

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

CIRAS

---

## **Stellar Astrophysics**

Shine bright like a diamond

---

Ileyk EL MELLAH

March 2023

# Contents

<b>1 - Observar las estrellas</b>	<b>1</b>
1.1 Color and luminosity . . . . .	1
1.1.1 Black body emission . . . . .	2
1.1.2 Spectroscopy and photometry . . . . .	5
1.1.3 Magnitudes . . . . .	6
1.1.4 The Hertzsprung-Russell diagram . . . . .	10
1.2 Distances . . . . .	18
1.2.1 Parallax . . . . .	18
1.2.2 Variable stars . . . . .	18
1.2.3 Main sequence fitting . . . . .	18
1.2.4 Beyond infinity . . . . .	18
1.3 Stellar masses . . . . .	18
1.3.1 The two-body problem . . . . .	18
1.3.2 Visual binaries . . . . .	18
1.3.3 Spectroscopic binaries . . . . .	19
1.4 Stellar radii . . . . .	19
1.4.1 Spectro-photometric measure . . . . .	19
1.4.2 Angular size . . . . .	19
1.4.3 Eclipsing binaries . . . . .	20

## Part I

### Mechanical equilibrium

---

<b>2 - Mecánica de fluidos</b>	<b>22</b>
2.1 Fluidos . . . . .	22
2.1.1 Estados fundamentales de la materia . . . . .	22
2.1.2 Equilibrio térmico local . . . . .	25
2.1.3 Aproximación de fluidos . . . . .	25
2.2 Enfoques euleriano y lagrangiano . . . . .	28
2.2.1 Descripción lagrangiana . . . . .	28
2.2.2 Descripción euleriana . . . . .	32

2.2.3	Coordinada de masa . . . . .	33
2.3	Ecuación de continuidad . . . . .	33
2.3.1	En 1D cartesiana/axisimétrica . . . . .	33
2.3.2	In 3D . . . . .	34
2.3.3	En 1D spherically symmetric . . . . .	36
2.4	Hydroestatica . . . . .	36
2.4.1	Fuerzas de superficie y de volumen . . . . .	36
2.4.2	Fuerza de presión . . . . .	37
2.4.3	Definición . . . . .	37
2.4.4	Ley fundamental de la hidrostática . . . . .	39
2.4.5	Plane parallel atmospheres . . . . .	39
2.4.6	La esfera hidrostática . . . . .	42
2.5	Hydrodynamica . . . . .	44
2.6	Escalas de tiempo características . . . . .	44
2.6.1	Escala de tiempo de caída libre . . . . .	45
2.6.2	Escala de tiempo nuclear . . . . .	45
<b>3 - Polytropes - Part I</b>		<b>47</b>
3.1	The polytropic relation . . . . .	47
3.2	Internal structure equation . . . . .	48
3.3	Boundary conditions . . . . .	48
3.4	Lane-Emden equation . . . . .	49
3.5	Solution near the core . . . . .	49
3.6	Special cases . . . . .	50
3.7	Mass-radius relation . . . . .	50
3.7.1	Radius . . . . .	50
3.7.2	Mass . . . . .	51
3.7.3	Mass-radius relation . . . . .	51
3.7.4	Average density . . . . .	52
3.7.5	Core pressure . . . . .	52
3.8	Isothermal ideal gas polytrope . . . . .	52
3.9	Numerical procedure . . . . .	53
<b>4 - Presión en el interior de las estrellas</b>		<b>54</b>
4.1	Gas ideal clásico . . . . .	54
4.1.1	Ecuación de estado . . . . .	55
4.1.2	Peso molecular medio . . . . .	58
4.1.3	Propiedades termodinámicas . . . . .	58
4.1.4	Non-ideal effects . . . . .	60

4.2	Degenerate gas . . . . .	60
4.2.1	Conditions . . . . .	60
4.2.2	Fermi-Dirac statistics . . . . .	62
4.2.3	Presión de degeneración de los electrones . . . . .	63
4.2.4	Non-ideal effects . . . . .	65
4.3	Radiation . . . . .	65
4.3.1	Bose-Einstein statistics . . . . .	65
4.3.2	Radiation pressure . . . . .	66
4.3.3	Non-ideal effects . . . . .	67
4.4	Different regimes . . . . .	67
4.4.1	Classic ideal gas and radiation pressures . . . . .	68
4.4.2	Relativistic and non-relativistic regimes . . . . .	68
4.4.3	Classic ideal gas and degenerate gas pressures . . . . .	68
4.4.4	Radiation and degenerate gas pressures . . . . .	69
4.4.5	Resumen . . . . .	69
<b>5 - Polytropes - Part II</b>		72
5.1	White dwarfs . . . . .	72
5.1.1	Equation of state . . . . .	72
5.1.2	Mass and radius . . . . .	73
5.1.3	Chandrasekhar maximum mass . . . . .	74
5.1.4	Full model . . . . .	75
5.1.5	Corrections . . . . .	76
5.1.6	Observations . . . . .	76
5.2	The Sun . . . . .	77
5.3	Very massive stars . . . . .	79
5.4	When are classic ideal gases polytropes? . . . . .	79

## Part II

### Thermal equilibrium

---

<b>6 - Gravito-thermal energy budget</b>		81
6.1	Gravitational potential energy . . . . .	81
6.2	The virial theorem . . . . .	82
6.2.1	General expression . . . . .	82
6.2.2	Total energy . . . . .	83
6.2.3	Thermal equilibrium . . . . .	84
6.3	Thermal timescale . . . . .	85

<b>7 - Energy conservation</b>	<b>87</b>
7.1 Thermal equilibrium . . . . .	87
7.1.1 Nuclear reactions . . . . .	87
7.1.2 Neutrinos . . . . .	88
7.2 Non-stationary case . . . . .	88
7.3 Global energy budget . . . . .	89
7.3.1 Expression . . . . .	89
7.3.2 Secular thermal stability . . . . .	91
 <b>8 - Energy transport</b>	 92
8.1 Radiative transport . . . . .	92
8.1.1 Opacity . . . . .	92
8.1.2 Diffusive regime . . . . .	96
8.1.3 Eddington luminosity . . . . .	99
8.2 Conductive transport . . . . .	99
8.3 Convective transport . . . . .	101
8.3.1 Temperature gradients . . . . .	102
8.3.2 Dynamical instability . . . . .	103

---

## Part III

### The nuclear furnace

---



---

## Part IV

### Stars in action

---

<b>9 - Stellar winds</b>	<b>109</b>
<b>10 - Isolated evolution</b>	<b>110</b>
<b>11 - Binary stars</b>	<b>111</b>

---

## Part

### Appendices

---

<b>A - Thermodynamics</b>	<b>114</b>
1.1 State variables and fundamental relation . . . . .	114
1.2 Thermodynamic response coefficients . . . . .	115

1.2.1	Definition . . . . .	115
1.2.2	Relations between coefficients . . . . .	117
1.3	Ideal gases . . . . .	121
1.3.1	Conditions of validity . . . . .	121
1.3.2	Equation of state and fundamental relation . . . . .	123
1.3.3	Joule laws . . . . .	125
1.3.4	Internal energy and enthalpy . . . . .	126
1.3.5	Thermodynamic response coefficients . . . . .	126
1.3.6	Laplace law . . . . .	127
<b>B - Special relativity</b>		129
<b>C - Physical constants</b>		130
<b>D - Energy transport</b>		132
4.1	The three mechanisms of energy transport . . . . .	132
4.1.1	Radiation . . . . .	132
4.1.2	Conduction . . . . .	132
4.1.3	Convection . . . . .	132
4.2	Thermal flux . . . . .	133
4.2.1	Definition . . . . .	133
4.2.2	Fourier law . . . . .	133
4.3	Diffusion . . . . .	135
4.3.1	Local energy transport equation . . . . .	135
4.3.2	Diffusion equation . . . . .	136
4.3.3	Boundary conditions . . . . .	137
<b>E - Spectroscopy</b>		139
5.1	Quantum chemistry . . . . .	139
5.1.1	Mendeleyev table . . . . .	140
5.1.2	Atomic orbitals and quantum numbers . . . . .	140
5.1.3	Bohr model . . . . .	140
5.1.4	Electronic structure . . . . .	140
5.1.5	Covalent bond . . . . .	140
5.2	Emission and absorption . . . . .	140
5.2.1	Emission/absorption lines . . . . .	140
5.2.2	Continuous emission/absorption . . . . .	141

# Chapter 1

## Observar las estrellas

La mayoría de los datos que hemos recopilado sobre las estrellas se obtuvieron durante el siglo pasado. Se trata de un lapso de tiempo mucho menor que la vida estelar, lo que significa que sólo tenemos acceso a instantáneas y no podemos captar directamente la evolución temporal de una estrella individual<sup>1</sup>. En cambio, nos basamos en el enorme número de estrellas para unir los puntos. Se trata de un enfoque científico clásico basado en un principio de tipo ergódico: suponemos que la información sobre la evolución temporal de un único sistema es equivalente a la información encapsulada en una única instantánea de una colección de muchos sistemas que se supone que son réplicas idénticas, pero en diferentes etapas evolutivas (véanse los conjuntos termodinámicos de Gibbs en mecánica estadística). Debido a las diferencias intrínsecas entre las estrellas (por ejemplo, su composición química), se trata de un enfoque arriesgado, pero valioso cuando se trata de una muestra razonablemente homogénea (por ejemplo, las nubes de Magallanes, donde la composición química es bastante uniforme).

El tiempo de observación es mucho menor que la vida estelar: las observaciones son como instantáneas de la vida de una estrella. Las propiedades observadas de una estrella individual no contienen información (directa) sobre su evolución. Sin embargo, la diversidad de las propiedades estelares (radios, luminosidades, abundancias superficiales) depende de cómo evolucionan las estrellas, así como de las propiedades intrínsecas (masa, composición inicial). Las propiedades comunes a un gran número de estrellas deben corresponder a fases evolutivas de larga duración, y viceversa. Estudiando estadísticamente muestras de estrellas podemos deducir los tiempos de vida (relativos) de ciertas fases, lo que proporciona otra importante restricción a la teoría de la evolución estelar. En este capítulo sólo presentamos diagnósticos muy básicos sobre la medida de las principales propiedades estelares (masa, radio y luminosidad). Seguimos siendo muy elusivos sobre los aspectos espectrales ya que se originan en las atmósferas estelares donde se producen una pléthora de fenómenos que no trataremos en este curso (ionización e.g., líneas de emisión/absorción, ensanchamiento de líneas, oscurecimiento del limbo, desdoblamiento Zeeman, etc). Para la transferencia radiativa en las atmósferas estelares, se invita al lector a estudiar el capítulo 4 de Leblanc. Para las líneas de emisión/absorción, la información esencial se da en el apéndice E.

### 1.1 Color and luminosity

La principal fuente de información de las estrellas es la luz. Su intensidad, espectro y polarización contienen valiosa información sobre el tamaño, la temperatura y la composición química externa de una estrella. Sin embargo, las estrellas son estructuras muy opacas y resulta difícil determinar sus propiedades internas (masa, edad, fuente de energía y temperatura interna, presión y composición química).

<sup>1</sup>con la notable excepción de las fusiones binarias estelares (posiblemente V838 Monocerotis ), pulsaciones estelares y episodios transitorios de pérdida de masa como el responsable del gran oscurecimiento de Betelgeuse en 2019. Para los remanentes estelares (e.g., enanas blancas), también hay episodios rápidos que pueden presenciarse en el transcurso de una vida humana, como las novas.

L 1.2 **1.1.1 Black body emission**

1.3

**Black body spectrum**

Como cualquier objeto cuántico, la luz puede manifestarse tanto como onda (la onda electromagnética) como partícula (los fotones), aunque este último enfoque es algo más intuitivo para entender el concepto de espectro de cuerpo negro. Los fotones no tienen masa, por lo que su velocidad es la velocidad de la luz  $c$ . Su energía  $E$ , frecuencia  $\nu$ , longitud de onda  $\lambda$  y momento  $p$  están conectados a través de:

$$E = h\nu = pc \quad (1.1)$$

$$\lambda = c/\nu \quad (1.2)$$

donde  $h$  es la constante de Planck. A partir de estas relaciones, se pueden convertir las cuatro magnitudes entre sí. En Astrofísica, utilizamos la energía como escala cuando hablamos del extremo de alta energía del espectro (rayos X, rayos  $\gamma$ ) mientras que utilizamos las frecuencias como escala cuando hablamos del extremo de baja energía del espectro (microondas, radio). Mientras que la primera descripción es de tipo partícula, la segunda es de tipo onda. Entre ambas (ultravioleta, óptico e infrarrojo), solemos utilizar las longitudes de onda como escala (véase Fig E.3). Debido a las relaciones mencionadas, las tres escalas son totalmente equivalentes.

Un espectro es un histograma, una distribución de la densidad de energía por bin de frecuencia, longitud de onda, energía, etc. Está estrechamente vinculado al análisis de Fourier, ya que descompone explícitamente una señal en componentes armónicos. En el tratamiento de señales, puede representar la densidad de energía acústica por nota, que puede interpretarse como una casilla de tiempo-frecuencia. En la teoría de las turbulencias, puede ilustrar la densidad de energía en cada escala espacial, es decir, por bin de frecuencia espacial (XXX la distribución espectral de potencia, PSD). En el caso de la luz, el espectro se denomina distribución espectral de energía (SED) y representa la distribución del flujo radiativo por energía fotónica, frecuencia o longitud de onda. Dependiendo de la elección entre las tres últimas cantidades, el flujo está en  $\text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}\cdot\text{eV}^{-1}$ ,  $\text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}\cdot\text{Hz}^{-1}$  or  $\text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}\cdot\text{\AA}^{-1}$ .

Un cuerpo negro es un sistema termodinámico idealizado que absorbe completamente toda la luz que recibe. En un fluido en el que se aplica el equilibrio termodinámico local, una superficie puede comportarse como un cuerpo negro (por ejemplo, la fotosfera de una estrella). Los fotones son bosones, obedecen a la estadística de Bose-Einstein. Se puede demostrar que la SED de un cuerpo negro sólo depende de un parámetro, la temperatura, y viene dada por la función de Planck  $B_i(T)$ , donde  $i = \nu, \lambda, E$  o  $p$ . El flujo radiativo  $F_i$  se obtiene a partir de la función de Planck mediante  $F_i = \pi B_i$ . La función de Planck es la distribución del flujo radiativo en función de la frecuencia o longitud de onda del fotón:

$$F_\nu(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad \text{in } \text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{Hz}^{-1} \quad (1.3)$$

$$F_\lambda(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \quad \text{in } \text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{\AA}^{-1} \quad (1.4)$$

El subíndice en las left hand side es para indicar que no es sólo un cambio de variable ( $\nu$  o  $\lambda$ ), la función en sí es diferente ( $F_\nu \neq F_\lambda$ ). Obsérvese la importante unidad final: el flujo radiativo es una cantidad de energía radiativa que atraviesa un elemento de superficie por unidad de tiempo, por lo que está en  $\text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-2}$ , pero aquí observamos la distribución, por lo que debemos tener en cuenta la variable con respecto a la cual estamos calculando la

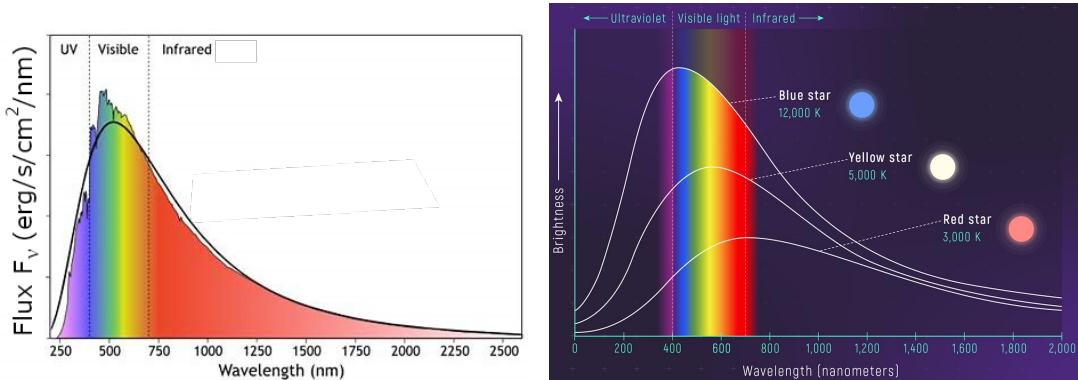


FIGURE 1.1: (left) Comparación entre el espectro solar extraterrestre (i.e. por encima de la atmósfera terrestre que filtra múltiples bandas de ondas) y un espectro de cuerpo negro a  $\sim 5.800\text{K}$  (línea continua negra). (right) Espectros de estrellas con diferentes temperaturas efectivas.

distribución: ¿queremos el flujo por intervalo de frecuencia (i.e. por Hz)? ¿de longitud de onda (i.e. por cm, por nm o por Å)? ¿de energía (i.e. por erg)?

Derivar la distribución del flujo radiativo en función de la energía y el momento del fotón, utilizando la fórmula de cambio de variables para distribuciones:

$$F_\nu d\nu = -F_\lambda d\lambda = F_E dE = F_p dp \quad (1.5)$$

Codificar un script en Python para visualizar simultáneamente todas estas distribuciones con las 4 escalas  $x$  diferentes, y la temperatura como cursor (e.g., con la librería ipywidgets).

Para caracterizar la transparencia y la reflectividad de una superficie o un medio, introducimos comúnmente la transmitancia (o transmisividad) y su contrario, la absorbancia (o absorvidad, véase Figures E.3), y el albedo (o reflectividad), vagamente definidos en función de la fracción de energía o señal (aquí, la luz) que dejan pasar o reflejan. Por definición, un cuerpo negro tiene un albedo nulo.

### Laws

1. Deducir la ley de Stefan-Boltzmann  $F = \sigma T^4$  a partir de  $F = \int_0^{+\infty} F_\nu d\nu$ .
2. Buscar el máximo de cada función  $F_i$  para recuperar la ley de desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{\max} T \sim 0,2898 \text{ cm} \cdot \text{K} \quad (1.6)$$

donde  $\lambda_{\max}$  es la longitud de onda a la que el flujo radiativo de un cuerpo negro de temperatura  $T$  es máximo. ¿Cuál es el color verdadero de la piel humana?

Para caracterizar la transparencia y la reflectividad de una superficie o un medio, introducimos comúnmente la transmitancia (o transmisividad) y su contrario, la absorbancia (o absorvidad,

véase Figures/), y el albedo (o reflectividad), vagamente definidos en función de la fracción de energía o señal (aquí, la luz) que dejan pasar o reflejan. Por definición, un cuerpo negro tiene un albedo nulo.

### Jansky unit

Un jansky (Jy) es una unidad de flujo radiativo comúnmente utilizada en astronomía, especialmente en el óptico y en longitudes de onda más largas:

$$1\text{Jy} = 10^{-23}\text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{Hz}^{-1} \quad (1.7)$$

### Flux and luminosity

El flujo radiativo es la cantidad de energía radiativa que atraviesa un elemento superficial por unidad de tiempo. Para un cuerpo negro de temperatura  $T$ , viene dado por  $\sigma T^4$ . Una vez que integramos el flujo radiativo a través de toda la superficie de una estrella, obtenemos la luminosidad, es decir, la cantidad de energía perdida por radiación por unidad de tiempo. Para una estrella esférica de radio  $R$  con temperatura efectiva  $T$ , la luminosidad  $L$  viene dada por:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (1.8)$$

### Are stars black bodies?

El campo radiativo de una estrella está esencialmente fijado por las fuentes internas de energía (nuclear, autogravedad, calor residual) y la luz externa que refleja es en gran medida despreciable<sup>2</sup>. Los espectros estelares observados se parecen mucho a los espectros de cuerpos negros (Figures 1.1), lo que indica que la emisión que recibimos procede de una superficie casi en equilibrio termodinámico local y con una temperatura casi uniforme. La temperatura de una estrella puede definirse de diferentes maneras:

- la temperatura efectiva  $T_{\text{eff}}$  es la temperatura del cuerpo negro que tiene el mismo flujo  $\sigma T^4$ . En otras palabras, es la temperatura de un cuerpo negro con la misma superficie bajo la curva de su espectro cuando se integra en todas las longitudes de onda (Fig. 1.1, panel izquierdo, donde el exceso observado en el visible se compensa con el déficit en UV e IR). Este valor suele ser cercano a la temperatura de la fotosfera estelar. Obsérvese que para determinar la temperatura efectiva de una estrella necesitamos conocer su radio y distancia, ya que el flujo observado (a.k.a. aparente) no es el flujo absoluto.

### Dilución esférica de la luz

Para un campo radiativo isótropo emitido desde la superficie esférica de radio  $R$  de un cuerpo negro, determinar la relación entre el flujo absoluto  $F$  y el flujo  $f$  observado desde una distancia  $d$ . Deducir el flujo aparente  $f$  en función de la luminosidad  $L$  del cuerpo negro y de su distancia  $d$ . Ayuda: Al contrario que el flujo, la luminosidad no depende de la distancia del observador a la estrella debido a la conservación de la energía.

- la temperatura de color  $T_{\text{col}}$  es la temperatura del cuerpo negro cuyo espectro se ajusta mejor al espectro estelar. Se define con respecto al rango de fluctuación sobre el que

<sup>2</sup>Con la notable excepción de la iluminación mutua en sistemas binarios como los de espalda roja.

realizamos el ajuste. Dado que esta temperatura sólo se refiere a la forma del espectro (no a su escala, a su amplitud), no necesitamos conocer la distancia de una estrella para determinar su temperatura de color.

- La temperatura de brillo es, en general, una función de la frecuencia (o la longitud de onda, la energía, etc). La temperatura de brillo  $T_{\text{br}}(\nu)$  es la temperatura del cuerpo negro que tiene, a esta frecuencia específica  $\nu$ , el mismo flujo radiativo absoluto que el espectro que estamos observando. En otras palabras, es la temperatura del espectro del cuerpo negro que se cruza con el espectro en la frecuencia  $\nu$ . Puede verse como una forma de medir el flujo radiativo en unidades de temperatura. La temperatura de brillo no depende de la frecuencia si y sólo si el espectro es de cuerpo negro.

Las tres temperaturas son iguales si y sólo si el espectro estelar es el de un cuerpo negro perfecto. En la práctica, hay desviaciones significativas (Fig. 1.1, panel izquierdo) debido a (i) la absorción por el material entre el cuerpo negro (es decir, la fotosfera) y el observador, (ii) la absorción y/o dispersión de líneas resonantes y (iii) una temperatura no uniforme de la fotosfera (e.g., si la estrella no es esférica, debido a [el teorema de von Zeipel](#)).

### Temperatures

In the spectrum XXX, we have:

1. an effective temperature  $T_{\text{eff}} =$
2. a color temperature in the U-band (see Fig. 1.2)  $T_{\text{col,U}} =$
3. a color temperature in the V-band (see Fig. 1.2)  $T_{\text{col,V}} =$
4. a brightness temperature at XXX  $T_{\text{br}}() =$
5. a brightness temperature at XXX  $T_{\text{br}}() =$

A diferencia de una longitud de onda monocromática, el color aparente de un cuerpo negro no se deduce directamente de su temperatura. Se trata de una superposición de longitudes de onda cuya distribución de intensidad viene dada por el espectro del cuerpo negro. Existen [herramientas en línea para calcular el color de un cuerpo negro percibido por los ojos humanos](#).

### 1.1.2 Spectroscopy and photometry

De la luz se pueden extraer tres informaciones: su intensidad, su color y su polarización. En espectroscopía, queremos conocer los detalles de la SED (no sólo la forma del continuo sino también las líneas de absorción/emisión) por lo que intentamos muestreárla con muchos puntos de datos (i.e. subdividimos el espectro en muchos bins). Por el contrario, en fotometría nos centramos en la luminosidad, por lo que trabajamos con un número limitado de puntos del espectro. En realidad, promediamos el espectro en bandas fotométricas amplias (a.k.a. filtros) representadas en la Fig 1.2. En cierto sentido, la espectroscopia no es más que fotometría pero con bandas mucho más estrechas: la resoluciónpectral de un instrumento espectroscópico, que es un número adimensional que representa  $\Delta\lambda/\lambda$ , puede llegar a 100.000, lo que significa que la anchura de un bin de longitud de onda puede ser tan baja como 0,05 Å en óptico. La ventaja de la fotometría es que obtenemos mucha más luz ya que no nos limitamos a ventanas espectrales estrechas, por lo que podemos tener tiempos de exposición mucho más cortos y podemos resolver fenómenos mucho más rápidos (i.e. obtener una mayor resolución temporal), pero perdemos la mayor parte de la información sobre el

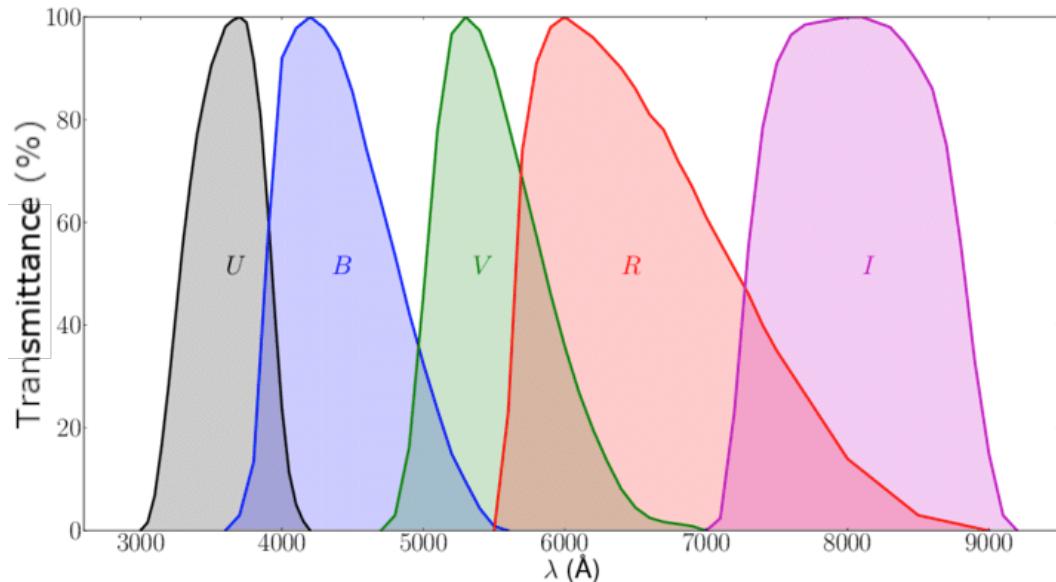


FIGURE 1.2: Transmissivity curves for the UBVRI filters typically used in photometry.

espectro subyacente ya que sólo tenemos tantos puntos como bandas fotométricas hayamos utilizado, y que estas bandas suelen tener una anchura de 1.000Å. La polarimetría está fuera del alcance de este curso, aunque es una técnica poderosa para entender la geometría y las propiedades de las regiones emisoras.

Tanto si hablamos de flujos como de luminosidades o magnitudes, estas cantidades se definen con respecto a un determinado rango de ondas. En el caso idealizado en el que recogemos la luz en todas las longitudes de onda, las llamamos bolométricas. Los valores bolométricos contrastan con los que medimos cuando nos limitamos a observar los flujos, luminosidades o magnitudes en una banda de ondas finita (e.g., en óptico, o en uno de los filtros fotométricos de la Fig. 1.2). Dado que los cuerpos negros tienen espectros que se alejan rápidamente de su  $\lambda_{\max}$ , los flujos, luminosidades o magnitudes bolométricos son representativos de los flujos, luminosidades o magnitudes comprendidos entre  $\lambda_{\max}/3$  y  $3\lambda_{\max}$  aproximadamente. El flujo bolométrico es siempre un límite superior, ya que abarca todo el espectro. Por el contrario, se puede definir el flujo monocromático, la luminosidad o la magnitud como el valor correspondiente a una longitud de onda específica  $\lambda$ . Sin embargo, técnicamente, para un intervalo de longitudes de onda infinitamente fino, este valor debería ser cero: no hay lector de este libro de texto que mida exactamente un tamaño determinado. De ahí el recurso a distribuciones (por ejemplo, la distribución delta de Dirac) que son formas generalizadas de funciones cuyo sentido aparece una vez que las integramos en un intervalo finito.

### L 1.4 1.1.3 Magnitudes

#### Weber-Fechner law

La ley de Weber-Fechner es una ley empírica de la psicofísica, el campo que estudia la relación entre estímulos y sensaciones. Afirma que, cuando los sujetos experimentan una señal de fondo de intensidad  $I$ , el menor cambio de intensidad  $\Delta I$  que pueden detectar es proporcional a  $I$ :

$$\frac{\Delta I}{I} = \text{constant} \quad (1.9)$$

No sólo es válido para los sentidos (e.g., percepción del peso, sonido, luz...) sino también en la conceptualización a partir de *stimulii* (e.g., cognición numérica). En la práctica, significa que no somos directamente sensibles a las variaciones de los estímulos. En cambio, sólo percibimos las variaciones logarítmicas de los *stimulii* ya que cuando  $\Delta I \rightarrow 0$ , la ecuación (1.9) se convierte en:

$$\frac{dI}{I} = d\ln I = \text{constant} \quad (1.10)$$

Esta es la razón por la que dos charanguistas tocando no hacen el doble de ruido que un charanguista tocando. En su lugar, percibimos un aumento logarítmico más lento. Para alcanzar la sensación de un sonido dos veces más fuerte, se necesita más que duplicar el número de músicos. Esto motiva el uso de decibelios, definidos como el logaritmo de la señal, en el procesamiento de señales en general y en acústica en particular. Cuando se trata del brillo percibido de las estrellas, llamamos "magnitudes" a los logaritmos del flujo real.

Desde un punto de vista evolutivo, el hecho de que los sentidos tengan una respuesta logarítmica garantiza que los seres vivos puedan sondear una amplia gama de estímulos sin saturarse. Si la respuesta fuera lineal (i.e.  $\Delta I = \text{constante}$ ), los sentidos o bien serían capaces de captar pequeñas variaciones (si  $\Delta I$  es pequeño) pero se saturarían rápidamente, o bien serían toscos (si  $\Delta I$  es grande) y sería imposible captar variaciones sutiles. Los detectores con respuestas logarítmicas son versátiles y adecuados para adaptarse a un entorno diverso.

## Apparent

Sean dos estrellas con flujo observado  $f_1$  y  $f_2$ . Entonces, sus magnitudes aparentes  $m_1$  y  $m_2$  se relacionan a través de:

$$m_2 - m_1 = -2.5 \log \left( \frac{f_2}{f_1} \right) \quad (1.11)$$

Una de las convenciones es utilizar Vega (a.k.a.  $\alpha$  Lyræ) como estrella de referencia para definir las magnitudes aparentes. Su magnitud en todas las bandas del UBVRI es set<sup>3</sup> a 0 y su flujo radiativo en la banda V es de  $3,21 \cdot 10^{-6} \text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-2}$ .

El factor de 2,5 garantiza que cada cinco magnitudes corresponde a un cambio de un factor 100 en el flujo. ¿Qué factor elegirías si quisieras que cada diferencia de magnitud unitaria correspondiera a un cambio de factor 100?

El signo menos invierte la escala: cuanto menor es la magnitud (incluso en números negativos), más brillante es la estrella. Esta convención tiene una motivación histórica, ya que en la antigua Grecia los astrónomos solían clasificar las estrellas desde la más brillante (1), hasta la más débil, de forma in crescendo. También explica por qué las magnitudes se definen como diferencias: la estrella más brillante, por ejemplo, sólo puede definirse con respecto a otros objetos más débiles, es una noción intrínsecamente relativa. La escala de las magnitudes se define dentro de una constante (i.e. podemos tomar otra estrella de referencia que no sea Vega, lo que desplaza la escala en una constante).

<sup>3</sup>En realidad, no es exactamente 0...

### Bolometric correction

La corrección bolométrica es la diferencia entre las magnitudes bolométricas y XXX en la banda V. Calcule numéricamente esta diferencia para un espectro de cuerpo negro y represente gráficamente la corrección bolométrica en función de la temperatura del cuerpo negro.

### Absolute

La magnitud aparente se define en base a los flujos observados, por lo que una fuente dada tendrá diferentes magnitudes aparentes dependiendo de la distancia del observador. Por lo tanto, introducimos la magnitud absoluta  $M$  que es la magnitud aparente a una distancia fija fijada, por convención, a 10 pc (ver sección 1.2.1 para la definición del parsec), así:

$$M - m = 5 \log \left( \frac{10\text{pc}}{d} \right) \quad (1.12)$$

según la ecuación derivada en el ejercicio "Dilución esférica de la luz" en la sección 1.1.1. Llamamos módulo de distancia a la diferencia  $m - M$ .

L Tab.1.3

### The Sun

El Sol tiene una magnitud aparente de  $-26,74$  en la banda V, una magnitud absoluta de  $4,83$  en la banda V y una luminosidad bolométrica absoluta de  $4,25$ .

### Magnitudes to distances

La estrella 16 Cyg A tiene una magnitud aparente  $m_V = 5,95$  y una magnitud absoluta  $M_V = 4,33$ . ¿Cuál es su distancia?

### Color indexes

**Color indexes** son diferencias entre la luminosidad de una estrella en dos bandas de ondas. Es equivalente a utilizar la ecuación, pero con una única estrella vista en dos bandas de ondas diferentes. Hemos visto en la sección 1.1.1 que los flujos, luminosidades y magnitudes se definen sobre bandas de ondas específicas. Más concretamente, si una estrella con una temperatura efectiva  $T$  tiene un espectro que se describe con precisión por un cuerpo negro a esta temperatura, podemos definir la variable intermedia  $C_X$  de la estrella por la media del espectro ponderado sobre el filtro  $\phi_X(\lambda)$ :

$$C_X = \frac{\int_0^{+\infty} u_\lambda(\lambda) \phi_X(\lambda) d\lambda}{\int_0^{+\infty} \phi_X(\lambda) d\lambda} \quad (1.13)$$

donde  $f(\lambda)$  es la función de Planck expresada como densidad espectral de energía en términos de la banda de onda  $\lambda$ :

$$u_\lambda(\lambda; T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1} \quad (1.14)$$

Esta cantidad  $C_X$  puede interpretarse como el espectro de la estrella visto a través de un determinado filtro  $\phi_X$  que puede ser uno de los de la Fig. 1.2. También sería el valor que

obtenemos si medimos la luminosidad con el filtro  $\phi_X$  como **un núcleo de suavizado**. A continuación, calculamos la magnitud asociada a esta luminosidad que anotamos  $m_X$ . Un índice de color se define entonces como la diferencia  $m_X - m_Y$ . Por convención, solemos calcular las diferencias (i) entre dos filtros adyacentes y (ii) entre el más azul y el más rojo. Por tanto, tenemos, a partir de 1.2 y una vez que eliminamos la  $C$  y mantenemos sólo el subíndice,  $U - B$ ,  $B - V$ ,  $V - R$  y  $R - I$ . Dependiendo del espectro subyacente, estos valores pueden ser positivos o negativos.

### Blue Is the Warmest Color

El índice de color nos indica lo "azul" o "roja" que es una estrella: suponiendo que una estrella emita como un cuerpo negro, su temperatura efectiva puede determinarse a partir de cualquiera de sus índices de color. Por ejemplo, una estrella fría emite más a longitudes de onda más largas, por lo que  $U - B$  será mayor que  $R - I$ .

L Fig.1.4

### Photometric measure of stellar temperatures

En este ejercicio, suponemos que los espectros estelares coinciden perfectamente con la emisión de los cuerpos negros.

1. ¿Cuántos parámetros necesitamos para configurar completamente el espectro de un cuerpo negro? ¿Qué pasa con el flujo recibido de un cuerpo negro por un observador distante?
2. ¿Podemos determinar la temperatura efectiva de una estrella a partir del valor  $m_X$  medido con un solo filtro?
3. Escribe un script en Python para calcular los índices de color  $U - B$ ,  $B - V$ ,  $V - R$  y  $R - I$  para una temperatura efectiva dada.
4. A la inversa, ¿puedes determinar de forma única la temperatura efectiva de una estrella a partir de un índice de color? En caso afirmativo, ¿cuál es la temperatura efectiva de una estrella con  $U - B = 0$ ?
5. ¿Cuál es la temperatura efectiva de una estrella con  $m_X = -1$  y un paralaje de  $0,1''$ ?
6. Ajuste una fórmula de la forma:

$$T = \alpha \left[ \frac{1}{\beta_1(B-V) + \gamma_1} + \frac{1}{\beta_2(B-V) + \gamma_2} \right] \quad (1.15)$$

para determinar la temperatura efectiva a partir del índice de color  $B - V$ .

