

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Уфимский государственный авиационный технический университет"**

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

Дисциплина: Математическое моделирование

Отчет по лабораторной работе № 3

Тема: «Моделирование распространения электромагнитных волн в плоском волноводе.»

Группа ПМ-453	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Шамаев И.Р.			
Принял	Лукащук В. О.			

Уфа 2023

Цель работы: получить навык моделирования распространения электромагнитных волн в неоднородных волноводах на основе решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

Постановка задачи.

Рассматривается задача распространения электромагнитной волны в плоском волноводе.

В случае полуограниченного однородного канала постоянного сечения математическая модель имеет вид краевой задачи для уравнений Гельмгольца. Рассматриваются граничные условия первого рода. Модельная задача имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + k^2 u &= 0, \quad x \in (0, \infty), \quad y \in (0, 1); \\ u(0, y) &= f(y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad y \in [0, 1]; \\ u(x, 0) &= u(x, 1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u – потенциал электромагнитного поля, k – волновое число.

В случае, когда канал имеет поперечную неоднородность свойств, уравнение модифицируется:

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2 \psi(y) u = 0,$$

где функция $\psi(y)$ описывает вид неоднородности. В данной работе будут рассматриваться каналы со слабой неоднородностью, то есть каналы, для которых справедливо представление $\psi(y) \approx 1 + \varepsilon \phi(y)$, где ε – малый параметр. Численное моделирование канала неограниченной длины не представляется возможным, поэтому рассматривается канал некоторой конечной длины L .

Таким образом, решаемая в лабораторной работе краевая задача имеет вид

$$\begin{aligned}
u_{xx}+u_{yy}+k^2[1+\varepsilon\phi(y)]u &=0, \quad x \in (0, \infty), \quad y \in (0, 1); \\
u(0, y) &= f(y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad y \in [0, 1]; \\
u(x, 0) &= u(x, 1) = 0, \quad x \in [0, L].
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Функция $f(y)$ задается в виде δ -функции:

$$f(y) = \delta(y - y_0) \tag{1.3}$$

Для модели (1.2), (1.3) в работе необходимо выполнить следующие действия:

- 1) разработать конечно-разностную схему численного решения задачи (1.2), (1.3) при условии, что δ -функция аппроксимируется тригонометрическим рядом:

$$\delta(y - y_0) \approx \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N \sin(ny) \sin(ny_0);$$

- 2) реализовать разработанную схему в виде вычислительной программы;
- 3) для заданной в соответствии с номером индивидуального задания функции $\phi(y)$ провести серию вычислительных экспериментов, направленных на исследование влияния на решение следующих параметров задачи: $N_f, \varepsilon, L, k, y_0$.

$$\phi(y) = y(1-y) \left(\frac{1}{4} - y \right)^2$$

Для решения поставленной задачи была разработана конечно-разностная схема:

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h_y^2} + k^2[1 + \varepsilon\phi(jh_y)]U_{ij} = 0,$$

$$i = \overline{1, M-1}, j = \overline{1, N-1};$$

$$U_{0j} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N \sin(njh_y) \sin(ny_0), j = \overline{0, N};$$

$$U_{i0} = U_{iN} = 0, i = \overline{0, M};$$

$$U_{Mj}-U_{Mj-1}=0, j=\overline{0,N-1} \textcolor{red}{;}$$

где $U_{ij}=u(x_i,y_j), i=\overline{0,M}; j=\overline{0,N};$

Вычислительные эксперименты:

Проведем серию вычислительных экспериментов, направленных на исследование влияния на решение следующих параметров задачи: N , ε , k , y_0 . Численное моделирование канала неограниченной длины не представляется возможным, поэтому рассматриваем канал некоторой конечной длины, а именно: $L=5$.

Влияние параметра y_0 :

Фиксируем $N=10000$, $\varepsilon=0.00001$, $k=15$.

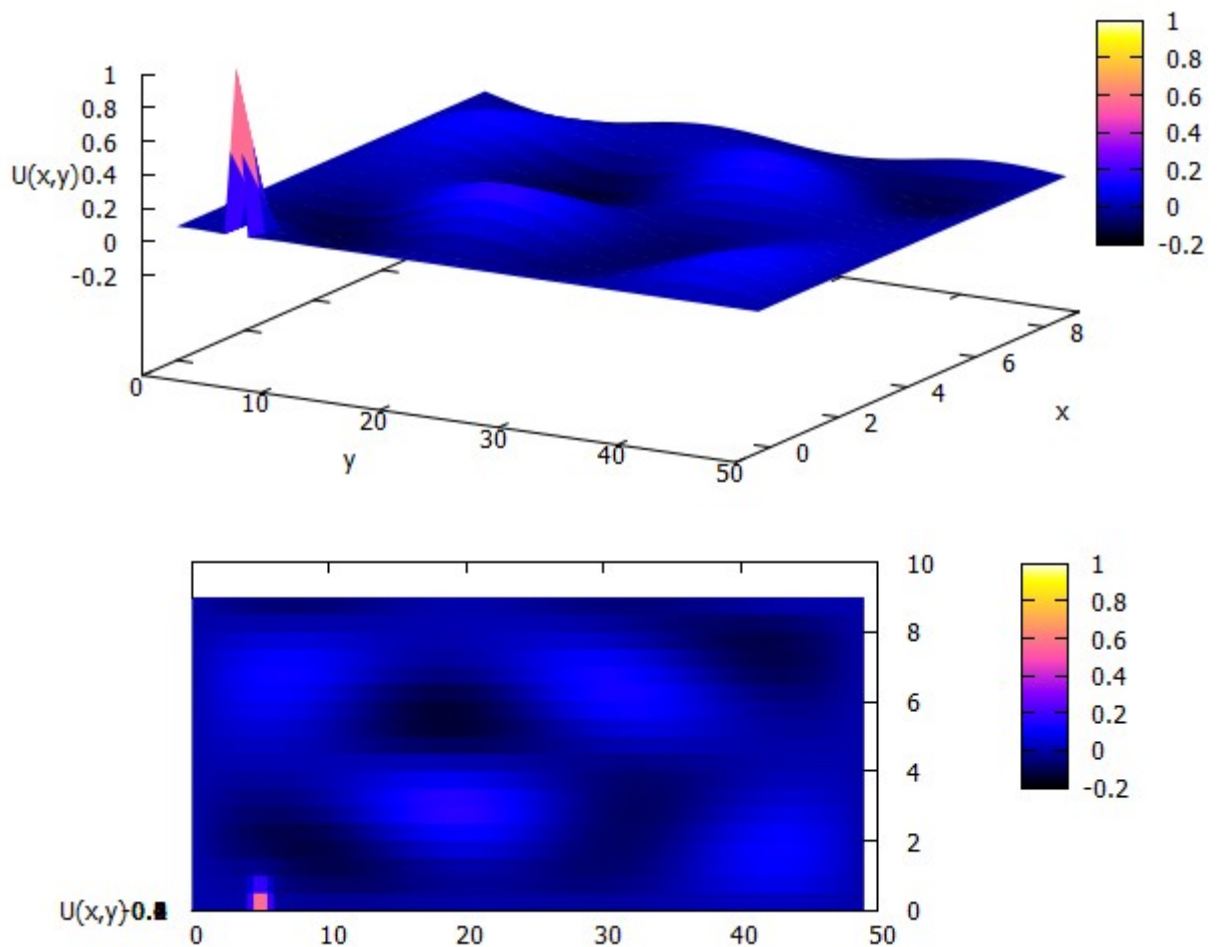


Рис.6 $y_0=0.1$

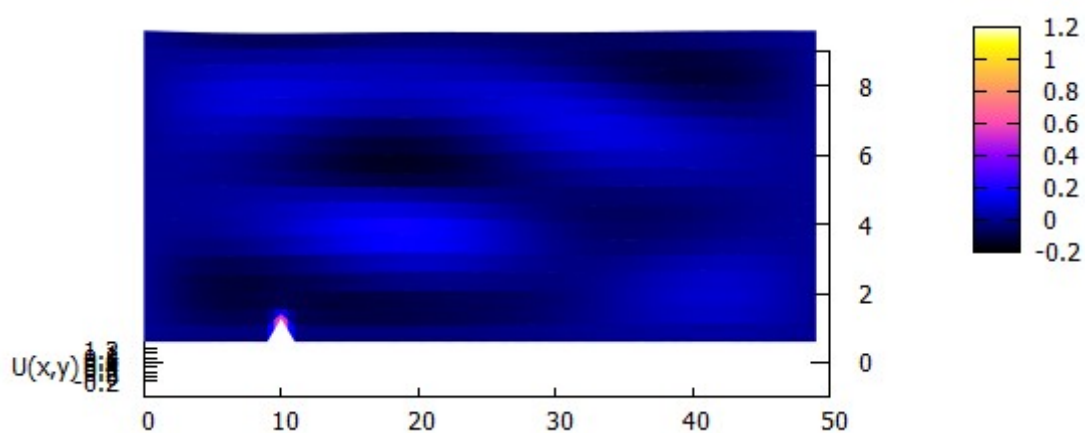
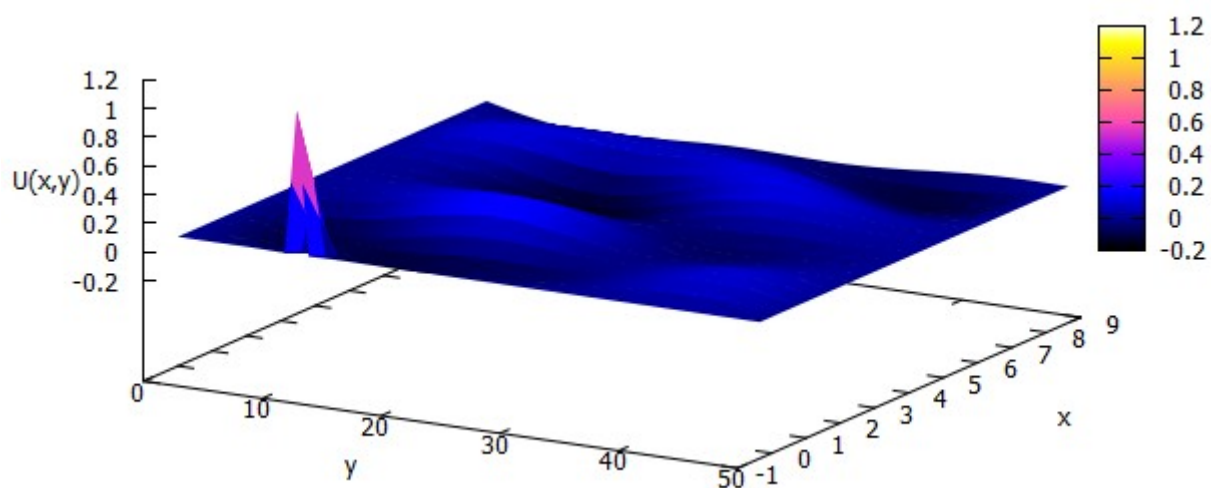
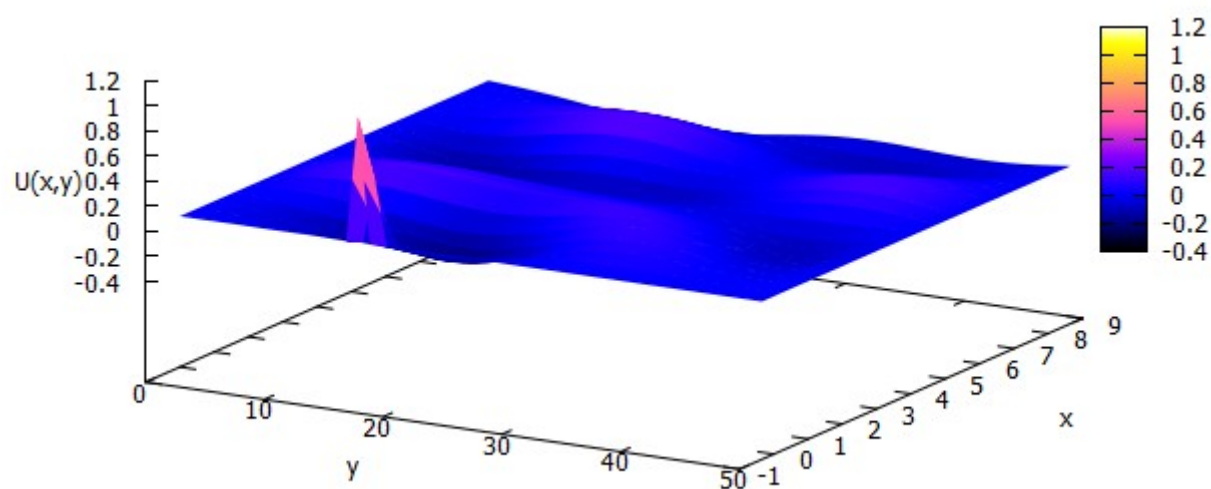


