ГЛАВА 5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§1. ПЕРЕСТАНОВКИ

Рассмотрим множество n целых чисел:

$$M_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Эти числа можно располагать в различном порядке. Каждое такое расположение называют ***перестановкой***. Например, возможны перестановки:

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

$$2, 1, 3, \ldots, n.$$

Вообще, перестановку будем записывать в виде

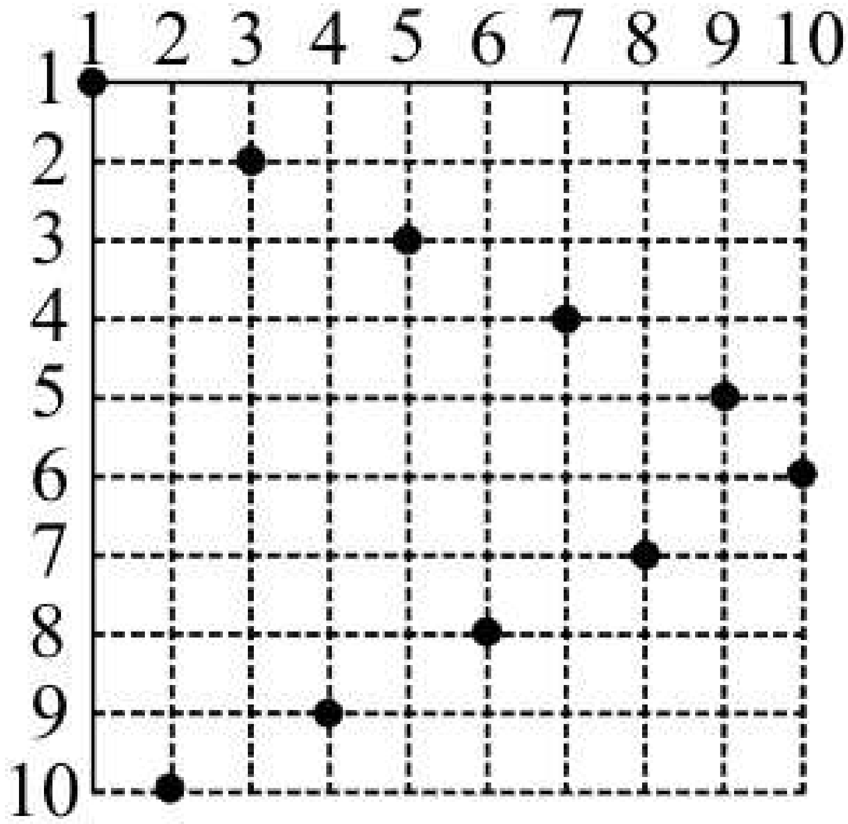
$$n_1, n_2, \ldots, n_n$$

Каждая перестановка определяет взаимнооднозначное отображения множества M_n на себя. При этом отображении

числу 1 соответствует число n_1,

числу 2 соответствует число n_2

и т. д.



Можно построить график такого отображения. Он будет представлять собой n точек, расположенных в узлах целочисленной решетки. Перестановка однозначно определяется ее графиком и наоборот задание графика однозначно определяет перестановку.

Количество всех перестановок множества M_n принято обозначать символом P_n. Покажем, что

$$P_n = 123 \cdots n.$$

Здесь записано произведение всех первых n членов натурального ряда. Принято обозначение

$$123 \cdots n = n!$$

(читается n-факториал).

Для $n = 1$ **и** $n = 2$ **формула**

$$P_n = 123 \cdots n,$$

очевидно, справедлива:

$$M_1 = \{1\} \;\Rightarrow\; P_1 = 1,$$

$$M_2 = \{1, 2\} \;\Rightarrow\; P_2 = 2.$$

Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что равенство

$$P_{n-1} = (n-1)!$$

верно. Возьмем теперь некоторую перестановку множества M_{n-1} и добавим к ней элемент n. Его можно поставить первым, вторым, и, наконец, последним, т. е. n-ым.

Понятно, что таким образом можно создать n перестановок по каждой перестановке множества M_{n-1}, и, поскольку по индуктивному предположению

$$P_{n-1} = (n-1)!,$$

то формула

$$P_n = nP_{n-1} = n(n-1)! = n!$$

доказана.

Будем говорить, что элементы n_i, n_j, $i < j$, перестановки

$$n_1, n_2, \; \ldots, n_n$$

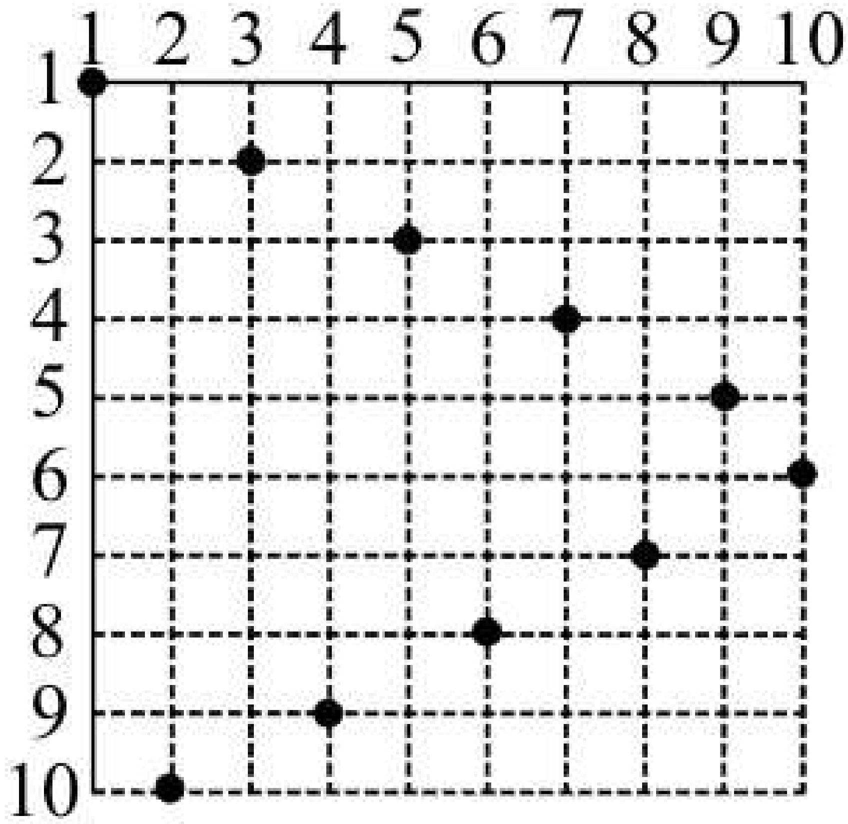
образуют ***инверсию***, если $n_i > n_j$. Например, в перестановке

$$1, 2, 3, \; \ldots, n$$

нет инверсий, а в перестановке

$$2, 1, 3, \; \ldots, n$$

только одна инверсия, ее образуют элементы n_1, n_2.



Если соединить отрезком на графике перестановки точки (i, n_i) и (j, n_j), то он будет иметь отрицательный наклон для точек, образующих инверсию. Какие точки образуют инверсию в перестановке

$$1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 10\ 8\ 6\ 4\ 2\ ?$$

.

Количество всех инверсий данной перестановки будем обозначать

$$\sigma(n_1, n_2, \ldots, n_n)$$

и называть ***сигнатурой*** перестановки.

Перестановка называется ***четной***, если ее сигнатура — четное число (нуль, как обычно, полагаем четным числом). В противном случае перестановка называется ***нечетной***.

Например, перестановка

$$1, 2, 3, \ \ldots, n$$

четная, а перестановка

$$2, 1, 3, \ \ldots, n$$

нечетная.

.

Говорят, что в перестановке выполнена *транспозиция*, если поменяли местами два ее элемента. Чтобы определить транспозицию данной перестановки, нужно задать номера двух, переставляемых элементов.

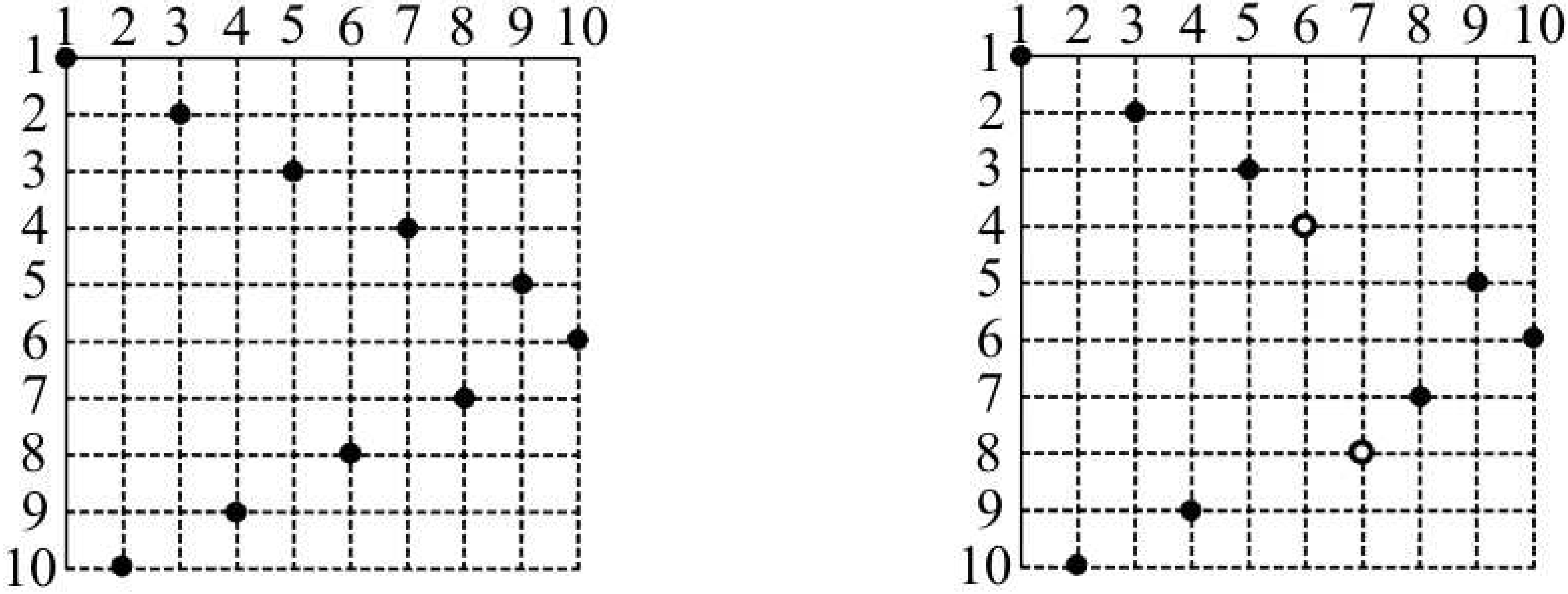
Например, можно сказать, что перестановка

$$2, 1, 3, \ \ldots, n$$

получена из перестановки

$$1, 2, 3, \ \ldots, n$$

транспозицией (1,2).



a *b*

Правая перестановка получена из левой транспозицией (4,8).

.

<u>Теорема.</u> Всякая транспозиция меняет четность перестановки.

.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда выполняется транспозиция соседних элементов перестановки

$$n_i,\ n_{i+1}.$$

.

Инверсия для пар элементов, не содержащих ни n_i ни n_{i+1}, измениться не сможет.

.

Пары, содержащие один из элементов

$$n_i \quad \textbf{или} \quad n_{i+1},$$

в совокупности не приобретут и не потеряют инверсии при такой транспозиции (она сможет лишь перейти от одной пары такого сорта к другой).

