

Medición de número de Mach en un flujo supersónico fundamentado en la fotografía Schlieren a color

Arturo Emmanuel Cruz Alvarez, Daniel Sheremetov Henestrosa & Ilder Israel Salgado Marin

Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México

Facultad de Ciencias

Coordinación de la licenciatura en Física

Fecha de entrega: 07/06/2025

Resumen—El presente trabajo propone una metodología experimental simple y de bajo costo, con el objetivo de visualizar, medir y estimar un número de Mach a un flujo supersónico. Esto, a partir del análisis de imágenes en imageJ de patrones de diamantes de Mach de 3 arreglos de visualización distintos: shadowgraph, con navaja horizontal y con filtro de color. Contrastando los resultados experimentales con una simulación usando un esquema de volúmenes finitos a primer orden con solucionador de Riemann tipo HLLC aplicado a las ecuaciones de Euler replicando las condiciones del experimento. Ambos procedimientos arrojan resultados similares, tanto en lo que respecta a los tamaños característicos del fenómeno como los valores del número de Mach calculado. Como resultado se obtiene que el análisis mediante el arreglo de schlieren con la navaja horizontal arroja los datos más cercanos a los obtenidos en la simulación, además de proporcionar una mejor calidad en las imágenes obtenidas, con un error relativo menor a 5% respecto a la simulación. Por lo que es factible realizar cálculos de número de Mach en un flujo supersónico con métodos de bajo costo y obtener resultados comparables a una simulación de características básicas pero bien controladas.

I. INTRODUCCIÓN

Uno de los fenómenos más fascinantes en la dinámica de fluidos es el comportamiento de un chorro supersónico libre, donde las ondas de choque y de expansión interactúan para formar patrones característicos, conocidos como diamantes de Mach. Estas estructuras surgen por la reflexión alternada de las ondas en los límites del chorro, creando un campo de flujo complejo y visualmente impactante. Sin embargo, esta belleza esconde un desafío científico: la presencia de celdas de choque y la rápida transición a la turbulencia hacen que el análisis preciso del flujo sea una tarea sumamente difícil.

A pesar de estas complicaciones, es crucial desarrollar metodologías accesibles que permitan estudiar estas propiedades sin depender exclusivamente de equipos sofisticados. En este trabajo, se propone un enfoque sencillo pero robusto, utilizando procesamiento de imágenes obtenidas mediante la técnica Schlieren obtenidas en condiciones experimentales básicas y con recursos asequibles, para estimar el número de Mach a lo largo de la línea central del chorro. Se implementa un método de calibración que combina datos experimentales con simulaciones numéricas detalladas, permitiendo validar las estimaciones obtenidas a partir de las imágenes. Este enfoque no solo demuestra la viabilidad de técnicas simplificadas en el estudio de flujos supersónicos, sino que también abre la puerta a investigaciones futuras en entornos con limitaciones de recursos, sin sacrificar rigor científico.

1. Objetivo

Dado que las fluctuaciones de presión, temperatura y velocidad generan variaciones de intensidad en las imágenes (visible como zonas claras y oscuras), surge la pregunta: ¿es posible correlacionar los valores de píxeles con los números de Mach reales? El presente artículo tiene como objetivo principal proponer y validar un método simple y de bajo costo para estimar el número de Mach en chorros supersónicos, utilizando imágenes schlieren obtenidas experimentalmente. Este enfoque busca evitar el uso de equipos costosos y personal altamente especializado, sin comprometer significativamente la calidad de la información obtenida.

- Estudiar la velocidad promedio del flujo expulsado por una tobera.
- Desarrollar una metodología práctica basada en el análisis de imágenes schlieren para estimar la velocidad, con un mínimo requerimiento de recursos técnicos y humanos.
- Comparar los resultados experimentales obtenidos mediante imágenes schlieren con simulaciones numéricas, con el fin de validar la precisión del método propuesto.

