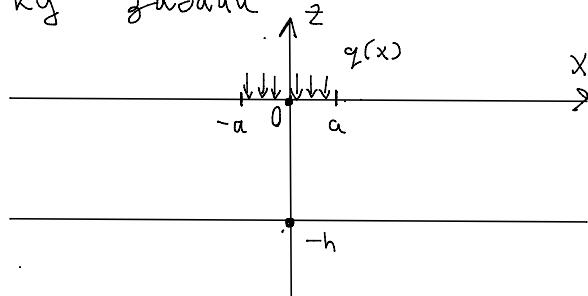


Рассматриваются установившиеся гармонические колебания в пьезоэлектрических кристаллах ниобата калия, сопровождающие колебаниями электрического потенциала.

Известно, что только в москости XY таких кристаллов могут распространяться SH волны, это обстоятельство позволяет рассмотреть следующую плоскую постановку задачи.



Комплексные амплитуды $U(X, Z)$, $\Phi(X, Z)$ этих волн и сопровождающих их волн электрического потенциала соответственно удовлетворяют следующим уравнениям

$$\begin{aligned} C_{55} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + C_{44} \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + e_{24} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} &= -\omega^2 \rho U \\ -\epsilon_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} - \epsilon_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} + e_{15} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + e_{24} \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Поскольку внешней средой считается вакуум, условие непрерывности электрического импеданса на верхней $Z=0$ и нижней $Z=-h$ границах является для наружных условий

$$\frac{-\frac{\partial \Phi}{\partial X}}{-\epsilon_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial Z} + e_{24} \frac{\partial U}{\partial Z}} = \begin{cases} -i/\epsilon_0 & \text{при } Z=0 \\ i/\epsilon_0 & \text{при } Z=-h \end{cases} \quad (2)$$

Условие отсутствия нормальных напряжений на нижней границе и нормальная нагрузка $q(x)$ на отрезке $[-a; a]$ верхней границы от источника, возбуждающего колебания, дают еще пару граничных условий

$$C_{44} \frac{\partial U}{\partial Z} + e_{24} \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \begin{cases} q(x), & x \in [-a; a] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{при } Z=0 ; \quad C_{44} \frac{\partial U}{\partial Z} + e_{24} \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0 \quad \text{при } Z=-h \quad (3)$$

Геометрия задачи позволяет применить преобразование Фурье

$$\text{Из-за } F_x(u(x, z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, z) e^{i\alpha x} dx = U(\alpha, z); F_x(\varphi(x, z)) = \varphi(\alpha, z)$$

$$F_x^{-1}(U(\alpha, z)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\alpha, z) e^{-i\alpha x} d\alpha = u(x, z); F_x^{-1}(\varphi) = \varphi$$

$$\text{но об-вам преобр. } \varphi \text{ приводит к } F(\frac{\partial u}{\partial x}) = -i\alpha U; F(\frac{\partial \varphi}{\partial x}) = -i\alpha \varphi$$

$$F(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = -\alpha^2 U; F(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}) = -\alpha^2 \varphi; \text{ аналогично } F(\frac{\partial u}{\partial z}) = U'$$

$$F(\frac{\partial \varphi}{\partial z}) = \varphi'; F(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) = U''; F(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}) = \varphi''$$

Таким образом задача (1-3) приводится к виду

$$C_{55}(-\alpha^2 U) + C_{44} U'' + e_{15}(-\alpha^2 \varphi) + e_{24} \varphi'' = -w^2 P U$$

$$-e_{11}(-\alpha^2 \varphi) - e_{22} \varphi'' + e_{15}(-\alpha^2 U) + e_{24} U'' = 0$$

запись упр.

$$\frac{i\alpha \varphi|_{z=0}}{-e_{22} \varphi'|_{z=0} + e_{24} U'|_{z=0}} = \frac{-i}{\varepsilon_0} \quad \frac{i\alpha \varphi|_{z=-h}}{-e_{22} \varphi'|_{z=-h} + e_{24} U'|_{z=-h}} = \frac{i}{\varepsilon_0}$$

$$C_{44} U'|_{z=0} + e_{24} \varphi'|_{z=0} = Q(\alpha); \quad C_{44} U'|_{z=-h} + e_{24} \varphi'|_{z=-h} = 0$$

Решение которого

$$K(\alpha, z) = t_1 e^{\sigma_1 z} + t_2 e^{-\sigma_1 z} + t_3 e^{\sigma_2 z} + t_4 e^{-\sigma_2 z}$$

$$R(\alpha, z) = t_1 p_1 e^{\sigma_1 z} + t_2 p_1 e^{-\sigma_1 z} + t_3 p_2 e^{\sigma_2 z} + t_4 p_2 e^{-\sigma_2 z}$$

здесь $(t_1, t_2, t_3, t_4)^T = \bar{t}$ — решение системы, $A\bar{t} = \bar{Q}$, где

$$\bar{Q} = (0; 0; 0; Q(\alpha))^T$$

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 & b_2 & -b_2 \\ b_1 e^{-\alpha_1 h} & -b_1 e^{\alpha_1 h} & b_2 e^{-\alpha_2 h} & -b_2 e^{\alpha_2 h} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 e^{-\alpha_1 h} & d_2 e^{\alpha_1 h} & d_3 e^{-\alpha_2 h} & d_4 e^{\alpha_2 h} \end{pmatrix}$$

$$b_1 = C_{44} \sigma_1 + e_{24} p_1 \sigma_1; \quad b_2 = C_{44} \sigma_2 + e_{24} p_2 \sigma_2$$

$$c_1 = E_{22} p_1 \sigma_1 - e_{24} \sigma_1 - \varepsilon_0 \alpha p_1; \quad c_2 = E_{22} p_1 (-d_1) - e_{24} (-\sigma_1) - \varepsilon_0 \alpha p_1;$$

$$c_3 = E_{22} p_2 \sigma_2 - e_{24} \sigma_2 - \varepsilon_0 \alpha p_2; \quad c_4 = E_{22} p_2 (-d_2) - e_{24} (-\sigma_2) - \varepsilon_0 \alpha p_2;$$

$$d_1 = E_{22} p_1 \sigma_1 - e_{24} \sigma_1 + \varepsilon_0 \alpha p_1; \quad d_2 = E_{22} p_1 (-\sigma_1) - e_{24} (-\sigma_1) + \varepsilon_0 \alpha p_1;$$

$$d_3 = E_{22} p_2 \sigma_2 - e_{24} \sigma_2 + \varepsilon_0 \alpha p_2; \quad d_4 = E_{22} p_2 (-\sigma_2) - e_{24} (-\sigma_2) + \varepsilon_0 \alpha p_2.$$

$$p_1 = \frac{\sigma_1^2 - d_1}{\alpha_2}; \quad p_2 = \frac{\sigma_2^2 - d_2}{\alpha_2}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{r_1}; \quad \sigma_2 = \sqrt{r_2}; \quad r_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_4 - \sqrt{\Delta}}{2}; \quad r_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_4 + \sqrt{\Delta}}{2}; \quad \Delta = (\alpha_1 + \alpha_4)^2 - 4(\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3)$$

$$\alpha_1 = (C_{55} \alpha^2 E_{22} + \alpha^2 e_{15} e_{24} - E_{22} w^2 P) / \alpha_0; \quad \alpha_2 = (\alpha^2 e_{15} E_{22} - E_{11} \alpha^2 e_{24}) / \alpha_0;$$

$$\alpha_3 = (C_{55} \alpha^2 e_{24} - e_{24} w^2 P - \alpha^2 e_{15} C_{44}) / \alpha_0; \quad \alpha_4 = (\varepsilon_{11} C_{44} \alpha^2 + e_{24} \alpha^2 e_{15}) / \alpha_0$$

$$\alpha_0 = E_{22} C_{44} + e_{24}^2.$$

Искомые виды u, φ , таким образом, могут быть получены путем вычисления интегралов

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int K(\alpha, z) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} dx; \quad \varphi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int R(\alpha, z) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} dx,$$

Компьютерные методы

$$U(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, z) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha ; \quad \varphi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} R(\alpha, z) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha , \quad \text{где}$$

контур Γ огибает полоса ортогональной $K(\alpha, z), R(\alpha, z)$.