Пара

$$n_i, \ n_{i+1}$$

обязательно либо приобретет, либо потеряет инверсию. Это означает что сигнатура перестановки при транспозиции соседних элементов изменится ровно на единицу.

.

Пусть теперь выполняется транспозиция двух произвольных элементов. Для простоты записей можно считать, что меняются местами элементы

$$n_1 \quad \textbf{и} \quad n_k, \quad k > 2.$$

Эту транспозицию можно реализовать путем последовательных транспозиций соседних элементов.

Сначала переместим первый элемент на $k+1$ место, меняя его местами последовательно со вторым, с третьим и т. д. элементами.

Это можно сделать за $k-1$ шагов.

Затем переместим k-й элемент на первое место, переставляя его с $k-1$, $k-2$ и т. д., со вторым элементом.

Это потребует $k-2$ шагов.

Итак, выполнив

$$k - 2 + k - 1 = 2k - 3 = 2(k - 1) - 1$$

(нечетное количество) транспозиций соседних элементов мы поменяем местами элементы n_1 и n_k.

.

Таким образом, сигнатура перестановки при любой транспозиции (i, k) меняется на нечетное число и потому четность перестановки меняется. $\square$

.

<u>Теорема.</u> При любом n количества четных и нечетных перестановок совпадают.

Доказательство. Из предыдущей теоремы вытекает, что всякую четную перестановку можно превратить в нечетную, поменяв местами каких-либо два ее элемента. Справедливо и обратное.

Значит, между двумя множествами всех четных и нечетных перестановок можно установить взаимнооднозначное соответствие. Эти два множества конечны, поэтому имеют равные количества элементов. $\square$

§2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Квадратной матрицей порядка n называется таблица, состоящая из n строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы A назовем величину

$$|A| = \sum_{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,n_3,\ldots,n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}.$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$\Delta = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поясним, что определителем матрицы порядка n,

$$|A| = \sum_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n},$$

является сумма $n!$ слагаемых, составленная следующим образом:

слагаемыми служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца,

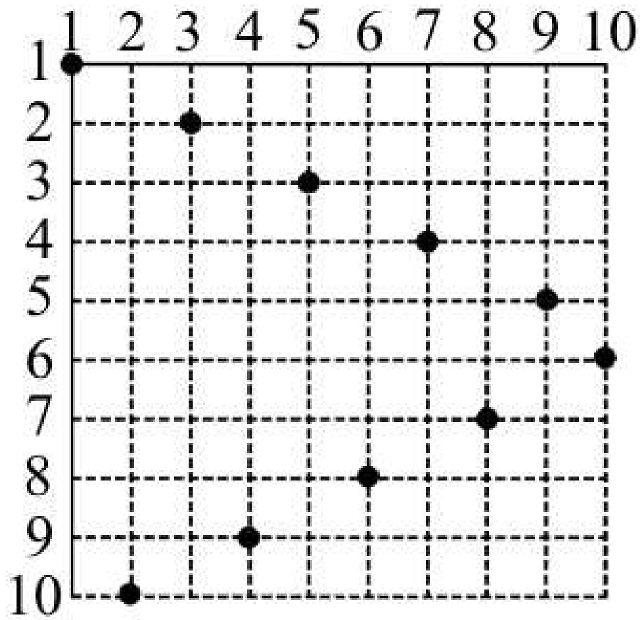
слагаемое берется со знаком плюс, если перестановка $n_1 n_2 n_3 \ldots n_n$ четная, и со знаком минус — в противоположном случае.

.

При любом n количества четных и нечетных перестановок совпадают. Следовательно, количество слагаемых в

$$|A| = \sum_{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,n_3,\ldots,n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}$$

со знаком плюс равно количеству слагаемых со знаком минус.



Элементы матрицы, участвующие в слагаемом определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

соответствующем перестановке $n_1 n_2 n_3 \dots n_n$, изображаются точками графика этой перестановки.

Говорят, что элементы $a_{1n_1}, a_{2n_2}, \ldots, a_{nn_n}$ составляют ***диагональ*** матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональ называется ***четной***, если перестановка $n_1 n_2 \ldots n_n$ четная и — ***нечетной*** в противном случае.

.

<u>Упражнение.</u> Докажите равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поясним, что слева — определитель порядка n, а справа — порядка $n-1$.

§3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Если одна из строк (один из столбцов) определителя состоит только из нулей, то этот определитель равен нулю:

$$|A| = \begin{vmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \dots & \underline{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)} \underline{a_{1n_1}} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} = 0.$$

Действительно, в этом случае каждая диагональ матрицы A сдержит нулевой элемент:

$$\underline{a_{1n_1}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{a_{1n_1}} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} = 0.$$

.

2. <u>Упражнение.</u> Докажите, что определитель <u>линеен</u> по каждой строке (по каждому столбцу):

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11}+\beta b_{11} & \alpha a_{12}+\beta b_{12} & \dots & \alpha a_{1n}+\beta b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

.

3. Если в определителе две строки (два столбца) совпадают, то он равен нулю.

Пусть совпадают строки с номерами k и l, $k < l$.

Множество всех диагоналей матрицы A можно представить в виде объединения множества пар:

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \ldots, \underline{a_{kn_k}}, \ldots, \underline{\underline{a_{ln_l}}}, \ldots, a_{nn_n},$$

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \ldots, \underline{\underline{a_{kn_l}}}, \ldots, \underline{a_{ln_k}}, \ldots, a_{nn_n}.$$

Например, определитель третьего порядка можно записать так:

$$|A| =$$

$$= a_{11}\underline{a_{22}}\,\underline{\underline{a_{33}}} - a_{11}\underline{\underline{a_{23}}}\,\underline{a_{32}} +$$

$$+ a_{12}\underline{a_{23}}\,\underline{\underline{a_{31}}} - a_{12}\underline{\underline{a_{21}}}\,\underline{a_{33}} +$$

$$+ a_{13}\underline{a_{21}}\,\underline{\underline{a_{32}}} - a_{13}\underline{\underline{a_{22}}}\,\underline{a_{31}}.$$

Диагонали каждой пары

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \; \ldots, \underline{a_{kn_k}}, \; \ldots, \underline{\underline{a_{ln_l}}}, \; \ldots, a_{nn_n},$$

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \; \ldots, \underline{\underline{a_{kn_l}}}, \; \ldots, \underline{a_{ln_k}}, \; \ldots, a_{nn_n}$$

имеют противоположные четности, так как соответствующие им перестановки получены одна из другой путем транспозиции

$$(k, l).$$

Например, в определителе третьего порядка — транспозиции $(2, 3)$:

$$|A| =$$

$$= a_{11}\underline{a_{22}}\,\underline{\underline{a_{33}}} - a_{11}\underline{\underline{a_{23}}}\,\underline{a_{32}} +$$

$$+ a_{12}\underline{a_{23}}\,\underline{\underline{a_{31}}} - a_{12}\underline{\underline{a_{21}}}\,\underline{a_{33}} +$$

$$+ a_{13}\underline{a_{21}}\,\underline{\underline{a_{32}}} - a_{13}\underline{\underline{a_{22}}}\,\underline{a_{31}}.$$

.

Произведения элементов этих диагоналей совпадают:

$$a_{1n_1}a_{2n_2}\cdots\underline{a_{kn_k}}\cdots\underline{\underline{a_{ln_l}}}\cdots a_{nn_n}=$$

$$=a_{1n_1}a_{2n_2}\cdots\underline{\underline{a_{kn_l}}}\cdots\underline{a_{ln_k}}\cdots a_{nn_n},$$

так как совпадают строки с номерами k и l,

$$\underline{a_{kn_k}}=\underline{a_{ln_k}},\quad \underline{\underline{a_{kn_l}}}=\underline{\underline{a_{ln_l}}}.$$

Например, в определителе третьего порядка имеем

$$a_{11}\underline{a_{22}}\,\underline{\underline{a_{33}}}=a_{11}\underline{\underline{a_{23}}}\,\underline{a_{32}},$$

$$a_{12}\underline{a_{23}}\,\underline{\underline{a_{31}}}=a_{12}\underline{\underline{a_{21}}}\,\underline{a_{33}},$$

$$a_{13}\underline{a_{21}}\,\underline{\underline{a_{32}}}=a_{13}\underline{\underline{a_{22}}}\,\underline{a_{31}}.$$

.

Это означает, что слагаемые определителя, отвечающие каждой такой паре, в сумме дают нуль:

$$|A| = \sum_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} = 0.$$

.

4. <u>Упражнение.</u> Докажите, что при перестановке двух строк (двух столбцов) определитель меняет знак.

.

5. <u>Упражнение.</u> Докажите, что определитель не изменится, если к некоторой его строке добавить другую, умноженную на произвольное число. Это же справедливо и для столбцов.

.

6. Введенные ранее понятия алгебраических дополнений и миноров дословно переносятся на случай определителей произвольного порядка.

.

<u>Алгебраическое дополнение</u> A_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ получается заменой в $|A|$ элемента a_{ij} единицей, всех остальных элементов i-той строки и j-того столбца нулями.

.

Минор M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ — определитель порядка $n-1$, получающийся из $|A|$ вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

.

Без каких либо изменений проходит и доказательство формулы, аналогичной формуле

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = |A|\delta_{ik}, \quad i,\ k = 1,\ 2,\ 3,$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0,\ i \neq k, \\ 1,\ i = k. \end{cases}$$

.

Таким образом, для любого определителя |A|

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1,\ 2,\ \dots, n.$$

.

Справедлива и формула разложения определителя по столбцу:

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \cdots + a_{ni}A_{nk} = |A|\delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

.

Пример. Вычислим определитель пятого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

.

Добьемся того, чтобы все <u>элементы третьего столбца</u>, кроме последнего, были <u>нулями</u>:

— умножим последнюю строку на 3 и прибавим ко второй,

— умножим последнюю строку на 4 и вычтем из четвертой строки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

.

Разложим определитель по третьему столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+5}(-1) \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

.

Добьемся того, чтобы все элементы первого столбца, кроме второго, были нулями:

— умножим вторую строку на 2 и прибавим к первой,

— умножим вторую строку на 3 и вычтем из третьей,

— умножим вторую строку на 2 и вычтем из последней.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -\ 9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

.

Разложим определитель по первому столбцу:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -\ 9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель третьего порядка, разложив его по третьей строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} =$$

$$= 36 \begin{vmatrix} 25 & 17 \\ -34 & -26 \end{vmatrix} - (-33) \begin{vmatrix} -13 & 17 \\ 26 & -26 \end{vmatrix} + (-24) \begin{vmatrix} -13 & 25 \\ 26 & -34 \end{vmatrix} =$$

$$= 36(-72) - (-33)(-104) + (-24)(-208) = -1032.$$

.

7. Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей, *транспонированной* по отношению к

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определители матриц A и A^T совпадают:

$$|A| = |A^T|.$$

Докажем это утверждение индукцией по порядку определителя. Для определителя второго порядка равенство $|A| = |A^T|$ выполняется очевидным образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Предположим справедливость равенства $|A| = |A^T|$ для произвольного определителя порядка $n-1$ и покажем, что тогда оно верно и для произвольного определителя порядка n.

.

Представим $|A|$ в виде разложения по первой строке:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}.$$

Определитель $|A^T|$ разложим по первому столбцу:

$$|A^T| = a_{11}M_{11}^T - a_{12}M_{21}^T + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{n1}^T.$$

Здесь M_{ij}^T — минор определителя $|A^T|$, соответствующий элементу этого определителя, находящегося в позиции i, j.

.

