Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"Уфимский государственный авиационный технический университет"

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

Дисциплина: Методы оптимизации

Отчет по лабораторной работе № 4

Тема: «Линейное целочисленное программирование»

Группа ПМ-453	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Шамаев И.Р.			
Принял	Казакова Т.Г.			

Уфа 2022

Цель работы: приобрести практические навыки решения задач линейного целочисленного программирования методом Гомори.

Задание

1. Ввести дополнительное ограничение к задаче, решенной в лабораторной работе №3. Количество выпускаемой продукции считается в упаковках:
   - пастеризованное молоко – $1\ ^{\text{кг}}/_{\text{уп.}}$;
   - кефир, йогурт – $0.5\ ^{\text{кг}}/_{\text{уп.}}$;
   - сметана – $0.2\ ^{\text{кг}}/_{\text{уп.}}$
2. Решить задачу методом Гомори.
3. По завершении расчетов выполнить проверку правильности численного решения с использованием программных средств линейной оптимизации пакета Maple.

Постановка задачи.

Пусть $x_1 -$ пастеризованное молоко (кг), x_2 – кефир(кг), x_3 – сметана(кг), x_4 – йогурт(кг). Цена реализации пастеризованного молока – 24, кефира – 27, сметаны – 138, йогурта – $25\ ^{\text{руб.}}/_{\text{кг}}$. С учетом дополнительного ограничения получим: цена реализации пастеризованного молока – 24, кефира – 13.5, сметаны – 27.6, йогурта – $12.5\ ^{\text{руб.}}/_{\text{уп.}}$.

Чтобы обеспечить максимальную выручку необходимо решить задачу оптимизации:

$$24x_1 + 13.5x_2 + 27.6x_3 + 12.5x_4 \to max.$$

Так как поставщики способны поставить не более 14000 кг сырого молока в сутки, получим ограничение на выпускаемую продукцию с учетом необходимого количества сырого молока на каждый вид продукции:

$$101x_1 + 101\frac{x_2}{2} + 945\frac{x_3}{5} + 85\frac{x_4}{2} \le 1400000.$$

Также необходимо учесть ограничения по времени нагрузки автоматизированных фасовочных линий:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{500} + \dfrac{x_2}{1200} \le 21, \\ \dfrac{x_3}{150} + \dfrac{x_4}{30} \le 16. \end{cases}$$

Необходимо учесть и то, что выпуск йогурта не меньше сметаны: $\frac{x_3}{5} - \frac{x_4}{2} \le 0$.

Получим задачу линейного целочисленного программирования в нормальной форме:

$$\begin{cases} 24x_1 + 13.5x_2 + 27.6x_3 + 12.5x_4 \to max, \\ 202x_1 + 101x_2 + 378x_3 + 85x_4 \le 2800000, \\ 12x_1 + 5x_2 \le 126000, \\ x_3 + 5x_4 \le 2400, \\ 2x_3 - 5x_4 \le 0, \\ z_i \epsilon \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Решение поставленной задачи симплекс-методом

Введем искусственные переменные $\bar{x} = (x_5, x_6, x_7, x_8)$. Приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 24x_1 + 13.5x_2 + 27.6x_3 + 12.5x_4 \to max, \\ 202x_1 + 101x_2 + 378x_3 + 85x_4 \le 2800000, \\ 12x_1 + 5x_2 \le 126000, \\ x_3 + 5x_4 \le 2400, \\ 2x_3 - 5x_4 \le 0, \\ z_i \epsilon \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$c = (24, 13.5, 27.6, 12.5, 0, 0, 0, 0);$$

$$b = (2800000, 126000, 2400, 0);$$

$$A = \begin{pmatrix} 202 & 101 & 378 & 85 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим задачу в канонической форме:

$$\begin{cases} \langle c, x \rangle \to max, \\ Ax = b. \end{cases}$$

Приведем исходную симплексную таблицу:

Таблица 1.

