

Введение

Вибрационная нагрузка, приложенная к поверхности упругого волновода, возбуждает в нем бегущие волны. Оценка характеристик этих волн используется в таких областях науки и техники, как сейсмология и сейсмостойкое строительство, виброзащита, а также в микроэлектронных устройствах на поверхностных акустических волнах и в системах прецизионного позиционирования. Волны, возбуждаемые в стальных, алюминиевых или композитных пластинах с помощью активных пьезосенсоров, выполненных в виде гибких и тонких накладок, распространяются на большие расстояния, взаимодействуя с любыми неоднородностями, что позволяет выявлять скрытые дефекты. В последнее время такая технология волнового контроля выделяется в самостоятельное научно-техническое направление — мониторинг дефектов конструкций (Structural Health Monitoring (SHM)) [1].

Для получения количественных характеристик возбуждаемых волн, используются различные подходы, от классического модального анализа до конечно-элементной аппроксимации (МКЭ). Промежуточное положение в этом ряду занимает полуаналитический интегральный подход, базирующийся на явном интегральном представлении вектора смещений волнового поля u , возбуждаемого поверхностной нагрузкой q , приложенной в некоторой области Ω (рисунок 1), через Фурье-символ K матрицы Грина рассматриваемой упругой слоистой структуры.

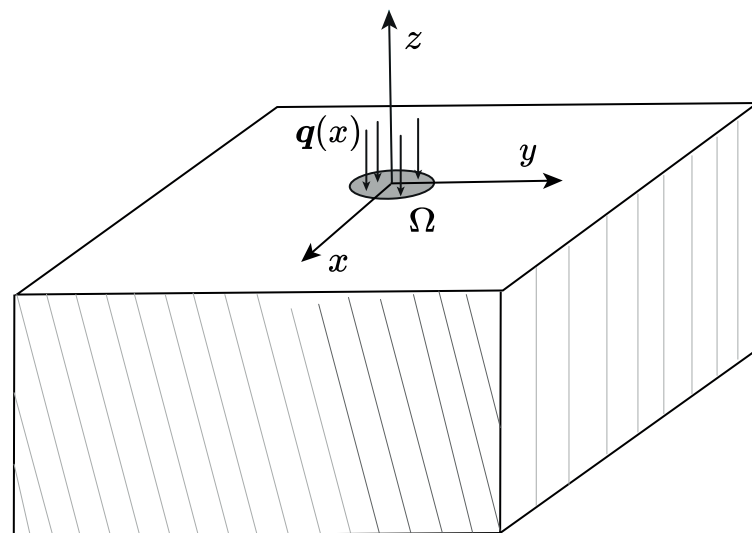


Рис. 1. Геометрия задачи

Цель данной работы: изучить моделирование процессов возбуждения и распространения волн в упругом волноводе на примере построе-

ния установившихся гармонических колебаний. Задачи: построить волновое поле, возбуждаемое точечным источником колебаний в упругом полупространстве методом конечных элементов при помощи программы COMSOL Multiphysics[2]; построить волновое поле, используя полуаналитический интегральный подход, базирующийся на явном интегральном представлении вектора смещений волнового поля через Фурье символ K матрицы Грина упругого полупространства с применением численного интегрирования средствами языка программирования Fortran и программы DINN5.

Данная работа может быть полезна для студентов и аспирантов начинающих работу с полуаналитическим методом

1. Постановка задачи

Однородное изотропное упругое полупространство в декартовой системе координат x, y занимает объем $-\infty < x, y < +\infty$. К его поверхности в области Ω приложена нагрузка $\tau = q(x, y)e^{(-i\omega x)}$, а вне Ω напряжения τ отсутствуют. Колебания среды предполагаются гармоническими установившимися с круговой частотой ω . На бесконечности перемещения и напряжения стремятся к нулю и выполняются условия излучения Зоммерфельда. Требуется определить волновое поле, возбуждаемое источником колебаний в упругой среде.