Рис.7 $y_0=0.2$



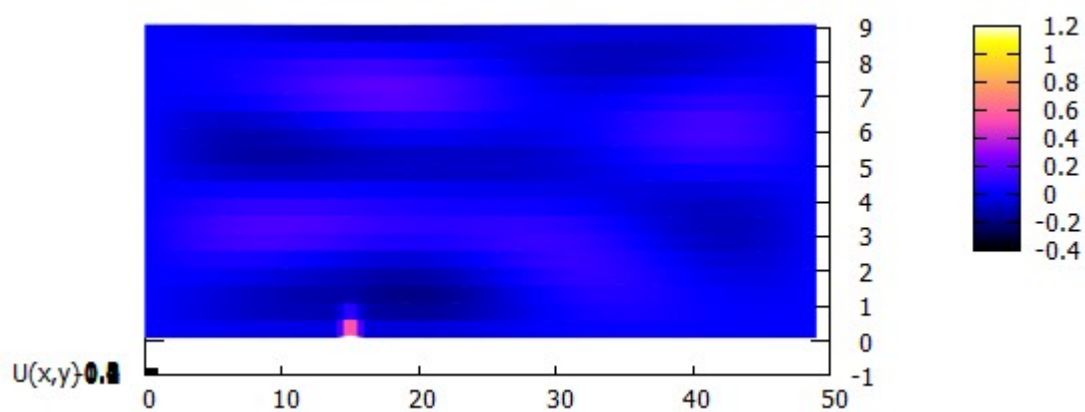


Рис.8 $y_0=0.3$

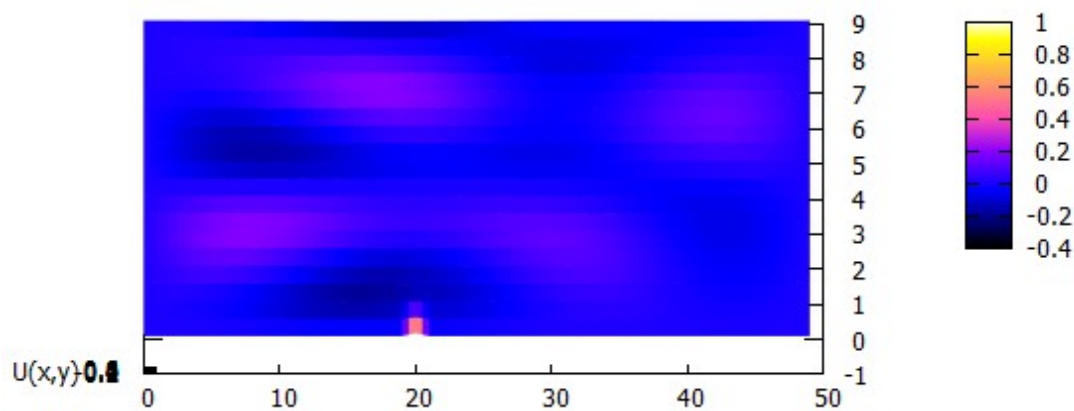
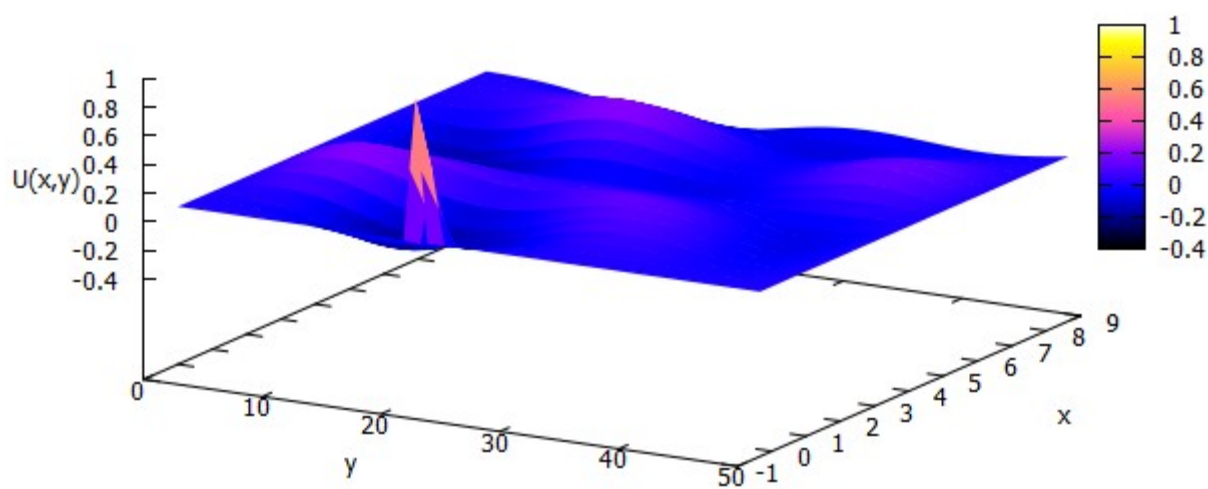


Рис.9 $y_0=0.4$

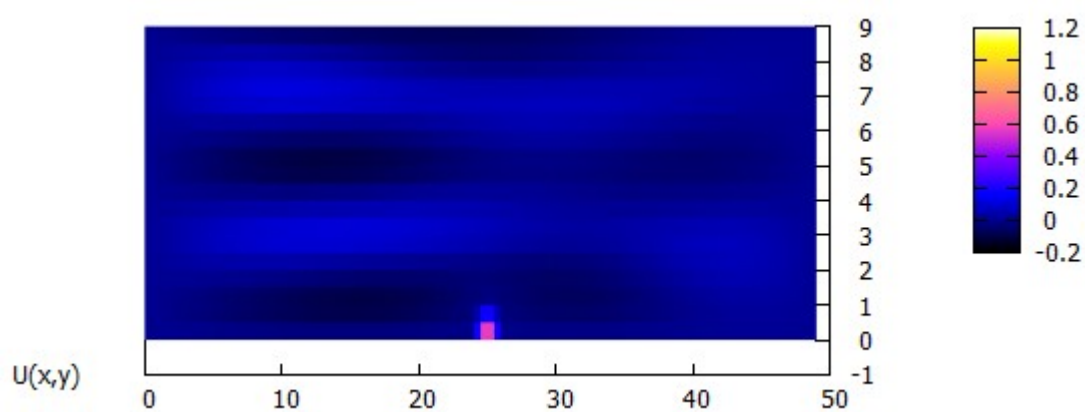
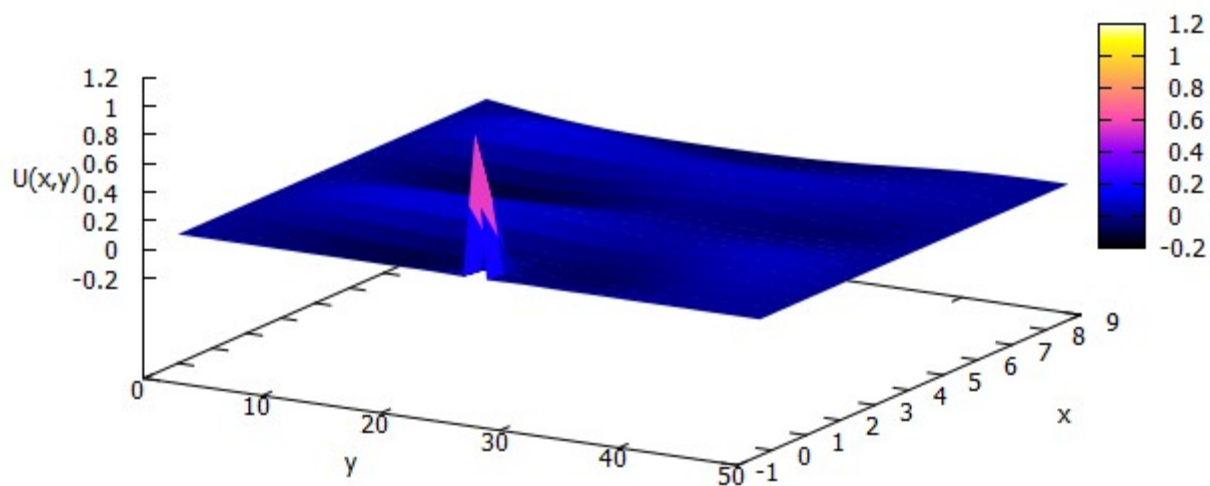
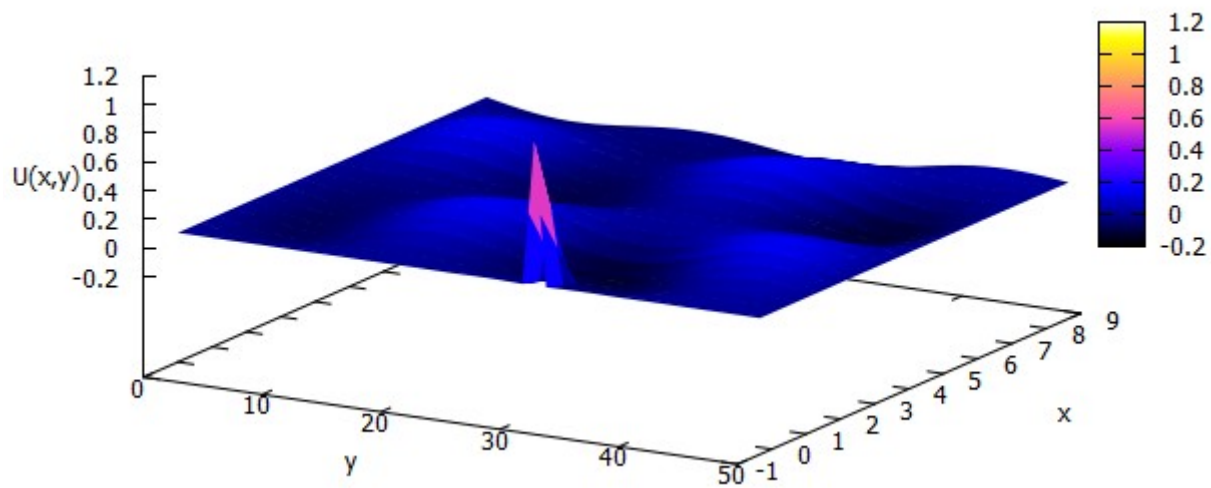


