Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

"Уфимский государственный авиационный технический университет"

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

Дисциплина: Математическая статистика

Отчет по лабораторной работе № 4

Тема: «Применение метода статистических испытаний к моделированию винеровского процесса»

Группа ПМ-453	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Шамаев И.Р.			
Принял	Маякова С.А.			

Уфа 2022

Практическая часть

Работа выполнена согласно варианту №13.

Задание

Реализовать модель аддитивных случайных блужданий $x_t = x_0 + \sigma W_t$, где $W_t = \varepsilon \cdot \sqrt{t}$с начальным приближением $x_0 = N$ для моментов времени t=1, 2, 3, … 15+*N*, где *N* – номер по списку.

Для генерации нормально распределенных случайных величин в модели (1.38) использовать: а) метод сумм, б) метод Бокса-Миллера.

Провести 100 испытаний, в каждом из которых рассчитывается последовательность $x_1, x_2, \ldots x_{15+N.}$ По результатам испытаний на каждом временном шаге *t*=1, 2, 3, …15+*N* вычислить выборочное среднее значение

$$\overline{x_t} = \frac{1}{100}\sum_{i=0}^{100} x_t^i$$ и волатильность

$$\sigma_t = \sqrt{D(x_t)} = \sqrt{\frac{1}{100}\sum_{i=0}^{100}(x_t^i - \overline{x_t})^2}$$

Построить графики 5 произвольных выборочных траекторий случайного блуждания, сгенерированных по модели. Рядом с ними построить график одной траектории для модели с подставленной винеровской переменной.

Построить уравнения регрессии выборочного среднего и волатильности как функций от времени. Для выборочного среднего уравнение выбирать из класса линейных функций, а для волатильности – из класса функций $f(t) = a\sqrt{t}$. Насколько точно экспериментальные точки ложатся на графики полученных уравнений регрессии?

Решение:

Задание 1

Генерируем выборку из n=1000 равномерно распределённых случайных чисел. Затем строим её гистограмму и поверх неё строим теоретическую плотность распределения

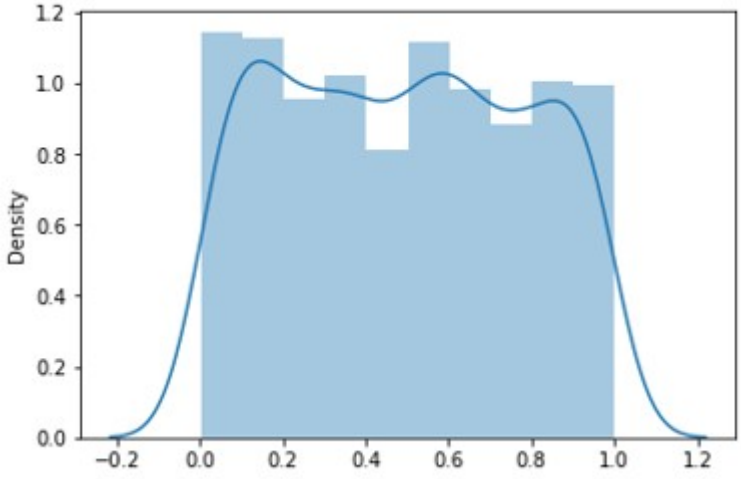


Рисунок 1. Гистограмма выборки из 1000 равномерно распределённых случайных чисел и теоретическая плотность распределения.

Таким образом, из полученного изображения следует, что числа подчиняются равномерному закону распределения.

Далее при четырех и более значениях n (n = 2, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 2000) сгенерируем 1000 выборок объёма n и построим гистограммы распределений их выборочных средних.

