Цель задания - изучить и сравнить различные способы приближенного вычисления одной из специальных функций математической физики $V(x)$(по вариантам). Для этого:

1. Протубулировать функцию на отрезке $[a,b]$ с шагом h с точностью ε, основываясь на ряде Тейлора

$$V(x) = \sum_{m=0}^{\infty} s_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V^{(m)}(t)}{m!}(x-t)^m,$$

предварительно вычислив его, доказав сходимость и определив интервал сходимости.

Точность ε считать достигнутой, если

$$|s_m| \leq \varepsilon$$

Получить таким образом таблицу

Отрезок	x_0	x_1	x_2	...	x_m
ряд Тейлора	f_0	f_1	f_2	...	f_m
Кол-во слагаемых в ряде Тейлора для дост-я ε	k_0	k_1	k_2	...	k_m

или

Отрезок	ряд Тейлора	Кол-во слагаемых в ряде Тейлора для дост-я ε
x_0	V_0	k_0
x_1	V_1	k_1
$\dots$	$\dots$	k_2
x_m	V_m	k_m

где f_i - значение фунции в точке x_i, $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, \dots, m$, k_i число слагаемых в ряде Тейлора в точке x_i для достижения точности ε.

Построить график функции по полученной таблице.

Фукция вычисления ряда Тейлора должна работать для веткоров, параметр ε можно не передавать(т.е. может задаваться автомвтически), результатом функции будет вектор значений ряда Тейлора и вектор количества слагаемых в сумме для каждого элемента вектора.

2. В точках из приближенной таблицы значений $x = \{x_i\}$, $i = 0, \dots, m$ построить(по вариантам)

- интерполяционный полином Ньютона, приближающий функцию $V(x)$:

$$L_n(x) = f(\xi_0) + (x-\xi_0)f(\xi_0,\xi_1) + (x-\xi_0)(x-\xi_1)f(\xi_0,\xi_1,\xi_2) + ...$$

$$... + (x-\xi_0)(x-\xi_1)...(x-\xi_n)f(\xi_0,\xi_1,...,\xi_n).$$

- интерполяционный полином Лагранжа, приближающий функцию $V(x)$:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \prod_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{x-\xi_i}{\xi_i-\xi_j}$$

и вычислить погрешность интерполирования

$$\varepsilon_n = \max_{x\in(a,b)} \varepsilon(x), \varepsilon(x) = |V(x) - L_n(x)|\,.$$

В качестве узлов интерполяции взять:

- Равномерно распределенные узлы $\{\xi_i\}_{i=0}^{n}$, $i = 1, \ldots, n$, шаг вычисляется через $h = \frac{b-a}{n}$, где a и b - границы отрезка, n количество точек.

-Корни полинома Чебышева, принадлежащие заданному отрезку $[a, b]$ с шагом h которые можно получить, используя следующую формулу

$$\xi_i = \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)} + \frac{a+b}{2}, i = 0, \ldots, n.$$

Выявить зависимость максимальной погрешности интерполирования от числа узлов интерполяции для равномерно распределенных узлов и корней полинома Чебышева. Построить графики зависимостей. Построить графикии и таблицы значений для разного количества узлов интерполяции и погрешности(на одном графике) для равномерно распределенной и Чебышевской сетки.

3. В точках из приближенной таблицы значений $x = \{x_i\}$, $i = 0, \ldots, m$ из первого задания построить таблицу приближенных значений $V(x)$, используя формулу

$$\int_c^d \varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \varphi(t)\,dt \approx \sum_{i=1}^{N} S_i(\varphi) = S$$

,

где z_i - точки разбиения отрезка интегрирования на N частей, $z_i = c + i \cdot h_N, h_N = \frac{d-c}{N}$.