По предположению индукции имеем, что

$$M_{ij}^T = M_{ji},$$

следовательно, из

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n},$$

$$|A^T| = a_{11}M_{11}^T - a_{12}M_{21}^T + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{n1}^T$$

заключаем

$$|A^T| = |A|.$$

8. Будем говорить, что строки матрицы A ***линейно зависимы***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все одновременно равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \cdots + \alpha_n a_{nj} = 0, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Для того, чтобы определитель матрицы A был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее строки были линейно зависимы.

То, что из линейной зависимости строк вытекает равенство нулю определителя доказывается точно так же, как и для определителя третьего порядка.

Действительно, если одна из строк определителя — линейная комбинация остальных, то эквивалентными преобразованиями можно эту строку обнулить.

.

Докажем обратное утверждение. Пусть

$$|A| = 0.$$

Рассмотрим все определители d_{n-1} порядка $n-1$, получающиеся вычеркиванием одной строки и одного столбца из A. Если все

$$d_{n-1} = 0,$$

перейдем к определителям d_{n-2} и т. д.

.

Если в конце концов все элементы матрицы A окажутся равными нулю, тогда доказываемое утверждение будет выполнено тривиальным образом.

.

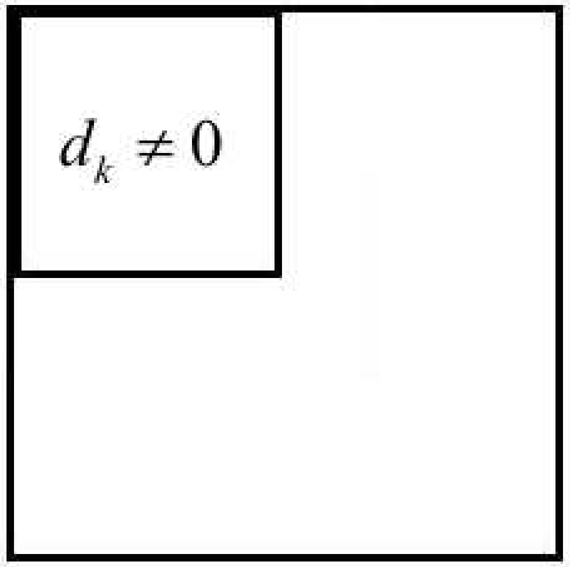
Пусть найдется ненулевой определитель порядка $k \geqslant 1$, полученный вычеркиванием $n-k$ строк и столбцов матрицы A:

$$d_k \neq 0.$$

Пусть все определители большего порядка будут нулями:

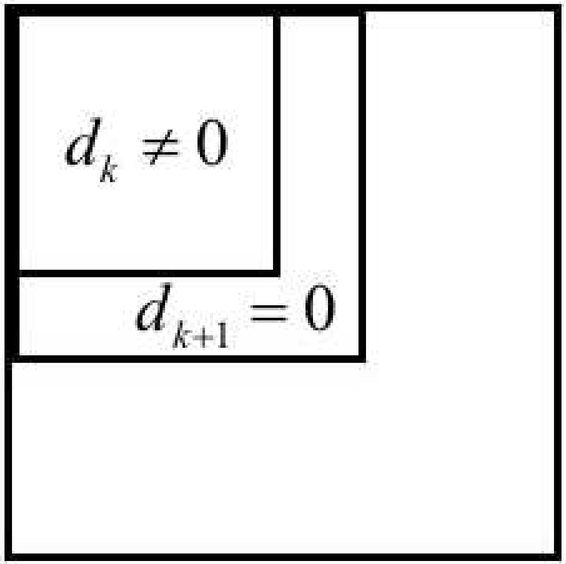
$$d_{k+1} = 0.$$

.



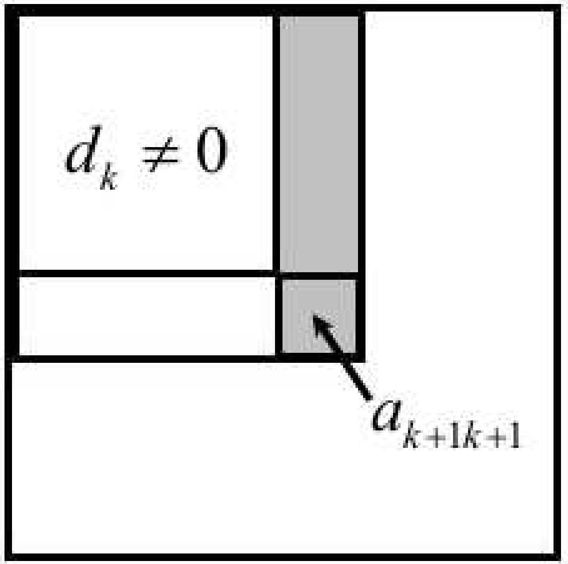
Поскольку при перестановке строк и столбцов меняется лишь знак определителя, то можно считать, что определитель d_k составлен из элементов первых k строк и первых k столбцов матрицы A.

.



Рассмотрим нулевой по предположению определитель, составленный из первых $k+1$ строк и первых $k+1$ столбцов матрицы A:

$$d_{k+1} = 0.$$

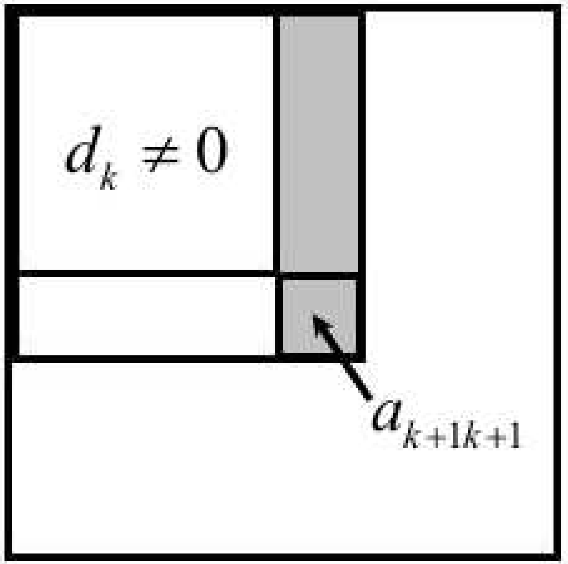


Разложим определитель $d_{k+1} = 0$ по элементам последнего столбца:

$$\alpha_1 a_{1k+1} + \alpha_2 a_{2k+1} + \cdots + \alpha_k a_{kk+1} + d_k a_{k+1k+1} = 0,$$

$d_k \neq 0$ — алгебраическое дополнение к a_{k+1k+1} в определителе d_{k+1}.

.

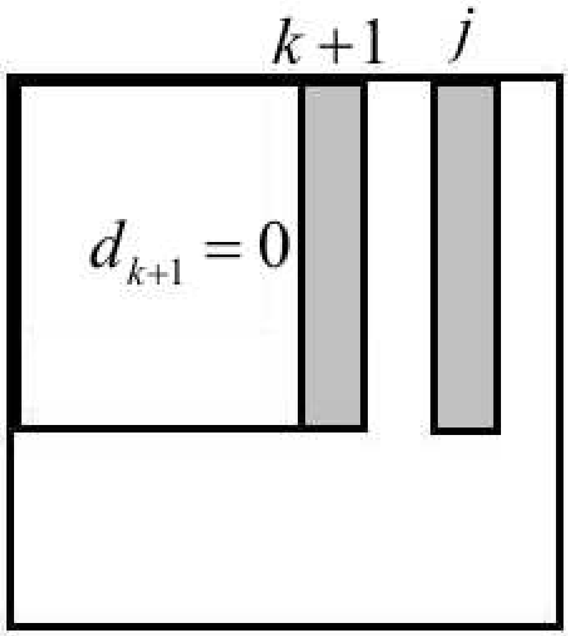


В разложении

$$\alpha_1 a_{1k+1} + \alpha_2 a_{2k+1} + \cdots + \alpha_k a_{kk+1} + d_k a_{k+1k+1} = 0$$

числа α_1, α_2, ..., α_k — алгебраические дополнения соответствующих элементов последнего столбца определителя d_{k+1}. Они зависят только от элементов первых k столбцов определителя d_{k+1}.

.

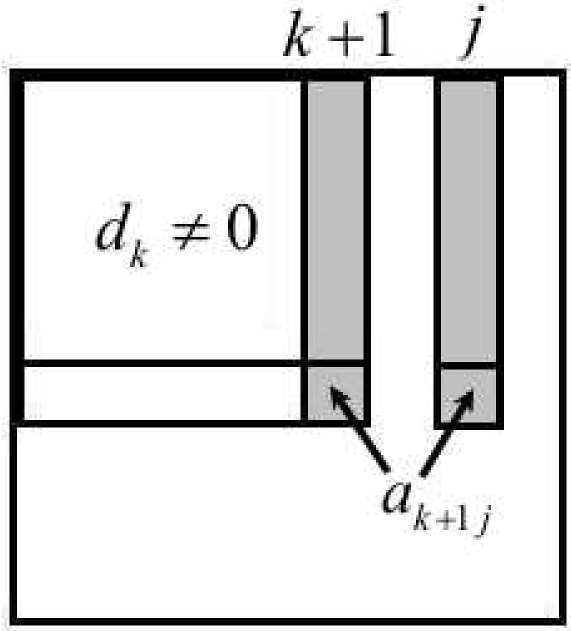


Переставляя столбцы определителя $|A|$, мы можем составить последний столбец определителя d_{k+1} из элементов

$$a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{kj},\ a_{k+1\,j},\quad j=k+2,\ k+3,\ \ldots,\ n.$$

По предположению такой определитель равен нулю: $d_{k+1}=0$.

.

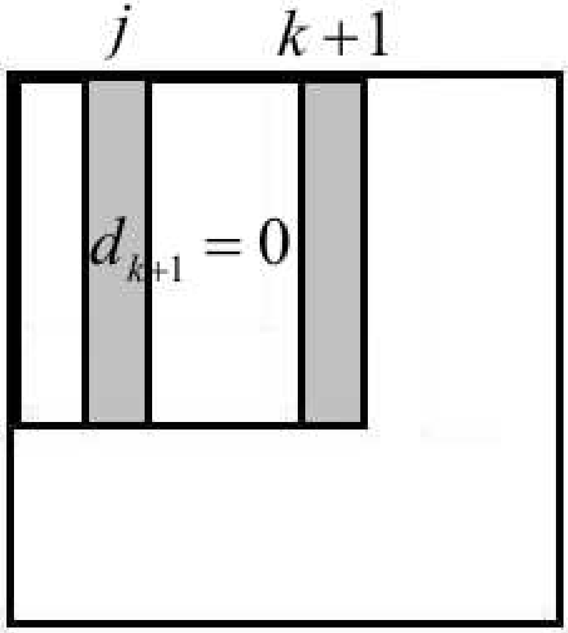


Разложим определитель $d_{k+1} = 0$ по последнему столбцу:

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1\,j} = 0, \quad j = k+2,\ k+3,\ \dots,\ n.$$

Отметим, что $d_k \neq 0$ и числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_k$ те же, что и ранее.

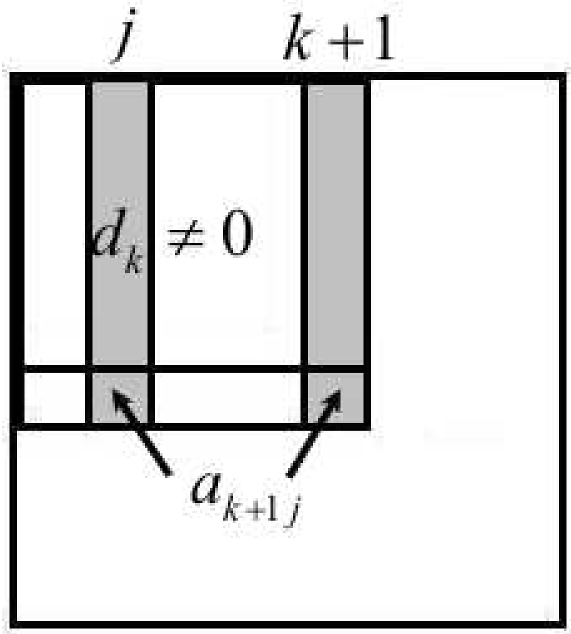
.