Рис.10 $y_0=0.5$



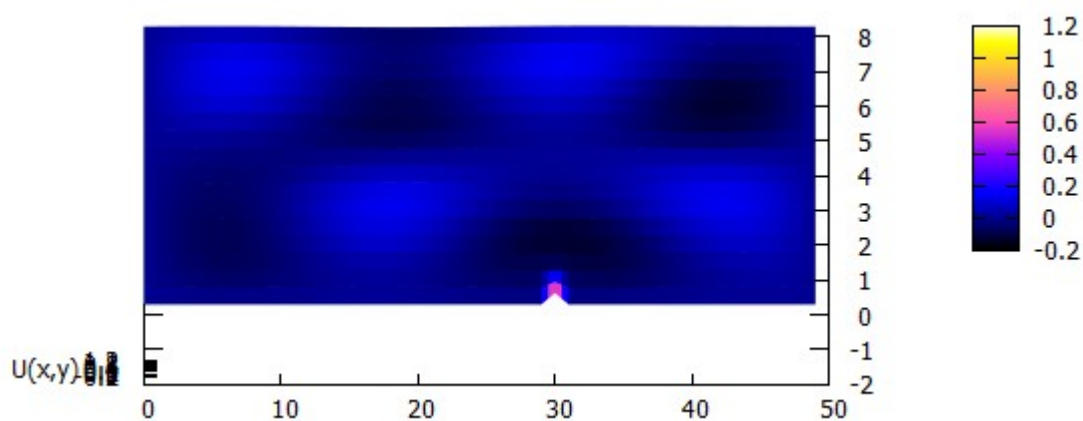


Рис.11 $y_0=0.6$

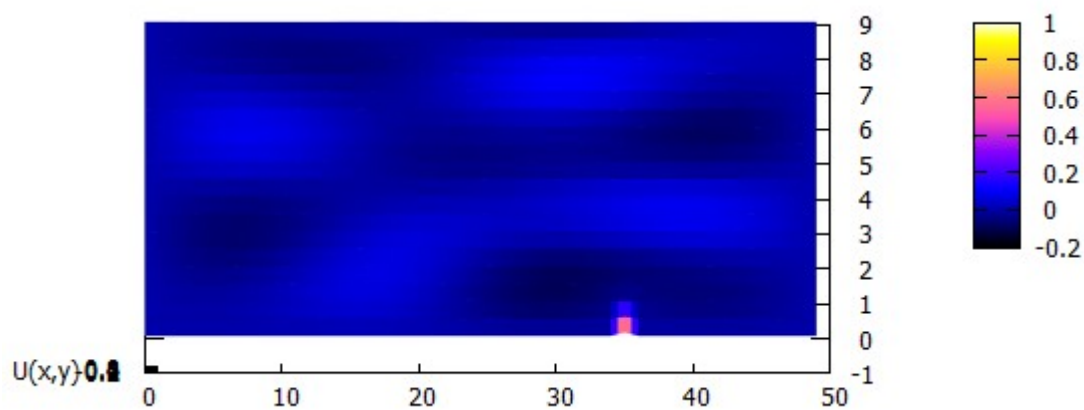
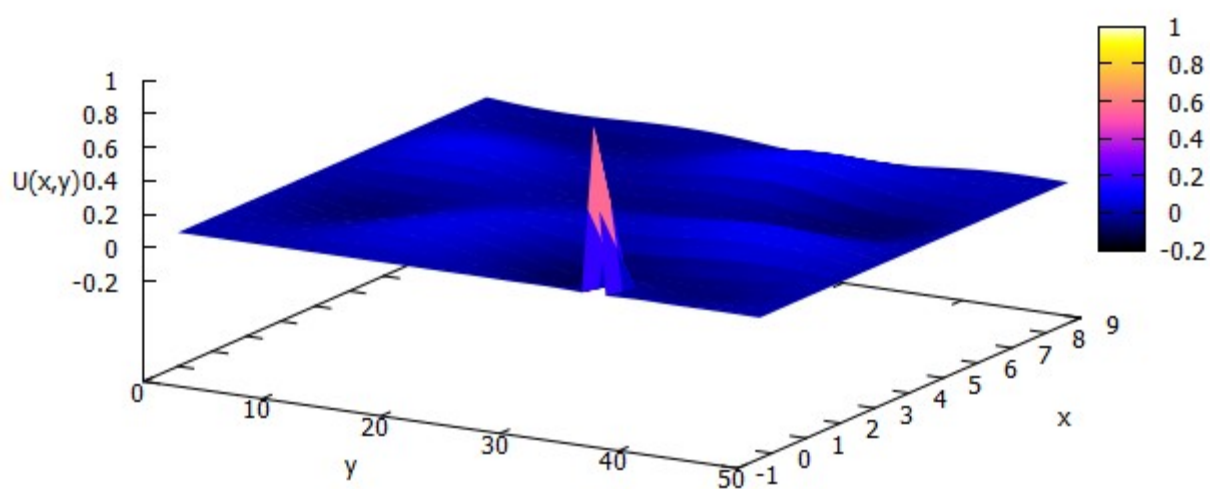


Рис.12 $y_0=0.7$

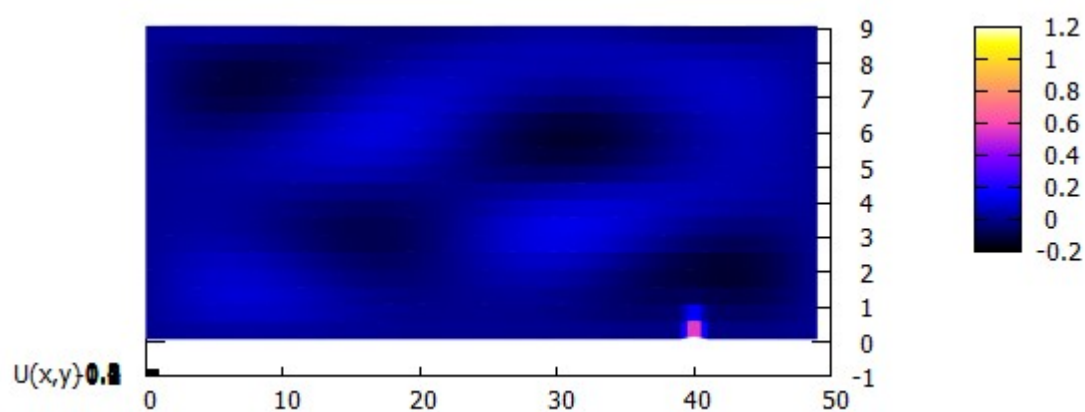
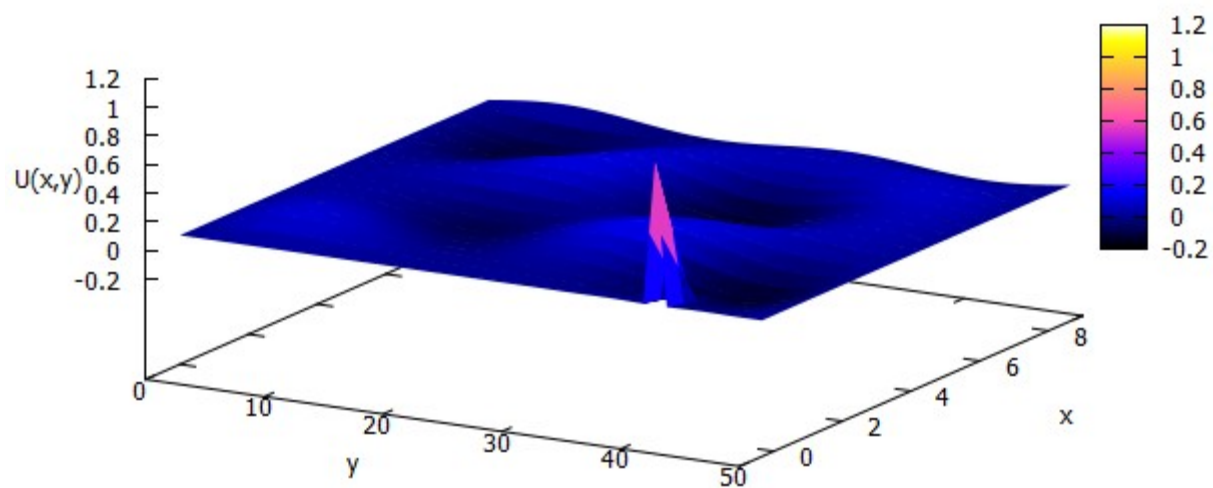
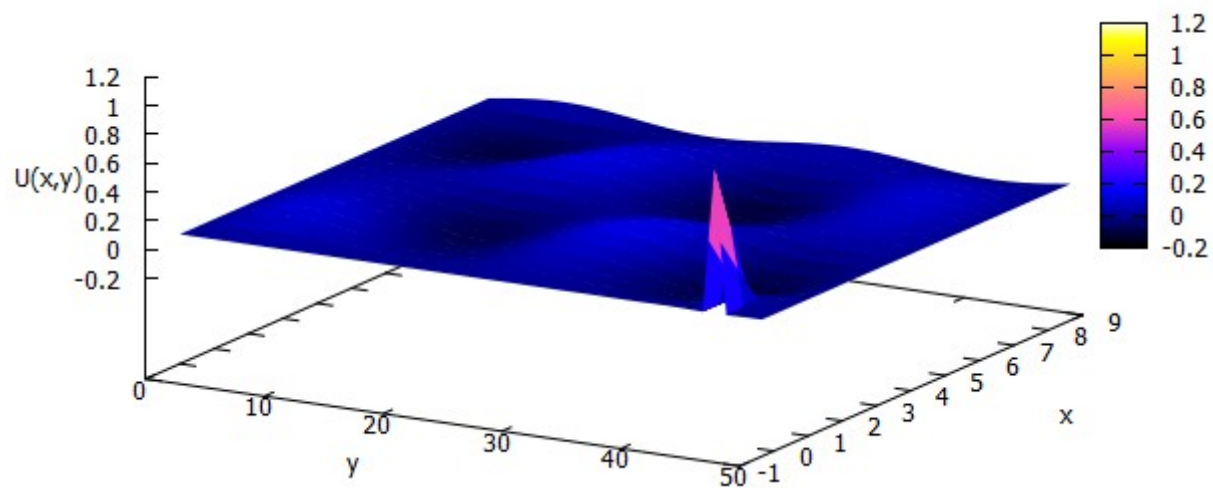


Рис.13 $y_0 = 0.8$



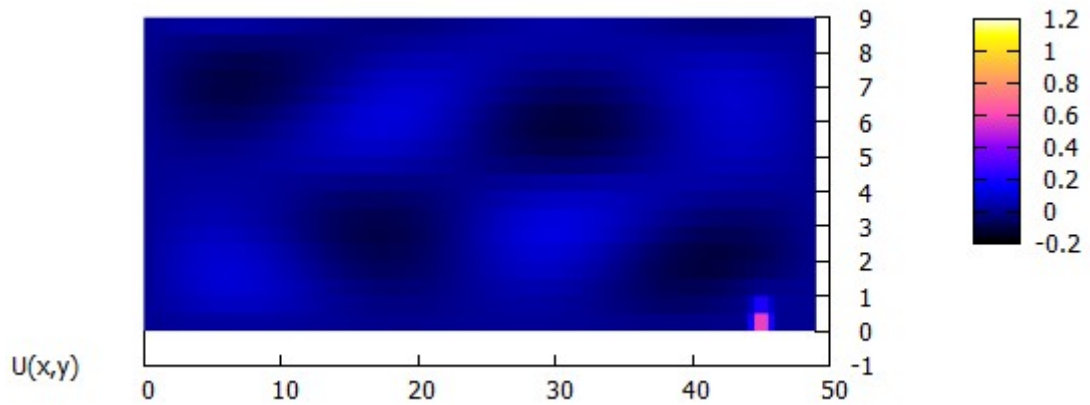


Рис.14 $y_0=0.9$

По графикам видно, что параметр y_0 влияет на начальное положение волны и ее амплитуду. По причине неоднородности волновода и вследствие симметричности функции $\phi(y)$ относительно $y_0=0.5$ при смещении y_0 от центра в обе стороны на один и тот же шаг, волны будут расположены симметрично от центра, амплитуда будет возрастать и убывать симметрично относительно центра в правой и левой частях $\phi(y)$. Также y_0 влияет на характер распространения волн. При смещении начального положения к краям наблюдаем, что фронт волны распространяется под некоторым углом к продольной оси волновода. При значении $y_0=0.5$ фронт волны параллелен продольной оси волновода.