2. Marco teórico

Flujos Supersónicos y Diamantes de Mach

Cuando un flujo de gas alcanza velocidades supersónicas al salir de una tobera, experimenta una interacción periódica

entre ondas de expansión y ondas de choque. Esta interacción forma un patrón característico conocido como *diamantes de Mach* o *shock diamonds*, visibles como estructuras repetitivas en forma de rombo dentro del chorro. Su espaciado está directamente relacionado con el número de Mach del flujo y, por tanto, con su velocidad.

La distancia entre los diamantes de Mach (L) depende del diámetro de la tobera (D), de la presión del flujo respecto al ambiente, y del número de Mach del chorro (M_j). Estudios empíricos y teóricos [1] han demostrado que para flujos libres en condiciones ligeramente sub o sobreexpandidas, esta distancia puede ser usada como una herramienta de diagnóstico para estimar el número de Mach mediante relaciones simplificadas del tipo:

$$M_j = \sqrt{1 + \gamma \left(\frac{L}{D} \right)^2} \quad (1)$$

donde γ es el coeficiente adiabático del gas. A partir de M_j , es posible calcular la **velocidad del flujo** con:

$$v = M_j \cdot a = M_j \cdot \sqrt{\gamma R T} \quad (2)$$

donde a es la velocidad del sonido en el medio, R es la constante del gas específico, y T la temperatura del flujo.

Sistema schlieren

La técnica de visualización schlieren consiste en que a partir de una fuente de luz puntual, con un arreglo de espejos parabólicos que colimen los rayos de luz provenientes de la fuente, ubicar un objeto con índice de refracción variable entre los espejos del arreglo y de esta forma visualizar el desplazamiento en dirección de los rayos incidentes en el plano de observación. Donde esta desviación en los rayos de luz será proporcional a las variaciones del índice de refracción del objeto de estudio; en particular para el caso de los fluidos, estas variaciones mencionadas se pueden relacionar con la densidad del fluido [2][3].

En particular, el arreglo schlieren tipo z es comúnmente el más empleado debido a al gran espacio de prueba que puede ofrecer, así como su versatilidad para el uso de componentes, otorgando así resultados óptimos. Este sistema emplea espejos parabólicos en paralelo con el fin de colimar la luz proveniente de una fuente de luz puntual, con el objetivo de crear el área de prueba o visualización. La fuente de luz puntual se sitúa a la distancia focal del primer espejo, el cual colimará los rayos de luz hasta topar con el segundo espejo, dicho lente terminará por concentrar los rayos de luz provenientes sobre su foco, donde a su vez estará colocada la navaja para que posteriormente de la navaja este colocada la cámara. Tiene como arreglo alternativo el uso de dos lentes biconvexas, a pesar de que pierde la forma de z, este arreglo alternativo puede verse en el diagrama a de la figura 1

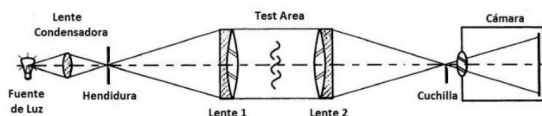


FIGURA 1: DIAGRAMA DE UN ARMADO SCHLIEREN CON DOS LENTES TOMADO COMO REFERENCIA. RECUPERADO DE GARCIA (2018) 3

Simulación

Existen diversas técnicas computacionales para la simulación de sistemas hidrodinámicos. El objetivo es obtener soluciones aproximadas mediante métodos numéricos para series de ecuaciones pertinentes como las ecuaciones de Navier-Stokes en general, o las Ecuaciones de Euler al ignorar la viscosidad en el fluido, también se utilizan para sistemas Magneto-hidrodinámicos y con auto-gravedad. Para este trabajo se utiliza un método de descripción Euleriano, es decir, concentrado en calcular las variables descritas en cada punto del espacio y la evolución de las mismas en esos puntos.