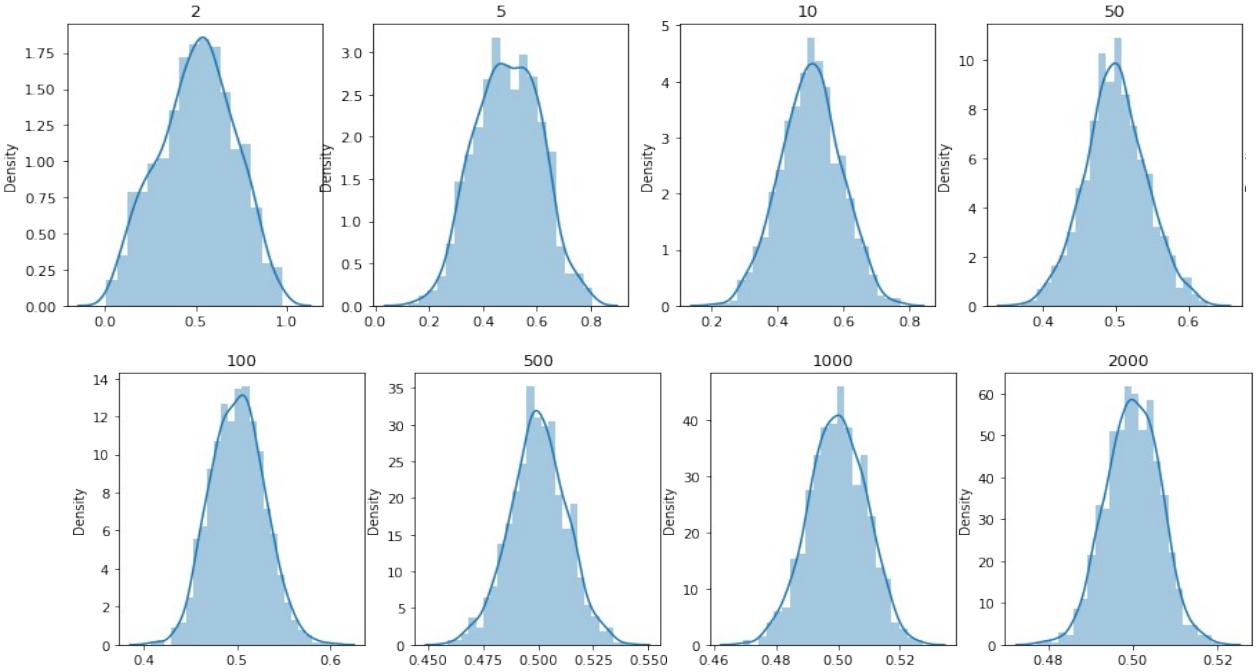


Рисунок 2. Гистограммы распределений выборочных средних выборок объёма

Таким образом, из полученного изображения следует, что у выборочных средних выборок нормальное распределение.

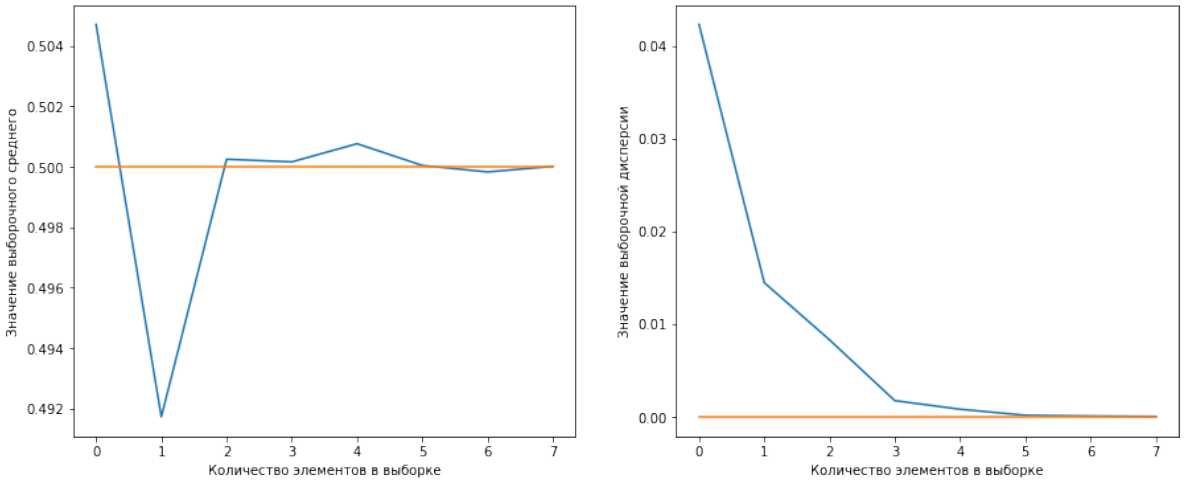


Рисунок 1- Графики изменения выборочного среднего и дисперсии

Далее реализуем метод Бокса-Мюллера в полярной форме. Сгенерируем несколько выборок различного объёма (100, 500, 1000) по методу Бокса-Мюллера, построим гистограмму выборки и нарисуем поверх неё теоретическую плотность распределения нашей случайной величины.