Влияние параметра N :

Фиксируем $\varepsilon=0.00001$, $k=15$, $y_0=0.5$.

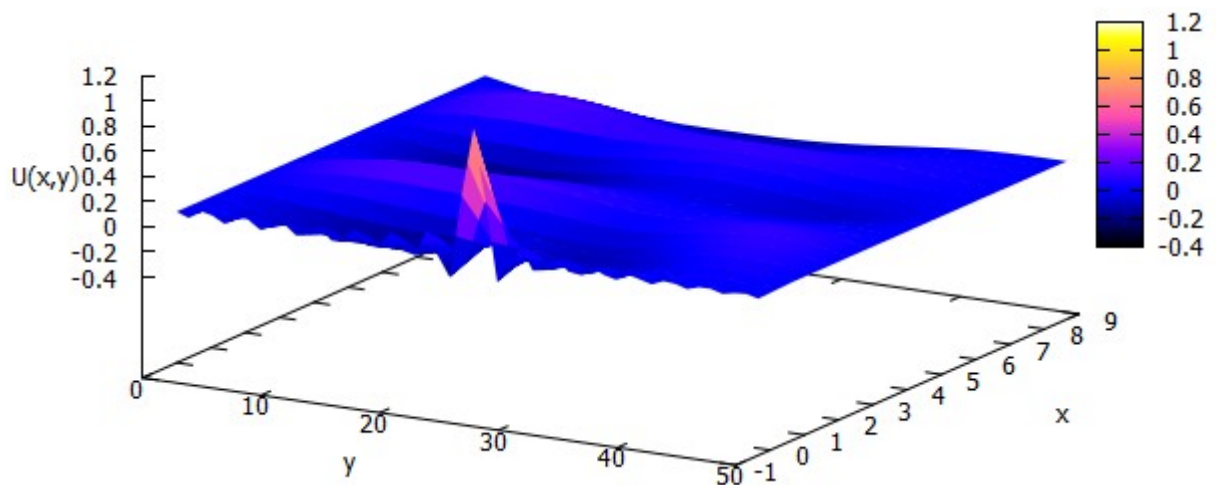


Рис.15 $N=100$

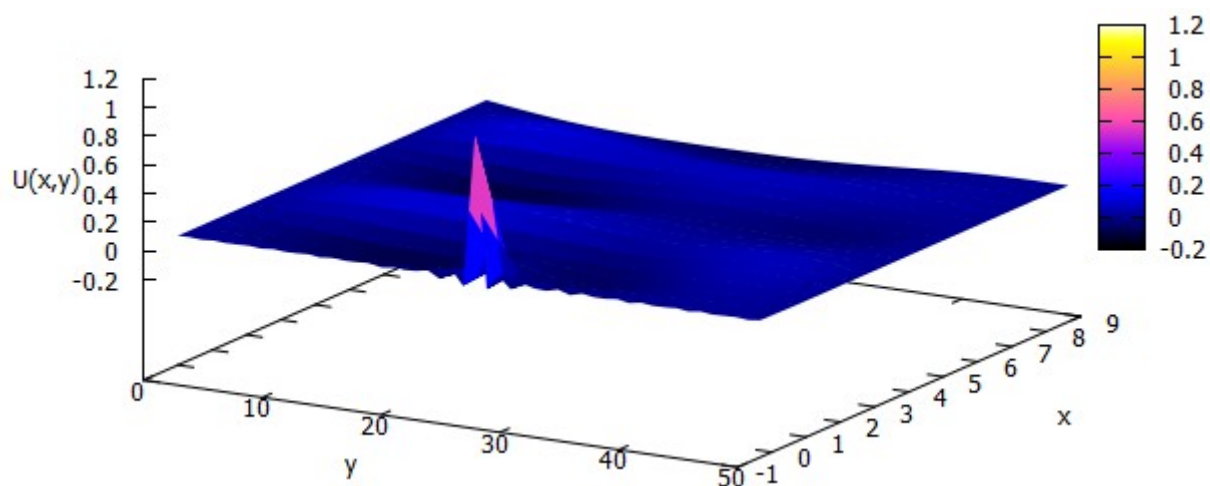


Рис.16 $N=500$

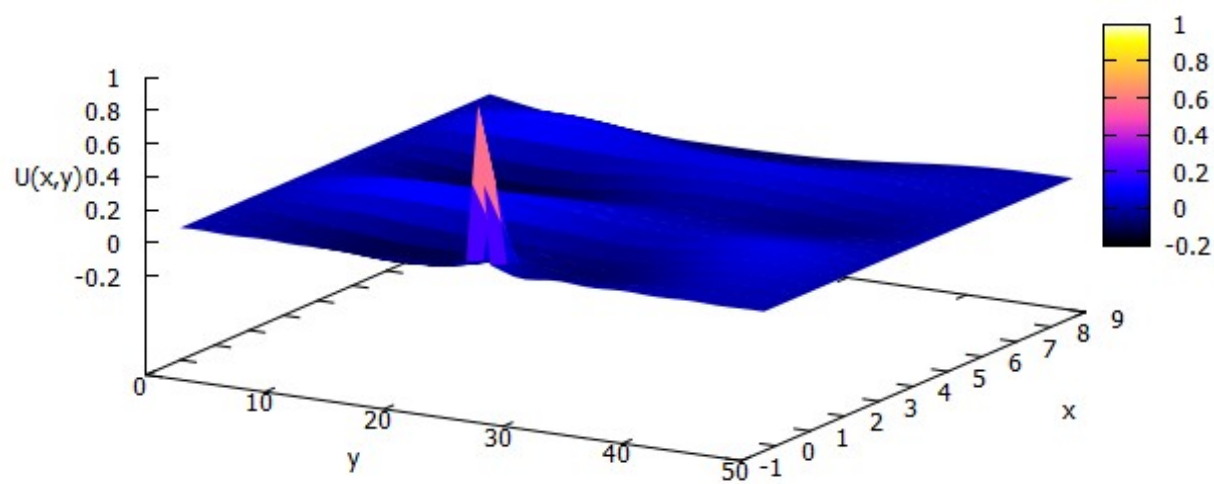


Рис.17 $N=1000$

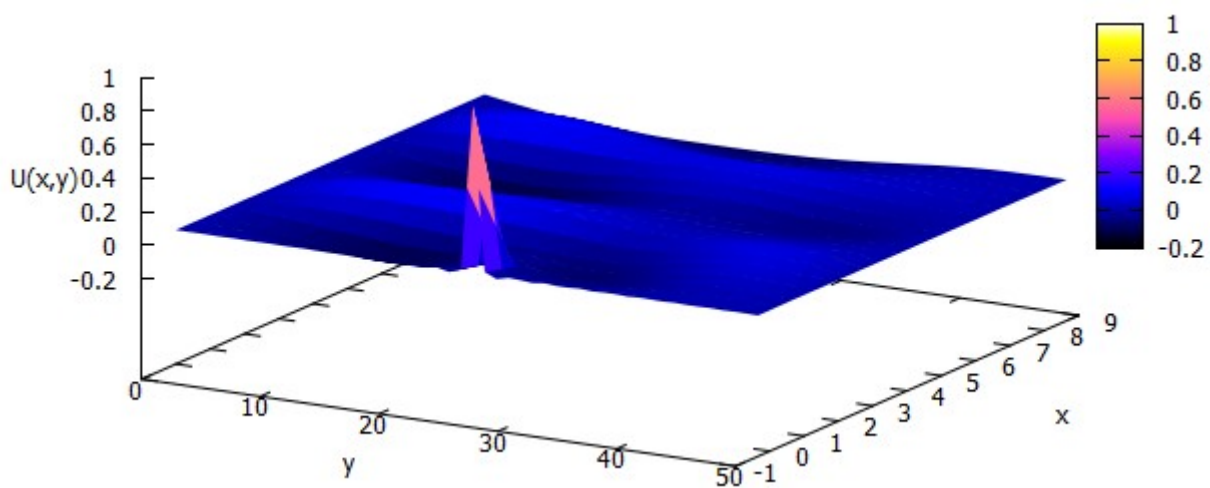


Рис.18 $N=2000$

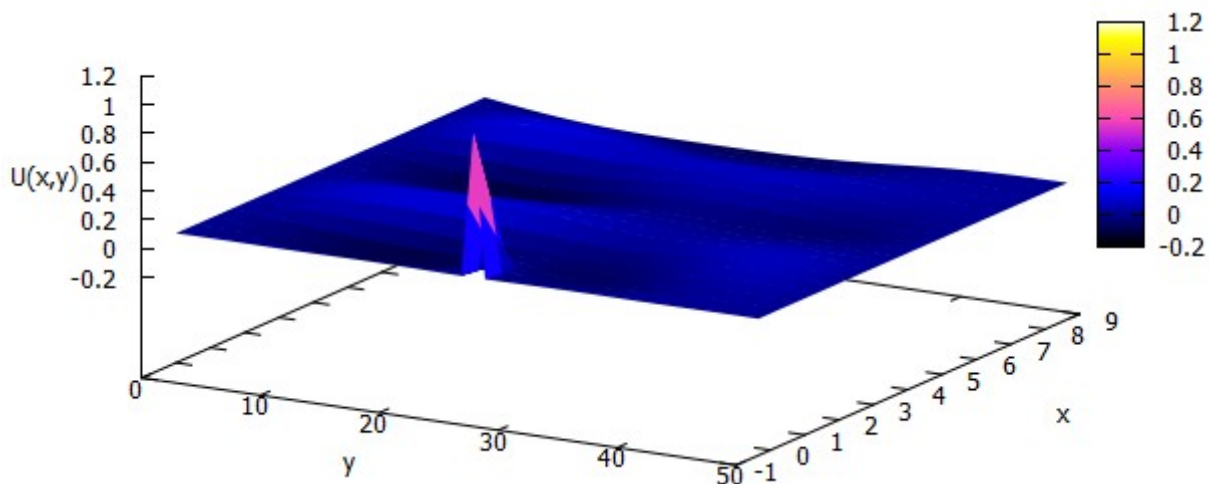


Рис.19 $N=5000$

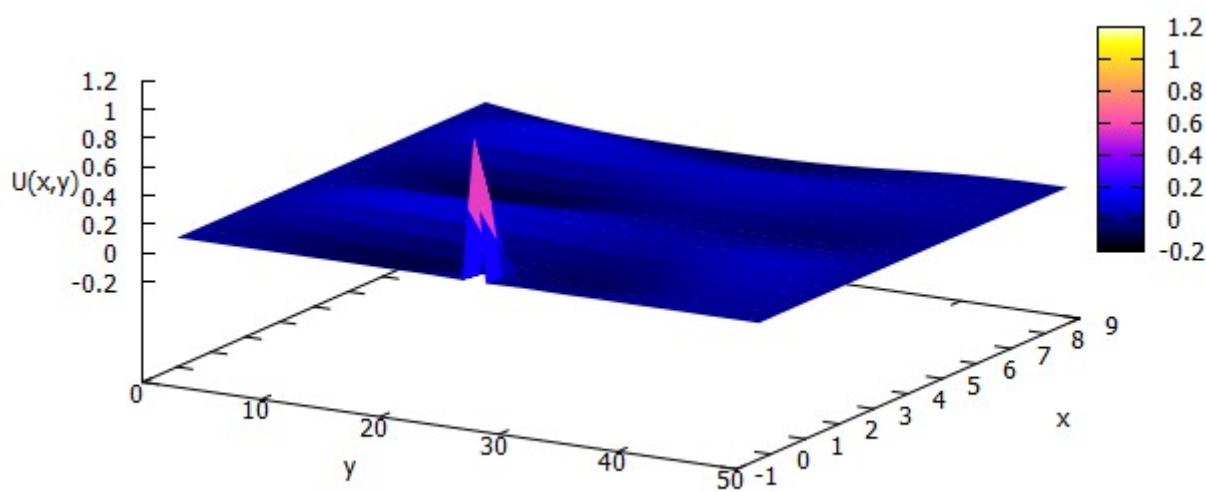


Рис.20 $N=10000$

Параметр N влияет на точность аппроксимации δ -функции и на амплитуду возникающих колебаний. С ростом N уменьшается амплитуда. При его малых значениях можно наблюдать осцилляции на границе, что связано с аппроксимацией через тригонометрические ряды. Анализируя рисунки, можно добавить, что варьирование данного параметра практически не влияет на картину распределения волн.

Влияние малого параметра ε :

Фиксируем $N=10000$, $k=15$, $y_0=0.5$.

