипотезу о том, что это не так.

Решение:

Нулевая гипотеза $H_0: F_1(x)=F_2(x)$.

Конкурирующая гипотеза $H_1: F_1(x)\neq F_2(x)$.

Расположим варианты выборок в виде одного вариационного ряда:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
z_i	21	21	22	23	25	25	25	25	25	26	27	27

№	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
z_i	27	27	29	29	30	32	33	34	35	36

Наблюдаемое значение критерия Вилкоксона – сумму порядковых номеров вариант первой выборки $w_{набл}=5+10+11+12+17+18+19+20+21+22=155$.

По таблице критерия Вилкоксона найдем нижнюю критическую точку

$$w_{кр,нижняя}\left(\frac{\alpha}{2};n_1;n_2\right)=w_{кр,нижняя}(0{,}025;10;12)=84.$$

Найдем верхнюю критическую точку

$$w_{кр,верхняя}=(n_1+n_2+1)*n_1-w_{кр,нижняя}=23*10-84=146.$$

Поскольку наблюдаемое значение не принадлежит области $(w_{кр\,ниж};w_{кр\,верх})$ - нулевая гипотеза отвергается. Эффективность рационов не одинакова.