### Absorption by the interstellar medium

En la práctica, el módulo de distancia no basta para determinar la distancia de una estrella. En efecto, el medio interestelar contiene gas y polvo susceptibles de absorber y dispersar la luz. Estos procesos alteran predominantemente las longitudes de onda más cortas, lo que modifica el índice de color y hace que las estrellas parezcan más rojas de lo que realmente son. En la Vía Láctea, el coeficiente de extinción es esencialmente independiente de la dirección dentro de unos pocos kiloparsecs, y en el óptico, cada kiloparsec corresponde aproximadamente a un aumento de una magnitud.

### L 1.7 1.1.4 The Hertzsprung-Russell diagram

El diagrama de Hertzsprung-Russell (diagrama H-R) es un intento observational de representar las dos propiedades principales de las estrellas extraídas de la espectroscopia y la fotometría. La primera es el índice de color (si se es observador) o la temperatura efectiva (si se es teórico), que sirve de eje  $x$  (invertido). Por otro lado, el segundo, utilizado como eje  $y$  es la magnitud absoluta (si eres observador) o la luminosidad (si eres teórico) o incluso el radio estelar (si eres un celoso teórico). Curiosamente, la distribución de las estrellas en este diagrama dista mucho de ser uniforme. En su lugar, existe una fuerte correlación entre la luminosidad y la temperatura, lo que nos impulsa al estudio de los interiores estelares para comprender la cadena causal subyacente a esta correlación.

### L 1.5 Spectral types

Las estrellas se clasifican en tipos espectrales basándose en sus propiedades espectrales, que resultan estar vinculadas principalmente a su temperatura efectiva<sup>4</sup> (Fig. 1.5): la temperatura efectiva modifica el continuo según la función de Planck, pero también determina el estado de ionización de la atmósfera estelar por encima de la fotosfera. Para más información sobre el proceso de ionización, consulta el apartado 1.5 de Leblanc y el capítulo 14 de Kippenhahn, Weigert y Weiss.

#### Atmósferas estelares

Las líneas de absorción, visibles en la figura 1.4, dependen de las siguientes propiedades de la capa hidrostática sobre la fotosfera que llamamos atmósfera:

- su estado de ionización.
- su composición química, que establece la abundancia superficial de cada especie (generalmente expresada en términos de densidad numérica relativa al hidrógeno).
- la gravedad superficial, que establece la estratificación química en la atmósfera estelar y ensancha las líneas (a través de un efecto llamado ensanchamiento por presión de Stark, ver Fig. 1.6).
- la velocidad de rotación de la atmósfera estelar proyectada a lo largo de la línea de visión  $v \sin i$  (donde  $i$  es el ángulo de inclinación desconocido del plano ecatorial), que también ensancha las líneas debido al desplazamiento Doppler.
- outflows, para estrellas que pierden masa a gran velocidad a través de los vientos, que producen, entre otras características espectrales, los famosos [perfils de P Cygni](#) (chapter ??).

Se pueden realizar análisis y ajustes muy cuidadosos de los espectros estelares utilizando modelos detallados de atmósferas estelares con códigos como [PoWR](#), [CMFGEN](#) and [FASTWIND](#) for example.

Los astrónomos llaman "metales" a cualquier elemento químico más allá del hidrógeno y el helio en la tabla periódica de los elementos, aunque los químicos tienen una definición mucho más fina de los metales que no incluye, por ejemplo, el carbono y el oxígeno. Lo que motiva esta

<sup>4</sup>Lo que explica por qué las clases espectrales están representadas en el eje  $x$  en la Fig. 1.3.

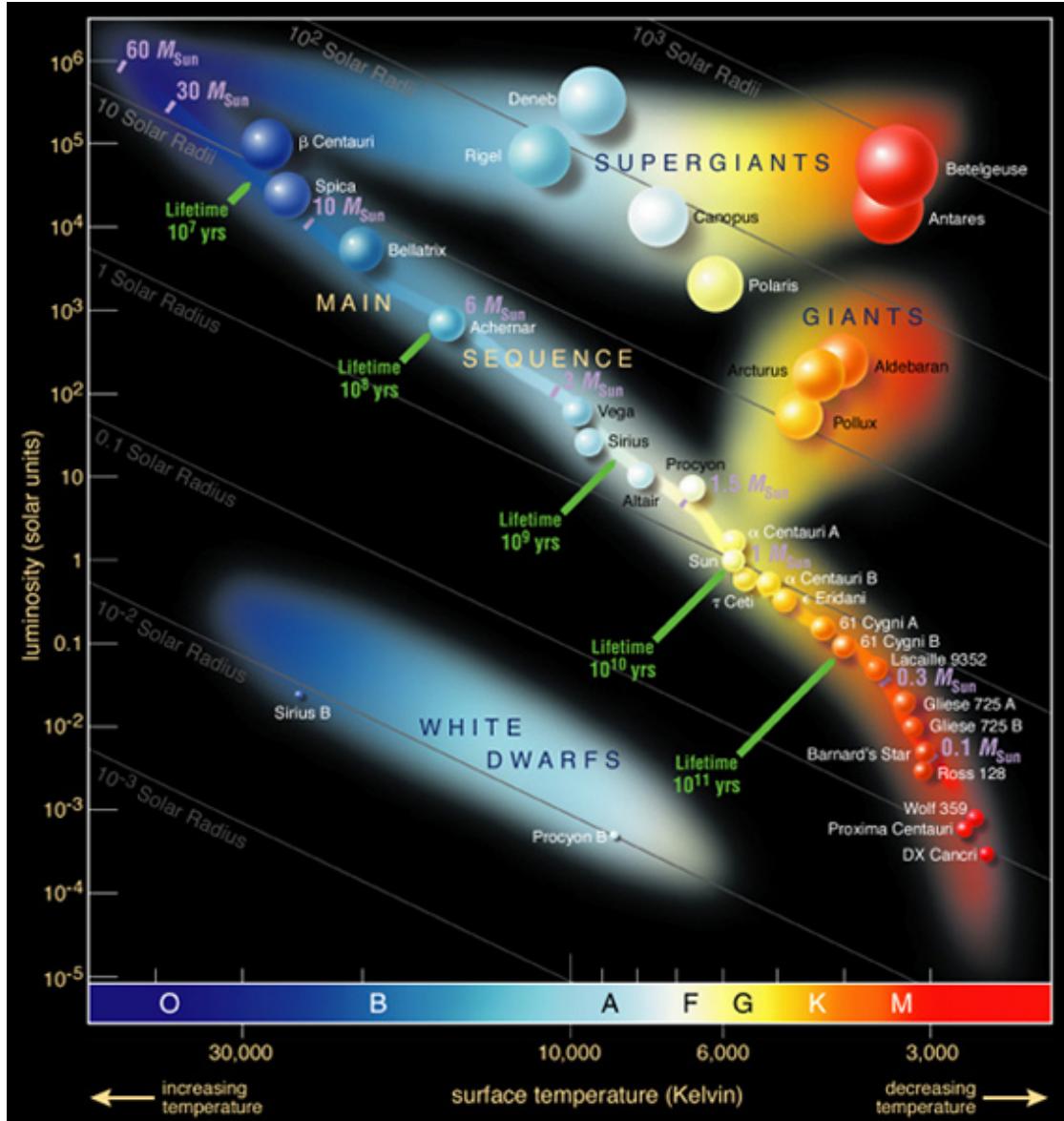


FIGURE 1.3: Diagrama de Hertzsprung-Russell que muestra la luminosidad en función de la temperatura de varias estrellas. Las líneas grises del fondo representan el radio estelar. En la secuencia principal, vemos la masa estelar y el tiempo de vida. Los tipos espectrales se representan en la parte inferior.

elección es tanto el predominio del hidrógeno y el helio en la composición química del Universo como su origen específico, ya que la mayoría de los núcleos de hidrógeno y helio se formaron media hora después del Big Bang (durante la nucleosíntesis primordial), mientras que todos los demás elementos sólo se formaron después en los interiores estelares (la nucleosíntesis estelar).

De los más calientes a los más fríos, los tipos espectrales estelares son:

- **O estrellas** - Sus líneas espectrales más intensas son las del helio ionizado (líneas de He II) y las del carbono doblemente ionizado (CIII). Sus líneas de Balmer son débiles porque casi todo el hidrógeno de la fotosfera está completamente ionizado a temperaturas tan altas, lo que significa que ya no hay ningún electrón ligado que capture fotones de forma resonante.
- **Estrellas B** - Sus espectros muestran fuertes líneas de Balmer y fuertes líneas de helio neutro (HeI).
- Estrellas A. Son lo suficientemente frías como para mantener el hidrógeno neutro en su fotosfera. Además de líneas de Balmer muy fuertes, tienen muchas líneas de metales ionizados individualmente, como el calcio. También destaca en sus espectros el llamado "salto de Balmer" en 3650Å (estrella A1 en la figura 1). en 3650Å (estrella A1 en Fig. 1.4).
- **estrellas F** - Tienen líneas de Balmer más débiles que las estrellas A. En sus espectros son visibles líneas de metales neutros.
- **estrellas G** - Destacan sus líneas de calcio ionizado (CaII) a 4300Å. Las líneas de calcio más intensas se denominan líneas H y K. La línea D del sodio neutro (NaI) también es notable en las estrellas G.
- **Estrellas K** - En sus espectros se distinguen principalmente líneas de metales neutros y de moléculas como el TiO (óxido de titanio).
- **estrellas M** - Son tan frías que en su espectro podemos encontrar profundas bandas de absorción molecular de TiO y VO (óxido de vanadio), así como líneas de metales neutros.

Cada clase se subdivide a su vez en diez subclases, de 0 a 9, de forma que una estrella B9 está junto a una A0, por ejemplo. Llamamos de tipo temprano y tardío a las estrellas dentro de una subclase (o de una clase a otra) dependiendo de si son más calientes o más frías respectivamente. Por ejemplo, las estrellas A0 y A1 son de tipo A temprano, mientras que las estrellas G, K y M son de tipo tardío. Las estrellas de tipo tardío son mucho más frecuentes que las de tipo temprano, lo que es el resultado de (i) la relación entre los tipos espectrales y las masas estelares, (ii) la vida mucho más corta de las estrellas más masivas y (iii) la función de masa inicial (FMI a.k.a., véase el capítulo ??), que es la distribución de las masas estelares al nacer. Desde las estrellas de tipo O hasta las de tipo M, la tasa de aparición en la vecindad solar es aproximadamente, en %,  $3 \cdot 10^{-5}$ , 0,1, 1, 3, 8, 12, 75.

### Color-magnitud

El diagrama color-magnitud es la forma más observacional de trazar el diagrama H-R, ya que representamos cantidades medidas cuyos valores dependen de una cantidad limitada de suposiciones y modelos. Cuando consideramos sólo las estrellas de una de las dos Nubes de Magallanes, o de un cúmulo estelar (véase más adelante la sección "Evolución estelar"), ni siquiera necesitamos la priorización de las distancias, ya que todas las estrellas consideradas se encuentran aproximadamente a la misma distancia de la Tierra.

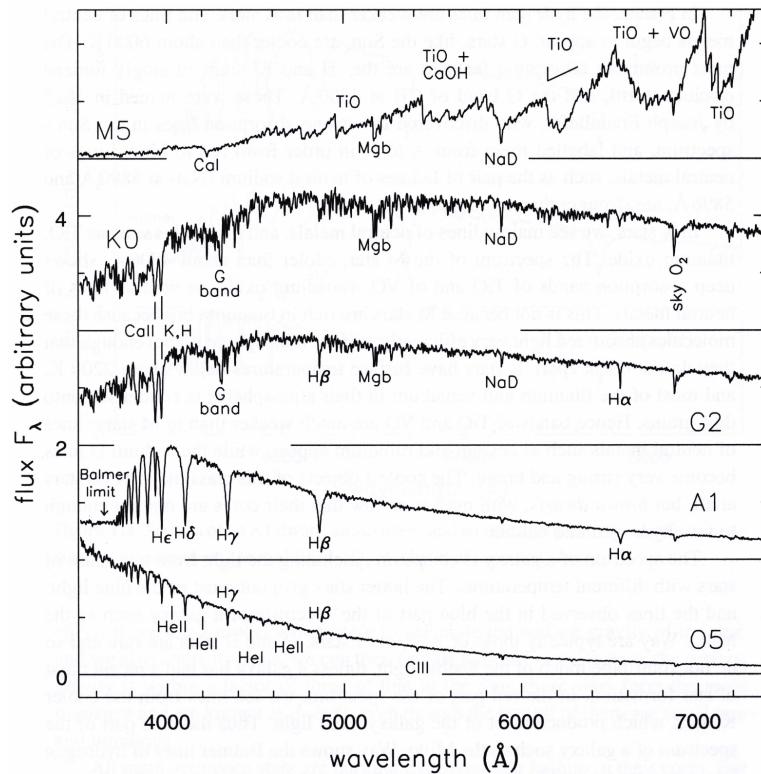


FIGURE 1.4: Espectros estelares ópticos de estrellas de la secuencia principal con aproximadamente la misma composición química pero con temperatura efectiva creciente de arriba a abajo.

type	temp. (kK)	examples	absorption line features	
O	> 30	$\zeta$ Ophiuchi (O9.5)	ionized He, weak H	
B	30 – 10	Alkaid (B3)	neutral He, moderate H	
A	10 – 7.5	Altair (A7)	strong H	
F	7.5 – 6	Porrima (F0)	moderate Ca, moderate H	
G	6 – 5	$\tau$ Ceti (G8)	strong Ca, weak H	
K	5 – 3.5	Ran (K2)	neutral & ionized metals	
M	2.5 – 3.5	AX Microscopii (M0)	molecules	

FIGURE 1.5: Tipos espectrales y sus principales propiedades. Los ejemplos son estrellas de la secuencia principal.

## Luminosity classes

Paralelamente a los tipos espectrales, que es esencialmente una categorización espectroscópica, las estrellas se subdividen en clases de luminosidad, que es esencialmente una categorización fotométrica:

- class I (supergiants), further subdivided into Ia and Ib, less luminous
- class II (bright giants)
- class III (giants)
- class IV (subgiants)
- class V (dwarf stars, also known as main-sequence stars since most stars belong to this category)
- class VI (subdwarfs)
- class VII (white dwarfs)

A menudo se añaden pequeñas mayúsculas a las clases de luminosidad, en función de la aparición de características específicas de las líneas espectrales. Por ejemplo, cuando las líneas de Balmer se observan en emisión (en lugar de en absorción), se añade la letra "e" detrás de la clase de luminosidad, y las estrellas calientes con líneas NIII y HeII en emisión obtienen una "f".

La secuencia anterior está ordenada según el aumento de la anchura de las líneas de absorción, que traza su gravedad superficial  $g = GM/R^2$ : mientras que las estrellas de clase I están poco ligadas gravitatoriamente, con velocidades de escape superficiales muy bajas, las estrellas de clase V son estructuras mucho más fuertemente ligadas. Las estrellas tienen masas que varían dentro de  $\sim 2,5$  órdenes de magnitud, mientras que su radio puede variar dentro de más de 6 órdenes de magnitud desde enanas blancas hasta supergigantes rojas. Por tanto, y dado que la dependencia de  $g$  respecto a  $R$  es más fuerte que respecto a  $M$ , la variación de la gravedad superficial en las estrellas se debe esencialmente al amplio rango de radios, lo que explica por qué las llamamos clases de *luminosidad* (ya que  $L \propto R^2$ ). En la figura 1.7, representamos la ubicación de las clases de luminosidad en el diagrama de Hertzsprung-Russell (líneas continuas). En la tabla 1.1 se muestran algunos ejemplos de estrellas que no pertenecen a la secuencia principal con su tipopectral y clase de luminosidad.

La clasificaciónpectral abarca tanto el tipopectral como la clase de luminosidad. Puede realizarse de forma cualitativa, mediante inspección visual de los espectros, o de forma más cuantitativa, basándose en los índices de color, las temperaturas efectivas y de color y la intensidad de las líneas de absorción.

### Spectral classification of the Sun

Con una luminosidad  $L_\odot$  (i.e. una magnitud absoluta de 4,8) y un índice de color B-V de 0,66 (i.e. una temperatura efectiva de 5780 K), el Sol es una estrella de tipo spectral G2V (localícela en los diagramas H-R).

examples	spectral type	luminosity class
Rigel	B8	Ia (blue supergiant)
Deneb	A2	Ia (blue-white supergiant)
Polaris	F7	Ib (yellow supergiant)
Sadalmelik	G2	Ib (yellow supergiant)
Arcturus	K1.5	III (red giant)
Betelgeuse	M2	Iab (red supergiant)

TABLE 1.1: Non-main sequence stars with their spectral types and luminosity class.

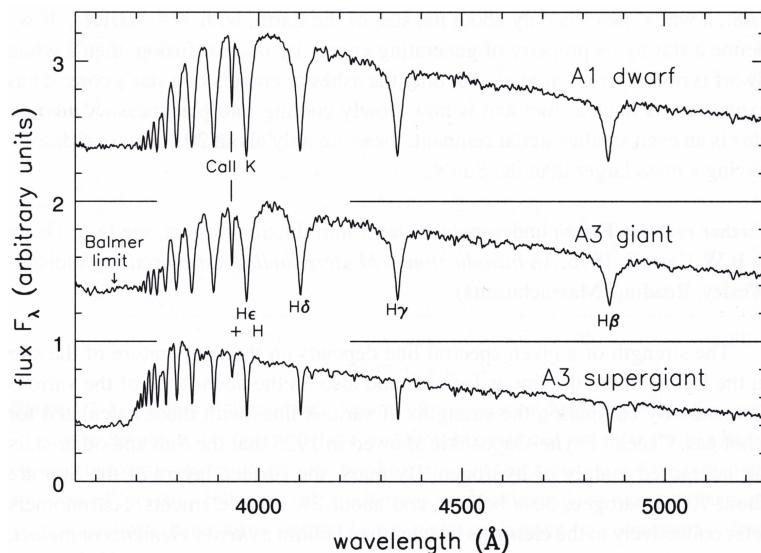


FIGURE 1.6: Espectros estelares de estrellas A pertenecientes a 3 clases de luminosidad diferentes. El continuo y las líneas de absorción son muy similares porque pertenecen al mismo tipo espectral, pero las líneas de absorción son mucho más estrechas en el espectro de la supergigante (panel inferior) que en el de la estrella de secuencia principal (panel superior).

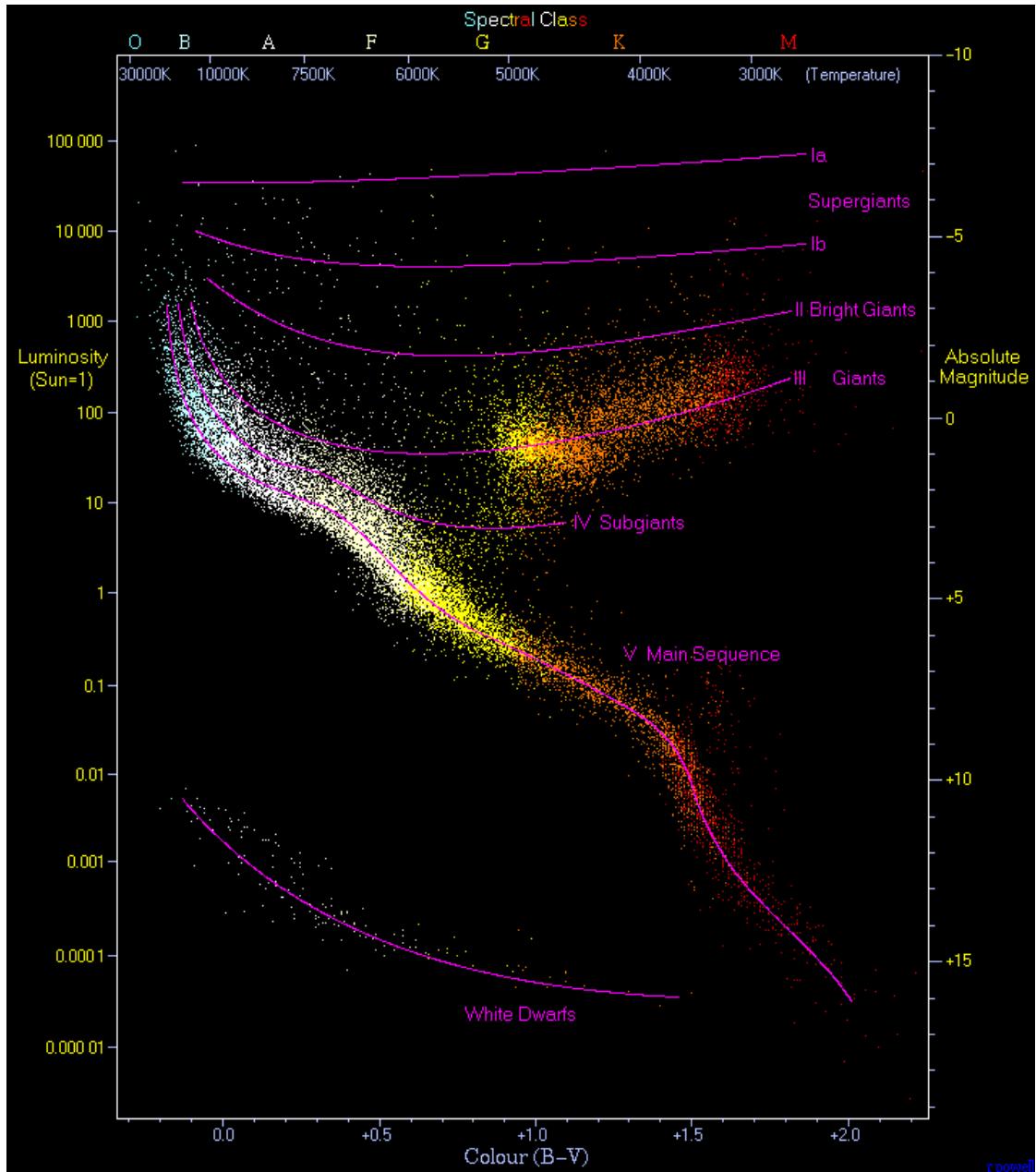


FIGURE 1.7: Clases de luminosidad en el diagrama de Hertzsprung-Russell, con 22.000 estrellas trazadas a partir del Catálogo Hipparcos y 1.000 a partir del Catálogo Gliese de estrellas cercanas.

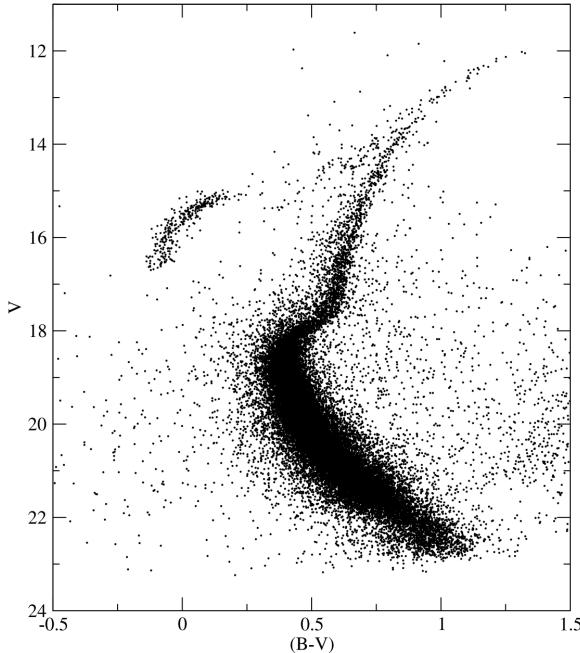


FIGURE 1.8: H-R diagram of the globular cluster M55 (from Paust et al., 2007)

### Luminosity-temperature

### Luminosity-radius relation

### Stellar evolution

Como se ha mencionado en la introducción de este capítulo, el diagrama H-R es especialmente revelador cuando consideramos una muestra uniforme de estrellas (es decir, una población estelar simple). En este sentido, los cúmulos estelares son sistemas reveladores. Son grupos de estrellas a pequeña escala, comúnmente divididos en:

- Contienen estrellas con una amplia gama de luminosidades, incluidas las muy brillantes. Además, están poco ligados gravitatoriamente y se encuentran esencialmente en el plano de la Vía Láctea, a unos pocos kiloparsec de la Tierra.
- No contienen las estrellas más brillantes observadas en los cúmulos abiertos. Están fuertemente ligados gravitacionalmente y se encuentran más lejos del plano de la Vía Láctea, en el halo galáctico alrededor del centro de nuestra galaxia.

En la Fig. 1.8, representamos el diagrama H-R de las estrellas del cúmulo globular M55. El eje  $y$  es la magnitud aparente, no la absoluta, pero no es un problema ya que todas las estrellas de este cúmulo están aproximadamente a la misma distancia de la Tierra, y sólo nos interesa la forma de la distribución. Todas las estrellas de un cúmulo estelar determinado suelen compartir una composición química común, ya que proceden del mismo entorno localizado. En consecuencia, representan una muestra uniforme de estrellas que sólo se diferencian entre sí por su masa. XXX Punto de inflexión en el diagrama H-R => a partir de cierta luminosidad y temperatura, la secuencia principal se trunca. En cambio, las estrellas de alta luminosidad y baja temperatura están sobrerepresentadas, lo que se interpreta como que: las propiedades estelares cambian con el tiempo, y cuanto más brillante es la estrella, más rápida es su evolución, ya que las estrellas de un cúmulo se formaron al mismo tiempo, en unos pocos millones de años.

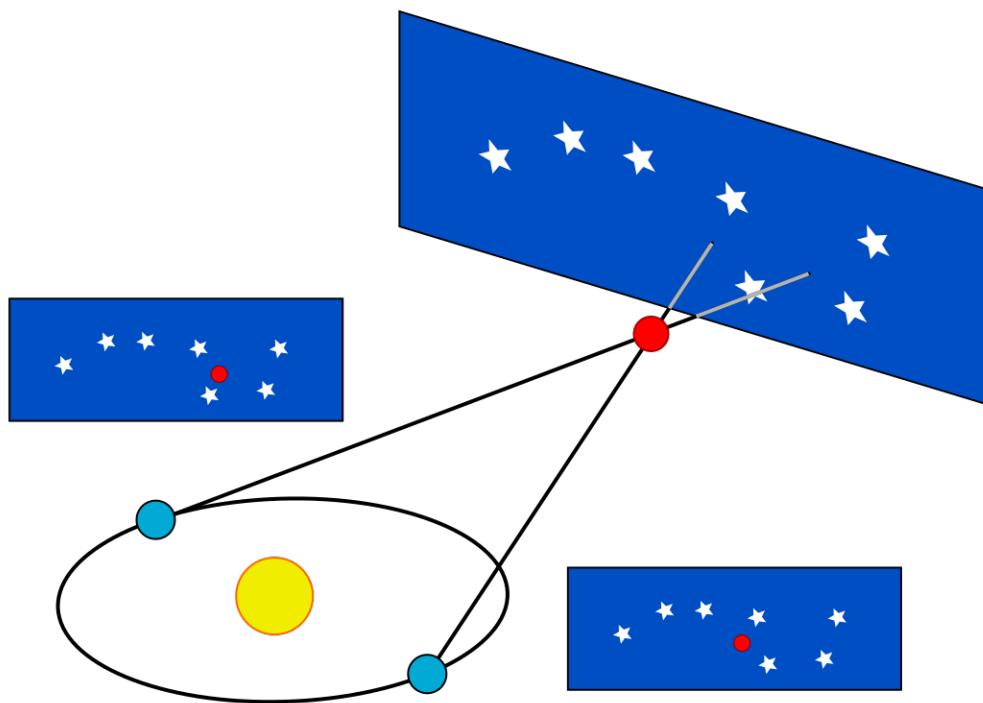


FIGURE 1.9: Una estrella en primer plano (en rojo), inmóvil con respecto al Sol, se mueve con respecto a un fondo (en azul), también inmóvil con respecto al Sol, debido al movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Se supone que los objetos del fondo están tan lejos que su movimiento aparente es despreciable.

## 1.2 Distances

### 1.2.1 Parallax

XX

### 1.2.2 Variable stars

RR Lyrae

Cepheids

### 1.2.3 Main sequence fitting

### 1.2.4 Beyond infinity

Type Ia supernovae

Hubble law

## 1.3 Stellar masses

### 1.3.1 The two-body problem

### 1.3.2 Visual binaries



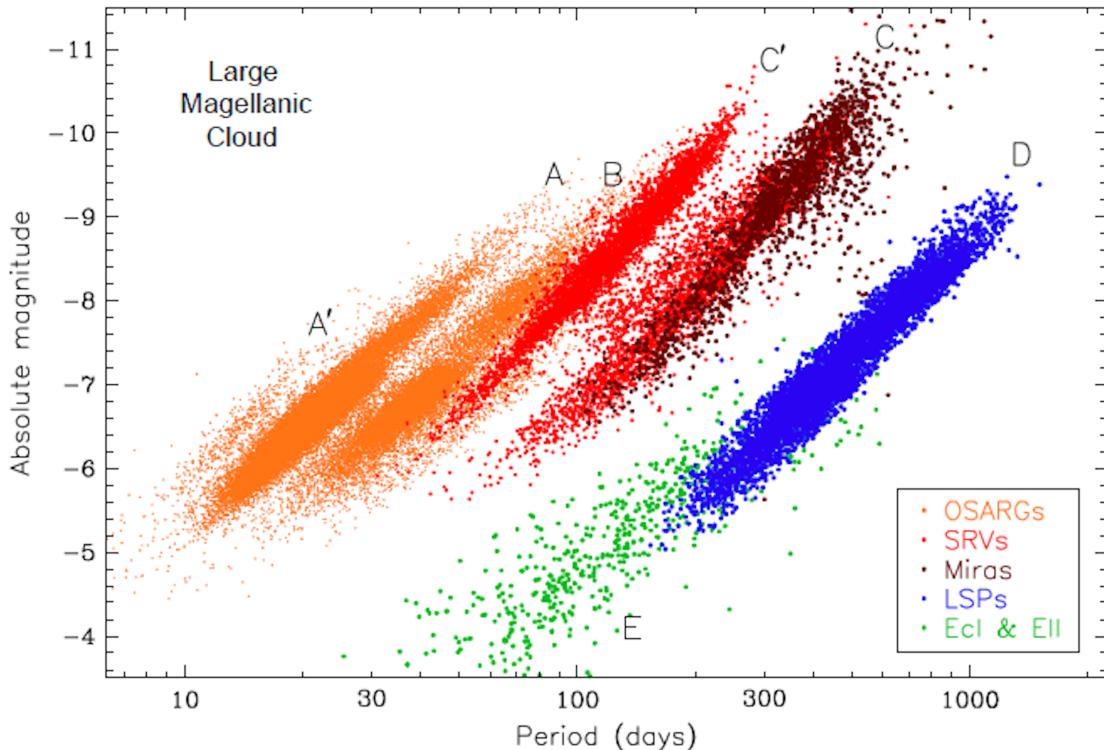


FIGURE 1.10: Diagrama periodo-luminosidad de las estrellas variables de la Gran Nube de Magallanes. La magnitud absoluta es la variación pico a pico de la luminosidad estelar a lo largo de su ciclo. Los distintos colores corresponden a diferentes tipos de gigantes rojas variables.

### 1.3.3 Spectroscopic binaries

## 1.4 Stellar radii

### 1.4.1 Spectro-photometric measure

Si las estrellas fueran cuerpos negros perfectamente esféricos, la temperatura y la distancia bastarían para deducir su radio a partir de la ley de Stefan-Boltzmann. Sin embargo, (i) las estrellas no son cuerpos negros perfectos, (ii) las distancias son difíciles de medir con precisión y (iii) las estrellas no son perfectamente esféricas. Aun así, este enfoque espectrofotométrico (ya que utiliza la temperatura efectiva, deducida del espectro, y la luminosidad, de la fotometría) puede resultar fructífero. XXX

Surface gravity (/=density)

### 1.4.2 Angular size

For red giants and supergiants ( $R > \text{a few } 100R_{\odot}$ ). If the distance is also known, a direct measurement of the radius is possible.

#### Effective temperature measure

Show that the knowledge of the angular size  $\theta$  of a star and of its bolometric apparent magnitude  $m$  is enough to directly deduce its effective temperature, without information on its distance.

### 1.4.3 Eclipsing binaries

# **Part I**

## **Mechanical equilibrium**

# Chapter 2

## Mecánica de fluidos

### 2.1 Fluidos

#### 2.1.1 Estados fundamentales de la materia

Los estados de la materia a los que solemos referirnos como "estados fundamentales" son:

- sólidos: los átomos y/o moléculas están fuertemente unidos entre sí mediante fuertes interacciones (por ejemplo, enlaces iónicos, covalentes, metálicos y moleculares). Cada partícula oscila con baja amplitud en torno a una posición de equilibrio, de modo que el sistema se comporta como una red de osciladores armónicos acoplados: en promedio, la energía potencial de interacción es elevada en comparación con la energía cinética de las partículas. Se trata de un estado compacto y estructurado del que se ocupan, entre otros, la cristalográfia y la física del estado sólido.
- gas: los átomos y/o moléculas están poco ligados mediante interacciones electrostáticas (por ejemplo, van der Waals) y son muy móviles: en promedio, la energía potencial de interacción es baja en comparación con la energía cinética de las partículas. Se trata de un estado expandido y desorganizado del que se ocupan, entre otros, la hidrodinámica y la teoría cinética.
- líquidos: es un estado compacto pero desorganizado en el que los átomos y/o las moléculas están lo suficientemente unidos como para producir tensión superficial a escala macroscópica, por ejemplo, pero siguen presentando movimiento browniano a escala microscópica: en promedio, la energía potencial de interacción es comparable a la energía cinética de las partículas. Se trata de un estado intermedio, entre sólido y gaseoso, que requiere una presión mínima (véase el diagrama  $P-T$  en termodinámica) y, por tanto, es bastante raro en el Universo.
- plasmas: similar a los gases, pero compuesta por cargas de iones, electrones y/o positrones debidas a la interacción con un campo radiativo ionizante (por ejemplo, de una estrella masiva). Su dinámica está perfectamente relacionada con la de los campos electromagnéticos que genera (mediante las ecuaciones de Maxwell-Ampère y Maxwell-Gauss) y siente (mediante la fuerza de Lorentz). Dependiendo de lo colisionado y magnetizado que esté el plasma, puede describirse mediante diversos formalismos (por ejemplo, magnetohidrodinámica y sin fuerzas).

Debido a su forma continuamente cambiante bajo la acción de fuerzas externas, los gases, líquidos y plasmas se denominan comúnmente "fluidos". Los sólidos y los líquidos son fases "condensadas" debido a su mayor densidad y a las interacciones más fuertes entre las partículas.

Hay que reconocer que estas definiciones son algo laxas y que existen otros estados más allá de estos fundamentales. Por ejemplo, (i) el estado vítreo puede pensarse como un estado líquido

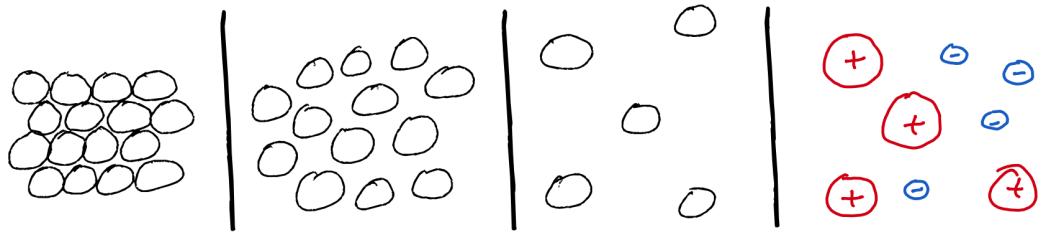


FIGURE 2.1: Representación esquemática de los estados fundamentales de la materia, de izquierdo a derecha: sólido, líquido, gas y plasma.

congelado, (ii) los fluidos complejos comparten propiedades comunes a diferentes estados fundamentales y (iii) en su estado sólido, el Hierro puede transitar de una forma alotrópica a otra, lo que puede interpretarse como un cambio de estado.

	densidad ( $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ )	structurado?	conductividad	campos
<b>solidos</b>	# 1	yes	alta	cristallography, solid state physics
<b>liquidos</b>	# 1	no	alta	hydrodynamics, statistical mechanics
<b>gas</b>	$\# 10^{-3}$	no	baja	hydro., stat. mechanics, kinetic theory
<b>plasma</b>	variable	no	alta	plasma theory

TABLE 2.1: Principales propiedades de los cuatro estados fundamentales de la materia.