Полоса может быть наложена, например, как
множитель функций

$$\Delta(\alpha) = \frac{1}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}$$

где $\bar{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4)^T$ лист решения системы

$$A \bar{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DNS \bar{t} средней

c44 = 0.743d2
c55 = 0.25d2
e15 = 5.16d0
e24 = 11.7d0
eps11 = 3.27d-1
eps22 = 6.903d0

при настройках hamin

получим следующие экспериментальные кривые

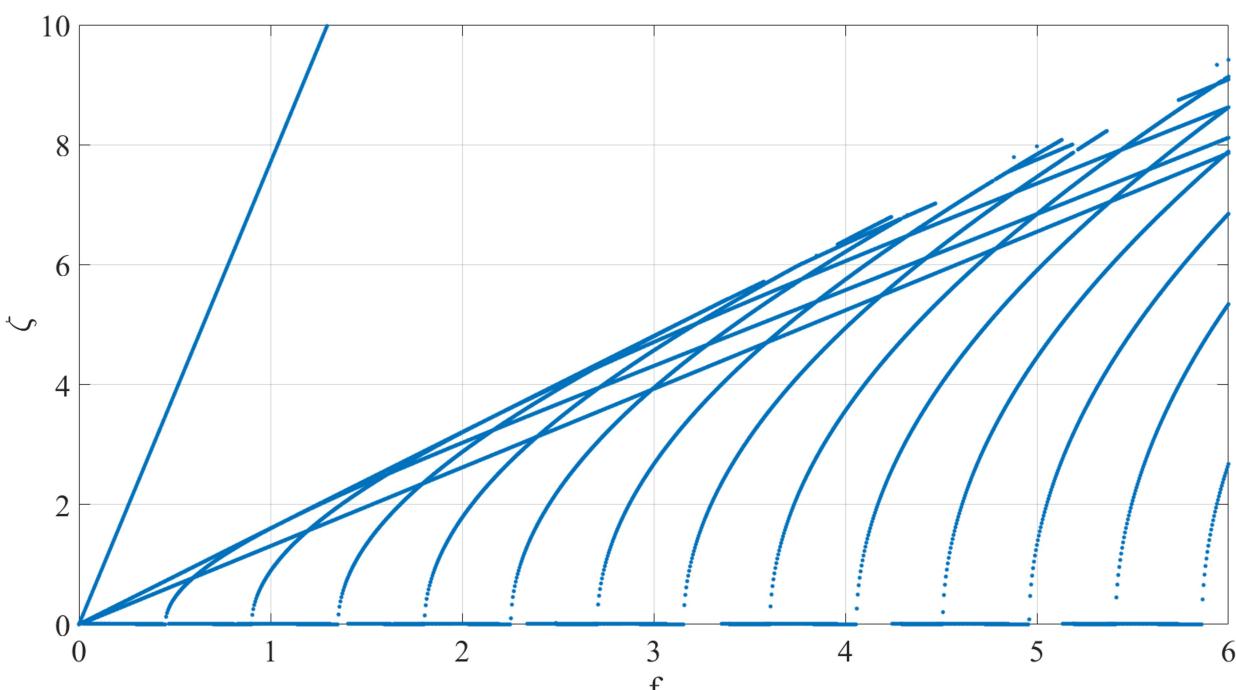


График наложений

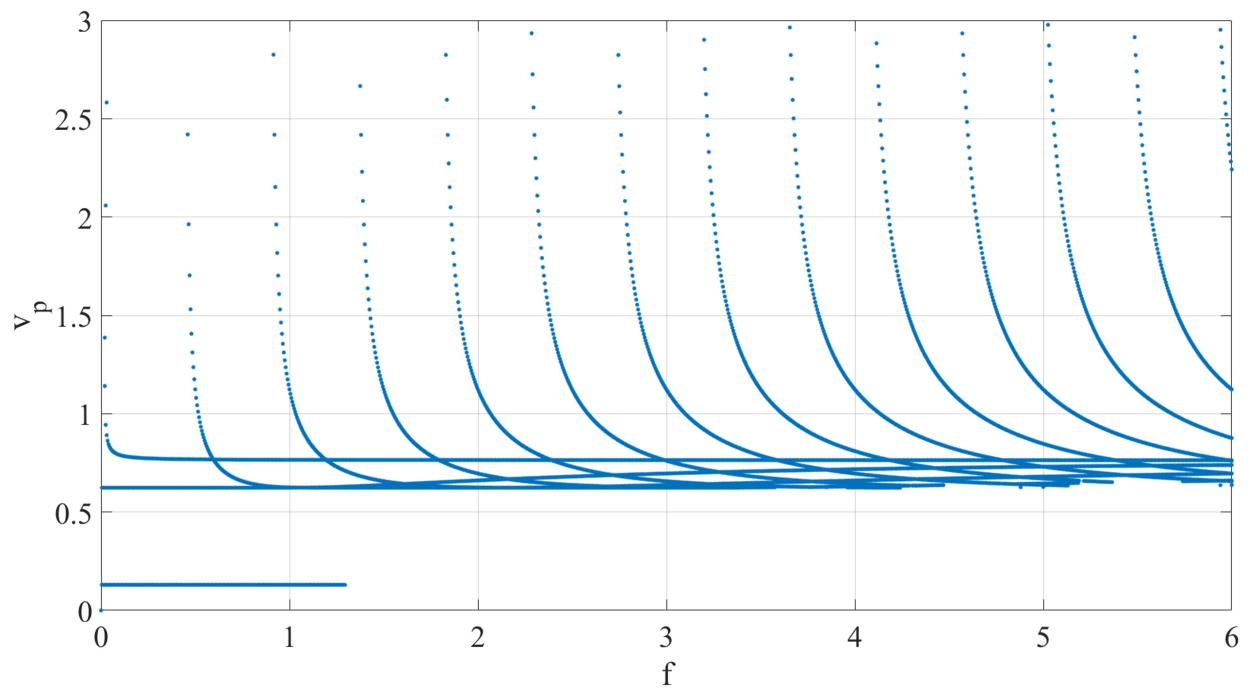
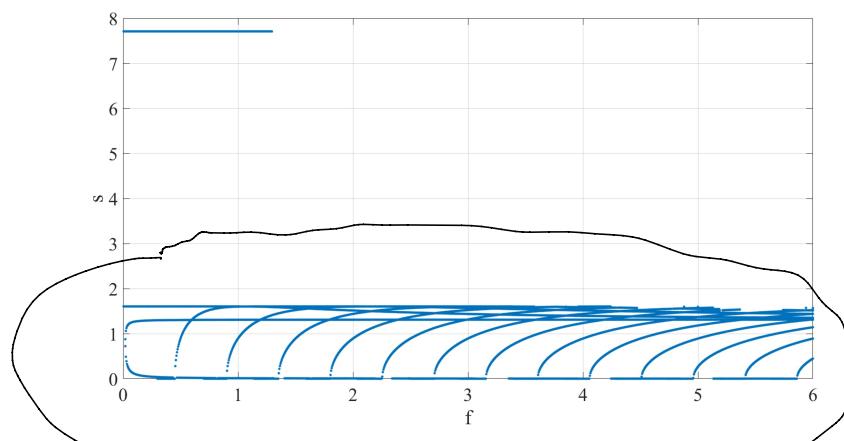
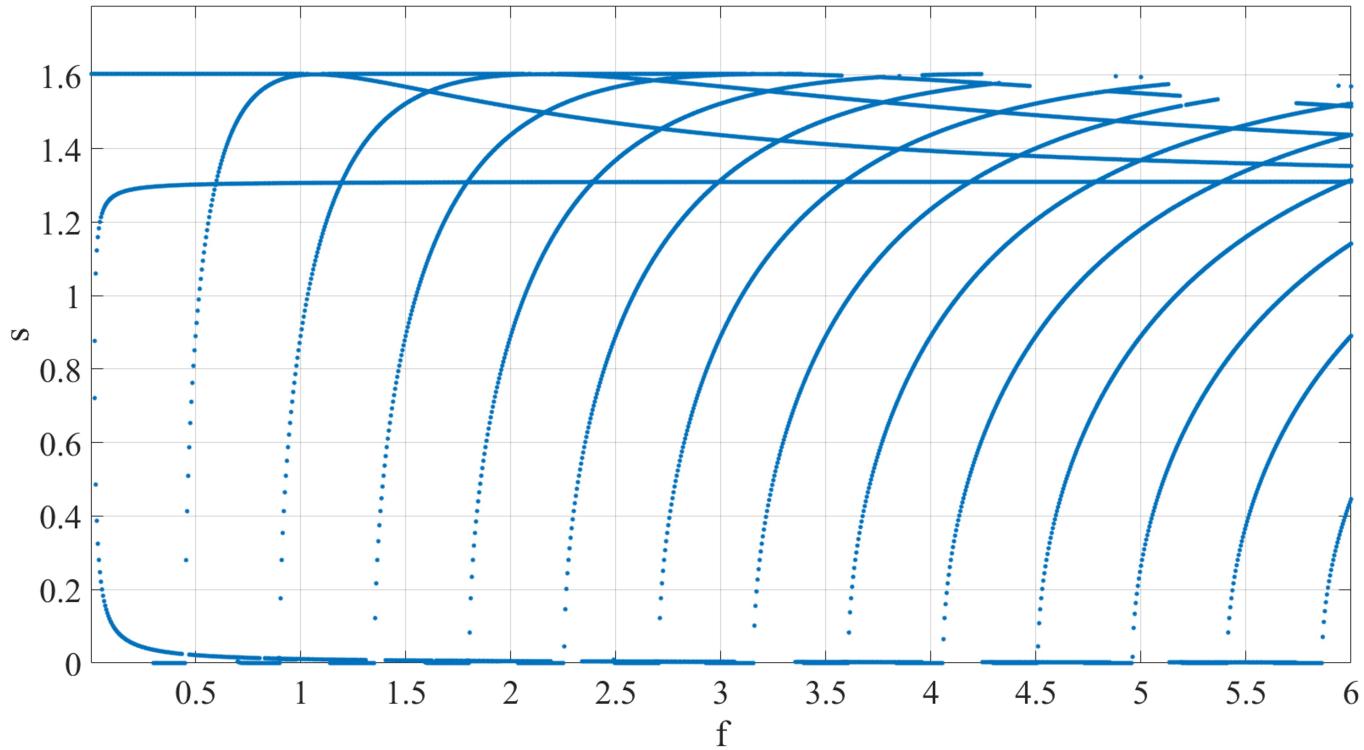