Para el ejercicio de interés, se aplica a las ecuaciones de Euler (invíscidas) sin fuerzas de cuerpo, se ignora la viscosidad dado que estamos estudiando aire en flujo a alta velocidad, a $M=1$ y con la manguera de 4 mm de diámetro, el número de Reynolds es del orden de 10^5 , además, se asume la hipótesis de adiabaticidad. Las ecuaciones de Euler en 1D se manejan en la siguiente forma, donde U son las cantidades de interés y $f(U)$ son los flujos de esas mismas.

$$\partial_t U + \nabla \cdot f(U) = 0 \quad (3)$$

donde:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (4)$$

y

$$f(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Con la notación usual, ρ la densidad, u la velocidad E la energía y p la presión, estas ecuaciones describen la variación de las densidades de: masa, momento y energía en cada punto equilibrada por el flujo de estas cantidades entre cada punto adyacente. En particular, es aplicado un esquema de volumen finito, que consiste en subdividir el espacio físico simulado en celdas cuadradas o cubicas, calculando el promedio del valor de las variables en cada celda mediante el calculo de flujos "numéricos" en la interfase entre cada celda, mediante la solución al problema de Riemann, que consiste en la evolución de una cantidad en una interfase cuyo valor es constante en cada lado de la interfase pero con valores diferentes a cada lado. El esquema de volumen finito tipo Godunov se aplica con un solucionador del problema de Riemann tipo HLLC a primer orden, debido a que capta adecuadamente choques (flujos supersónicos) sin necesidad de imponer condiciones de salto, pues distingue ondas de rarefacción, discontinuidades de contacto y ondas de choque.

II. MÉTODO EXPERIMENTAL

Tomando como referencia el diagrama de la figura 1 se realizó un arreglo con los materiales mencionados en la mesa óptica del Taller de Hidrodinámica y Turbulencia de la Facultad de Ciencias. Dicho arreglo contó con las

siguientes características e irán acorde al diagrama mostrado a continuación en la figura 2

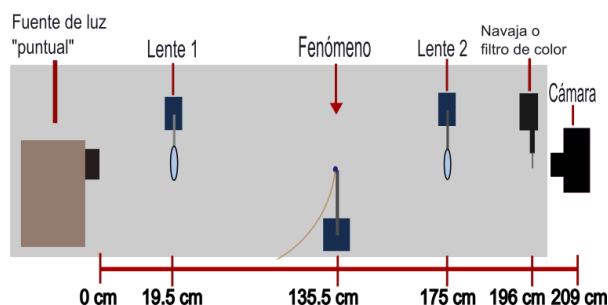


FIGURA 2: DIAGRAMA DEL MONTAJE FINAL VISTO DESDE ARRIBA CON LAS DISTANCIAS MARCADAS A PARTIR LA FUENTE DE LUZ

El foto-proyector usado como fuente de luz, fue ajustado usando una hoja difusora de luz empalmada con una pantalla con un pinhole para convertirlo en una fuente de luz "puntual". A 19.5 cm de la fuente de luz puntual se colocó el primer lente, el lente 1, siendo fijado a esa distancia con un soporte universal. A partir del lente 1 está marcado el inicio del área de prueba o de visualización del arreglo que abarcó una distancia total de 155.5 cm, del lente 1 al lente 2.

El fenómeno a visualizar se obtuvo con la manguera de 4 mm conectada a la compresora de aire, donde al otro extremo de la manguera, con suficiente cinta adhesiva se ajustó la tapa de pluma Bic a modo de tobera. Con el objetivo de mantener fija la tapa de pluma para evitar vibraciones o que saliera disparada por la presión del flujo de aire. Usando un vernier se midió el diámetro interno de la tapa, aquel que funcionó como agujero de salida, se obtuvo una medida de 3.1 mm. Una vez se sujetó la tapa de manera firme a la manguera, se ajustó un soporte universal con una nuez para mantener el fenómeno fijo, dicho fenómeno se ubicó a 116 cm de la lente 1.

El lente 2 se ubicó a 39.5 cm del fenómeno, de modo que la navaja se colocaría a 21 cm del lente 2. Se buscó colocar la cámara de inmediato al punto donde se había fijado la navaja; sin embargo, con el lente de 55 mm de la cámara (más el aumento por el anillo de enfoque) la distancia entre la navaja y el sensor de la cámara fue de 13 cm.

