Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

"Уфимский государственный авиационный технический университет"

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

Дисциплина: Математическое моделирование

Отчет по лабораторной работе № 5

на тему: «Исследование эволюции нелинейной диссипативной динамической системы»

Группа ПМ-453	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Шамаев И.Р.			
Принял	Лукащук В.О.			

Уфа 2023

Цель работы: получить навык численного исследования динамики нелинейной диссипативной динамической системы, обладающей странным аттрактором.

Задание на лабораторную работу

Рассматривается нелинейная двухпараметрическая автономная динамическая система

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y,z;a,b),$$
$$\frac{dy}{dt}=g(x,y,z;a,b),$$
$$\frac{dz}{dt}=h(x,y,z;a,b).$$

Функции *f*, *g*, *h* выбираются в соответствии с номером варианта.

Для заданной системы выполнить следующие задания.

1. Определить области изменения параметров a и b, в которых данная динамическая система является диссипативной.
2. Определить стационарные точки диссипативной системы.
3. Исследовать стационарные точки на асимптотическую устойчивость по первому приближению.
4. Определить значения параметров a и b, при которых в системе появляется странный аттрактор.
5. Написать вычислительную программу на языке программирования Си++, реализующую процедуру численного интегрирования исходной диссипативной системы по методу Рунге-Кутта 4-го порядка точности.
6. С использованием вычислительной программы провести серию вычислительных экспериментов, демонстрирующих различные виды динамики системы. Построить траектории системы в окрестности стационарных точек. Определить численно значения параметров a и b, при которых в системе существует странный аттрактор и при которых система переходит в режим автоколебаний.

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y,z;a,b)=y,$$
$$\frac{dy}{dt}=g(x,y,z;a,b)=z,$$
$$\frac{dz}{dt}=h(x,y,z;a,b)=ax+by-z-x^3.$$

Практическая часть

Рассматриваемая система имеет следующий вид

$$\frac{dx}{dt}=y=f_x,$$
$$\frac{dy}{dt}=z=f_y,$$
$$\frac{dz}{dt}=ax+by-z-x^3=f_z.$$

Условием диссипативной системы является

$$¿\vec{f}<0.$$

Таким образом, имеем

$$¿\vec{f}=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}=0+0-1<0.$$

Это означает, что данная система будет всегда диссипативной при $\forall a,b$.

Нахождение стационарных точек

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ ax+by-z-x^3=0 \end{cases} ¿> ax-x^3=0=¿\ x^3=ax.\,If\ x\neq 0: x=\pm\sqrt{a}.$$

Следовательно $x_1=0, x_{2,3}=\pm\sqrt{a}$. И таким образом, получили три стационарные точки:

$$O_1=(0,\ 0,\ 0);\quad O_2=(\sqrt{a},0,\ 0);\quad O_3=(-\sqrt{a},\ 0,\ 0).$$

Кардано:

Дано кубическое уравнение:

$$\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c=0$$

$$\lambda_1=y_1-\frac{b}{3a}$$

Откуда получаем:

$$y^3+py+q=0,$$

где $p=\frac{-a^2}{2}, q=2\left(\frac{a}{3}\right)^3-\frac{ab}{3}+c,\ A=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{Q}},\ B=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{Q}}$

$$Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Получаем корни:

$$y_1=A+B,$$

$$y_2=\frac{-A+B}{2}.$$

Проанализируем точки, построив фазовые портреты.

Анализ точки $O_1(0,0,0)$:

Матрица линеаризованной системы примет вид:

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ a & b & -1\end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение примет вид:

$$det(J-\lambda E)=0$$

$$\lambda^3+\lambda^2-\lambda b-a=0$$

Найдя корни с помощью метода Кардано выяснили, что $\Re\lambda_i>0$, т.е. точка неустойчива при:

$$a<\frac{b}{3}+\frac{2}{27}, a>0;$$

$b>\frac{-2}{9}, b<0.$Данная оценка является приблизительной, т.к. не произведено обратного сдвига в системе координат.

Поэтому, сделав сдвиг на $\frac{b}{3}$ получим, что

$$a\in\left(\frac{b}{3};\frac{2b}{3}+\frac{2}{27}\right)$$

При условии $a>0, получ$аем, что $b>0$, но при $b<0$ точки являются устойчивыми, следовательно, точка O_1 всегда неустойчива

Построим фазовые портреты:

Покажем, что точка O_1 неустойчивая, при a=0.7, b=-2 видим, что траектория движения переходит в другое устойчивое состояние.