Поместим на место $k+1$ столбца определителя d_{k+1} его же столбец с номером $j \leqslant k$. Получим определитель с равными столбцами:

$$d_{k+1} = 0.$$

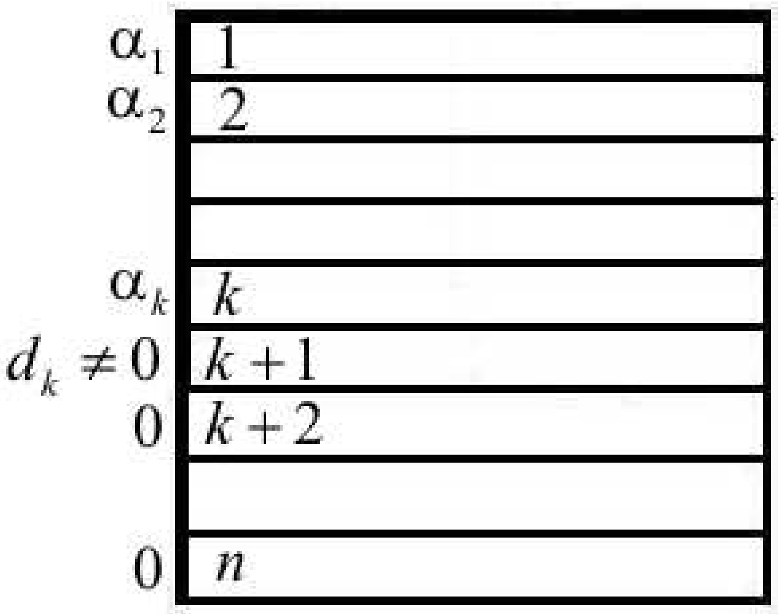
.



Разложим определитель $d_{k+1} = 0$ по последнему столбцу:

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \cdots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} = 0, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, k.$$

Имеем те же коэффициенты, что и ранее: $d_k \neq 0$, α_1, α_2, $\ldots$, α_k.



Теперь можно написать:

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \cdots + \alpha_k a_{kj} + \underline{\underline{d_k}} a_{k+1j} + 0 \cdot a_{k+2j} + \cdots + 0 \cdot a_{nj} = 0,$$

$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $d_k \neq 0$. Это означает, что строки матрицы A линейно зависимы.

.

Замечание. Поскольку $|A^T| = |A|$, то, очевидно, для того, чтобы определитель матрицы A был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее столбцы были линейно зависимы.

§4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Определитель треугольной матрицы.

Матрицу A называют ***верхней треугольной***, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$.

Матрицу A называют ***нижней треугольной***, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

Если матрица A треугольная, то

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Докажем это утверждение применительно к верхней треугольной матрице. Для нижней треугольной матрицы рассуждения полностью аналогичны.

.

Для матриц второго порядка утверждение справедливо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}.$$

Для доказательства формулы при произвольном n используем метод математической индукции, т. е. предположим, что для определителей $(n-1)$-го порядка она уже доказана, и рассмотрим определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель $|A|$ по первому столбцу, получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

К минору, стоящему в правой части, применимо предположение индукции, т. е. он равен произведению $\underline{\underline{a_{22}a_{33}\dots a_{nn}}}$, поэтому

$$|A| = a_{11}\underline{\underline{a_{22}a_{33}\dots a_{nn}}}.$$

Определитель Вандермонда. Так называют определитель вида

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Александр Теофил Вандермонд (Alexandre-Theophile Vandermonde; 1735 — 1796) — французский музыкант и математик.

Покажем, что при любом $n \geqslant 2$ определитель Вандермонда

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

равен произведению всевозможных разностей

$$a_i - a_j, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant j < i \leqslant n :$$

$$d = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

Доказываемая формула очевидно справедлива при $n = 2$:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

.

Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что для определителей $(n-1)$-го порядка формула уже доказана, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

Рассмотрим определитель

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

— **Умножим $n-1$-ю строку на a_1 и вычтем из последней (n-й).**

— **Умножим $n-2$-ю строку на a_1 и вычтем из $(n-1)$-й.**

$\dots$

— **Умножим 1-ю строку на a_1 и вычтем из 2-й.**

.

В результате такой последовательности преобразований получим

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \ldots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

.

Разлагая определитель d по первому столбцу, получим определитель $(n-1)$-го порядка:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что общим множителем всех элементов первого столбца является a_2-a_1, общим множителем всех элементов второго столбца является $a_3 - a_1$ и т. д.:

$$d = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

.

Вынесем общие множители столбцов. Получим

$$d = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

где последний множитель — определитель Вандермонда $(n-1)$-го порядка.

.

Следовательно,

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j) = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j).$$

§5. КРАМЕРОВСКИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе будем рассматривать системы линейных уравнений, у которых количество неизвестных равно числу уравнений. В самом общем виде эта система может быть записана так:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{gathered}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов уравнений называется ***матрицей системы***. Будем предполагать, что

$$|A| \neq 0.$$

В этом случае систему уравнений называют ***крамеровской***.

Набор чисел $\underline{\underline{b_1, b_2, \ \ldots, b_n}}$ называют ***столбцом правой части*** (или просто ***правой частью***) системы

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \underline{\underline{b_1}}, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \underline{\underline{b_2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \underline{\underline{b_n}}.
\end{gathered}
$$

Если правая часть системы нулевая, т. е.

$$\underline{b_i = 0} \quad \text{для всех} \quad i = 1,\ 2,\ \ \ldots,\ n,$$

то система называется ***однородной***.

Однородная система уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0$$

всегда имеет решение. Например, можно положить

$$x_1,\ x_2,\ \ \ldots,\ x_n = 0.$$

Такое решение называют *тривиальным*.

.

<u>Теорема.</u> Однородная крамеровская система уравнений может иметь только тривиальное решение.

.

<u>Доказательство.</u> Предположим противное. Тогда для некоторого набора чисел x_1, x_2, ..., x_n, среди которых <u>по крайней мере одно не равно нулю</u>, справедливы равенства

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{gathered}$$

т. е. столбцы матрицы A линейно зависимы, но по условию т–мы

$$|A| \neq 0.$$

Значит предположение о наличии нетривиального решения у однородной крамеровской системы неверно. $\square$

.

<u>Теорема.</u> При любой правой части крамеровская система не может иметь двух различных решений.

<u>Доказательство.</u> Предположим противное и пусть

$$x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_n^1;$$

и

$$x_1^2,\ x_2^2,\ \ldots,\ x_n^2$$

представляют собой два различных решения системы, т. е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \ldots + a_{1n}x_n^1 = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \ldots + a_{nn}x_n^1 = b_n \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = b_n. \end{cases}$$

Положим

$$x_1 = x_1^1 - x_1^2, \quad x_2 = x_2^1 - x_2^2, \ \ldots, \quad x_n = x_n^1 - x_n^2$$

и вычтем почленно одноименные уравнения систем

$$\begin{cases} \underline{a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \ldots + a_{1n}x_n^1 = b_1,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{\underline{a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \ldots + a_{nn}x_n^1 = b_n}} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \underline{a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 = b_1,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{\underline{a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = b_n.}} \end{cases}$$

.

В результате получим, что числа

$$x_1 = x_1^1 - x_1^2, \quad x_2 = x_2^1 - x_2^2, \;\; \ldots, \quad x_n = x_n^1 - x_n^2$$

дают решение однородной системы

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Однородная крамеровская система уравнений может иметь только тривиальное решение. Поэтому

$$x_1 = x_2 = \ \ldots\ = x_n = 0,$$

т. е. предположение о наличии двух различных решений неверно. $\square$

.

<u>Теорема.</u> Крамеровская система уравнений при любой правой части имеет решение.

<u>Доказательство.</u> **Построим решение системы**

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,
\end{aligned}
$$

опираясь на формулу

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

.

Будем разыскивать решение системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \underline{\underline{b_1}},$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \underline{\underline{b_2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \underline{\underline{b_n}}$$

в виде

$$x_i = c_{i1}\underline{\underline{b_1}} + c_{i2}\underline{\underline{b_2}} + \cdots + c_{in}\underline{\underline{b_n}}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где коэффициенты c_{ij}, i, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, подлежат определению.

Подставим выражения

$$x_1 = \underline{c_{11}} b_1 + \underline{c_{12}} b_2 + \dots + \underline{c_{1n}} b_n,$$

$$x_2 = \underline{\underline{c_{21}}} b_1 + \underline{\underline{c_{22}}} b_2 + \dots + \underline{\underline{c_{2n}}} b_n,$$

$$\dots$$

$$x_n = \underline{\underline{\underline{c_{n1}}}} b_1 + \underline{\underline{\underline{c_{n2}}}} b_2 + \dots + \underline{\underline{\underline{c_{nn}}}} b_n$$

в первое уравнение системы:

$$\underline{a_{11}} x_1 + \underline{\underline{a_{12}}} x_2 + \ldots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}}}} x_n = b_1.$$

Соберем слева коэффициенты при b_1, b_2, $\ldots$, b_n. **Получим**

$$b_1(\underline{a_{11}c_{11}} + \underline{\underline{a_{12}c_{21}}} + \dots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{n1}}}}) +$$

$$+ b_2(\underline{a_{11}c_{12}} + \underline{\underline{a_{12}c_{22}}} + \dots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{n2}}}}) + \dots$$

$$\dots + b_n(\underline{a_{11}c_{1n}} + \underline{\underline{a_{12}c_{2n}}} + \dots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{nn}}}}) = b_1.$$

Продолжим этот процесс и подставим выражения

$$x_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \cdots + c_{in}b_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

во все уравнения системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Соберем слева коэффициенты при одинаковых b_i. Получим

$$b_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{21} + \cdots + a_{in}c_{n1}) + \cdots$$

$$\cdots + b_i(a_{i1}c_{1i} + a_{i2}c_{2i} + \cdots + a_{in}c_{ni}) + \cdots$$

$$\cdots + b_n(a_{i1}c_{1n} + a_{i2}c_{2n} + \cdots + a_{in}c_{nn}) = b_i,$$

где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

.

Если выбрать c_{ik} так, чтобы выполнялись условия

$$a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \cdots + a_{in}c_{nk} = \delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

то равенства

$$b_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{21} + \cdots + a_{in}c_{n1}) + \\ \cdots + b_i(\underline{\underline{a_{i1}c_{1i} + a_{i2}c_{2i} + \cdots + a_{in}c_{ni}}}) + \cdots \\ \cdots + b_n(a_{i1}c_{1n} + a_{i2}c_{2n} + \cdots + a_{in}c_{nn}) = b_i,$$

где $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, будут выполнены.

Сравнивая соотношения

$$\underline{a_{i1}}c_{1k}+\underline{\underline{a_{i2}}}c_{2k}+\cdots+\underline{\underline{\underline{a_{in}}}}c_{nk}=\delta_{ik},\quad i,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

с формулой

$$\underline{a_{i1}}A_{k1}+\underline{\underline{a_{i2}}}A_{k2}+\cdots+\underline{\underline{\underline{a_{in}}}}A_{kn}=|A|\delta_{ik},\quad i,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

нетрудно заметить, что если положить

$$c_{ik}=\frac{A_{ki}}{|A|},\quad i,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

то требуемые условия будут выполнены.

.

Подставим выражения

$$c_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

в

$$x_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \cdots + c_{in}b_n, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Получим следующие формулы для решения системы:

$$x_i = \frac{(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n)}{|A|}, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

.