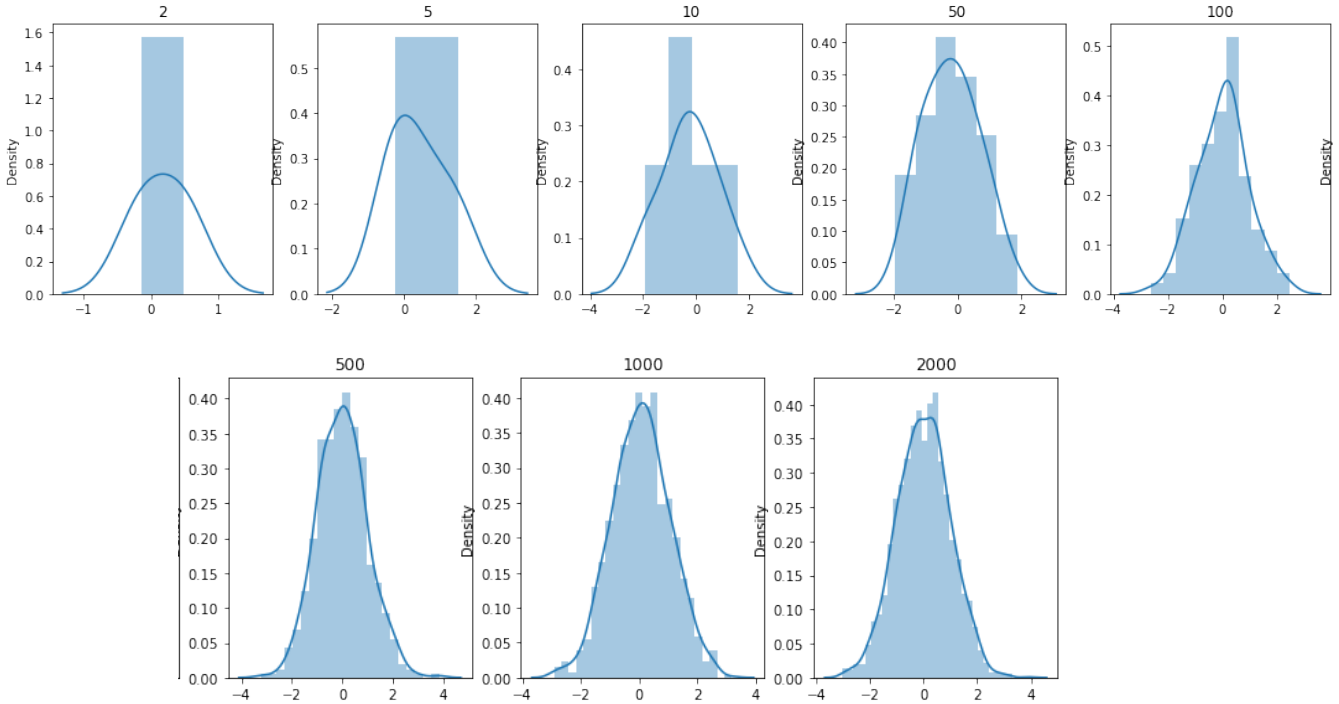


Рисунок 4. Гистограммы выборок различного объёма и теоретическая плотность распределения.

Таким образом, из полученного изображения следует, что при увеличении объёма выборки гистограмма всё больше напоминает график теоретической плотности нормального распределения.

Задание 2

Теперь реализуем модель аддитивных случайных блужданий с начальным приближением $x_0 = N$ для моментов времени $t = 1, 2, 3, \ldots 15 + N$, где $N = 2$. Параметр $\sigma = 0.1$.

Далее были проведены 100 испытаний и для каждого момента времени рассчитаны выборочное среднее и волатильность. Построим их графики и гистограммы:

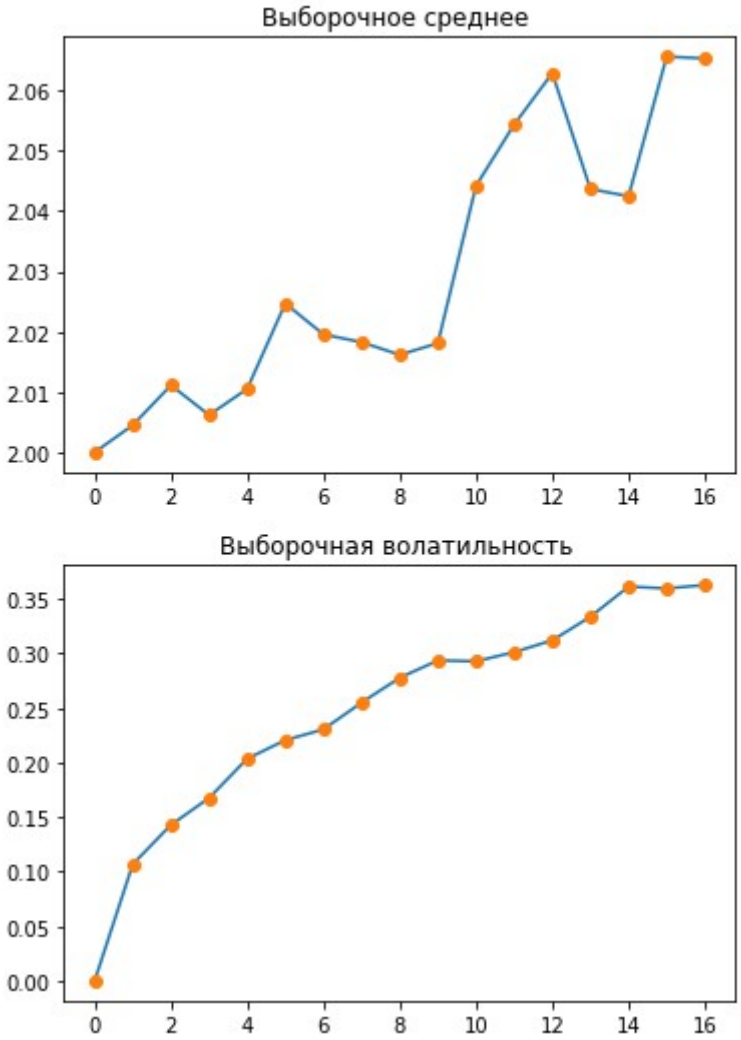


Рисунок 5. Графики выборочного среднего и волатильности аддитивных случайных блужданий