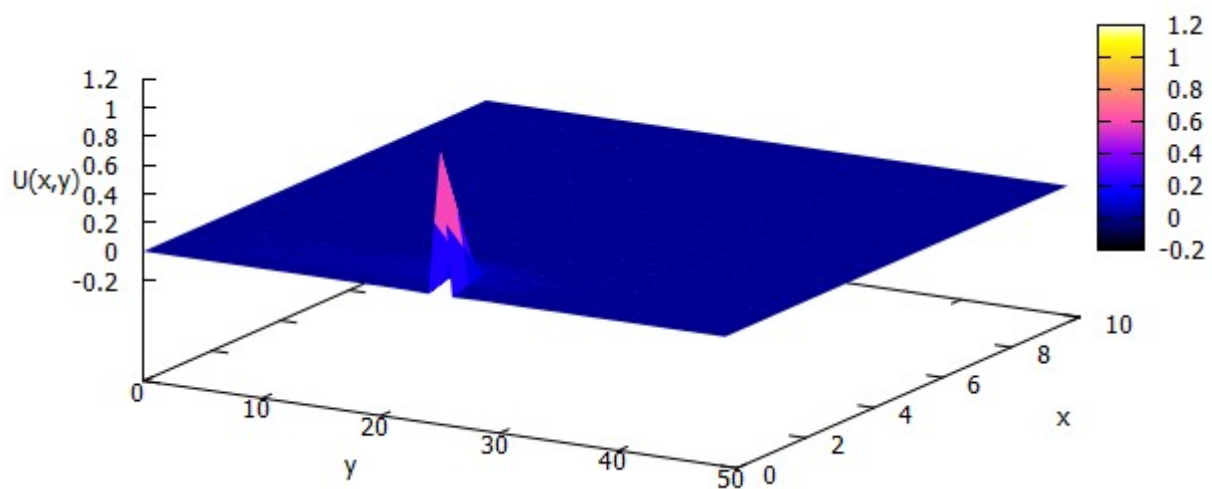


Рис.21 $\varepsilon=1.0$

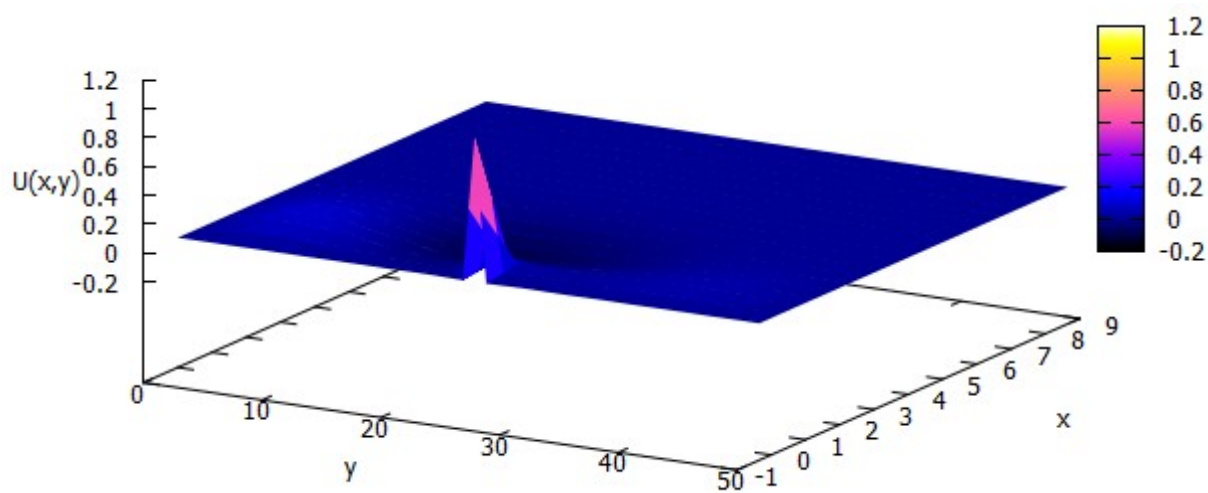


Рис.22 $\varepsilon=0.01$

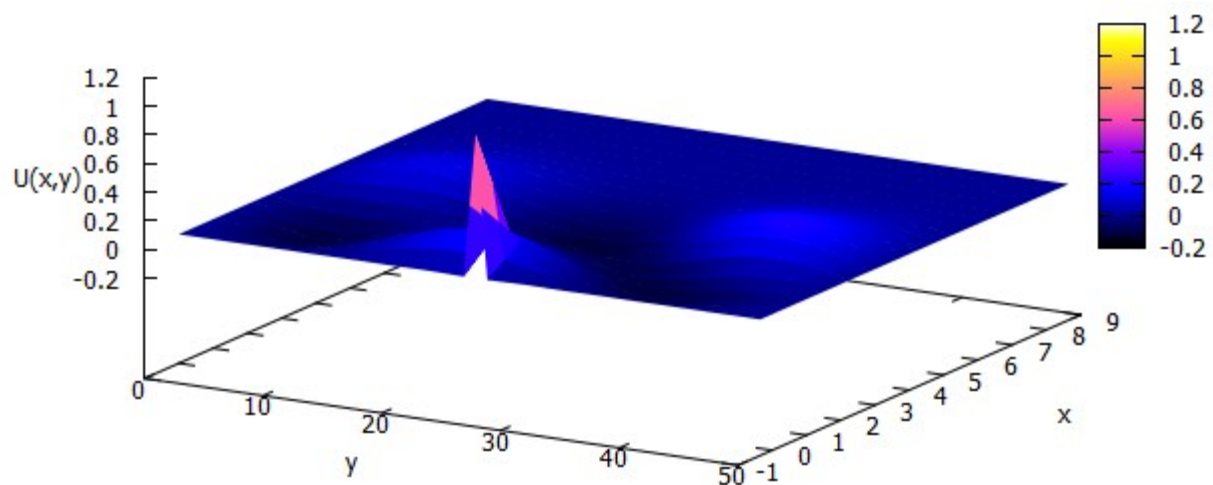


Рис.23 $\varepsilon = 0.001$

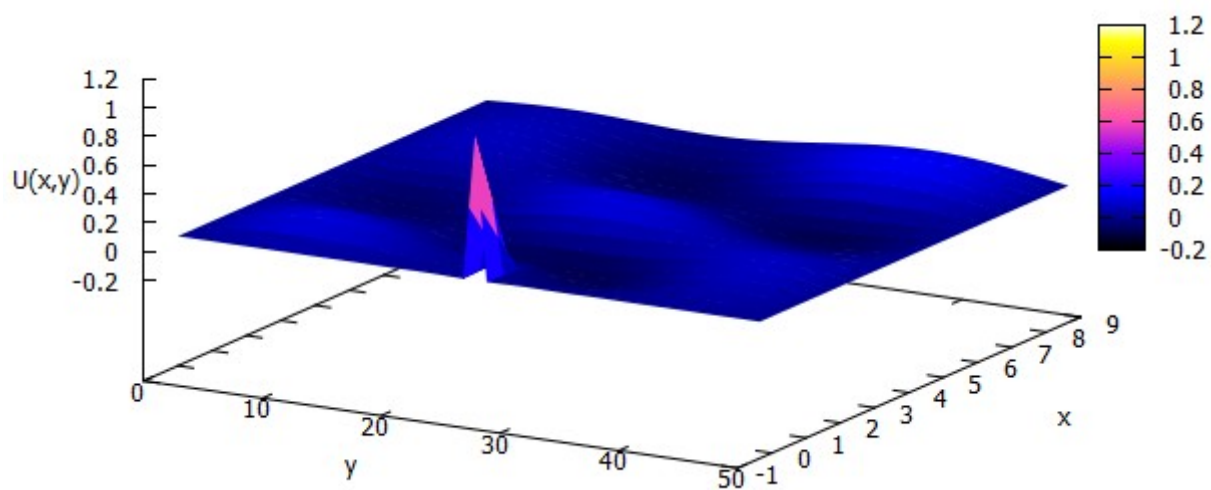


Рис.24 $\varepsilon = 0.0001$

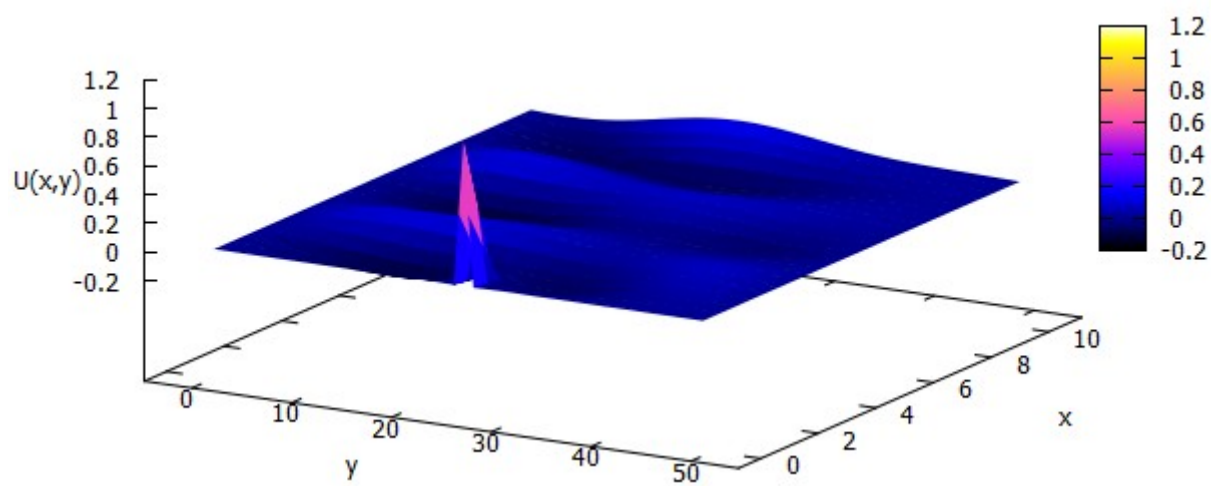


Рис.25 $\varepsilon = 0.00000001$

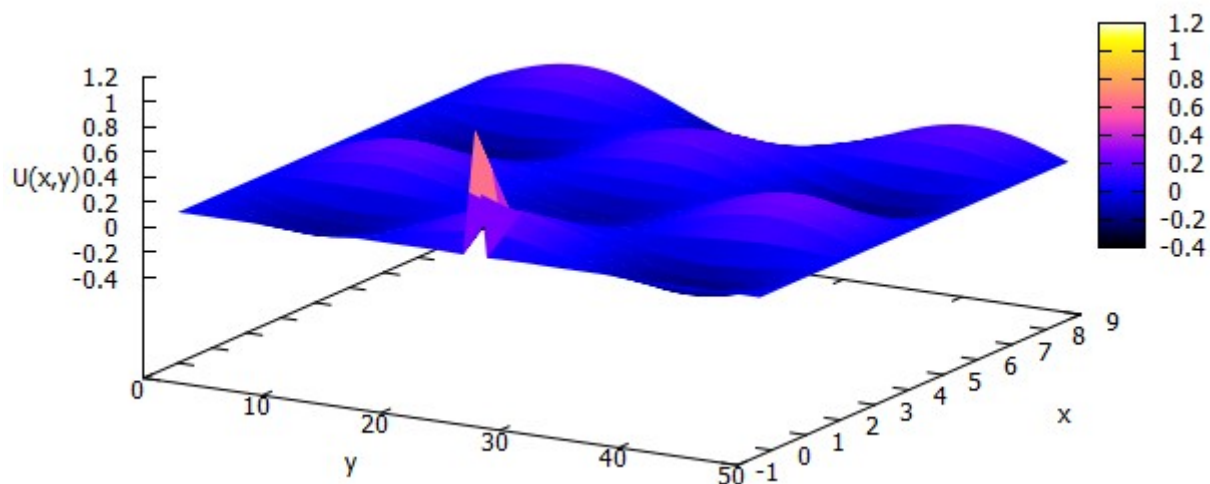


Рис.26 $\varepsilon=0.00001$

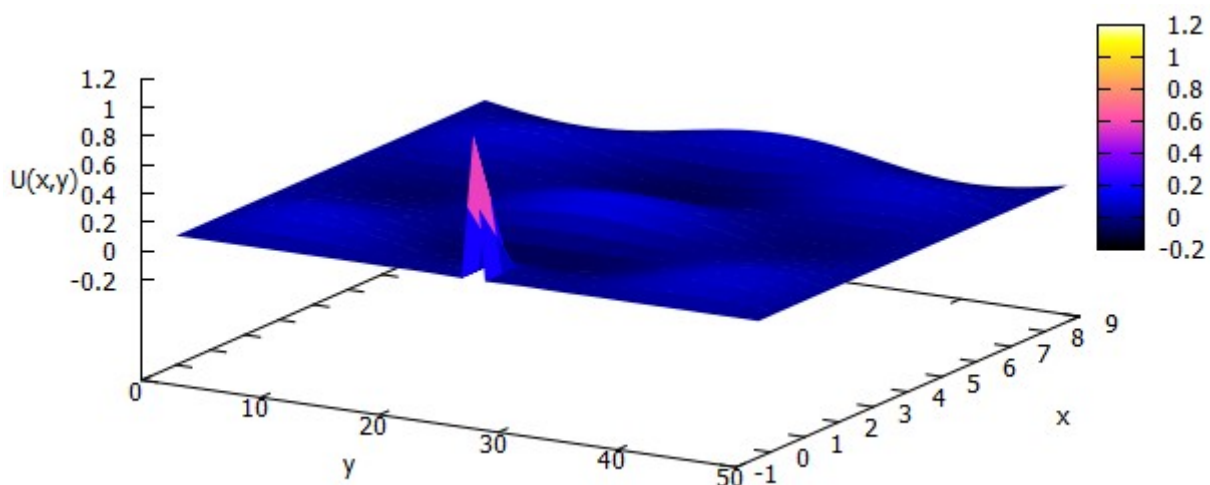


Рис.27 $\varepsilon=0$

Анализируя графики, делаем вывод о том, что параметр ε влияет на распространение волн: при уменьшении ε волны распространяются более равномерно и симметрично относительно продольной оси волновода, что является причиной того, что при приближении ε к нулю, уравнение переходит к стандартному виду $u_{xx}+u_{yy}+k^2u=0$, решение которого представляется в виде тригонометрического ряда. При больших значениях ε усиливается влияние неоднородной части $\varphi(y)$, что служит причиной неравномерному распространению колебаний вдоль оси волновода и затуханию волн, т.е. расстояние распространения тем меньше, чем больше ε .

Влияние параметра k :

Фиксируем $N=10000$, $\varepsilon=0.00001$, $y_0=0.5$.