Con las posiciones de cada uno de los componentes fijos (fuente de luz, lentes, fenómeno, cámara y filtro), y con las luces apagadas del laboratorio, las pruebas se llevaron a cabo de la siguiente manera: Se ajustó el filtro de luz en la posición deseada, se tomó una imagen previo al inicio del fenómeno, posteriormente se abrió la llave de la compresora de aire para mantener entre 60 psi y 70 psi de presión constante durante 10 a 15 segundos, durante este tiempo se tomaron imágenes con la cámara con valores de ISO 100, apertura focal $f/10$ y velocidad de obturación de $\frac{1}{100}s$; para terminar así cerrando la llave para reajustar el filtro a su nueva posición.

Este proceso se repitió 3 veces para los arreglos del filtro de luz correspondientes a: una vez sin filtro –siendo este el arreglo shadowgraph–, una vez con la navaja tapando la mitad de la luz de forma horizontal y una última vez con el ajuste del filtro de color de forma vertical. Este último se realizó con dos láminas de papel celofán de color distinto en paralelo donde la interfaz de un color a otro coincidiera con la mitad del haz de luz.

Para la simulación, asumiendo simetría cilíndrica del flujo, se desarrolló en 2D con términos fuente asociados a las ecuaciones de Euler en coordenadas cilíndricas. Se impuso una malla de 128×1024 celdas asociadas a $0.8cm \times 6.4cm$, lo que nos da una resolución espacial de $62\mu m$ por pixel, y dado que λ el camino libre medio en aire en el ambiente es del orden de $1nm$; K_N , el número de Knudsen es mucho menor a 0.1, la simulación como medio continuo tiene validez. La pared $y = 0$ (el eje de revolución dada la simetría) es también el eje central del flujo y se determinan condiciones reflectivas en esa frontera debido a la axisimetría del problema; de manera efectiva esto implica agregar la interacción de la imagen simétrica a través del eje con la región principal simulada (dado que se descartan interacciones de cuerpo, la única interacción es elástica a través de la interfase). Las condiciones sobre la frontera opuesta son de flujo libre. Sobre la frontera $x = 0$ se determinan condiciones de flujo incidente desde $y = 0$ hasta $y = 0.2cm$ con velocidad $u = 0$, $p = 5atm$, y $\rho = 5kg \times m^{-3}$, asociado a la salida de aire del compresor hacia la manguera.

Posteriormente se define, paralelo al eje, un rectángulo de 4mm de altura y 1mm de grosor, emulando la pared de la manguera, suficientemente larga para obtener un flujo desarrollado interior; además, un bloque diagonal sólido de 1mm de grosor, que reduce el diámetro interno libre desde la salida de la manguera y en el radio exterior, desde 0.3cm hasta un radio en 0.155 cm a lo largo de 1cm en dirección del flujo, con el objetivo de servir de aproximación geométrica de la tobera.

Se dejó correr la simulación durante 1.4 ms de integración y se obtuvieron mapas de densidad y de número de Mach local comparado con la velocidad del sonido adiabática en cada punto. Se vieron siluetas similares a cortes transversales en 2D al centro del cilindro del flujo. Y se adjuntó una gráfica del número de Mach respecto a la altura y a lo largo del eje del flujo (coincidente con el eje de simetría) a partir de la salida de la tobera.

III. RESULTADOS

Se obtuvieron las imágenes para tres distintos variantes de técnicas de visualización: Shadowgraph, Schlieren con una navaja y con filtros de color. En estos se visualizan los gradientes de densidad en patrones geométricos marcados. Tal como lo muestran las Figuras 3 y 4.

Los valores de grises en este caso miden las distintas densidades del flujo. Se tomó como muestra una línea que va del centro de la boquilla de la tobera hasta el final de la pluma de flujo visualizada, por todo el centro del perfil. Sobre esta línea se obtuvieron los distintos valores de intensidad de gris con respecto a la distancia en milímetros (Fig. 5).

