Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"Уфимский государственный авиационный технический университет"

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

Дисциплина: Методы оптимизации

Отчет по лабораторной работе № 3

Тема: «Линейное программирование: симплекс метод»

Группа ПМ-453	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Шамаев И.Р.			
Принял	Казакова Т.Г.			

Уфа 2022

Цель работы: приобрести практические навыки решения задач линейного программирования с использованием симплекс-метода.

Математическая запись задачи:

Пусть x_1 — пастеризованное молоко (кг), x_2 – кефир(кг), x_3 – сметана(кг), x_4 – йогурт(кг),$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — прибыль (руб.).

Функция прибыли:

$$F = 24(\frac{\text{руб.}}{\text{кг}})x_1 + 27(\frac{\text{руб.}}{\text{кг}})x_2 + 138(\frac{\text{руб.}}{\text{кг}})x_3 + 25(\frac{\text{руб.}}{\text{кг}})x_4 \to max$$

Ограничения:

$$1{,}01(\frac{\text{кг}}{\text{кг}})x_1 + 1{,}01(\frac{\text{кг}}{\text{кг}})x_2 + 9{,}45(\frac{\text{кг}}{\text{кг}})x_3 + 0{,}85(\frac{\text{кг}}{\text{кг}})x_4 \leq 14000(\text{кг})$$

$$\frac{x_1}{500}(\text{ч}) + \frac{x_2}{600}(\text{ч}) \leq 21(\text{ч})$$

$$\frac{x_3}{30}(\text{ч}) + \frac{x_4}{15}(\text{ч}) \leq 16(\text{ч})$$

$$x_3 \leq x_4$$

Решение поставленной задачи симплекс методом

Приведем исходную симплексную таблицу:

C	24	27	138	25	0	0	0	0	0
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**
x5	1,01	1,01	9,45	0,85	1	0	0	0	14000
x6	0,002	0,00166	0	0	0	1	0	0	21
x7	0	0	0,03333	0.06666	0	0	1	0	16
x8	0		1	-1	0	0	0	1	0
Δ_i	-24	-27	-138	-25	0	0	0	0	0

Проверяем план на оптимальность: план **не оптимален**, так как $\Delta_1 = -24$
Промежуточные таблицы.

Итерация 1.

Разрешающий столбец – 3 (т.к. $\Delta_3 = \min(\Delta_i)$).

C	24	27	138	25	0	0	0	0	0	
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**	**Q**
x5	1,01	1,01	9,45	0,85	1	0	0	0	14000	1481.481
x6	0,002	0,00166	0	0	0	1	0	0	21	-
x7	0	0	0,03333	0.06666	0	0	1	0	16	480
x3	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0
Δ_i	-24	-27	-138	-25	0	0	0	0	0	

В найденном столбце ищем строку с наименьшим значением Q: $Q_{\min} = 0$, строка 4.

Из строк 1, 2, 3 вычитаем строку 4, умноженную на соответствующий элемент в столбце 3.

C	24	27	138	25	0	0	0	0	0	
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**	**Q**
x5	1,01	1,01	0	10,3	1	0	0	-9,45	14000	1481.481
x6	0,002	0,00166	0	0	0	1	0	0	21	-
x7	0	0	0	0,1	0	0	1	-0,0333	16	480
x3	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0
Δ_i	-24	-27	0	-163	0	0	0	138	0	

Проверяем план на оптимальность: план **не оптимален**, так как $\Delta_1 = -24$

Итерация 2.

Разрешающий столбец – 4 (т.к. $\Delta_4 = \min(\Delta_i)$).

C	24	27	138	25	0	0	0	0	0	
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**	**Q**
x5	1,01	1,01	0	10,3	1	0	0	-9,45	14000	1359,2233
x6	0,002	0,00166	0	0	0	1	0	0	21	-
x4	0	0	0	0,1	0	0	1	-0,0333	16	160
x3	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	-
Δ_i	-24	-27	0	-163	0	0	0	138	0	

Делим строку 3 на 0,1. Из строк 1, 2, 4 вычитаем строку 3, умноженную на соответствующий элемент в столбце 4.