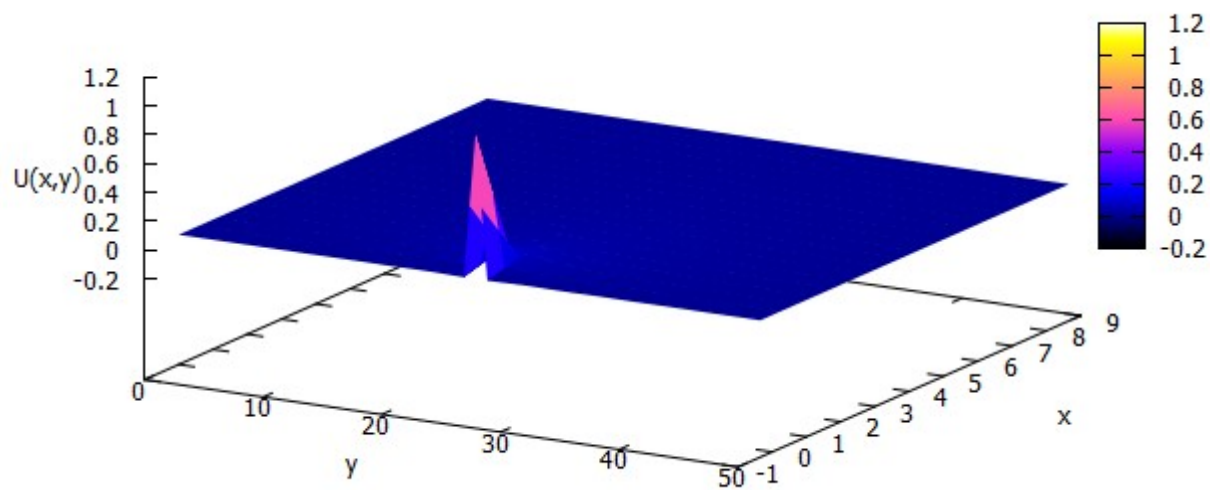


Рис.28 $k=1$

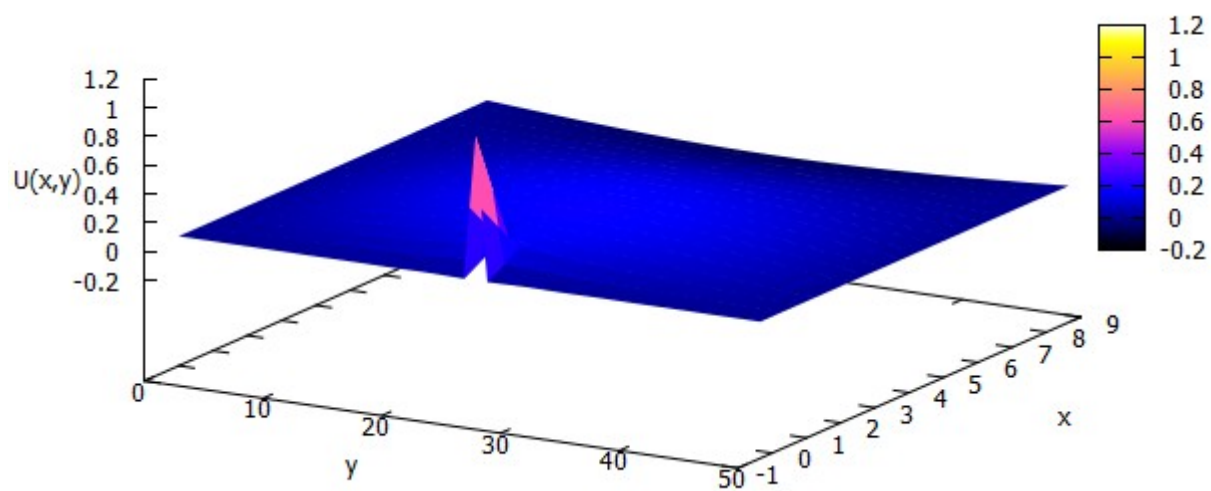


Рис.29 $k=5$

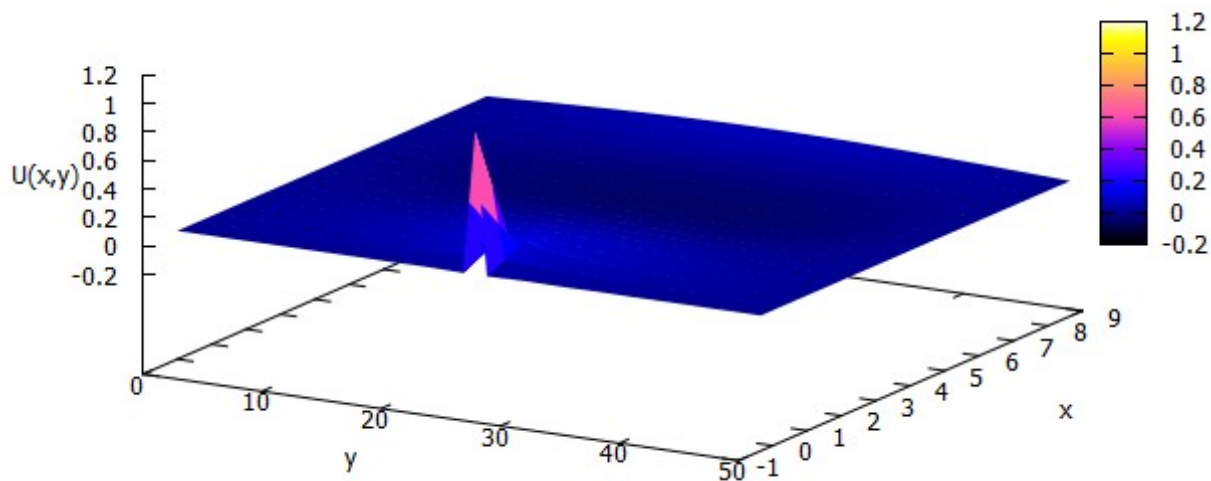


Рис.30 $k=8$

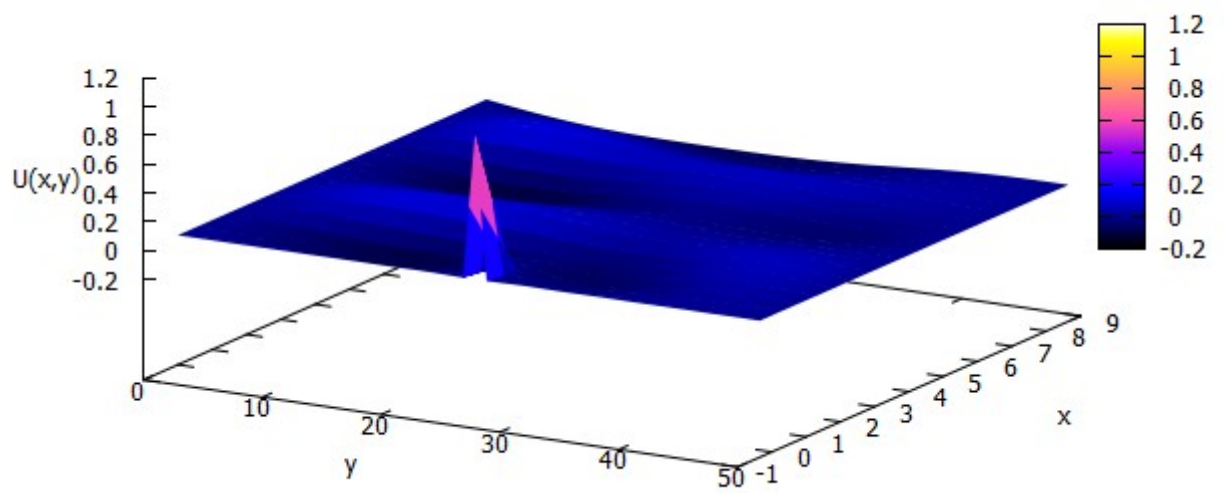


Рис.31 $k=15$

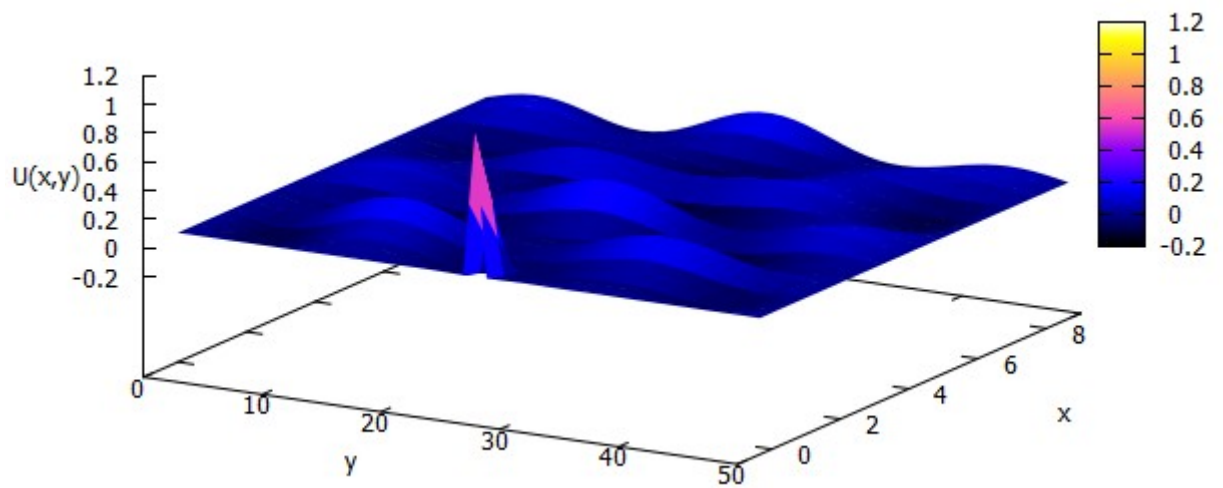


Рис.32 $k=20$

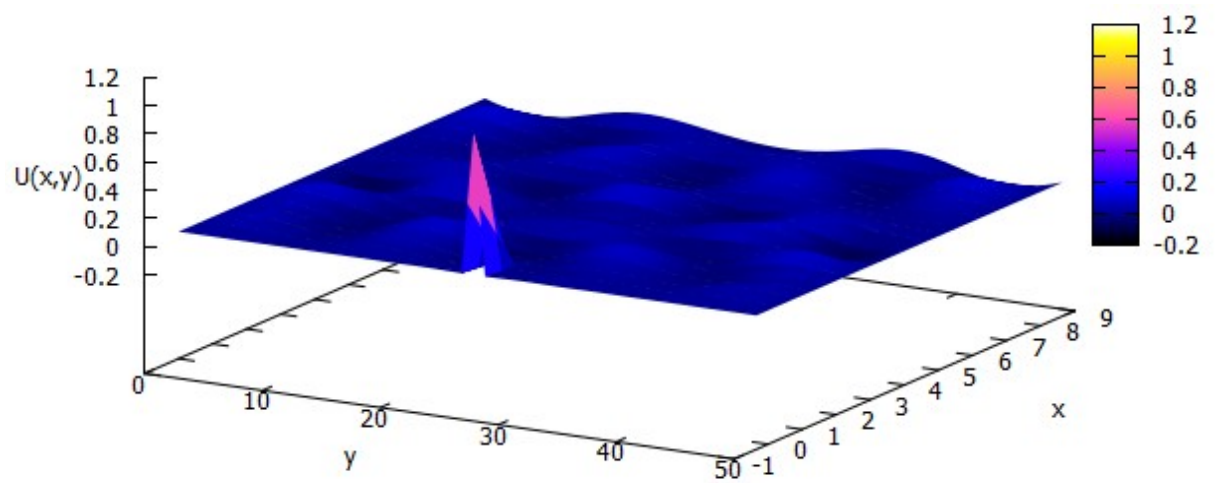


Рис.33 $k=25$

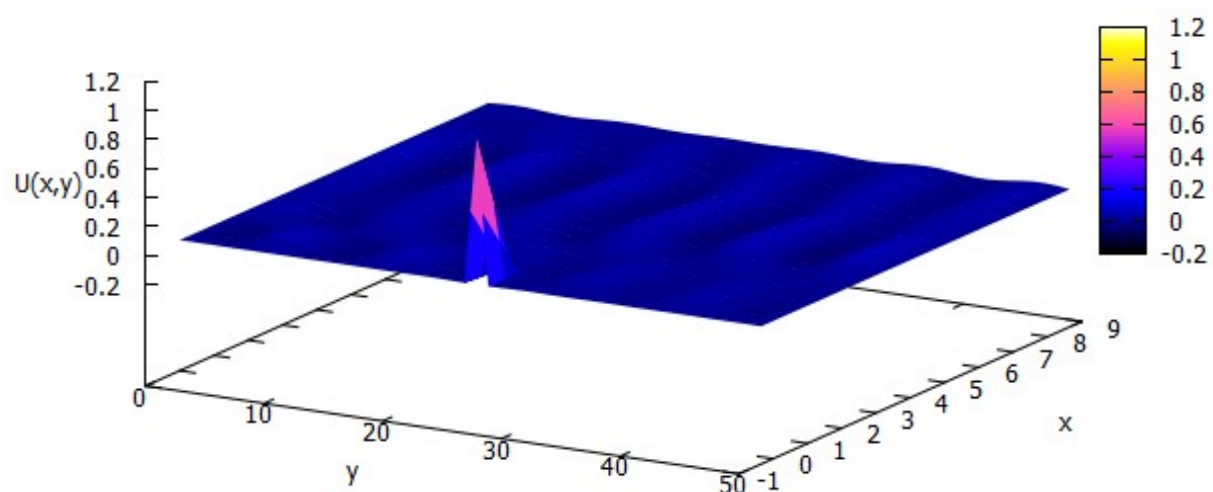


Рис.34 $k=35$

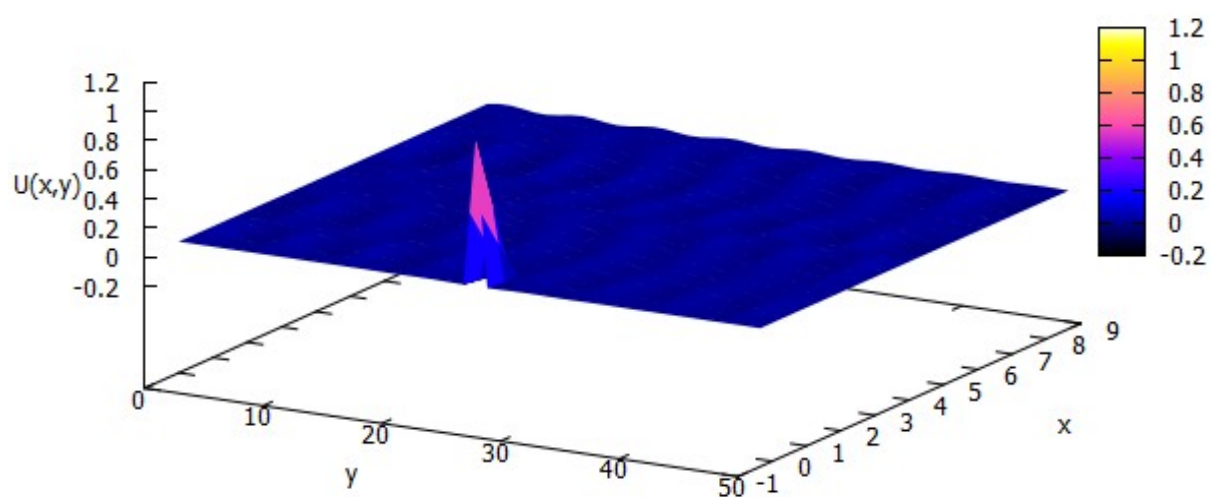


Рис.35 $k=50$

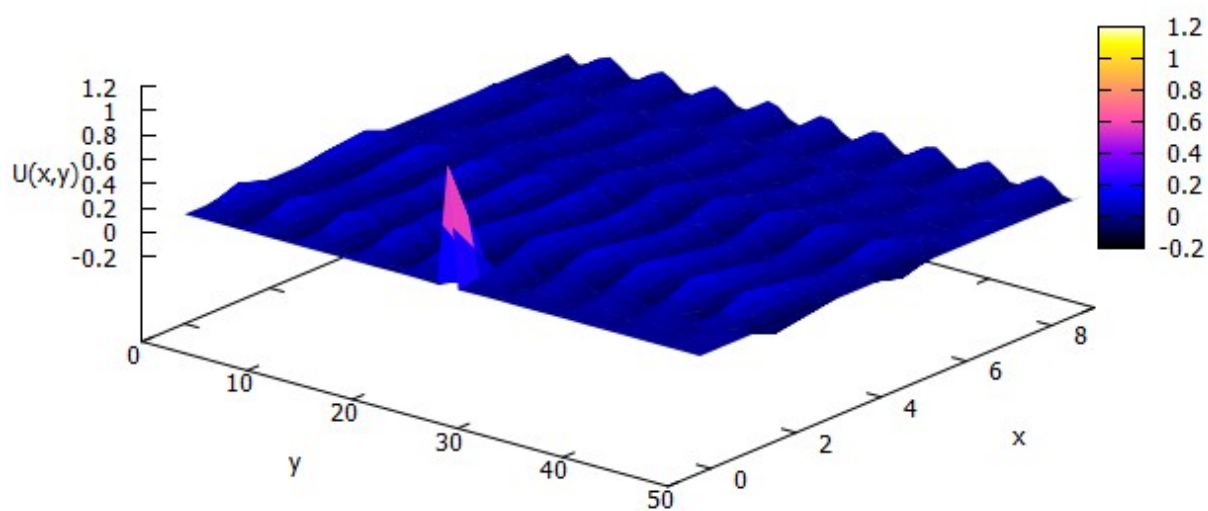


Рис.36 $k=60$

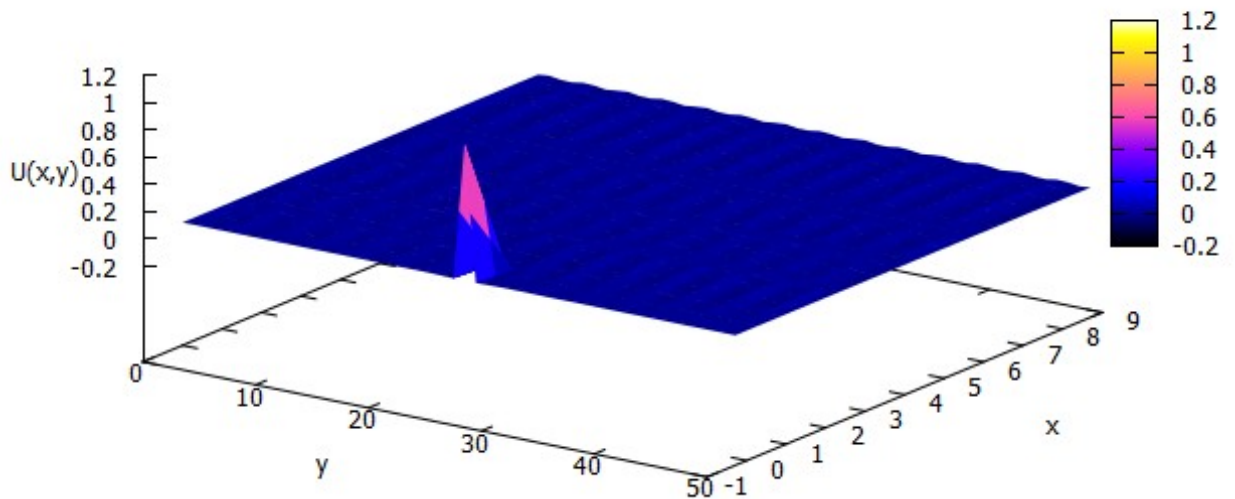


Рис.37 $k=80$

Получили, что варьирование параметра k влияет на частоту и амплитуду возмущений. При $k < 10$ наблюдаем лишь одну волну. С ростом параметра k увеличивается количество волн в рассматриваемой области. Однако с расстоянием