La presencia de ruido en los datos de intensidad resultó en que se hiciera un suavizado de la curva, con el motivo de tener valles y crestas con máximos y mínimos bien definidos en donde podamos medir la distancia entre cada uno de estos. A este conjunto de datos se le aplicó un filtro de Savitzky-Golay, un filtro que en vez de hacer un promedio simple (como el filtro de media móvil), ajusta un polinomio a una ventana deslizante de puntos mediante regresión lineal, esta ventana depende de un parámetro llamado longitud de

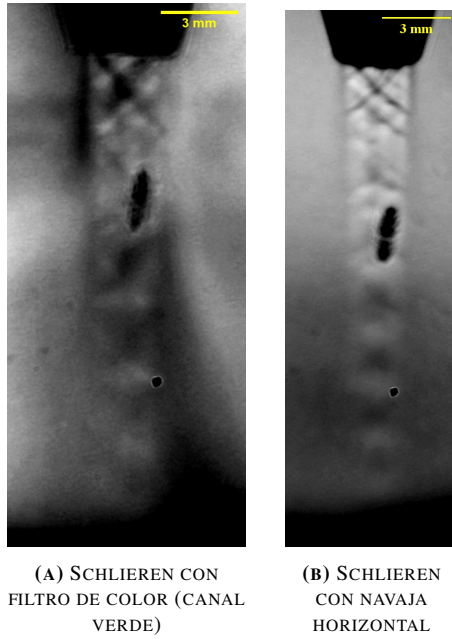


FIGURA 3: IMÁGENES SCHLIEREN PROCESADAS EN IMAGEJ.

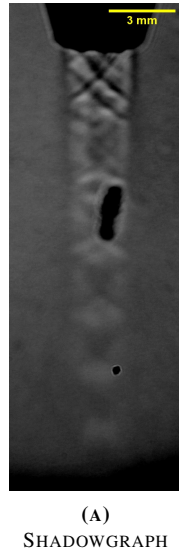


FIGURA 4: IMAGEN SHADOWGRAPH PROCESADA EN IMAGEJ.

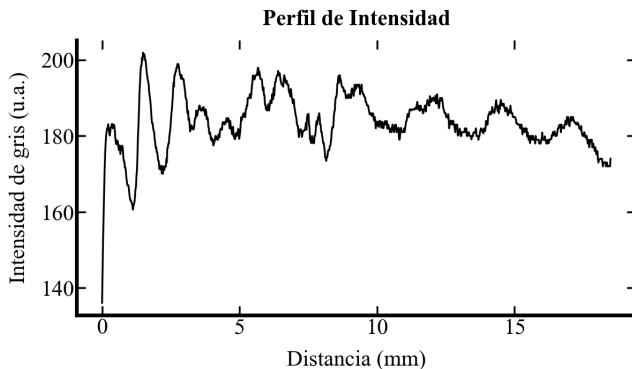


FIGURA 5: PERFIL DE GRIS PARA LA FOTOGRAFÍA SHADOWGRAPH

ventana, es el número de puntos consecutivos que se toman para aplicar el ajuste polinomial local, en nuestro caso para tener un ajuste adecuado de los máximos y mínimos de intensidad sobre la línea que cruza los diamantes la longitud de ventana se tomó igual a 101, sacrificando la fidelidad del

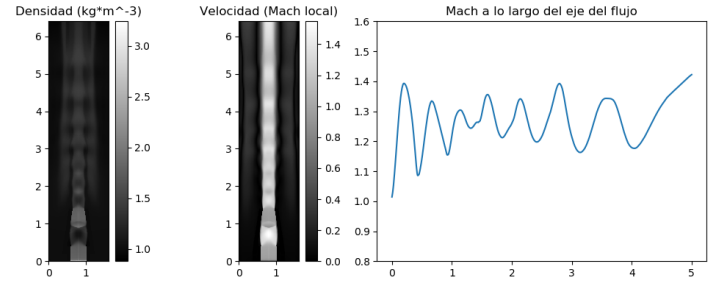


FIGURA 6: SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE UN FLUJO SUPERSÓNICO Y SUS MEDIDAS DE NUMERO DE MACH A LO LARGO DEL FLUJO

ajuste, respecto a los valores de escala de grises, por eliminar picos debido al ruido de la señal.