График фазовых скоростей

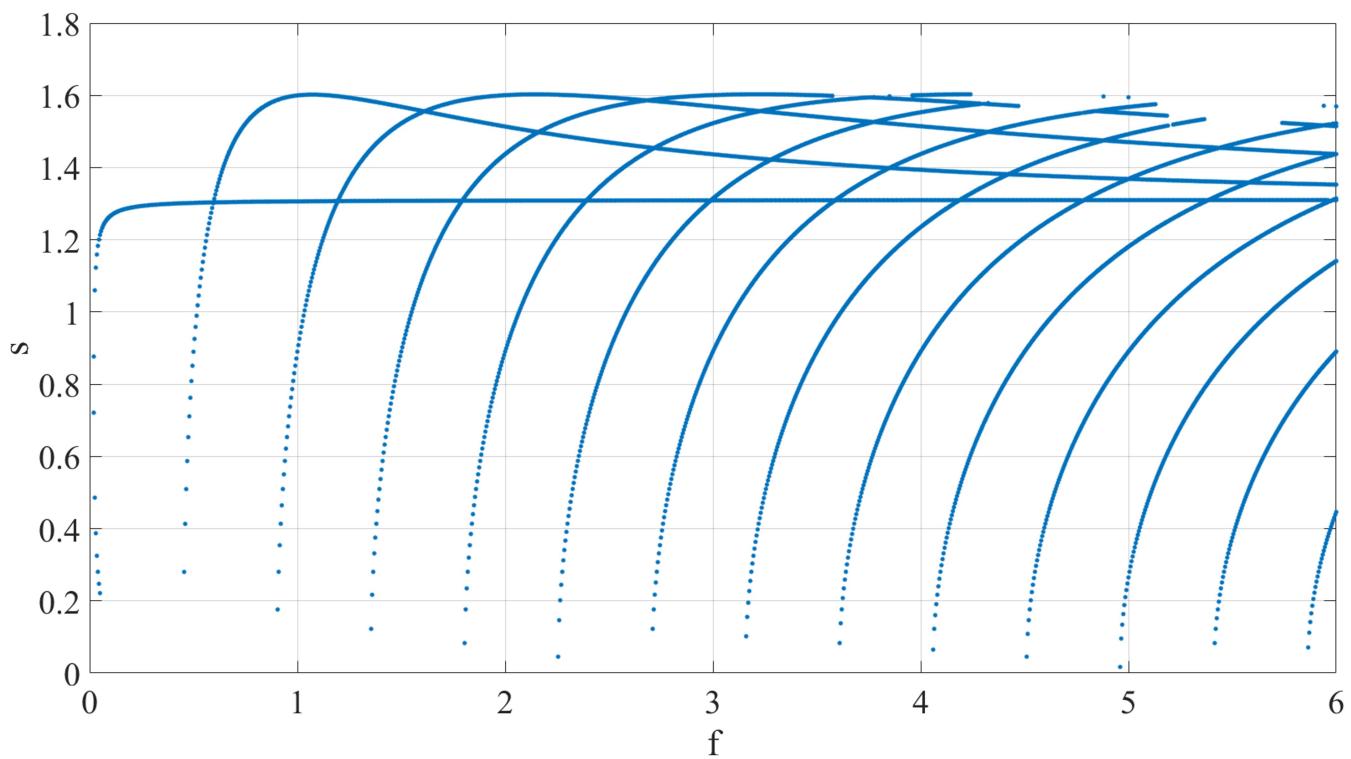




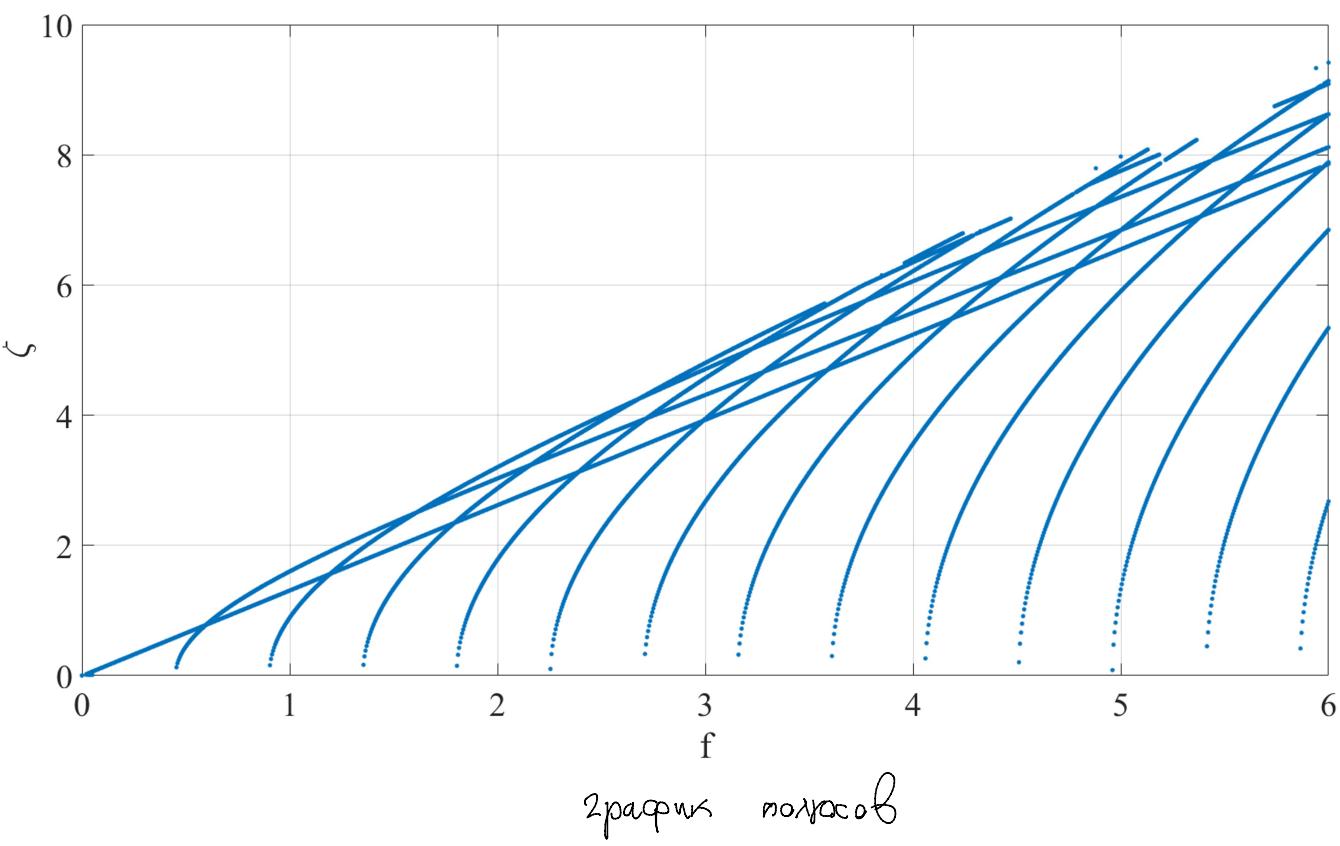
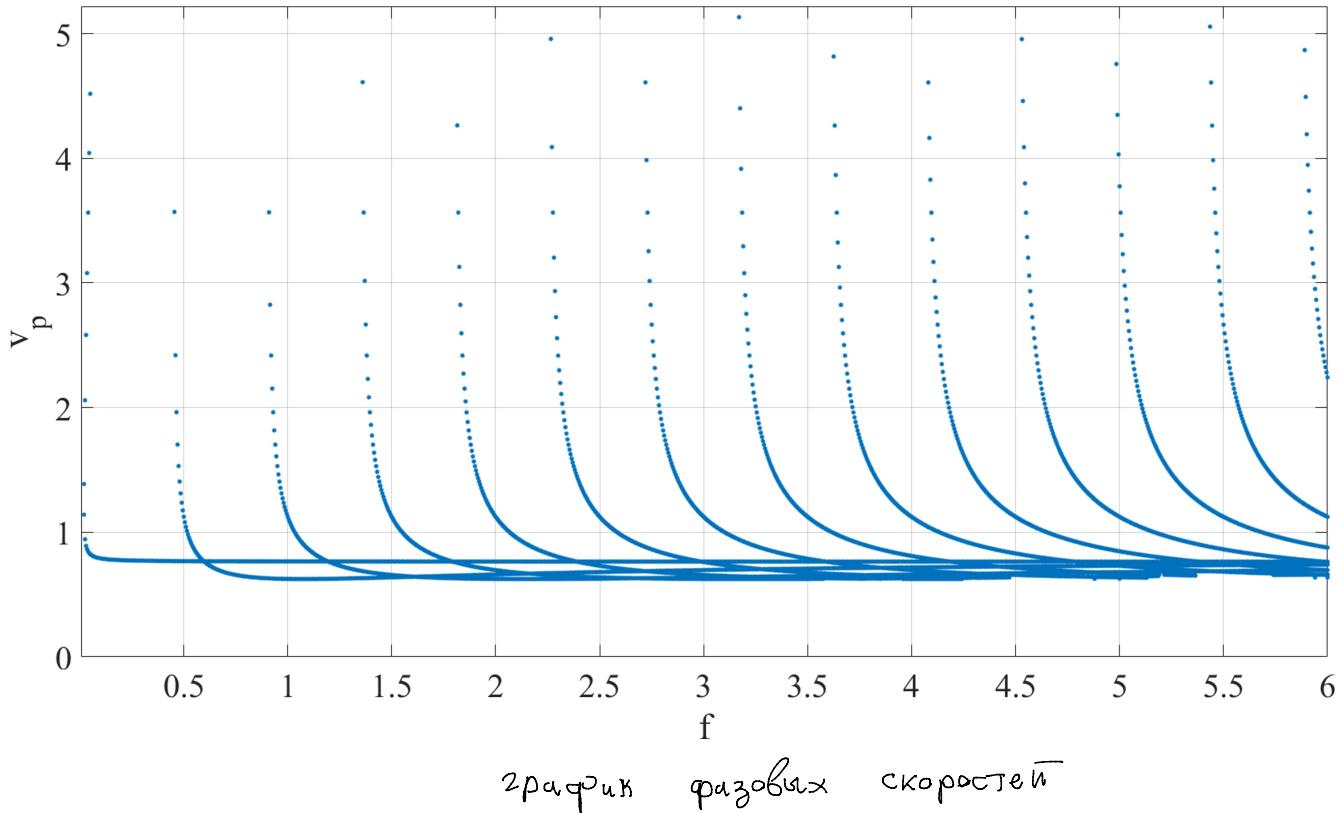
Если наать в полюсах вычтит $K(\alpha, z)$ по формуле

$$\text{res } K(\alpha, z) \Big|_{\alpha=\xi} \approx \frac{h}{2} [K(\xi+h, z) - K(\xi-h, z)], \quad h = 10^{-5}$$

