

# Содержание

<b>Введение . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>1. Постановка задачи . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>2. Метод конечных элементов . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>3. Полуаналитический метод . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>Список использованных источников . . . . .</b>	<b>22</b>

## Введение

Вибрационная нагрузка, приложенная к поверхности упругого волновода, возбуждает в нем бегущие волны. Оценка характеристик этих волн используется в таких областях науки и техники, как сейсмология и сейсмостойкое строительство, виброзащита, а также в микроэлектронных устройствах на поверхностных акустических волнах и в системах прецизионного позиционирования. Волны, возбуждаемые в стальных, алюминиевых или композитных пластинах с помощью активных пьезосенсоров, выполненных в виде гибких и тонких накладок, распространяются на большие расстояния, взаимодействуя с любыми неоднородностями, что позволяет выявлять скрытые дефекты. В последнее время такая технология волнового контроля выделяется в самостоятельное научно-техническое направление — мониторинг дефектов конструкций (Structural Health Monitoring (SHM)) [1].

Для получения количественных характеристик возбуждаемых волн, используются различные подходы, от классического модального анализа до конечно-элементной аппроксимации (МКЭ). Промежуточное положение в этом ряду занимает полуаналитический интегральный подход, базирующийся на явном интегральном представлении вектора смещений волнового поля  $u$ , возбуждаемого поверхностной нагрузкой  $q$ , приложенной в некоторой области  $\Omega$  (рисунок 1), через Фурье-символ  $K$  матрицы Грина рассматриваемой упругой слоистой структуры.

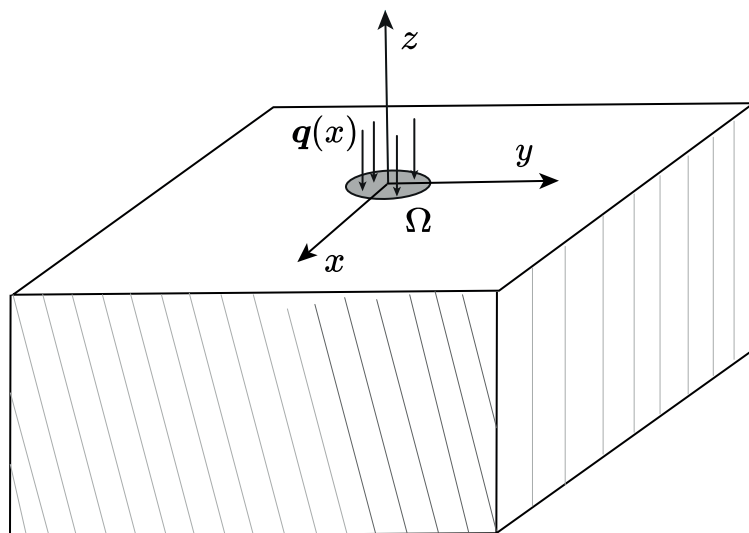


Рис. 1. Геометрия задачи

Цель данной работы: изучить моделирование процессов возбуждения и распространения волн в упругом волноводе на примере построения установившихся гармонических колебаний.

Задачи:

1. Построить волновое поле, возбуждаемое точечным источником колебаний в упругом полупространстве методом конечных элементов при помощи программы COMSOL Multiphysics[2];
2. Построить волновое поле, используя полуаналитический интегральный подход, базирующийся на явном интегральном представлении вектора смещений волнового поля через Фурье символ  $K$  матрицы Грина упругого полупространства с применением численного интегрирования средствами языка программирования Fortran и программы DINN5;
3. Сопоставить полученные предыдущими шагами данные и, в случае эквивалентности результатов, убедиться в справедливости обоих методов нахождения волнового поля .

## 1. Постановка задачи

Однородное изотропное упругое полупространство в декартовой системе координат  $x, y, z$  занимает объем  $-\infty < x, y < +\infty$ ,  $-\infty < z \leq 0$ . К его поверхности в области  $\Omega$  приложена нагрузка  $\tau = q(x, y)e^{-i\omega t}$ , а вне  $\Omega$  напряжения  $\tau$  отсутствуют. Колебания среды предполагаются гармоническими установившимися с круговой частотой  $\omega$ . На бесконечности перемещения и напряжения стремятся к нулю и выполняются условия излучения Зоммерфельда. Требуется определить волновое поле, возбуждаемое источником колебаний в упругой среде.

Установившийся режим колебаний означает, что зависимость всех характеристик задачи (перемещения, напряжения и др.) от времени  $t$  описывается множителем  $e^{-i\omega t}$ . В силу линейности задачи данный множитель можно сократить и работать только с комплексными амплитудами соответствующих величин, не оговаривая этого особо. Например,  $Re[\mathbf{u}(x, y, z)e^{-i\omega t}]$  - вектор перемещений точек среды. Работать будем только с вектором  $\mathbf{u}(x, y, z) = (u, v, w)$ , называя его также вектором перемещений.

Вектор перемещений характеризует отклонение каждой точки тела от начального положения, компоненты его  $u, v, w$  являются непрерывными функциями координат. Векторные величины здесь обозначаются чертой сверху; предполагается, что векторы являются векторами-столбцами.

Механическое состояние упругого тела характеризуется компонентами тензоров деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и напряжений  $\sigma_{ij}$ , которые в линейной теории упру-

гости связаны уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

соотношениями обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{mn} \varepsilon_{mn}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

и геометрическими соотношениями Коши:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \quad (3)$$

В случае однородного, изотропного полупространства, равенство (2) упрощается:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}; \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

а при помощи равенств (3), (4) уравнения движения (1) преобразуются в систему уравнений Ляме [3]

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \Delta u + f_x + \rho \omega^2 u = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \Delta v + f_y + \rho \omega^2 v = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \Delta w + f_z + \rho \omega^2 w = 0 \end{cases} \quad (5)$$

где

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Условие приложения нагрузки  $\tau = \mathbf{q}(x, y)e^{(-i\omega x)}$  в области  $\Omega$  преобразуется

$$\bar{\tau}|_{z=0} = \begin{cases} \mathbf{q}(x, y), (x, y) \in \Omega \\ 0, (x, y) \notin \Omega \end{cases}, \quad (6)$$

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j, \quad i = 1, 2, 3$$

и вместе с условиями на бесконечности:

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty \quad (7)$$

и условиями излучения составляет граничные условия.

Таким образом получается краевая задача (5)-(7), к решению которой сводится вопрос нахождения поля  $u[1]$ .

## 2. Метод конечных элементов

Задача (5)-(7) может быть расщеплена на две независимые: плоскую и антиплоскую [источник!]. Рассмотрим первый случай, когда распространение волн и смещение частиц происходят в одной плоскости. В данном разделе поэтапно построим плоское волновое поле  $u(x, y) = (u, v)$  с помощью программы COMSOL Multiphysics. Эта программа имеет широкий функционал, множество модулей и предназначена для моделирования большого количества физических процессов, при этом есть возможность учета их взаимного влияния.

Первым шагом будет выбор пространства, в котором будут проходить все последующие вычисления. В нашем случае это будет двумерная плоскость  $\{X, Y\}$

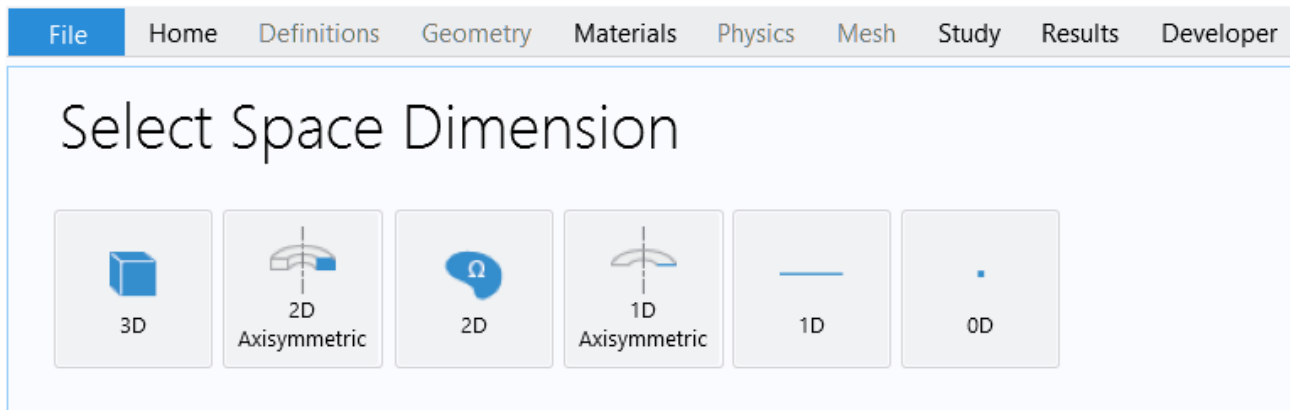


Рис. 2. Окно выбора размерности пространства

Далее COMSOL предоставляет нам выбор процесса, который мы предпочтем рассматривать. Из имеющихся вариантов используем “механики твердых тел” (Solid Mechanics), так как построенный в итоге волновод должен являться упругим.