Используя разложение определителя по столбцу, соотношения

$$x_i = \frac{(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n)}{|A|}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

можно переписать в более компактном виде:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Здесь $\Delta = |A|$, Δ_i — определитель, который получается, если заменить i-тый столбец определителя $|A|$ правой частью системы

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{gathered}$$

$\square$

.

Формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

называют ***формулами Крамера***.

<u>Пример.</u> Решим систему уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -4,$$

$$2x_1 + x_3 - x_4 = -1,$$

$$2x_2 - x_3 - 3x_4 = -3.$$

Эта система крамеровская, действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

.

Теперь для системы

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -2,\\
x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4,\\
2x_1 + x_3 - x_4 &= -1,\\
2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3
\end{aligned}
$$

вычислим определитель

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 4.
$$

.

Для той же системы

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -2,\\
x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4,\\
2x_1 + x_3 - x_4 &= -1,\\
2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3
\end{aligned}
$$

вычислим определитель

$$
\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -4.
$$

.

Далее для системы

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -2,\\
x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4,\\
2x_1 + x_3 - x_4 &= -1,\\
2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3
\end{aligned}
$$

вычислим определитель

$$
\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -8.
$$

.

И наконец для системы

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -2, \\
x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4, \\
2x_1 + x_3 - x_4 &= -1, \\
2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3
\end{aligned}
$$

вычислим определитель

$$
\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4.
$$

.

По формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{4} = -2,$$

$$x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1.$$

На практике формулы Крамера используются очень редко. Чаще всего для решения систем линейных алгебраических уравнений применяются различные варианты метода Гаусса.

В качестве примера применения теории крамеровских систем построим так называемую *интерполяционную формулу Лагранжа*.

Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange; 1736 — 1813) — французский математик, астроном и механик итальянского происхождения.

.

<u>Теорема.</u> Пусть даны попарно различные числа

$$z_0, \quad z_1, \ \ldots, \quad z_n$$

и произвольные числа

$$h_0, \quad h_1, \ \cdots, \quad h_n.$$

Тогда существует и при том только один полином

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

такой, что

$$P_n(z_j) = h_j, \quad j = 0, \ 1, \ \ldots, \ n.$$

.

Доказательство. Условия

$$P_n(z_j) = a_0 + a_1 z_j + a_2 z_j^2 + \cdots + a_n z_j^n = h_j, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

представляют собой систему линейных уравнений относительно коэффициентов полинома P_n:

$$\begin{gathered}
1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \ldots + z_0^n a_n = h_0, \\
1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \ldots + z_1^n a_n = h_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \ldots + z_n^n a_n = h_n.
\end{gathered}$$

.

Определитель системы

$$1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \ldots + z_0^n a_n = h_0,$$
$$1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \ldots + z_1^n a_n = h_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \ldots + z_n^n a_n = h_n$$

есть определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & z_2^2 & \ldots & z_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_0^n & z_1^n & z_2^n & \ldots & z_n^n \end{vmatrix}.$$

Числа z_0, z_1, $\ldots$, z_n попарно различны. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & z_2^2 & \ldots & z_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_0^n & z_1^n & z_2^n & \ldots & z_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n} (z_i - z_j) \neq 0.$$

Поэтому система уравнений

$$1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \ldots + z_0^n a_n = h_0,$$

$$1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \ldots + z_1^n a_n = h_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \ldots + z_n^n a_n = h_n$$

имеет единственное решение при любой правой части. $\square$

.

Теперь ясно, что, если полином всюду (по крайней мере в $n+1$ различных точках) равен нулю, то все его коэффициенты — нули. Действительно, однородная крамеровская система

$$1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \ldots + z_0^n a_n = 0,$$
$$1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \ldots + z_1^n a_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \ldots + z_n^n a_n = 0$$

имеет только тривиальное решение.

.

Построим в явном виде полином, удовлетворяющий условиям

$$P_n(z_j) = h_j, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Решение этой задачи дает ***интерполяционная формула Лагранжа***

$$P_n(z) = P_n(z_0)\Phi_0(z) + P_n(z_1)\Phi_1(z) + \cdots + P_n(z_n)\Phi_n(z),$$

где Φ_j — полином степени n, удовлетворяющий условиям

$$\Phi_j(z_k) = 0, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ j-1,\ j+1,\ \ldots,\ n,$$

$$\Phi_j(z_j) = 1,$$

для $j = 0, 1, 2 \ldots, n$.

.

Полином своими корнями определяется с точностью до постоянного множителя:

$$\Phi_j(z) = A_j(z - z_0)(z - z_1)\cdots(z - z_{j-1})(z - z_{j+1})\cdots(z - z_n).$$

Используя

$$\Phi_j(z_j) = 1,$$

найдем значение постоянной:

$$A_j = \frac{1}{(z_j - z_0)(z_j - z_1)\cdots(z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1})\cdots(z_j - z_n)},$$

т. е.

$$\Phi_j(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_1)\cdots(z - z_{j-1})(z - z_{j+1})\cdots(z - z_n)}{(z_j - z_0)(z_j - z_1)\cdots(z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1})\cdots(z_j - z_n)},$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

§6. МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Прямоугольной матрицей A размера $m \times n$ называется таблица, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементами таблицы служат числа a_{ij} (вообще говоря, комплексные). Иногда будем явно указывать размеры матрицы A:

$$A(m \times n).$$

Отметим некоторые частные случаи. При

$$m = n$$

получаем ***квадратную матрицу***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ее размер (***порядок***) будем обозначать одной буквой n.

Если $m = 1$, а n произвольно получаем ***матрицу-строку*** (или, просто, ***строку***)

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Говорят, что эта строка имеет ***длину*** n.

.

Если $n = 1$, а m произвольно, получаем ***матрицу-столбец*** (или, просто, ***столбец***)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Говорят, что этот столбец имеет ***длину*** m.

Подчеркнем, что при записи строк и столбцов, второй индекс, обычно, не пишут:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Столбцы или строки часто будем называть ***векторами***.

.

Матрица называется ***нулевой***, если все ее элементы нули. Нулевая матрица обозначается символом 0:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

.

Опишем некоторые специальные виды квадратных матриц.

Элементы $\underline{\underline{a_{11}}}, \underline{\underline{a_{22}}}, \ldots, \underline{\underline{a_{nn}}}$ образуют <u>***главную диагональ***</u> квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \underline{\underline{a_{11}}} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \underline{\underline{a_{22}}} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \underline{\underline{a_{nn}}} \end{pmatrix}.$$

.

Квадратная матрица D называется ***диагональной***, если

$$d_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

или, подробнее,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для диагональной матрицы будем использовать также обозначение

$$D = \operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}).$$

Диагональная матрица называется ***единичной***, если

$$a_{ii} = 1 \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Единичную матрицу будем обозначать буквой I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица P_{ik} называется ***матрицей перестановок***, если она получена из I перестановкой строк с номерами i и k. Например, матрицами перестановок третьего порядка являются матрицы

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица L называется ***нижней треугольной***, если все ее элементы, стоящие выше главной диагонали, равны нулю:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица U называется ***верхней треугольной***, если все ее элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

.

Квадратная матрица

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \cdots & l_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \cdots & l_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *элементарной нижней треугольной*. Поясним, что эта матрица отличается от I лишь элементами k-го столбца.

Умножение матрицы на число, сложение матриц.

Произведением матрицы A ***и числа*** α **называется матрица**

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

(все элементы матрицы A **умножаются на число** α**).**

Суммой двух матриц A, B одинаковых размеров называется матрица C того же размера с элементами

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Пишут:

$$C = A + B.$$

.

Упражнение. Убедиться, что введенные операции обладают следующим свойствами:

1) $A + 0 = A$,

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

3) $A + B = B + A$,

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Отметим, что сумма двух нижних (верхних) треугольных матриц — нижняя (верхняя) треугольная матрица.

Произведение матриц и векторов.

По определению ***произведение строки*** x ***и столбца*** y одинаковой длины n есть число:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

.

<u>Пример.</u>

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10.$$

Произведением матрицы A размера $m \times n$ ***и вектора*** x длины n называется вектор y длины m с элементами

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Символически это записывают так:

$$y = Ax.$$

.

Иногда будем применять более подробную запись:

$$\begin{pmatrix} \underline{y_1} \\ \underline{\underline{y_2}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{\underline{y_m}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \cdots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \cdots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \underline{\underline{\underline{a_{m1}}}} & \underline{\underline{\underline{a_{m2}}}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{a_{mn}}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Элементы вектора y вычисляются следующим образом:

— столбец x последовательно накладывается на строки матрицы A,

— соответствующие элементы попарно перемножаются,

— затем полученные n величин суммируются.

.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Для любых чисел α, β и для любых векторов x, y (подходящей длины) справедливо равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay,$$

т. е. операция умножения матрицы на вектор ***линейна***.

Действительно,

$$A(\alpha x + \beta y) = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \cdots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \cdots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{\underline{a_{m1}}}} & \underline{\underline{\underline{a_{m2}}}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{a_{mn}}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \cdots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \cdots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{\underline{a_{m1}}}} & \underline{\underline{\underline{a_{m2}}}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{a_{mn}}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \cdots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \cdots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{\underline{a_{m1}}}} & \underline{\underline{\underline{a_{m2}}}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{a_{mn}}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha A x + \beta A y.$$

Произведением строки x длины m ***и матрицы*** A размера $m \times n$ называется строка y длины n с элементами

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Символически это записывают так:

$$y = xA.$$

Иногда будем применять более подробную запись:

$$\left(\underline{y_1}, \underline{\underline{y_2}}, \ldots, \underline{\underline{\underline{y_n}}}\right) = \left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{\underline{a_{12}}} & \ldots & \underline{\underline{\underline{a_{1n}}}} \\ \underline{a_{21}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \ldots & \underline{\underline{\underline{a_{2n}}}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underline{a_{m1}} & \underline{\underline{a_{m2}}} & \ldots & \underline{\underline{\underline{a_{mn}}}} \end{pmatrix}.$$

Элементы строки y вычисляются следующим образом:

— столбцы матрицы A последовательно накладывается на строку x,

— соответствующие элементы попарно перемножаются,

— затем полученные m величин суммируются.

.

<u>Пример.</u>

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из определения вытекает, что для любых чисел α, β и для любых строк x, y (подходящей длины) справедливо равенство

$$(\alpha x + \beta y)A = \alpha xA + \beta yA,$$

т. е. операция умножения строки на матрицу ***линейна***. Это проверяется так же, как и линейность умножения матрицы на вектор.

Система n линейных уравнений с n неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

может быть записана в виде

$$Ax = b,$$

подробнее,

$$\begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \cdots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \cdots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underline{\underline{\underline{a_{n1}}}} & \underline{\underline{\underline{a_{n2}}}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{a_{nn}}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b_1} \\ \underline{\underline{b_2}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{\underline{b_n}}} \end{pmatrix}.$$

Здесь A — заданная матрица, b и x — заданный и искомый векторы.

Пусть A — заданная квадратная матрица, b — заданная строка, x — искомая строка. Тогда

$$xA^T = b,$$

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{\underline{a_{21}}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{a_{n1}}}} \\ \underline{a_{12}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{a_{n2}}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{a_{1n}} & \underline{\underline{a_{2n}}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{a_{nn}}}} \end{pmatrix} = \left(\underline{b_1}, \underline{\underline{b_2}}, \ldots, \underline{\underline{\underline{b_n}}}\right)$$

есть записи системы уравнений

$$\begin{aligned} &\underline{a_{11}}x_1 + \underline{a_{12}}x_2 + \ldots + \underline{a_{1n}}x_n = b_1, \\ &\underline{\underline{a_{21}}}x_1 + \underline{\underline{a_{22}}}x_2 + \ldots + \underline{\underline{a_{2n}}}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\underline{\underline{\underline{a_{n1}}}}x_1 + \underline{\underline{\underline{a_{n2}}}}x_2 + \ldots + \underline{\underline{\underline{a_{nn}}}}x_n = b_n. \end{aligned}$$

.

