Лабораторная работа № 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Цель работы: получить навык моделирования распространения электромагнитных волн в неоднородных волноводах на основе решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

Задание на лабораторную работу

Рассматривается задача распространения электромагнитной волны в плоском волноводе.

В случае полуограниченного однородного канала постоянного сечения математическая модель имеет вид краевой задачи для уравнений Гельмгольца. Рассматриваются граничные условия первого рода. Модельная задача имеет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0,\ \ x \in (0,\infty),\ \ y \in (0,1); \\
u(0,y) = f(y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x\to\infty} = 0,\ y \in [0,1]; \\
u(x,0) = u(x,1) = 0,\ \ x \in [0,\infty),
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

где u – потенциал электромагнитного поля, k – волновое число.

В случае, когда канал имеет поперечную неоднородность свойств, уравнение модифицируется:

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2\psi(y)u = 0,$$

где функция $\psi(y)$ описывает вид неоднородности. В данной работе будут рассматриваться каналы со слабой неоднородностью, то есть каналы, для которых справедливо представление $\psi(y) \approx 1 + \varepsilon\varphi(y)$, где ε – малый параметр. Численное моделирование канала неограниченной длины не представляется возможным, поэтому рассматривается канал некоторой конечной длины L.

Таким образом, решаемая в лабораторной работе краевая задача имеет вид

$$
\begin{gathered}
u_{xx} + u_{yy} + k^2[1 + \varepsilon\varphi(y)]u = 0,\ \ x \in (0,\infty),\ \ y \in (0,1); \\
u(0,y) = f(y),\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,\ y \in [0,1]; \\
u(x,0) = u(x,1) = 0,\ \ x \in [0,\infty).
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Функция $f(y)$ задается в виде δ-функции:

$$f(y) = \delta(y - y_0). \tag{3.3}$$

Для модели (3.2), (3.3) в работе необходимо выполнить следующие действия:

1) разработать конечно-разностную схему численного решения задачи (3.2), (3.3) при условии, что δ-функция аппроксимируется тригонометрическим рядом:

$$\delta(y-y_0) \approx \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N} \sin(ny)\sin(ny_0)\,;$$

2) реализовать разработанную схему в виде вычислительной программы;
3) для заданной в соответствии с номером индивидуального задания функции $\varphi(y)$ провести серию вычислительных экспериментов, направленных на исследование влияния на решение следующих параметров задачи: $N, \varepsilon, L, k, y_0$.

№ вар.	1	2	3
$\varphi(y)$	$\varphi(y) = y(1-y)$	$\varphi(y) = y(1-y)\left(\frac{1}{2}-y\right)^2$	$\varphi(y) = y(1-y)\left(\frac{1}{2}-y\right)^2$
№ вар.	4	5	6
$\varphi(y)$	$\varphi(y) = y(1-y)\left(\frac{1}{4}-y\right)^2$	$\varphi(y) = y(1-y)\left(\frac{3}{4}-y\right)^2$	$\varphi(y) = y^2(1-y)\left(\frac{1}{2}-y\right)^2$
№ вар.	7	8	9
$\varphi(y)$	$\varphi(y) = \sin(\pi y)$	$\varphi(y) = y\sin(\pi y)$	$\varphi(y) = \left(\frac{1}{2}-y\right)^2 \sin(\pi y)$
№ вар.	10	11	12
$\varphi(y)$	$\varphi(y) = \mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{ch}\left(y-\frac{1}{2}\right)$	$\varphi(y) = y\left[\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{ch}\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]$	$\varphi(y) = \sin(\pi y)\left[\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{ch}\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]$

Отчетность

По результатам решения задачи составить отчет по лабораторной работе, который должен содержать постановку решаемой задачи, описание численной схемы и особенности ее программной реализации, результаты проведенных в соответствии с заданием вычислительных экспериментов, оформленные в виде графиков, таблиц и рисунков, анализ полученных результатов, выводы по работе.