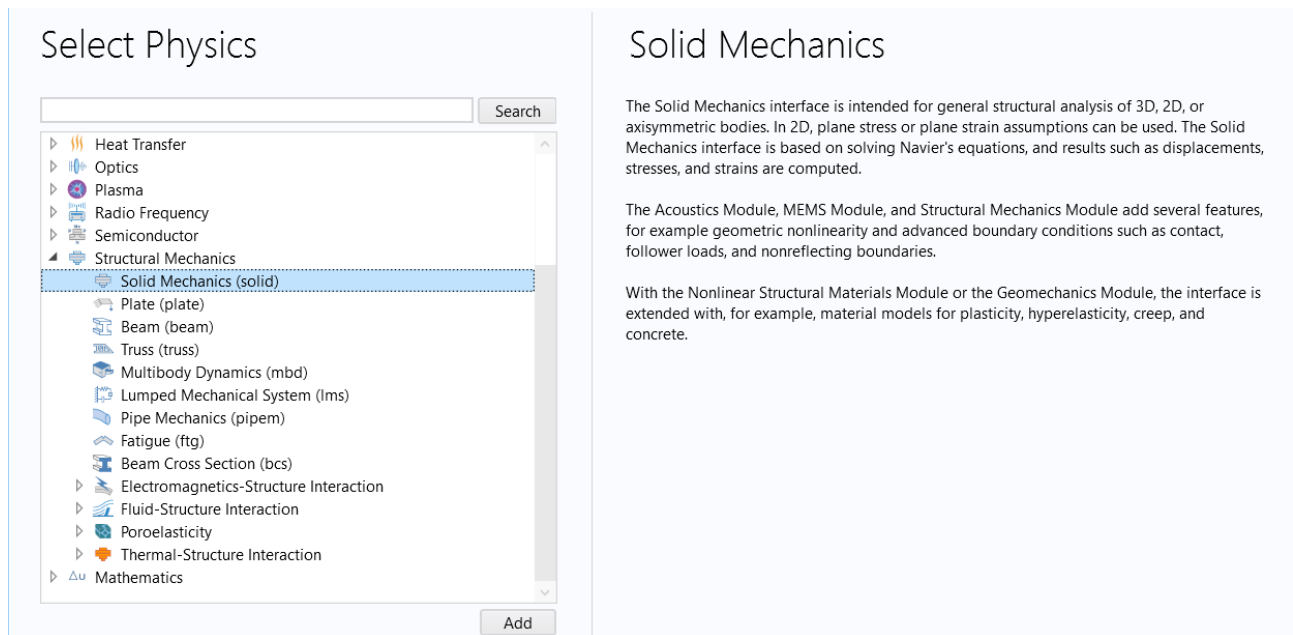


Рис. 3. Окно выбора физических процессов

Следующее окно, с которым мы сталкиваемся, предлагает нам выбрать дополнительные условия, которые мы будем накладывать на наше пространство. Выберем "частотное поле"(Frequency Domain), потому что этот модуль будет работать с поступающим напряжением, как с установившимися гармоническими колебаниями.

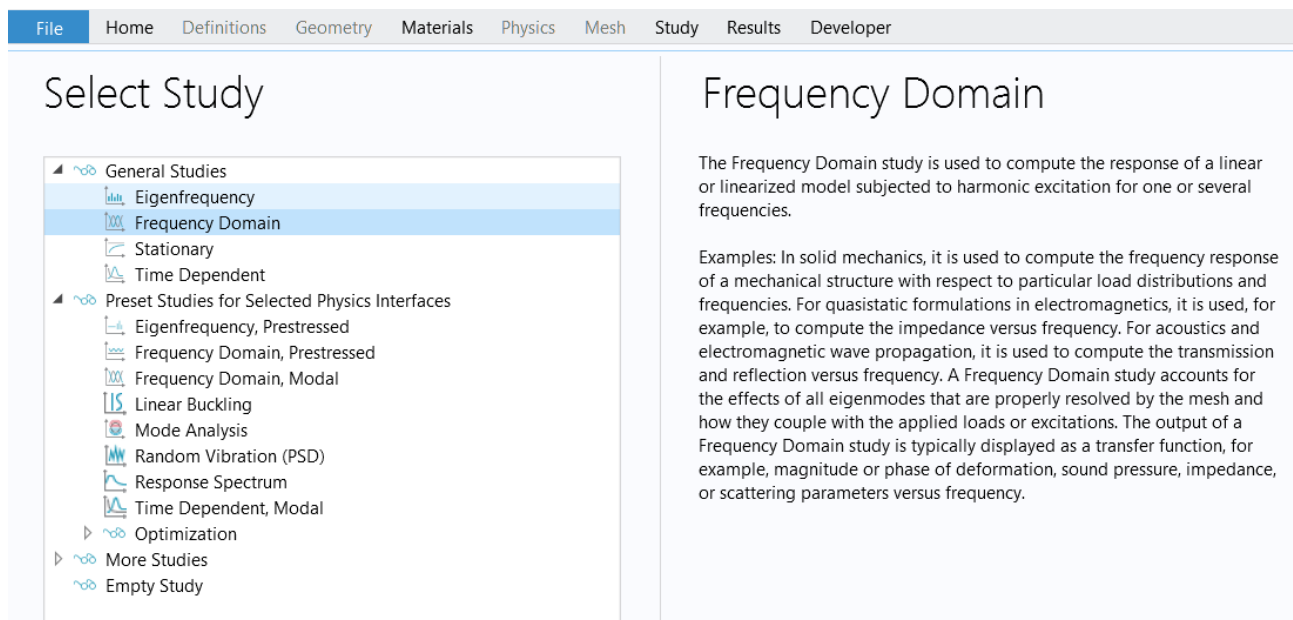


Рис. 4. Окно выбора дополнительных условий

После проделанных ранее действий перед нами открывается рабочее пространство COMSOL, в котором можно задавать нужные нам формы, материалы, свойства, значения и т.д.

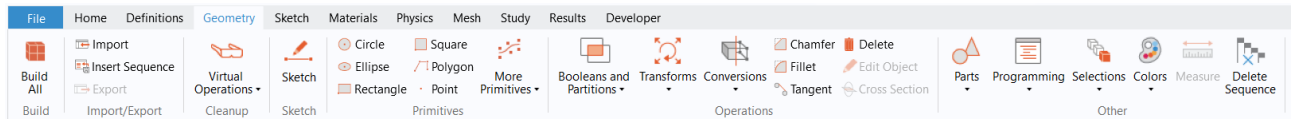


Рис. 5. Окно добавления физических процессов

Для добавления желаемого объекта на область отображений на верхней панели секцию “геометрия” (Geometry) и нажмем на интересующую нас фигуру, например, прямоугольник.

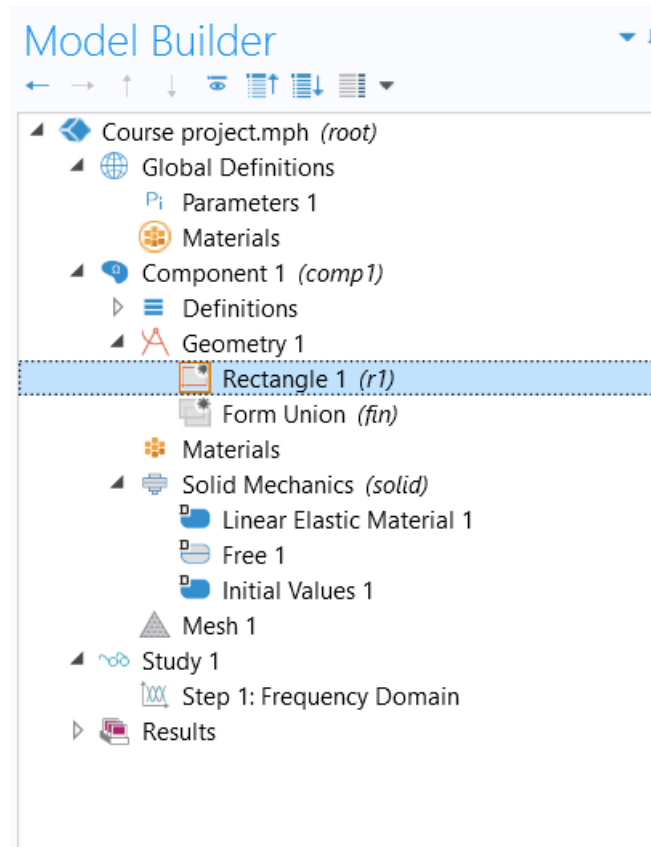


Рис. 6. Окно редактирования проекта

У созданной области не будет заданных заранее характеристик, поэтому зададим их самостоятельно. В будущем может возникнуть потребность в изменении конкретных параметров, поэтому для удобства заранее создадим константы, на которые будем ссылаться в других частях программы. Данный функционал предусмотрен в секции “параметры” (Parameters). В появившихся полях “имя” (Name) и “выражение” (Expression) зададим, соответственно, имена переменных и их значения.