### Escalas cinéticas

Supongamos que un fluido se modela como una colección de partículas identificadas con puntos que se mueven a la misma velocidad  $v$  pero en diferentes direcciones (por ejemplo, las partículas cargadas de Fig 2.2).

1. Expresar la distancia media  $d$  entre partículas en función de  $n$ .
2. Suponiendo que las partículas interactúan a través de la fuerza electrostática, podemos introducir un parámetro de impacto crítico  $b$  por debajo del cual la trayectoria de una partícula incidente se desvía significativamente. Esto define el tamaño efectivo de la partícula y un  $\sigma$  de sección transversal asociado. Estimar  $b$  para una masa de prueba cargada desviada por una carga  $Q$ . Expresar  $\sigma$  en función de  $b$ .
3. Definimos el camino libre medio  $l$  como la distancia típica que recorre una partícula entre dos interacciones con otras partículas. Expresar  $l$  en función de  $n$  y de la sección transversal  $\sigma$ .
4. Después de  $N$  interacciones, ¿cuál es, en promedio, la longitud recorrida por una partícula?

La energía cinética por partícula viene dada por  $3k_B T/2$ , donde  $T$  es la temperatura del gas y  $k_B$  es la constante de Boltzmann (sección 4.19). Tomemos una nube de humo de cigarrillo y modelémosla como esferas duras de radio  $r$  cada una. La densidad numérica típica de partículas  $n$  en el humo de los cigarrillos es del orden de  $10^{10}\text{cm}^{-3}$ .

1. En este modelo en el que las partículas son esferas duras y en el que se desprecian las interacciones electrostáticas, ¿cuál es la sección transversal  $\sigma$ ?
2. Estimar la velocidad de difusión  $\tau$  definida como  $L/\dot{L}$ , donde  $L$  es el tamaño de la nube de humo - véase la ecuación (2.2).
3. Deducir el tamaño típico  $r$  de las partículas de polvo.

**Jeans atmospheric escape** es un modelo que describe cómo las partículas atmosféricas se difunden lejos en el espacio. Una vez que te sientas cómodo con el concepto matemático de distribución, una noción central de la mecánica estadística, podrás estimar la escala de tiempo característica de este proceso en la atmósfera terrestre. Sin reposición mediante fotosíntesis, ¿con qué rapidez se evaporaría el dioxígeno? ¿Es la presencia de dioxígeno en una atmósfera planetaria un buen indicador de vida?

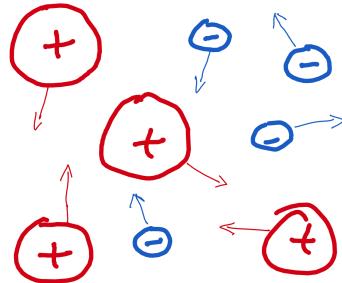


FIGURE 2.2: Colección de partículas cargadas positiva y negativamente con su velocidad.

### 2.1.2 Equilibrio térmico local

Dependiendo de la longitud relativa del camino libre medio  $l$  en comparación con la distancia media entre partículas  $d$ , los gases y plasmas pueden ser colisionales ( $l < d$ ) o no ( $l > d$ ). En el primer caso, las partículas interactúan tan rápidamente que comparten su información individual con las demás. Por ejemplo, si una partícula fuera acelerada por una fuente externa a una velocidad mucho mayor que la de sus compañeras, redistribuiría rápidamente su energía cinética adicional a las otras partículas a través de interacciones electrostáticas.<sup>1</sup> Esta es la razón por la que la distribución energética de la energía cinética de las partículas  $E_K$  en un fluido colisional (no relativista clásico) se describe siempre mediante una distribución maxwelliana cuyo parámetro principal, relacionado con la desviación estándar de la velocidad de las partículas, corresponde a la temperatura. Cualquier desviación de esta distribución (por ejemplo, la distribución  $\kappa$  o la ley de potencia) se debe a la falta de colisionalidad. Así pues, en un fluido sin colisiones, hay que tener mucho cuidado al invocar nociones termodinámicas como la temperatura y la presión. Por el contrario, si el fluido es colisional, podemos suponer que el fluido  $\Sigma$  está en equilibrio termodinámico local definido como:

$$\forall M \in \Sigma \quad E_K \text{ is a Maxwellian distribution of temperature } T(M) \quad (2.1)$$

Incluso en un entorno sin colisiones, las partículas podrían seguir compartiendo información a través de un soporte intermedio (por ejemplo, líneas de campo magnético) y exhibir algún comportamiento colectivo (por ejemplo, superfluidez).

### 2.1.3 Aproximación de fluidos

Para determinar si un gas o plasma puede tratarse como un medio continuo, necesitamos comparar las escalas microscópica y macroscópica. La primera suele venir dada por el camino libre medio  $l$  mientras que la segunda es la escala de longitud característica  $L$  a la que varían significativamente las magnitudes físicas que queremos medir<sup>2</sup>:

$$L = \left\langle \left[ \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right]^{-1} \right\rangle_x \quad \text{with} \quad \begin{cases} A = \text{density, flow speed, pressure, temperature...} \\ \langle \dots \rangle_x : \text{average over the size of the system} \end{cases} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>La escala temporal típica a lo largo de la cual las partículas interactúan debe compararse con la escala temporal del proceso que estamos estudiando (por ejemplo, aquí, la aceleración de partículas): un fluido dado puede ser colisional o no dependiendo de la duración del fenómeno que estudiemos.

<sup>2</sup>Puede ser el tamaño del sistema o la longitud de onda de una onda, por ejemplo.

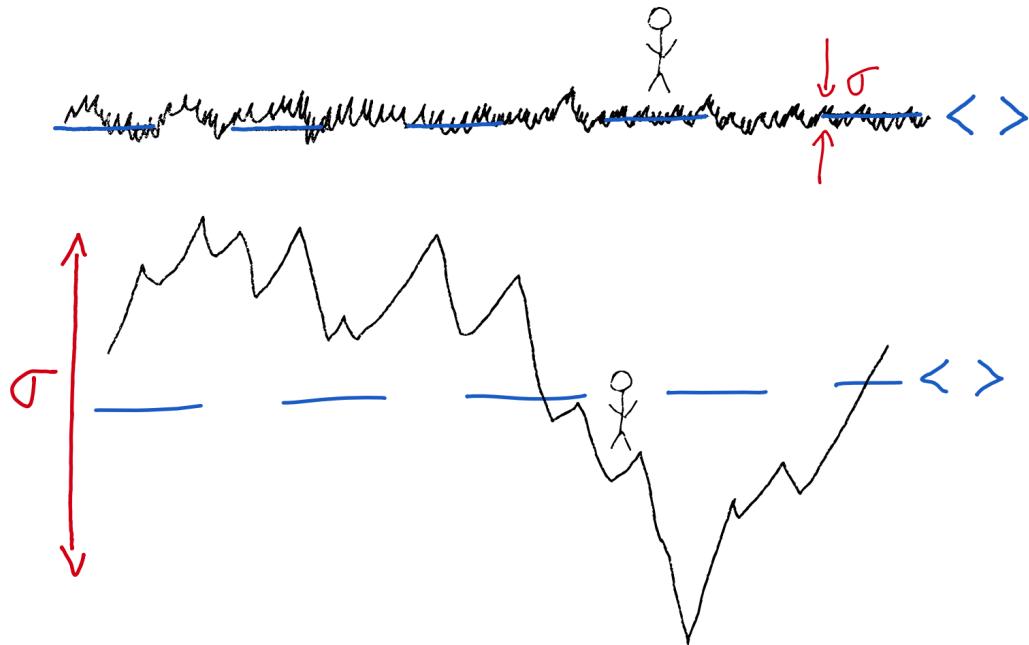


FIGURE 2.3: Dos señales con diferente variación relativa (a.k.a. dispersión relativa)  $\sigma / \langle \rangle$  y longitudes de correlación (i.e. escala de longitud típica de variación de la señal). Dependiendo de la amplitud de la escala de longitud de correlación y de la dispersión  $\sigma$  en comparación con la escala observada (representada por un personaje de dibujos animados), las variaciones pueden interpretarse como ruido estocástico (panel superior), irrelevante para los fenómenos que queremos estudiar, o fuentes relevantes de información (panel inferior).

Aquí, el significado de "significativamente" se manifiesta a través de la derivada de un logaritmo  $\frac{dA}{A} = d\ln A$ , una función que, en su esencia, capta los cambios en órdenes de magnitud desde  $1 = \log 10, 2 = \log 100\dots$ . Véase también el ejercicio "Estrella que pierde masa" en la sección 2.6 para una ilustración.

Podemos hacer la aproximación del fluido si  $l \ll L$  y que así podemos definir una escala intermedia  $\delta$ , llamada escala mesoscópica, como  $l \ll \delta \ll L$ . En este caso

- $l \ll \delta$  garantiza que cualquier subvolumen de tamaño mesoscópico contiene suficientes partículas como para suavizar las variaciones estocásticas, tratarlas como ruido despreciable y centrarse en el valor medio de las magnitudes físicas (densidad, velocidad, etc.) de este subvolumen (Fig.2.3, panel superior).
- El elemento  $\delta \ll L$  garantiza que, a escala macroscópica, los volúmenes mesoscópicos son tan pequeños que las magnitudes físicas pueden tratarse como funciones continuas  $A(\mathbf{r}, t)$ , que deben interpretarse como promedios sobre el volumen mesoscópico (Fig.2.3, panel inferior).

### Partículas fluidas

En la aproximación de fluidos, una partícula de fluido es una región localizada de volumen mesoscópico y masa constante. Su forma y volumen pueden evolucionar, y las partículas que contiene pueden cambiar debido a la difusión a través de su superficie virtual cerrada, pero su masa sigue siendo la misma (Fig 2.4).



FIGURE 2.4: En un entorno abarrotado como un atasco de tráfico o el cruce de Shibuya, podemos definir partículas fluidas mesoscópicas que contienen muchos elementos individuales (por ejemplo, coches o personas), mientras que son mucho más pequeñas que el sistema en su conjunto (timelapse disponible aquí).

Existe una forma matemáticamente rigurosa de derivar el formalismo de fluidos a partir del formalismo cinético más ab initio, basada en el teorema del límite central aplicado a la ecuación de Boltzmann en el límite de un gran número de partículas por partícula de fluido.

### Cantidades extensivas/intensivas

En el formalismo de fluidos, las magnitudes se definen a partir de infinitesimales y condiciones locales (Figure reffig:fig5), al contrario que en la teoría cinética, donde los componentes fundamentales (por ejemplo, puntos o esferas duras) no tienen estructura interna (Figure reffig:fig6). Las magnitudes extensivas (resp. intensivas) son aquellas que dependen linealmente (resp. no dependen linealmente) del tamaño del sistema, como el número de partículas  $N$ , el volumen  $V$ , la carga eléctrica  $Q$ , la masa  $M$ , la entropía  $S$  o la capacidad calorífica isocórica  $C_V$  (resp. la temperatura  $T$ , el número de partículas  $C_V$ , la carga eléctrica  $Q$ , la masa  $M$ , la entropía  $S$  o la capacidad calorífica isocórica  $C_V$ ). La temperatura  $T$ , la densidad numérica  $n$ , la densidad de cargas eléctricas  $\rho_q$ , la densidad de masa  $\rho$ , la capacidad calorífica isocórica por unidad de volumen). Las cantidades intensivas suelen definirse como cocientes de infinitesimales, por ejemplo la densidad numérica  $n$ :

$$n = \frac{dN}{dV} \quad (2.3)$$

Es más significativo interpretarlas como cocientes que como derivadas. Aquí,  $n(\mathbf{r})$  es el número infinitesimal  $dN$  de partículas por volumen infinitesimal  $dV$  alrededor del lugar considerado  $\mathbf{r}$ , en lugar de la derivada de la función  $N(V)$ . Por otra parte, las cantidades extensivas se definen típicamente como integrales de volumen de cantidades intensivas, por

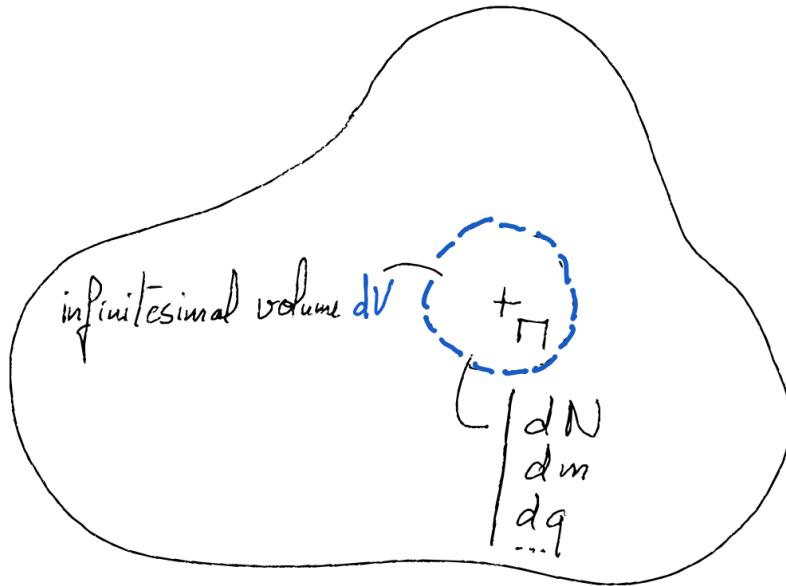


FIGURE 2.5: Representación esquemática de un volumen infinitesimal  $dV$  que encapsula un número infinitesimal de partículas  $dN$ , una cantidad infinitesimal de masa  $dm$ , etc.

ejemplo el número de partículas  $N$  dentro de un volumen  $V$  dado:

$$N = \iiint_V n(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} \quad (2.4)$$

El modo en que se combinan las variables extensivas e intensivas obedece a reglas, del mismo modo que las ecuaciones tienen que respetar la homogeneidad dimensional. Por ejemplo, el producto de una variable extensiva por una intensiva da necesariamente una variable extensiva. Las variables extensivas son aditivas (es decir,  $A_{1\cup 2} = A_1 + A_2$ ), no las intensivas.

## 2.2 Enfoques euleriano y lagrangiano

En mecánica clásica, se estudiaba la dinámica de un sistema cuyo movimiento puede describirse satisfactoriamente bien reduciéndolo a un único punto, normalmente su baricentro. El objetivo de la mayoría de los problemas era determinar la evolución temporal de la posición de este punto,  $\mathbf{R}(t)$ . Todas las propiedades del sistema (por ejemplo, su masa o su carga eléctrica) estaban ligadas a este punto. En cualquier momento  $t$ , sólo existían en el lugar  $\mathbf{R}(t)$ . En mecánica de fluidos, el sistema no puede reducirse a un punto. Existen dos enfoques diferentes para apreciar la evolución de las magnitudes físicas en un fluido. El enfoque lagrangiano es algo más intuitivo pero menos conveniente a efectos de manipulación matemática. El enfoque euleriano no tiene equivalente en la mecánica de puntos, pero está particularmente adaptado a la descripción de un medio continuo como un fluido, ya que se basa en la noción de campo (Fig.2.6).

### 2.2.1 Descripción lagrangiana

Es en cierto modo equivalente al formalismo adoptado en la mecánica puntual, salvo que aquí la partícula fluida desempeña el papel del punto. Seguimos la evolución de sus propiedades

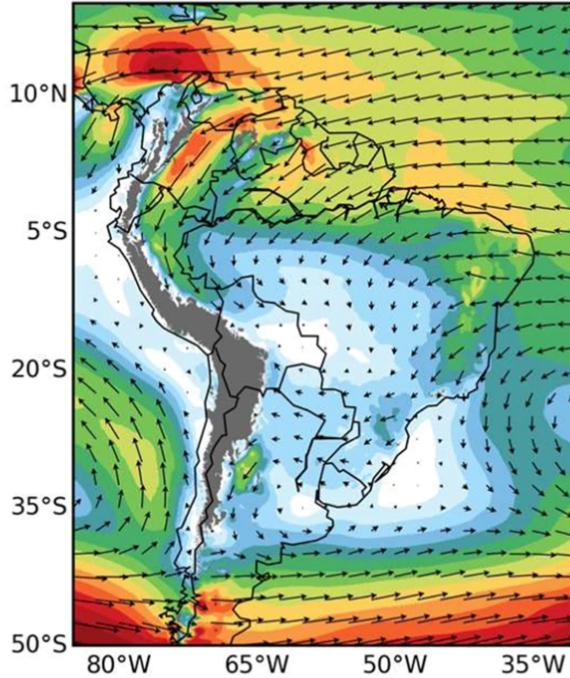


FIGURE 2.6: Mapa de los vientos y temperaturas en Abya Yala. Este último es un campo escalar, que puede representarse como un mapa de colores, y el primero es un campo vectorial, representado con flechas cuya longitud y orientación corresponden a la magnitud y dirección locales del vector.

en el tiempo y a lo largo de su trayectoria dada por  $\mathbf{R}(t)$ :

$$X [\mathbf{R}(t), t] \quad \text{with } X = \text{temperature, density, pressure...} \quad (2.5)$$

Es necesario especificar la dependencia de ambas variables,  $t$  y  $\mathbf{R}(t)$ , ya que  $X$  podría cambiar debido a una modificación intrínseca del tiempo del campo de fondo, incluso si la partícula de fluido no se mueve (i.e.  $\mathbf{v} = 0$ ), o debido a una modificación del valor de  $X$  muestreado localmente por el fluido mientras se mueve, incluso si el campo de fondo está en estado estacionario (i.e.  $\partial_t X = 0$ ).

Para apreciar mejor este último aspecto, considere saltar de un avión (con un paracaídas funcional). En altura, la temperatura es más baja que en el suelo al que finalmente llegará, sano y salvo (Fig.2.7).

Aquí, la temperatura  $T(z, t)$  es un campo escalar, no la temperatura de un sistema o la temperatura en un punto dado.

Por una razón inexplicable, usted sostiene un termómetro y decide informar de la temperatura a medida que cae. Si el campo de temperatura de fondo no cambia (i.e.  $\partial_t T = 0$ ), entonces, usted seguirá midiendo una temperatura variable, pero puramente debido a su movimiento a medida que cae. La derivada en el tiempo de la temperatura a lo largo de su trayectoria,  $T[z(t)]$  es entonces dada por:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dz} \frac{dz}{dt} = v \cdot d_z T \quad \text{where } \begin{cases} v = \dot{z} \text{ is your speed} \\ \text{we used the chain rule for derivatives} \end{cases} \quad (2.6)$$

A la inversa, imaginemos que el perfil de temperatura no depende de la altitud  $z$ : la atmósfera es isotérmica (Fig.2.8). Sin embargo, al descender de  $z_1$  a  $z_2 < z_1$ , el perfil de

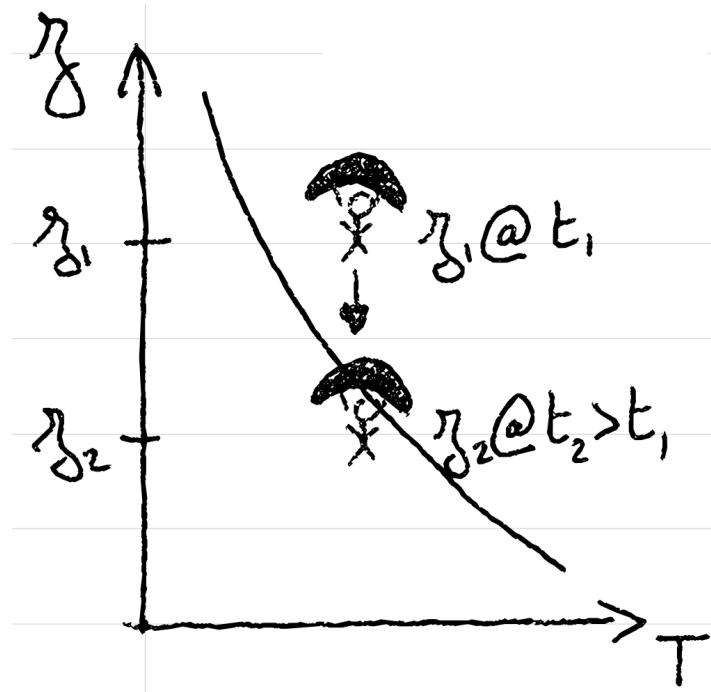


FIGURE 2.7: A medida que el observador cae, la temperatura que mide varía debido al perfil de temperatura de fondo no uniforme (i.e.  $\partial_z T \neq 0$ ) que no varía en el tiempo (i.e.  $\partial_t T = 0$ ).

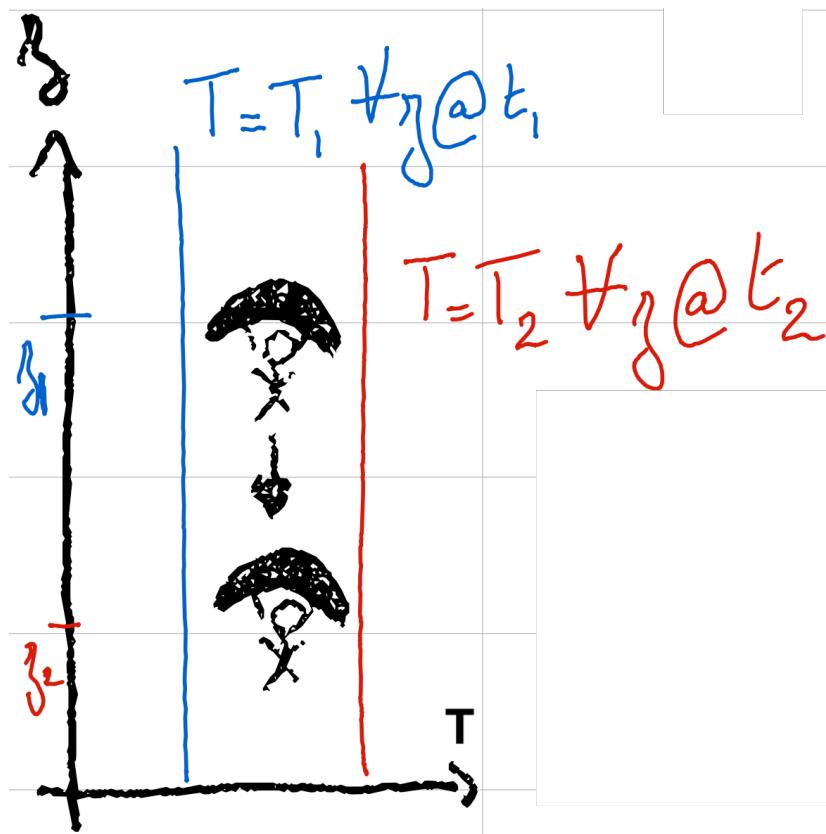


FIGURE 2.8: Esta vez, el perfil de temperatura de fondo (en azul y rojo) es uniforme pero varía entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ .

temperatura aumenta de  $T_1$  a  $T_2 > T_1$  permaneciendo uniforme en todo momento (i.e.  $\forall$  todo  $t \quad \partial_z T = 0$ ). Por lo tanto, la derivada en el tiempo de la temperatura su medida está dada ahora por:

$$d_t T = \partial_t T \quad (\text{since } T \text{ is a function of time only}) \quad (2.7)$$

y no depende de su velocidad de caída. Ahora podemos combinar los dos efectos y suponer que el perfil de temperatura no uniforme en Fig. 2.7 cambia en el tiempo, y obtenemos el operador lagrangiano derivativo  $D\mathbf{T}/Dt$ :

$$\frac{DT}{Dt} = \partial_t T + \mathbf{v} \cdot d_z T \quad (2.8)$$

En 3D, se define para cualquier campo escalar o vectorial  $A(\mathbf{r}, t)$  con el operador nabla (a.k.a. del)  $\nabla$ :

$$\frac{DA}{Dt} = \partial_t A + (\mathbf{v} \cdot \nabla) A \quad (2.9)$$

En la ecuación (??),  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$  es un operador, como la divergencia  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  y el rizo  $\nabla \wedge \mathbf{A}$  de un campo vectorial  $\mathbf{A}$ , o el gradiente  $\nabla A$  de un campo escalar  $A$ . Puede aplicarse a un campo escalar o vectorial (e.g.,  $\rho$  o  $\mathbf{v}$ ). En coordenadas cartesianas, se escribe, para un campo escalar  $A$ :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) A = v_x \partial_x A + v_y \partial_y A + v_z \partial_z A \quad (2.10)$$

y para un campo vectorial  $\mathbf{A}$ :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_x \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_y \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_z \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

en la base cartesiana ( $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$ ,  $\hat{\mathbf{z}}$ ), donde  $v_{i \in \{x,y,z\}}$  y  $A_{i \in \{x,y,z\}}$  son las componentes de la velocidad  $\mathbf{v}$  y del campo vectorial  $\mathbf{A}$  en esta base.

### Una atmósfera engañosa

Es importante tener en cuenta que la derivada lagrangiana de un campo puede ser nula aunque el campo no sea estacionario ni uniforme. Como ilustración, consideremos el siguiente perfil de temperatura representado en Fig 2.7:

$$T(z) = T_0 \exp^{-z/H} \quad \text{with } T_0 \text{ and } H \text{ constant temperature and length.} \quad (2.12)$$

En primer lugar, supongamos que este perfil no depende del tiempo y que el paracaídas no es tan fiable como pensabas al principio. Sabiendo que has saltado desde una altitud  $z(t=0) = Z$  con velocidad cero, tu caída libre viene dada por:

$$\begin{cases} z(t) = -gt^2/2 + Z \\ v(t) = -gt \end{cases} \quad (2.13)$$

En cualquier momento  $t$ , la derivada temporal de la temperatura que se mide es así:

$$D_t T = v \cdot \partial_z T \stackrel{\tau=\sqrt{\frac{H}{g}}}{=} \frac{T_0}{\tau} \cdot \frac{t}{\tau} \exp^{(Z-gt^2/2)/H} > 0 \quad (2.14)$$

Ahora, cabría preguntarse cuál sería la dependencia temporal necesaria en el perfil de temperatura (2.12) para engañarle y hacerle medir una temperatura constante a medida que cae, aunque el perfil de temperatura depende tanto del espacio como del tiempo. Escribamos el nuevo perfil de temperatura  $\theta(z, t)$  como un producto entre una componente espacial y una componente temporal:

$$\theta(z, t) = f(t) \cdot T(z) \quad (2.15)$$

donde  $T(z)$  viene dado por (2.12) y  $f(t)$  encierra la dependencia del tiempo que buscamos. Entonces:

$$\begin{aligned} D_t \theta = 0 &\iff \dot{f} \cdot T = -v \cdot f \cdot T' \\ &\iff -\frac{1}{v} \frac{\dot{f}}{f} = \frac{T'}{T} \end{aligned} \quad (2.16)$$

In (2.16), las left hand side (resp. las right hand side) dependen sólo del tiempo (resp. del espacio). Esto sólo es posible si ambos son constantes. Reinyectando  $T$  y  $T'$  de (2.12), obtenemos:

$$-\frac{1}{v} \frac{\dot{f}}{f} = \frac{T'}{T} = -\frac{1}{H} - \frac{\dot{f}}{f} = \frac{gt}{H} f(t) = f_0 \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

y deducimos la constante de integración  $f_0$  de suponer que  $\theta(z, 0) = T(z)$ :

$$\theta(z, t) = T_0 \exp^{-z/H} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 \right] \quad (2.18)$$

## KWW 1.1 2.2.2 Descripción euleriana

Heredado de la teoría de campos, este enfoque sugiere observar las propiedades del fluido como campos  $X(\mathbf{r}, t)$  directamente. Esta vez, no seguimos las partículas del fluido individualmente, por lo que  $\mathbf{r}$  y  $t$  son variables independientes. El campo  $X(\mathbf{r}, t)$  debe interpretarse



FIGURE 2.9: Descripción euleriana (panel izquierdo), en la que la región del espacio donde se miden los valores es fija, y descripción lagrangiana (panel derecho), en la que los valores se miden a medida que nos movemos con la partícula de fluido.

como la propiedad de la partícula de fluido que se encuentra en la posición  $r$  en el tiempo  $t$  (Fig. 2.9).

Las leyes físicas (por ejemplo, la segunda ley de Newton) suelen aplicarse a sistemas cerrados, por lo que siempre debemos considerar una partícula de fluido en movimiento (en lugar de un subvolumen estático, por ejemplo). Las derivadas temporales de la mecánica de fluidos son, por tanto, derivadas lagrangianas por defecto cuando adoptamos un punto de vista euleriano.

### KWW 1.2 2.2.3 Coordenada de masa

P 1.3 24-25

L 5.2 162

En las estrellas 1D con simetría esférica consideradas en esta clase, las partículas de fluido son finas cáscaras cuya posición viene dada en su totalidad por la distancia  $r$  al centro. Sin embargo, a veces es más conveniente basarse en una coordenada alternativa, la masa  $m$  contenida en la esfera de radio  $r$ :

$$m(r) = \iiint_V \rho dV \stackrel{\text{sph. sym.}}{=} 4\pi \int_{x=0}^{x=r} \rho x^2 dx \quad (2.19)$$

que da, en forma diferencial, la cantidad infinitesimal de masa  $dm$  en la envoltura de coordenada radial  $r$  y espesor  $dr$ :

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr \quad (2.20)$$

A continuación, se puede demostrar que la transformación de coordenadas se puede realizar utilizando (véase KWW 1.2 para una derivación rigurosa):

$$\partial_r \cdot = 4\pi r^2 \rho \partial_m \cdot \quad (2.21) \quad \text{P p.25}$$

## KWW 1.1 2.3 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad (a.k.a. ecuación de conservación de la masa) describe cómo evoluciona la masa en el tiempo.

### 2.3.1 En 1D cartesiana/axisimétrica

En primer lugar, estudiemos un caso con campos 1D en una geometría axisimétrica (o, equivalentemente, cartesiana) (Fig.).

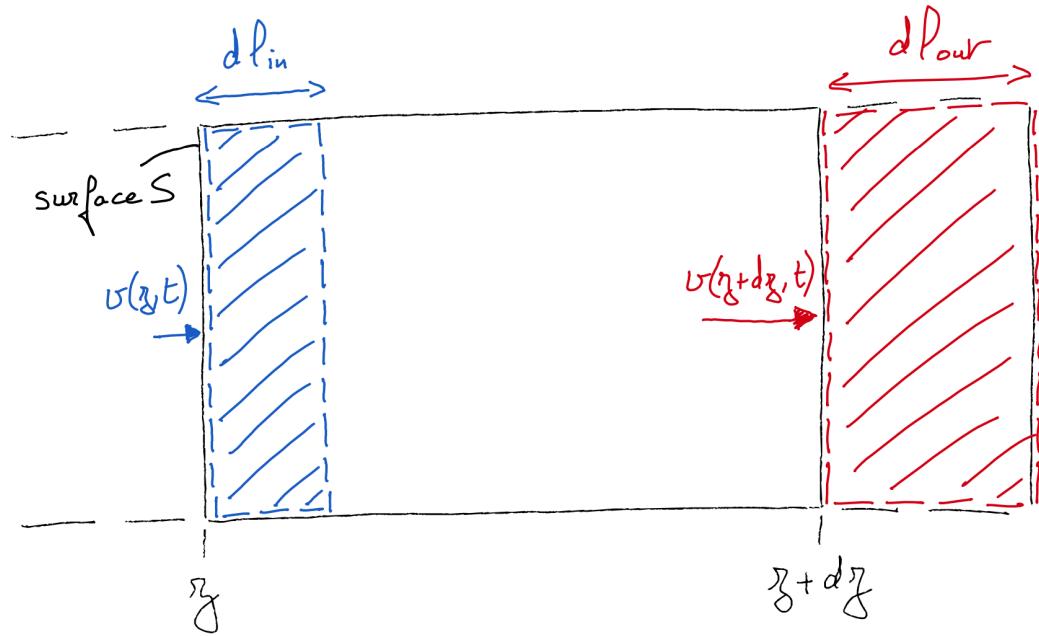


FIGURE 2.10: Volumen infinitesimal  $dV = S dz$  contenido entre dos superficies  $S$  separadas por  $dz$ . El volumen barrido por el material entrante (resp. saliente) se representa en azul (resp. en rojo).

reffig:fig7). Queremos evaluar la variación de mas dentro del volumen infinitesimal  $dV = S dz$  a lo largo de un lapso de tiempo infinitesimal  $dt$ .

Según Fig 2.16, tenemos las siguientes longitudes infinitesimales de entrada y salida respectivamente (si  $v > 0$ ):

$$\begin{cases} dl_{in} = v(z, t) \cdot dt \\ dl_{out} = v(z + dz, t) \cdot dt \end{cases} \quad (2.22)$$

Entonces si notamos  $dm(t)$  la cantidad infinitesimal de masa en el tiempo  $t$  dentro del volumen infinitesimal  $dV$ , tenemos:

$$\begin{aligned} dm(t + dt) - dm(t) &= \rho(z, t) \cdot S \cdot dl_{in} - \rho(z + dz, t) \cdot S \cdot dl_{out} \\ d^2m &= \rho(z, t) \cdot v(z, t) \cdot S \cdot dt - \rho(z + dz, t) \cdot v(z + dz, t) \cdot S \cdot dt \\ d^2m &= -\frac{\partial(\rho v)}{\partial z} \cdot S \cdot dz \cdot dt \\ \partial_t \rho + \partial_z(\rho v) &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Esta es la ecuación de continuidad en 1D.

Esta demostración sólo es válida si, en el volumen considerado,  $\rho$  y  $v$  son funciones continuas del espacio. A través de un choque, por ejemplo, la forma diferencial (2.23) una ecuación de continuidad debería sustituirse por una integral y obtendríamos, en estado estacionario:  $\rho v|_{\text{upstream}} = \rho v|_{\text{downstream}}$ . Para una generalización hidrodinámica, véase Rankine-Hugoniot jump conditions at shock.

### 2.3.2 In 3D

i.m. XXX Consideraremos ahora este volumen fiducial  $V$  centrado alrededor del punto situado en  $\mathbf{r}$  y delimitado por la superficie virtual cerrada  $S$  (línea discontinua en Fig. 2.11). La masa  $m$

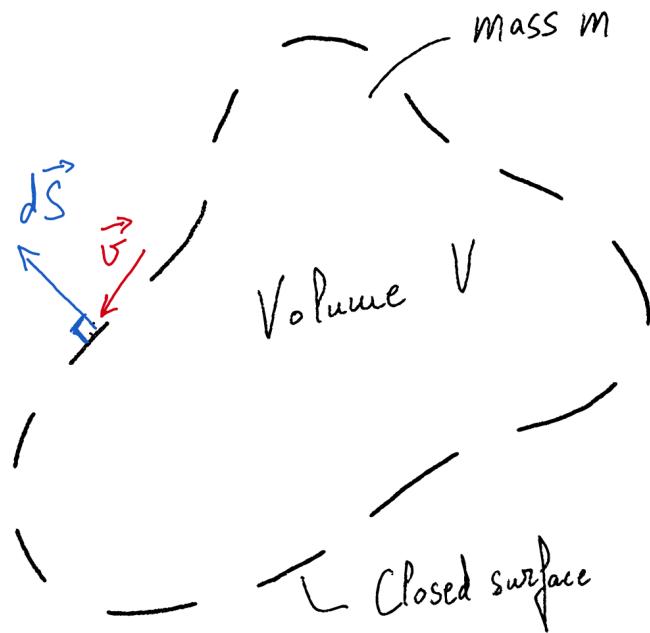


FIGURE 2.11: Volumen arbitrario  $V$  rodeado por una superficie cerrada  $S$ . El vector  $dS$  asociado al elemento infinitesimal  $dS$  de la superficie está en azul, y la velocidad en este punto en rojo.

encerrada en este volumen  $V$  es:

$$m = \iiint_V \rho dV \quad (2.24)$$

y:

$$d_t m = \iiint_V \partial_t \rho dV \quad (2.25)$$

Por otro lado, si no se produce ni se destruye masa (e.g., a través de reacciones nucleares, véase capítulo ??), entonces, esta variación se debe exclusivamente a entradas y salidas en la superficie  $S$ :

$$d_t m = - \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d^2 \mathbf{S} \quad (2.26)$$

donde el signo menos en las right hand side es porque  $d^2 \mathbf{S}$  apunta hacia afuera.