и вычесть на нечать только те полюса в которых вычет $> 10^{-5}$
количество остаточных несколько уменьшит ся

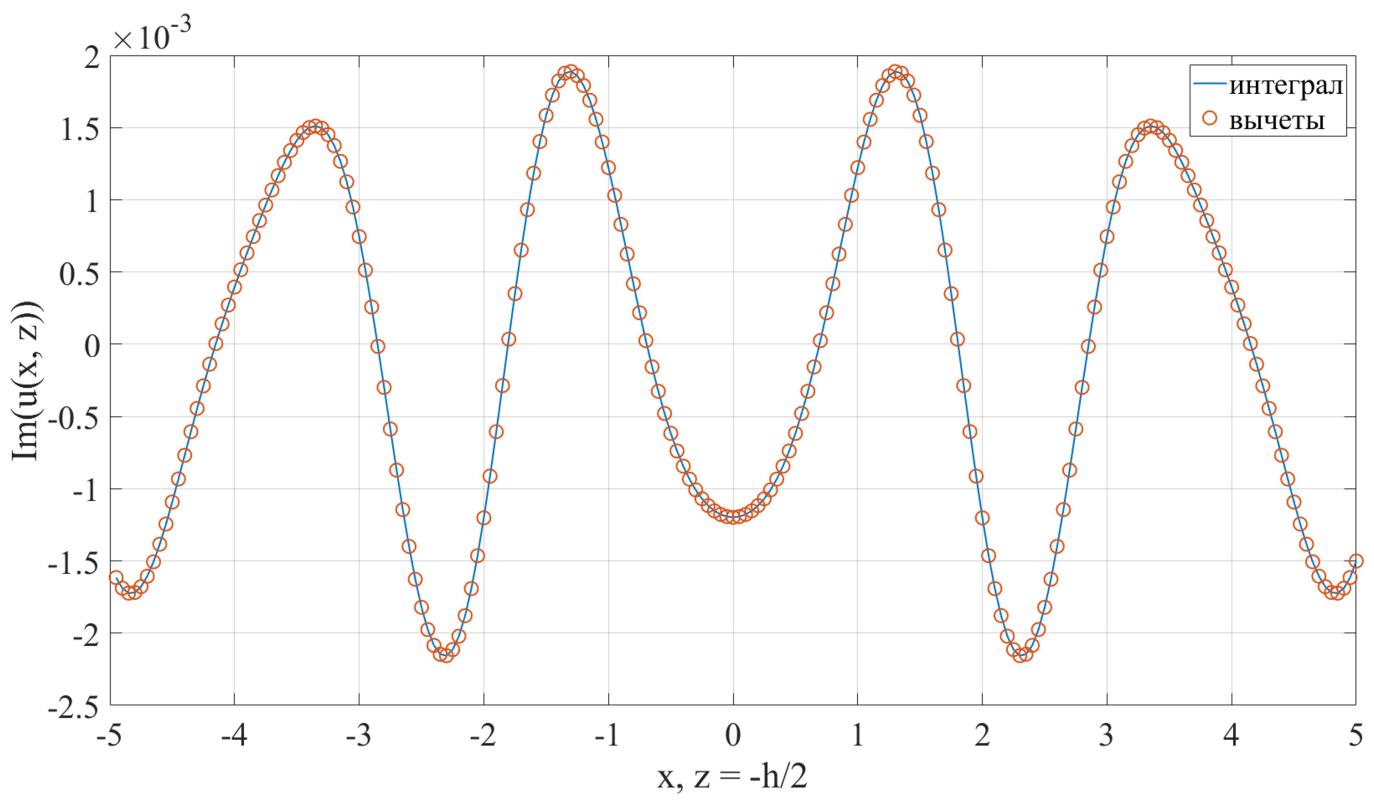
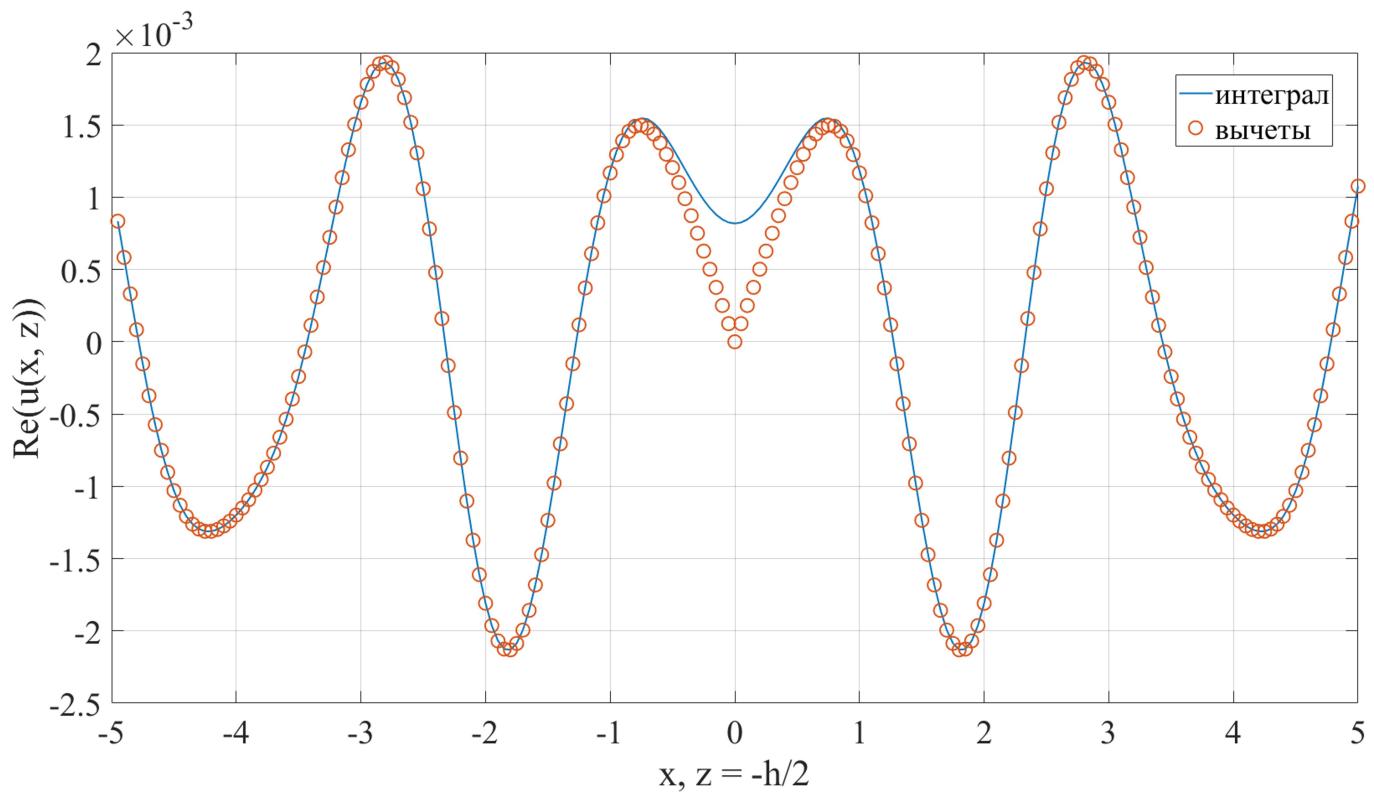