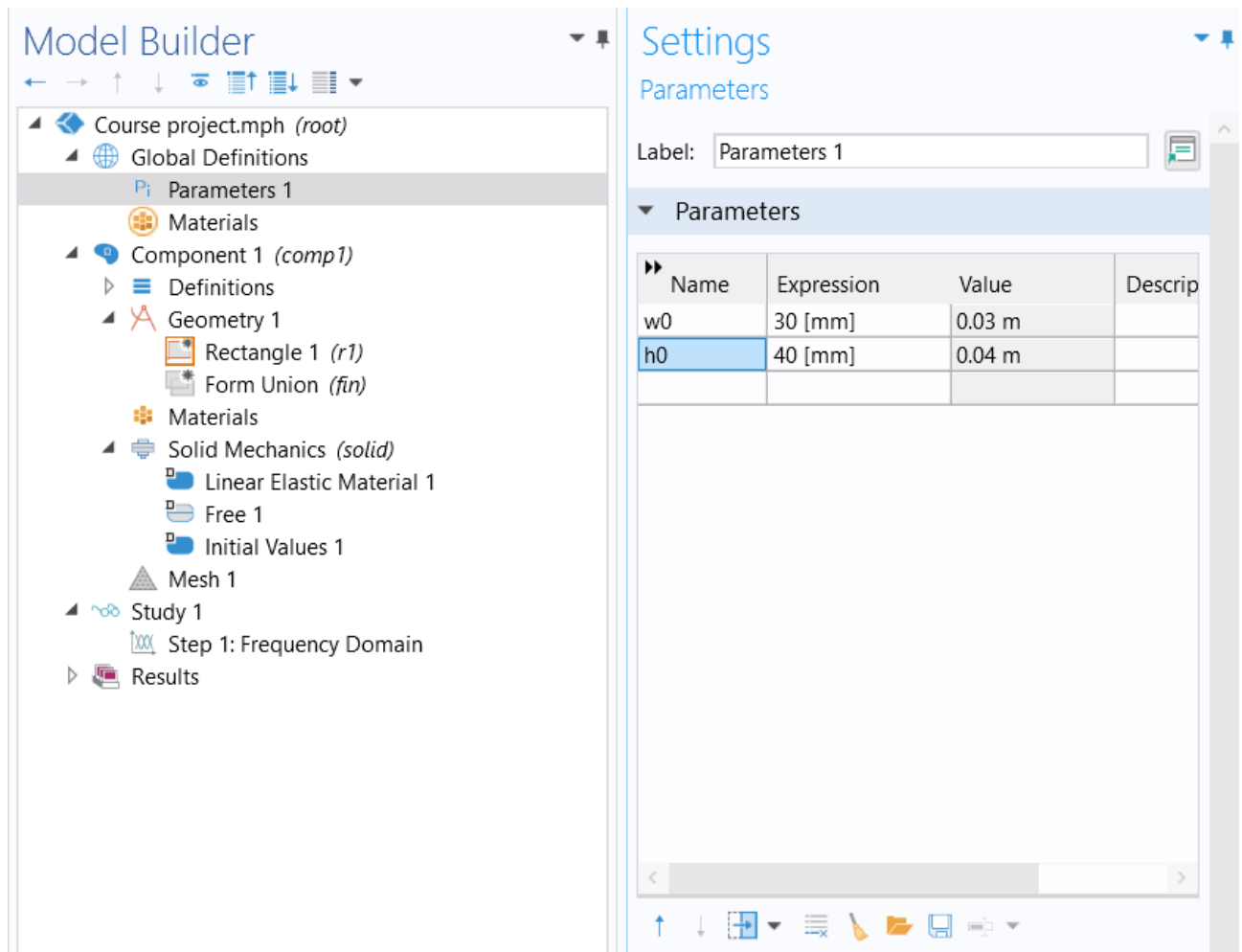


Рис. 7. Окно управления константами

Передадим созданные переменные соответствующим полям и нажмем на кнопку “создать все объекты” (Build All Objects).

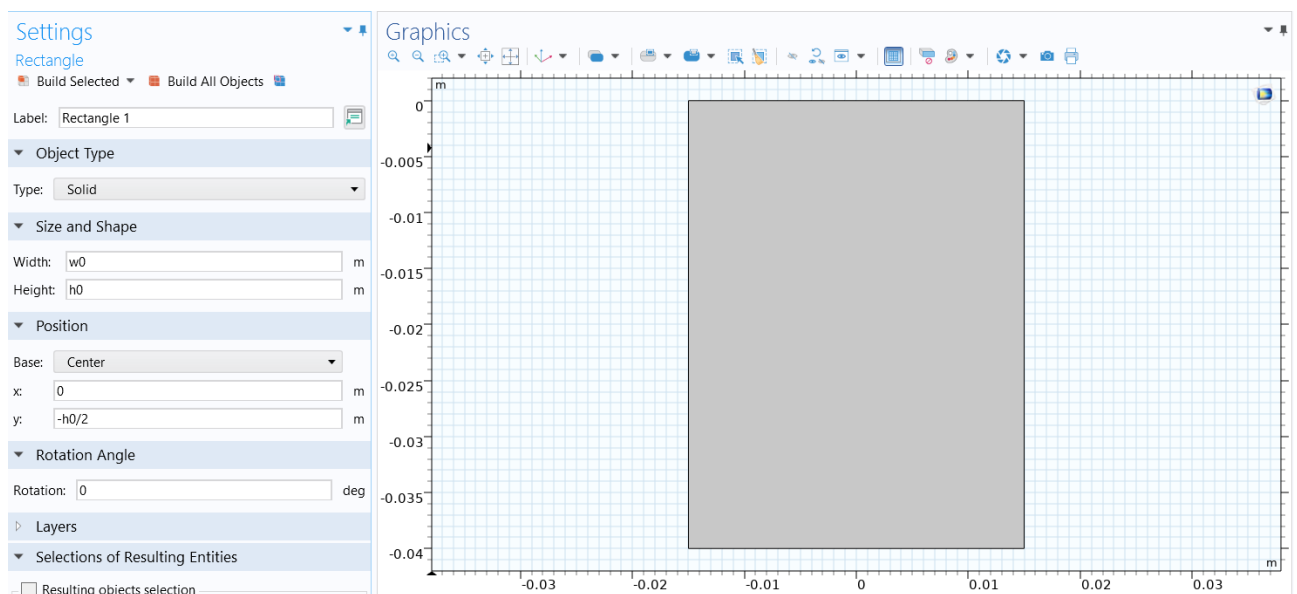


Рис. 8. Окно графического отображения

Далее нам понадобится область, на которую будет поступать нагрузка.



Для этого, используя предыдущие шаги, создадим “точку” (Point), которая будет находиться, например, в центре верхней поверхности имеющегося прямоугольника.