Матрица $C(m \times p)$ называется ***произведением матриц*** $A(m \times n)$ и $B(n \times p)$, если ее элементы определяются по правилу

$$c_{ij} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} b_{qj}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, p.$$

.

Пишут

$$C = AB,$$

или, более подробно,

$$\begin{pmatrix} \underline{c_{11}} & \underline{\underline{c_{12}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{c_{1p}}}} \\ \underline{c_{21}} & \underline{\underline{c_{22}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{c_{2p}}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{c_{m1}} & \underline{\underline{c_{m2}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{c_{mp}}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{b_{11}} & \underline{\underline{b_{12}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{b_{1p}}}} \\ \underline{b_{21}} & \underline{\underline{b_{22}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{b_{2p}}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{b_{n1}} & \underline{\underline{b_{n2}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{b_{np}}}} \end{pmatrix}.$$

Элементы каждого столбца матрицы C вычисляются как результат умножения матрицы A на соответствующий столбец матрицы B.

Элементы каждой строки матрицы C получаются как результат умножения соответствующей строки матрицы A на матрицу B:

$$\begin{pmatrix} \underline{c_{11}} & \underline{c_{12}} & \cdots & \underline{c_{1p}} \\ \underline{\underline{c_{21}}} & \underline{\underline{c_{22}}} & \cdots & \underline{\underline{c_{2p}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{\underline{c_{m1}}}} & \underline{\underline{\underline{c_{m2}}}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{c_{mp}}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \cdots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \cdots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{\underline{a_{m1}}}} & \underline{\underline{\underline{a_{m2}}}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{a_{mn}}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

.

Элемент c_{ij} есть результат умножения i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ \underline{\underline{c_{21}}} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \dots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{b_{11}}} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \underline{\underline{b_{21}}} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{b_{n1}}} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

.

<u>Пример.</u>

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

.

Произведение матриц зависит от прядка сомножителей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

.

Матрицы A, B называют ***перестановочными***, если

$$AB = BA.$$

Перестановочные матрицы существуют. Например,

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

.

Для любой квадратной матрицы A справедливы равенства:

$$AI = IA = A.$$

.

Отметим следующие свойства операции умножения матриц:

1) $(A+B)C = AC + BC$,

2) $C(A+B) = CA + CB$,

3) $A(BC) = (AB)C$.

Понятно, что размеры участвующих здесь матриц должны быть согласованы так, чтобы все операции имели смысл.

.

Первые два свойства — следствия линейности операций умножения строки на матрицу и матрицы на вектор:

1) $(A+B)C = AC + BC \quad \Longleftarrow \quad (a+b)C = aC + bC$,

2) $C(A+B) = CA + CB \quad \Longleftarrow \quad C(a+b) = Ca + Cb$.

.

Докажем свойство 3):

$$A(BC) = (AB)C.$$

Заметим, что элементы матрицы

$$D = A(BC)$$

есть числа вида

$$d_{ij} = a_i(Bc_j),$$

где a_i — i-ая строка матрицы A, c_j — j-й столбец матрицы C.

.

Элементы матрицы

$$F = (AB)C$$

есть числа

$$f_{ij} = (a_i B) c_j.$$

.

Поэтому достаточно доказать, что

$$x(By) = (xB)y$$

для любой строки x и любого столбца y. Понятно, что их длины должны быть согласованы с размерами матрицы B.

.

Пусть матрица B имеет m строк и n столбцов. Тогда

$$x(By) = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j,$$

аналогично

$$(xB)y = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i y_j.$$

Эти суммы отличаются лишь порядком суммирования и совпадают.

.

Упражнения

1) Показать, что вектор $P_{ik}x$ получается из вектора x перстановкой элементов с номерами i, k.

.

2) Как следствие показать, что матрица $P_{ik}A$ получается из матрицы A перестановкой строк с номерами i, k.

3) Показать, что если L, M — нижние треугольные матрицы (размера $n \times n$), то матрица LM — нижняя треугольная. Показать, что аналогичное верно и для верхних треугольных матриц.

4) Показать, что нижняя треугольная матрица L равна произведению элементарных нижних треугольных матриц

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \cdots & l_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \cdots & l_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1} L_n$.

.

<u>Указание</u>. Проведите вычисления в соответствии со следующей расстановкой скобок:

$$L = L_1(L_2 \cdots (L_{n-2}(L_{n-1}L_n) \ldots),$$

т. е. сначала перемножьте $L_{n-1}L_n$, результат умножьте слева на L_{n-2} и т. д.

.

5) Показать, что для любой квадратной матрицы A

$$\det(P_{ik}A) = \det P_{ik} \det A = -\det A.$$

6) Показать, что для любой квадратной матрицы A и элементарной нижней треугольной матрицы L_k:

$$\det(L_k A) = l_{kk} \det A.$$

.

<u>Решение</u>. **Пусть** $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **— вектор. Тогда**

$$L_k a = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & l_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & l_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ l_{k,k} a_k \\ l_{k+1,k} a_k + a_{k+1} \\ l_{k+2,k} a_k + a_{k+2} \\ \vdots \\ l_{n,k} a_k + a_n \end{pmatrix}.$$

Значит столбцы матрицы L_kA будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ \underline{\underline{l_{k,k}}}a_k \\ l_{k+1,k}a_k + a_{k+1} \\ l_{k+2,k}a_k + a_{k+2} \\ \vdots \\ l_{n,k}a_k + a_n \end{pmatrix}.$$

Поэтому определитель $\det(L_kA)$ можно преобразовать следующим образом. Во-первых из k-ой строки вынесем общий множитель $\underline{\underline{l_{kk}}}$.

Получим определитель со столбцами:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ a_k \\ \underline{\underline{l_{k+1,k}}} a_k + a_{k+1} \\ l_{k+2,k} a_k + a_{k+2} \\ \vdots \\ l_{n,k} a_k + a_n \end{pmatrix}.$$

— **Умножим k-ю строку определителя на $\underline{\underline{l_{k+1,k}}}$.**

— **Вычтем полученную строку из $k+1$-ой строки.**

Получим определитель со столбцами:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ a_k \\ a_{k+1} \\ l_{k+2,k}a_k + a_{k+2} \\ \vdots \\ l_{n,k}a_k + a_n \end{pmatrix}.$$

Продолжим этот процесс. Последовательно для $j = k+2, \ \ldots, \ n$:

— умножим k-ю строку определителя на l_{jk},

— вычтем полученную строку из j-ой строки.

.

В конце концов получим определитель со столбцами

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

т. е. $\det A$. На первом шаге преобразований определителя $\det(L_k A)$ мы вынесли l_{kk}. Значит, доказано равенство

$$\det(L_k A) = l_{kk} \det A.$$

7) Опираясь на предыдущие упражнения и правило вычисления определителя треугольной матрицы, показать, что для любой квадратной матрицы A и любой нижней треугольной матрицы L

$$\det(LA) = \det L \det A.$$

Показать, что если R — верхняя треугольная матрица, то

$$\det(RA) = \det R \det A.$$

Транспонирование матриц. Определенная ранее операция транспонирования квадратных матриц естественным образом распространяется на прямоугольные матрицы.

.

При транспонировании размеры матрицы меняются местами. В частности, матрица-строка становится матрицей-столбцом.

Свойства операции транспонирования.

.

1) Для любой матрицы A справедливо равенство

$$(A^T)^T = A.$$

Проверьте!

.

2) Для любых чисел α, β и матриц A, B одинаковых размеров

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T.$$

Проверьте!

Поэтому говорят, что операция транспонирования *линейна*.

3) Если операция умножения матриц AB имеет смысл, то:

а) операция умножения $B^T A^T$ также имеет смысл (проверьте!);

б) $(AB)^T = B^T A^T$.

.

Докажем утверждение 3 б). Элемент с номерами i, j матрицы

$$(AB)^T$$

это результат умножения j-й строки матрицы A на i-й столбец B.

.

Элемент с номерами i, j матрицы

$$B^T A^T$$

это результат умножения i-й строки матрицы B^T и j-го столбца A^T.

Элементы i-й строки матрицы B^T совпадают с элементами i-го столбца матрицы B, а элементы j-го столбца матрицы A^T совпадают с элементам j-ой строки матрицы A. Следовательно,

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

§7. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Квадратная матрица A называется ***выроженной***, если ее определитель равен нулю. В противном случае матрица A называется ***невыроженной***.

Если A, B — невырожденные матрицы, матрица

$$C = AB$$

также невырождена.

Для того, чтобы в убедиться в том, что AB невырождена достаточно показать, что однородная система линейных уравнений

$$ABx = 0$$

имеет только тривиальное решение. Последнее верно, так как, поскольку матрица A невырождена, то

$$Bx = 0,$$

а поскольку B невырождена, то

$$x = 0.$$

Если одна из матриц A, B вырождена, то

$$C = AB$$

вырождена.

Действительно, чтобы в убедиться в том, что AB вырождена достаточно установить, что система

$$ABx = 0$$

имеет нетривиальное решение. Пусть матрица B вырождена. Тогда существует вектор $x \neq 0$ такой, что

$$Bx = 0,$$

значит

$$ABx = 0.$$

Пусть теперь A вырождена, а B невырождена. Существует вектор $y \neq 0$ такой, что

$$Ay = 0.$$

Т. к. B невырождена существует единственный вектор x такой, что

$$Bx = y,$$

причем $x \neq 0$, т. к. $y \neq 0$. Вновь, получаем, что

$$ABx = 0$$

при $x \neq 0$.

Матрица X называется ***правой обратной*** к квадратной матрице A, если

$$AX = I.$$

.

Матрица Y называется *левой обратной* к квадратной матрице A, если

$$YA = I.$$

.

Вырожденная матрица не имеет обратной матрицы.

Действительно, если правая обратная матрица X существует, то

$$\det(AX) = \det(I) = 1.$$

С другой стороны

$$\det(AX) = 0,$$

так как A вырождена. Точно так же доказывается невозможность существования левой обратной у вырожденной матрицы.

.

Если $\det(A) \neq 0$, **то правая обратная матрица существует и определяется единственным образом.**

Действительно, обозначим через x^k столбцы матрицы X, а через i^k столбцы матрицы I. Уравнение

$$AX = I$$

распадается на совокупность систем уравнений

$$Ax^k = i^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Поскольку матрица A невырождена, каждая из этих систем имеет единственное решение. Точно так же доказывается существование и единственность левой обратной матрицы.

На самом деле, правая и левая обратная матрица совпадают.

.

Действительно, если

$$YA = I,$$

то

$$YAX = X,$$

но

$$AX = I,$$

т. е.

$$Y = X.$$

.

Обратную матрицу к матрице A обозначают через

$$A^{-1}.$$

Укажем явный вид матрицы A^{-1}.

.

Введем в рассмотрение так называемую *присоединенную* к матрице A *матрицу*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Обратите внимание на номера элементов!

.

Формулы

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

можно записать в матричном виде

$$A\widetilde{A} = |A|I.$$

.

Из

$$A\widetilde{A} = |A|I.$$

вытекает, что если

$$|A| \neq 0,$$

то

$$A^{-1} = |A|^{-1}\widetilde{A}$$

есть матрица, обратная матрице A.

.

<u>Пример.</u> Построим матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

.

Вычислим сначала определитель матрицы A, разлагая его по первой строке:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 10 = 5.$$

.