-Составная квадратурная формула правых прямоугольников

$$S_i(\varphi) = h_N \varphi(z_i)$$

-Составная квадратурная формула левых прямоугольников

$$S_i(\varphi) = h_N \varphi(z_{i-1})$$

-Составная квадратурная формула центральных прямоугольников

$$S_i(\varphi) = h_N \varphi(\frac{z_i + z_{i-1}}{2})$$

-Составная квадратурная формула трапеции

$$S_i(\varphi) = \frac{h_N}{2}(\varphi(z_{i-1}) + \varphi(z_i))$$

-Составная квадратурная формула Симпсона

$$S_i(\varphi) = \frac{h_N}{6}\left[\varphi(z_{i-1}) + 4\varphi(\frac{z_i - z_{i-1}}{2}) + \varphi(z_i))\right]$$

-Составная квадратурная формула Гаусса с двумя узлами

$$S_i(\varphi) = \frac{h_N}{2}\left[\varphi\left(z_{i-1} + \frac{h_N}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \varphi\left(z_{i-1} + \frac{h_N}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]$$

Интеграл вычисляется с точностью ε. Точность вычисления интеграла определяется сравнением результатов при различном числе разбиения отрезка интегрирования. Именно, точность ε считается достигнутой, если

$$\left|S^N(\varphi) - S^{2N}(\varphi)\right| \le \varepsilon, S^N(\varphi) = \sum_{i=1}^{N} S_i(\varphi).$$

Вычислить погрешности, принимая за точное значение таблицу из первого задания. Построить таблицы для $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$ и каждой квадратурной формулы

x	$S(x)$	N	$error$
x_0	S_0	N_0	er_0
x_1	S_1	N_1	er_1
$\ldots$	$\ldots$	N_2	er_2
x_m	S_m	N_m	er_3

значений $x = \{x_i\}$, $i = 0, \ldots, m$ из первого задания $S(x)$ - значения интеграла, вычисленного по квадратурной формуле.

N - число разбиения отрезка интегрирования, для тостижения точности ε.

$error$ - погрешность.

Построить таблицы погрешностей сравнения для $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$ квадратурных формул

x	Вариант	Трапеции	Симпсона	Гаусса

4. Построить таблицу обратной к $V(x)$ функции $F(x) = V^{-1}(x)$

F_0	F_1	F_2	...	F_n
z_0	z_1	z_2	...	z_n

решая уравнения $V(z) = F_i$, $F_i = V(x_0) + i * \frac{V(x_n) - V(x_0)}{n}$,, $i = 0, \ldots, n$, здесь $x_i = a + i \cdot h$, $h = \frac{b-a}{n}$. Нелинейные уравнения решить итерационными методами:

-метод касательных(Ньютона)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{g(z^k)}{g'(z^k)}, k = 0, 1, \ldots.$$

-метод хорд

$$z^{k+1} = \frac{z^0 g(z^k) - z^k g(z^0)}{g(z^k) - g(z^0)}, k = 1, 2, \ldots.$$

В качестве начального приближения z^0 в точке z_i взять x_i

-метод секущих

$$z^{k+1} = z^k - \frac{(z^k - z^{k-1}) g(z^k)}{g(z^k) - g(z^{k-1})}, k = 1, 2, \ldots.$$

В качестве начального приближения z^0 в точке z_i взять x_i, $z^1 = z^0 - \frac{g(z^0)}{g'(z^0)}$.

Вычмсления продолжать до выполнения условия

$$\left| r^k \leq \varepsilon \right|,$$

r - невязка, ε - заданное число.

Для различных ε нужно

- для каждого метода построить графики функции $V(x)$ и $V^{-1}(x)$ на одном рисунке.

- построить таблицу

x	z_0	$V^{-1}(x)$ метод 1	k метод 1	$V^{-1}(x)$ метод 2	k метод 2

где k - количество итераций потребывавшихся в итерационном методе.

Замечание.

При вычислении ряда Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ учесть, что каждый последующий член ряда a_{n+1} получается из предыдущего члена s_n , умножением на некоторую величину q_n , т.е. $s_{n+1} = s_n \cdot q_n$

Это позволит избежать переполнения при вычислении факториалов, встречающихся в рассматриваемом ряде.

Разделенные разности $f(x_k, \ldots, x_{k+i})$ в формуле Ньютона удобно вычислять, используя следующий алгоритм. Для $k = 1, \ldots, n$ вычисляем $f_i = (f_i - f_{i-1})/(x_i - x_{i-1})$, $\forall i = n, \ldots k$. В результате в ячейках $f_0, f_1, \ldots, f_n$ будут, очевидно, находиться соответственно $f(x_0), f(x_0, x_1), \ldots, f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.