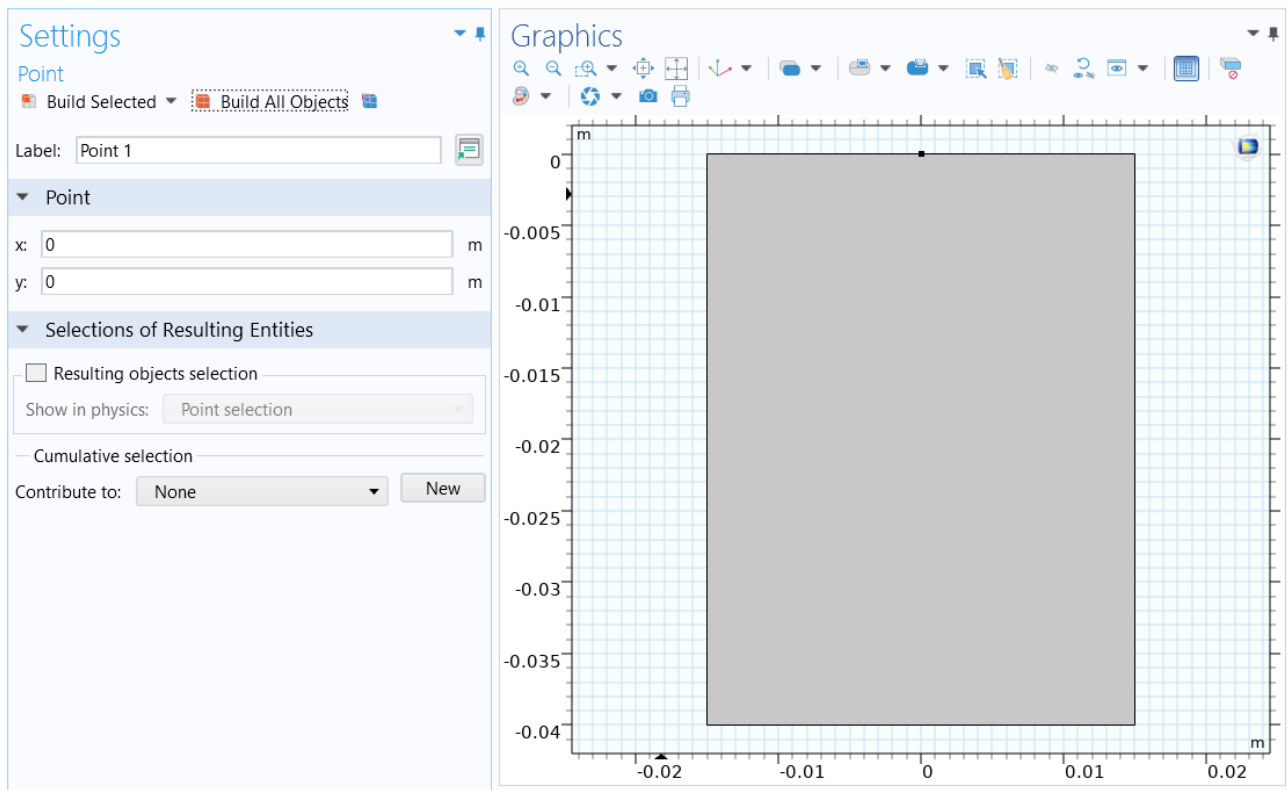


Рис. 9. Добавление на график точки

Для создания нагрузки на пространство в разделе Solid Mechanics добавим “точечную нагрузку” (Point Load) и нажмем на нагружаемую область, чтобы выбрать ее. Силу, с которой будут поступать колебания, зададим в разделе “сила” (Force).

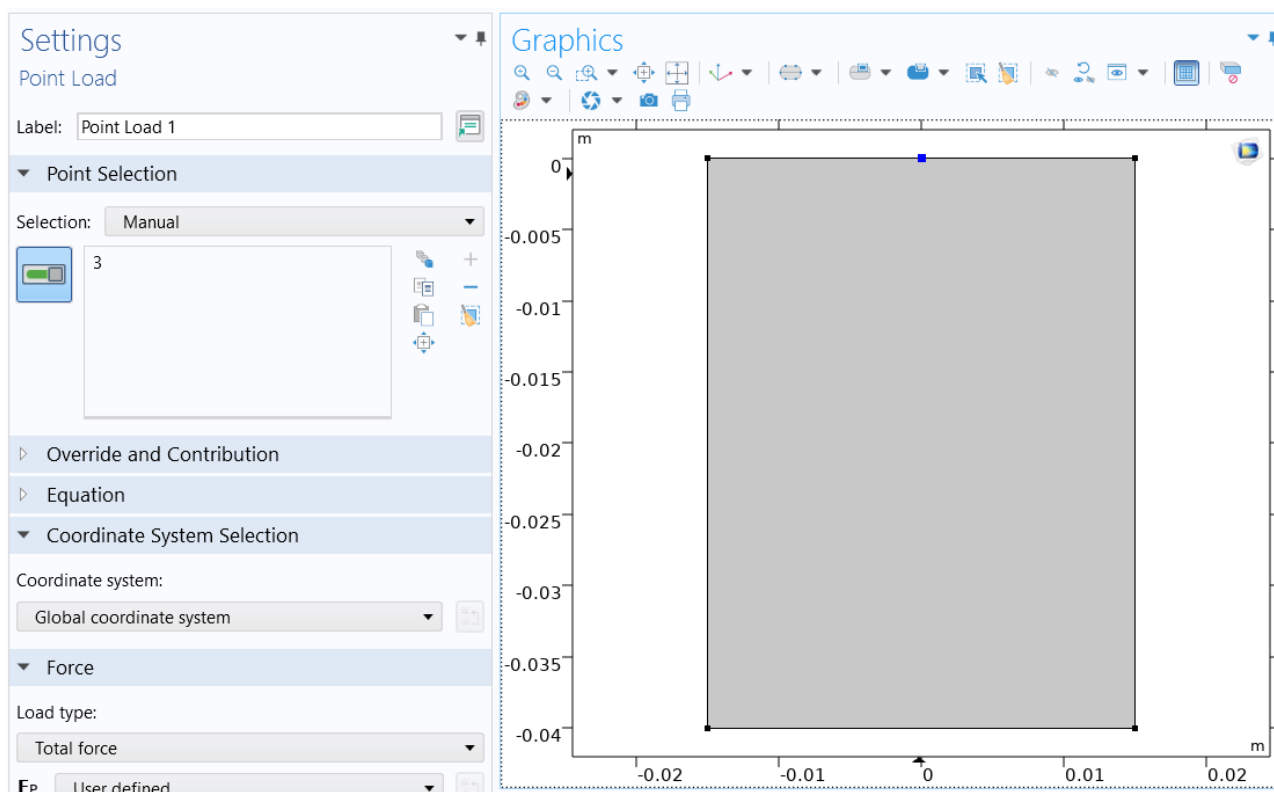


Рис. 10. Добавление нагрузки на точку

Теперь, когда мы создали объект, ему нужно задать материал. Для этого выбираем секцию “материалы” (Materials) на верхней панели и жмем “добавить материал” (Add Material).

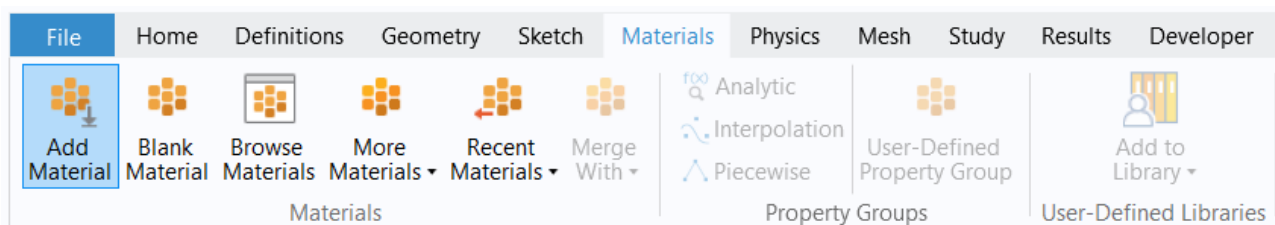


Рис. 11. Окно добавления материала

В открывшейся библиотеке материалов выбираем подходящий. В нашем случае полупространство является упругим, поэтому соответствующим материалом будет “алюминий” (Aluminum).

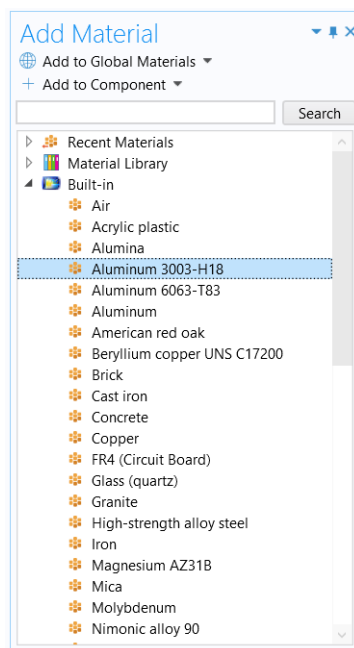


Рис. 12. Библиотека материалов

Следующим шагом нужно сделать наш прямоугольник полупространством, чтобы при распространении волны уходили на бесконечность и не отражались от поверхностей. Для этого выберем в секции “определения” (Definitions) инструмент “идеально подобранные слои” (Perfectly Matched Layers (PML)), который будет поглощать поступающие волны.