El producto escalar  $\mathbf{v} \cdot d^2 \mathbf{S}$  indica que la única componente de velocidad relevante para el flujo de entrada/salida a través de la superficie infinitesimal  $dS$  es la normal a esta superficie.

Aplicamos el teorema de divergencia de Green-Ostrogradski a (2.26) y obtenemos:

$$d_t m = \iiint_V [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] dV \quad (2.27)$$

Entonces, con (2.25):

$$\iiint_V [\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] dV = 0 \quad (2.28)$$

Si esta igualdad es cierta para cualquier volumen  $V$ , y que  $\rho$  y  $\mathbf{v}$  son funciones continuas del espacio, entonces:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.29)$$

En efecto, tomemos una función 1D  $f(x)$ . Entonces,  $\int_a^b f(x)dx = 0$  no implica que  $\forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0$  (ver por ejemplo Fig ??), excepto si  $\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \forall (a, b)$ .

Si  $\rho$  y  $\mathbf{v}$  no son funciones continuas del espacio (e.g., debido a un choque), entonces (2.28) sigue siendo válida pero no (2.29). Aunque menos elegante, la versión integrada de las leyes conservativas es más general que sus contrapartes diferenciales.

### 2.3.3 En 1D spherically symmetric

Para un fluido esféricamente simétrico en estado estacionario (i.e.  $\partial_t \mathbf{v} = 0$ ) y en equilibrio hidrostático (i.e.  $v = 0$ ), la ecuación de continuidad se verifica automáticamente y no aporta ninguna información. En su lugar, nos detendremos en el primer paso del razonamiento de la sección anterior 2.3.2, donde evaluamos la cantidad infinitesimal de masa  $dm$  contenida en el volumen entre las esferas de radio  $r$  y  $r + dr$ :

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr \quad \text{since} \quad \begin{cases} \rho = dm/dV \\ dV = 4\pi r^2 dr \end{cases} \quad (2.30)$$

Recuperamos (2.20) de la sección 2.2.3, que servirá como ecuación de continuidad para conectar:

$$\begin{aligned} &\rho(r) \text{ and } m(r), \text{ with } r \text{ as coordinate} \\ &\text{or} \\ &\rho(m) \text{ and } r(m), \text{ with } m \text{ as coordinate} \end{aligned} \quad (2.31)$$

## 2.4 Hydroestática

### 2.4.1 Fuerzas de superficie y de volumen

Las fuerzas que se ejercen sobre una partícula fluida son dos:

- Las fuerzas de volumen se ejercen sobre todo el volumen de la partícula fluida. Por ejemplo, el peso, las pseudofuerzas no iniciales (centrífuga y de Coriolis) y la fuerza de Lorentz (si el fluido está cargado eléctricamente) son fuerzas de volumen.
- Las fuerzas superficiales ejercen sólo sobre la superficie de la partícula fluida. Por ejemplo, el rozamiento es una fuerza superficial. Para los fluidos, solemos llamar "presión" a las fuerzas normales a la superficie y "viscosidad" a las tangenciales a la superficie.

Las fuerzas superficiales pueden expresarse como fuerzas de volumen cuando se trabaja con un volumen infinitesimal, como veremos en la sección 2.4.2.

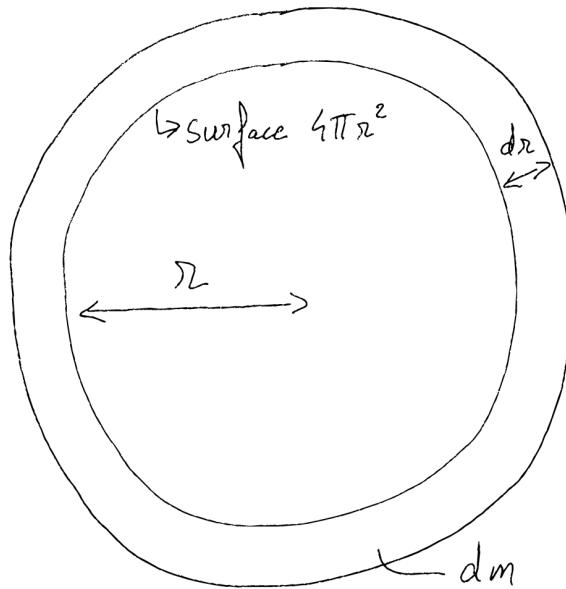


FIGURE 2.12: Casco esférico de radio  $r$  y espesor infinitesimal  $dr$  cuyo volumen es  $dV = 4\pi r^2 dr$ .

### 2.4.2 Fuerza de presión

#### 2.4.3 Definición

Sea una partícula fluida en reposo. Entonces, la fuerza de presión infinitesimal  $d^2\mathbf{F}$  ejercida por el fluido circundante sobre la superficie infinitesimal  $dS$  de la partícula fluida viene dada por (Fig.2.13):

$$d^2\mathbf{F} = P d^2\mathbf{S} \quad (2.32)$$

where  $P$  is the (isotropic) pressure.

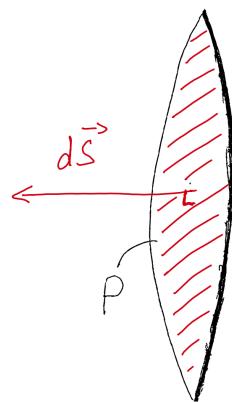


FIGURE 2.13: Elemento de superficie infinitesimal  $dS$  y su vector, normal a la superficie. La presión  $P$  en este punto es la fuerza aplicada por unidad de superficie infinitesimal.

## The salad bowl

Sea una semiesfera hueca de radio  $R$  y masa  $M$  sobre un plano horizontal (Fig. 2.14). En su parte superior vertemos agua (en azul) a través de un agujero.

1. ¿Cuál es la dirección de la fuerza de presión total sobre la esfera?
2. Expresa esta fuerza en función de la cantidad de agua en la esfera. ¿Cuándo es lo suficientemente alta como para levantar la semiesfera?

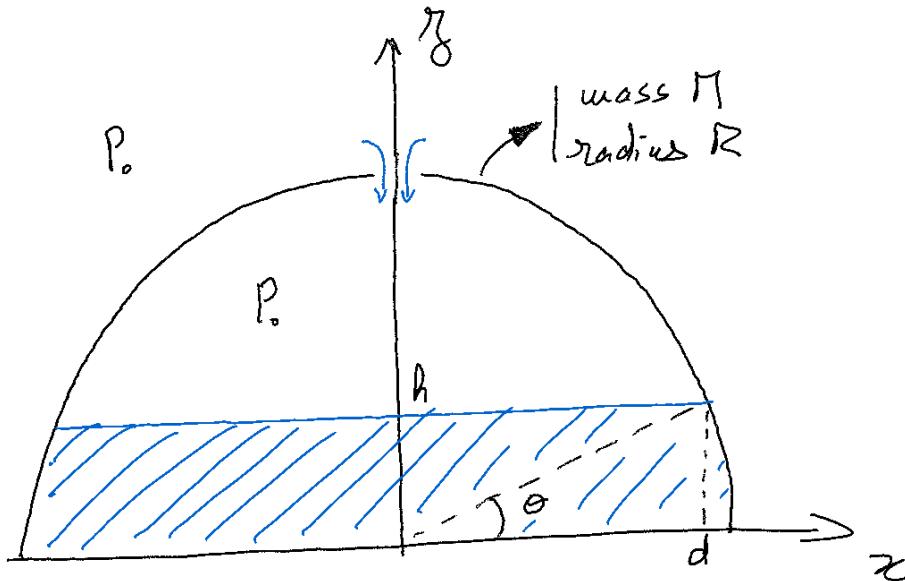


FIGURE 2.14: Media concha de radio  $R$  y masa  $M$  en un plano horizontal. Inicialmente está hueca pero vertemos agua (en azul) por una abertura en la parte superior.

## Expresión volumétrica de la fuerza de presión

Sea un volumen infinitesimal  $dV$  en coordenadas cartesianas (Fig. 2.15). Podemos escribir las fuerzas de presión aplicadas a cada una de sus 6 superficies. Por ejemplo, a lo largo del eje  $\hat{x}$ :

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{x}} &= P(x, y, z)dydz - P(x + dx, y, z)dydz \\ d^2\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{x}} &= -\partial_x P \underbrace{dxdydz}_{=dV} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Así que la fuerza de presión total  $\mathbf{f}$  aplicada por unidad de volumen viene dada por:

$$\mathbf{f} = \frac{d^2\mathbf{F}}{dV} = -\nabla P \quad (2.34)$$

Alternativamente, podemos expresar la fuerza de presión como una fuerza por unidad de masa:

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (2.35)$$

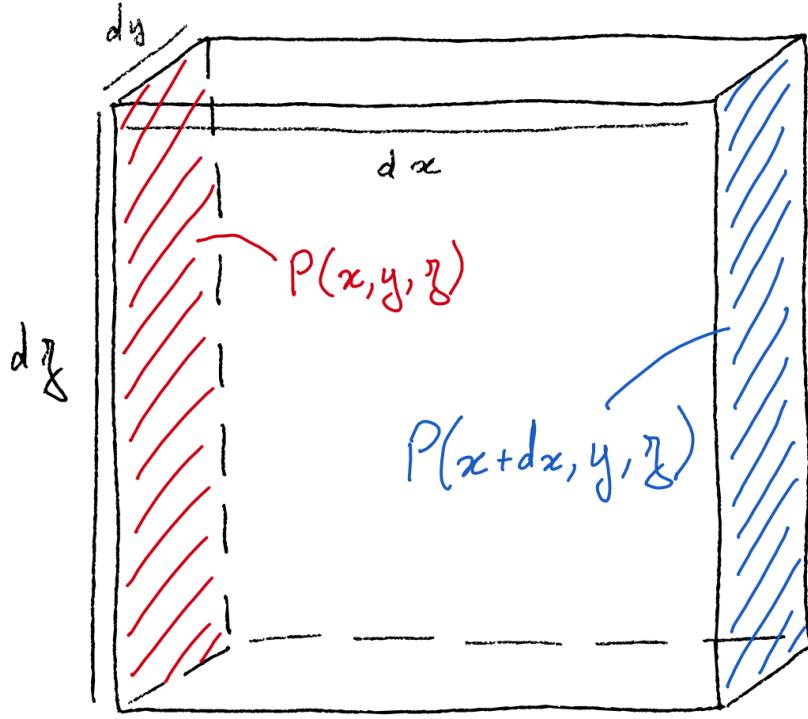


FIGURE 2.15: Volumen infinitesimal  $dV = dx dy dz$  en coordenadas cartesianas, con la presión mostrada en dos de las seis superficies (en  $x$  en rojo y en  $x + dx$  en azul).

#### 2.4.4 Ley fundamental de la hidrostática

Para un fluido continuo en reposo en un marco galileano y en un campo gravitatorio  $\mathbf{g}$ , tenemos la siguiente ley fundamental de la hidrostática:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{grav}} + \mathbf{f}_{\text{press}} &= \mathbf{0} \\ \nabla P &= \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2.36)$$

##### 1D Cartesian case

Para  $\mathbf{g}$  uniforme y con el eje  $\hat{\mathbf{z}}$  apuntando en la dirección opuesta, tenemos, después de la proyección sobre el eje  $\hat{\mathbf{x}}$  y  $\hat{\mathbf{y}}$ :

$$\begin{aligned} (2.36) \cdot \hat{\mathbf{x}} : \partial_x P &= 0 \\ (2.36) \cdot \hat{\mathbf{y}} : \partial_y P &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Así que la presión  $P$  depende sólo de  $z$  y:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (2.38)$$

#### 2.4.5 Plane parallel atmospheres

We commonly call “atmosphere” a shell of gas on a spherical celestial body (e.g., a planet, a star or a white dwarf). If its thickness  $H$  (which corresponds to the characteristic length scale of the density, pressure and temperature profiles for instance) is much smaller than the

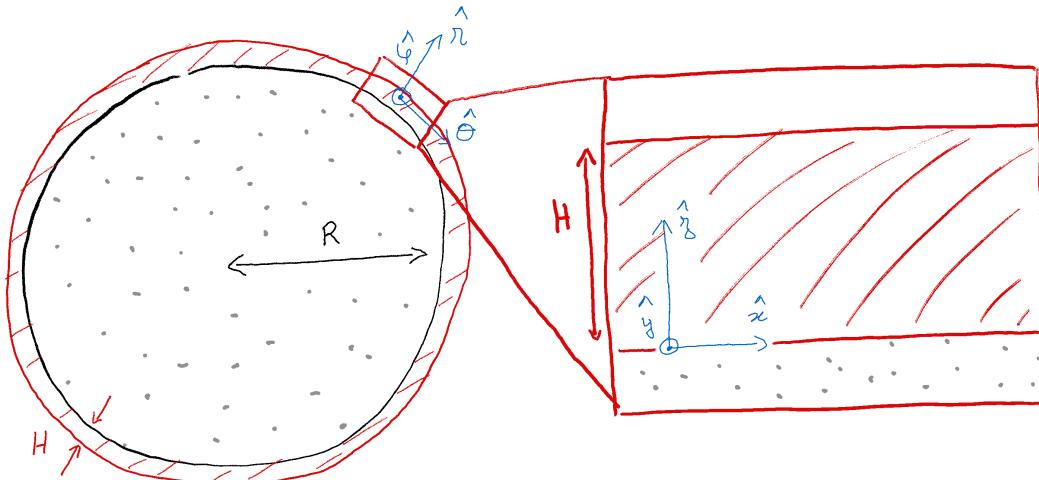


FIGURE 2.16: (left panel) Global spherical geometry. (right panel) Local slab geometry.

radius of the underlying body, we can locally assume that the atmosphere has the same geometry as a slab: instead of working in spherical coordinates, we neglect the curvature and locally, we work in Cartesian coordinates (Fig 2.16). This is called the plane-parallel approximation. In the plane-parallel approximation, we can safely assume that the gravitational field  $\mathcal{G}$  is uniform over the vertical extent of the atmosphere:

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) \sim g \quad \text{with } g = \text{cst} \quad (2.39)$$

On Earth, the atmosphere's thickness  $H_{\oplus}$  is of the order of 10kms, orders of magnitude smaller than the Earth's radius  $R_{\oplus}$ , which justifies the plane-parallel approximation. The projection of the hydrostatic equilibrium on the vertical axis oriented upwards yields equation (2.38).

The plane-parallel atmosphere approximation (like the shallow water approximation) is commonly used in climatology (see global climate models), weather forecast and oceanology. It considerably simplifies the equations and provides an accurate description of the hydrodynamics in Cartesian tiles over a transverse extent of a few 100 kilometers.

In the exercises below, we solve this equation - i.e. we determine  $P(z)$  - in a few specific cases, using the boundary conditions  $P = P_0$  and  $\rho = \rho_0$  at  $z = 0$ , with the origin of the  $z$ -axis set at the sea level. In all of these exercises, the Earth's atmosphere is assumed to be an ideal gas whose mass density  $\rho$ , pressure  $P$  and temperature  $T$  are linked through the equation-of-state of ideal gases:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{k_B T}{\mu m_p} \quad (2.40)$$

where  $\mu$  is the mean molecular weight of the atmosphere, which is the average mass of a molecule in units of  $m_p$ .

#### Atmospheric mean molecular weight

The Earth's atmosphere is mostly composed of  $N_2$  and  $O_2$ .  $N_2$  (resp.  $O_2$ ) represents  $\alpha_N = 78\%$  (resp.  $\alpha_O = 21\%$ ) in mass, and each atom of  $N_2$  contains  $A_N = 14$  nucleons (resp. each atom of  $O_2$  contains  $A_O = 16$  nucleons). Determine  $\mu$  in the atmosphere, assuming that the composition of the atmosphere does not change with the altitude  $z$ .

### Isothermal

1. Assuming that the temperature of the atmosphere is uniform ( $T = T_0$ ), what are the profiles of mass density  $\rho(z)$  and pressure  $P(z)$ ?
2. Determine the characteristic length scale  $H_{\oplus}$  of these profiles (a.k.a. the atmospheric scale height).
3. For  $T = 300\text{K}$  and  $g = |\mathbf{g}| = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ , evaluate  $H_{\oplus}$  and validate a posteriori the estimate you made in question I.1.

### Linear

In practice, the temperature of the atmosphere drops with the altitude. To represent this, we assume a linear temperature profile:

$$T(z) = T_0 - \alpha z \quad (2.41)$$

where  $\alpha$  is a constant  $> 0$  and  $T_0 = \frac{\mu m_p}{k_B} \frac{P_0}{\rho_0}$  is the temperature at  $z = 0$ .

1. What are the new profiles of density  $\rho(z)$  and pressure  $P(z)$ , expressed as a function of  $T_0$  and  $\alpha$ ?
2. Is the scale height uniform? If not, what is its profile  $H(z)$ ?
3. The temperature is  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  at sea level and  $T_1 = -60^\circ\text{C}$  at the top of the troposphere located at  $z_1 = 10\text{km}$ . Determine the numerical value of  $\alpha$ .

### Square-root

Alternatively, we consider the following temperature profile:

$$T(z) = T_0 \sqrt{1 - \alpha z} \quad (2.42)$$

where  $\alpha$  is a constant  $> 0$  and  $T_0$  is the temperature at  $z = 0$ .

1. What are the new profiles of density  $\rho(z)$  and pressure  $P(z)$ ?
2. Is the scale height uniform? If not, what is its profile  $H(z)$ ?
3. Determine the new numerical value of  $\alpha$  from the data of question I.3.c.iii.

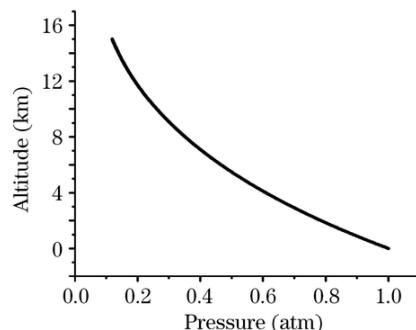


FIGURE 2.17: Altitude as a function of the pressure  $z(P)$  in the Earth's troposphere.

### Isentropic

If atmospheric thermodynamic processes are adiabatic (i.e. no heat exchange,  $\delta Q = 0$ ) and mechanically reversible (i.e. no entropy created due to dissipative processes as shocks), then, we can assume that the entropy of the ideal gas remains constant:

$$P\rho^{-\gamma} = \text{cst} \quad \text{with } \gamma \text{ the adiabatic index} \quad (2.43)$$

1. Reformulate the equation (2.43) in terms of  $P$  and  $T$  first, and  $\rho$  and  $T$  then. Said otherwise, express the exponents  $a, b, c$  and  $d$  as a function of  $\gamma$  such that  $P^a T^b = \text{cst}$  and  $\rho^c T^d = \text{cst}$ .
2. Determine the profiles  $\rho(z)$ ,  $P(z)$  and  $T(z)$ .
3. Compare these profiles to those obtained above from a linear temperature profile.

### Comparison to measures

The measured pressure profile in the Earth's troposphere is given in Fig. 2.17. Which of the 3 aforementioned models is the most accurate? You will use the free online tool [WebPlotDigitizer](#) to extract the data and fit it with the different profiles you found.

## KWW 2.1 2.4.6 La esfera hidrostática

2.2

2.3

En una configuración 1D esféricamente simétrica, el campo gravitatorio  $\mathbf{g}$  a un radio  $r$  depende sólo de la masa  $m(r)$  contenida dentro de la esfera de radio  $r$ :

P 2.3

L 2.2 36-38

5.2.1

5.2.2

La ley fundamental de la hidrostática (2.36) proyectada sobre  $\hat{\mathbf{r}}$  da:

$$-\rho \frac{Gm}{r^2} - d_r P = 0 \quad (2.45)$$

Utilizando la fórmula de la coordenada de masa (2.21), obtenemos:

$$dm P = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (2.46)$$

### Perfil de densidad explícito

Cuando la densidad es una función conocida del radio (o de la masa), podemos determinar por completo la estructura interna de la estrella, o al menos las variables relativas a su equilibrio mecánico (densidad y presión). Por ejemplo, supongamos que  $\rho$  viene dado por:

$$\rho = \rho_c \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad (2.47)$$

entre la superficie en  $R$  y el núcleo donde  $\rho = \rho_c$ .

1. Integrar la ecuación (2.30) para determinar la correspondiente distribución de masas en el interior de la estrella.
2. Resolver la ecuación hidrostática (2.45) anterior para obtener el perfil de presiones.
3. Suponiendo que tratamos con un gas ideal clásico y que la presión de radiación es despreciable (véase el capítulo
4. ), determinar el perfil de temperatura.

Aunque atractivo, este caso es bastante poco realista, ya que es difícil conocer de antemano el perfil de densidad interna de una estrella (aunque la astrofisiología proporcione información esclarecedora).

Otra situación específica en la que se pueden resolver las ecuaciones de equilibrio mecánico,(2.30) y (2.45) es cuando  $\rho$  es una función explícita de  $P$  solamente. Es el caso de los politropos, tratados en capítulos,3 y 5.

Podemos obtener una estimación aproximada de la presión en el centro de una estrella tomando:

$$\frac{dP}{dm} \sim \frac{P_c}{M} \quad \text{with} \quad \begin{cases} P_c = P(0) \text{ the pressure at the core} \\ M \text{ the total mass of the star} \end{cases} \quad (2.48)$$

En las right hand side de la ecuación (2.46), sustituimos  $m$  y  $r$  por los valores medios aproximados  $M/2$  y  $R/2$  y obtenemos:

$$P_c \sim \frac{2GM^2}{\pi R^4} \quad (2.49)$$

Suponiendo que la estrella está compuesta por un gas ideal (véanse las secciones 4.1 y 1.3) y que la densidad de masa media  $\langle\rho\rangle$  es, con  $R$  el radio estelar:

$$\langle\rho\rangle \sim \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (2.50)$$

entonces, obtenemos la temperatura en el centro de la estrella:

$$T_c \sim \frac{P_c \mu m_p}{\rho_c k_B} \quad (2.51)$$

siendo  $m_p$  la masa de un protón y  $k_B$  la constante física fundamental de la mecánica estadística, la constante de Boltzmann (ver apéndice C para sus valores en CGS). El peso molecular medio  $\mu$  representa la masa media por partícula, en unidades de masa atómica  $m_u \sim m_p$

(véase la sección 4.1.2). Para el hidrógeno totalmente ionizado,  $\mu = 0,5$  y:

$$T_c \sim \frac{4}{3} \frac{Gm_p}{k_B} \frac{M}{R} \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_c} < \frac{4}{3} \frac{Gm_p}{k_B} \frac{M}{R} \quad (2.52)$$

### The Sun

Con  $M_\odot \sim 2 \cdot 10^{33}$ g y  $R_\odot \sim 7 \cdot 10^{10}$ cm, podemos estimar la presión y la temperatura en el núcleo del Sol:

$$\begin{cases} P_{c,\odot} \sim 7 \cdot 10^{15} \text{dyn} \cdot \text{cm}^{-2} \\ T_{c,\odot} < 3 \cdot 10^7 \text{K} \end{cases} \quad (2.53)$$

## 2.5 Hydrodynamica

La ley fundamental de la hidrostática (2.36) no se aplica si las fuerzas de gravedad y presión no se anulan. En este caso, las partículas del fluido se aceleran. Si asumimos simetría esférica y nos basamos en un enfoque Lagrangiano y coordenadas de masa, podemos escribir la fuerza neta por unidad de volumen asociada a esta aceleración como:

$$\rho \cdot \partial_{tt} r \quad \text{with } r(t) \text{ the fluid particle's location} \quad (2.54)$$

Se denomina comúnmente término de inercia y es el equivalente en fluidos del conocido  $ma$  en mecánica puntual. Entonces, usando (2.21) para reescribir la fuerza de presión en coordenadas de masa, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento para las partículas de fluido:

$$\rho \cdot \partial_{tt} r = -\rho \frac{Gm}{r^2} - \underbrace{\partial_r P}_{4\pi r^2 \rho \partial_m P} \quad (2.55)$$

$$\partial_{tt} r = -\frac{Gm}{r^2} - 4\pi r^2 \partial_m P \quad (2.56)$$

## 2.6 Escalas de tiempo características

De manera similar a la forma en que definimos una escala de longitud característica de variación en (2.2), podemos definir una escala de tiempo característica  $\tau$  sobre la cual una cantidad  $A$  varía significativamente:

$$\tau = \left| \frac{\dot{A}}{\ddot{A}} \right| \quad (2.57)$$

Sean dos cantidades  $A$  y  $B$ , no necesariamente de la misma dimensión. Entonces:

$$A \text{ varies quicker than } B \iff \tau_A < \tau_B \quad (2.58)$$

Proporciona un enfoque conveniente para determinar qué fenómenos pueden aproximarse como estacionarios en comparación con otros.

## Estrella que pierde masa

1. Una estrella de masa  $M$  pierde masa a un ritmo constante  $\dot{M}$ . ¿Cuánto tardará en perder toda su masa?
2. Alternativamente, supongamos que la estrella pierde masa a un ritmo proporcional a la masa estelar instantánea  $M(t)$ , de forma similar a la desintegración radiactiva:

$$\dot{M} = -M/T \quad (2.59)$$

Entonces, ¿qué significa  $T$  en esta ecuación?

## KWW 2.4 14 2.6.1 Escala de tiempo de caída libre

P 2.8 52

En el caso hipotético de que la presión desapareciera repentinamente en la ecuación,(2.56), la distribución esféricamente simétrica de la materia se colapsaría bajo la acción de la gravedad, la única fuerza restante. Tendría lugar a lo largo de una escala temporal característica  $\tau_{\text{ff}}$  llamada escala temporal de caída libre (a.k.a. escala temporal dinámica) que puede estimarse aproximadamente fijando:

$$|\partial_{tt}r| \sim R/\tau_{\text{ff}}^2 \quad (2.60)$$

en las left hand side de,(2.56), con  $R$  el radio estelar. En este caso:

$$\tau_{\text{ff}} \sim \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (2.61)$$

Por tanto, la escala de tiempo de caída libre depende sólo de la densidad de masa media del cuerpo. Alternativamente, podemos utilizar (2.57) anterior con cantidades dinámicas típicas:

$$\begin{cases} A = R \\ \dot{A} = \dot{R} = v_{\text{ff}} = \sqrt{2GM/R} \end{cases} \quad (2.62)$$

para deducir  $\tau_{\text{ff}}$ .

## Free-fall time scale

KWW 27.1 and L 2.5 for 2 different changes of variables XXX

## 2.6.2 Escala de tiempo nuclear

Para estimar la escala de tiempo nuclear, tomemos por  $A$  la cantidad total de energía en masa de reposo disponible en una estrella de masa  $M$ ,  $Mc^2$ . Es la energía susceptible de ser parcialmente extraída mediante reacciones nucleares, con un factor adimensional de eficiencia  $\epsilon < 1$  que depende del tipo de reacción nuclear (véase la sección 5.2.2). Podemos estimar  $\dot{E}$  suponiendo que la estrella se encuentra en equilibrio térmico, es decir, que su luminosidad  $L$  transporta exactamente la energía liberada por las reacciones nucleares en el núcleo. De lo contrario, la energía interna de la estrella aumentaría si  $L < |\dot{E}|$ , ya que la energía se acumularía progresivamente en la estrella, y ésta no estaría en equilibrio térmico (lo mismo si  $L > |\dot{E}|$ ). Entonces, la escala de tiempo nuclear  $\tau_{\text{nuc}}$  es:

$$\tau_{\text{nuc}} \sim \frac{\epsilon Mc^2}{L} \quad (2.63)$$

### Esperanza de vida del Sol

Las principales reacciones durante la mayor fracción de la vida estelar son las que logran la fusión de cuatro protones en un núcleo de helio. Esta combustión de hidrógeno libera una energía de  $6,3 \cdot 10^{18} \text{ erg}\cdot\text{s}^{-1}$  que corresponde a un déficit de masa de  $\sim 0,75\%$  (i.e. la masa total de cuatro protones menos la masa de un núcleo de helio, dividida por la masa total de cuatro protones). ¿Cuánto tiempo puede el Sol quemar su combustible con su luminosidad actual?

# Chapter 3

## Polytropes - Part I

### 3.1 The polytropic relation

En este punto, tenemos dos ecuaciones para describir la estructura interna de una estrella esféricamente simétrica en equilibrio hidrostático: Estas ecuaciones nos dan la estructura

	in radial coordinates $r$	in mass coordinates $m$
<b>Continuity equation</b> (2.30)	$dm = 4\pi r^2 \rho dr$	$dr = \frac{dm}{4\pi r^2 \rho}$
<b>Hydrostatic equilibrium</b> (2.45)	$d_r P = -\rho \frac{Gm}{r^2}$	$d_m P = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$
<b>Variables</b>	$m(r), \rho(r), P(r)$	$r(m), \rho(m), P(m)$

mecánica de una estrella, pero no podrán proporcionarnos información sobre las propiedades termodinámicas de la estrella (por ejemplo, su luminosidad o su perfil de temperatura interna). Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es, por tanto, muy incompleto. Peor aún, está subdeterminado, ya que tenemos 2 ecuaciones para 3 variables. Podríamos utilizar una ecuación de estado  $P(\rho, T)$  pero ello añadiría una nueva variable, la temperatura, que requeriría nuevas ecuaciones relativas a la conservación y al transporte de la energía, esfuerzo necesario que emprenderemos más adelante (capítulo ??). Por ahora, adoptaremos un enfoque simplificado y desacoplaremos las estructuras mecánica y termodinámica de la estrella suponiendo que la presión  $P$  es independiente de la temperatura  $T$  y que sólo depende de la densidad  $\rho$  mediante una ley de potencia:

$$P = K \cdot \rho^\Gamma \quad (3.1)$$

con  $K$  y  $\Gamma$  constante.  $K$  es la constante politrópica y  $\Gamma$  es un exponente adimensional llamado exponente politrópico<sup>1</sup> y que verifica  $\Gamma \in [1, +\infty]$  por razones que explicaremos más adelante (sección ??). Es habitual definir el índice politrópico  $n = 1/(\Gamma - 1)$ , y  $n \in [0, +\infty]$ . Un cuerpo que obedece esta relación se llama politrópico.

Los politrópicos son casos particulares de barótropos, que son fluidos en los que la presión depende únicamente de la densidad (una suposición común para deducir la ecuación de Bernoulli en hidrodinámica, o para describir fluidos incompresibles en oceanografía).

<sup>1</sup>no confundir con el índice adiabático  $\gamma$  de un gas ideal, ya que la ecuación de estado de un gas ideal muestra que, en el caso general, su presión y densidad no siguen la relación politrópica (3.1).

KWW (19,5)

**El polítropo uniforme**

Para  $n = 0$  (i.e.  $1/\Gamma = 0$ ),  $\rho$  ya no depende de  $P$ : en simetría esférica, es una esfera homogénea de densidad uniforme.

Ya vemos que la inversa,  $\Gamma = 0$ , no tendría sentido ya que daría una presión uniforme ( $d_r P = 0$ ) lo que haría imposible el equilibrio hidrostático.

Discutiremos a posteriori la validez de la hipótesis hidrostática (apartado ??) y el tipo de cuerpos que se comportan como politrópicos (apartado ??).

## 3.2 Internal structure equation

Adoptamos el punto de vista euleriano y trabajamos en coordenadas radiales. Por ahora, suponemos  $\Gamma > 1$  (i.e.  $n$  finita) y posponemos el caso  $\Gamma = 1$  (i.e.  $n$  infinita) para la sección ???. Combinamos las 2 ecuaciones de estructura con la relación politrópica (3.1) para obtener una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden con  $\rho$  en función de  $r$ :

$$(2.45) \cdot \frac{r^2}{\rho} : \quad \frac{r^2}{\rho} d_r P = -Gm \\ K\Gamma \frac{r^2}{\rho} \rho^{\Gamma-1} d_r \rho = -Gm \quad (3.2)$$

$$K \frac{n+1}{n} d_r \left( \frac{r^2}{\rho^{\frac{n-1}{n}}} d_r \rho \right) = -4\pi r^2 \rho G \quad (3.3)$$

## 3.3 Boundary conditions

La ecuación de estructura interna (3.3) requiere 2 condiciones de contorno. Comúnmente, tomamos:

$$\begin{cases} \rho(r=0) = \rho_c \text{ the core density} \\ \frac{dP}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \text{ which implies that } \frac{d\rho}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Esta última condición se deriva de una expansión de Taylor de la masa en el centro estelar:

$$m(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} 0 + \underbrace{\text{evalatddroitmrmathrmr}}_{4\pi r^2 \rho_c} = 0 \cdot r \quad (3.5)$$

reinyectado en la ecuación hidrostática (2.45):

$$d_r P \underset{r \rightarrow 0}{\sim} -\rho_c \frac{G}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \rho_c \cdot r \underset{r \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \quad (3.6)$$

Repita esta demostración en unidades de coordenadas de masa. KWW 11.1

Se puede encontrar una solución  $\rho(r)$  siempre que tengamos estas 2 condiciones de contorno y el valor de los 3 parámetros del modelo politrópico:  $K$ ,  $n$  y  $\rho_c$ . Los perfiles de masa y presión  $m(r)$  y  $P(r)$  pueden deducirse posteriormente de  $\rho(r)$ .

## 3.4 Lane-Emden equation

Para simplificar la ecuación (3.3) y resaltar sus propiedades, la hacemos adimensional utilizando la densidad en el núcleo  $\rho_c$  como escala para la densidad, y obtenemos la densidad adimensional  $w$ :

$$w = \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n} \quad (3.7)$$

As a consequence, equation (3.3) becomes:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_c^{\frac{n-1}{n}}}{\rho_c^n} \frac{K}{4\pi G} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{r^2} dr \left[ \frac{r^2}{w^{n-1}} dr (w^n) \right] &= -\rho_c w^n \\ \frac{(n+1)K}{4\pi G \rho_c^{\frac{n-1}{n}}} \cdot \frac{1}{r^2} dr (r^2 dr w) &= -w^n \end{aligned} \quad (3.8)$$

which makes the length scale  $\alpha$  appear:

$$\alpha = \sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G \rho_c^{\frac{n-1}{n}}}} \quad (3.9)$$

and we use it to perform a change of variable and introduce the dimensionless radius  $\xi$ :

$$\xi = r/\alpha \quad (3.10)$$

Finally, we obtain the Lane-Emden equation of index  $n$ :

$$\frac{1}{\xi^2} d_\xi (\xi^2 d_\xi w) = -w^n \quad (3.11)$$

The boundary conditions from section 3.3 can be rewritten in dimensionless form:

$$\begin{cases} w(0) = 1 \\ \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

La ecuación (3.11) muestra que la solución  $w(\xi)$ , es decir, la forma del perfil de densidad  $\rho(r)$ , depende sólo del índice politrópico  $n$ . Los parámetros  $K$  y  $\rho_c$  sólo fijan la escala de la solución a través de las relaciones (3.7) y (3.10) anteriores.

La introducción de un exponente  $1/n$  en la definición, (3.7) de la densidad adimensional  $w$  se justifica a posteriori ya que simplifica la ecuación diferencial.

## KWW 19.3 3.5 Solution near the core

Let us perform a Taylor expansion of  $w$  at the center of the polytrope:

$$w(\xi) = \underbrace{w(0)}_{=1 \text{ (B.C.)}} + \xi \underbrace{w'(0)}_{=0 \text{ (B.C.)}} + \frac{\xi^2}{2} w''(0) + \dots \quad (3.13)$$

Since  $w$  is necessarily an even function of  $\xi$ , all terms in  $w^{2p+1}$  with  $p$  integer can be dropped.

