2.2.3 Вычисление интеграла с помощью вычетов

22 июня 2024 г. 16:17

План раздела

1. Теорема Коши о вычетах
2. Замыкание контура
3. Разворот контура
4. Вычет в простом полюсе

1.

Пусть z_0 — изолированная особая точка однозначного характера функции $f(z)$, γ — простая замкнутая спрямляемая кривая, ориентированная против часовой стрелки и содержащая внутри z_0; причем $f(z)$ аналитична на γ и во всех точках внутри γ, кроме z_0. Тогда интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ называется *вычетом** функции $f(z)$ относительно точки z_0, что записывается:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)\,dz.$$

+ в список литература

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D, кроме конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_N$, и аналитична на Γ — границе области D, ориентированной положительно относительно области D . *Тогда*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Маркушевич А. И. и Маркушевич Л. А.

М270 Введение в теорию аналитических функций. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М., «Просвещение», 1977.

320 с.

В частности, если z_0 — простой полюс ($k = 1$), то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} [f(z)(z - z_0)].$$

Чтобы при помощи вычетов найти интеграл (одинар инт) необходимо, следуя работам [jasa], [монография 2017] выполнить процедуры разворота контура Γ_+ и его замыкания.

Для разворота контура Γ_+ к интегралу (одинар инт) применятся свойство функции Бесселя:

$$J_m(z) = \frac{1}{2}\left[H_m^{(1)}(z) + H_m^{(2)}(z)\right],$$

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_+} \left(\cos\varphi\,\alpha^2 P H_1^1(\alpha r);\ \sin\varphi\,\alpha^2 P H_1^1(\alpha r);\ -\alpha R H_0^1(\alpha r)\right)^T d\alpha +$$

$$+\ \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_+} \left(\cos\varphi\,\alpha^2 P H_1^2(\alpha r);\ \sin\varphi\,\alpha^2 P H_1^2(\alpha r);\ -\alpha R H_0^2(\alpha r)\right)^T d\alpha$$

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_+} \left(\cos\varphi\, \alpha^2 P\, H_1^1(\alpha r);\ \sin\varphi\, \alpha^2 P H_1^1(\alpha r); -\alpha R\, H_0^1(\alpha r)\right)^T d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_-} \left(\cos\varphi\, \alpha^2 P\, H_1^2(-\alpha r);\ \sin\varphi\, \alpha^2 P H_1^2(-\alpha r);\ \alpha R\, H_0^2(-\alpha r)\right)^T d\alpha$$

$H_m^{(2)}(-\alpha r) = (-1)^{m+1} H_m^{(1)}(\alpha r)$ and
$K(-\alpha, \gamma) = K(\alpha, \gamma + \pi)$

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_+} \left(\cos\varphi\, \alpha^2 P\, H_1^1(\alpha r);\ \sin\varphi\, \alpha^2 P H_1^1(\alpha r); -\alpha R\, H_0^1(\alpha r)\right)^T d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_-} \left(\cos\varphi\, \alpha^2 P\, H_1^1(\alpha r);\ \sin\varphi\, \alpha^2 P H_1^1(\alpha r);\ -\alpha R\, H_0^1(-\alpha r)\right)^T d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \left(\cos\varphi\, \alpha^2 P\, H_1^1(\alpha r);\ \sin\varphi\, \alpha^2 P H_1^1(\alpha r); -\alpha R\, H_0^1(\alpha r)\right)^T d\alpha \qquad (I_{1.1})$$

где $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$

Теперь необходимо выполнить замыкание контура