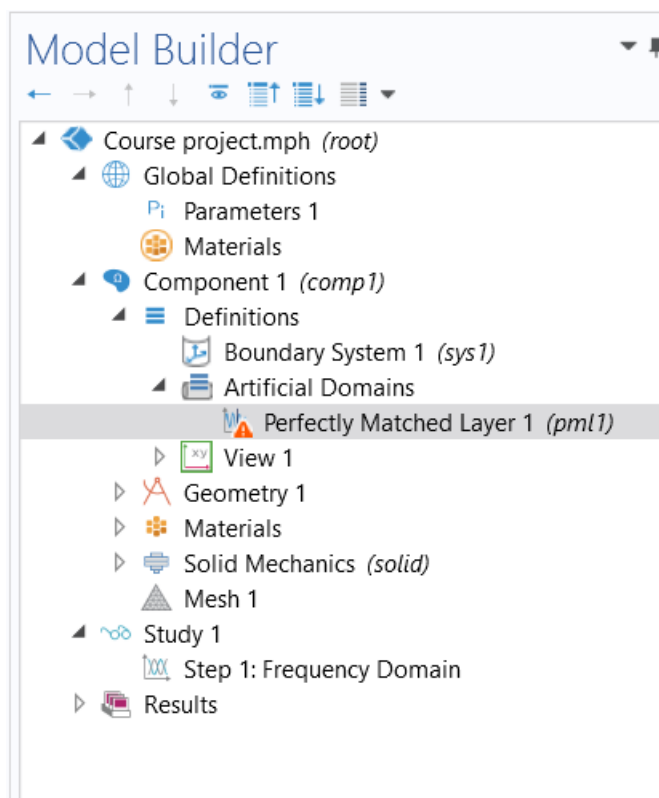


Рис. 13. Добавление PML

Для размещения PML необходимо создать слои на краях объекта. Для

этого выберем наш прямоугольник в области “геометрия” и в блоке “слои” (Layers) зададим нужную позицию и толщину слоев.

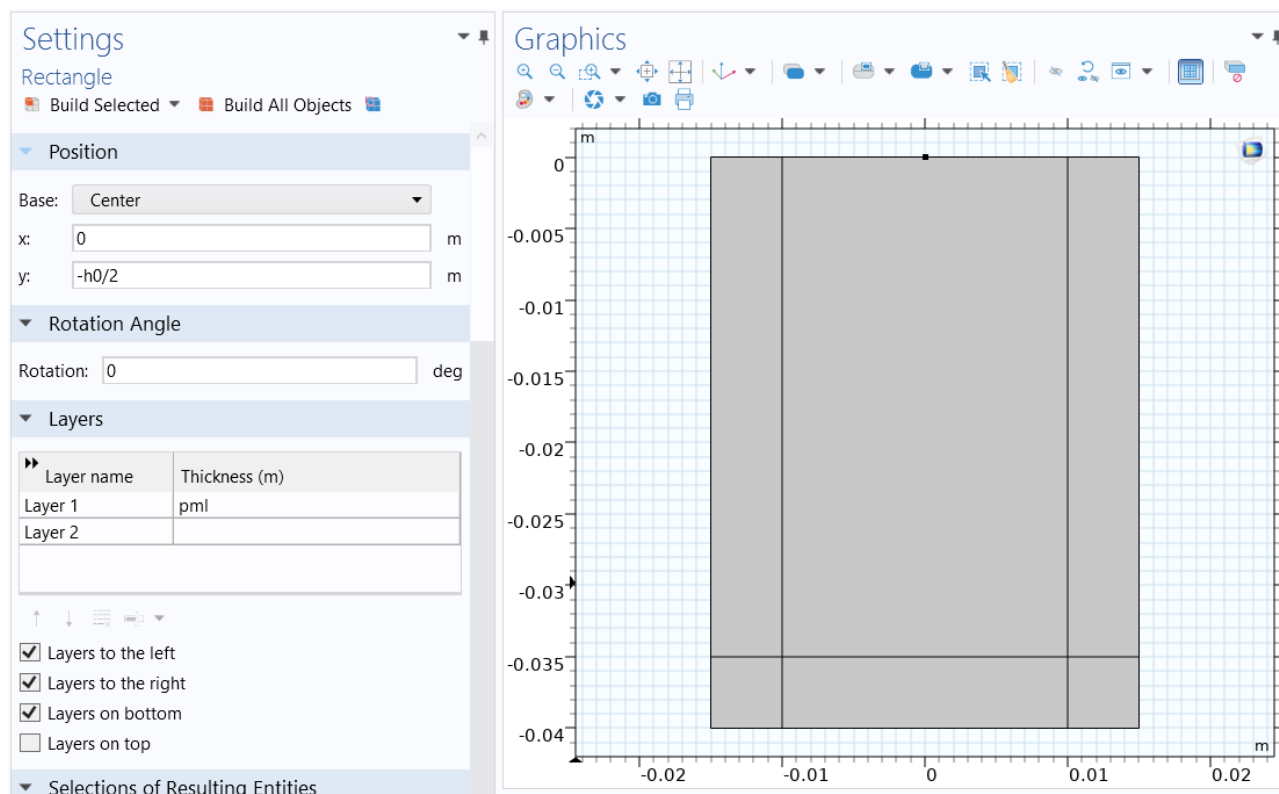


Рис. 14. Добавление слоев на график

После этого возвращаемся к блоку PML и выбираем те слои, которые хотим сделать поглощающими.

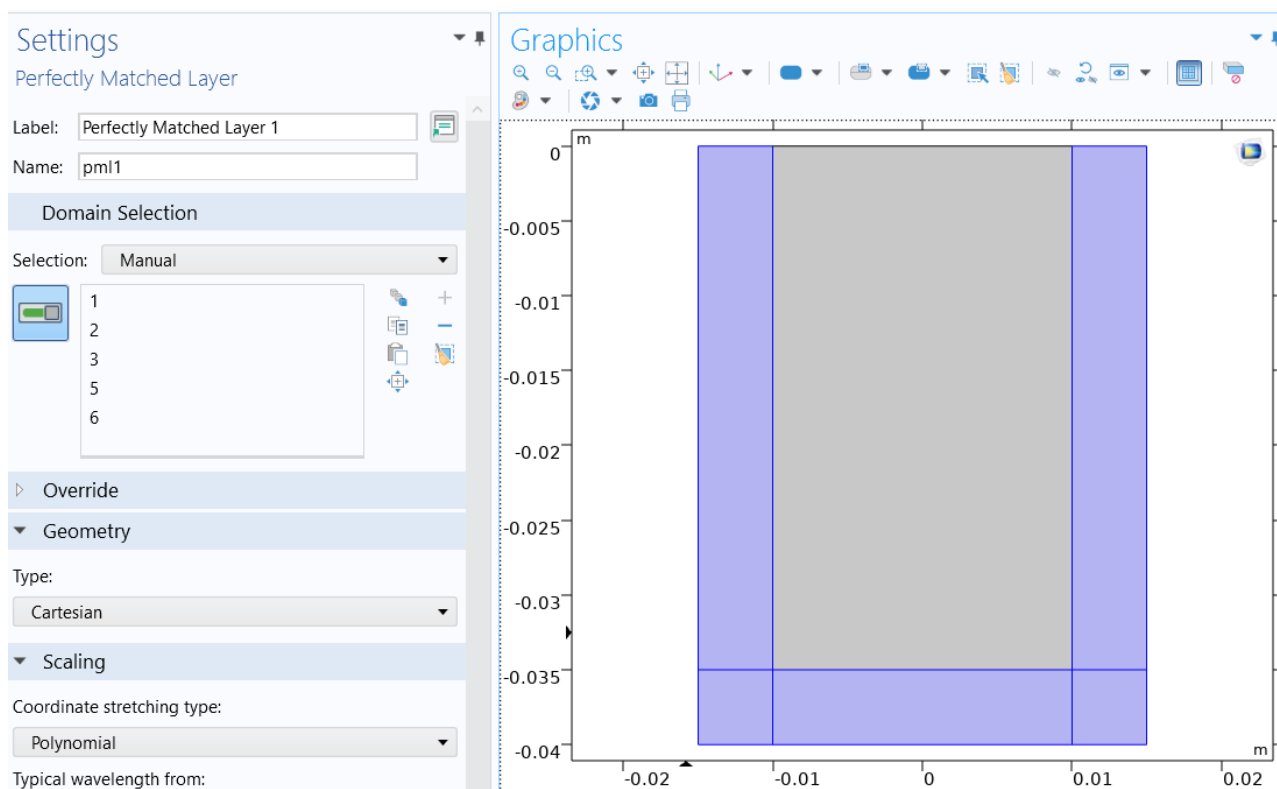


Рис. 15. Передача PML выделенным слоям

Одним из заключительных действий станет добавление на объект сетки. Для этого в разделе “сетка” (Mesh) выбираем, насколько маленькими будут фрагменты, на которые COMSOL разобьет нашу область. Чем меньше один фрагмент, тем плотнее будет расположена сетка, и тем точнее будут полученные вычисления. Однако увеличение точности повлечет за собой увеличение вычислительной сложности, а значит остается выбрать наиболее подходящий вариант. Выбираем “очень гладко” (Extra fine) и нажимаем Build All.