запас медленности

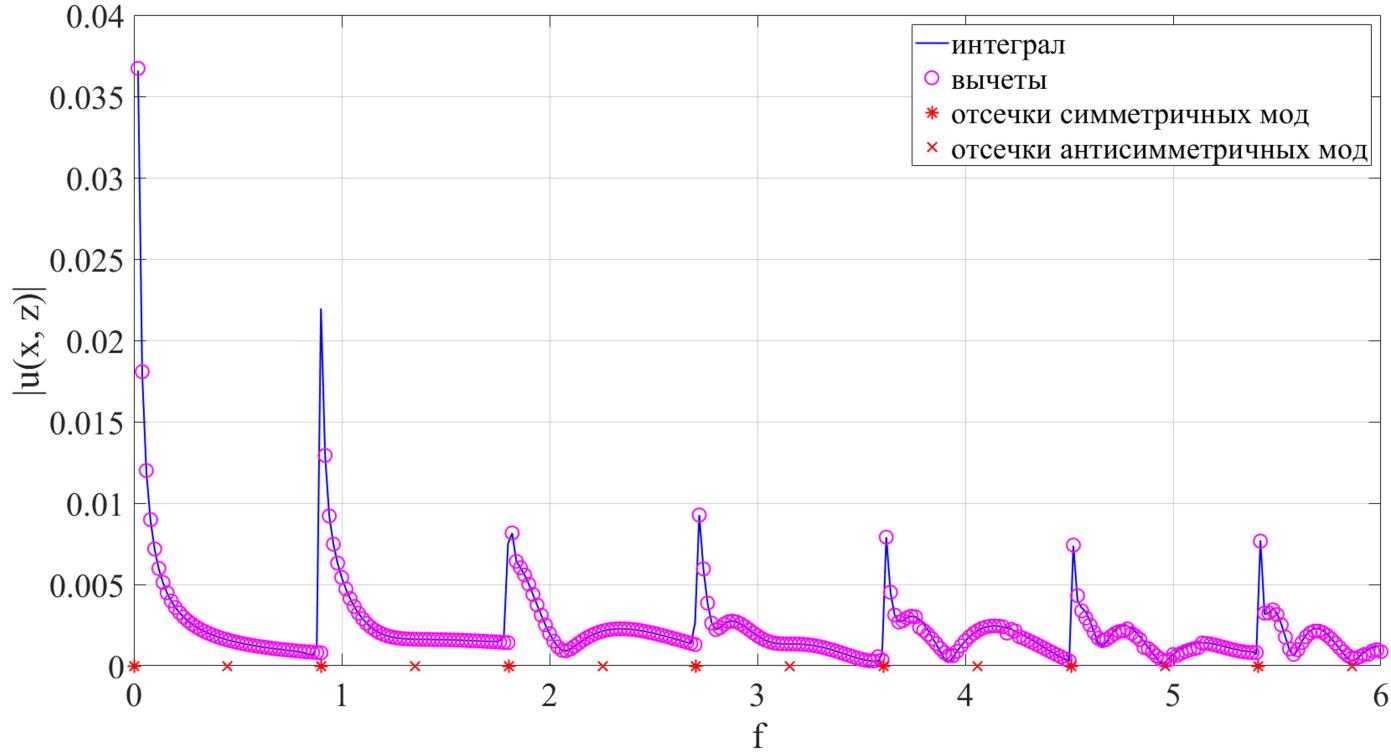


Если в качестве нормальной нагрузки выбрать точечный источник $T_{23} = g(x) = \delta(x)$, то при частоте $f = 3$ можно получить следующие графики