C	24	27	138	25	0	0	0	0	0	
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**	**Q**
x5	1,01	1,01	0	0	1	0	-103	-6,0166	12352	1359,2233
x6	0,002	0,00166	0	0	0	1	0	0	21	-
x4	0	0	0	1	0	0	10	-0,0333	160	160
x3	0	0	1	0	0	0	10	0,6666	160	-
Δ_i	-24	-27	0	0	0	0	1630	83,6666	26080	

Проверяем план на оптимальность: план **не оптимален**, так как $\Delta_1 = -24$

Итерация 3.

Разрешающий столбец – 2 (т.к. $\Delta_2 = \min(\Delta_i)$).

C	24	27	138	25	0	0	0	0	0	
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**	**Q**
x2	1,01	1,01	0	0	1	0	-103	-6,0166	12352	12229,70297
x6	0,002	0,00166	0	0	0	1	0	0	21	12600
x4	0	0	0	1	0	0	10	-0,0333	160	-
x3	0	0	1	0	0	0	10	0,6666	160	-
Δ_i	-24	-27	0	0	0	0	1630	83,6666	26080	

Делим строку 1 на 1,01. Из строк 2, 3, 4 вычитаем строку 1, умноженную на соответствующий элемент в столбце 2.

C	24	27	138	25	0	0	0	0	0	
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**	**Q**
x2	1,01	1	0	0	0,99009	0	-101,98019	-5,95709	12229,70297	12229,702
x6	0,00033	0	0	0	-0,00165	1	0,16996	0,00992	0,61716	12600
x4	0	0	0	1	0	0	10	-0,0333	160	-
x3	0	0	1	0	0	0	10	0,6666	160	-
Δ_i	3	0	0	0	26,73267	0	-1123,46534	-77,17491	356281,98019	

Проверяем план на оптимальность: план **не оптимален**, так как $\Delta_7 = -1123{,}46534$

Итерация 4.

Разрешающий столбец – 7 (т.к. $\Delta_7 = \min(\Delta_i)$).

C	24	27	138	25	0	0	0	0	0	
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**	**Q**
x2	1,01	1	0	0	0,99009	0	-101,98019	-5,95709	12229,70297	-
x7	0,00033	0	0	0	-0,00165	1	0,16996	0,00992	0,61716	3,63106
x4	0	0	0	1	0	0	10	-0,0333	160	16
x3	0	0	1	0	0	0	10	0,6666	160	16
Δ_i	3	0	0	0	26,73267	0	-1123,46534	-77,17491	356281,98019	

Делим строку 2 на 0.16996. Из строк 1, 3, 4 вычитаем строку 2, умноженную на соответствующий элемент в столбце 7.

C	24	27	138	25	0	0	0	0	0	
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**	**Q**
x2	1,2	1	0	0	0	600	0	0	12600	-
x8	0,00196	0	0	0	-0,0097	5,8835	1	0,05841	3,63106	3,6310
x4	-0,01961	0	0	1	0,09708	-58,835	0	-0,917	123,69	16
x3	-0,01961	0	1	0	0,09708	-58,835	0	0,08	123,69	16
Δ_i	5,2033	0	0	0	15,82524	6609,903	0	-11,54854	360361,36	

Проверяем план на оптимальность: план **не оптимален**, так как $\Delta_8 = -11.54854$

Итерация 5.

Разрешающий столбец – 8 (т.к. $\Delta_8 = \min(\Delta_i)$).

C	24	27	138	25	0	0	0	0	0	
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**	**Q**
x2	1,2	1	0	0	0	600	0	0	12600	-
x8	0,00196	0	0	0	-0,0097	5,8835	1	0,05841	3,63106	62,16066
x4	-0,01961	0	0	1	0,09708	-58,835	0	-0,917	123,69	-
x3	-0,01961	0	1	0	0,09708	-58,835	0	0,08	123,69	1498,8235
Δ_i	5,2033	0	0	0	15,82524	6609,903	0	-11,54854	360361,36	

Делим строку 2 на 0.05841. Из строк 1, 3,
Делим строку 2 на 0.05841. Из строк 1, 3, 4 вычитаем строку 2, умноженную на соответствующий элемент в столбце 8.