возмущения затухают, по причине неоднородности волновода. При малых изменениях k на полученных графиках практически не наблюдаются изменения амплитуды.

Влияние параметра L :

Фиксируем $N=10000$, $\varepsilon=0.0000000001$, $k=15$, $y_0=0.5$. Шаг сетки постоянен и равен 0,1.

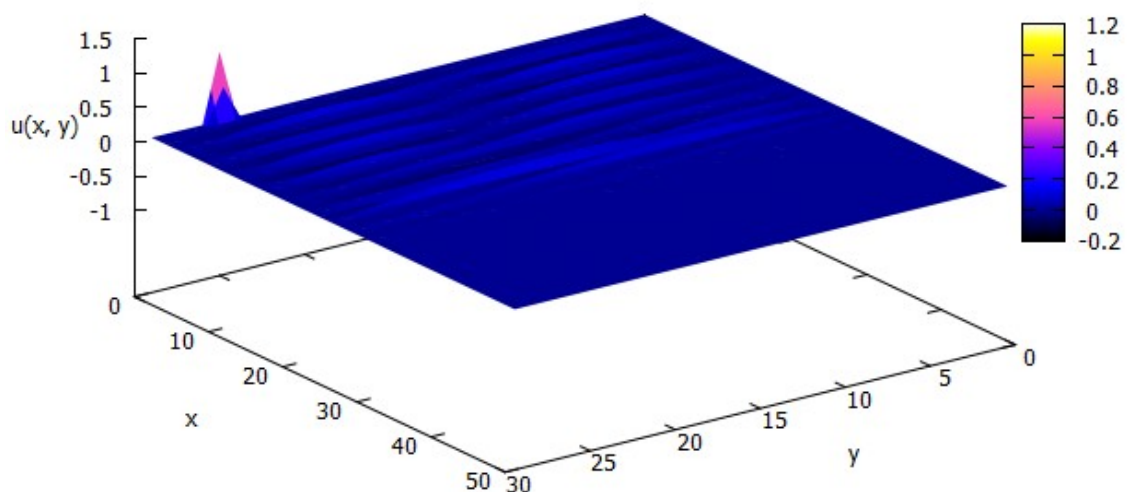


Рис.38 $L=3$

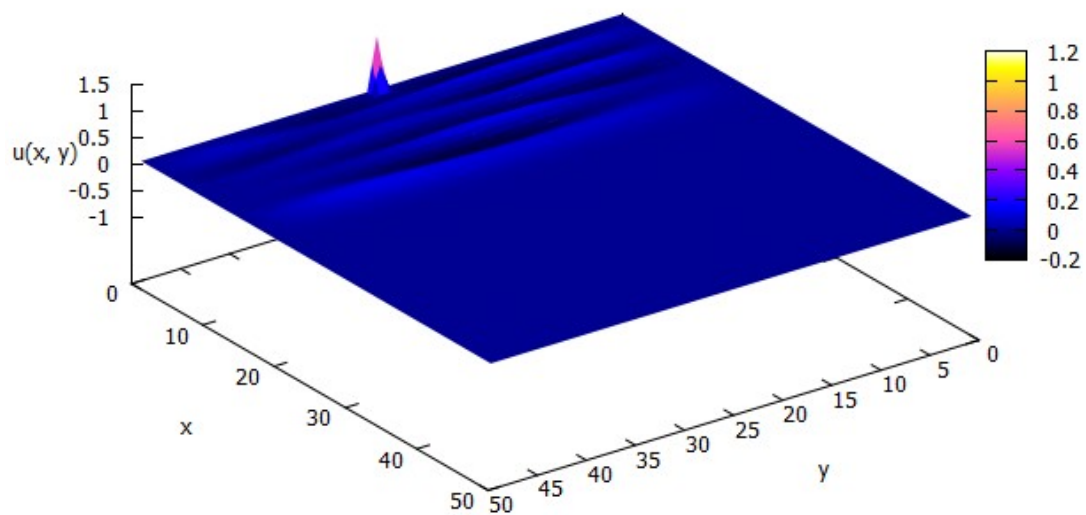


Рис.39 $L=5$

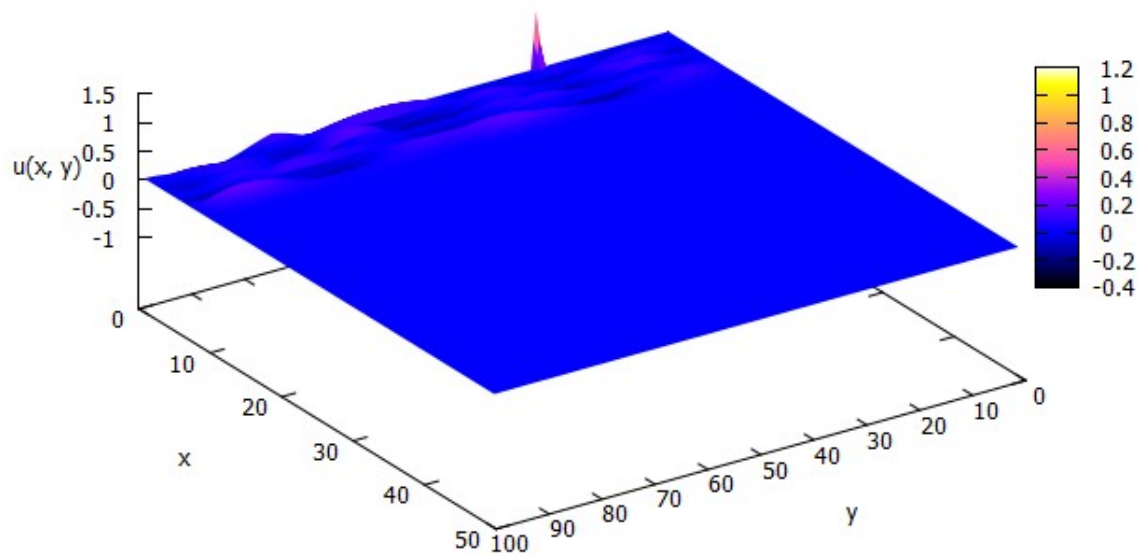


Рис.39 $L=10$

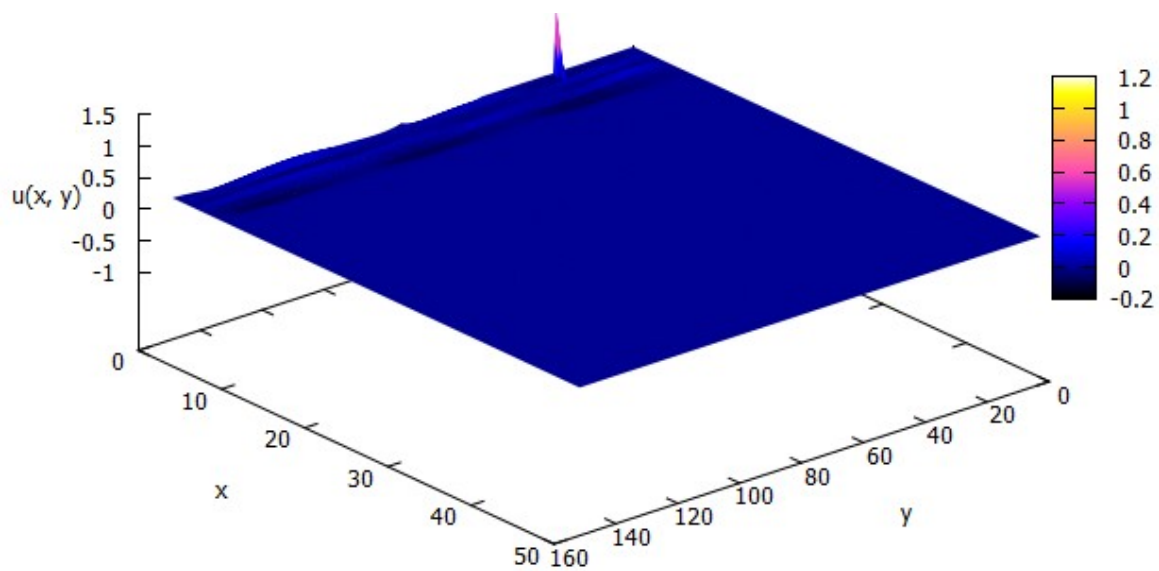


Рис.40 $L=15$

Таким образом, увеличение параметра L влечет изменение количества порождаемых волн, а также их амплитуды. При увеличении значений параметра наблюдаются затухания волн.

Вывод.

В ходе выполнения лабораторной работы было смоделировано распространение электромагнитных волн в неоднородном волноводе на основе решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

Был проведён анализ влияния параметров N , y_0 , ε , k , L .

Параметр N задает степень приближения δ функции. Чем выше значение параметра, тем точнее получается приближение.

Параметр ε отвечает за распространение возмущений по волноводу от левой границы до правой.

Параметр L – это ограничение оси X , при варьировании которого изменяется масштаб отображения волны.

Параметр k отвечает за частоту колебаний, соответственно, чем выше значение этого параметра тем большее количество колебаний наблюдается в результате. При варьировании параметра замечен распад волны на гармоники.

Параметр y_0 – это место положение импульса. При варьировании параметра видно, что волны меняют свою амплитуду.

Приложение.