C	24	13,5	27,6	12,5	0	0	0	0	0
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**
x5	202	101	378	85	1	0	0	0	2800000
x6	12	5	0	0	0	1	0	0	126000
x7	0	0	1	5	0	0	1	0	2400
x8	0	0	2	-5	0	0	0	1	0
Δ_i	-24	-13,5	-27,6	-12,5	0	0	0	0	0

Спустя шесть итераций симплексная таблица имеет вид:

Таблица 2

C	24	13,5	27,6	12,5	0	0	0	0	0
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**
x2	2,4	1	0	0	0	0,2	0	0	25200
x8	0,33573	0	0	0	-0,00831	0,16786	1,14127	1	621,60664
x4	0,02238	0	0	1	-0,00055	0,01119	0,20941	0	361,44044
x3	-0,11191	0	1	0	0,00277	-0,05595	-0,04709	0	592,79778
Δ_i	5,59102	0	0	0	0,06952	1,29551	1,318	0	361079,22437

Таким образом, мы получили оптимальное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 25200$, $x_3 = 592{,}79778$, $x_4 = 361{,}44044$.

Оптимальное значение целевой функции:$\mathrm{F} = 361079{,}22437$.

Оптимальный план: $[0, 25200, 592.79778, 361.44044, 0, 0, 0, 621.60664]$

Решается задача целочисленного программирования, а некоторые из полученных значений переменных $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ являются дробными. Поэтому необходимо воспользоваться методом Гомори для нахождения целочисленного решения.

Метод Гомори

В полученном оптимальном плане находим первую строку, отвечающую за одну из переменных $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и для которой эта переменная является дробной. По Таблице 2 видно, что этой строкой является строка $x3$. Строим по этой строке дополнительное ограничение:

$$\{592{,}79778\} - \{-0.11191\}x_1 - \{0{,}00277\}x_5 - \{-0{,}05595\}x_6 - \{-0{,}04709\}x_7 \leq 0$$

$$0.798 - 0.888x_1 - 0{,}003x_5 - 0{,}944x_6 - 0{,}953x_7 \leq 0$$

Вводим дополнительную переменную x_9:

$$0.798 - 0.888x_1 - 0{,}003x_5 - 0{,}944x_6 - 0{,}953x_7 + x_9 = 0$$

В Таблице 3 представлена симплексная таблица с полученным дополнительным ограничением.

Таблица 3– Симплексная таблица с первым дополнительным ограничением

С	24	13,5	27,6	12,5	0	0	0	0	0	0
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**x9**	**b**
x2	2,4	1,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	25200,0
x8	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	1,1	1,0	0,0	621,6
x4	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	361,4
x3	-0,1	0,0	1,0	0,0	0,0	-0,1	0,0	0,0	0,0	592,8
x9	-0,888	0,000	0,000	0,000	-0,003	-0,944	-0,953	0,000	1,000	-0,798
Δ_i	5,6	0,0	0,0	0,0	0,1	1,3	1,3	0,0	0,0	361079,2

Ведущей строкой выбираем только что добавленную строку. В качестве ведущего столбца выбираем тот, в котором Δ_i имеет наименьшее положительное значение.

С	24	13,5	27,6	12,5	0	0	0	0	0	0
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**x9**	**b**
x2	2,400	1,000	0,000	0,000	0,000	0,200	0,000	0,000	0,000	25200,000
x8	3,000	0,000	0,000	0,000	0,000	3,000	4,000	1,000	-3,000	624,000
x4	0,199	0,000	0,000	1,000	0,000	0,199	0,399	0,000	-0,199	361,599
x3	-1,000	0,000	1,000	0,000	0,000	-1,000	-1,000	0,000	1,000	592,000
x5	320,610	0,000	0,000	0,000	1,000	340,812	344,011	0,000	-361,011	288,007
Δ_i	-16,716	0,000	0,000	0,000	0,000	-22,417	-22,617	0,000	25,118	361059,18