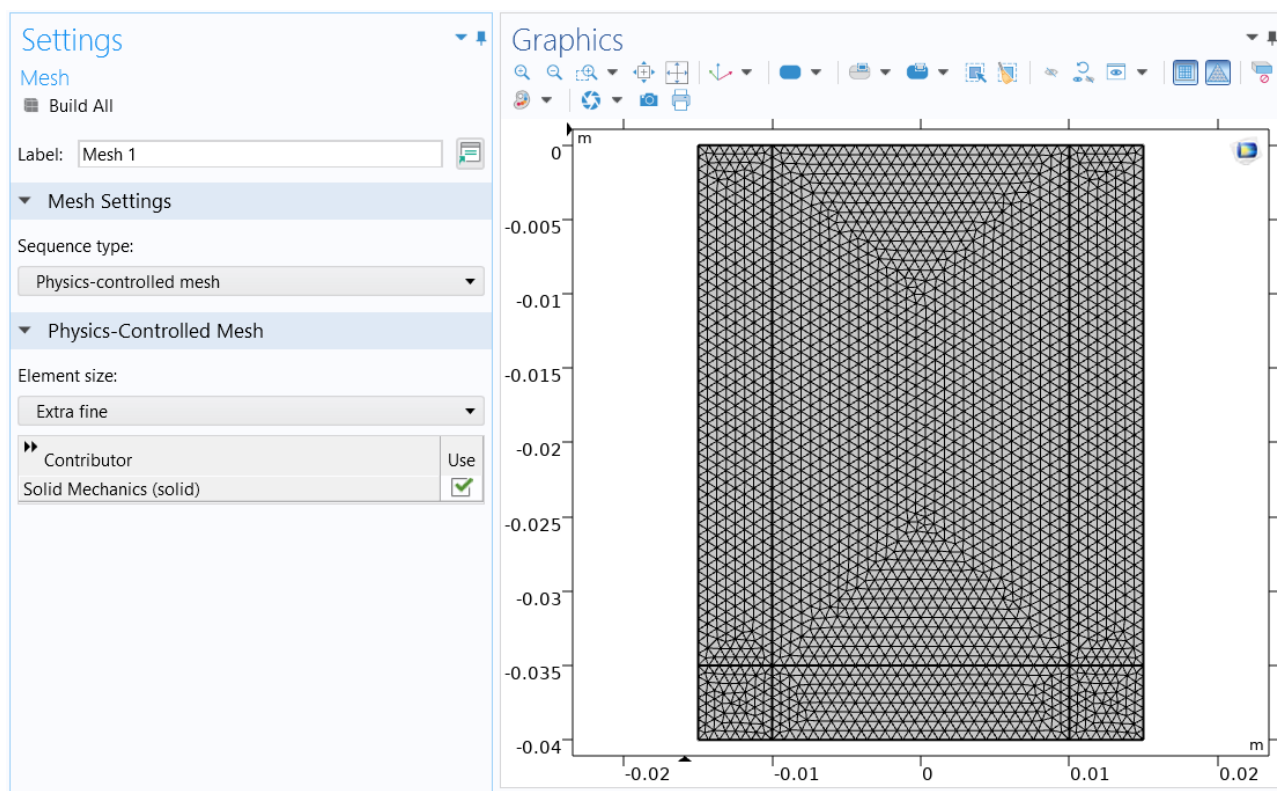


Рис. 16. Наложение сетки

Теперь, когда у нас заданы практически все условия, осталось зайти в раздел “изучение” (Study), (Step 1: Frequency Domain), задать частоту колебаний и нажать “вычислить” (Compute).

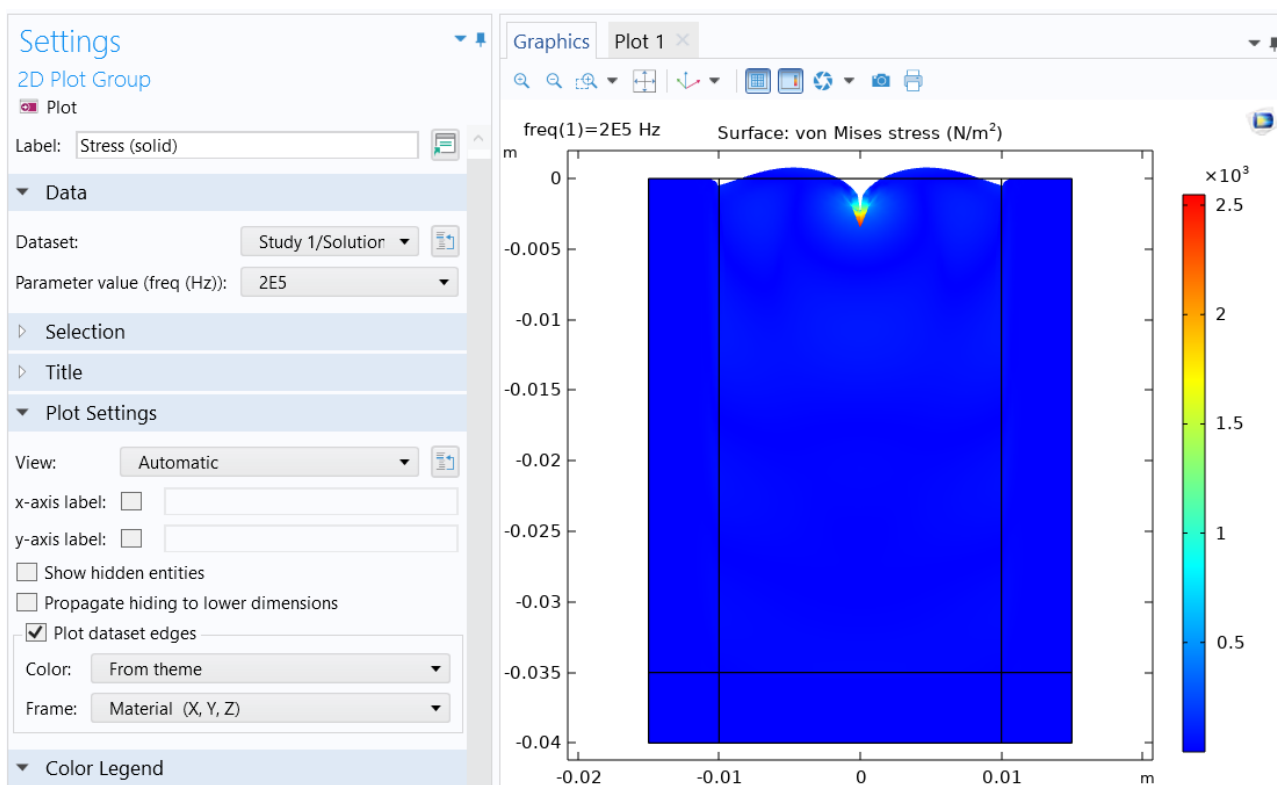


Рис. 17. Вычисленный график с деформацией

Полученный результат показывает, что нагрузка, приложенная к алюминиевому полупространству, была слишком велика, отчего материал сильно деформировался. В нашем случае этот итог не несет никакой информативности, так что в разделе “результат” (Result), в блоке “стресс” (Stress) удаляем пункт “деформация” (Deformation).