Подсчитаем алгебраические дополнения элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}:$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

По формуле

$$A^{-1} = |A|^{-1}\widetilde{A}$$

для

$$|A| = 5,$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= 5, & A_{12} &= 10, & A_{13} &= 0, \\ A_{21} &= 4, & A_{22} &= 12, & A_{23} &= 1, \\ A_{31} &= -1, & A_{32} &= -3, & A_{33} &= 1 \end{aligned}$$

имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

.

Свойства обратной матрицы.

.

1) Матрица A^{-1} невырождена, кроме того

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

.

Это утверждение очевидное следствие равенства

$$AA^{-1} = I.$$

Действительно, если

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I,$$

то

$$AA^{-1}(A^{-1})^{-1} = A.$$

Следовательно,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

.

2) Если матрицы A, B **невырождены, то**

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

.

Действительно,

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Т. е.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

.

3) Если матрица A невырождена, то матрица A^T невырождена и

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

.

Невырожденность матрицы A^T — следствие равенства

$$|A^T| = |A|.$$

Используя свойство

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

можем написать

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I,$$

т. е. матрица $(A^{-1})^T$ — **обратная к** A^T**:**

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

.

Упражнения

1) Пусть матрицы A_1, $A_2, \ldots,$ A_p — невырождены. Показать, что

$$(A_1 A_2 \cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

.

2) Пусть P_{ik} **— матрица перестановки. Показать, что**

$$P_{ik}^{-1} = P_{ik}.$$

.

3) Пусть L_k есть элементарная нижняя треугольная матрица и $l_{kk} \neq 0$. Показать, что

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & \ldots & 1/l_{k,k} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & -l_{k+1,k}/l_{k,k} & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & \ldots & -l_{n,k}/l_{k,k} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

.

4) Пусть L — нижняя треугольная матрица, у которой все элементы главной диагонали отличны от нуля. Показать, что матрица L^{-1} существует и является нижней треугольной матрицей.

Показать, что аналогичное верно для верхних треугольных матриц.

.

5) Пусть квадратная матрица A имеет обратную, B — произвольная квадратная матрица того же порядка. Показать, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ матрица $A + \varepsilon B$ также имеет обратную.

.

Решение. Пусть x — решение системы уравнений

$$Ax + \varepsilon Bx = 0.$$

Тогда x — решение системы уравнений

$$x = -\varepsilon A^{-1}Bx.$$

.

Пусть $x \neq 0$ **и**

$$|x_i| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|,$$

где n **— порядок матрицы** A**.**

.

Положим

$$C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{n} = A^{-1}B.$$

Из

$$x = -\varepsilon A^{-1}Bx$$

очевидным образом получаем

$$|x_i| = \left|\varepsilon \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\right| \leqslant |x_i|\varepsilon \left|\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\right| \leqslant |x_i|\varepsilon \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \leqslant$$

$$\leqslant |x_i|\varepsilon \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |c_{kj}|.$$

.

Пусть ε выбрано так, что

$$\varepsilon \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |c_{kj}| < 1.$$

Тогда из

$$|x_i| \leqslant |x_i|\varepsilon \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |c_{kj}|$$

имеем

$$|x_i| < |x_i|,$$

что нелепо.

.

Значит, при выполнении условия

$$\varepsilon \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |c_{kj}| < 1$$

система

$$Ax + \varepsilon Bx = 0$$

может иметь лишь тривиальное решение, следовательно, матрица

$$A + \varepsilon B$$

невырождена для всех достаточно малых ε.

§8. МЕТОД ГАУССА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В основе метода Гаусса, как, впрочем, и многих других методов решения систем линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{1}$$

лежит следующее утверждение.

Пусть матрица B невырождена. Тогда система уравнений

$$BAx = Bb \tag{2}$$

эквивалентна системе (1), т. е. решение системы (2) — решение системы (1) и, наоборот, решение системы (1) — решение системы (2).

Действительно, пусть x — решение системы

$$BAx = Bb.$$

Тогда

$$B(Ax - b) = 0,$$

но матрица B невырождена, следовательно,

$$Ax - b = 0,$$

т. е.

$$Ax = b.$$

Обратное утверждение доказывается еще проще. Пусть

$$Ax = b.$$

Умножим обе части уравнения на невырожденную матрицу B:

$$BAx = Bb.$$

Матрица B выбирается так, чтобы матрица BA была проще матрицы A и решение системы

$$BAx = Bb$$

находилось легче, чем решение системы

$$Ax = b.$$

В методе Гаусса матрица B конструируется при помощи элементарных нижних треугольных матриц так, чтобы матрица

$$BA$$

была верхней треугольной. Тогда решение системы

$$BAx = Bb$$

становится тривиальной задачей.

Переходим к описанию ***метода Гаусса*** решения крамеровских систем. Выберем среди элементов первого столбца матрицы A максимальный по модулю. Пусть это элемент

$$a_{i1}.$$

Он не может оказаться равным нулю, так как тогда все элементы первого столбца матрицы A — нули и, значит,

$$|A| = 0,$$

но система по предположению крамеровская, т. е. определитель матрицы A не нуль.

Умножим обе части уравнения

$$Ax = b$$

на матрицу перестановки P_{i1}. В дальнейшем будем обозначать эту матрицу через P_1 (заметим, что она равна единичной, если максимальный по модулю элемент первого столбца матрицы A есть a_{11}). Получим

$$A_1 x = b^1,$$

где

$$A_1 = P_1 A, \quad b^1 = P_1 b.$$

.

Поясним, что матрица

$$A_1 = P_1 A$$

получается из матрицы A перестановкой первой и i-й строк, столбец

$$b^1 = P_1 b$$

получается из столбца b перестановкой первого и i-го элементов.

Элементы матрицы A_1 обозначим через

$$a_{kl}^{(1)},$$

элементы столбца b^1 через

$$b_k^1.$$

По построению

$$a_{11}^{(1)} \neq 0.$$

.

Умножим обе части уравнения

$$A_1 x = b^1,$$

на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Получим

$$A_2 x = b^2,$$

где

$$A_2 = L_1 A_1, \quad b^2 = L_1 b^1.$$

Вычисляя произведение $L_1 A_1$, найдем, что

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Действительно, умножение

$$L_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

равносильно следующему преобразованию матрицы A_1:

— все элементы первой строки матрицы A_1 делятся на $a_{11}^{(1)}$,

— затем для всех $i = 2, \dots, n$ первая строка умножается на $a_{i1}^{(1)}$ и вычитается из i-й строки матрицы A_1.

Важно подчеркнуть, что все элементы первого столбца матрицы A_2, кроме первого, оказываются при этом равными нулю.

.

Аналогично, элементы столбца b^2 вычисляются по формулам

$$b_1^2 = b_1^1 / a_{11}^{(1)},$$

$$b_i^2 = b_i^1 - b_1^2 a_{i1}^{(1)}, \quad \text{где} \quad i = 2, \; \ldots, \; n.$$

.

Выберем среди элементов

$$a_{22}^{(2)}, \quad a_{32}^{(2)}, \ \ldots, \ a_{n2}^{(2)}$$

матрицы

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

максимальный по модулю. Пусть этот элемент есть

$$a_{i2}^{(2)}.$$

Этот элемент не может равняться нулю. Действительно, если

$$a_{i2}^{(2)} = 0$$

то

$$a_{22}^{(2)} = \ldots = a_{n2}^{(2)} = 0.$$

Тогда, вычисляя

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix}$$

разложением по первому столбцу, получим, что

$$\det(A_2) = 0.$$

С другой стороны, используя то, что L_1 — элементарная нижняя треугольная матрица, а P_1 — либо единичная матрица, либо матрица перестановки, можем написать, что

$$\det(A_2) = l_{11}\det(P_1A) = \det(P_1A)/a_{11}^{(1)} = \pm\det(A)/a_{11}^{(1)} \neq 0.$$

.

Умножим обе части уравнения

$$A_2 x = b^2,$$

на матрицу $P_2 = P_{2i}$, **т. е. поменяем местами вторую и** i**-ю строку матрицы** A_2. **Получим**

$$\widetilde{A}_2 x = P_2 L_1 P_1 b,$$

где

$$\widetilde{A}_2 = P_2 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & \widetilde{a}_{22}^{(2)} & \widetilde{a}_{23}^{(2)} & \dots & \widetilde{a}_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \widetilde{a}_{n2}^{(2)} & \widetilde{a}_{n3}^{(2)} & \dots & \widetilde{a}_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

.

Умножим обе части уравнения

$$\widetilde{A}_2 x = P_2 L_1 P_1 b$$

на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\widetilde{a}_{22}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\widetilde{a}_{32}^{(2)}/\widetilde{a}_{22}^{(2)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & -\widetilde{a}_{n2}^{(2)}/\widetilde{a}_{22}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$A_3 x = L_2 P_2 L_1 P_1 b,$$

где

$$A_3 = L_2 \widetilde{A}_2 = L_2 P_2 L_1 P_1 A.$$

Нетрудно убедиться, что

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Важно подчеркнуть, что все элементы второго столбца матрицы A_3, кроме первых двух, — нули.

.

Продолжая этот процесс, в конце концов исходную систему

$$Ax = b$$

сведем к эквивалентной ей системе

$$Ux = f,$$

где

$$U = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 A,$$

$$f = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 b.$$

.

Причем

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n-1}^{(3)} & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n-1}^{(4)} & a_{3n}^{(4)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

есть верхняя треугольная матрица с 1-ми на главной диагонали.

Решим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n-1}^{(3)} & a_{2n}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Из последнего уравнения этой системы находим

$$x_n = f_n,$$

из предпоследнего

$$x_{n-1} = f_{n-1} - a_{n-1,n}^{(n)} x_n$$

и так далее, наконец, из первого уравнения находим

$$x_1 = f_1 - a_{1,2}^{(2)} x_2 - a_{1,3}^{(2)} x_3 - \dots - a_{1,n}^{(2)} x_n.$$

.

Таким образом, реализация метода Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе, называемым *прямым ходом метода Гаусса*, исходная система преобразуется к системе с треугольной матрицей.

На втором этапе, называемым *обратным ходом метода Гаусса*, решается система с треугольной матрицей.

Замечание. Выбор максимального по модулю элемента столбца при выполнении прямого хода метода Гаусса минимизирует влияние ошибок округления в реальных расчетах на компьютере. Если не заботиться об ошибках округления, то на очередном шаге прямого хода метода Гаусса можно выбирать любой ненулевой элемент столбца.

Вычисление определителя методом Гаусса.

.

Из

$$U = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 A,$$

используя формулы

$$P_k^{-1} = P_k,$$

получаем

$$A = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U.$$

.

Из

$$A = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U,$$

используя формулы

$$\det(P_k A) = -\det A, \quad \det U = 1,$$

будем иметь

$$\det A = \det(P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U) = \prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} =$$

$$= \pm \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1}.$$

.

Имеем

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1/\widetilde{a}_{k,k}^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\widetilde{a}_{k+1,k}^{(k)}/\widetilde{a}_{k,k}^{(k)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\widetilde{a}_{n,k}^{(k)}/\widetilde{a}_{k,k}^{(k)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \widetilde{a}_{k,k}^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \widetilde{a}_{k+1,k}^{(k)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \widetilde{a}_{n,k}^{(k)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\det L_k^{-1} = \widetilde{a}_{kk}^{(k)}.$$

.

Итак,

$$\det A = \pm \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} = \pm a_{11}^{(1)} \widetilde{a}_{22}^{(2)} \cdots \widetilde{a}_{nn}^{(n)}.$$

Знак здесь определяется количеством перестановок строк, выполненных в ходе реализации прямого хода метода Гаусса. Если оно четно, выбирается знак плюс. Таким образом, определитель матрицы может быть вычислен в ходе реализации метода Гаусса.