Получаем нецелочисленное решение $X = (0;\ 25200; 592; 361{,}599)$, поэтому введем новое ограничение:

$$\{361{,}599\} - \{0{,}199\}x_1 - \{0{,}199\}x_6 - \{0{,}399\}x_7 - \{-0{,}199\}x_9 \leq 0$$

$$0{,}599 - 0{,}199x_1 - 0{,}199x_6 - 0{,}399x_7 - 0{,}801x_9 \leq 0$$

Вводим дополнительную переменную x_{10}:

$$0{,}599 - 0{,}199x_1 - 0{,}199x_6 - 0{,}399x_7 - 0{,}801x_9 + x_{10} = 0$$

В Таблице 4 представлена симплексная таблица с полученным дополнительным ограничением.

Таблица 4– Симплексная таблица со вторым дополнительным ограничением

C	24	13,5	27,6	12,5	0	0	0	0	0	0	0
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**x9**	**x10**	**b**
x2	2,4	1,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	25200,0
x8	3,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,0	4,0	1,0	-3,0	0,0	624,0
x4	0,199	0,000	0,000	1,000	0,000	0,199	0,399	0,000	-0,199	0,000	361,599
x3	-1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	-1,0	-1,0	0,0	1,0	0,0	592,0
x5	320,6	0,0	0,0	0,0	1,0	340,8	344,0	0,0	-361,0	0,0	288,0
x10	-0,199	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,199	-0,399	0,000	-0,801	1,000	-0,599
Δ_i	-16,7	-10,5	3,6	-11,5	-24,0	-46,4	-46,6	-24,0	1,1	-24,0	361035,2

Ведущей строкой выбираем только что добавленную строку. В качестве ведущего столбца выбираем тот, в котором Δ_i имеет наименьшее положительное значение.

C	24	13,5	27,6	12,5	0	0	0	0	0	0	0
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**x9**	**x10**	**b**
x2	2,4	1,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	25200,0
x8	2,4	0,0	0,0	0,0	0,0	2,4	2,8	1,0	0,0	-3,7	626,2
x4	0,2	0,0	0,0	1,0	0,0	0,2	0,3	0,0	0,0	-0,2	361,7
x3	-0,801	0,000	1,000	0,000	0,000	-0,801	-0,601	0,000	0,000	1,248	591,253
x5	248,9	0,0	0,0	0,0	1,0	269,1	200,1	0,0	0,0	-450,5	557,8
x9	0,248	0,000	0,000	0,000	0,000	0,248	0,497	0,000	1,000	-1,248	0,747
Δ_i	-11,7	-10,5	3,6	-11,5	-24,0	-41,4	-36,6	-24,0	-24,0	7,3	361016,4

Получаем нецелочисленное решение $X = (0;\ 25200; 591{,}253; 361{,}7)$, поэтому введем новое ограничение:

$$\{591{,}253\} - \{-0{,}801\}x_1 - \{1\}x_3 - \{-0{,}801\}x_6 - \{-0{,}601\}x_7 - \{1{,}248\}x_{10} \leq 0$$

$$0.253 - 0{,}199x_1 - 0{,}199x_6 - 0.399x_7 - 0{,}248x_{10} \leq 0$$

Вводим дополнительную переменную x_{11}

$$0.253 - 0{,}199x_1 - 0{,}199x_6 - 0.399x_7 - 0{,}248x_{10} + x_{11} = 0$$

В Таблице 5 Симплексная таблица с третьим дополнительным ограничением.

C	24	13,5	27,6	12,5	0	0	0	0	0	0	0	0
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**x9**	**x10**	**x11**	**b**
x2	2,4	1,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	25200,0
x8	2,4	0,0	0,0	0,0	0,0	2,4	2,8	1,0	0,0	-3,7	0,0	626,2
x4	0,2	0,0	0,0	1,0	0,0	0,2	0,3	0,0	0,0	-0,2	0,0	361,7
x3	-0,801	0,000	1,000	0,000	0,000	-0,801	-0,601	0,000	0,000	1,248	0,000	591,253
x5	248,9	0,0	0,0	0,0	1,0	269,1	200,1	0,0	0,0	-450,5	0,0	557,8
x9	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,5	0,0	1,0	-1,2	0,0	0,7
x11	-0,199	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,199	-0,399	0,000	0,000	-0,248	1,000	-0,253
Δ_i	-11,7	0,0	0,0	0,0	0,0	-17,4	-12,6	0,0	0,0	31,3	0,0	361040,4

Ведущей строкой выбираем только что добавленную строку. В качестве ведущего столбца выбираем тот, в котором Δ_i имеет наименьшее положительное значение.