Reinyectamos esta expansión en la ecuación de Lane-Emden,(3.11) de forma que nos quedemos sólo con términos de orden 0<sup>th</sup> en  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} d_\xi [\xi^2 w''(0)] &\underset{\xi \rightarrow 0}{\sim} -1 \\ w''(0) &= -1/3 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Show that  $w^{(4)}(0) = n/5$ .

## 3.6 Special cases

Analytical solutions exist for  $n = 0, 1$  and  $5$  while the solutions for other values of  $n$  must be computed numerically.

### Homogeneous sphere ( $n = 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} d_\xi (\xi^2 d_\xi w) &= -1 \\ \Xi^2 d_\Xi w \Big|_0^\xi &= - \int_0^\xi \Xi^2 d\Xi \\ \xi^2 d_\xi w &= -\frac{1}{3} \xi^3 \quad \text{since } d_\xi w \Big|_0 = 0 \\ w &= 1 - \frac{1}{6} \xi^2 \quad \text{since } w(0) = 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

So for  $n = 0$ , the Taylor expansion at 2<sup>nd</sup> order in  $\xi$  near  $\xi = 0$  found in section 3.5 is the exact solution through the whole polytrope.

Get the pressure profile.

Cases  $n = 1$  and  $n = 5$

**L 5.4**  
example 5.3

**n = 1**

1. Show that  $w = \sin(\xi)/\xi$  is solution.
2. Derive this solution from (3.11) and the boundary conditions (3.12) by applying an appropriate change of variable.

**n = 5** Show that  $w = 1/\sqrt{1 + \xi^2/3}$  is solution.

## 3.7 Mass-radius relation

### 3.7.1 Radius

The radius  $R$  is given by the first root of  $w$  that we write  $\xi_0$ :

$$w(\xi = \xi_0 = R/\alpha) = 0 \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} n = 0: \quad w = 0 &\iff \xi = \xi_0 = \sqrt{6} \\ n = 1: \quad w = 0 &\iff \xi = \xi_0 = \pi \end{aligned}$$

From the solution given in 3.6, we deduce that for  $n = 5$ ,  $w > 0 \forall \xi$ . More generally,  $\forall n \geq 5$  (resp.  $\forall n \in [0, 5[$ ), the polytrope has an infinite (resp. a finite) radius.

#### KWW 19.4 3.7.2 Mass

For polytropes with finite radius ( $n < 5$ ), we can compute the total mass  $M = m(r = R)$  from:

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho dr = 4\pi \alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_0=R/\alpha} \xi^2 w^n d\xi \quad (3.17)$$

which can be re-expressed, using Lane-Emden equation, as:

$$M = -4\pi \alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_0} d\xi (\xi^2 d_\xi w) d\xi = -4\pi \alpha^3 \rho_c \xi_0^2 d_\xi w|_{\xi_0} \quad (3.18)$$

For  $n = 0$ , we retrieve  $M = 4\pi \rho_c R^3 / 3$  which is the mass of a uniform sphere of density  $\rho = \rho_c$  and of radius  $R$ .

P (5.20) Determine  $M$  for  $n = 1$ .

For  $n = 5$ , is the mass finite? If so, what is its expression?

#### P (5.23) 3.7.3 Mass-radius relation

We replace  $\rho_c$  in the expression (3.18) by using the definition (3.9) of  $\alpha$ . We replace  $\alpha$  with  $R/\xi_0$  and we write  $M_n = -\xi_0^2 d_\xi w|_{\xi_0}$  a constant set by  $n$  only. It gives the mass-radius relation:

$$M = 4\pi M_n \alpha^3 \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G \alpha^2} \right]^{\frac{n}{n-1}} \quad (3.19)$$

$$M = 4\pi M_n \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{n-1}} \xi_0^{-\frac{n-3}{n-1}} \cdot R^{\frac{n-3}{n-1}} \quad (3.20)$$

$$M \propto R^{\frac{n-3}{n-1}} \quad (3.21)$$

$$n = 3 \implies \partial_R M = 0 \text{ and } M = 4\pi M_n [K/(\pi G)]^{3/2}$$

$$n = 1 \implies \partial_M R = 0 \text{ and } R = \xi_0 [K/(2\pi G)]^{1/2}$$

$\forall n \in ]1, 3[ \quad \partial_M R < 0 \quad$  so the radius decreases when the mass increases.

$\forall n < 1 \text{ or } n > 3 \quad \partial_M R > 0 \quad$  so the radius increases when the mass increases.

Cuidado, formalmente hablando, (3.20) no es una relación masa-radio que podamos aplicar indiferentemente a todas las estrellas porque aunque todas estuvieran bien descritas por politropos del mismo índice  $n$ , la constante de proporcionalidad in (3.20) depende de  $K$  (o equivalentemente, de  $\rho_c$  que puede ser diferente de una estrella a otra).

KWW (19.20) **3.7.4 Average density**

P (5.21)

We define the average density  $\bar{\rho} = 3M / (4\pi R^3)$ . Then:

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = -\frac{3}{\xi_0} d_\xi w|_{\xi_0} \quad (3.22)$$

is a function of  $n$  only. Numerical solutions show that this is a decreasing function of  $n$ : the higher the polytropic index, the higher the density concentration at the core with respect to the outer envelopes.

### 3.7.5 Core pressure

P (5.27)

Using the polytropic relation (3.1), we deduce the pressure at the core  $P_c = P(0)$  of a polytrope of index  $n$  as a function of  $\rho_c$ ,  $M$  and  $R$ :

$$P_c = (4\pi M_n)^{(1-n)/n} [4\pi G/(n+1)] \xi_0^{(n-3)/n} \cdot M^{\frac{n-1}{n}} \cdot R^{\frac{3-n}{n}} \cdot \rho_c^{\frac{1+n}{n}} \quad (3.23)$$

P exo 5.3

For a given mass and core pressure, which polytrope yields a bigger star: that of index 1.5 or that of index 3?

#### A Capella

P exo 5.4

Capella es una estrella binaria descubierta en 1899, con un periodo orbital conocido, lo que permite determinar la masa y el radio de la componente más brillante:  $M = 8,3 \cdot 10^{33}$  g y  $R = 9,55 \cdot 10^1$  cm. Suponiendo que la estrella puede describirse mediante un polítopo de índice 3, hallar la presión central y la densidad central.

## 3.8 Isothermal ideal gas polytrope

The case  $\Gamma = 1$  (i.e.  $n = +\infty$ ) is called the isothermal ideal gas polytrope for reasons we will explicit in section ?? . Equation (3.2) in section 3.2 gives:

$$\begin{aligned} K \frac{r^2}{\rho} dr \rho &= -Gm \\ K dr \left( \frac{r^2}{\rho} dr \rho \right) &= -4\pi G \rho r^2 \quad \text{after we applied } dr \text{ and used the continuity equation} \\ r^2 \frac{d^2 [\ln(\rho/\rho_0)]}{dr^2} + 2r \frac{d[\ln(\rho/\rho_0)]}{dr} &= -\frac{4\pi G}{K} \rho r^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

We introduce the length scale:

$$\alpha = \sqrt{\frac{K}{4\pi G \rho_c}} \quad (3.25)$$

and we perform the following change of variable:

$$\begin{cases} \xi = r/\alpha \\ w = \ln(\rho/\rho_c) \end{cases} \quad (3.26)$$

so as to get the isothermal Lane-Emden equation:

$$w'' + \frac{2}{\xi}w' = e^{-w} \quad (3.27)$$

with the boundary conditions:

$$\begin{cases} w(\xi = 0) = \ln \left[ \frac{\rho(r=0)}{\rho_c} \right] = 0 \\ d_\xi w|_{\xi=0} = \alpha d_r [\ln(\rho/\rho_c)]|_{r=0} = \frac{\alpha}{\rho} d_r \rho|_{r=0} = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

### 3.9 Numerical procedure

XXX jupyter notebook polytrope.ipynb

# Chapter 4

## Presión en el interior de las estrellas

La aproximación de fluidos es un marco conveniente ya que sustituye una enorme colección de partículas por un fluido cuyas propiedades se describen típicamente con un número limitado de magnitudes físicas ( $\rho, P, T, \mu$ , velocidad  $\mathbf{v}$  de las partículas del fluido, etc). Reduce drásticamente el número de grados de libertad barriendo bajo la alfombra toda la complejidad asociada a las interacciones entre partículas. El precio a pagar por esta simplificación es la ignorancia a priori de la forma en que una variable termodinámica clave como la presión  $P$  varía con respecto a otras cantidades como  $\rho, T$ . Debido al papel central que desempeña la presión para contrarrestar la fuerza gravitatoria hacia el interior y garantizar el equilibrio de la estrella, es un obstáculo importante que tenemos que resolver. Cuando derivamos rigurosamente la aproximación del fluido a partir de la ecuación de Boltzmann, las ecuaciones del fluido siempre dan una ecuación menos que las variables: necesitamos una relación de cierre, es decir, una ecuación  $f$  que vincule  $\rho, P, T$  y el peso molecular medio<sup>1</sup>  $\mu$ :

$$f(\rho, P, T, \mu) = 0 \quad \text{que también puede escribirse} \quad \rho = \rho(P, T, \mu) \quad \text{por ejemplo} \quad (4.1)$$

Nuestro objetivo en este capítulo es proporcionar al lector herramientas para comprender las fuentes de presión en los interiores estelares. En una estrella, la presión suele proceder de la materia y la radiación. Dependiendo de las condiciones de densidad y presión, la primera puede describirse bien mediante una representación clásica o requerir un modelado completamente cuántico. Para la materia, discutimos las ecuaciones de estado apropiadas para un gas ideal clásico (section 4.1) y para un gas totalmente degenerado de electrones (section 4.2). Estudiamos las correcciones relativistas necesarias cuando la velocidad de las partículas se aproxima a la velocidad de la luz, y modelamos la radiación como un gas relativista de fotones (sección 4.3).

El adjetivo "clásico" se opone a "cuántico", distinción que se explica formalmente en 4.2.1. Por otra parte, distinguimos los gases relativistas de los no relativistas basándonos en la velocidad de las partículas, es decir, que sólo nos centramos en los efectos de la relatividad especial y descuidamos los efectos de la relatividad general (curvatura e.g., del espacio-tiempo).

### 4.1 Gas ideal clásico

Las principales propiedades termodinámicas de los gases ideales clásicos no relativistas se recuerdan en el apéndice 1.3. Aquí adoptamos un enfoque complementario y algo más fundamental, basado en nociones de mecánica estadística, y cubrimos también el caso relativista. En esta sección, los gases ideales son exclusivamente clásicos.

<sup>1</sup>Que depende de la composición química del fluido.

### 4.1.1 Ecuación de estado

#### Función de densidad de probabilidad

En mecánica estadística se define la función de densidad de probabilidad  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , una distribución en el espacio de fases<sup>2</sup> que contiene toda la información del sistema, siendo  $t$  el tiempo,  $\mathbf{r}$  la posición y  $\mathbf{p}$  el momento. La función de probabilidad es una distribución cuyo significado es el siguiente. El número infinitesimal  $dN$  de partículas en un volumen infinitesimal  $d^3\mathbf{r}$  situado en  $\mathbf{r}$ , entre los tiempos  $t$  y  $t + dt$ , y con un momento de  $\mathbf{p}$  dentro de  $d^3\mathbf{p}$  viene dado por:

$$dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \cdot dt \cdot d^3\mathbf{r} \cdot d^3\mathbf{p} \quad (4.2)$$

#### Densidad numérica

Por simplicidad, nos centramos en la distribución de momentos  $f(\mathbf{p})$  tal que  $dN = f(\mathbf{p})d^3\mathbf{p}$ . Podemos deducir la densidad numérica de partículas  $n(\mathbf{r}, t)$  a partir de:

$$n(\mathbf{r}, t) = \int dN = \iiint f(\mathbf{p})d^3\mathbf{p} \quad (4.3)$$

#### Energía interna

Si tomamos  $E_{\text{K},1}(p)$  la energía cinética de una sola partícula de magnitud de momento<sup>3</sup>  $p = |\mathbf{p}|$ , entonces tenemos la densidad de energía interna por unidad de volumen  $u(\mathbf{r}, t)$ :

$$u(\mathbf{r}, t) = \iiint f(\mathbf{p})E_{\text{K},1}d^3\mathbf{p} = n\langle E_{\text{K},1} \rangle_p \quad (4.4)$$

#### P 3.1 Presión cinética

La presión también puede deducirse a partir de la función de densidad de probabilidad  $f$ , aunque requiere un poco más de trabajo. Fundamentalmente, la presión sobre una superficie es la manifestación de una transferencia de momento de partículas elásticamente<sup>4</sup> que rebotan sobre esta superficie (Fig. ??). La única componente del momento que nos interesa es la normal a la superficie. Existen dos métodos para obtener la presión cinética, es decir, la presión expresada en función de la velocidad y el momento de las partículas.

La colisión elástica que nos ocupa es un suceso intrínsecamente discontinuo. Podemos definir valores  $x$  antes y después de la colisión, junto con diferencias  $\Delta x$ , pero no podemos trabajar con un diferencial temporal  $dt$ .

#### Razonamiento simplificado

Podemos tomar una partícula con un momento  $\mathbf{p}$  normal a la superficie infinitesimal de área  $dS$ . La diferencia entre su momento después y antes de la colisión elástica es  $\Delta p = -p - (p) = -2p$ . Por conservación del momento, significa que la superficie recibió un momento  $+2p$  durante una duración  $\Delta t$ . La fuerza aplicada a la superficie por esta partícula es, pues,  $F_1 = 2p/\Delta t$  y la presión asociada (fuerza i.e. por unidad de superficie) es  $F_1/dS$ .

<sup>2</sup>El espacio de 6 dimensiones  $(\mathbf{r}; \mathbf{p})$ , tal que  $f$  depende de 7 variables.

<sup>3</sup>El hecho de que la energía cinética dependa sólo de la magnitud del momento, tanto en el caso relativista como en el no relativista, es un resultado de la mecánica analítica.

<sup>4</sup>Significa que la energía cinética de la partícula después de la colisión es la misma que antes.

Para encontrar la presión, tenemos que tener en cuenta la contribución de todas las partículas que impactan en la superficie durante  $\Delta t$ . ¿Cuántas partículas impactarán en la superficie durante  $\Delta t$ ? El primer paso para responder a esta pregunta es determinar el número de partículas en el volumen donde las partículas son susceptibles de alcanzar la superficie dentro de  $\Delta t$ . Su base viene dada por la superficie  $dS$  y su altura por  $v\Delta t$ , y escribimos  $n$  la densidad de número de partículas en este volumen.

Sin embargo, esta densidad numérica afecta a todas las partículas, incluidas las que no se mueven hacia la superficie y no van a impactar con ella en  $\Delta t$ . ¿Qué fracción de  $n$  importa en este cálculo? Podemos simplificar considerablemente el problema suponiendo que el momento  $p$  de las partículas está necesariamente alineado con respecto a uno de los 3 ejes espaciales. Las partículas que contribuirán a la presión son sólo las que se mueven a lo largo del eje normal a la superficie  $y$ , entre ellas, sólo nos interesan las que se mueven hacia la superficie. Como el movimiento de las partículas es isótropo, sólo  $1/3$  de las partículas se mueven a lo largo del eje normal a la superficie, y sólo la mitad de ellas se mueven hacia la superficie, por lo que nos queda un factor  $1/6$ .

Finalmente, la presión cinética viene dada por:

$$P = \frac{1}{6}n \cdot v\Delta t dS \cdot \frac{2p}{dS\Delta t} \quad (4.5)$$

$$P = \frac{1}{3}nvp \quad (4.6)$$

Como era de esperar, la duración de la colisión y la extensión de la superficie se simplifican y la presión cinética depende sólo de  $n$ ,  $v$  y  $p$ .

Como veremos, la expresión del momento  $p$  depende de si la velocidad  $v$  es relativista o no.

### Razonamiento completo

Relajamos la suposición de que las partículas se mueven sólo a lo largo de 3 ejes. En su lugar, consideramos una partícula con un momento fiduciario  $p$  tal que tiene un ángulo incidente  $\theta$  sobre la superficie (Fig. ??). Dentro de la duración  $\Delta t$  de la colisión elástica, esta partícula proporcionará a la superficie un momento  $2p \cos \theta$  (tras la proyección sobre la normal de la superficie). Esta vez, el volumen en el que se encuentran las partículas susceptibles de alcanzar la superficie dentro de  $\Delta t$  es  $v \cos \theta \Delta t dS$ . La fracción de partículas con un momento  $p$  correspondiente al que estamos viendo es:

$$\frac{d\Omega}{4\pi} \quad (4.7)$$

donde  $d\Omega = d\theta \cdot \sin \theta d\phi$  es el ángulo sólido infinitesimal en la dirección  $(\theta, \phi)$ , y  $4\pi$  esterorradianes es el ángulo sólido completo. Como el movimiento de las partículas es isótropo, ya podemos integrar sobre  $\phi$  desde 0 hasta  $2\pi$  y obtenemos la fracción:

$$\frac{\sin \theta d\theta}{2} \quad (4.8)$$

de partículas con un momento  $p$  correspondiente a un ángulo incidente  $\theta$ . En consecuencia, deducimos la presión cinética a partir de una fórmula que debe compararse con la

ecuación (4.5):

$$P = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{2} n \cdot v \cos \theta \Delta t dS \cdot \frac{2p \cos \theta}{dS \Delta t} \quad (4.9)$$

$$P = nvp \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}_{=1/3} \quad (4.10)$$

Por suerte, recuperamos la misma expresión de la presión cinética que la ecuación (4.6).

Para simplificar, hemos supuesto que todas las partículas tienen la misma velocidad  $v$  y el mismo momento  $p$ . Un enfoque más realista, en el que hubiéramos trabajado con integrales sobre  $v$  y  $p$ , habría dado lugar a la fórmula más general:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} f(p)v(p)pdp = \frac{1}{3}n\langle vp \rangle_p \quad (4.11)$$

### Maxwell-Boltzmann distribution

Mediante la mecánica estadística, podemos determinar la expresión de la mencionada función de densidad de probabilidad  $f$ . Por ejemplo, para una colección de partículas de masa  $m$  en equilibrio termodinámico local a la temperatura  $T$ , se puede demostrar que la función de densidad de probabilidad viene dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$f(p)dp = K \exp \left[ -\frac{E_{K,1}(\mathbf{p})}{k_B T} \right] d^3\mathbf{p} \quad (4.12)$$

donde  $K$  es una constante de normalización y  $d^3\mathbf{p} = 4\pi p^2 dp$  ya que los momentos son isótropos. En el régimen no relativista  $p \ll mc$  (ver apéndice B), la energía cinética viene dada por  $E_{K,1} \sim p^2/(2m)$ .

La integral de una distribución es, por definición, unitaria:

$$\int_0^{+\infty} f(p)dp = 1 \quad (4.13)$$

Utilizaremos esta restricción matemática y la ecuación (4.3) para determinar la expresión de la constante de normalización  $K$ . La integral de la función gaussiana  $e^{-x^2}$  sobre toda la recta real es  $\sqrt{\pi}$ . Realizar una integración por partes seguida de un cambio de variable para demostrar que:

$$K = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \quad (4.14)$$

Deducimos que en el régimen no relativístico, la función de densidad de probabilidad  $f$  viene dada por:

$$f(p)dp = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \cdot 4\pi p^2 \exp \left[ -\frac{p^2}{2mk_B T} \right] dp \quad (4.15)$$

**In the air**

El gas ambiente que respiras en este momento es probablemente clásico y no relativista. Para las partículas en la habitación, evaluar:

1. la velocidad media  $\langle v \rangle$
2. la velocidad más probable  $v_0$
3. la desviación cuadrática media de la velocidad (i.e. la dispersión típica del valor medio),  $\sigma_v = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$

**Ideal gas law**

Reinyectamos la expresión de la distribución de Maxwell-Boltzmann en la ecuación (4.11) y utilizamos  $p = mv$  para obtener:

$$P = \frac{4\pi K}{3m} \int_0^{+\infty} p^4 \exp\left[-\frac{p^2}{2mk_B T}\right] dp \quad (4.16)$$

Realizando una integral por partes, deducimos la forma, (A.63) de la ley de los gases ideales:

$$P = nk_B T \quad (4.17)$$

Esta derivación es para un gas de partículas clásicas no relativistas, pero puede demostrarse que también es válida con la contrapartida relativista de la distribución de Maxwell-Boltzmann, la distribución de Maxwell-Jüttner.

**L 17.18 4.1.2 Peso molecular medio**

5.6.2

KWW 4.2 XXX Mixture of ideal gases: additiveness of pressures => can be treated independently The mean molecular weight  $\mu$  is defined as the mean number of atomic mass units  $m_p$  per particle.  $1/\mu_e$  is the number of free electrons per nucleon in the plasma. Mass abundances

8.1 Limit cases

Neutral and fully ionized cases

The mass density  $\rho$  of an electrically neutral plasma is always dominated by the ions:

$$\rho = n_e \mu_e m_p \quad (4.18)$$

**4.1.3 Propiedades termodinámicas**

La mayoría de las propiedades termodinámicas de los gases ideales se derivan y explican en el apéndice, A. A continuación, recordamos brevemente las más importantes para el estudio de las estrellas.

### Internal energy

En el régimen no relativista,  $\langle pv \rangle_p \sim 2\langle E_{K,1} \rangle_p$  por lo que las ecuaciones (4.4) y (4.11) dan la presión en función de la energía interna por unidad de volumen:

$$P = \frac{2}{3}u \quad \text{for a non-relativistic ideal gas} \quad (4.19)$$

donde recuperamos la ecuación (A.80) pero en el caso simplificado de un gas monoatómico con  $\gamma = 5/3$ .

En el régimen relativista,  $\langle pv \rangle_p \sim pc \sim \langle E_{\text{relativistic}} \rangle_p$  así:

$$P = \frac{1}{3}u \quad \text{for a relativistic ideal gas} \quad (4.20)$$

Estas relaciones son ciertas cualquiera que sea la naturaleza de las partículas del gas ideal (electrones, fotones, iones) y si el gas es clásico o degenerado.

### Capacidades térmicas e índice adiabático

Las capacidades caloríficas isocore e isobara por unidad de masa  $c_V$  y  $c_P$  de un gas ideal vienen dadas por:

$$c_V = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{\mu m_P} \quad (4.21)$$

$$c_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k_B}{\mu m_P} \quad (4.22)$$

donde  $\gamma = c_P/c_V$  es el índice adiabático del gas ideal.

### Speed of sound

La velocidad isentrópica (a.k.a. adiabática) del sonido es la velocidad a la que se propagan las perturbaciones de presión en un fluido de entropía constante. En un gas ideal, se puede demostrar que viene dada por:

$$c_s = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_S} \quad (4.23)$$

La velocidad isotérmica del sonido se define como:

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_P}} \quad (4.24)$$

### Polytrope

En un politrópico de exponente  $\Gamma$ , determinar la velocidad isentrópica e isotérmica del sonido.

#### 4.1.4 Non-ideal effects

Van der Waals gas

Debye-Hückel length

Reduced pressure

## KWW 15 4.2 Degenerate gas

En esta sección, tratamos el caso de un gas en el que importan los efectos cuánticos. Se denominan "degenerados" porque varios estados cuánticos, aunque diferentes, comparten el mismo nivel de energía.

### 4.2.1 Conditions

#### L 5.6.3 Heisenberg principle

En mecánica cuántica, el principio de Heisenberg establece que hay pares de propiedades ( $x, y$ ) (e.g., posición  $\mathbf{r}$  y momento  $\mathbf{p}$ , anchura y tiempo de vida de un nivel de energía) cuyas dispersiones (a.k.a. desviaciones típicas)  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  obedecen a la relación:

$$\sigma_x \sigma_y \geq \hbar/2 \quad (4.25)$$

donde  $\hbar = h/(2\pi)$  y  $h \sim 6,6 \cdot 10^{-27} \text{erg}\cdot\text{s}^{-1}$  es la constante de Planck, la constante física fundamental de la mecánica cuántica. En mecánica clásica, siempre trabajamos con sistemas donde  $\sigma_x \sigma_y \gg \hbar/2$  pero los efectos cuánticos empiezan a ser significativos cuando  $\sigma_x \sigma_y \gtrsim \hbar/2$ .

Esta desigualdad sugiere que podemos utilizar  $\sqrt{\hbar}$  como la longitud elemental en el espacio de fase de seis dimensiones, por ejemplo el espacio de fase posición-momento. El volumen elemental asociado es  $(\sqrt{\hbar})^6 = \hbar^3$ , de ahí su presencia en la distribución de Fermi-Dirac,(4.31) a continuación.

Aunque comúnmente se interpreta como un principio de incertidumbre, este principio es más bien una afirmación sobre las propiedades intrínsecas de un sistema cuántico: cuando medimos  $x$  e  $y$ , la máxima precisión alcanzable está limitada por el hecho de que, a escala cuántica,  $x$  e  $y$  no están definidos trivialmente como valores fijos. Por ejemplo, para el dúo posición-momento, la posición de la partícula está mal definida cuando llegamos a una escala en la que ya no se puede pasar por alto la naturaleza turbia de la partícula. En este momento, la partícula no es un punto y su posición se distribuye en una región de anchura  $\sigma_r$ . Es la manifestación de la superposición cuántica, un fenómeno ilustrado por el experimento del gato de Schrödinger.

#### longitud de onda de De Broglie

Los sistemas cuánticos pueden manifestarse como partículas o como ondas, un concepto conocido como dualidad onda-partícula. La longitud de onda  $\lambda_{DB}$  asociada a una partícula de momento  $p$ , con o sin masa, es:

$$\lambda_{DB} \cdot p = h \quad \text{i.e.} \quad \lambda_{DB} = \frac{h}{p} \quad (4.26)$$

Puede interpretarse como la extensión espacial de la función de onda de la partícula: cuando  $\lambda_{DB}$  es muy pequeña comparada con las escalas de longitud típicas del problema, es razonable suponer que la partícula es un punto y despreciar su naturaleza ondulatoria.

Un sistema de extensión típica  $\lambda_{\text{DB}}$  estaría cerca de realizar la igualdad en la desigualdad de Heisenberg,(4.25).

### Longitud de onda térmica

Para una partícula no relativista de masa  $m$  y velocidad  $v$  asociada a una temperatura  $T$ , la longitud de onda de De Broglie viene dada por:

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{\sqrt{2mk_B T}} \sim 13\text{nm} \left( \frac{m}{9.1 \cdot 10^{-29}\text{g}} \right)^{-1/2} \left( \frac{T}{1000\text{K}} \right)^{-1/2} \quad (4.27)$$

### Pauli exclusion principle

En Física de partículas, todas las partículas fundamentales son fermiones o bosones. Sus funciones de onda son respectivamente antisimétrica y simétrica. Los fermiones son partículas elementales (e.g., electrones) o compuestas (e.g., neutrones y protones, formados por quarks) que tienen un espín medio entero  $s = 1/2, 3/2, \text{ etc}$ . En general, son los componentes de la materia ordinaria: los electrones, neutrones y protones son fermiones de espín  $s = 1/2$ . Los fermiones obedecen al principio de exclusión de Pauli, según el cual no hay dos fermiones que puedan ocupar simultáneamente el mismo estado cuántico.

En condiciones de baja densidad y/o alta temperatura, este principio no es restrictivo porque el número de estados cuánticos accesibles es mucho mayor que el número de estados realmente ocupados. Pero se vuelven comparables en entornos densos y/o fríos, donde los fermiones producirán una presión adicional en comparación con la predicción clásica de la distribución de Maxwell-Boltzmann. Llamamos "degenerados" a estos entornos en los que los efectos cuánticos importan.

### Fermi number

En un fluido de densidad numérica  $n$ , la distancia media entre partículas viene dada por  $d \sim n^{-1/3}$ . En este caso, el sistema obedece trivialmente el principio de Heisenberg hasta que alcanzamos una densidad tan alta que, dado el momento típico  $p$  de las partículas, la distancia media entre partículas llega a ser tan pequeña como la longitud de onda de De Broglie. Para cuantificar la importancia de tener en cuenta los efectos cuánticos, introducimos el número adimensional de Fermi:

$$\mathcal{F} = \frac{\lambda_{\text{DB}}}{d} = n^{1/3} \lambda_{\text{DB}} \begin{cases} \ll 1 & \text{in the classic regime} \\ \gtrsim 1 & \text{in the quantum regime} \end{cases} \quad (4.28)$$

que se consigue más fácilmente para densidades altas (i.e. distancia media baja entre partículas) y/o temperaturas bajas (i.e. longitud de onda de De Broglie mayor). Según la expresión,(4.26) anterior, concluimos que, para una temperatura y densidad de número dadas, las partículas de menor masa serán las primeras en sentir los efectos cuánticos. Puesto que los nucleones y los electrones tienen una temperatura y una densidad de número comparables en los interiores estelares, es común tener un gas degenerado de electrones cohabitando con un gas no degenerado de iones.

### Conducción en Física del estado sólido

Un sólido cristalino está formado por átomos regularmente espaciados en los nodos de una malla. Si el sólido es un metal, los electrones periféricos no permanecen en las proximidades de un sitio específico. En lugar de ello, se mueven casi libremente por el cristal. Así pues, el cristal está formado por una malla de iones estáticos bañados en un gas de electrones conductores.

1. a) ¿Cuál es la distancia media entre iones?
- b) ¿Es legítimo un tratamiento clásico de los iones según su número de Fermi?
2. Suponiendo que tenemos un electrón de conducción por ion (que es el caso del cobre por ejemplo), ¿el gas de electrones es clásico o cuántico?

## P App.B 4.2.2 Fermi-Dirac statistics

### Probabilidad de ocupación de los niveles de energía

Consideremos partículas, fermiones o bosones, con  $g$  estados cuánticos intrínsecos (e.g., electrones o nucleones tienen  $g = 2$ ). Entonces, el número de estados cuánticos en un volumen infinitesimal de espacio de fase  $d^3r dd[3]p$  es:

$$g \cdot \frac{d^3r d^3p}{h^3} \quad (4.29)$$

Para los fermiones, debido al principio de exclusión de Pauli, representa la densidad numérica máxima de fermiones con momento  $p$  y posición  $r$ . A una temperatura local dada  $T$ , la fracción de estados con energía  $E$  de momento  $p$  que estarán ocupados (a.k.a. el número de ocupación) viene dada por:

$$\frac{1}{e^{\left[\frac{E(p)}{k_B T} - \psi\right]} + 1} \quad (4.30)$$

que siempre es menor que 1, y donde la variable  $\psi$ , llamada parámetro de degeneración, juega el papel de una constante de normalización, como  $K$  en la ecuación, (4.12). También puede interpretarse como la probabilidad de que un nivel de energía  $E$  esté ocupado, dada una temperatura  $T$ . La distribución real de partículas por momento viene dada por el producto de la fracción de ocupación, (4.30) y el número de estados cuánticos, (4.29). Se obtiene la distribución de Fermi-Dirac:

$$f(p) dp = \frac{g}{h^3} \cdot \frac{d^3p}{e^{\left[\frac{E(p)}{k_B T} - \psi\right]} + 1} \quad (4.31)$$

Entonces, la constante de normalización  $\psi$  se determina a partir de la restricción  $\int_0^{+\infty} f(p) dp = n$ . Puede variar de  $-\infty$  a  $+\infty$ , lo que corresponde a  $e^{-\psi}$  que varía de  $+\infty$  a 0.

### Classic limit

El límite clásico corresponde a  $\psi \rightarrow -\infty$  es decir  $e^{-\psi} \rightarrow +\infty$  en el denominador de (4.31):

$$f(p) dp \underset{\psi \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{g}{h^3} 4\pi p^2 e^\psi dp \quad (4.32)$$

y la condición de normalización,(4.3) establece el valor de  $\psi$  como:

$$e^\psi \underset{\psi \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{h^3}{g} \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \quad (4.33)$$

Esta expresión ilustra que el límite clásico corresponde a altas temperaturas y/o bajas densidades numéricas. Además, la dependencia de la masa muestra que los electrones se degeneran antes que los iones, ya que son mucho menos masivos (section 4.4.3).

En el límite clásico, el 1 en el denominador en la distribución Fermi-Dirac es despreciable y tenemos:

$$f(p) dp \underset{\psi \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \cdot 4\pi p^2 \exp\left[-\frac{E}{k_B T}\right] dp \quad (4.34)$$

y recuperamos la distribución de Maxwell-Boltzmann.

### Degeneración completa

A baja temperatura, los fermiones tenderán a llenar primero los estados de baja energía. Si la densidad es suficientemente alta, el número de tales estados es inadecuado, y los fermiones se ven forzados a entrar en estados de mayor energía por el principio de exclusión de Pauli. Todos los estados de momento disponibles (o, lo que es lo mismo, los niveles de energía) están ocupados hasta un valor máximo (el umbral  $E_0$  inferior), mientras que todos los estados superiores están vacíos. Este efecto aumenta la presión, del gas más allá del valor que se obtendría si el gas cumpliera la ley clásica del gas ideal.

Observamos que la probabilidad de ocupación dada por (4.30) transita de un valor positivo finito para  $E \rightarrow 0$  a 0 para  $E \rightarrow +\infty$  (Fig ??). La transición se produce en un intervalo típico  $k_B T$ . La degeneración completa corresponde al régimen en el que esta transición se hace infinitamente aguda. Introducimos la energía de Fermi  $E_0 = k_B T \psi$  a la que se produce la transición y que es la energía del nivel ocupado de mayor energía cuando  $T \rightarrow 0$ . Para una densidad numérica dada  $n$ , la restricción de normalización sólo puede alcanzarse si  $E_0$  es finita<sup>5</sup> En consecuencia, para  $T \rightarrow 0$ , necesitamos  $\psi \rightarrow +\infty$  para mantener  $E_0$  finito. La probabilidad de ocupación se aproxima entonces por:

$$\frac{1}{1 + e^{\left[\frac{E-E_0}{k_B T}\right]}} \sim \begin{cases} 1 & \text{if } E < E_0 \\ 0 & \text{if } E > E_0 \end{cases} \quad (4.35)$$

En régimen no relativista, cuando  $E = p^2/(2m)$ , viene dada por la restricción de normalización que da:

$$n = \int_0^{+\infty} f(p) dp \sim \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^{p_0} p^2 dp \sim \frac{4\pi g}{3h^3} \cdot p_0^3 \quad (4.36)$$

donde  $p_0 = \sqrt{2mE_0}$  es el momento de Fermi asociado a la energía de Fermi  $E_0$ .

XXX interactive FIGURE: classic and quantic f(p) as a function of p for T,n

### 4.2.3 Presión de degeneración de los electrones

Debido a su menor masa, los electrones se degeneran antes que los iones (section 4.4.3). A continuación, discutiremos la presión inducida por los electrones ( $m = m_e$  y  $g = 2$ ). En el caso de degeneración completa, podemos utilizar la ecuación (4.35) para simplificar

<sup>5</sup>Si  $E_0 \rightarrow 0$ , no hay ningún nivel de energía accesible y si  $E_0 \rightarrow +\infty$ , la integral,(4.3) no puede converger.

la función de densidad de probabilidad  $f$  y realizar la integral (4.11) para determinar la expresión de la presión de degeneración.

### Régimen no relativista

En el régimen no relativista,  $v = p/m$  y tenemos:

$$P \sim \frac{g}{3} \frac{4\pi}{h^3} \frac{1}{m} \int_0^{p_0} p^4 dp \quad (4.37)$$

$$P \sim K \rho^\Gamma \quad \text{with} \quad \begin{cases} \Gamma &= 5/3 \\ K &= \frac{h^2}{5mg^{2/3}(\mu_e m_p)^{5/3}} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \sim \frac{1.0036 \cdot 10^{13}}{\mu_e^{5/3}} \text{ cm}^4 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{g}^{-2/3} \end{cases} \quad (4.38)$$

donde  $\mu_e$  es el peso molecular medio por electrón (sección 4.1.2) y donde usamos la ecuación (4.36) para expresar el momento de Fermi en función de la densidad de números.