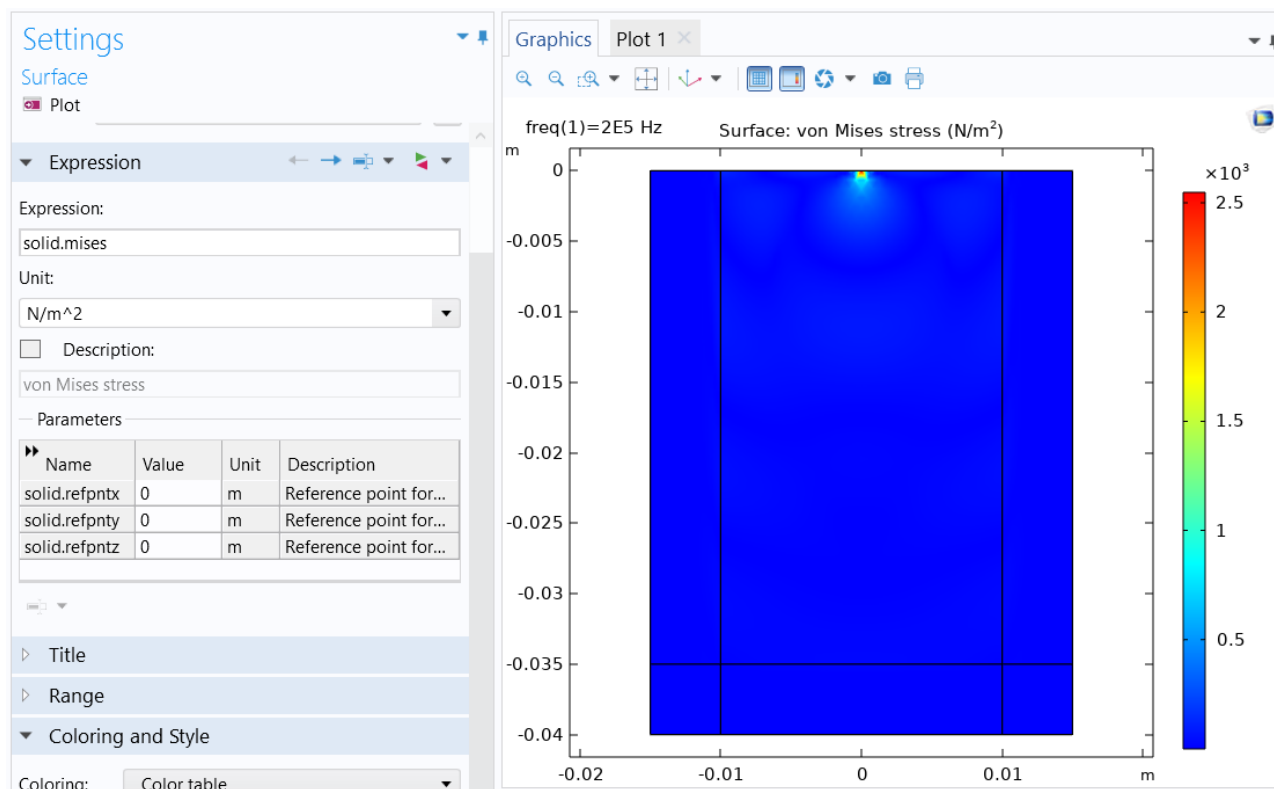


Рис. 18. Вычисленный график без деформации

Чтобы на графике было видно распространение волн, а не распределение нагрузки, поменяем в настройках поверхности “выражение” (Expression) на пакет “solid.disp”. Нажимаем “построить график” (Plot).

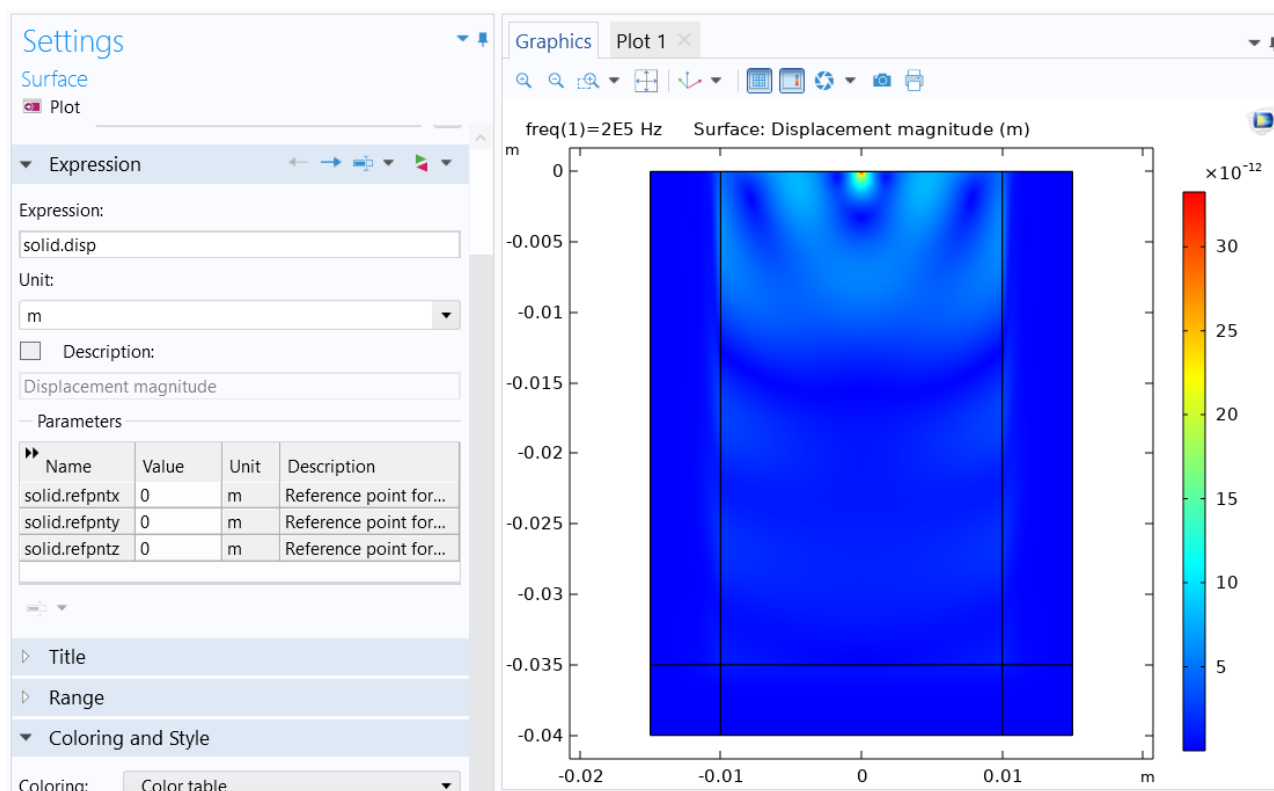


Рис. 19. Другой вид графика без деформаций

Если полученной модели недостаточно, можно добавить и другие графики с различными параметрами. Например, добавим двумерный график, отображающий зависимость величины нагрузки от расположения на объекте. В качестве функции, описывающей эту зависимость, возьмем компоненту вектора перемещений  $u$ .



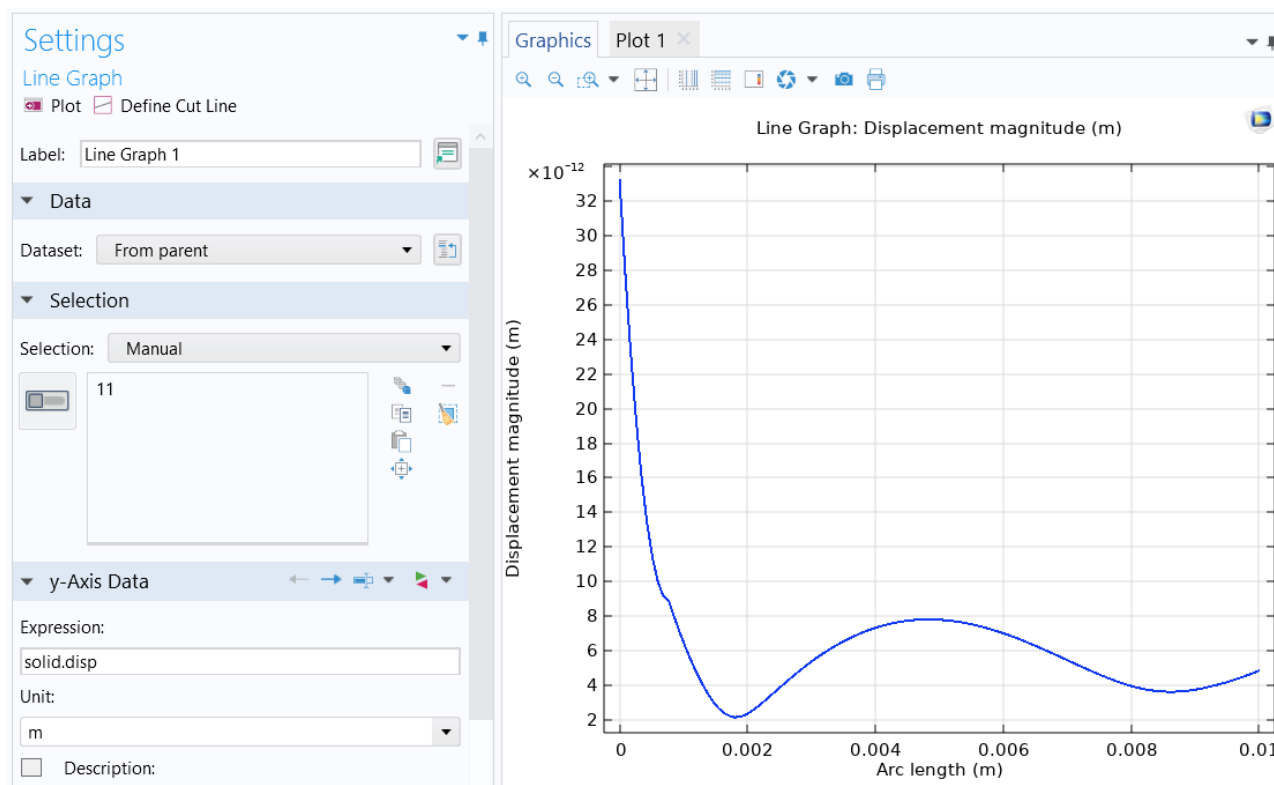


Рис. 20. Одномерный график нагрузки на область по компоненте  $u$

Или же, для большей наглядности, используем компоненту  $v$ .