Esta suavización del perfil no representa un problema pues a fines de nuestro estudio se busca solo medir las distancias de separación entre los máximos y mínimos de iluminación en la visualización de los diamantes, no de los valores exactos que tenga en cada punto. Todo esto ya que se buscaba medir la distancia entre los diamantes a partir de los máximos y mínimos de intensidad a lo largo del eje sobre el que se hizo el análisis del perfil mostrado en la Figura 5.

Se aplicó las Ec. 1 y 2 al conjunto de datos ya procesado que se muestra en la Tabla 1, y de igual forma, obtenida la simulación, se muestra el número de Mach en cada punto del sobre el eje central a lo largo de la pluma del flujo expulsado (Fig. 6) y se calculó el promedio ponderado del numero de Mach. El resultado fue de un Mach promedio de 1.25 ± 0.08 .

Técnica	Medidas	Velocidad (m/s)	Mach
Schlieren color	Crestas	506.99 ± 26.66	1.460 ± 0.077
	Valles	509.58 ± 3.46	1.468 ± 0.010
Schlieren navaja	Crestas	446.65 ± 15.08	1.286 ± 0.043
	Valles	455.54 ± 10.05	1.312 ± 0.029
Shadowgraph	Crestas	494.90 ± 9.27	1.425 ± 0.027
	Valles	502.49 ± 7.05	1.447 ± 0.020

TABLA 1: VELOCIDADES Y NÚMEROS DE MACH OBTENIDOS USANDO LAS MEDIDAS ENTRE DISTANCIAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE INTENSIDAD CON DISTINTOS MÉTODOS DE VISUALIZACIONES.

Haciendo una comparación entre los números de Mach medidos de los arreglos schlieren, se calculó el error relativo de dichos valores contrastados al valor de Mach promedio de 1.25, estos valores quedaron representados en la tabla 2.

IV. ANÁLISIS

El armado experimental tuvo problemas en la calidad optica del armado. El usar lentes generaba un problema por muy visible de suciedad, las Figuras 3 y 4 muestran contaminación en la primera lente del arreglo, lo que metía una cantidad de ruido considerable dentro de la señal de intensidad de gris alrededor de los 6mm desde que el aire es expulsado de la tobera (Ver Fig. 5).

Técnica	Tipo	Mach	Error relativo (%)
Schlieren navaja	Máximos	1.305	4.40
	Mínimos	1.308	4.64
Schlieren color	Máximos	1.460	16.80
	Mínimos	1.468	17.44
Shadowgraph	Máximos	1.425	14.00
	Mínimos	1.447	15.76

TABLA 2: ERROR RELATIVO DE CADA MEDICIÓN DE NÚMERO DE MACH RESPECTO AL VALOR DE LA SIMULACIÓN 1.25

Se notó que la imagen que otorga mayor información es aquella del arreglo schlieren con la navaja en horizontal. Esto, debido a que la navaja crea un mayor contraste entre las zonas oscuras y las luminosas, cosa que con los otros dos métodos fue complicado como en el caso de los filtros de color. En particular el arreglo horizontal de la navaja permite intensificar el contraste de los haces de luz de forma perpendicular al arreglo. Por lo tanto, al fenómeno suceder de forma perpendicular al ajuste de la navaja horizontal provoca un aumento de contraste. Y por ese aumento, se pudo medir de manera más precisa la distancia entre cada diamante; a diferencia de los otros dos donde al tener menos rango de intensidad de luz, las zonas de mayor o menor intensidad son mas difusas.

Se obtuvieron incertidumbres, en su mayoría, menores al 10% del número de Mach medido, ver Tabla 2. Por lo que se considera que las mediciones a partir de las visualizaciones son fiables en la interpretación de las velocidades alcanzadas en el aire durante el experimento en las condiciones mencionadas

En la Tabla 2 se muestran los errores relativos en para cada medida del número de Mach con respecto al de la simulación. Tomando en cuenta esto, el resultado con menor error es el de la medición con la navaja, un error de menos de 5%. De esto podemos deducir que la simulación tiende a ser más parecido al fenómeno captado con el método de schlieren usando navaja como método de filtro de luz para aumentar el contraste, además que estos resultados difieren de los valores obtenidos por la técnica de Schlieren a color y shadowgraph. Esto puede deberse a las condiciones de frontera distintas en la simulación, siendo las condiciones más parecidas a las obtenidas en el experimento con uso de navaja. Argumentamos que la simulación puede considerarse una fuente de información adicional al experimento, al contrastarlo con los distintos métodos y ver que el error relativo mas grande fue de poco mas el 17% mientras que en el mejor de los casos se mantuvo por debajo del 5%, un error que consideramos aceptable para la fiabilidad del programa y los fenómenos simulados.