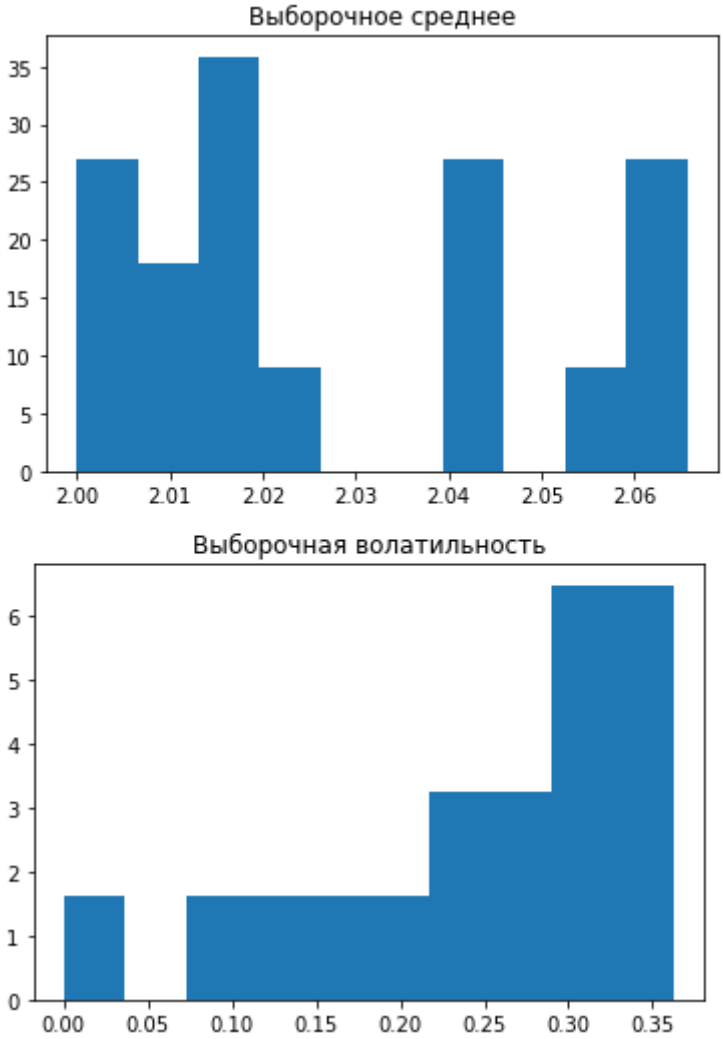


Рисунок 6. Гистограммы выборочного среднего и выборочной волатильности аддитивных блужданий.

Таким образом, из полученного изображения следует, что у выборочного среднего аддитивных блужданий гистограмма напоминает график плотности нормального распределения, а у выборочной волатильности аддитивных блужданий гистограмма напоминает график плотности экспоненциального распределения.

Теперь для случая винеровской переменной.

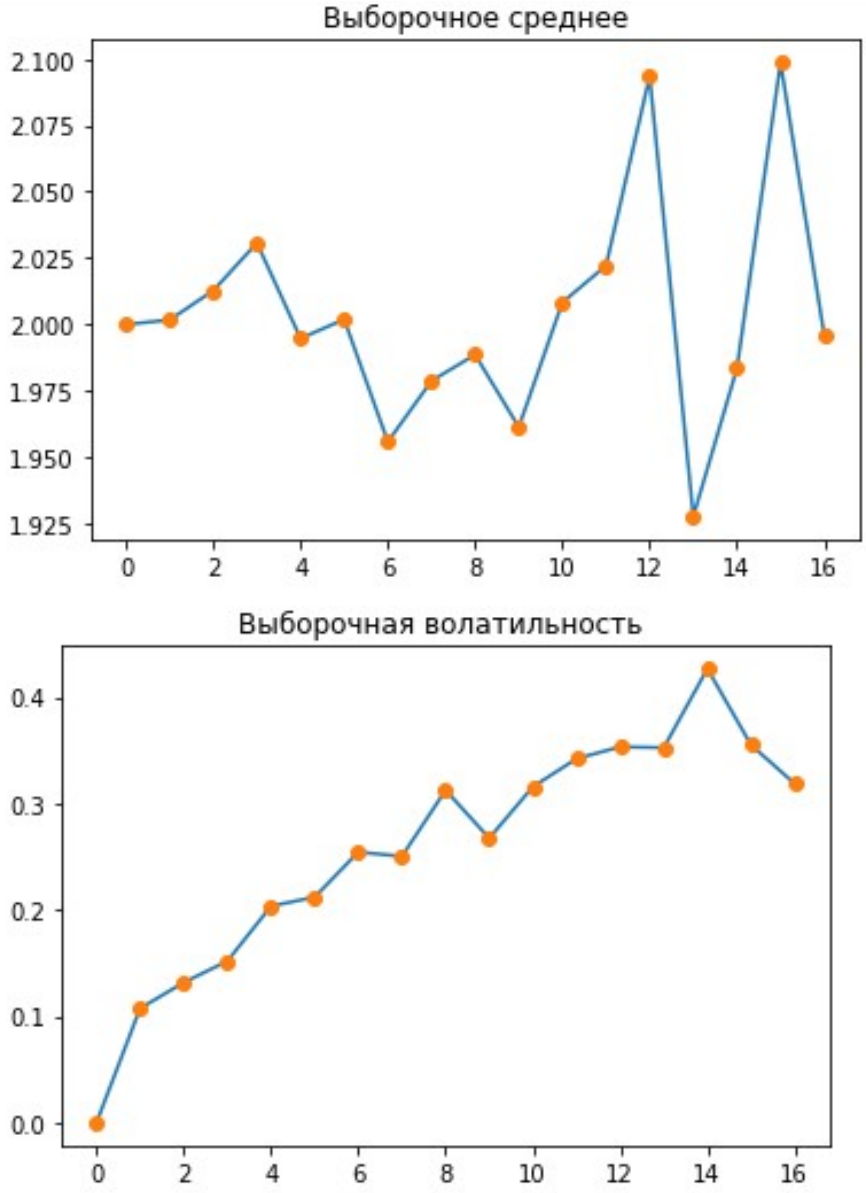


Рисунок 7. Графики выборочного среднего и выборочной волатильности винеровских аддитивных блужданий.