C	24	27	138	25	0	0	0	0	0	
базис	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**b**	**Q**
x2	1,2	1	0	0	0	600	0	0	12600	-
x8	0,03357	0	0	0	-0,1662	100,72022	17,11911	1	62,16066	62,16
x4	0,01119	0	0	1	-0,0554	33,5734	15,70637	0	180,72022	-
x3	-0,02238	0	1	0	0,1108	-67,14681	-1,41274	0	118,55955	1498,8
Δ_i	5,2033	0	0	0	13,90581	7773,07479	197,70083	0	3601079,22437	

Таким образом, мы получили оптимальное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 12600$, $x_3 = 118{,}55955$, $x_4 = 180{,}72022$.

Оптимальное значение целевой функции:$\mathrm{F} = 361079{,}22437$.

Оптимальный план: [0, 12600, 118.55955, 180.72022, 0, 0, 0, 62.16066]

Экономическая интерпретация:

По оптимальному плану, можно сказать, что для максимальной прибыли, нужно изготовить 12600 кг кефира, тем самым мы получим за него прибыль 340200 руб. Сметана на 118,55955 кг, что даст нам прибыль 16361,2 руб. Изготовить йогурт на 180,72022 кг, мы получим прибыль 4518,005 руб. Молоко пастеризованное нам не дает прибыли, его лучше не изготавливать.

Листинг проверки решения задачи с помощью пакета Maple

$> obj := 24 \cdot x1 + 27 \cdot x2 + 138 \cdot x3 + 25 \cdot x4;$

$$obj := 24\, x1 + 27\, x2 + 138\, x3 + 25\, x4$$

$> sys := \left\{1.01 \cdot x1 + 1.01 \cdot x2 + 9.45 \cdot x3 + 0.85 \cdot x4 \le 14000, \frac{x1}{500} + \frac{x2}{600} \le 21, \frac{x3}{30} + \frac{x4}{15} \le 16, x3 - x4 \le 0\right\};$

$$sys := \left\{\frac{x1}{500} + \frac{x2}{600} \le 21, x3 - x4 \le 0, \frac{x3}{30} + \frac{x4}{15} \le 16, 1.01\, x1 + 1.01\, x2 + 9.45\, x3 + 0.85\, x4 \le 14000\right\}$$

$> maximize(obj, sys, NONNEGATIVE);$

$$\{x1 = 0., x2 = 12600., x3 = 118.5595568, x4 = 180.7202216\}$$

Математическая запись двойственной задачи:

Пусть y_1 — пастеризованное молоко (кг), y_2 – кефир(кг), y_3 – сметана(кг), y_4 – йогурт (кг), $F(y_1, y_2, y_3, y_4)$ — прибыль (руб.).

Функция прибыли:

$$F = 14000y_1 + 21y_2 + 16y_3 \to min$$

Ограничения:

$$1{,}01y_1 + \frac{y_2}{500} \geq 24$$

$$1{,}01y_1 + \frac{y_2}{600} \geq 27$$

$$9{,}45y_1 + \frac{y_3}{30} + y_4 \geq 138$$

$$0{,}85y_1 + \frac{y_3}{15} - y_4 \geq 25$$

Листинг проверки решения двойственной задачи с помощью пакета Maple

```
> obj2 := 14000·y1 + 21·y2 + 16·y3 + 0·y4;
                         obj2 := 14000 y1 + 21 y2 + 16 y3
> sys2 := {1.01·y1 + y2/500 ≥ 24, 1.01·y1 + y2/600 ≥ 27, 9.45·y1 + y3/30 + y4 ≥ 138, 0.85·y1 + y3/15 - y4 ≥ 25};
      sys2 := {24 ≤ 1.01 y1 + y2/500, 25 ≤ 0.85 y1 + y3/15 - y4, 27 ≤ 1.01 y1 + y2/600, 138 ≤ 9.45 y1 + y3/30 + y4}
> s := minimize(obj2, sys2, NONNEGATIVE);
                  s := {y1 = 13.90581717, y2 = 7773.074792, y3 = 197.7008310, y4 = 0.}
> F(s) := 14000·s[1] + 21·s[2] + 16·s[3] + 0·s[4];
                         F := s→14000 s_1 + 21 s_2 + 16 s_3 + 0 s_4
> F(s)
                         14000 y1 + 21 y2 + 16 y3 = 361079.2243
```

Оптимальное решение:

$$y_1 = 13.90581717, y_2 = 7773.074792, y_3 = 197.7008310, y_4 = 0$$

Оптимальное значение функции: $F = 361079.2243$.