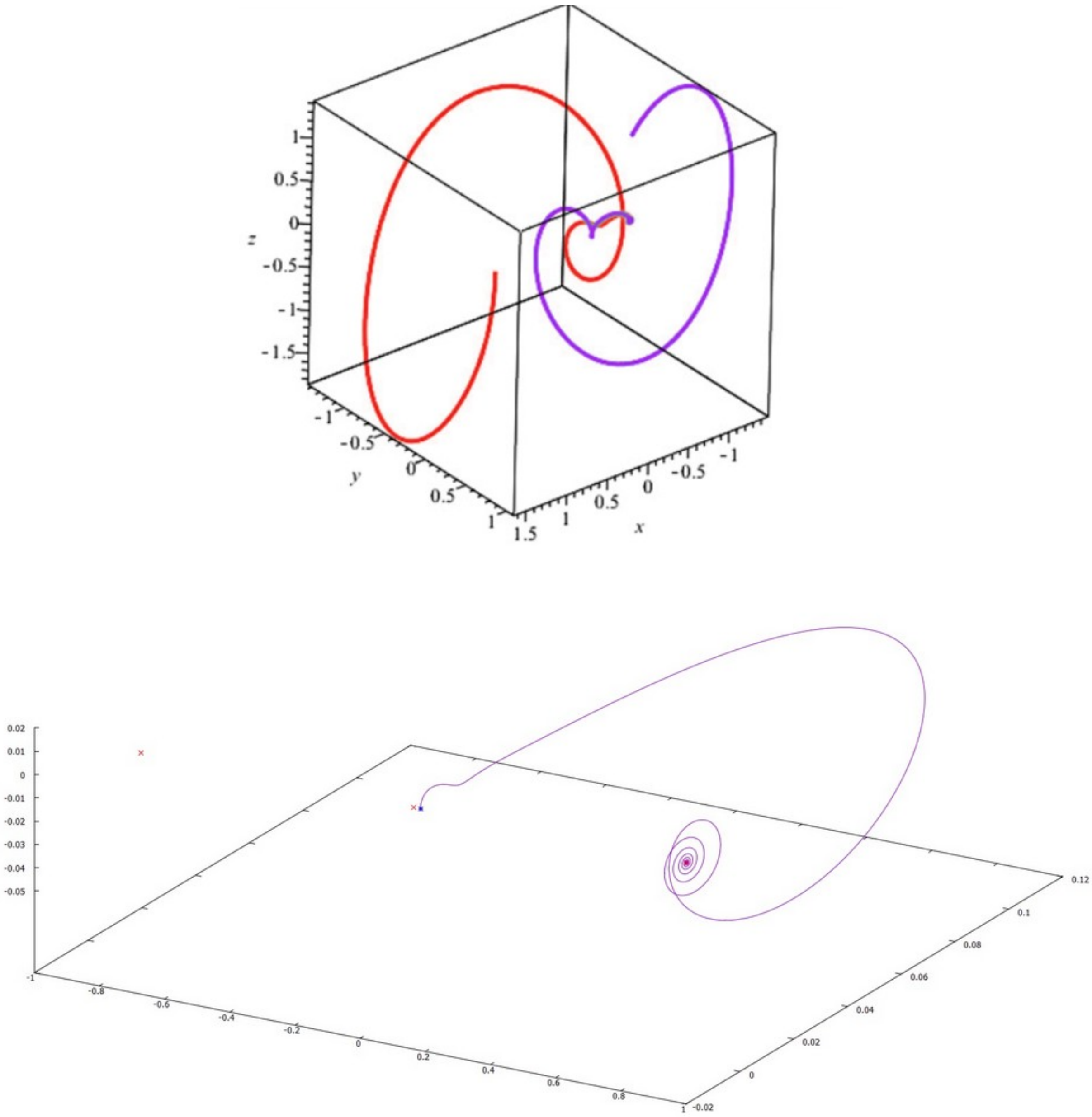

Рис.1 – Неустойчивая точка O_1

При a=4; b=-5 получаем неустойчивую точку

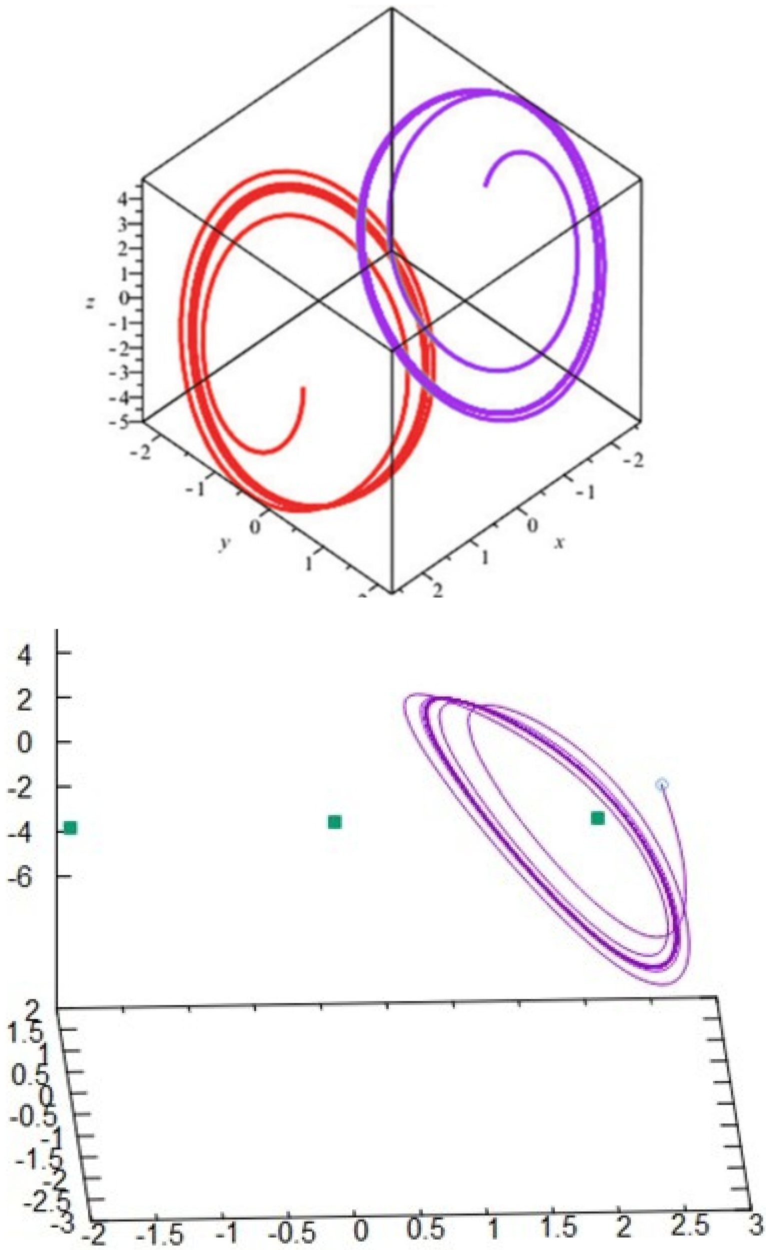

Рис.2 –График динамики системы неустойчивого положения точки O_1

Анализ точки O_2:

Матрица линеаризованной системы примет вид:

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a & b & -1 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение примет вид:

$$\lambda^3+\lambda^2-\lambda b+2a=0$$

Найдя корни с помощью метода Кардано выяснили, что $\Re \lambda_i > 0$, т.е. точка неустойчива при:

$$a > \frac{-1}{27} - \frac{b}{3}$$

$$b \leftarrow \frac{1}{3}$$

Построим фазовые портреты:

При a=0.5; b=-1.5 получаем устойчивую точку $\left(\sqrt{a}\,;0\,;0\right)$:

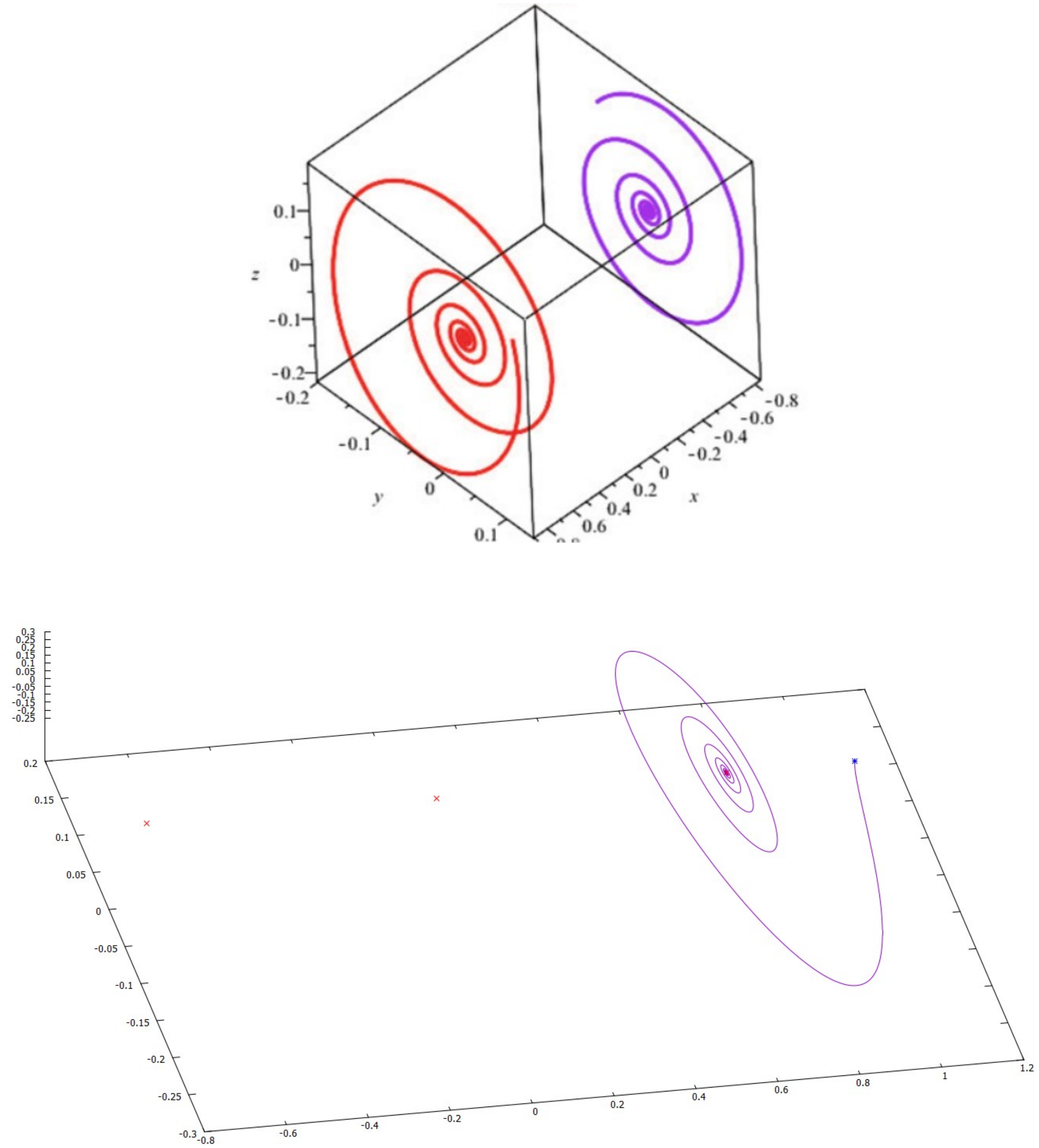

Рис.3 – График динамики устойчивого положения системы точки O_2

При a=4; b=-5 получаем неустойчивую точку $(\sqrt{a}; 0; 0)$:

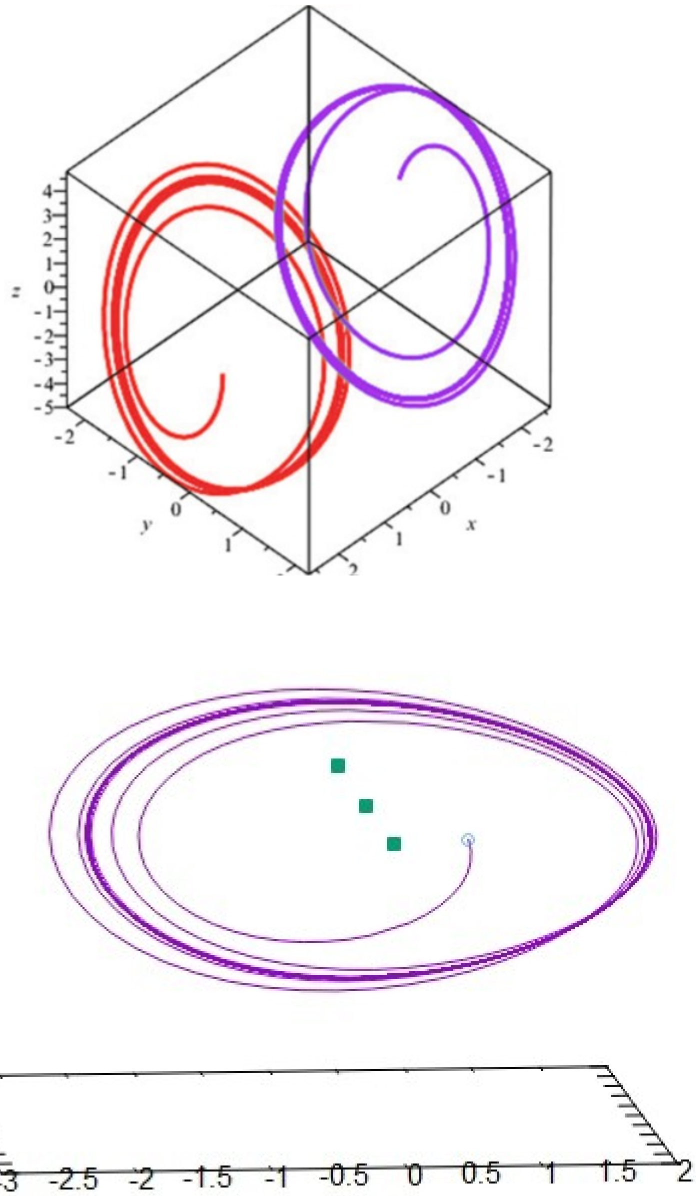

Рис.4 – График динамики неустойчивого положения системы точки O_2

Анализ точки O_3:

Матрица линеаризованной системы примет вид:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a & b & -1 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение примет вид:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda b + 2a = 0$$

Найдя корни с помощью метода Кардано выяснили, что $\Re\lambda_i > 0$, т.е. точка неустойчива при:

$$a > \frac{-1}{27} - \frac{b}{3}$$

$$b \leftarrow \frac{1}{3}$$

Построим фазовые портреты:

При a=0.5; b=-1.5 получаем устойчивую точку $\left(-\sqrt{a}\,;0\,;0\right)$:

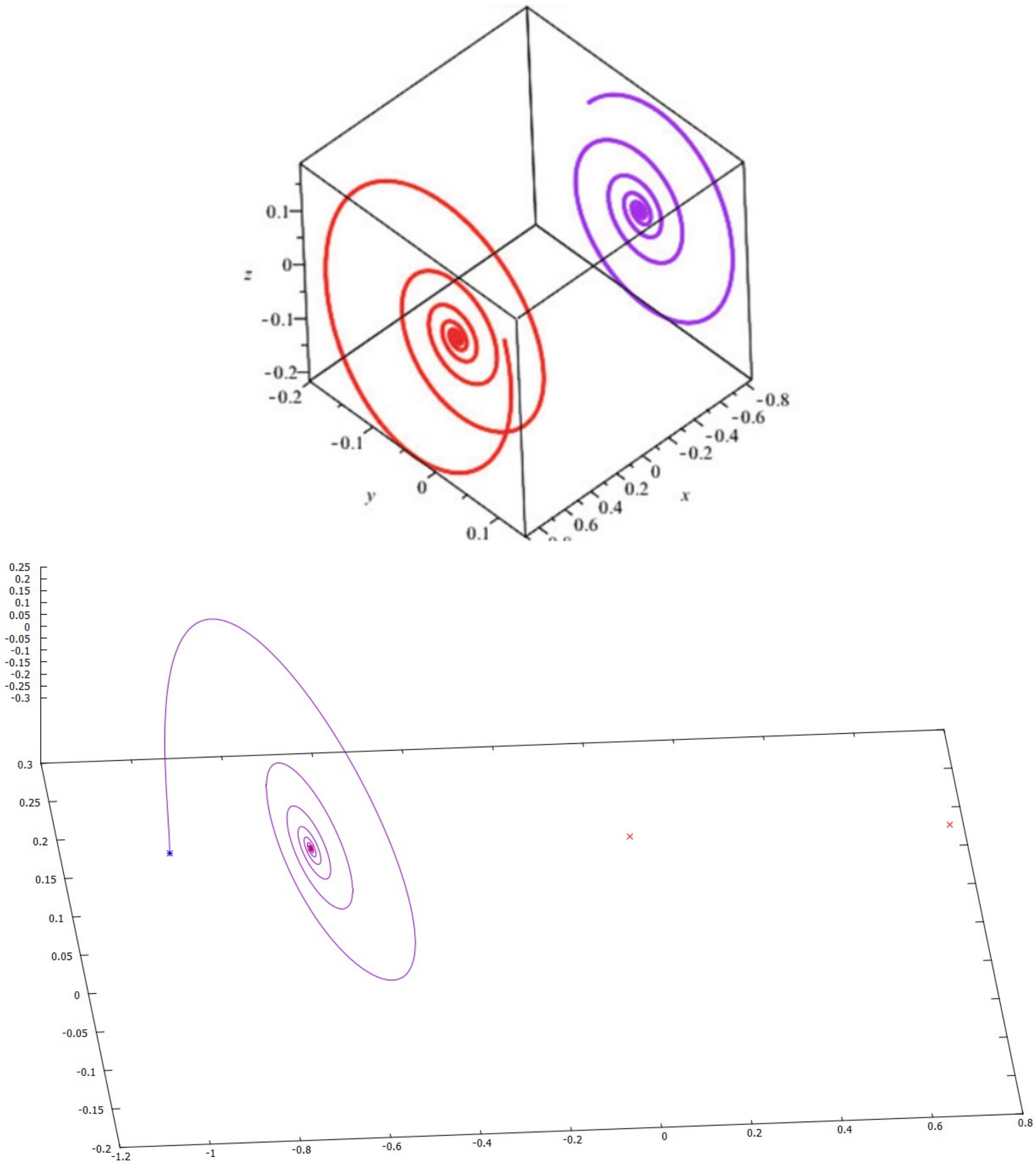

Рис.5 – График динамики устойчивого положения системы точкиO_3

При a=5; b=-5 получаем неустойчивую точку $\left(-\sqrt{a}\,;0\,;0\right)$:

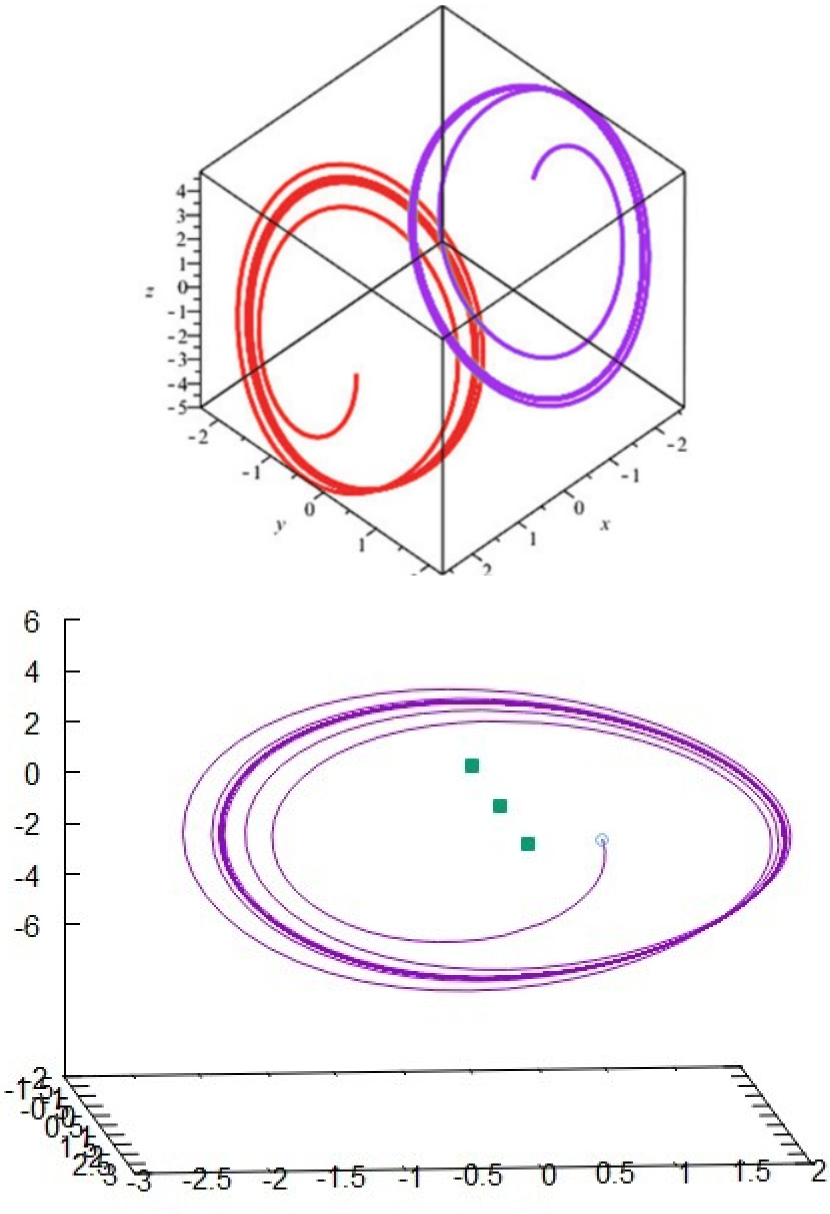

Рис.6 – График динамики неустойчивого положения системы точки O_3

Объединяя случаи неустойчивости точек O_1, O_2, O_3 можно поймать странный аттрактор.

При a=2.5; b= -2.1 можно заметить, как траектория огибает все стационарные точки, ни на одной из них не задерживаясь