C	24	13,5	27,6	12,5	0	0	0	0	0	0	0	0
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**x9**	**x10**	**x11**	**b**
x2	2,4	1,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	25200,0
x8	5,4	0,0	0,0	0,0	0,0	5,4	8,8	1,0	0,0	0,0	-15,1	630,1
x4	0,4	0,0	0,0	1,0	0,0	0,4	0,7	0,0	0,0	0,0	-1,0	362,0
x3	-1,8	0,0	1,0	0,0	0,0	-1,8	-2,6	0,0	0,0	0,0	5,0	590,0
x5	610,2	0,0	0,0	0,0	1,0	630,3	924,9	0,0	0,0	0,0	-1818,2	1017,4
x9	1,2	0,0	0,0	0,0	0,0	1,2	2,5	0,0	1,0	0,0	-5,0	2,0
x10	0,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,8	1,6	0,0	0,0	1,0	-4,0	1,0
Δ_i	-36,9	0,0	0,0	0,0	0,0	-42,6	-63,0	0,0	0,0	0,0	126,5	361008,4

Получаем целочисленное значения $(0; 25200; 590; 364)$. Они являются целочисленными, следовательно, полученное решение является решением задачи линейного целочисленного программирования.

$$F = 0 * 24 + 25200 * 13.5 + 590 * 27.6 + 364 * 12.5 = 361031$$

Экономическая интерпретация:

По оптимальному плану, можно сказать, что для максимальной прибыли, нужно изготовить 25200 упаковок кефира, тем самым мы получим за него прибыль 340200 руб. Сметана на 590 упаковок, что даст нам прибыль 16281 руб. Изготовить йогурт на 364 упаковок, мы получим прибыль 4550 руб. Молоко пастеризованное нам не дает прибыли, его лучше не изготавливать.

Вывод

Таким образом, в ходе лабораторной работы были приобретены практические навыки решения задач линейного целочисленного программирования с использованием метода Гомори. Результаты проверены в мат. пакете Maple.

Ответы на контрольные вопросы:

МЕТОД ГОМОРИ

Приведите основные этапы решения задачи линейного целочисленного программирования методом Гомори.

1) Привести задачу к канонической форме.
2) Решить задачу симплекс-методом. Если $x \in \mathbb{Z}^n$, то решение получено (если обнаружилась неразрешимость задачи, то неразрешима и задача целочисленного программирования). В противном случае перейти к следующему шагу.
3) К ограничениям задачи добавляем новое ограничение, обладающее следующими свойствами:
   - ограничение линейное;
   - отсекает найденное целочисленное оптимальное решение;
   - не отсекает ни одного целочисленного решения.

   Выбираем в оптимальной таблице нецелую переменную x_i с максимальной дробной частью $\{x_i\}$. По соответствующей этой переменной строке в симплексной таблице строим ограничение Гомори

   $$\{x_i\} = \sum_{j \in \text{НБ}} \{a_i^j\} x_j - g^*, \;\; g^* \geq 0,$$

   g^* – новая переменная, НБ – небазисные переменные.
4) Расширить оптимальную таблицу на одну строку и один столбец, записав в нее дополнительное ограничение.
5) Выбрать за дополнительную базисную переменную ту переменную из числа старых небазисных, которой соответствует наименьшая оценка $\Delta_j > 0$, и перейти к шагу 2.

СИМПЛЕКС-МЕТОД

Приведите основные этапы решения задачи линейного программирования симплекс-методом.