.

Пример. Решим методом Гаусса систему уравнений

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 6x_2 + 15x_3 &= 60,\\
3x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 34,\\
9x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 12.
\end{aligned}
$$

.

Выпишем матрицу системы уравнений

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 6x_2 + 15x_3 &= 60,\\
3x_1 + 2x_2 + \ \ 9x_3 &= 34,\\
9x_1 + 6x_2 - \ \ 3x_3 &= 12
\end{aligned}
$$

и столбец правой части:

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 3 & 2 & 9 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 60 \\ 34 \\ 12 \end{pmatrix}.
$$

Максимальный элемент первого столбца матрицы A есть $a_{31} = 9$.

Поменяем местами первую и третью строки матрицы, первый и последний элементы столбца:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 3 & 2 & 9 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 60 \\ 34 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad b^1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

.

Затем делим первую строку матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

на 9, умножаем ее на 3 и вычитаем из второй и третьей срок. В результате получаем

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

.

Делим первый элемент столбца

$$b^1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 60 \end{pmatrix}$$

на 9, затем умножаем его на 3 и вычитаем из второго и третьего элементов столбца b^1. В результате получаем

$$b^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 30 \\ 56 \end{pmatrix}.$$

.

Максимальным из чисел $a_{22}^{(2)}$, $a_{32}^{(2)}$ является $a_{32}^{(2)} = 4$, поэтому меняем местами вторую и третью строки матрицы а также второй и третий элемент столбца:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 30 \\ 56 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{b}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 56 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

.

Делим вторую строку матрицы и второй элемент столбца

$$\widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{b}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 56 \\ 30 \end{pmatrix}$$

на 4. **Получаем**

$$\widetilde{\widetilde{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\widetilde{b}}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Наконец, делим последнюю строку матрицы и последний элемент столбца

$$\widetilde{\widetilde{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\widetilde{b}}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}$$

на 10. Получаем

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход метода Гаусса закончен.

.

Теперь выполняем обратный ход метода Гаусса. Из системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

последовательно находим

$$x_3 = 3,$$

$$x_2 = 14 - 3 \cdot 4 = 2,$$

$$x_1 = 4/3 - (2/3) \cdot 2 + (1/3) \cdot 3 = 1.$$

.

В ходе реализации метода Гаусса мы, фактически, подсчитали и определитель матрицы A.

Его абсолютная величина равна произведению ведущих элементов метода Гаусса, т. е. тех чисел, на которые приходилось выполнять деление при приведении матрицы A к треугольному виду.

В рассматриваемом примере — это

$$9, \quad 4, \quad 10.$$

Было выполнено две перестановки строк, следовательно, определитель равен произведению ведущих элементов:

$$\det(A) = 360.$$

§9. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

Теорема. **Если A, B — произвольные квадратные матрицы, то**

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

<u>Доказательство.</u> **Если матрица A вырождена, то матрица AB также вырождена, и в этом случае равенство**

$$\det(AB) = \det A \det B$$

тривиально выполняется.

Если матрица A невырождена, то, применяя

$$A = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U,$$

получим

$$AB = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U B.$$

Следовательно,

$$\det(AB) = \prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} \det(U) \det B =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} \det B,$$

но

$$\prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} = \det A,$$

т. е. равенство $\det(AB) = \det A \det B$ доказано. $\square$

.

Из формулы

$$\det A \det B = \det(AB)$$

и

$$AA^{-1} = I,$$

очевидно, вытекает, что если матрица A невырождена, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

§10. НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ МАТРИЦ

Пусть A — прямоугольная матрица. Матрица

$$A^* = (\overline{A})^T$$

называется ***сопряженной*** по отношению к матрице A. Ясно, что

$$(A^*)^* = A, \quad (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, \quad (A+B)^* = A^* + B^*.$$

Квадратная матрица A называется <u>*эрмитовой*</u> (<u>*самосопряженной*</u>), если

$$A = A^*.$$

Шарль Эрмит (Charles Hermite; 1822 — 1901) — французский математик.

Квадратная матрица A называется ***косоэрмитовой***, если

$$A = -A^*.$$

Определитель эрмитовой матрицы вещественное число.

.

В самом деле, поскольку

$$\det(A^*) = \det((\overline{A})^T) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)},$$

то для эрмитовой матрицы, т. е. такой, что

$$A = A^*,$$

имеем

$$\det(A) = \det(A^*),$$

и

$$\det(A) = \overline{\det(A)}.$$

.

Любая квадратная матрица A представима в виде

$$A = H_1 + iH_2,$$

здесь H_1, H_2 — эрмитовы матрицы, i — мнимая единица. Матрицы H_1, H_2 однозначно определяются матрицей A.

.

Возможность представления

$$A = H_1 + iH_2,$$

вытекает из очевидного тождества

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*)$$

и легко проверяемых соотношений

$$(A + A^*)^* = A + A^*, \quad \left(\frac{1}{i}(A - A^*)\right)^* = \frac{1}{i}(A - A^*).$$

Если предположить, что наряду с

$$A = H_1 + iH_2$$

возможно представление

$$A = \widetilde{H}_1 + i\widetilde{H}_2$$

с эрмитовыми матрицами $\widetilde{H}_1$, $\widetilde{H}_2$, **то**

$$(H_1 - \widetilde{H}_1) + i(H_2 - \widetilde{H}_2) = 0.$$

Переходя в

$$(H_1 - \widetilde{H}_1) + i(H_2 - \widetilde{H}_2) = 0$$

к сопряженным матрицам, получим

$$(H_1 - \widetilde{H}_1) - i(H_2 - \widetilde{H}_2) = 0.$$

Складывая почленно два этих равенства, будем иметь, что

$$H_1 = \widetilde{H}_1,$$

но тогда и

$$H_2 = \widetilde{H}_2,$$

т. е. представление

$$A = H_1 + iH_2$$

однозначно.

Матрицы, у которых все элементы вещественны, называют *вещественными* матрицами.

.

Вещественная эрмитова матрица A называется ***симметричной***. Для такой матрицы

$$A = A^T.$$

.

Вещественная матрица A называется ***кососимметричной***, если

$$A = -A^T.$$

.

Для любой квадратной вещественной матрицы справедливо представление

$$A = A_1 + A_2,$$

где A_1 симметричная, A_2 кососимметричная матрицы. Такое представление единственно:

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

.

Матрица A называется ***унитарной***, если

$$AA^* = I, \quad A^*A = I,$$

иными словами, если

$$A^{-1} = A^*.$$

Определитель унитарной матрицы по модулю равен единице.

Действительно, по определению

$$AA^* = I,$$

следовательно,

$$\det(AA^*) = \det(I) = 1.$$

Запишем левую часть равенства подробнее:

$$\det(AA^*) = \det(A)\det(A^*) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|.$$

Значит,

$$|\det(A)| = 1.$$

.

Упражнение. Доказать, что произведение унитарных матриц является унитарной матрицей.

.

Упражнение. Проверить, что диагональная матрица, диагональ которой состоит из чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n$, равных единице по модулю (n — порядок матрицы), является унитарной.

Вещественная унитарная матрица называется *ортогональной* матрицей. Для такой матрицы

$$AA^T = I, \quad A^T A = I.$$

Определитель ортогональной матрицы может быть равен только плюс единице или минус единице.

.

Упражнение. Проверить, что любая матрица перестановки P_{kl} ортогональна, например,

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Упражнение. Проверить, что матрица второго порядка

$$Q_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где φ — любое вещественное число, является ортогональной.

.

Квадратная матрица A называется ***нормальной***, если она перестановочна с матрицей A^*, т. е.

$$AA^* = A^*A.$$

Нетрудно убедиться, что эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные матрицы — нормальные матрицы:

$$A = A^* \quad \Longrightarrow \quad AA^* = A^*A,$$

$$A = -A^* \quad \Longrightarrow \quad AA^* = A^*A,$$

$$AA^* = I, \quad A^*A = I \quad \Longrightarrow \quad AA^* = A^*A.$$

.

<u>Пример.</u> Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

является нормальной, но не принадлежит ни к одному из перечисленных выше классов. Действительно,

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

но

$$A \neq A^* \quad A \neq -A^* \quad AA^* \neq I.$$

§11. БЛОЧНЫЕ МАТРИЦЫ

Во многих случаях оказывается полезным «разрезать» матрицу на блоки, т. е. представить ее в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nm} \end{pmatrix},$$

где элементы A_{ij}, в свою очередь, являются матрицами.

.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Размеры блоков предполагаются согласованными, т. е. все элементы, стоящие в одной строке, должны иметь одинаковое число строк, все элементы, стоящие в одном столбце, должны иметь одинаковое число столбцов. Одна и та же матрица может быть разбита на блоки различными способами.

.

Нетрудно убедиться, что с блочными матрицами можно действовать по тем же формальным правилам, что и с обычными. Если

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix},$$

причем для любой пары индексов i, j размеры блоков A_{ij}, B_{ij} совпадают, то матрица

$$C = A + B$$

может быть представлена как блочная с блоками

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.$$

Если

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2p} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{np} \end{pmatrix},$$

то матрица

$$C = AB$$

может быть представлена как блочная с блоками

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^{n} A_{iq} B_{qj}, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, p.$$

При этом, конечно, требуется, чтобы все произведения $A_{iq}B_{qj}$ имели смысл, т. е. горизонтальные и вертикальные размеры перемножаемых блоков должны быть согласованы.

Получим некоторые полезные формулы для вычисления определителей блочных матриц.

Рассмотрим сначала самый простой случай. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} I & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

есть блочная 2×2 матрица, I — единичная матрица, A_{22} — квадратная матрица, A_{12} — прямоугольная, вообще говоря, матрица. Тогда

$$|A| = |A_{22}|.$$

Справедливость равенства

$$|A| = |A_{22}|$$

легко устанавливается разложением определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} I & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}$$

по первому столбцу.

.

Аналогично, если

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где A_{11} **— квадратная матрица, то**

$$|A| = |A_{11}|.$$

.

Теорема. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{11}, A_{22} — квадратные матрицы. Тогда

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|.$$

.

<u>Доказательство.</u> **Покажем сначала, что если**

$$|A_{11}| = 0$$

и

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = 0.$$

Обозначим через n_1 порядок матрицы A_{11}, через n_2 — порядок матрицы A_{22}. Если

$$|A_{11}| = 0,$$

то существует такой вектор

$$x^1 \neq 0$$

длины n_1, что

$$A_{11}x^1 = 0.$$

.

Итак,

$$A_{11}x^1 = 0, \quad x^1 \neq 0.$$

Теперь для вектора

$$x = (x^1, 0, \dots, 0) \neq 0$$

длины $n_1 + n_2$ имеем

$$Ax = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$|A| = 0.$$

.

Таким образом, показано, что если

$$|A_{11}| = 0,$$

то

$$|A| = 0,$$

и равенство

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|$$

выполняется тривиальным образом.

.

Пусть теперь $|A_{11}| \neq 0$. **Нетрудно убедиться, что**

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|. \quad \square$$

.

Упражнения

1) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

есть блочно–треугольная матрица, A_{ii}, $i = 1, \dots, n$, — произвольные квадратные матрицы. Доказать, что

$$|A| = |A_{11}||A_{22}| \cdots |A_{nn}|.$$

.

2) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

есть блочная матрица A_{11}, A_{22} **— квадратные матрицы, причем**

$$|A_{11}| \neq 0.$$

Показать, что

$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|.$$

.

Справедливо равенство:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители обеих частей этого равенства:

$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|.$$

.

Формулу

$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

можно рассматривать как обобщение формулы для вычисления определителя второго порядка.