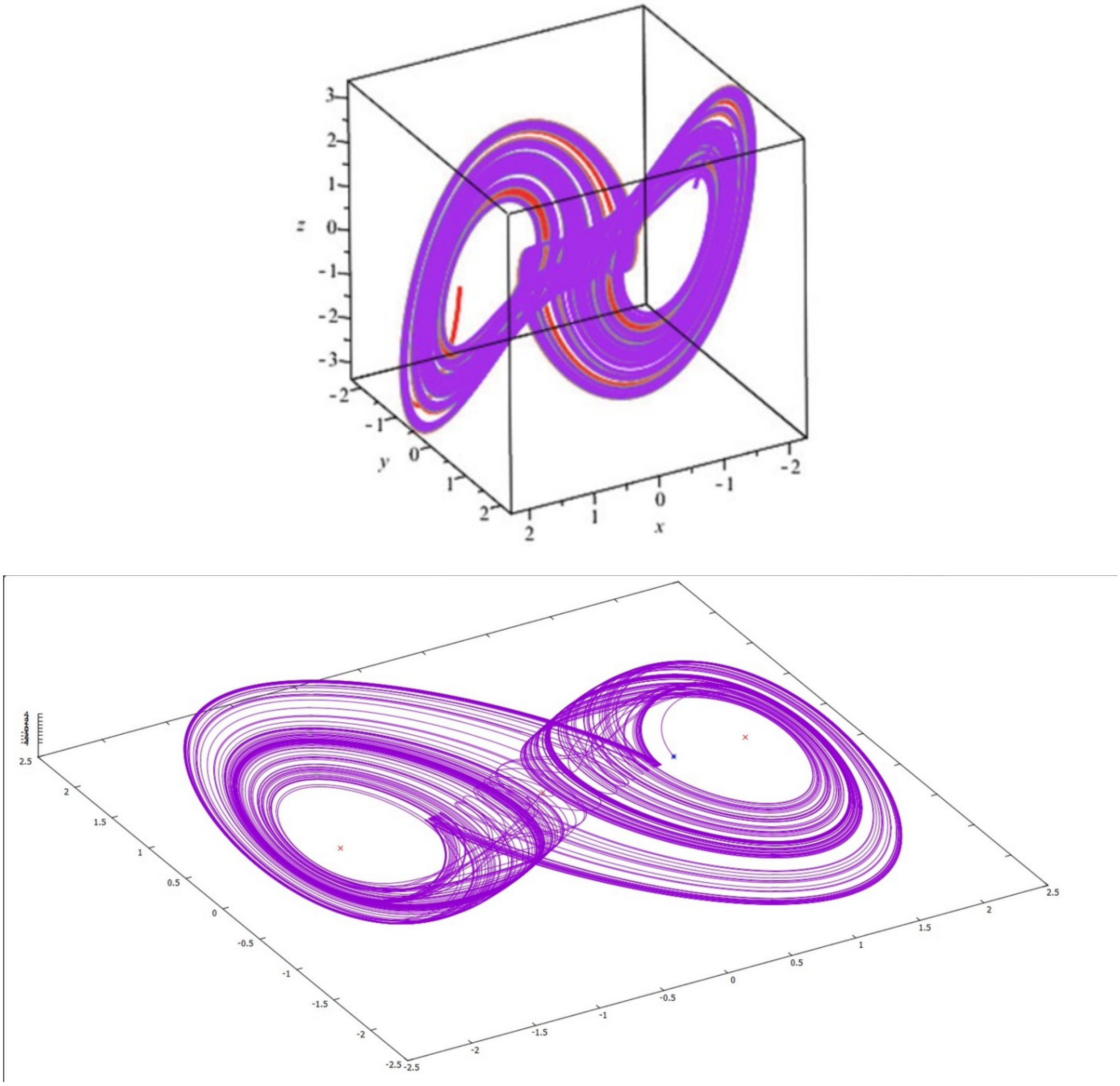

Рис.7 – График динамики системы - странный аттрактор

Система движется вокруг двух устойчивых точек $O_2 u O_3$, но к ним самим не доходит. Система продолжительно долго остается в таком состоянии.