Установившийся режим колебаний означает, что зависимость всех характеристик задачи (перемещения, напряжения и др.) от времени t описывается множителем $e^{(-i\omega x)}$. В силу линейности задачи данный множитель можно сократить и работать только с комплексными амплитудами соответствующих величин, не оговаривая этого особо. Например, $Re[u(x, y, z)e^{(-i\omega x)}]$ - вектор перемещений точек среды. Работать будем только с вектором $\mathbf{u}(x, y, z) = \{u, v, w\}$, называя его также вектором перемещений.

Вектор перемещений характеризует отклонение каждой точки тела от начального положения, компоненты его u, v, w являются непрерывными функциями координат. Векторные величины здесь обозначаются чертой сверху; предполагается, что векторы являются векторами-столбцами.

Механическое состояние упругого тела характеризуется компонентами тензоров деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} , которые в линейной

теории упругости связаны уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3 \dots, \quad (1.1)$$

соотношениями обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{mn} \varepsilon_{mn}, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots \quad (1.2)$$

и геометрическими соотношениями Коши

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \quad (1.3)$$

Здесь пишем все промежуточные шаги, получая в итоге...

В итоге из уравнений движения (1.1) получаем уравнения Ляме

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \Delta u + f_x + \rho \omega^2 u = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \Delta v + f_y + \rho \omega^2 v = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \Delta w + f_z + \rho \omega^2 w = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

которые вместе с граничными условиями:

$$\bar{\tau}|_{z=0} = \begin{cases} \bar{q}(x, y), (x, y) \in \Omega \\ 0, (x, y) \notin \Omega \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j, \quad i = 1, 2, 3$$

и условиями на бесконечности

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

составляют краевую задачу (1.1-1.6), к решению которой сводится вопрос нахождения поля \mathbf{u} .

2. Метод конечных элементов

В данном разделе мы построили волновое поле с помощью COMSOL

Multiphysics. Эта программа имеет широкий функционал, множество модулей и предназначена для создания большого количества физических процессов, поэтому при работе с ней необходимо учитывать множество нюансов.

Для рассмотрения части из них проходимся по всем этапам создания модели волнового поля. Первым шагом является выбор пространства, в котором пройдут все последующие вычисления. В нашем случае

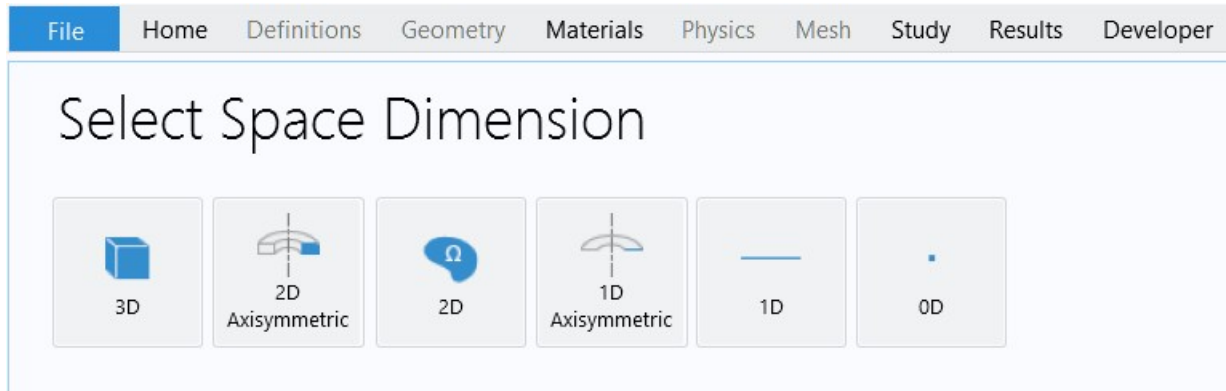


Рис. 2. Окно выбора мерности пространства

это двумерная плоскость (x, y), поэтому в начальном окне (Рисунок 2) выбираем кнопку “2D”.