### Relativistic regime

A medida que la densidad numérica  $n$  aumenta, también lo hace la energía de Fermi. Llegará un momento en que será comparable a la energía de masa en reposo  $mc^2$  de la partícula y será necesario un tratamiento relativista. En este régimen,  $v \sim c$  y tenemos:

$$P \sim K \rho^\Gamma \quad \text{with} \quad \begin{cases} \Gamma &= 4/3 \\ K &= \frac{hc}{4(\mu_e m_p)^{4/3}} \left(\frac{3}{4\pi g}\right)^{1/3} \sim \frac{1.2435 \cdot 10^{15}}{\mu_e^{4/3}} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{g}^{-1/3} \end{cases} \quad (4.39)$$

Una propiedad clave de los fermiones es que, debido al principio de exclusión de Pauli, la presión y la energía interna de un gas de fermiones tienden a límites finitos cuando la temperatura llega a cero. Además, en el límite completamente degenerado, la presión no depende de la temperatura, sino sólo de la densidad, lo que tiene tremendas consecuencias para la estabilidad de la estrella (section ??).

#### Internal energy

1. Demostrar que la energía interna de un gas no relativista parcialmente degenerado obedece a la relación (4.19).
2. En el límite completamente degenerado, demuestre que la energía interna viene dada por la relación (4.20).

### Numerical integration

En el caso general de degeneración parcial, en el que no podemos confiar en la simplificación, y de un régimen moderadamente relativista, en el que tenemos que obtener la energía total de la partícula a partir de (??), debe utilizarse la distribución completa (4.31) para calcular numéricamente la presión en cada punto de la estrella. Dado el alto coste computacional de esta integración, una práctica común es realizar un cálculo preliminar para una rejilla de densidades y temperaturas y luego, interpolar dentro de esta rejilla. Hacerlo para una rejilla de resolución moderada (e.g., 100 puntos en  $n$  y 100 puntos en  $T$ ) que abarque un amplio rango (e.g.,  $n$  de  $10^{-8} \text{ cm}^{-3}$  a  $10^8 \text{ cm}^{-3}$  y  $T$  de  $10^3 \text{ K}$  a  $10^{10} \text{ K}$ ) y comparar los resultados con los casos límite (clásico o degenerado, relativista o no).

#### 4.2.4 Non-ideal effects

**Crystallisation**

**Neutronisation**

## 4.3 Radiation

Una descripción adecuada de la transferencia radiativa pospuesta a los capítulos ?? y ???. En su lugar, aquí, hacemos hincapié en las propiedades de los fotones que pertenecen a la presión radiativa.

### 4.3.1 Bose-Einstein statistics

Los bosones son una de las dos clases fundamentales de partículas subatómicas, junto con los fermiones. Tienen un espín entero  $s = 1, 2, \dots$ , etc. Los bosones no obedecen el principio de exclusión de Pauli y no tienen ninguna restricción en cuanto al número de partículas por estado cuántico<sup>6</sup>.

#### Probabilidad de ocupación de los niveles de energía

La fracción de estados con energía  $E$  que está ocupada por bosones a una temperatura local dada  $T$  es:

$$f(p)dp = \frac{g}{h^3} \cdot \frac{d^3\mathbf{p}}{e^{\left[\frac{E(p)}{k_B T} - \psi\right]} - 1} \quad (4.40)$$

que puede ser mayor o menor que 1 ya que los bosones no obedecen el principio de exclusión de Pauli. Aparte del signo menos en el denominador, la fórmula es estrictamente la misma que para los fermiones.

#### Planck function

Las 4 fuerzas fundamentales están asociadas a bosones. En particular, el portador de la fuerza electromagnética es el fotón, un bosón sin masa de espín  $s = 1$  y con estados cuánticos intrínsecos  $g = 2$ . Un fotón es una partícula relativista que lleva un momento  $p$  relacionado con su frecuencia  $\nu$  y su energía  $E_\gamma$  por  $E_\gamma = h\nu = pc$ . Puesto que el número de fotones no se conserva, no podemos utilizar la ecuación (4.36) para restringir el parámetro de degeneración  $\psi$ . En su lugar, se establece en  $\psi = 0$  una vez que se alcanza el equilibrio térmico

<sup>6</sup>Which gives rises to Bose-Einstein condensates and lasers/masers.

(i.e. cuando los fotones se destruyen y se forman a tasas similares, véase la sección ??). En este caso, recuperamos la función de Planck para la función de densidad de probabilidad  $f$ :

$$f(p)dp = \frac{g}{h^3} \cdot \frac{d^3\mathbf{p}}{e^{\frac{pc}{k_B T}} - 1} \quad (4.41)$$

#### Black body spectrum

1. Realizar un cambio de variable para obtener el número infinitesimal  $dN = f(\nu)d\nu$  de fotones por frecuencia  $\nu$  para un cuerpo negro.
2. Determinar la frecuencia fotónica media  $\langle \nu \rangle$ , la frecuencia fotónica más probable  $\nu_0$  y la desviación cuadrática media  $\sigma_\nu$ .
3. Derivar la ley de desplazamiento de Wien  $\nu_0 T \sim 0,29 \text{ cm}\cdot\text{K}$ .

### 4.3.2 Radiation pressure

La energía interna asociada a la radiación puede deducirse a partir de la ecuación (4.4) con  $E_{K,1} = pc$  y la función de Planck para la función de densidad de probabilidad. Haciendo esto, recuperamos la densidad de energía radiativa  $u$  dada por la ley de Stefan-Boltzmann:

$$u = aT^4 \quad (4.42)$$

con  $a$  la constante de radiación, una constante intermedia expresada en términos de constante física más fundamental.

#### Radiation constant

Show that:

$$a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} \sim 7.56 \cdot 10^{-15} \text{ erg}\cdot\text{cm}^{-3}\cdot\text{K}^{-4} \quad (4.43)$$

by using:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (4.44)$$

Los fotones pueden interpretarse como un gas ideal altamente relativista por lo que la ecuación (4.20) se cumple y deducimos la expresión de la presión de radiación:

$$P = \frac{1}{3}aT^4 \quad (4.45)$$

La presión de radiación se debe a los fotones que transfieren momento a las partículas del gas cada vez que son absorbidos o dispersados. Imaginemos un haz colimado de fotones que incide sobre un átomo. Cada fotón es absorbido, excitando así al átomo, que en consecuencia vuelve a su estado original emitiendo un fotón, lo que proporciona al átomo un retroceso en la dirección opuesta a la del fotón emitido. La dirección del fotón emitido es aleatoria, pero no la dirección del haz de fotones incidente, de modo que tras una larga serie de interacciones de este tipo, los cambios aleatorios de momento debidos a la emisión se anulan y el cambio neto en el momento del átomo se produce en la dirección del haz de fotones, como si se hubiera ejercido una presión material sobre él en esa dirección.

### 4.3.3 Non-ideal effects

## 4.4 Different regimes

En sentido estricto, la presión interna completa viene dada por la suma de la presión del gas y la presión de radiación. En el límite clásico, la presión del gas debería tener en cuenta tanto los iones como los electrones utilizando la ley del gas ideal (4.17) con el peso molecular medio  $\mu$  (sección 4.1.2) pero en general, debería calcularse a partir de la distribución completa de Fermi-Dirac con correcciones de relatividad especial (véase el ejercicio "integración numérica" más arriba). En el caso no degenerado, las presiones de electrones e iones son del mismo orden de magnitud, pero cuando los electrones están completamente degenerados, su presión domina sobre la de los iones debido a la mayor presión inducida por el principio de exclusión de Pauli. En la práctica, en un diagrama temperatura-densidad, existen regiones en las que la presión calculada a partir de casos límite es lo suficientemente precisa como para describir satisfactoriamente la estructura interna de una estrella. En esta sección, tratamos de identificar estos diferentes regímenes basándonos en las ecuaciones de estado que hemos derivado en este capítulo.

Nuestro objetivo es identificar, en un diagrama  $(\rho, T)$ , los dominios donde domina cada tipo de presión. En primer lugar, resumimos las dependencias de los tres tipos diferentes de presión en  $\rho$  y/o  $T$  que vimos en este capítulo:

$$P_g \propto \rho T \quad \text{the classic ideal gas pressure} \quad (4.46)$$

$$P_d \propto \rho^\Gamma \quad \text{the degenerate gas pressure, relativistic or not, for electrons or ions} \quad (4.47)$$

$$P_r \propto T^4 \quad \text{the radiation pressure} \quad (4.48)$$

donde el valor del exponente  $\Gamma$ ,  $4/3$  o  $5/3$ , depende de si el gas degenerado es relativista o no respectivamente. En cualquier caso, a partir de la dependencia de cada presión con la temperatura y/o la densidad de masa, podemos hacer las siguientes afirmaciones preliminares.

- Cuando comparamos  $P_r$  con  $P_g$  y  $P_d$ , vemos que, a una densidad de masa  $\rho$  dada, siempre hay una temperatura más allá de la cual la presión de radiación acabará dominando. Cuanto mayor sea la densidad de masa, menor será esta temperatura crítica. En consecuencia, la esquina superior izquierda del diagrama  $(\rho, T)$  está dominada por la presión de radiación.
- A una temperatura dada, inferior al umbral mencionado donde domina la presión de radiación, necesitamos comparar  $P_g$  y  $P_d$ . Dado que  $\Gamma > 1$ , al aumentar la densidad de masa, la presión degenerada siempre acaba dominando sobre la presión clásica del gas ideal. Cuanto menor sea la temperatura, menor será el umbral de densidad. Como consecuencia, la esquina inferior derecha del diagrama  $(\rho, T)$  está dominada por la presión del gas degenerado.

La pertinencia o no de considerar la transición entre los dominios en los que la presión está dominada por la radiación y la presión de gas degenerada dependerá de la ubicación de las fronteras ideal-radiación e ideal-degenerada antes mencionadas. Tratemos primero estos dos cuantitativamente.

### 4.4.1 Classic ideal gas and radiation pressures

Para determinar el dominio donde la presión de radiación domina sobre la presión clásica de gas ideal, buscamos las condiciones cuando  $P_g < P_r$  es decir:

$$P_g < P_r \quad (4.49)$$

$$\frac{\rho k_B T}{\mu m_p} < \frac{1}{3} a T^4 \quad (4.50)$$

$$T \rho^{-1/3} > \left( \frac{3k_B}{\mu m_p} \right)^{1/3} \quad (4.51)$$

$$\text{Radiation pressure dominates} \iff T \rho^{-1/3} > 3.2 \cdot 10^7 \mu^{-1/3} \text{ [cgs]} \quad (4.52)$$

donde destacamos la dependencia de la composición química del gas a través de la dependencia del peso molecular medio  $\mu$ . Es habitual introducir el parámetro  $\beta$  que compara la presión del gas  $P_g$  (degenerada o no) con la presión total  $P$ :

$$\beta = \frac{P_g}{P} = \frac{1 - P_r}{P} \quad (4.53)$$

y que no es necesariamente uniforme.

### KWW 16 4.4.2 Relativistic and non-relativistic regimes

Antes de comparar las presiones de un gas ideal clásico y de un gas degenerado, comentemos la transición entre el régimen no relativista y el relativista para un gas de electrones completamente degenerado La razón para centrarnos en los electrones en lugar de en los iones se da en la sección 4.4.3.. Se produce cuando la energía de Fermi  $E_0$  es comparable a la energía de la masa en reposo del electrón  $m_e c^2$ . Corresponde a una densidad de masa  $\rho_{\text{rel}}$  dada por:

$$\rho_{\text{rel}} = \frac{8\pi\mu_e m_p m_e^3 c^3}{3h^3} \sim 9.7 \cdot 10^5 \mu_e \text{ g}\cdot\text{s}^{-1} \quad (4.54)$$

En este punto, la dependencia de la presión con respecto a la densidad pasa suavemente de  $P \propto \rho^{5/3}$  a  $P \propto \rho^{4/3}$  a medida que aumenta la densidad.

### 4.4.3 Classic ideal gas and degenerate gas pressures

#### Relative degeneracy of electrons and ions

Se puede demostrar que la dependencia  $n / (mT)^{3/2}$ , que aparece en (4.33) en el régimen clásico ( $\psi \rightarrow -\infty$ ), se mantiene para cualquier intervalo de  $\psi$ . Debido a la neutralidad de la carga, la densidad numérica de protones y electrones es siempre comparable, pero la masa  $m_p$  de un protón es casi 2.000 veces mayor que la masa  $m_e$  de un electrón. En consecuencia, a una temperatura y densidad numérica dadas,  $\psi$  es mayor para los electrones que para los iones, es decir que los electrones entran en el régimen cuántico antes que los iones. Debido a la dependencia en  $m^{3/2}$ , los iones requieren una densidad casi 5 órdenes de magnitud mayor que los electrones para alcanzar el mismo parámetro de degeneración, a la misma temperatura. Esta tendencia también puede observarse en la expresión (4.28) del número de Fermi. En principio, los iones también podrían degenerarse, pero en los interiores estelares, la temperatura y/o la densidad que deben alcanzarse para que los iones

se degeneren son tales que la neutronización se producirá antes (sección ??), dando lugar a una estrella de neutrones en la que los neutrones están degenerados, aunque la ecuación de estado de la materia ultracondensada en la estrella de neutrones sigue siendo en gran medida desconocida.

### Transition between the classic and degenerate regimes

Por lo tanto, podemos estimar el umbral entre los regímenes clásico y cuántico observando el momento en que la presión de degeneración de los electrones se hace mayor que la presión clásica del gas ideal:

$$\frac{\rho k_B T}{\mu m_p} < K \rho^\Gamma \quad (4.55)$$

con

$$K$$

y  $\Gamma$  fijados por valores no relativistas o relativistas.

In the non-relativistic regime (i.e.  $\rho < \rho_{\text{rel}}$ ), we have:

$$\text{Quantum effects non-negligible} \iff T \rho^{-2/3} < 1.2 \cdot 10^5 \mu \mu_e^{-5/3} \text{ [cgs]} \quad (4.56)$$

In the relativistic regime (i.e.  $\rho > \rho_{\text{rel}}$ ), we have:

$$\text{Quantum effects non-negligible} \iff T \rho^{-1/3} < 1.5 \cdot 10^7 \mu \mu_e^{-4/3} \text{ [cgs]} \quad (4.57)$$

#### 4.4.4 Radiation and degenerate gas pressures

Determinemos si estos dos dominios, separados por el régimen clásico de los gases ideales a baja densidad y temperatura, acaban por intersecarse cuando la densidad y la temperatura aumentan. Para ello, procederemos mediante una reductio ad absurdum. En primer lugar, suponemos que esta intersección se produce cuando el gas degenerado se encuentra todavía en el régimen no relativista (i.e.  $\rho < \rho_{\text{rel}}$ ). Si es así, tenemos:

$$P_r = P_d \iff \rho \sim 20 \rho_{\text{rel}} \mu^{-4} \mu_e^{-5} \quad (4.58)$$

Para un gas hidrógeno completamente ionizado ( $\mu = 1/2$  y  $\mu_e = 1$ ), vemos que esta relación implica que  $\rho > \rho_{\text{rel}}$  lo que significa que no hay intersección entre las dos fronteras antes de llegar al régimen relativista. Sin embargo, una vez en el régimen relativista, las fronteras son paralelas ya que ambas verifican  $T \propto \rho^{1/3}$ , por lo que no pueden intersecarse. En este caso, siempre hay un dominio de densidad y temperatura donde domina la presión clásica del gas ideal entre los dominios radiativo y degenerado.

Para un gas de helio completamente ionizado ( $\mu = 4/3$  y  $\mu_e = 2$ ) o en el núcleo de estrellas evolucionadas, ricas en elementos más pesados, los dos dominios pueden intersecarse antes de que se alcance una densidad correspondiente al régimen relativista. En este caso, la frontera viene dada por  $T \propto \rho^{\Gamma/4}$  con  $\Gamma = 5/3$  en el régimen no relativista y  $\Gamma = 4/3$  en el relativista.

#### 4.4.5 Resumen

A partir de las relaciones (4.52), (4.56) y (4.57), junto con la densidad umbral  $\rho_{\text{rel}}$  dada por la ecuación (4.54), podemos ahora trazar los dominios de predominio de cada tipo de presión.

Lo hacemos en la Fig. 4.1 donde los dominios amarillo, azul y rosa corresponden a los dominios donde predominan respectivamente la presión de radiación, la presión de gas ideal clásica y la presión de gas degenerado de electrones. La línea punteada vertical negra corresponde a la transición estimada (4.54) entre los regímenes no relativista y relativista para un gas degenerado de electrones. Está cerca de la transición real que obtenemos por la intersección de las líneas dadas por las ecuaciones (4.56) y (4.57). En la región azul más oscura, el gas ya no es ideal y deben tenerse en cuenta las interacciones de Coulomb, como se explica en la sección 1.3.1. Los 4 conjuntos de puntos corresponden a resultados de modelos de estructura detallada para estrellas homogéneas de secuencia principal de composición química solar y masas de  $0,1M_{\odot}$ ,  $1M_{\odot}$ ,  $10M_{\odot}$  y  $100M_{\odot}$ , de abajo a arriba (de la Fig.3.4 del curso de Puls). Los puntos de menor densidad y temperatura son los más alejados del centro estelar. Vemos que la suposición clásica de gas ideal es esencialmente válida para el Sol desde el núcleo hasta la envoltura exterior. Sin embargo, en las estrellas de la secuencia principal de  $0,1 M_{\odot}$ , la presión de degeneración de los electrones es importante (excepto en las capas externas) y las interacciones de Coulomb no pueden despreciarse. Para estrellas de secuencia principal de  $10M_{\odot}$ , la presión de radiación se vuelve importante y empieza a dominar para estrellas de secuencia principal de  $100M_{\odot}$ .

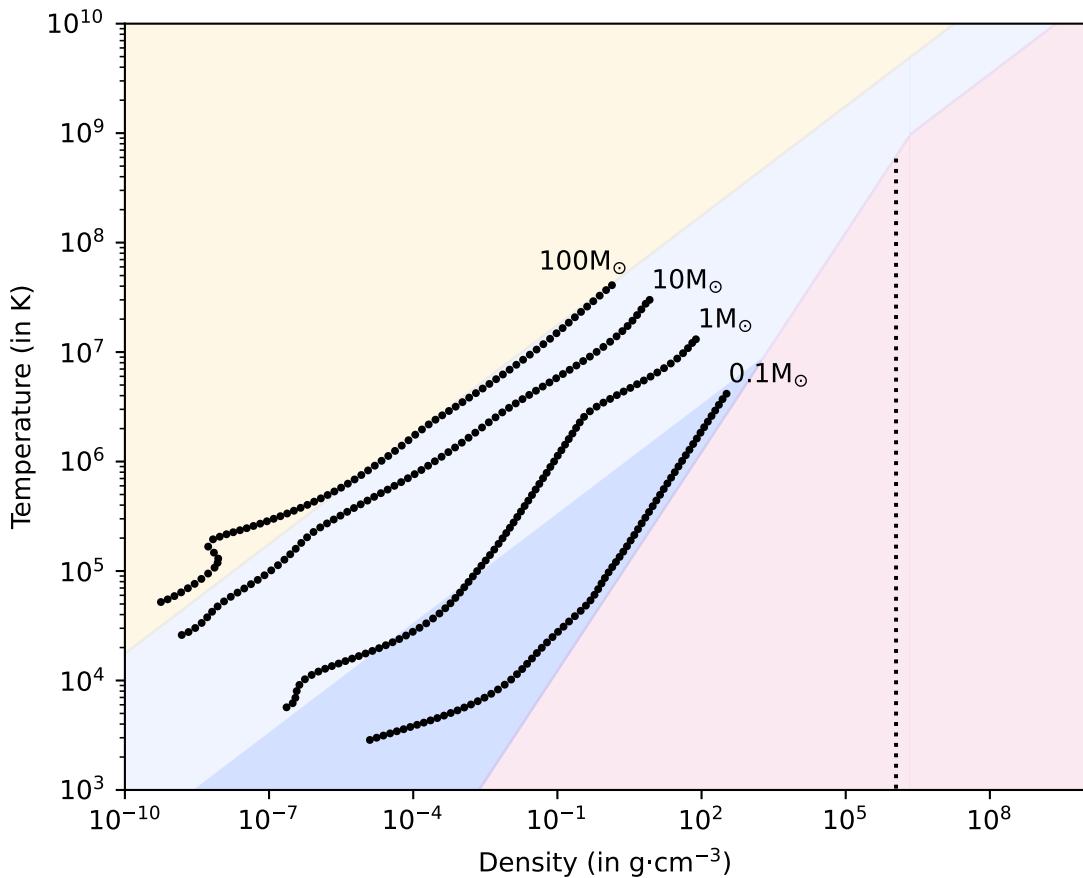


FIGURE 4.1: Regions where radiation pressure, classic ideal gas pressure, electron degeneracy pressure dominate (yellow, blue and pink respectively), for a chemical composition similar to the Solar surface, that is to say  $X \sim 0.74$ ,  $Y \sim 0.24$  and  $Z \sim 0.02$  (source: [Asplund et al. 2021](#)), corresponding to  $\mu \sim 0.60$  and  $\mu_e \sim 1.15$ . See text for details.

### Chemical composition

Implement, in the provided Jupyter notebook `eos.ipynb`, a slider to produce an interactive version of Fig. 4.1 and see the influence of  $\mu$  and  $\mu_e$ .

# Chapter 5

## Polytropes - Part II

XXX We treat three examples representative of 3 regimes described in chapter ??: white dwarfs (section 5.1) where pressure is essentially from a degenerate gas of electrons, the Sun (section 5.2) where pressure comes from an ideal gas and very massive stars (section 5.3) where pressure is dominated by radiation.

### 5.1 White dwarfs

P 5.4  
9.8  
L 6.10.1

#### 5.1.1 Equation of state

En las enanas blancas, la presión está dominada por un gas de electrones completamente degenerado ( $m = m_e$  y  $g = 2$ ), afirmación que validaremos a posteriori. En este régimen, la presión no depende de la temperatura: el enfriamiento progresivo de la enana blanca no pone en peligro el equilibrio entre gravedad y presión. Hemos visto en la sección 4.2.3 que para un gas de electrones completamente degenerado, la ecuación de estado puede sustituirse por una relación politrópica  $P = K\rho^{1+1/n}$  que nos permite acceder directamente a la presión sin tener que resolver la ecuación de conservación de la energía. En su lugar, podemos centrarnos en las ecuaciones de continuidad e hidrostática para el equilibrio mecánico de una enana blanca. Lo más importante es que, en este caso concreto, la constante politrópica  $K$  no es un grado de libertad: su valor lo fijan las constantes físicas.

La composición química de una enana blanca es importante para determinar el valor del peso molecular medio de los electrones  $\mu_e$  que entra en la expresión de  $K$ . Al ser el producto final de la evolución de estrellas de masa baja e intermedia (i.e. con masas iniciales inferiores a  $\sim 8M_\odot$ ), las enanas blancas son pobres en hidrógeno y están compuestas esencialmente de helio (enanas blancas de He) o carbono y oxígeno (enanas blancas de CO). En consecuencia, esperamos  $\mu_e \sim 2$ .

#### Non-relativistic regime

Para una enana blanca con una masa total suficientemente pequeña, el gas de electrones es no relativista. En 4.2.3, hemos visto que corresponde a un índice politrópico  $n = 3/2$  y una constante politrópica  $K$  dada por:

$$K = \frac{\hbar^2}{20m_e(\mu_e m_p)^{5/3}} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \sim \frac{1.0036 \cdot 10^{13}}{\mu_e^{5/3}} \text{ cm}^4 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{g}^{-2/3} \quad (5.1)$$

#### Relativistic regime

A medida que la masa de una enana blanca aumenta, también lo hace su densidad central, una propiedad que veremos en la sección 5.1.3 más adelante. En algún momento, alcanza el valor que estimamos en la sección 4.4.2, cuando la energía de Fermi es tan alta que los momentos de las partículas son del orden de  $m_e c$ . El gas de electrones puede entonces

tratarse como relativista. En la sección 4.2.3, hemos visto que en este régimen, tenemos un índice politrópico  $n = 3$  y una constante politrópica  $K$  dada por:

$$K = \frac{hc}{4(\mu_e m_p)^{4/3}} \left( \frac{3}{4\pi g} \right)^{1/3} \sim \frac{1.2435 \cdot 10^{15}}{\mu_e^{4/3}} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{g}^{-1/3} \quad (5.2)$$

### 5.1.2 Mass and radius

La ecuación (3.20) da la masa total  $M$  de un politrópodo de índice  $n$  y constante  $K$  en función de su radio  $R$ :

$$M = 4\pi M_n \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{n-1}} \xi_{0,n}^{-\frac{n-3}{n-1}} \cdot R^{\frac{n}{n-1}} \quad (5.3)$$

donde  $\xi_{0,n}$  es el punto donde la densidad se anula (i.e. el radio adimensional). Vemos que para  $n = 3$ , la masa ya no depende del radio. Trataremos pues los dos casos por separado, ya que las situaciones son cualitativamente diferentes.

#### Non-relativistic case

Podemos obtener los valores de  $M_n$  y  $\xi_{0,n}$  a partir de la integración numérica de la ecuación de Lane-Emden para encontrar que<sup>1</sup>

XXX Tabla de KWW tabla 19.1 y Christ tablas 4.1 y 4.2

$$M_n \sim 2.71406 \quad \text{and} \quad \xi_{0,n} \sim 3.65375 \quad \text{for} \quad n = 3/2 \quad (5.4)$$

Entonces, tenemos la siguiente relación masa-radio para una enana blanca de baja masa:

$$M = 0.26 \left( \frac{2}{\mu_e} \right)^5 \left( \frac{R}{0.02R_\odot} \right)^{-3} M_\odot \quad (5.5)$$

donde trabajamos con valores de la masa y el radio típicos de una enana blanca de baja masa. Vemos que cuanto mayor es la masa de la enana blanca, menor es el radio.

#### Relativistic case

En el caso de una enana blanca de mayor masa, el gas de electrones se vuelve relativista y  $n = 3$ , por lo que la masa ya no depende del radio (ni de  $\xi_{0,n}$ ). En su lugar, se establece un valor fijo que sólo depende de la composición química a través del peso molecular medio de los electrones  $\mu_e$ . La integración numérica de la ecuación de Lane-Emden da:

$$M_n \sim 2.01824 \quad \text{for} \quad n = 3 \quad (5.6)$$

que reinyectamos en la ecuación (5.3). Entonces, tenemos la siguiente masa de una enana blanca en el límite cuando la presión es totalmente debida a un gas relativista y completamente degenerado de electrones:

$$M = M_{\text{Ch}} = 1.46 \left( \frac{2}{\mu_e} \right)^2 M_\odot \quad (5.7)$$

<sup>1</sup>También puede comprobar sus resultados con los valores dados en la tabla ??.

donde  $M_{\text{Ch}}$  es la masa máxima de Chandrasekhar cuyo significado se explica en la siguiente sección.

### KWW 19.7 5.1.3 Chandrasekhar maximum mass

Investiguemos las condiciones de validez del régimen no relativista a la luz de la sección 4.4.2 aumentando progresivamente la masa de una enana blanca de baja masa. Inicialmente, nuestro régimen no relativista es válido. En efecto, para  $n = 3/2$ , tenemos una densidad del núcleo dada por la ecuación (3.22):

$$\rho_c = -\frac{\xi_0}{3 d_\xi w|_{\xi_0}} \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (5.8)$$

Obtenemos los valores de  $\xi_0$  y  $d_\xi w|_{\xi_0}$  a partir de la integración numérica de la ecuación de Lane-Emden:

$$\begin{cases} \xi_0 \sim 3.65375 \\ -d_\xi w|_{\xi_0} \sim 0.20330 \end{cases} \quad (5.9)$$

Con los valores de masa y radio en la relación masa-radio (5.5), la ecuación (5.8) da una densidad del núcleo:

$$\rho_c \sim 2.7 \cdot 10^5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \quad (5.10)$$

que es menor que el valor umbral que derivamos en la ecuación (4.54). Dado que en el resto de la enana blanca la densidad es incluso menor que la del núcleo, significa que en una enana blanca de masa  $M = 0,26 M_\odot$ , el gas completamente degenerado de electrones es no relativista.

Sin embargo, a medida que la masa de la enana blanca aumenta, el radio disminuye y la densidad del núcleo aumenta rápidamente. La corrección relativista empezará a ser no despreciable primero en el núcleo, mientras que las partes exteriores permanecerán inicialmente no relativistas.

Determine la masa y el radio típicos de una enana blanca en la que la densidad del núcleo alcanza el valor umbral ( $\rho_c \sim 1 \cdot 10^6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ), suponiendo que el gas degenerado de electrones todavía puede suponerse no relativista en el umbral.

Cuando la masa alcanza la masa máxima de Chandrasekhar dada en la ecuación (5.7), toda la enana blanca contendrá un gas de electrones relativista y completamente degenerado. Para comprender lo que le ocurriría a una enana blanca que superase este límite, estimemos la evolución de la relación  $f_g/f_p$ , que da la magnitud de las fuerzas gravitatorias respecto a las de presión, en función de la masa. El término gravitatorio en la ecuación hidrostática (2.46) expresada con coordenadas de masa puede aproximarse utilizando la masa total y el radio de la enana blanca para obtener:

$$f_g \sim \frac{GM}{4\pi R^4} \quad (5.11)$$

Por otra parte, la fuerza de presión se estima mediante la siguiente relación, en la que hemos utilizado la relación politrópica:

$$f_p \sim \frac{P}{M} \propto \frac{\rho^{1+1/n}}{M} \propto \frac{M^{1/n}}{R^{3+3/n}} \quad (5.12)$$

For  $n = 3$ , we have:

$$\frac{f_g}{f_p} \propto M^{2/3} \quad (5.13)$$

lo que significa que si la masa de una enana blanca supera la masa máxima de Chandrasekhar, la gravedad tomará el control y la presión del gas relativista y completamente degenerado de electrones no podrá compensar la atracción gravitatoria adicional: más allá de la masa máxima de Chandrasekhar, la enana blanca colapsaría en una estrella de neutrones o en un agujero negro.

L 6.11

En una variable cataclísmica, una enana blanca está en órbita con una compañera estelar. La enana blanca captura (a.k.a. acreta) material estelar y su masa aumenta progresivamente. Poco antes de alcanzar el límite de Chandrasekhar, se suele suponer que la ignición del carbono provoca una reacción incontrolada que consume la enana blanca antes de que colapse (aunque aún no está claro si, en algunas condiciones, podría quedar un resto de enana blanca): es el mecanismo que se considera responsable de las supernovas de tipo Ia. La cantidad relativamente fija de masa implicada en el proceso conduce a una luminosidad intrínseca fija, razón por la cual utilizamos las supernovas de tipo Ia como candelas estándar para medir distancias.

Determinar la dependencia de la relación  $f_g/f_p$  de la masa y radio de la enana blanca en el régimen no relativista.

KWW 15.2

#### 5.1.4 Full model

37.1

Los resultados no relativistas y relativistas anteriores son casos límite. En la práctica, a medida que aumenta la masa de la enana blanca, el gas de electrones completamente degenerado pasa suavemente de las relaciones politrópicas no relativistas a las relativistas.

P Fig. 5.2 KWW Fig. 37.3 37.4 FIG 11.8 POLS

### Sirius B et al.

En la sección 1.3.2, estimamos la masa y el radio de la enana blanca Sirio B en la binaria visual Sirio:  $M \sim 0,9M_{\odot}$  y  $R \sim 0,007R_{\odot}$ . En abril-mayo, en Santiago, Sirio es visible por el Oeste poco después de la puesta de Sol.

1. ¿Qué peso molecular electrónico medio  $\mu_e$  necesitaríamos para que estos valores fueran coherentes con la relación masa-radio de las enanas blancas de baja masa,(5.5)? ¿Es realista? Dada la masa de Sirio B, ¿es legítimo utilizar esta relación masa-radio en primer lugar?
2. Con el modelo completo, donde tenemos en cuenta tanto la energía de la masa en reposo y el impulso en la energía total, calcular numéricamente la relación masa-radio.
3. ¿En qué se diferencia esta relación masa-radio de la de las enanas blancas de baja masa?
4. ¿Son los parámetros de Sirio B coherentes con la relación masa-radio del modelo completo?
5. Reúna los datos necesarios para reproducir este ejercicio completo (desde la binaria visual hasta la determinación de la masa y el radio de la enana blanca) para otras dos enanas blancas: Procyon B y 40 Eridani B. La estrella primaria del sistema triple 40 Eridani, Keid, es visible a simple vista, y también lo es Procyon A. Procyon está ligeramente más al Norte que Sirio, mientras que 40 Eridani está un poco por delante de ambas.

## KWW 37.2 5.1.5 Corrections

### 5.1.6 Observations

#### Masses

##### L 6.10.1 Chemical composition and spectral classification

Observed WD masses are mostly in a narrow range around  $0.6 M_{\odot}$ , which corresponds to the CO core mass of low-mass ( $\lesssim 2 M_{\odot}$ ) AGB progenitors.

The great majority of white dwarfs are indeed composed of C and O. Those with  $M < 0.45 M_{\odot}$  are usually He white dwarfs, formed by a low-mass star that lost its envelope already on the RGB. This is not expected to happen in single stars, but can result from binary interaction and indeed most low-mass WDs are found in binary systems. White dwarfs with  $M > 1.2 M_{\odot}$ , on the other hand, are mostly ONe white dwarfs. They result from stars that underwent carbon burning in the core but developed degenerate ONe cores, which is expected to happen in a small initial mass range around  $8 M_{\odot}$ .

Conny: The white dwarfs mainly exist of C, O, and thin outer layers of He and possibly H. The ratios depend on the efficiency of the helium burning. In general, the more massive white dwarfs contain more carbon. From spectroscopic observations it is deduced that the composition of the stellar atmosphere can be quite different. The most frequent are white dwarfs with an atmosphere mainly consisting of hydrogen. These are DA white dwarfs. 80% of the known white dwarfs are of type DA. There is also a group of white dwarfs with atmospheres mainly consisting of helium. These are the DB white dwarfs. Their percentage is about 20%. A very small number of white dwarfs has an atmosphere with a special chemical composition and does not belong to the two main classes. They are divided into different

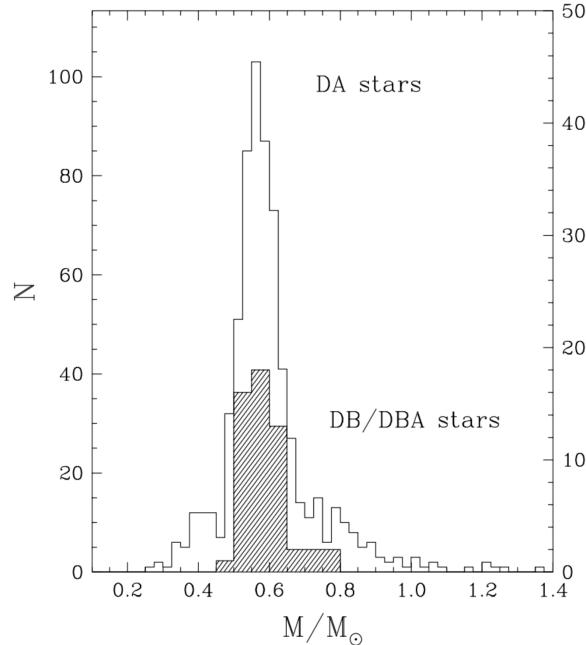


FIGURE 5.1: Distribución observada de la masa de las enanas blancas, para una amplia muestra de enanas blancas DA y una muestra más pequeña de enanas blancas DB. Las enanas blancas aisladas muestran un pico agudo alrededor de  $0.6 M_{\odot}$ . Se debe a la acción combinada del FMI (las estrellas de menor masa son más numerosas) y de los tiempos de vida estelar (las estrellas de baja masa viven tanto que aún no han alcanzado la fase de enana blanca). En Bergeron et al. 2007.

classes depending on the observed spectral lines of certain chemical elements. The effective temperature of white dwarfs cover a large interval from 200 000 K to 4 000 K. The majority of these stars thus has a temperature higher than the Sun, therefore the term "white" dwarf has been introduced.

#### L. Table 6.8

#### Spectral type D for "degenerate" Luminosity class VII in HR

The surface composition of white dwarfs is usually completely different than their interior composition. The strong surface gravity has resulted in separation of the elements, such that any hydrogen left is found as the surface layer while all heavier elements have settled at deeper layers. Most white dwarfs, regardless of their interior composition, therefore show spectra completely dominated by H lines and are classified as DA white dwarfs. A minority of white dwarfs show only helium lines and have spectroscopic classification DB. These have lost all hydrogen from the outer layers during their formation process, probably as a result of a late or very late thermal pulse.