Также можно поймать автоколебания:

При $a=0.1, b=-0.1$ получаем следующую картинку

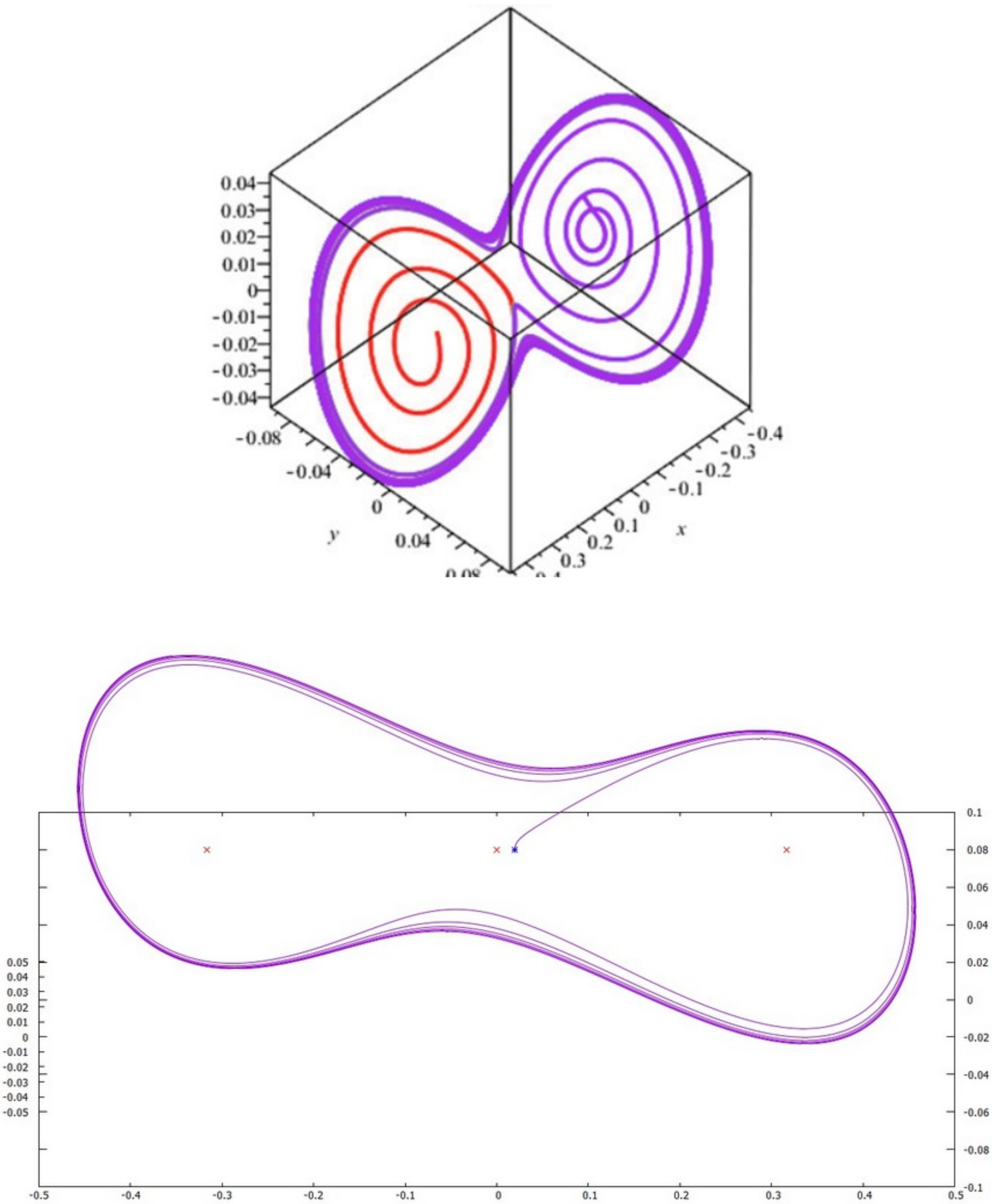

Рис. 8 – Режим автоколебаний

Система в данном случае движется вокруг всех стационарных точек, близко к ним не подходя.