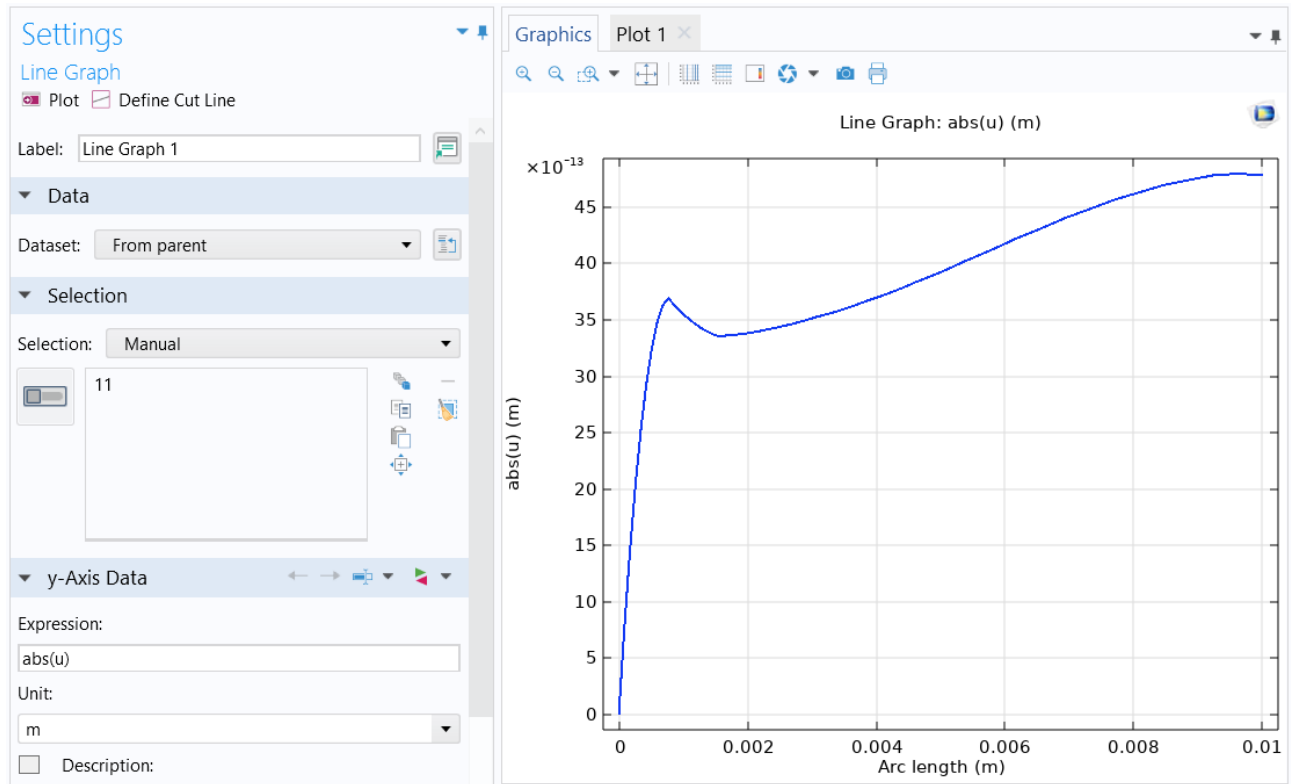


Рис. 21. Одномерный график нагрузки на область по компоненте  $v$

Теперь, когда мы на примере рассмотрели принцип работы МКЭ, обратимся к методу полуаналитического решения.

### 3. Полуаналитический метод

Полуаналитический метод строится на расщеплении краевой задачи (5)-(7) на две независимые: плоскую и антиплоскую при помощи преобразования Фурье и замены переменных, также используются свойства преобразования упрощать операции дифференцирования и свертки.

Предполагаем  $f_x = f_y = f_z = 0$  (отсутствие объемных сил). Введем обозначения:

$$\begin{cases} U = \mathcal{F}[u] \\ V = \mathcal{F}[v] \\ W = \mathcal{F}[w] \end{cases}$$

Определитель матрицы  $B$  имеет вид:

$$\Delta = 4i\mu^2\alpha^2[-(\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)^2 + \alpha^2\sigma_1\sigma_2]$$

Обозначим решения следующим образом:

$$\begin{aligned}
P(\alpha, z) &= \frac{2i\mu\alpha^2[-(\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_1 z} + \sigma_1\sigma_2 e^{\sigma_2 z}]}{\Delta} \\
R(\alpha, z) &= \frac{2i\mu\alpha^2\sigma_1[-(\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_1 z} + \alpha^2 e^{\sigma_2 z}]}{\Delta} \\
M(\alpha, z) &= \frac{2\mu\sigma_2[-\alpha^2 e^{\sigma_1 z} + (\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_2 z}]}{\Delta} \\
S(\alpha, z) &= \frac{2\mu\alpha^2[-\sigma_1\sigma_2 e^{\sigma_1 z} + (\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_2 z}]}{\Delta} \\
N(\alpha, z) &= \frac{i}{\mu\alpha^2\sigma_2} e^{\sigma_2 z}
\end{aligned}$$

Составим из полученных функций матрицу Грина:

$$K = \begin{pmatrix} -i(\alpha_1^2 M + \alpha_2^2 N) & -i\alpha_1\alpha_2(M + N) & -i\alpha_1 P \\ -i\alpha_1\alpha_2(M - N) & -i(\alpha_2^2 M + \alpha_1^2 N) & -i\alpha_2 P \\ \alpha_1 S & \alpha_2 S & R \end{pmatrix}.$$

Тогда вектор перемещений можно получить путем обратного преобразования Фурье:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2, z) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

Для плоского случая положим  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2 = 0$ , в качестве  $K$  возьмем:

$$K = \begin{pmatrix} -i\alpha^2 M & -i\alpha P \\ \alpha S & R \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Как и в предыдущем пункте построим горизонтальную компоненту  $u$  поля  $\mathbf{u} = (u, v)$  на поверхности волновода. Для той же нагрузки, сосредоточенной в начале преобразование Фурье будет иметь вид  $\mathbf{Q}(\alpha) = (0, 1)$ . Параметры материала – прежние:

$\mu$	$\lambda$	$\rho$	$f$
5.5 ГПа	26,1 ГПа	2610 кг/м <sup>3</sup>	200 кГц

Для сравнения результатов вычислений далее приведены графики, построенные на основе вычислений COMSOL Multiphysics и программы на языке Fortran, использующей формулы, полученные полуаналитическим методом. Сначала сравним графики относительно компоненты  $u$ :

 Matlab\_images/CompareU-eps-converted

Рис. 22. Сравнение результатов COMSOL и Fortran по компоненте  $u$

Теперь графики относительно компоненты  $v$ :

Рис. 23. Сравнение результатов COMSOL и Fortran по компоненте  $v$

Как можно заметить, полуаналитический метод является не только рабочим, но еще и достаточно точным. Конечно, создание даже одной математической модели данным подходом затрачивает значительно больше времени, чем получение графика в COMSOL Multiphysics методом конечных элементов, однако возможность поэтапных расчетов увеличивает гибкость полуаналитического метода.

В конечном итоге, вне зависимости от выбора одного из методов, на выходе будут получены корректные данные.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Интегральные преобразования в задачах теории упругости, 1990
- [2] Mitra M., Gopalakrishnan S. Guided Wave Based Structural Health Monitoring: Review. *Smart Materials and Structures*, 2016, vol. 25, no. 5, pp. 1–27. DOI: 10.1088/0964-1726/25/5/053001
- [3] Горелик Г. С. Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. — 3-е изд.: под ред. С.М. Рытова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 656 с. — ISBN 978-5-9221-0776-1.