## 5.2 The Sun

P 5.6 A continuación derivaremos la parte mecánica (perfíles de densidad y presión i.e.) de la estructura interna del Sol a partir de un modelo básico. Consideraremos una estrella compuesta por un gas ideal clásico no relativista, hipótesis que se verificará a posteriori. Si tenemos en cuenta también la presencia de radiación, la presión total es:

$$P = P_g + P_r = \frac{k_B}{\mu m_p} \rho T + \frac{1}{3} a T^4 = \frac{k_B}{\mu m_p} \frac{1}{\beta} \rho T \quad (5.14)$$

Ahora, hacemos una suposición que puede parecer artificial pero que será motivada en la sección ??, una vez que introduzcamos el concepto de opacidad: tomemos  $\beta$  uniforme a través de toda la estrella<sup>2</sup>. Entonces:

$$1 - \beta = \frac{aT^4}{3P} \quad \text{is uniform and} \quad T = \left[ \frac{3P}{a} (1 - \beta) \right]^{1/4} \quad (5.15)$$

that we reinject in the expression (5.14) of the total pressure to get:

$$P^{3/4} = \frac{k_B}{\mu m_p} \frac{1}{\beta} \left[ \frac{3(1 - \beta)}{a} \right]^{1/4} \rho \quad (5.16)$$

so this star obeys the polytropic relation:

$$P = K\rho^{1+1/n} \quad \text{with} \quad \begin{cases} n = 3 \\ K = \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} \left(\frac{k_B}{\mu m_p}\right)^{4/3} \left(\frac{1-\beta}{\beta^4}\right)^{1/3} \end{cases} \quad (5.17)$$

### Who loves the Sun

The Sun has a mass  $M_\odot \sim 2 \cdot 10^{33}$ g.

1. Suponiendo que el Sol está bien descrito por la hipótesis anterior de una  $\beta$  uniforme, deducir una expresión de  $K$  en función de variables conocidas, utilizando la expresión (3.18) de la masa total  $M$  con  $n = 3$ .
2. La composición química del Sol es  $X \sim 0,7$  y  $Y \sim 0,3$ . Determinar  $\mu$ .
3.
  - a. Utilizando el valor de  $M_n$  para  $n = 3$  dado en la ecuación (5.6), calcular el valor de  $1 - \beta$ .
  - b. Evaluar  $\beta$  utilizando un método alternativo basado en un algoritmo de búsqueda de raíces y los siguientes valores en la fotosfera: el radio  $R_\odot$  de la fotosfera, su luminosidad  $L_\odot$ , su temperatura  $T \sim 5.500$ K y su densidad  $\rho \sim 2 \cdot 10^{-7}$ g·cm<sup>-3</sup>.
  - c. Verificar que ambos valores de  $\beta$  son similares y concluir si este modelo de Sol está dominado por gas o por radiación.
4. Utilice la tabla ?? para calcular  $\rho_c$ ,  $P_c$  y  $T_c$ .
5. Simulación numérica: calcular los perfiles de estructura interna de densidad, presión y temperatura. Superponer estos perfiles en el diagrama log  $T$  – log  $\rho$  de la sección 4.4 para verificar a posteriori que el material solar es no-degenerado.

En la pregunta 1. anterior, nótese que aunque  $n = 3$  como para un gas relativista y completamente degenerado de electrones, la situación es muy diferente ya que aquí,  $K$  es un grado de libertad y puede tomar valores diferentes de una estrella a otra. En consecuencia, la masa no tiene nada que ver con una masa máxima como la dada por el límite de Chandrasekhar (5.7).

<sup>2</sup>Es la hipótesis central del modelo estándar de Eddington del Sol.

### 5.3 Very massive stars

1. Para una estrella formada por hidrógeno puro y totalmente ionizado, determine  $\mu$ .
2. Suponga  $\beta = P_g/P$  uniforme a través de la estrella y deduzca la relación entre la masa total  $M$  y  $\beta$  (a.k.a. ecuación cuártica de Eddington).
3. Trazar la masa total  $M$  en función de  $\beta$ .
4. Determinar aproximadamente la masa estelar a partir de la cual la presión está dominada por la radiación.
5. ¿Cómo evoluciona  $\mu$  con las reacciones nucleares? Para una masa fija, ¿aumentará o disminuirá  $\beta$  a medida que la estrella quema su combustible?

### 5.4 When are classic ideal gases polytropes?

En general, un gas ideal clásico no es un polítopo, ya que la ley de los gases ideales indica que la presión depende tanto de la densidad como de la temperatura. Sin embargo, hemos visto algunos casos específicos en los que un gas ideal clásico se comporta como un polítopo:

- cuando sufre una transformación isentrópica (véase la sección 1.3.6). En este caso,  $\Gamma = \gamma$ . Veremos que puede interpretarse como el caso en que el gas es ineficiente para irradiar: como consecuencia, se calienta (resp. se enfriá) muy rápidamente si se comprime (resp. se expande).
- Cuando sufre una transformación isotérmica. Entonces,  $T$  es constante por lo que la ley de los gases ideales da  $P \propto \rho$  (i.e.  $\Gamma = 1$ ). Veremos que la interpretación de esta suposición puede ser doble: (i) si se comprime (e.g., en un proceso de acreción), el gas es tan eficiente irradiando que su temperatura no aumenta, (ii) si se expande (e.g., en el viento solar Parker), sigue absorbiendo radiación lo que mantiene su temperatura.
- cuando tenemos en cuenta la presión de radiación, la presión total obedece a una relación politrópica, siempre que supongamos una relación uniforme  $\beta = P_g/(P_g + P_r)$ .

En cuanto al intervalo entre las transformaciones isentrópicas e isotérmicas, se invita al lector a consultar el excelente artículo de la Wikipedia sobre procesos politrópicos, donde el índice politrópico se describe en términos de intercambios de calor y trabajo.

## **Part II**

# **Thermal equilibrium**

# Chapter 6

KWW 3

L 2.3

P 2.4 2.5

## Gravito-thermal energy budget

Before deriving the proper equations for energy conservation and transport in a star, we will see the virial theorem (section 6.2), a consequence of the hydrostatic equilibrium of a sphere of gas. It is a statement about the gravito-thermal energy budget of a sphere of gas in hydrostatic equilibrium: in this chapter, we focus on the internal energy and the gravitational potential energy, and ignore the nuclear and neutrino energy content of the star (see chapter 7). It relates the two main energy reservoirs in a star: the gravitational potential energy (section 6.1) and the internal energy. Even it cannot fully describe the thermal equilibrium of the star, a task we reserve to chapter 7, it provides a powerful tool to predict the behavior of a star when its properties evolve. It also highlights a new characteristic timescale of interest, the thermal timescale (section 6.3). Interestingly enough, the results highlighted in this section apply to any sphere of gas in hydrostatic equilibrium, which can also be a cloud in the interstellar medium susceptible to contract to form stars.

### 6.1 Gravitational potential energy

The gravitational potential energy of a sphere of mass  $M$  and radius  $R$  can be interpreted through an onion metaphor. Let us assume that we want to peel a shell of infinitesimal thickness  $dr$  and mass  $dm$  at the outer edge of the sphere. What is the energy binding this shell to the rest of the star? We know from classic mechanics that the work necessary to bring a mass  $m_1$  from a distance  $r$  from a mass  $m_2$  to infinity is:

$$\begin{aligned} W &= \int_{+\infty}^r F(\xi) d\xi \quad \text{with} \quad F(\xi) = -G \frac{m_1 m_2}{\xi^2} \quad \text{the gravitational force at a fiducial distance } \xi \\ W &= G m_1 m_2 \int_{+\infty}^r d\left(\frac{1}{\xi}\right) = G \frac{m_1 m_2}{r} \end{aligned} \tag{6.1}$$

The gravitational potential energy, which can be interpreted as the bounding energy between the two masses before they were pulled away from each other, is  $E_p = -W < 0$ . By analogy, the infinitesimal gravitational potential energy  $dE_p$  associated to the aforementioned thin shell is the opposite of the work needed to bring this shell from its initial position (at a radius  $R$ , with an amount of mass  $M$  below it) to infinity:

$$dE_p = -G \frac{M dm}{R} \tag{6.2}$$

More generally, the infinitesimal gravitational potential energy of any shell at any radius  $r$  is:

$$dE_p = -G \frac{m(r) dm}{r} \tag{6.3}$$

where  $m(r)$  is the amount of mass encompassed within the sphere of radius  $r$ , such as  $m(r = R) = M$  and  $\forall r < R, m(r) < M$ . As a consequence, the total gravitational potential energy of a sphere of gas of mass  $M$  and radius  $R$  is given by:

$$E_p = \int_{E_p(r=0)}^{E_p(r=R)} dE_p = - \int_0^M G \frac{m(r)dm}{r} = -\alpha \frac{GM^2}{R} \quad (6.4)$$

where the function  $m(r)$  is a priori unknown and where we introduce the dimensionless factor  $\alpha$  which is of the order of 1 and depends on the shape of the mass profile (i.e. how the mass is distributed inside the star). We see from this expression that, for a given total amount of mass, the more concentrated the mass will be near the center of the star, the highest  $\alpha$  will be. It means that if the star contracts,  $\dot{E}_p < 0$ .

### Specific cases

Compute the value of  $\alpha$  (i) for  $\rho = \rho_0$  uniform, (ii) for  $\rho = \rho_c [1 - (\frac{r}{R})]$  and (iii) for  $\rho = \rho_c [1 - (\frac{r}{R})^2]$  with  $\rho_c$  and  $R$  two constants. Is the statement above on the evolution of  $E_p$  as the star contracts corroborated?

## 6.2 The virial theorem

### 6.2.1 General expression

In hydrostatic equilibrium, we can transform the hydrostatic equation to make a statement about energies. In the hydrostatic equation in terms of mass (2.46), the left hand side is an energy per unit volume (homogeneous to a pressure) per unit mass. To obtain energy, we need to multiply by a volume<sup>1</sup>  $4\pi r^3$  and integrate over the masses  $dm$  between  $m = 0$  and  $m = M$ , and we get:

$$\int_0^M 4\pi r^3 \frac{dP}{dm} dm = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm \quad (6.5)$$

where we recognize the gravitational potential energy in the right hand side. Let us integrate by part the left hand side to obtain:

$$\int_0^M 4\pi r^3 \frac{dP}{dm} dm = 4\pi r^3 P \Big|_0^M - 12\pi \int_0^M r^2 \frac{dr}{dm} P dm \quad (6.6)$$

where the derivative in the second term of the right hand side comes from the dependence of  $r$  on the mass coordinate  $m$ . The first term on the right hand side is 0 since  $r(m = 0) = 0$  and  $P(m = M)$  (i.e. the pressure at the surface) is negligible compared to the other terms. We replace  $dr/dm$  by the hydrostatic expression of the continuity equation (2.20) and we get the simplified form of equation (6.5):

$$E_p = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm \quad (6.7)$$

which is the general expression of the virial theorem for a sphere of gas in hydrostatic equilibrium.

<sup>1</sup>The factor  $4\pi$  is to make the gravitational potential energy appear in the first term.

In Physics, the virial theorem is a very general theorem which connects the kinetic energy of a collection of particles at equilibrium to the potential energy of the conservative forces between them. Here, the kinetic energy of the particles in the star manifests as the internal energy.

### 6.2.2 Total energy

Motivated by the results of section 4.1.3, we introduce  $\zeta$  such that the internal energy per unit mass<sup>2</sup>  $u$  is given by:

$$u = \frac{3}{\zeta} \frac{P}{\rho} \quad (6.8)$$

Non-relativistic classic ideal gas

In general,  $\zeta$  is a function of  $r$  but for a non-relativistic classic ideal gas, we know from equation (A.80) that  $\zeta = 3(\gamma - 1)$ .

The total internal energy  $U$  is defined the integral of  $u$  over the whole mass so if  $\zeta$  is uniform (e.g., for a classic ideal gas), we have the simplified expression of the virial theorem:

$$\zeta U + E_p = 0 \quad (6.9)$$

So the mass and the radius of a star (which enable to evaluate  $E_p$ ) tell us something about the total internal energy of a star and by then, about its average internal temperature.

---

<sup>2</sup>Here, we integrate over masses so we prefer working with the internal energy per unit mass rather than per unit volume, hence the  $\rho$  at the denominator.

### Boiling room

We assume that a star is exclusively composed of a non-relativistic classic monoatomic ideal gas.

1. Using the equipartition theorem, express the local internal energy per unit mass as a function of the local temperature.
2. Deduce the average temperature as a function of the total mass and internal energy.
3. Using the virial theorem, express the average temperature as a function of the mass and radius of the star (and of  $\alpha$ ).
4. Estimate the average temperature of the Sun.
5. Since the temperature in a star normally decreases outwards, the average temperature is a lower limit on the temperature at the core. What is the thermal energy per particle at the Sun's average temperature?

The ionization potential of hydrogen is 13.6eV so the thermal energy per particle is much greater than the ionization potential of hydrogen. As a consequence, any collision will lead to ionization, and we conclude that hydrogen and helium are completely ionized, and even heavier elements are found in highly ionized forms. Stellar material is therefore a plasma, a mixture of ions – nuclei stripped of almost all their electrons – and free electrons. Furthermore, a temperature of  $\sim 10^7$ K at the core is high enough for hydrogen fusion to take place in the central regions of the Sun.

We can define the total energy  $E$  of a star as the sum between its internal energy and its gravitational potential energy:

$$E = U + E_g \quad (6.10)$$

For the star to be gravitationally bound, the total energy must be negative. In the case of a uniform  $\zeta$  parameter, we have:

$$E = (1 - \zeta)U = \frac{\zeta - 1}{\zeta}E_g \quad (6.11)$$

We see from this expression that if the total energy is conserved, the internal energy and the gravitational potential energy are also conserved: the star cannot, for example, contract and cool while keeping its total energy constant.

If the star is not in hydrostatic equilibrium, the virial theorem is not valid as such and we need to account for the kinetic energy (e.g., due to bulk motions of gas inside the star) in the total energy.

**KWW 19.9** Gravito-thermal energy budget and thermal equilibrium of a polytrope.

### 6.2.3 Thermal equilibrium

Apart when  $\zeta = 1$  (see exercise "Relativistic case" below), the expression (6.10) means that the total energy, the internal energy and the gravitational potential energy of a star are linked

to each other: a change of one must provoke a change of the others to maintain thermal equilibrium. Most importantly, the star radiates its energy at a rate given by its luminosity  $L = -\dot{E}$  (which is positive by convention).

### Non-relativistic classic ideal gas

For a non-relativistic classic ideal gas, it gives:

$$L = \dot{U} = -\frac{1}{2}\dot{E}_g \quad (6.12)$$

which means that as a star radiates, it contracts ( $\dot{E}_g < 0$ ) and heats ( $\dot{U} > 0$ ). The surprising fact that a star heats up while losing energy can be described by saying that the star has a negative specific heat. Half the energy liberated by contraction is used for heating the star, the other half is radiated away.

#### Nuclear reactions

In reality, we will see that nuclear reactions in the core of a star on the main sequence provide it with an energy source which compensates the energy lost by radiation: energy is radiated away at the surface at the same rate at which it is produced by nuclear reactions in the interior. The star neither expands nor contracts, and it maintains a constant interior temperature. We shall see later that this temperature is regulated by the nuclear reactions themselves, which in combination with the virial theorem act like a stellar thermostat. Main-sequence stars like the Sun are in thermal equilibrium, and a star can remain in this state as long as nuclear reactions can supply the necessary energy. A star where the pressure is dominated by a non-relativistic classic ideal gas is in stable thermal equilibrium since if the rate of nuclear reactions temporarily exceeds the stellar luminosity, the star expands and cools. Since the nuclear reaction rates typically increase strongly with temperature, the rate of nuclear burning and will decrease as a result of this cooling until thermal equilibrium is restored.

#### Relativistic case

1. What is the value of  $\zeta$  for a relativistic ideal gas?
2. Comment on the stability of a fully relativistic star

## 6.3 Thermal timescale

We can now introduce a new relevant timescale, in addition to those seen in section 2.6: the thermal timescale (a.k.a. Kelvin-Helmholtz timescale). It describes how fast changes in the thermal structure of a star can happen, that is to say the timescale on which the star reacts when the thermal equilibrium is perturbed. Due to the virial theorem, it is also the characteristic timescale at which a star without a nuclear energy source contracts by radiating away its internal energy:

$$\tau_{\text{KH}} = \left| \frac{\dot{E}}{\dot{\dot{E}}} \right| \quad (6.13)$$

Using the equation (6.11), we deduce:

$$\dot{R} = \frac{\zeta}{2(\zeta - 1)} \frac{1}{\tau_{\text{KH}}} R \quad (6.14)$$

which gives, for a constant  $\zeta$  and  $\tau_{\text{KH}}$ , the evolution of the radius as the star contracts and radiates away its internal energy. For realistic conditions, the characteristic nuclear, thermal and dynamic timescales of a star are such that we have:

$$\tau_{\text{ff}} \ll \tau_{\text{KH}} \ll \tau_{\text{nuc}} \quad (6.15)$$

which means that a star can correct a perturbed mechanic equilibrium faster than it can correct a perturbed thermal equilibrium: the timescale necessary to recover from a pressure distortion is much shorter than the thermal and nuclear timescales. This means that, if a star contracts on a thermal timescale, a new pressure equilibrium can always be installed quasi-instantaneously: during the contraction, the star remains in hydrostatic equilibrium and the virial theorem stays valid. The rates of nuclear reactions determine the pace of stellar evolution, and over a nuclear timescale, a star may be assumed to be both in hydrostatic ( $\tau_{\text{ff}} \ll \tau_{\text{nuc}}$ ) and thermal equilibrium ( $\tau_{\text{KH}} \ll \tau_{\text{nuc}}$ ). This enables a great simplification in making models of stars. Our approach to making stellar models for the rest of the course will therefore proceed through a series of steps:

1. Assume that the star is in perfect mechanical equilibrium and compute its luminosity.
2. Assume that the star is in perfect thermal equilibrium and compute the nuclear reaction rate required to provide this luminosity.
3. Evolve the chemical makeup of the star using the derived reaction rates (chapter 2).

Since the thermodynamic conditions vary a lot between the core and the surface, we want to perform these steps shell by shell, accounting for chemical mixing between shells. For a star that is powered by hydrogen burning into helium, we just need to keep track of the mass of hydrogen and the mass of helium within it.

#### Is the Sun gravity-powered?

1. What is the thermal timescale of the Sun?
2. Estimate the annual change in the solar radius, if one were to assume that the entire solar luminosity came from gravitational contraction.
3. The best current measurements of the solar radius have a precision of  $\pm 0.1''$ . For how long should one observe the Sun to detect such a radius change?
4. If the Sun was powered by gravitational contraction, what would be, at most, its age?

In the late XIX<sup>th</sup> century, before the physics of nuclear reactions was understood, Kelvin and Helmholtz proposed that the Sun was powered by gravitational contraction. It led to an age of the Sun and an upper limit to the age the Earth which was in conflict with emerging geological evidence, which required the Earth to be much older. It was also abundantly used as an argument against the Darwinian theory of evolution. Nuclear reactions have since turned out to be a much more powerful energy source than gravitational contraction, allowing stars to be in thermal equilibrium for most ( $> 99\%$ ) of their lifetimes. However, several phases of stellar evolution, during which the nuclear power source is absent or inefficient, do occur on the thermal timescale.

# Chapter 7

KWW 4.1

P 2.2

L 5.2.4

## Energy conservation

Until now, we only determine the internal structure for stars whose internal pressure is reasonably well described by a polytropic relation (e.g., white dwarfs, the Sun and very massive stars). It enabled us to decouple the mechanical equilibrium of the star (ensured by the continuity and hydrostatic equations) from the thermodynamical equilibrium. The temperature stratification was deduced from the density and the pressure. Thanks to the virial theorem (chapter 6), we could provide estimates, accurate within a factor of a few, of several thermal variables (e.g., the core temperature), without any knowledge of the internal structure. However, we were unable to determine the surface temperature and the luminosity of the star, two key observational diagnostics. From now on, we will adjoin to the two equations of mechanical equilibrium two new ones describing the thermal equilibrium of the star and its thermo-energetic internal structure: the equation of energy conservation and the equation of energy transport.

In this chapter, we focus on the equation describing the conservation of energy. We first study the local conservation of energy (section ??). To do so, the net energy per second flowing away outward from a sphere of radius  $r$ :

$$l(r) = \frac{dE}{dt} \quad (7.1)$$

This energy flux can come from different transport mechanisms like radiation, convection or conduction (see chapter 8). It obeys the following boundary conditions:

$$\begin{cases} l(r = 0) = 0 & \text{at the core} \\ l(r = R) = L & \text{at the surface} \end{cases} \quad (7.2)$$

### 7.1 Thermal equilibrium

In thermal equilibrium, the star does not contract nor expand. The star is in a stationary state and we can apply a reasoning similar to the one we used to derive the continuity equation in section 2.3. We work with a shell of thickness  $dr$  at a radius  $r$ . The energy per second entering (resp. leaving) the shell at the inner surface at  $r$  (resp. the outer surface at  $r + dr$ ) is  $l$  (resp.  $l + dl$ ). In the absence of energy source/sink, the energy would flow without variation and  $dl$  would be null, but it cannot be the case everywhere in a star otherwise, the total luminosity would be null. Let us write  $\epsilon$  the amount of energy locally released per unit mass per second. It represents the local sources ( $\epsilon > 0$ ) and sinks ( $\epsilon < 0$ ) of energy.

#### 7.1.1 Nuclear reactions

Let us write  $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$  the amount of energy released per unit mass per second by nuclear reactions at a radius  $r$ . Nuclear reactions can be endothermic ( $\epsilon_{\text{nuc}} < 0$ ) or exothermic ( $\epsilon_{\text{nuc}} > 0$ ). Then, we have:

$$dl = \epsilon_{\text{nuc}} dm = 4\pi r^2 \rho \epsilon_{\text{nuc}} dr \quad (7.3)$$

that we can rewrite to obtain the energy conservation equation in a stationary case where we account only for nuclear reactions:

$$\frac{dl}{dm} = \epsilon_{\text{nuc}} \quad \text{in mass coordinates} \quad (7.4)$$

$$\frac{dl}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon_{\text{nuc}} \quad \text{in radial coordinates} \quad (7.5)$$

In a star, nuclear reactions are usually confined in the inner regions due to the dependency of  $\epsilon_{\text{nuc}}$  on the local temperature. As a consequence, beyond a certain radius,  $\epsilon_{\text{nuc}}$  is generally null.

### 7.1.2 Neutrinos

The energy flux in  $l$  does not account for neutrinos. Neutrinos are by-product of some nuclear reactions and can be produced by weak interaction processes in very hot and dense plasmas, but their cross-section is so small that stellar material is virtually transparent to them. Therefore, the energy they transport is quickly removed from the star. The only fluid elements that are influenced by neutrinos are those where neutrinos are formed. Neutrinos act as a local sink of energy (a.k.a. neutrino losses) and we define the energy taken from the stellar material per unit mass and per time unit in the form of neutrinos  $\epsilon_\nu > 0$ . Then, the energy conservation equation writes:

$$\frac{dl}{dm} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu \quad (7.6)$$

As a consequence, a strong neutrino loss can induce  $l < 0$  (i.e. a flow of energy locally inward) in some stellar layers. However, except in late phases of stellar evolution, neutrino losses are usually negligible.

Since neutrinos can leave a star right after their production, they provide direct information about the nuclear reactions and hence on the physical conditions in the stellar core. They offer a unique opportunity to probe stellar interiors.

## 7.2 Non-stationary case

Now, we consider the case when shells can contract or expand so  $l$  also depend on time. When contracting or expanding on a thermal timescale (i.e. while remaining in hydrostatic equilibrium), a shell exerts work on neighboring shells. The first principle of thermodynamics states that the internal energy per unit mass  $du$  of a shell obeys:

$$du = \delta q - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (7.7)$$

where the second term on the right hand side corresponds to the work per mass unit exerted on neighboring shells, while  $\delta q$  is the energy received by the shell through exchanges<sup>1</sup>, per unit mass and in a time interval  $dt$ . The later originates (i) from local source/sink terms (e.g.,  $\epsilon_{\text{nuc}}$  and  $\epsilon_\nu$ ) and/or (ii) from the net energy flux  $l$ . As a consequence, we can write:

$$\delta q = \left( \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu - \frac{\partial l}{\partial m} \right) dt \quad (7.8)$$

---

<sup>1</sup>In contrast with local sources and sinks.

where the minus sign in the last term on the right hand side stems from the fact that  $l$  represents the energy leaving the shell while  $\delta q$  is the energy received by the shell. It means that if the net rate  $l$  does not obey equation (7.6),  $\delta q \neq 0$  and either (i) the internal energy of the shell changes ( $du \neq 0$ ) or/and (ii) the shell exerts works on the neighboring shells ( $Pd(1/\rho) \neq 0$ ). We use the first principle of thermodynamics (7.7) to obtain:

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (7.9)$$

We usually combine the terms containing the time derivatives in a source function  $\epsilon_g$ :

$$\epsilon_g = - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (7.10)$$

The function  $l$  is not necessarily monotonic and can become negative or larger than the total luminosity  $L$ , as long as it obeys the boundary conditions (7.2).

KWW 4.6

### Negligible terms

Let us assume that the properties of a star change over a timescale  $\tau$ . This change may, for instance, be due to depletion of a certain nuclear fuel in the core or the artificial squeezing of the star from the exterior (e.g., through tidal forces from an orbiting companion). We neglect neutrino losses in this exercise.

1. Give a rough estimate of each term of the local energy conservation equation.
2. If the change in time of the stellar properties is steered by the consumption of hydrogen and helium through nuclear reactions, what is  $\tau$ ? How can we simplify the local energy conservation equation?
3. If the change in time of the stellar properties is steered by pulsations, what is  $\tau$ ? How can stellar pulsations explain periodic changes in luminosity of some stars on a timescale of 10 to 1,000 days? XXX FIGURE ogle.gif

KWW 4.5

## 7.3 Global energy budget

### 7.3.1 Expression

The energy conservation equation (7.9) is local but we can obtain a statement about global energy conservation by integrating it over the masses. It will enable us to put the conclusions we drew in chapter 6 in perspective. We will proceed term by term.

Due to the boundary condition (7.2), once integrated, the left hand side term in equation (7.9) gives the total luminosity  $L$ . Similarly, we can define a neutrino luminosity  $L_\nu$  as:

$$L_\nu = \int_0^M \epsilon_\nu dm \quad (7.11)$$

The integration of the nuclear energy production rate  $\epsilon_{\text{nuc}}$  per unit mass gives the time derivative of the nuclear energy content  $E_{\text{nuc}}$  of the whole star:

$$-\dot{E}_{\text{nuc}} = \int_0^M \epsilon_{\text{nuc}} dm \quad (7.12)$$

We are left with the integral of  $\epsilon_g$ , the term encapsulating the work exchanges and changes in the internal energy induced by contraction/expansion of the star on a thermal timescale. We integrate equation (7.10) over masses and we get:

$$\int_0^M \epsilon_g dm = - \int_0^M \frac{\partial u}{\partial t} dm + \int_0^M \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dm \quad (7.13)$$

The first term on the right hand side corresponds to the time derivative of the total internal energy  $U$  of the star:

$$\int_0^M \frac{\partial u}{\partial t} dm = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^M u dm \right] = \dot{U} \quad (7.14)$$

where we could permute the derivatives with respect to time and mass because they are independent coordinates. The second term, that we note  $A$  hereafter, requires a bit more work. First, we use the continuity equation to write:

$$A = - \int_0^M P \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) dm \quad (7.15)$$

We rewrite the time derivative of  $1/\rho$  in a different form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dV}{dm} \right) = \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (7.16)$$

where  $V$  is the volume of a sphere of radius  $r$  so:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \quad (7.17)$$

We reinject this in equation (7.15) to get:

$$A = - \int_0^M P \frac{\partial}{\partial m} \left( 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \right) dm \quad (7.18)$$

that we integrate by part:

$$A = 4\pi r^2 P \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_0^M + \int_0^M \frac{\partial P}{\partial m} 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} dm \quad (7.19)$$

The first term on the right hand side is null: indeed, the pressure is null at the surface ( $m = M$ ) and  $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$  at the center because the innermost shell must stay still otherwise a vacuum would appear. In the second term on the right hand side, we recognize an expression which

appears in the hydrodynamics equation (2.56):

$$A = - \int_0^M \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm - \int_0^M \frac{\partial r}{\partial t} \frac{Gm}{r^2} dm \quad (7.20)$$

$$= - \int_0^M \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right] dm + \int_0^M \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Gm}{r} \right) dm \quad (7.21)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ - \underbrace{\int_0^M \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 dm}_{E_K} + \underbrace{\int_0^M \frac{Gm}{r} dm}_{-E_p} \right] \quad (7.22)$$

and we recognize, in the second integral (resp. the first integral) on the right hand side, the infinitesimal gravitational potential energy from equation (6.3) (resp. the kinetic energy per unit mass). Once we put all these components together, the integration of the local energy conservation equation (7.9) yields:

$$L = -\dot{E}_{\text{nuc}} - L_\nu - \dot{U} - \dot{E}_K - \dot{E}_p \quad (7.23)$$

that we rearrange to obtain the global energy conservation equation:

$$-\frac{d}{dt} (E_{\text{nuc}} + U + E_p + E_K) = L + L_\nu \quad (7.24)$$

This equation means that a star shines (both in terms of photon and neutrino luminosities) at the expense of its nuclear energy (on a nuclear timescale), its internal and gravitational potential energy (on a thermal timescale) and/or its kinetic energy (on a dynamic timescale).

If a star is in hydrostatic equilibrium, the kinetic term vanishes ( $\dot{E}_K = 0$ ) and the virial theorem (6.7) applies. If the star is also in thermal equilibrium (a.k.a. complete equilibrium), we are left with  $L = -\dot{E}_{\text{nuc}}$  which accurately describes most of the life of a star.

### P 6.1 7.3.2 Secular thermal stability

# Chapter 8

## Energy transport

In a star, the energy is essentially produced in the core. Yet, we only have access to the luminosity at the surface<sup>1</sup> that is to say when the stellar material becomes transparent (a.k.a. "optically thin"). The latter surface is typically far from the core. Consequently, an important aspect we need to model is the transport of energy in stellar interiors. It can take place in 3 different forms: via photons being emitted, absorbed and scattered (radiation), via "paso a paso" collisions between electrons and/or nuclei (conduction), via bulk motion of macroscopic and dynamically unstable structures (convection). While radiative energy transport can operate in vacuum (e.g., between the Sun and the Earth), conduction and convection both require a material support. The physics of energy transport is reminded in Appendix D. In this chapter, we focus on the application to stellar interiors.

P 3.7  
L 5.2.3

### 8.1 Radiative transport

Photons carry little momentum in stellar interiors: unless the temperature is very high (and/or the density low), pressure is dominated by the thermal pressure of the gas (see section 4.4.1). However, due to their higher speed and longer mean free path than electrons, photons are generally more efficient at transporting energy.

#### 8.1.1 Opacity

KWW 17.1-4

- 17.7 In this section, we do not attempt to provide a rigorous description of radiative transfer,  
L 3.2 In section 2.1.1, we introduced the kinetic notion of cross-section  $\sigma$ . When we consider a specific type of interaction between two particles, the cross-section represents the effective size of the particles: for an impact parameter smaller (resp. larger) than  $\sqrt{\sigma}$ , the particles will strongly (resp. weakly) interact. The mean-free-path  $l$  is the typical distance a particle travels between two interactions with other particles and it is related to the cross-section by:

$$l = \frac{1}{n\sigma} \quad (8.1)$$

where  $n$  is the number density of particles. Radiation-matter interactions are ruled by absorption, emission and scattering (i.e. absorption immediately followed by emission). In this section, we provide a phenomenological description of these interactions based on the notion of opacity. A detailed theoretical modeling of radiation-matter interactions based on quantum mechanics applied to atomic physics (e.g., Einstein coefficients, Rayleigh scattering and Mie scattering) is necessary to compute the opacity as a function of the photon frequency, the thermodynamics conditions (e.g., mass density and temperature) and the chemical composition of the fluid, but it is beyond the scope of this course.

---

<sup>1</sup>Except if we resort to neutrinos which interact so lightly that the entire star is virtually transparent to them.

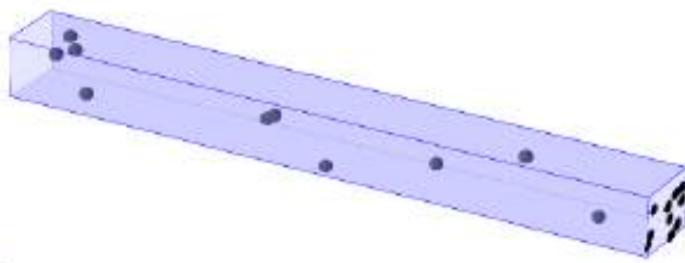


FIGURE 8.1: Opaque absorbers uniformly distributed along the line-of-sight and casting a shadow on the screen (right end of the tube). See also Jupyter notebook `opacity.ipynb`.

### Fully opaque spherical absorbers

In order to get an intuitive understanding of the notion of opacity, imagine a tube containing a certain number of fully opaque spheres. The number density of absorbers per unit length is uniform. A parallel beam of light is shot from one end of the tube and the spheres' shadow is projected on a screen at the other end. We want to determine, as a function of the number of spheres per unit length, the fraction of screen obscured or, equivalently, the fraction of the screen reached by the light. Determine the role played by the number of spheres per unit length with respect to the quantities hereafter (opacity, mean free path, etc). Check out the Jupyter notebook `opacity.ipynb`.

You can reproduce this numerical experiment while lying on the grass below a leafy tree by a sunny day.

### Definition

In Astrophysics, we measure the ability of a medium to absorb and/or scatter light through the concept of opacity  $\kappa$ . If a beam of light carrying a flux (i.e. a radiative energy per unit area per unit time)  $F$  crosses a partially transparent slab of infinitesimal thickness  $dx$  and of density  $\rho$ , the relative variation  $dF/F$  in flux is proportional to the amount of material along the beam (i.e.  $\rho dx$ ) and the proportionality constant is the opacity  $\kappa$ :

$$\frac{dF}{F} = -\kappa \cdot \rho dx \quad (8.2)$$

where the minus sign is because we loose radiative flux. It could be the case of a flashlight shining through misty air: the air is not fully opaque, but it is not fully transparent either, so the light is partially transmitted. For a given amount of material along the beam (i.e. at fixed  $\rho dx$ ), the larger the fraction  $dF/F$  of the radiation the slab absorbs, the higher the opacity. The more material  $\rho dx$  it takes to absorb a fixed fraction of radiation, the smaller the opacity.

KWW 17.8

### Opacity tables

Strictly speaking, equation (8.2) is only valid at a specific photon frequency because absorption and scattering strongly depend on the photon frequency  $\nu$  (and we write  $\kappa_\nu$ ). For instance, glasses are transparent in optical but very opaque in UV, while the Earth atmosphere conveniently bars X-rays from reaching the surface. In codes for stellar interiors (and evolution through their life), we cannot afford to compute opacities. Instead, we use pre-computed values as a function of temperature, mass density and chemical composition (e.g., the OPAL opacity tables).

In equation (8.2), we relied on the radiative energy flux  $F$  for we believe this quantity is more familiar to the reader. However, in radiative transfer theory, we must rely on a more fundamental quantity, the specific intensity  $I_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t)$  which depends on 7 variables (position  $\mathbf{r}$ , time  $t$ , frequency  $\nu$  and direction  $\Omega$ ) contains all the information on a collection of photons.

The photon mean free path is the characteristic absorption length scale, so according to equation (8.2), we have:

$$l = \left| \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} \right|^{-1} = \frac{1}{\rho\kappa} \quad (8.3)$$

where  $\rho$  is the mass density of the matter photons interact with. This result shows that the concept of opacity is equivalent to the notion of cross-section and equation (8.1) gives:

$$\kappa = \frac{\sigma}{\rho/n} \quad (8.4)$$

which illustrates that the opacity is a cross section ( $\sigma$ ) per unit mass ( $\rho/n$ ).

### A long way out

Notwithstanding the dependence of the opacity on photons' frequency, we can say that  $\kappa$  is of the order of  $1 \text{ cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$  in stellar interiors.