Вывод

Таким образом, в ходе лабораторной работы были приобретены практические навыки решения задач линейного программирования с использованием симплекс-метода. Во время выполнения работы была решена задача линейного программирования и задача двойственная ей. Результаты проверены в мат. пакете Maple.

Ответы на контрольные вопросы:

1. **Приведите три формы основной задачи линейного программирования.**

   Рассмотрим задачу поиска максимума функции $f: R^n \to R$

   $$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to max, x \in R^n \ (1)$$

   при следующих ограничениях

   $$\sum_{i=1}^{n} a_j^i x_i = b_j,\ x_i \geq 0, j = 1, \dots, m, i = 1, \dots n, m < n \ (2)$$

   Задача (1)-(2) может быть записана в матричной форме

   $$\langle c, x \rangle \to max, Ax = b, x \geq 0 \ (3)$$

   где $x, c \in R^n, b \in R^m, \langle c, x \rangle \coloneqq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$. При этом, вектор c принято называть вектором стоимости, b – вектором ограничений, A – матрицей условий, а задача (3) называется канонической задачей линейного программирования.

   Задача линейного программирования может быть задана в общей форме

   $$\langle c, x \rangle \to max, Ax \leq b, x \geq 0 \ (4)$$

   Переход от общей формы к канонической осуществляется путем замены исходной задачи (4) задачей на максимум и введением дополнительных координат $\tilde{x}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$:

   $$\langle -c, x \rangle \to max, Ax + E\tilde{x} = b, x \geq 0, \tilde{x} \geq 0$$

   где E – единичная матрица.

2. **Какая точка выпуклого множества называется крайней?**

   Точка d выпуклого множества D называется крайне, если не существует точек $d_1, d_2 \in D, d_1 \neq d_2$ и числа $t \in (0,1)$, таких что $d = td_1 + (1-t)d_2$.

3. **Какая задача линейного программирования называется невырожденной?**

   Задача, $\langle c, x\rangle \to max, Ax = b, x \geq 0$,

   называется невырожденной задачей линейного программирования, если любая крайняя точка множества ограничений $(*)$ содержит ровно m положительных координат.

$$\sum_{i=1}^{n} a_j^i x_i = b_j,\ x_i \geq 0, j = 1, \dots, m, i = 1, \dots n, m < n \qquad (*)$$

4. **Назовите известные Вам методы нахождения начальной крайней точки.**

   Метод Жордана-Гаусса, метод искусственного базиса.

5. **Приведите основные этапы решения задачи линейного программирования симплекс методом.**
   1) Привести задачу к канонической форме.
   2) Отыскать крайнюю точку $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0), x_i > 0, i = \overline{1, m}$ множества допустимых элементов D.
   3) Построить симплексную таблицу для начальной крайней точки x.
   4) Исследовать симплексную таблицу.
   5) Построить новую симплексную таблицу для нового базиса. Далее возвращаемся к пункту 4, пока не придем к решению задачи.

6. **Какие задачи линейного программирования называются двойственными?**

   Рассмотрим две задачи линейного программирования

$$\langle c, x\rangle \to max; Ax \leq b, x \geq 0 \ (5)$$

$$\langle b^T, x\rangle \to min; A^T y \geq c^T, y \geq 0 \ (6)$$

   Задача (6) является двойственной по отношению к задаче (5), и наоборот, задача (5) является двойственной по отношению к задаче (8).

7. **Теорема двойственности линейного программирования.**

   Для пары двойственных задач справедлива альтернатива:

1) Если значение одной из задач конечно, то значение другой тоже конечно и эти значения совпадают;
2) Если множество допустимых элементов в одной из задач пусто, то другая задача либо несовместно, либо имеет бесконечное значение.