Заключение

В ходе данной лабораторной работы был получен навык численного исследования динамики нелинейной диссипативной динамической системы, обладающей странным аттрактором. Были определены области изменения параметров a и b, в которых данная динамическая система является диссипативной. Найдены и исследованы на устойчивость стационарные точки системы. Определены значения параметров a и b, при которых в системе появляются предельный цикл, странный аттрактор, а также такие значения параметров, при которых система переходит в режим автоколебаний.

Для проведения серии вычислительных экспериментов была написана вычислительная программа на языке программирования C++. В результате проведенных экспериментов были получены различные виды динамики системы.

Приложение А

```
#define _USE_MATH_DEFINES
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <fstream>
#include <cstdlib>
#include <iomanip>

#define n 15000
#define h 0.05
#define a 0.1
#define b -0.1
#define s 0.000009

using namespace std;

double funcx(double x, double y, double z)
{
	double fx;

	fx = y;

	return fx;
}

double funcy(double x, double y, double z)
{
	double fy;

	fy = z;

	return fy;
}

double funcz(double x, double y, double z)
{
	double fz;

	fz = a * x + b * y - z - x * x * x;

	return fz;
}

double RuKu_4()
{
	double* x = new double[n];
	double* y = new double[n];
	double* z = new double[n];

	for (int i = 0; i < n; i++)
	{
		x[i] = 0;
		y[i] = 0;
		z[i] = 0;
	}

	double kx1, kx2, kx3, kx4, ky1, ky2, ky3, ky4, kz1, kz2, kz3, kz4;
	x[0] = sqrt(a) + s;
	y[0] = s;
	z[0] = s;

	for (int i = 0; i < n - 1; i++)
```

```
	{
		kx1 = funcx(x[i], y[i], z[i]);//x'=
		ky1 = funcy(x[i], y[i], z[i]);//y'=
		kz1 = funcz(x[i], y[i], z[i]);//z'=

		kx2 = funcx(x[i] + (h * kx1 / 2), y[i] + (h * ky1 / 2), z[i] + (h * kz1
/ 2));
		ky2 = funcy(x[i] + (h * kx1 / 2), y[i] + (h * ky1 / 2), z[i] + (h * kz1
/ 2));
		kz2 = funcz(x[i] + (h * kx1 / 2), y[i] + (h * ky1 / 2), z[i] + (h * kz1
/ 2));

		kx3 = funcx(x[i] + (h * kx2 / 2), y[i] + (h * ky2 / 2), z[i] + (h * kz2
/ 2));
		ky3 = funcy(x[i] + (h * kx2 / 2), y[i] + (h * ky2 / 2), z[i] + (h * kz2
/ 2));
		kz3 = funcz(x[i] + (h * kx2 / 2), y[i] + (h * ky2 / 2), z[i] + (h * kz2
/ 2));

		kx4 = funcx(x[i] + (h * kx3 / 2), y[i] + (h * ky3 / 2), z[i] + (h * kz3
/ 2));
		ky4 = funcy(x[i] + (h * kx3 / 2), y[i] + (h * ky3 / 2), z[i] + (h * kz3
/ 2));
		kz4 = funcz(x[i] + (h * kx3 / 2), y[i] + (h * ky3 / 2), z[i] + (h * kz3
/ 2));

		x[i + 1] = x[i] + (h / 6) * (kx1 + 2 * kx2 + 2 * kx3 + kx4);
		y[i + 1] = y[i] + (h / 6) * (ky1 + 2 * ky2 + 2 * ky3 + ky4);
		z[i + 1] = z[i] + (h / 6) * (kz1 + 2 * kz2 + 2 * kz3 + kz4);
	}

	ofstream fout6("xyz.txt");

	for (int i = 0; i < n; i++)
	{
		fout6 << x[i] << setw(10) << y[i] << setw(10) << z[i] << endl;
	}

	fout6.close();

	ofstream fout111("st_xyz.txt");

	fout111 << 0 << setw(10) << 0 << setw(10) << 0 << endl;
	fout111 << -sqrt(a) << setw(10) << 0 << setw(10) << 0 << endl;
	fout111 << sqrt(a) << setw(10) << 0 << setw(10) << 0 << endl;
	fout111.close();

	ofstream fout211("nkt_xyz.txt");

	fout211 << x[0] << setw(10) << y[0] << setw(10) << z[0] << endl;
	cout << x[0] << setw(10) << y[0] << setw(10) << z[0] << endl;

	fout211.close();

	return 0;
}

int main()
{
	setlocale(LC_ALL, "Russian");

	RuKu_4();
	return 0;
}
```