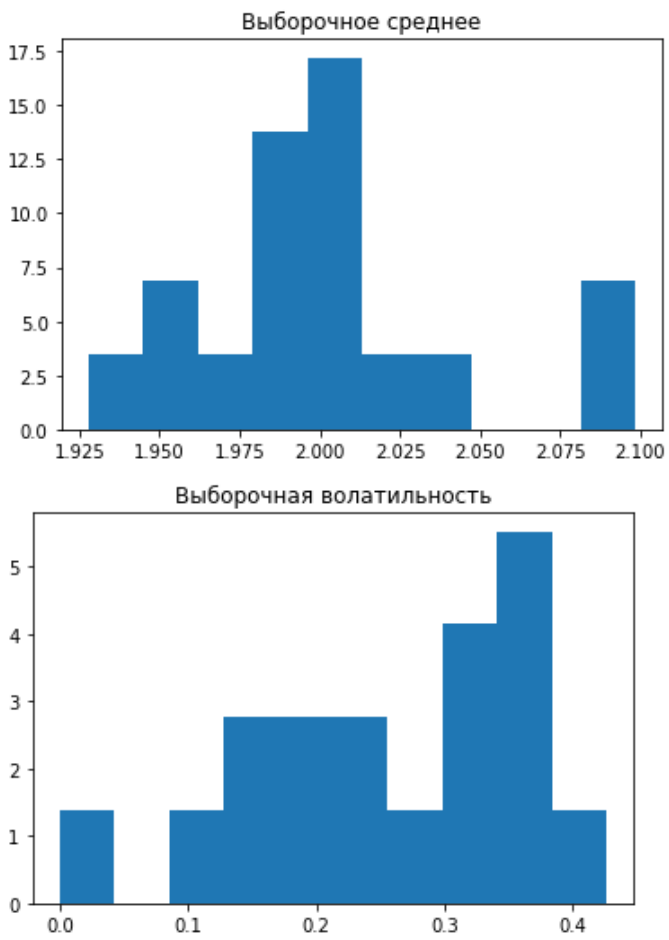
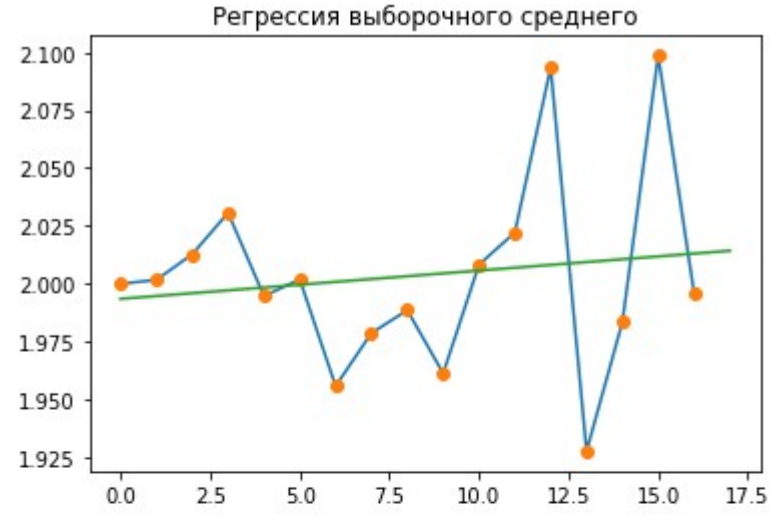


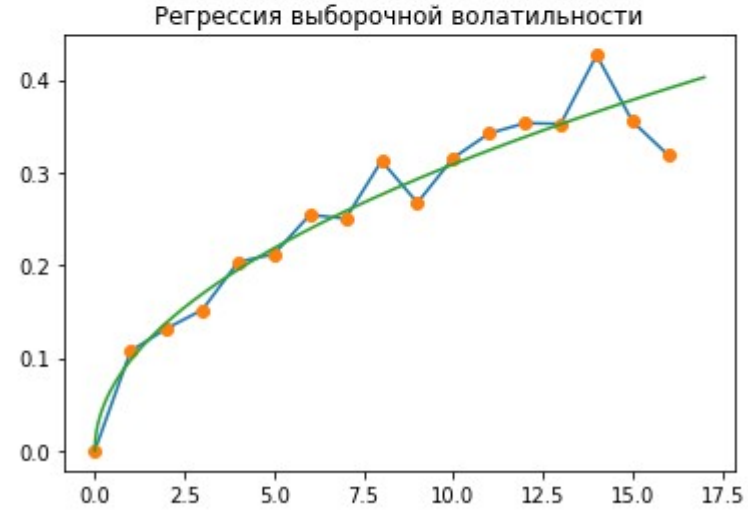
Рисунок 8. Гистограммы выборочного среднего и выборочной волатильности винеровских аддитивных блужданий.