V. CONCLUSIÓN

Se logró alcanzar los objetivos propuestos al inicio de este trabajo pues consideramos las visualizaciones, mediciones y las simulaciones realizadas fueron exitosas. Se logró causar, fotografiar y medir un flujo con las herramientas básicas, así

como comparar estas medidas con las de una simulación en condiciones de frontera muy cercanas a las del experimento.

Pese al inicio haber encontrado problemas en el armado experimental que influyeron en la resolución de las imágenes obtenidas, derivados de la calidad óptica de los lentes; en particular, una "burbuja" que puede observarse y tapa áreas de la imagen que pueden ser de interés. Se logró medir la velocidad y consecuentemente los números de Mach en las imágenes obtenidas para cada arreglo schlieren. Se comparó la simulación con los resultados y se obtuvieron errores relativos menores al 5%, el arreglo schlieren con la navaja tapando de forma horizontal, por lo que se considera que la simulación es fiable para demostrar y contrastar información más específica y detallada sobre el flujo.

Trabajo futuro

Sin embargo, como trabajo futuro, se recomendaría un mejor control del material a utilizar, en particular de los lentes dentro del arreglo, mejorar la calidad óptica otorgaría menos ruido debido a contaminación o aberraciones del propio lente. A su vez, se podría proponer un intento de arreglo schlieren tipo z utilizando espejos parabólicos en lugar de lentes, con el objetivo de mejorar la calidad óptica empleada en el arreglo y con ello evitar quitarle información a la visualización o minimizar el ruido derivado de imperfecciones. Así como remarcar la importancia del control de aquellas condiciones que si se pueden manipular.

BIBLIOGRAFÍA

- Bailly, C., Andre, B., Castelain, T., Henry, C., Bodard, G., & Porta, M. (2014). An analysis of shock noise components. <https://doi.org/10.12762/2014.AL07-06>
- Bonilla, B. A. R. (2018). Diseño y Construcción de Técnica de Visualización de Fluidos de Alta Velocidad Schlieren Tipo-Z. <https://repository.libertadores.edu.co/server/api/core/bitstreams/1518ac47-807e-4c5b-be2c-2bb208b48dae/content>
- García, V. B. (2018). Diseño y Montaje de un Sistema Schlieren para Visualización de Gases. <https://digibuo.uniovi.es/dspace/bitstream/handle/10651/48098/TFMVictorBarbonRUO.pdf?sequence=3&isAllowed=y>
- Toro, E. F. (2009). Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. 3rd Edition, Springer, New York

ANEXO

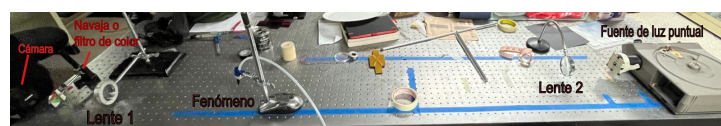


FIGURA 7: FOTO DEL MONTAJE EN EL LABORATORIO CON CADA COMPONENTE ETIQUETADO

Técnica	Tipo	Velocidad (m/s)
Schlieren navaja sin corregir	Crestas	447.15
	Valles	442.85
Schlieren navaja corregido	Crestas	453.23
	Valles	454.00
Schlieren color sin corrección	Crestas	479.67
	Valles	476.75
Schlieren color con corrección	Crestas	506.99
	Valles	509.58
Schlieren solo sin corrección	Crestas	486.29
	Valles	487.72
Schlieren solo con corrección	Crestas	494.90
	Valles	502.49

TABLA 3: VELOCIDADES MEDIDAS CON DISTINTAS TÉCNICAS SCHLIEREN