здесь вставляешь все что было в первой курсовой, только нагрузка в комселе точечная и еще нужен скрин с графиком поля на поверхности

3. Полуаналитический метод

Здесь надо расписать шаги от уравнений лямэ: преобразование Фурье и тд (не слишком подробно, примерно как в статье Шефов 1990 года)

$$\Delta = 4i\mu^2\alpha^2[-(\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)^2 + \alpha^2\sigma_1\sigma_2]$$

Таким образом получим следующие компоненты:

$$\begin{aligned} P(\alpha, z) &= \frac{2i\mu\alpha^2[-(\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_1 z} + \sigma_1\sigma_2 e^{\sigma_2 z}]}{\Delta} \\ R(\alpha, z) &= \frac{2i\mu\alpha^2\sigma_1[-(\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_1 z} + \alpha^2 e^{\sigma_2 z}]}{\Delta} \\ M(\alpha, z) &= \frac{2\mu\sigma_2[-\alpha^2 e^{\sigma_1 z} + (\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_2 z}]}{\Delta} \\ S(\alpha, z) &= \frac{2\mu\alpha^2[-\sigma_1\sigma_2 e^{\sigma_1 z} + (\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_2 z}]}{\Delta} \end{aligned}$$

Аналогично для \bar{X}_1 :

$$N(\alpha, z) = \frac{i}{\mu\alpha^2\sigma_2} e^{\sigma_2 z}$$

Выразим искомые перемещения \bar{U} через заданную нагрузку \bar{Q} .
Имеем:

$$\begin{cases} U = -i\alpha_1(P_1P + P_2M) - i\alpha_2(\alpha_2Q_1 - \alpha_1Q_2)N \\ V = -i\alpha_2(P_1P + P_2M) + i\alpha_1(\alpha_2Q_1 - \alpha_1Q_2)N \\ W = P_1R + P_2S \end{cases}.$$

Или, группируя члены при Q_k в матричном виде:

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = K(\alpha_1, \alpha_2, z)\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$K = \begin{pmatrix} -i(\alpha_1^2M + \alpha_2^2N) & -i\alpha_1\alpha_2(M + N) & -i\alpha_1P \\ -i\alpha_1\alpha_2(M - N) & -i(\alpha_2^2M + \alpha_1^2N) & -i\alpha_2P \\ \alpha_1S & \alpha_2S & R \end{pmatrix}.$$

Тут допиши еще обратное преобразование!

Применим полуаналитический метод в тех же условиях, что и метод конечных элементов, затем сопоставим результаты. В плоском случае вид матрицы K значительно упрощается:

$$K(\alpha, z) = \begin{pmatrix} -i\alpha^2M & -i\alpha P \\ \alpha S & R \end{pmatrix}.$$

Преобразование Фурье сосредоточенной нагрузки $\mathbf{Q}(x) = (0, 1)$. Параметры для расчетов

μ	λ	ρ	f
22.6 ГПа	18 ГПа	2700 кг/м ³	200 кГц

Тут допишешь про то как мы считали на фортране и вставишь графики поля на поверхности, где комсол с фортраном сопоставляем

4. Заключение

В рамках данной курсовой работы был рассмотрен метод моделирования конечных элементов программой COMSOL, а также метод полуаналитического преобразования Фурье с помощью языка программирования Fortran.

Были выявлены недостатки и преимущества данных методов, что позволило нам сравнить оба подхода и понять, для ответа на какие вопросы каждый из методов более эффективен.

Литература

1. Mitra M., Gopalakrishnan S. Guided Wave Based Structural Health Monitoring: Review. *Smart Materials and Structures*, 2016, vol. 25, no. 5, pp. 1–27. DOI: 10.1088/0964-1726/25/5/053001
2. Учебные руководства и пособия по использованию COMSOL Multiphysics // comsol.ru: [сайт] - URL: <https://www.comsol.ru/documentation> (дата обращения: 09.11.2022)