Таким образом, из полученных изображений следует, что гистограмма выборочных средних винеровских аддитивных блужданий напоминает график плотности нормального распределения, а гистограмма волатильности винеровских аддитивных блужданий напоминает график плотности экспоненциального распределения.

Далее построим уравнения регрессии для выборочного среднего и волатильности как функций от времени. Для выборочного среднего уравнение выберем из класса линейных функций, а для волатильности – из класса функций $f(t)=a\sqrt{t}$.



Максимальная погрешность:
0.08676363822854283



Максимальная погрешность:
0.07199285378783232

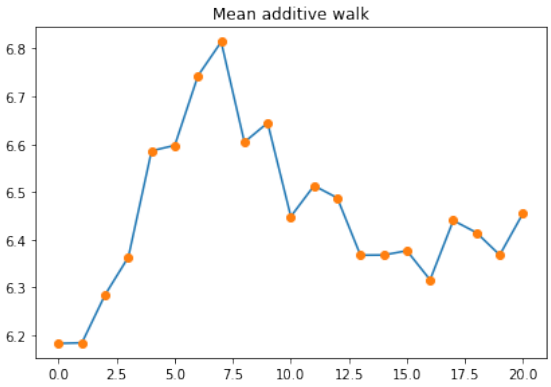
Рисунок 9. Графики регрессий выборочного среднего и выборочной волатильности винеровских аддитивных блужданий.

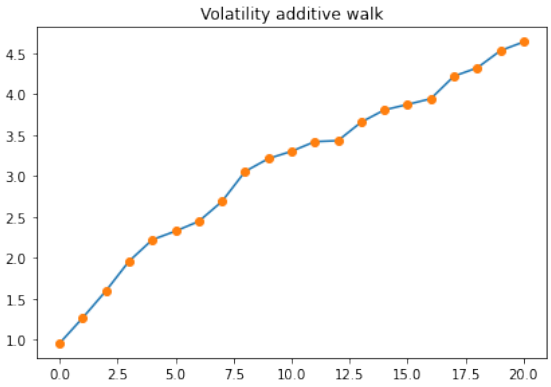
Максимальная по модулю ошибка в случае выборочной средней винеровских аддитивных блужданий = 0.087, а в случае выборочной волатильности – 0.072.

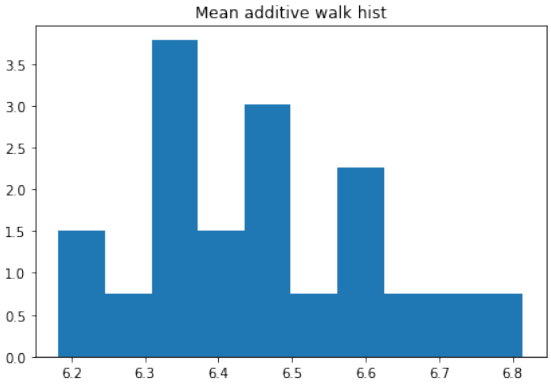
Задание 3

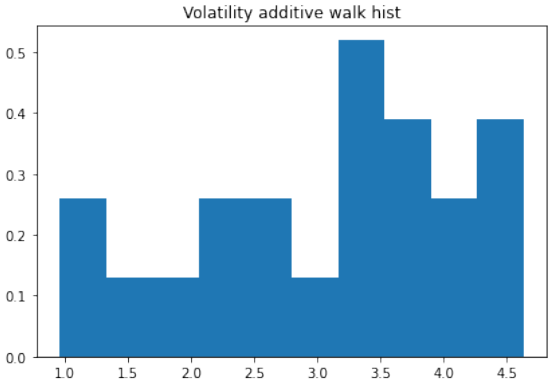
Была реализована модель аддитивных случайных блужданий с начальным приближением $x_0 = N$ для моментов времени $t = 1, 2, 3, \ldots 15 + N$, где $N = 6$ -номер по списку.

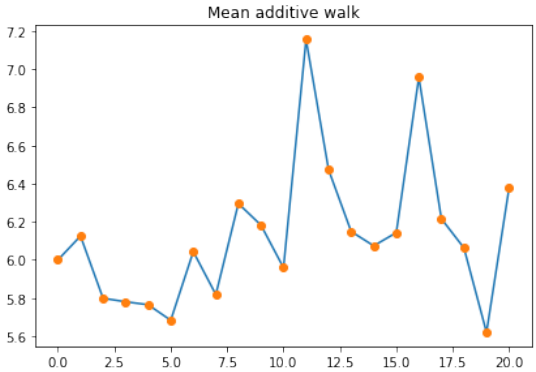
Для графиков среднего и дисперсии случая с

