2. Найти сумму и произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

сумма

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & (-2)+(-1) \\ 3+0 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Произведение

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*4+(-2)*0 & 1*(-1)+(-2)*5 \\ 3*4+0*0 & 3*(-1)+0*5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Проверка

```
import numpy as np
a = np.array([[1,-2],[3,0]])
b = np.array([[4,-1],[0,5]])
c = a + b
d = a @ b
print(c)
print(d)
```

```
[[ 5 -3]
 [ 3  5]]
[[  4 -11]
 [ 12  -3]]
```

3. Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислить линейную комбинацию $3A - 2B + 4C$ для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$3A - 2B + 4C = 3 * \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 4 * \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

```
import numpy as np
a = np.array([[1,7],[3,-6]])
b = np.array([[0,5],[2,-1]])
c = np.array([[2,-4],[1,1]])
d = 3*a - 2*b + 4*c
print(d)
```

```
[[ 11  -5]
 [  9 -12]]
```

4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислить AA^T и A^TA.

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 4*4+1*1 & 5*4+(-2)*1 & 2*4+3*1 \\ 4*5+1*(-2) & 5*5+(-2)*(-2) & 5*2+(-2)*3 \\ 2*4+3*1 & 2*5+3*(-2) & 2*2+3*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4*4+5*5+2*2 & 1*4+(-2)*5+3*2 \\ 1*4+(-2)*5+3*2 & 1*1+(-2)*(-2)+3*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

```python
import numpy as np
a = np.array([[4,1],[5,-2],[2,3]])
b = a.transpose()
c = np.dot(a, b)
d = b @ a
print(c)
print(d)
```

```
[[17 18 11]
 [18 29  4]
 [11  4 13]]
[[45  0]
 [ 0 14]]
```

5*. Написать на Python функцию для перемножения двух произвольных матриц, не используя NumPy.

```python
def multi_matrix(a,b): # функция для перемножения двух произвольных матриц
  if a.shape[0] == b.shape[1]:# проверка совпадения количества строк 1 матрицы с количеством столбцов 2 матрицы
    result_matrix = np.zeros(a.shape[0]*a.shape[0]).reshape(a.shape[0], a.shape[0]) # создание 0 результирующей  матрицы
    # заполнение результирующей матрицы
    for i in range(a.shape[0]):
        for j in range(b.shape[1]):
            for p in range(b.shape[0]):
                result_matrix[i][j] += a[i][p]*b[p][j]

    return result_matrix
  else:
    return f'количество строк 1 матрицы = {a.shape[0]} не совпадает с количеством столбцов 2 матрицы = {b.shape[1]}'
a = np.array([[5,1],[1,1],[2,7]])# Любая матрица
b = a.transpose() # матрица для проверки, гарантировано будет перемножаться
print(multi_matrix(a,b)) # должен быть результат 100%
print(multi_matrix(a,a))
```

```
[[26.  6. 17.]
 [ 6.  2.  9.]
 [17.  9. 53.]]
количество строк 1 матрицы = 3 не совпадает с количеством столбцов 2 матрицы = 2
```

6. Вычислить определитель (используйте любой удобный для вас способ вычисления определителя: через миноры, через перестановки или другой):

а)

$$\begin{vmatrix} sinx & -cosx \\ cosx & sinx \end{vmatrix};$$

$det = sinx * sinx - (-cosx) * cosx = 1$

б)

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix};$$

$det = 8 * (5 * 9 - 1 * 0) - 4 * (0 * 9 - 1 * 0) + 6 * (0 * 0 - 5 * 0) = 360$

в)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}.$$

$det = 2 * (6 * 10 - 7 * 9) - 3 * (5 \cdot 10 - 7 \cdot 8) + 4 * (5 * 9 - 6 * 8) = 0$

7. Определитель матрицы A равен 4. Найти:

а) $det(A^2) = (detA)^2) = 4 * 4 = 16$;

б) $det(A^T) = det(A) = 4$;

в) $det(2A) = 2 * det(A) = 2 * 4 = 8$.

8. Доказать, что матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

вырожденная. Матрица называется сингулярной, или вырожденной, если ее определитель равен нулю.

Посчитаем определитель матрицы:

$$det \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix} = -(-2) \cdot (-14) \cdot 13 + 7 \cdot 6 \cdot (-3) + (-3) \cdot 4 \cdot 7 - (-3) \cdot (-14) \cdot (-3) - (-2) \cdot 6 \cdot 7 - 7 \cdot 4 \cdot 13$$

$$= 364 - 126 - 84 + 126 + 84 - 364 = 0$$

9. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; сумма 1 и 2 строки равны 3 строке, значит 3 строка зависимая и ее можно исключить из матрицы далее отнимем от 1 строки 2 строку получим матрицу,в которой ненулевых строк 2, то Rank = 2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. все тоже самое с помощью преобразвания строк (сумма 1 и 2 равна 3) можно исключить 3 строку, тнимем от 2 строки первую - и получим следующий вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. на основании этого можно сделать вывод что Rank = 3