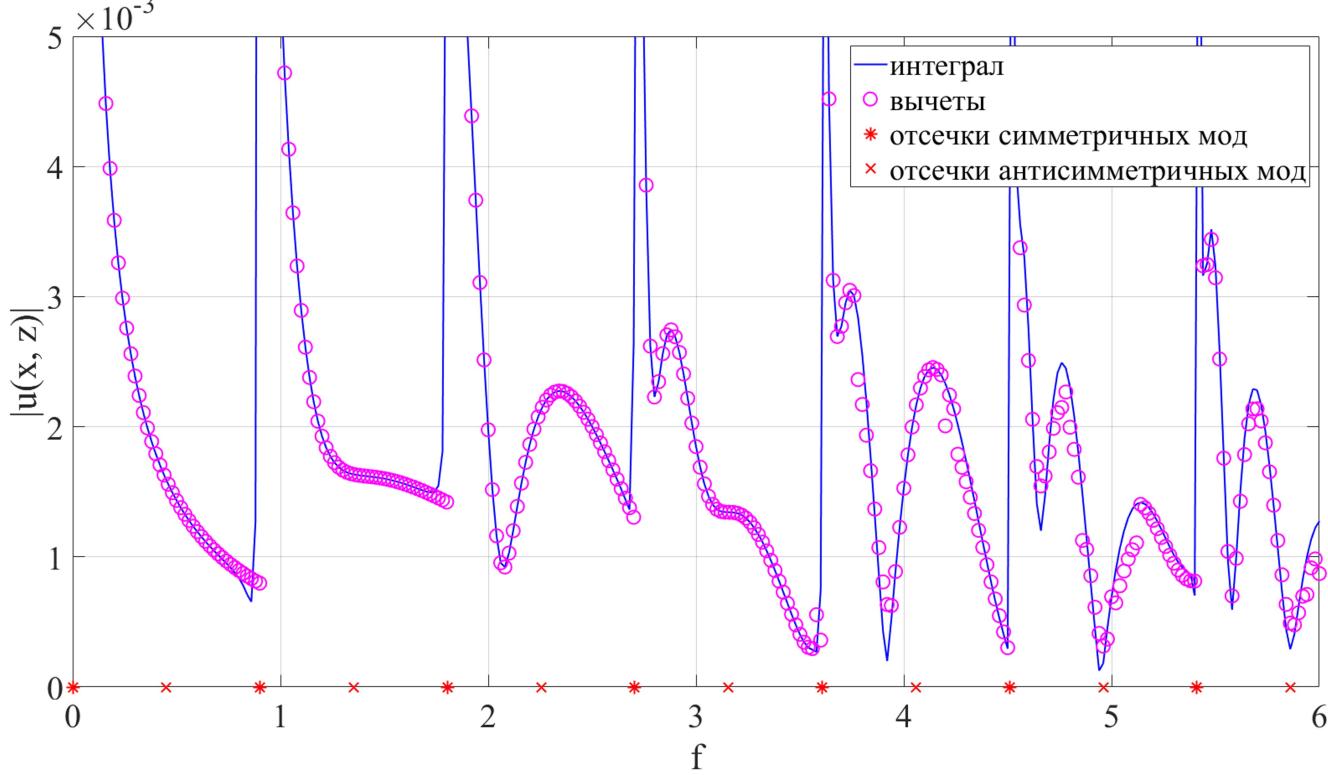
можно получить следующие графики



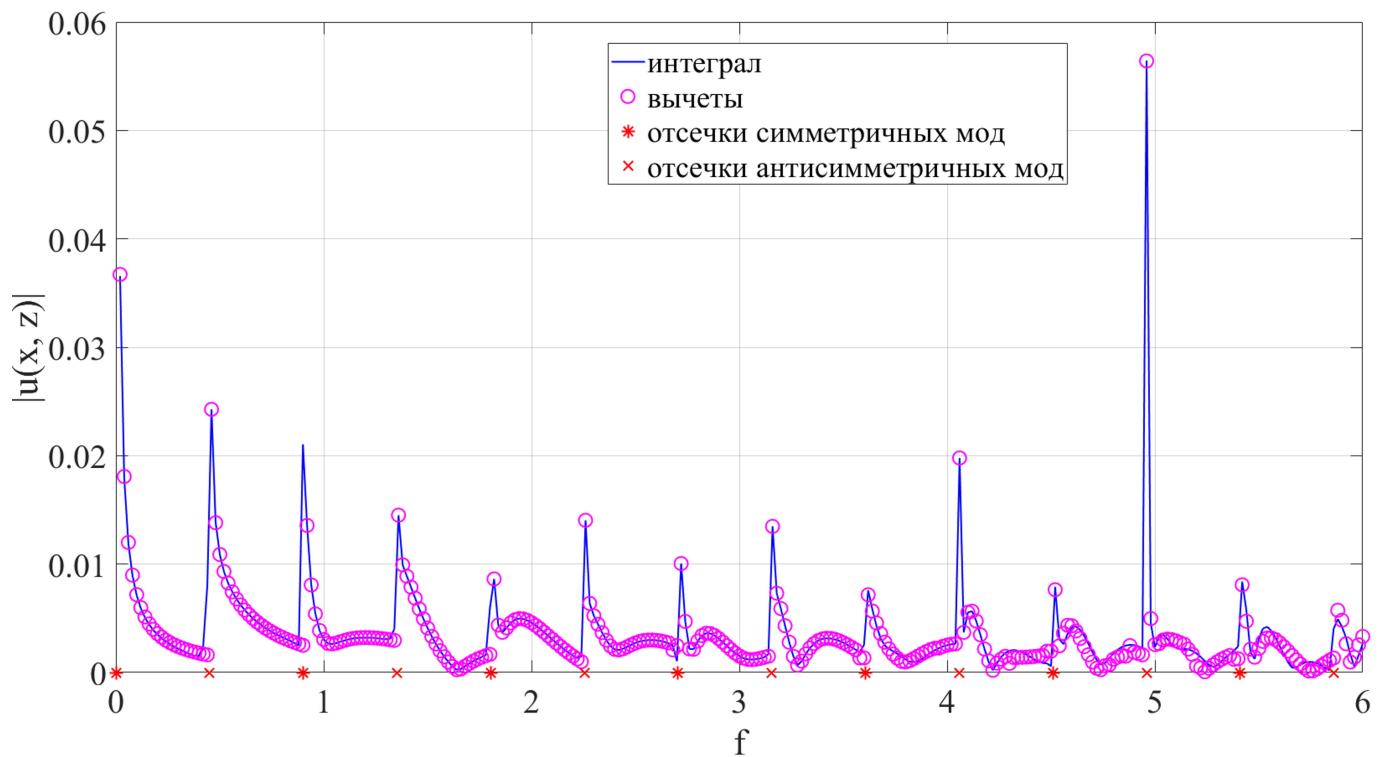
Если зафиксировать точку $x = -5$, $z = -\frac{h}{2}$



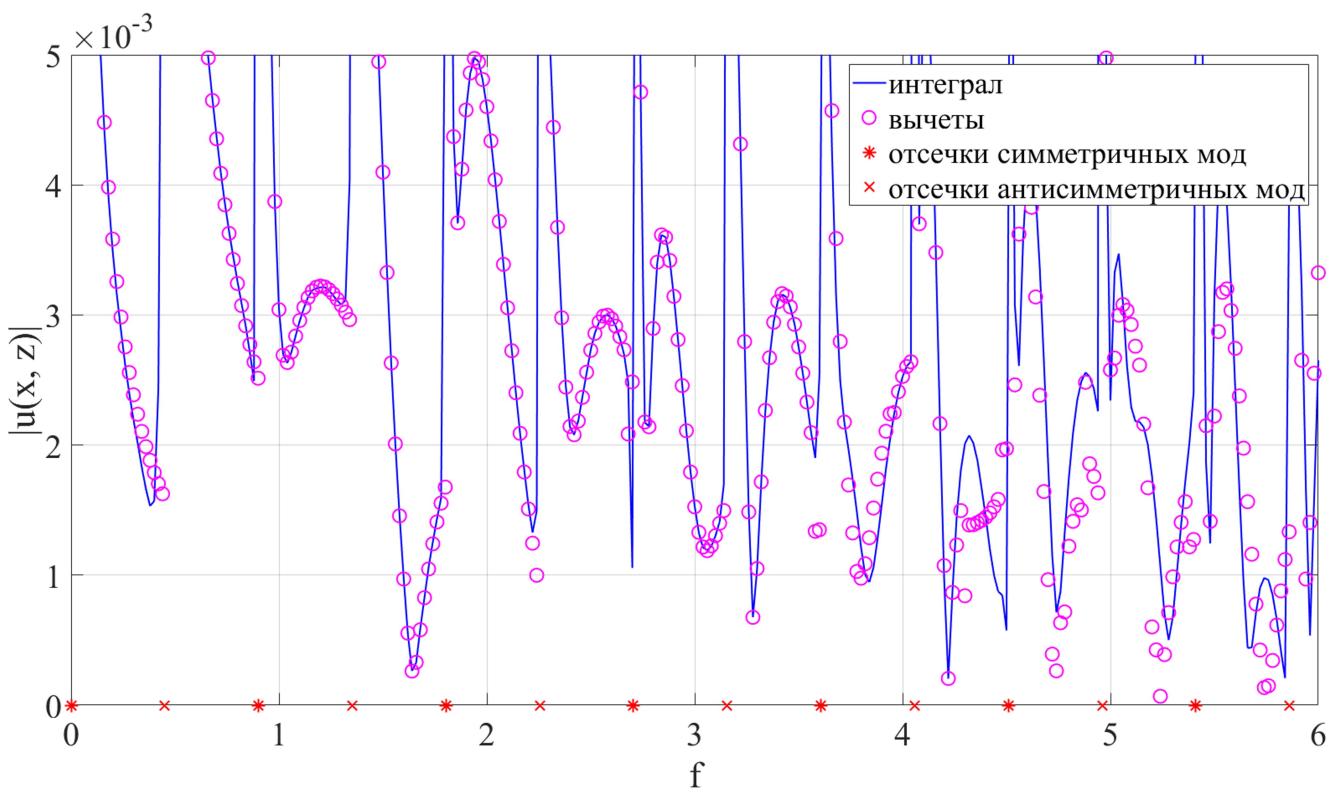
при отсечении числов $|u| \leq 5 \cdot 10^{-3}$