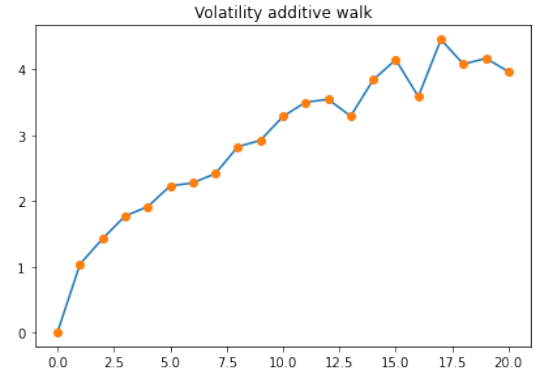

Mean additive walk

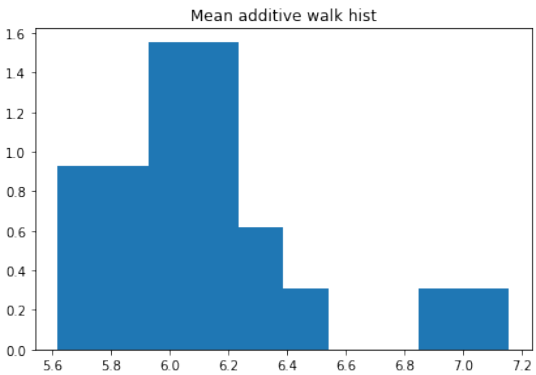

Volatility additive walk

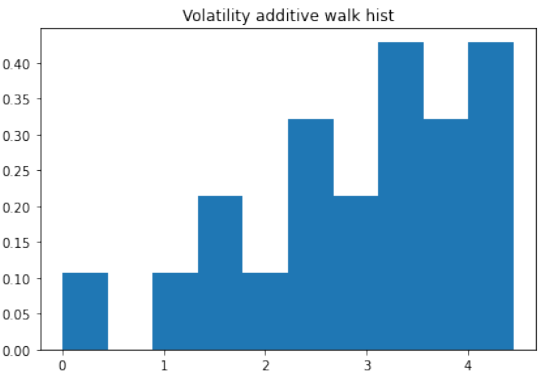

Mean additive walk hist


Volatility additive walk hist


Mean additive walk


Volatility additive walk


Mean additive walk hist


Volatility additive walk hist

Для графиков среднего и дисперсии случая с винеровской переменной были построены уравнения линейной и из класса $a\sqrt{t}$ регрессий.

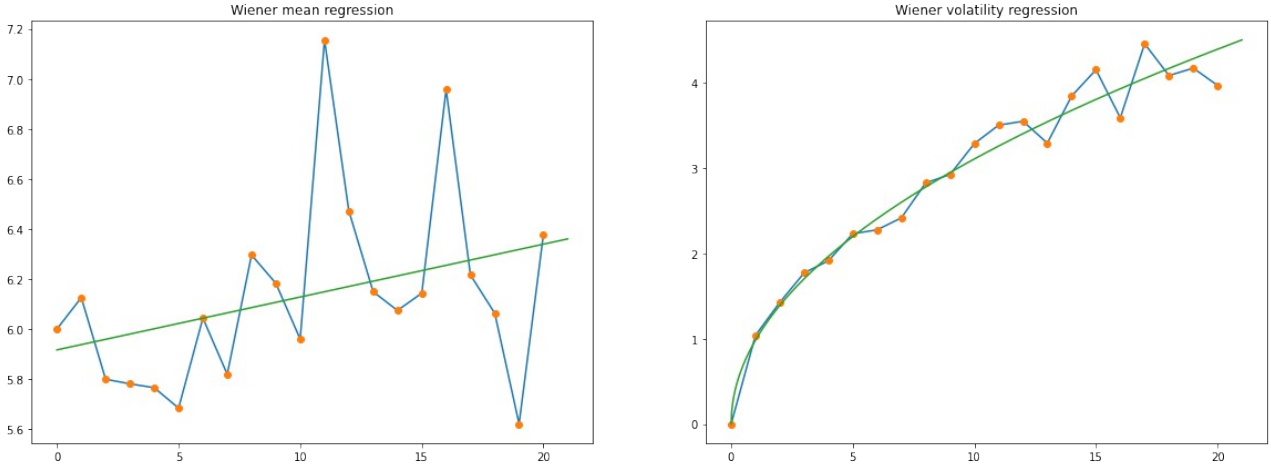


Рисунок 4 - Графики регрессий для значений среднего и волатильности (дисперсии)

Вывод: в ходе данной лабораторной работы был получен навык моделирования винеровского случайного процесса с помощью метода статистических испытаний. Сгенерированы СВ методами сумм и Бокса-Миллера, так же проведено 100 испытаний. Было построено по 5 выборочных траекторий блуждания. Построены регрессии выборочного среднего и волатильности как функций от времени, получена точность 0.1.