1) Привести задачу к канонической форме.
2) Отыскать крайнюю точку $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0), x_i > 0, i = \overline{1,m}$ множества допустимых элементов D.
3) Построить симплексную таблицу для начальной крайней точки x:

	c		c_1	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_{j^*}	$\cdots$	c_n	t
базис		b	a^1	$\cdots$	a^m	a^{m+1}	$\cdots$	a^{j^*}	$\cdots$	a^n	
a_1	c_1	b_1	1	$\cdots$	0	a_1^{m+1}	$\cdots$	$a_1^{j^*}$	$\cdots$	a_1^n	t_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{i^*}	c_{i^*}	b_{i^*}	0	$\cdots$	0	$a_{i^*}^{m+1}$	$\cdots$	$a_{i^*}^{j^*}$	$\cdots$	$a_{i^*}^n$	t_{i^*}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	c_m	b_m	0	$\cdots$	1	a_m^{m+1}	$\cdots$	$a_m^{j^*}$	$\cdots$	a_m^n	t_m
z		$\sum_{i=1}^m c_i b_i$	c_1	$\cdots$	c_m	$\sum_{i=1}^m c_i a_i^{m+1}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^m c_i a_i^{j^*}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^m c_i a_i^n$	
Δ			0	$\cdots$	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$	$\cdots$	$z_{j^*} - c_{j^*}$	$\cdots$	$z_n - c_n$	

4) Исследовать симплексную таблицу.

- Если вектор $\Delta \geq 0$, то крайняя точка x – решение задачи.
- Если для некоторого j выполняется $\Delta_j < 0$ и $a_i^j < 0$, то решение задачи $\langle c, x \rangle = +\infty$.
- Пусть в строке Δ имеются отрицательные числа, а соответствующие столбцы a^j содержат положительные числа.

Предположим, что $\min_j \Delta_j = \Delta_{j^*} < 0$. Ясно, что $m + 1 \leq j^* \leq n$. Столбец, соответствующий индексу j^*, называется разрешающим столбцом. Если $\min_j \Delta_j$ достигается на нескольких значениях j, то в качестве разрешающего столбца выбираем столбец с любым таким индексом.

Обозначим $t_i = \left\{ \frac{b_i}{a_i^{j^*}} \middle| a_i^{j^*} > 0 \right\} > 0$. Эти значения t_i ставим соответственно в последнем столбце симплексной таблицы.

Пусть $t_{i^*} = \min_i t_i > 0$. Строка вектора a_{i^*} называется разрешающей. Если $\min_i t_i$ достигается на нескольких значениях i, то в качестве разрешающей строки выбираем любую такую строку. Элемент $a_{i^*}^{j^*}$ называется разрешающим элементом симплексной таблицы.

Далее из числа базисных векторов исключаем вектор a_{i^*}, вместо него берем вектор a_{j^*}. Значение функционала на новой крайней точке с новыми базисными векторами $a_1, \dots, a_{j^*-1}, a_{j^*}, a_{j^*+1}, \dots, a_m$ возрастает на величину $-t_{i^*}\Delta_{j^*}$.

5) Построить новую симплексную таблицу для нового базиса.

Способ построения новой таблицы по предыдущей (правило прямоугольника):

$$b_i' = b_i - \frac{b_{i^*} a_i^{j^*}}{a_{i^*}^{j^*}}, \qquad \left(a_i^j\right)' = a_i^j - \frac{a_{i^*}^j a_i^{j^*}}{a_{i^*}^{j^*}}, \qquad i \neq i^*$$

$$\left(a_{i^*}^{j^*}\right)' = 1, \qquad \left(a_i^{j^*}\right)' = 0, \qquad i \neq i^*, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$b_{i^*}' = \frac{b_{i^*}}{a_{i^*}^{j^*}}, \qquad \left(a_{i^*}^j\right)' = \frac{a_{i^*}^{j^*}}{a_{i^*}^{j^*}}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Далее возвращаемся к пункту 4, пока не придем к решению задачи.