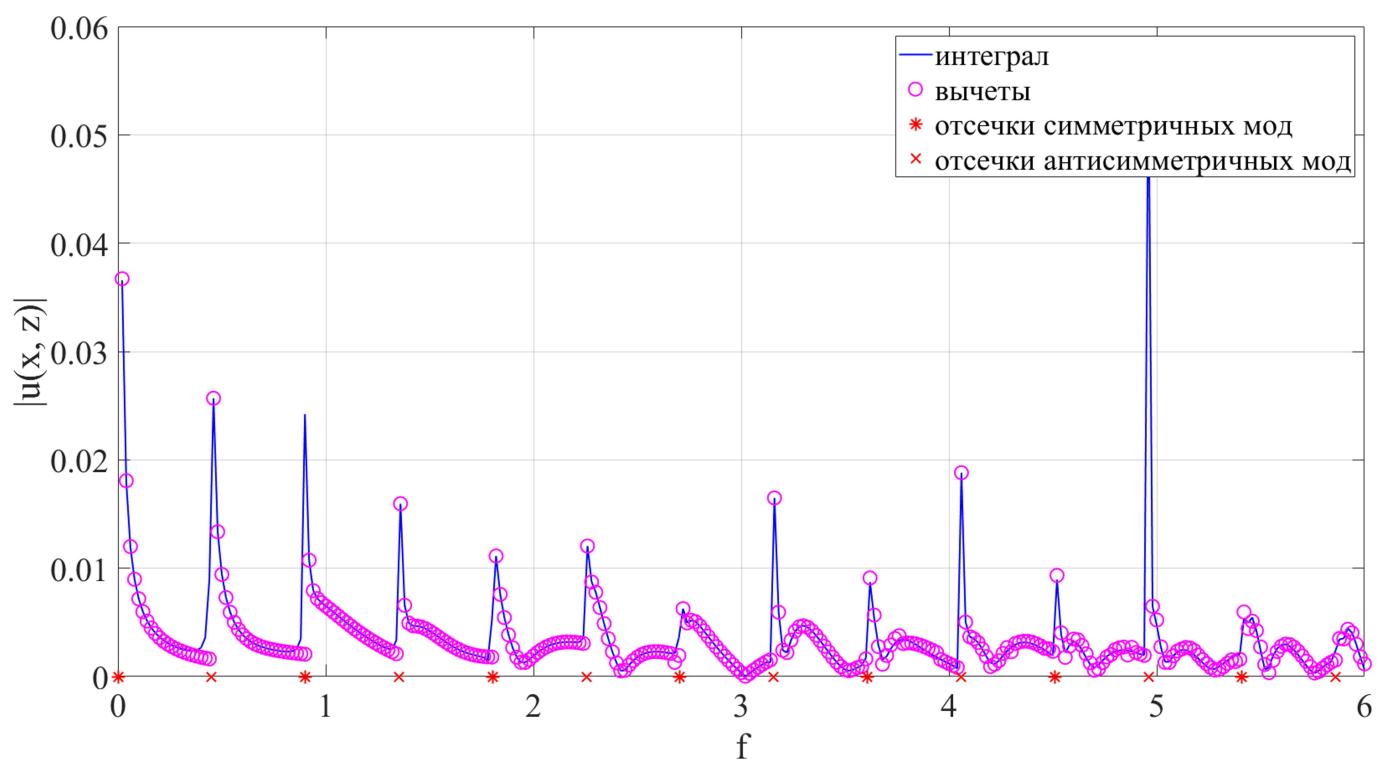
В точке на поверхности $x = -5$, $z = 0$ всплески наблюдаются
также на частотах отсечки антисимметричных мод



при отсечении всплесков $|u| \leq 5 \cdot 10^{-3}$

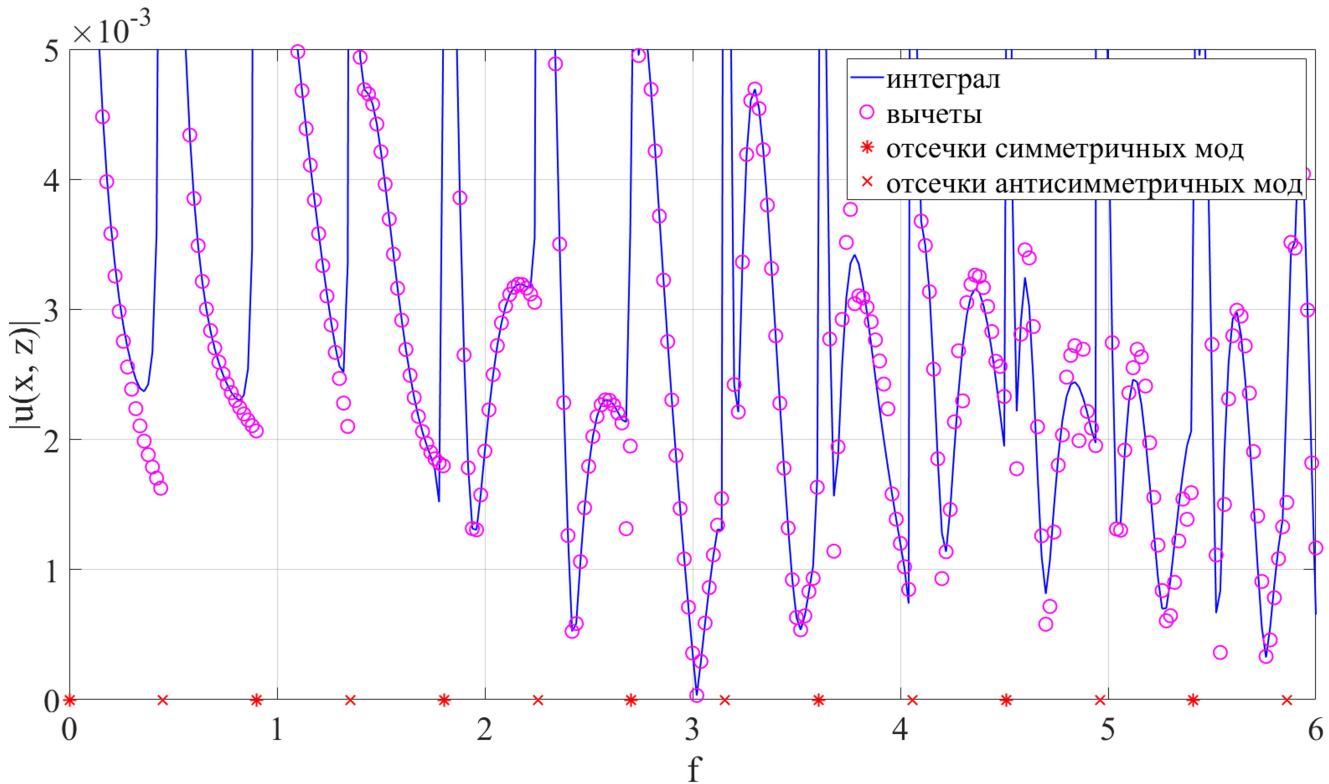


Аналогичная ситуация наблюдалась для точек на нижней границе $z = -h$ $x = -5$



при отсечении числов $|u| \leq 5 \cdot 10^{-3}$

при отсечении всплесков $|u| \leq 5 \cdot 10^{-3}$



Для последней точки получены следующий график относительной
нормированности

$$\eta = \frac{|u_{\text{res}} - u_{\text{int}}|}{|u_{\text{res}}|}$$