Приложение

Листинг программы:

```
#include <iostream>
#include <ctime>
#include <fstream>

using namespace std;

void SumMethod(double**);
void BoxMillerMethod(double**);

double Random(double, double);
double RndG();
double NormalDistribution();

void RegrSr(double*);
void RegrW(double*);

void Graph(string, double**, double*);

const int N0 = 13;
const int T = 28;

int main()
{
	double** x = new double* [100];
	for (int i = 0; i < 100; i++)
	{
		x[i] = new double[T + 1];
	}
	for (int i = 0; i <= T; i++)
	{
		x[0][i] = N0;
	}


	SumMethod(x);
	//BoxMillerMethod(x);
	// Мат. ожидания
	double* xMiddle = new double[T + 1];

	for (int t = 0; t <= T; t++)
	{
		xMiddle[t] = 0.;

		for (int i = 0; i < 100; i++)
		{
			xMiddle[t] += x[i][t];
		}
		xMiddle[t] /= 100.;
	}

	RegrSr(xMiddle);

	for (int t = 0; t <= T; t++)
	{
		cout << "M[" << t << "] = " << xMiddle[t] << endl;
	}

	cout << endl;

	double* sigma = new double[T + 1];

	for (int t = 0; t <= T; t++)
```

```
	{
		sigma[t] = 0.;

		for (int i = 0; i < 100; i++)
		{
			sigma[t] += (x[i][t] - xMiddle[t]) * (x[i][t] - xMiddle[t]);
		}
		sigma[t] /= 100.;
		sigma[t] = sqrt(sigma[t]);
	}

	RegrW(sigma);

	for (int t = 0; t <= T; t++)
	{
		cout << "Sigma[" << t << "] = " << sigma[t] << endl;
	}

	return 0;
}

void SumMethod(double** x)
{
	srand(time(NULL));

	double* xt = new double[T + 1];
	double* xW = new double[T + 1];
	double* eps = new double[T + 1];

	xt[0] = N0;


	for (int i = 1; i < 100; i++)
	{
		for (int t = 0; t <= T; t++)
		{
			eps[t] = NormalDistribution();
			xt[t] = (double)N0;
			xW[t] = (double)N0 + NormalDistribution() * sqrt(t);
		}

		for (int t = 0; t <= T; t++)
		{
			for (int tt = 0; tt <= t - 1; tt++)
			{
				xt[t] += eps[tt];
			}
			x[i][t] = xt[t];
		}
	}
	ofstream file("Sum.txt");
	for (int i = 0; i <= T; i++)
	{
		file << i << "\t" << x[1][i] << "\t" << x[20][i] << "\t" << x[40][i]
<< "\t" << x[60][i] << "\t" << x[80][i] << "\t" << x[99][i] << "\t" << xW[i] <<
endl;
	}
	file.close();
}

void BoxMillerMethod(double** x)
{
	srand(time(NULL));

	double* xt = new double[T + 1];
```

```
	double* xW = new double[T + 1];
	xt[0] = N0;
	double* eps = new double[T + 1];

	for (int i = 0; i < 100; i++)
	{
		for (int t = 0; t <= T; t++)
		{
			eps[t] = RndG();
			xt[t] = (double)N0;
			xW[t] = (double)N0 + RndG() * sqrt(t);
		}

		for (int t = 0; t <= T; t++)
		{
			for (int tt = 0; tt <= t - 1; tt++)
			{
				xt[t] += eps[tt];
			}
			x[i][t] = xt[t];
		}
	}
	ofstream file("BM.txt");
	for (int i = 0; i <= T; i++)
	{
		file << i << "\t" << x[1][i] << "\t" << x[20][i] << "\t" << x[40][i]
<< "\t" << x[60][i] << "\t" << x[80][i] << "\t" << x[99][i] << "\t" << xW[i] <<
endl;
	}
	file.close();
}

double RndG() //Gauss random var
{
	double r = 0.;
	double s, v1, v2;
	while (true)
	{
		v1 = Random(-1., 1.);
		v2 = Random(-1., 1.);
		s = v1 * v1 + v2 * v2;
		if ((s < 1. && s != 0.))
		{
			r = v1 * sqrt(-2. * log(s) / s);
			break;
		}
	}
	return r;
}

double NormalDistribution()
{
	double S = 0.;
	for (int j = 0; j < 12; j++)
	{
		S += (double)rand() / RAND_MAX;
	}
	return S - 6.;
}

double Random(double min, double max)
{
	return (double)(rand()) / RAND_MAX * fabs(max - min) + min;
}
```

```
void RegrSr(double* xMiddle)
{
	double X_Middle = 0.;
	double Y_Middle = 0.;
	double XY_Middle = 0.;
	double XX_Middle = 0.;
	double a = 0., b = 0.;

	//sample mean for x, y, x*x, y*x

	for (int t = 0; t < T; t++)
	{
		X_Middle += t; //x
		Y_Middle += xMiddle[t]; //y
		XY_Middle += t * xMiddle[t];  //x*y
		XX_Middle += t * t;  //x*x
	}

	X_Middle /= T;
	Y_Middle /= T;
	XY_Middle /= T;
	XX_Middle /= T;

	a = (X_Middle * Y_Middle - XY_Middle) / (X_Middle * X_Middle - XX_Middle);
	b = (XY_Middle - a * XX_Middle) / X_Middle;

	ofstream file("RegMid.txt");
	for (int i = 0; i <= T; i++)
	{
		file << i << "\t" << xMiddle[i] << "\t" << a * i + b << endl;
	}
	file.close();
}

void RegrW(double* sig)
{
	double a;
	double sumS0T = 0.;
	double sumT = 0.;

	for (int t = 0; t < T; t++)
	{
		sumS0T += sig[t] * sqrt(t);
		sumT += t;
	}
	a = sumS0T / sumT;

	ofstream file("RegW.txt");
	for (int i = 0; i <= T; i++)
	{
		file << i << "\t" << sig[i] << "\t" << a * sqrt(i) << endl;
	}
	file.close();
}
```