1. Give a rough estimate of a photon mean free path in the Sun.
2. Using the diffusion result derived in the exercise "Kinetic scales" in section 2.1.1, deduce the amount of time necessary for a photon produced at the core of the Sun to reach the surface.
3. What is approximately the relative difference of temperature  $\Delta T/T$  over a photon mean free path?

L 3.5 Given how small the relative difference of temperature  $\Delta T/T$  is over a photon mean free path, we can reasonably assume that stellar interiors are very close to local thermodynamic equilibrium<sup>2</sup> and that emission is very close to that of a black body. Once we study stellar winds, where the density is very low, it will no longer necessarily be true though.

<sup>2</sup>Do not confuse a star in thermal equilibrium ( $L \sim -\dot{E}_{\text{nuc}}$ ) and the local thermodynamic equilibrium ( $\forall r \quad T_{\text{gas}}(r) = T_{\text{rad}}(r)$ ).

## Optical depth

The equation (8.2) invites us to define a dimensionless effective length, the optical length  $s$ , which accounts for how absorbing, thick and dense a slab is:

$$ds = \kappa\rho dx \quad (8.5)$$

The optical depth is a dimensionless number which quantifies the number of interactions a photon experiences over a certain length. Indeed, over infinitesimal length  $dx$ , the infinitesimal number of interactions  $dN$  is given by:

$$dN = \frac{dx}{l} = ds \quad (8.6)$$

by definition of the mean free path  $l$ . The optical depth  $s$  between two points  $x = x_1$  and  $x = x_2$  is thus:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \rho\kappa dx \quad (8.7)$$

A large optical depth may be due to a large physical depth  $x_2 - x_1$ , a high opacity  $\kappa$  and/or a high density  $\rho$ .

## Two limit regimes

Given a certain amount of material being crossed, we have two limit regimes depending on whether:

- $s \ll 1$ , and a photon is likely to propagate straight without interacting with any particle. It is called the optically thin regime, when the medium is essentially transparent.
- $s \gg 1$ , and a photon will interact with many particles. It is called the optically thick regime, when the medium is highly opaque.

Let us assume that  $\rho$  and  $\kappa$  are uniform over a slab of length  $x_2 - x_1 = L$  (like in the Jupyter notebook `opacity.ipynb`). Then, we can directly solve equation (8.2) above to get the fraction of flux absorbed  $\bar{F}/F_0$ :

$$\frac{\bar{F}(x = L)}{F_0} = 1 - \frac{F(x = L)}{F_0} = 1 - e^{-L/l} \quad (8.8)$$

with  $H_0$  the incident radiative energy flux at  $x = 0$ . We see that we retrieve the two regimes:

- for  $L \ll l$  (i.e.  $s \ll 1$ ), we can do a Taylor expansion of the exponential to get:

$$\frac{\bar{F}(x = L)}{F_0} \underset{L \ll l}{\sim} \frac{L}{l} \quad (8.9)$$

so in the optically thin regime, the fraction of flux absorbed grows linearly with the amount of material crossed. In the Jupyter notebook, it is equivalent to saying that when there are very few absorbers, since the shadows are unlikely to overlap, the fraction of the screen in the shadow increases linearly with the number of absorbers.

- for  $L \gg l$  (i.e.  $s \gg 1$ ), all the flux is absorbed.

The transition between the two can be understood from the Jupyter notebook: as the length of the tube increases and starts to be of the order of  $N/(n\sigma)$ , the shadows are likely to overlap so the fraction of the screen in the shadow increases at a sub-linear rate (i.e. slower than  $\propto L$ ), until the whole screen is in the shadow.

Until now, we have referred to the loosely-defined concept of stellar surface to locate the radius  $R$  of a star. The optical depth provides a (usually) suitable way to rigorously define this surface: the radius  $R$  of a star is when the material becomes opaque for an observer at infinity that is to say when:

$$s = - \int_{+\infty}^R \rho \kappa dr \sim 1 \quad (8.10)$$

where the minus sign appears because we integrate along the line-of-sight from an observer at infinity toward the star, but radial distance is measured positively outwards while depth is measured positively inwards. Considerations from radiative transfer enable us to define the photosphere at  $R(s = 2/3)$ .

In the general case where  $\rho$  and  $\kappa$  are not uniform, the solution of the ordinary differential equation (8.2) is:

$$F(x) = F_0 e^{-s(x)} \quad (8.11)$$

so  $e^{-s(x)}$  can be interpreted as the probability that a photon manages to cross a distance  $x$  without interaction. It is a key-quantity in Monte-Carlo simulations of radiative transfer.

### Photosphere

In this exercise, we derive the density and pressure in the photosphere of a star by using its definition as the surface where we transit from an optically thick region inside the star to an optically thin region outside (i.e.  $s \sim 1$ ). XXX Christ 5.4

#### 8.1.2 Diffusive regime

The fact that the mean free path we derived above for the Sun is so much smaller than the solar radius is equivalent to the statement  $s \gg 1$ : stellar interiors are typically very optically thick. It means that a photon emitted at a point is immediately absorbed and re-emitted through a black body spectrum at the local temperature. Although it is tiny, the slight difference of temperature across the mean free path is enough to provoke a non-zero net flux outward since there is more outward radiation (coming from the warmer matter closer to the core) than inward radiation (coming from the cooler matter further from the core).

#### KWW 8.2.2 Fick law

In optically thick environments, radiative energy transport proceeds like conduction, except that the energy is carried by the photons, not the electrons or the ions. As a consequence, we first look for an analogous of Fourier law but based on diffusion of particles (here, photons), the Fick law, which can be understood as follows. Consider a particles crossing a surface in either direction. It is possible without interaction with other particles provided we stay within one mean free path  $l$  from the surface. Let  $z$  be a coordinate in the direction perpendicular to the surface. According to section 4.1.1, the number of particles crossing in both directions per unit area per second is:

$$j_{\pm} = \pm \frac{dN}{dt} = \pm \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} n v \quad (8.12)$$

with  $v$  the particles' velocity. If the number density  $n$  and particles' velocity  $v$  is the same on both sides of the surface, the net flux of particles is null. However, if the number density  $n$

is not uniform (e.g., for photons in an environment with non-uniform temperature) then we have a non-zero net flux of particles over a mean free path  $l$  given by:

$$j = j_+ - j_- = \frac{1}{6}v[n(z-l) - n(z+l)] \sim -\frac{1}{3}vl\frac{\partial n}{\partial z} \quad (8.13)$$

In 3D, this expression can be generalized to obtain Fick phenomenological law for particle diffusion:

$$\mathbf{j} = -D\nabla n \quad (8.14)$$

For photons, the diffusion coefficient  $D$  is:

$$D = \frac{1}{3}lv = \frac{1}{3}\frac{c}{\rho\kappa} \quad (8.15)$$

### KWW 5.1.2 Diffusion of radiative energy

We computed the diffusive flux  $\mathbf{j}$  of photons (i.e. the number of photons per unit area and per unit time). For the sake of simplicity, we first treat the monochromatic case: at a given photon frequency  $\nu$ , each photon carries the same energy  $h\nu$ . Then, if we multiply Fick law (8.14) by  $h\nu$ , we obtain, on the left hand side, the energy per unit area per unit time (i.e. the radiative energy flux  $\mathbf{F}$ ) as a function of the gradient of radiative energy density  $u$  on the right hand side:

$$\mathbf{F} = -D\nabla u \quad (8.16)$$

But the radiative energy density  $u$  is given by Stefan-Boltzmann law (4.42) so we have:

$$\boxed{\mathbf{F} = -k\nabla T} \quad (8.17)$$

where  $k$  is the coefficient of radiative transport given by:

$$\boxed{k = \frac{4ac}{3}\frac{T^3}{\rho\kappa}} \quad (8.18)$$

On the other hand, the radiative energy flux  $F$  through a surface  $dS$  is defined as:

$$F = \frac{d^2E}{dtdS} \quad (8.19)$$

so in a spherically symmetric star (where  $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}$ ), it is linked to the net energy  $l(r)$  per second flowing away outward from a sphere of radius  $r$  that we introduced in chapter 7 through:

$$l(r) = \iint F(r)r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi r^2 \cdot F(r) \quad (8.20)$$

As a consequence, we obtain the radiative energy transport equation:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{3}{16\pi ac} \frac{\kappa\rho l}{r^2 T^3} \quad (\text{in radial coordinates})} \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{\kappa l}{r^4 T^3} \quad (\text{in mass coordinates}) \quad (8.22)$$

This equation shows that to have energy being radiatively transported (i.e.  $l \neq 0$ ), we need a temperature gradient. Also, assuming all else equal, if the opacity increases, the temperature gradient increases to compensate for the higher difficulty for the photons to cross the stellar material.

L 3  
4 As we approach the photosphere from the stellar interior, the density decreases and the photon mean free path increases until it becomes comparable to the remaining distance to the photosphere. In this case, the diffusion approximation breaks up and so does the local thermodynamic equilibrium approximation. One has to solve the far more complicated full set of transport equations for radiation in the stellar atmosphere.

### KWW 5.1.3 Rosseland mean opacity

L 3.9

The equations we have derived until now in section 8.1 are only valid at a specific photon frequency  $\nu$ . In reality, we have to rewrite equation (8.16) as:

$$\mathbf{F}_\nu = -\frac{1}{3} \frac{c}{\rho \kappa_\nu} \nabla u_\nu \quad (8.23)$$

where the radiative energy density  $u_\nu$  at a photon frequency  $\nu$  is given by the Planck function  $B(\nu, T)$  (see exercise "Black body spectrum" in section 4.3.1):

$$u_\nu = h\nu f(\nu) = \frac{4\pi}{c} B(\nu, T) \quad \text{with} \quad B(\nu, T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (8.24)$$

The definition of the function  $B(\nu, T)$ , with the introduction of a factor  $4\pi/c$ , might look artificial but it stems from radiative transfer theory.

As a consequence, using the chain rule, we have:

$$\mathbf{F}_\nu = -\frac{4\pi}{3\rho \kappa_\nu} \frac{\partial B}{\partial T} \nabla T \quad (8.25)$$

If we want to obtain a law which applies over a broad range of photon frequency, we need to integrate equation (8.25) over  $\nu$ :

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi}{3\rho} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B}{\partial T} d\nu \right] \nabla T \quad (8.26)$$

In order to work with an effective opacity which encapsulates all the dependencies on photon frequencies, we introduce the Rosseland mean opacity  $\kappa$ , the harmonic mean<sup>3</sup> of  $\kappa_\nu$  (see insertos metodologicos XXX) weighted by the derivative of the Planck function with respect to temperature:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B}{\partial T} d\nu}{\int_0^{+\infty} \frac{\partial B}{\partial T} d\nu} \quad (8.27)$$

<sup>3</sup>Because the energy preferably flows through the frequency channels with smaller opacity.

1. Determine the expression of the denominator  $\int_0^{+\infty} \frac{\partial B}{\partial T} d\nu$
2. Deduce the diffusion equation and of the radiative energy transport equation once frequency-dependence of radiation-matter interactions is accounted for.

We retrieve exactly the same form as the previously derived radiative energy transport equation (8.21): this equation is thus valid provided we replace the frequency-independent opacity we used by the Rosseland mean opacity. The knowledge of the opacity  $\kappa_\nu$  as a function of the photon frequency  $\nu$  is enough to determine Rosseland mean opacity through equation (8.27).

Contrary to the frequency-dependent opacity  $\kappa_\nu$ , Rosseland mean opacity is not additive.

### P 5.5 8.1.3 Eddington luminosity

XXX

## KWW 5.2 8.2 Conductive transport

P 5.3.2

The physics of conduction is described in detail in Appendix D. Here, we focus on the manifestation of this phenomena in the stellar context and on its relative important with respect to radiative transport.

### Demographics

Given the central density and temperature of the Sun, is the number density of photons higher or lower than the number of protons in the core?

Comparing equation (8.17) with the Fourier law (D.3), we notice that the thermal conductivity  $\lambda$  is homogeneous to the coefficient of radiative transport  $k$ . They both quantify the capacity of an environment to transport energy via a diffusive process (e.g., radiative and conductive transport). We can show that (exercise "Kinetic derivation of Fourier law" in section 4.2.2):

$$\lambda \sim \frac{1}{3} lv \cdot nk_B \quad (8.28)$$

where on the left hand side, the first factor is the diffusion coefficient (8.15). As highlighted by the expression of the isochore heat capacity per unit mass (4.21), the second factor is approximately the thermal energy per unit volume per unit temperature since each particle carries an energy  $\sim k_B T$  (analogous to the  $h\nu$  carried by photons). To determine the relative efficiency of conductive transport with respect to radiative transport, we can now compare  $\lambda$  to the coefficient of radiative transport  $k$  since they have the same dimension:

$$\frac{\lambda}{k} \sim \frac{v}{c} \cdot \frac{l}{l_\gamma} \cdot \frac{nk_B T}{4aT^4} \quad (8.29)$$

where we wrote  $l_\gamma$  the photon mean free path to differentiate it from the particle mean free path  $l$ . Let us give an order of magnitude for each of these factors.

- The first factor represents the ratio between the velocities of the energy carriers (either electrons or photons). If we take  $v \sim \sqrt{k_B T / m_e}$ , we have:

$$\frac{v}{c} \sim 10^{-2} \text{ to } 10^{-1} \sqrt{\frac{T}{10^7 \text{K}}} \quad (8.30)$$

- The second factor represents the ratio between the distances over which the carriers can transport energy. We express it as a function of the opacity  $\kappa$ , the particle cross-section  $\sigma$  and the mean molecular weight  $\mu$ :

$$\cdot \frac{l}{l_\gamma} \sim \mu m_p \frac{\kappa}{\sigma} \quad (8.31)$$

In stellar interiors, at high temperatures, cross-sections of charged particles are of the order of  $10^{-20} \text{cm}^2$  to  $10^{-18} \text{cm}^2$  (see exercise "Rutherford scattering" below) while  $\kappa \sim 1 \text{ cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$ , so this factor is of the order of  $10^{-6}$  to  $10^{-4}$ .

- The third factor represents the ratio between the amount of energy each carrier carries. Although we are at local thermodynamic equilibrium (i.e. the temperature of the gas is the same as the temperature of the photons), the energy density is different since the gas energy density goes as  $T$  (for a classic ideal gas) while the radiative energy density goes as  $T^4$ . This factor can also be interpreted as the ratio between the gas and the radiative pressure. In equation (4.52), we compared (non-relativistic classic ideal) gas and radiative pressure. It enables us to estimate this ratio as:

$$\frac{P_g}{P_r} \sim \frac{\rho/T^3}{(3.2 \cdot 10^7)^3} \quad (\text{for } \mu_e = 1) \quad (8.32)$$

The core temperature of the Sun is of the order of  $10^7 \text{K}$  and from the core pressure we derived in equation (2.49), we deduce that the mass density must be of the order of  $100 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . As a consequence, the ratio  $P_g/P_r$  must be of the order of  $10^3$  to  $10^4$  (in comparison to  $1/\beta \sim 10^4$  to  $10^5$  we found in the exercise "Who loves the Sun" in section 5.2).

In conclusion,  $\lambda/k$  is of the order of  $10^{-3}$ . For conductive transport to dominate over radiative transport in the core of the Sun, the density would need to be  $> 10^5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . It is unachievable for a star like the Sun but it is comparable to the core density in a white dwarf (see section 5.1.3). Energy transport via electron conduction is also important for stars in late evolutionary stages with dense degenerate cores. In both cases, electron conduction is so efficient that the cores are essentially isothermal.

The reasoning above applies to a non-relativistic classic ideal gas but the trend it highlights is correct. Indeed, when the gas electron becomes degenerate, the gas pressure increases faster than the prediction from a classic ideal gas and the mean free path of the electrons significantly increases due to Pauli exclusion principle: since most of the quantum cells of phase space are occupied, an electron has to travel further to find an empty cell and transfer its momentum. As a consequence, in degenerate environments, conductive transport is much more likely to be more efficient than radiative transport.

### Rutherford scattering

Take a proton and a thermalized electron with an incident relative velocity  $v$  with respect to the proton. Owing to its much higher mass, the proton is assumed to be fixed during the interaction.

1. Based on an energetic argument, which conic section describes the trajectory?
2. For a given impact parameter  $b$ , determine the trajectory of the electron.
3. Express the deviation angle  $\theta$  as a function of the impact parameter  $b$ .
4. Define a critical impact parameter  $b_c$  below which the electron is significantly deviated from its initial trajectory.
5. Deduce the Coulomb cross-section  $\sigma$  of the proton.
6. For a temperature  $T \sim 10^7 \text{ K}$ , what is the order of magnitude of  $\sigma$ ?

Typically, we compute the total energy flux (radiative plus conductive) as:

$$\mathbf{j} + \mathbf{F} = - (k + \lambda) \nabla T \quad (8.33)$$

where the opacity  $\kappa$  which intervenes in  $k$  is the Rosseland mean opacity. We formally express the thermal conductivity  $\lambda$  such as it introduces a conductive opacity  $\kappa_{cd}$ :

$$\lambda = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\rho \kappa_{cd}} \quad (8.34)$$

Once we reinject this expression in equation (8.33), we find that the effective opacity is the harmonic mean of the Rosseland mean opacity  $\kappa$  and of the conductive opacity  $\kappa_{cd}$ .

#### Mind the means

The harmonic mean  $\bar{\kappa}$  of  $\kappa_1$  and  $\kappa_2$  is:

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \sim \begin{cases} \kappa_1 & \text{if } \kappa_1 \ll \kappa_2 \\ \kappa_2 & \text{if } \kappa_2 \ll \kappa_1 \end{cases} \quad (8.35)$$

Contrary to the arithmetic mean, the outcome is dominated by the lowest value, not by the highest. For photons and matter, the ratio of opacities is directly related to the ratio of mean free paths we saw above:

$$\frac{\kappa}{\kappa_{cd}} = \frac{l}{l_\gamma} \ll 1 \quad \text{in realistic conditions} \quad (8.36)$$

so it is generally the photon opacity which dominates over the conductive opacity, and the energy transport is essentially radiative.

## 8.3 Convective transport

We could compute stellar models assuming that energy transport takes place through radiation (and conduction) alone. Yet, they would provide a realistic description of stars because

convection can supersede radiation in carrying energy. In this case, the temperature gradient is not given by equation (8.21). Convection is the transport of energy in a fluid by macroscopic structures (bearing the confusing names of "cells", "blobs", "clumps"...) moving up and down in a gravity field. It is a physical instability that is hydrodynamical in nature but in spite of its complexity, a simple criteria can be established to determine the conditions where it is likely to be sustained by buoyancy forces. The latter stem from gradients of thermodynamic variables (e.g., density, pressure and/or temperature).

### 8.3.1 Temperature gradients

Radiative, conductive and convective transports all require a temperature gradient. The temperature stratification in stellar interiors, like in the Earth atmosphere or in a lava lamp, is susceptible to trigger convective instabilities.

#### Radiative temperature gradient

The radiative temperature gradient is a dimensionless number which quantifies the temperature stratification of the stellar interior. To do so, we compare two scale heights:

$$\text{the characteristic length of variation of the temperature profile} \quad H_T = \left| \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \right|^{-1} \quad (8.37)$$

and

$$\text{the characteristic length of variation of the pressure profile} \quad H_P = \left| \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial r} \right|^{-1} \quad (8.38)$$

When we divide both, we obtain the ratio<sup>4</sup>:

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{H_P}{H_T} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \quad (8.39)$$

It is a local derivative which connects temperature and pressure variations in two neighbouring shells at a radius  $r$ . Using the hydrostatic equation (2.45) and the energy transfer equation (8.21), we obtain:

$$\boxed{\nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa l P}{m T^4}} \quad (8.40)$$

where the opacity  $\kappa$  is an effective opacity which accounts for radiative transfer and, if relevant, conductive transfer. The radiative transfer is integrated over photon frequencies to yield the Rosseland mean opacity.

Repeat the same exercise but with mass coordinates, and show that you obtain the same expression for the radiative temperature gradient.

Most importantly, if transport is entirely ensured by radiation (or conduction), the radiative temperature gradient is directly related to the characteristic length scale of temperature variation. Indeed, from the equation of hydrostatics (2.45), we deduce the local pressure

---

<sup>4</sup>In spite of the notation, the temperature gradients are not nabla operators.

scale height  $H_P$  relative to the radius  $r$ :

$$\frac{H_P}{r} = \frac{Pr^2}{\rho Gm} \quad (8.41)$$

As a consequence, if the radiative transport equation (8.21) applies, the characteristic length scale of temperature variation  $H_T$  is related to  $H_P$  via the radiative temperature gradient:

$$H_T = \left| \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \right|^{-1} = \frac{1}{\nabla_{\text{rad}}} H_P \quad (8.42)$$

so for  $\nabla_{\text{rad}} > 1$  (resp.  $\nabla_{\text{rad}} < 1$ ), the temperature varies slower (resp. faster) than the pressure with depth.

Explicit the steps in order to reach this result and show that if energy transport is entirely ensured by radiation (or conduction), the gradient of temperature can be written in a very simple way with  $T$ ,  $H_P$  and  $\nabla_{\text{rad}}$ .

### Adiabatic temperature gradient

The adiabatic temperature gradient is the dimensionless number which measures, in a fluid particle, the relative change of temperature  $dT/T$  induced by a relative change of pressure  $dP/P$ , at constant entropy (i.e. through an adiabatic and mechanically reversible process):

$$\nabla_{\text{ad}} = \left. \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right|_S \quad (8.43)$$

The adiabatic temperature gradient  $\nabla_{\text{ad}}$  describes the evolution of the temperature of a given fluid element as it undergoes adiabatic compression/expansion. Contrary to the radiative temperature gradient, it is a statement about the thermodynamic transformation of a fluid particle, not a statement about the background stratification of the stellar interior.

#### General expression

Determine the expression of the adiabatic temperature gradient as a function of  $P$ ,  $T$ ,  $\rho$  and 2 thermodynamic response coefficients, for instance the isothermal compressibility  $\chi_T$  from equation (A.11) and the coefficient of volumetric thermal expansion  $\alpha$  from equation (A.13).

#### Classic ideal gas

For a classic ideal gas, determine the expression of the adiabatic temperature gradient as a function of the adiabatic index only.

Express  $\epsilon_g$  from equation (7.10) as a function of the adiabatic temperature gradient.

### P 6.4 8.3.2 Dynamical instability

6.5

6.6 L 5.3.3 As shown by the length and density of Chandrasekhar's 1961 textbook "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", the question of the stability of a plasma is a challenging one. Here, we only focus on one type of dynamic instability associated to convection.

### KWW 6.1 Instability criterion

In hydrostatic equilibrium, there is no macroscopic fluid motion in the star. However, it is never perfectly achieved and we must wonder whether it is a stable equilibrium or not: is a small contraction/expansion<sup>5</sup> quickly quench (through a negative feedback loop) or does it grow further (positive feedback loop)? Equivalently, if a cell of plasma is displaced vertically within a star, does it come back to its original position or does it keep moving away?

We consider a macroscopic mass element (hereafter, the cell) in a still background plasma (hereafter, the surrounding). For instance, the cell could be a solar granule whose diameter in the photosphere is typically on the order of  $R_\odot/1,000 \sim 1,000\text{km}$ . In an ideal gas, a local increase in temperature induces a drop in mass density which, through Archimede's principle, will lead to a motion upwards: temperature fluctuations in stellar interiors hence lead to cells moving in the radial direction. So in order to test the stability of a cell of density  $\rho_c$  with respect to local temperature fluctuations, one can thus equivalently take an infinitesimal radial displacement upwards for example,  $dr > 0$ . In this case, the infinitesimal variation of density difference between the cell and its surrounding  $d(\Delta\rho)$  is given by:

$$d(\Delta\rho) = d(\rho_c - \rho_s) = \left( \frac{d\rho}{dr} \Big|_c - \frac{d\rho}{dr} \Big|_s \right) dr \quad (8.44)$$

where the subscript  $s$  refer to the cell's surroundings. Initially, the cell lifted up because it was less dense than its surroundings (i.e.  $\rho_c < \rho_s$ ) so:

$$d(\rho_c - \rho_s) = -d\underbrace{(\rho_s - \rho_c)}_{>0} \quad (8.45)$$

so if  $d(\Delta\rho) < 0$ ,  $d(\rho_s - \rho_c) > 0$  and the original difference between  $\rho_s$  and  $\rho_c$  is amplified. The Archimede's buoyancy force  $f$  per unit volume associated to a density difference  $\Delta\rho$  between a cell and its environment is:

$$f = -g\Delta\rho\hat{\mathbf{r}} \quad (8.46)$$

where  $g = Gm/r^2$  is the local gravity field. Therefore, if  $d(\Delta\rho) < 0$ , the buoyancy force is oriented upward and the cell keeps rising. This is a positive feedback loop which indicates the condition for the triggering of the instability:

$$\text{the layer is convectively unstable} \iff \frac{d\rho}{dr} \Big|_c < \frac{d\rho}{dr} \Big|_s \quad (8.47)$$

These density gradients being negative, this criterion means that for convection to be ignited, the density of the cell must drop faster as it rises than the density of the ambient medium as we go to higher  $r$  coordinates. Notice that the former is a statement about the thermodynamical transformation experienced by the cell, that is to say this is a variation in time and the  $r$  in the denominator of the first derivative in equation (8.45) is to be understood as a Lagrangian coordinate. This gradient has the same nature as the adiabatic temperature gradient  $\nabla_{\text{ad}}$ . On the other hand, the gradient of density in the still ambient medium tells us about the background stratification of the density, that is to say that this is a variation in space and the  $r$  in the denominator of the second derivative in equation (8.45) is to be understood as a Eulerian coordinate. This gradient has the same nature as the radiative temperature gradient  $\nabla_{\text{rad}}$ .

---

<sup>5</sup>Since we work with spherically stars, the only type of perturbations we can look at are radial.

This criteria is coherent with the classic experiment where the superposition of two liquids can only be stable if the highest density one is at the bottom.

Yet, this criterion is unpractical since it is based on the knowledge of the density gradient, a quantity that does not appear in the basic equations of the stellar structure. It would be more convenient if we could derive a criterion based on the temperature gradient, because the latter appears in the equation that describes radiative and conductive energy transport. Any equation of state  $\rho = \rho(P, T)$  can be differentiated to yield:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left( \frac{\ln \rho}{\ln P} \right) \frac{dP}{P} - \left( \frac{\ln \rho}{\ln T} \right) \frac{dT}{T} \quad (8.48)$$

that we can reinject in equation (8.47) to obtain the criterion for instability:

$$\left. \frac{\ln \rho}{\ln P} \frac{d \ln P}{dr} \right|_c - \left. \frac{\ln \rho}{\ln T} \frac{d \ln T}{dr} \right|_c < \left. \frac{\ln \rho}{\ln P} \frac{d \ln P}{dr} \right|_s - \left. \frac{\ln \rho}{\ln T} \frac{d \ln T}{dr} \right|_s \quad (8.49)$$

Hydrodynamics teaches us that the correction of a pressure perturbation occurs on a timescale  $\tau_P \sim \tau_{dyn}$  set by the speed of sound. At the onset of the instability, any convective motion is subsonic so this timescale is typically much shorter than the time  $\tau$  it takes for the cell to rise: it is sensible to assume that the cell is in pressure equilibrium with its surroundings. The pressure balance guarantees that the terms in pressure derivative compensates each other in equation (8.49) and we are multiply this equation by the pressure scale height<sup>6</sup>  $H_P$  to obtain the instability criterion:

$$\left. \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_c < \left. \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_s \quad (8.50)$$

since the pre-factor is set by the equation of state which is the same in the cell and in the surrounding environment.

It turns out that the local timescale for heat exchanges in stellar interiors,  $\tau_Q \sim \tau_{KH}$ , is usually long enough to neglect them over  $\tau$ . Therefore, we can legitimately assume that there is no heat exchange between the cell and the surrounding plasma during its ascension: the process is adiabatic ( $\delta Q = 0$ ). As a consequence, the gradient on the right hand side of equation (8.50) is  $\nabla_{ad}$ . On the other hand, if the energy were entirely transported by radiation (or conduction), the left hand side of equation (8.50) would be  $\nabla_{rad}$ . In summary, the Schwarzschild criterion for convective instability is:

the layer is convectively unstable     $\iff$      $\nabla_{ad} < \nabla_{rad}$

(8.51)

If this criterion is matched, then convective transport is dominant and the temperature gradient does not reduce to  $\nabla_{rad}$ .

XXX KWW FIG. 6.2

In a convective unstable environment, the cell rises until it eventually dissolves in shallower (and therefore cooler) regions in the star. At this point, the excess heat of the cell is dispersed to the local medium. Conversely, when a slightly cooler cell moves downward, it eventually absorbs the local heat. Hence, both cells effectively transport heat upwards, even if there is no net mass flux since upward and downward moving cells carry equal amounts of mass.

<sup>6</sup>Beware,  $H_P < 0$ .

## KWW 6.2 Brunt-Väisälä frequency

Yoyo

Determine an equation of motion for the cell on which buoyancy forces exert. Discuss the solution in the simple case where the cell and surroundings' temperature gradients are uniform, and describe the behavior of the element in the case of instability. Show that in the case of stability the element executes an oscillation at the Brunt-Väisälä frequency around the equilibrium position.

## L 5.3.3.3 Mixing length theory

## KWW 6.1 Generalization to chemically stratified stars: Ledoux criterion

## P 6.4 Conditions of predominance

There are several equivalent approaches to comprehend the regimes where convection is susceptible to dominate energy transport.

First, convective transport might overcome radiative transport when the latter does not suffice to transport energy from the central regions to the surface of star. According to Schwarzschild's criterion (8.50), convection is triggered in the plasma when the temperature gradient  $\nabla$  surpasses a certain limit.

A similar trend is observed when we compare the polytropic exponent for a non-relativistic classic ideal gas ( $\Gamma = 5/3$ ) and for photons ( $\Gamma = 4/3$ ): as we transit from a plasma where the pressure is gas dominated ( $\beta \sim 1$ ) to a plasma where the pressure is radiation dominated ( $\beta \ll 1$ ), we get closer from the temperature gradient threshold in the right hand side of (8.51).

Shine bright

Rewrite the Schwarzschild criterion in terms of  $\beta$ , of  $l$  and of the Eddington luminosity  $l_{\text{Edd}}$  to show that if  $\beta > 0$  and  $\nabla_{\text{ad}} > 0.25$ , as the luminosity increases, convection is triggered before the Eddington luminosity is reached.

Finally, we can rely on the virial theorem (6.11) to see that:

- the total energy of a star made of a non-relativistic classic ideal gas ( $\zeta = 2$ ) is negative so the star is gravitationally bound.
- for a relativistic environment ( $\zeta = 1$ ), the total energy is null so the star is marginally gravitationally stable: a slight perturbation is susceptible to disrupt the entire star.

According to the expression of the radiative temperature gradient (8.40) and the radiative energy transport equation (8.21), increases in the temperature gradient are induced by increases in (i) the opacity  $\kappa$  and/or (ii) the radiative flux per unit mass  $l/m$ . At a few 1,000K, the opacity increases with decreasing temperature<sup>a</sup> so we may expect low-mass stars to have convective envelopes. Regarding the radiative flux per unit mass, we note that towards the center of a star,  $l/m \sim \epsilon_{\text{nuc}}$  so stars with nuclear energy production that is strongly peaked towards the center can be expected to have convective cores: it is typically the case of high-mass stars.

<sup>a</sup>A further contribution to the high opacities in the outer envelope of low-mass stars comes from the ionization of hydrogen.

# **Part III**

## **The nuclear furnace**

## **Part IV**

### **Stars in action**

# Chapter 9

## Stellar winds

Lamers' book Parker Dust-driven Line-driven

# **Chapter 10**

## **Isolated evolution**

evolution in the HR diagram Hayashi track MESA

# Chapter 11

## Binary stars

Accretion: FKR Evolution: Tauris' book

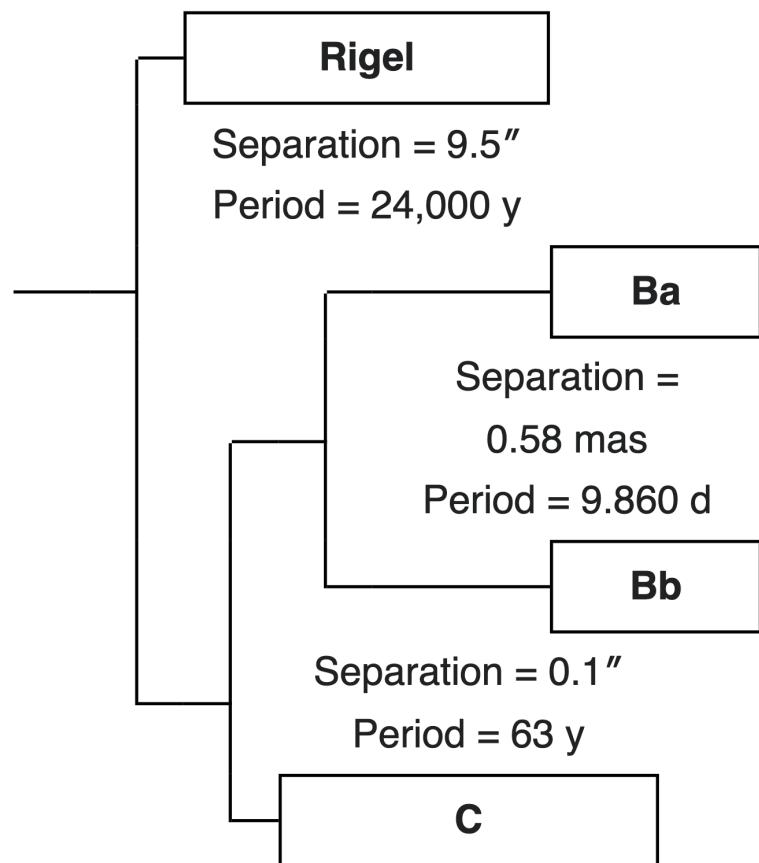


FIGURE 11.1

# **Part IV**

## **Appendices**

# Chapter A

## Thermodynamics

In this appendix, we give a few reminders on thermodynamics of fluids containing one type of particles (be it ions, atoms, molecules or even photons) and in only one phase (gas, plasma, liquid), what is typically referred to as pure homogeneous fluids. We neglect the mechanical aspects (e.g., the hydrodynamic equation) induced by an external field such as the gravitational field. To further simplify, we also neglect the change in material composition (induced by nuclear and chemical reactions for instance) such as the number of moles and the chemical potential do not appear. After a few generic statements on state variables of thermodynamic functions and on the corresponding thermodynamic identities, we present the usual thermodynamic response coefficients and the main relations between them. Finally, we look at the special and insightful case of an ideal gas.

### 1.1 State variables and fundamental relation

The only primitive variables which define the state of the fluid at equilibrium are the internal energy  $U$  and the volume  $V$ . The fundamental relation which gives the entropy as a function of these primitive variables is:

$$S = S(U, V) \quad (\text{A.1})$$

It can, at least in principle, be deduced from the microscopic properties of the fluid, for instance using the microcanonical ensemble of statistical mechanics. The differential of the entropy is then:

$$dS = \left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_V dU + \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_U dV \quad (\text{A.2})$$

and, as you have seen in statistical mechanics, we define the temperature  $T$  and the pressure  $P$ :

$$T = \left[ \left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_V \right]^{-1} \quad (\text{A.3})$$

$$P = T \cdot \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_U \quad (\text{A.4})$$

such as the differential (A.2) becomes:

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV \quad (\text{A.5})$$

from which we deduce the first thermodynamical identity:

$$dU = T dS - p dV \quad (\text{A.6})$$

After performing a Legendre transform, we can deduce the primitive variables and the thermodynamical identities of the other thermodynamical functions (Table ??). Each of these functions, once expressed with its proper primitive variables (a.k.a. the state variables of this function), contains all the information so they are all equivalent. When we apply the symmetry of second derivatives (a.k.a. Schwarz-Clairaut-Young theorem) to these functions, we obtain Maxwell's relations. We generally refer to the thermodynamic identities for  $U$  and

State variables	Corresponding therm. function	Thermodynamic identity
$U, V$	entropy $S$	$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV$
$S, V$	internal energy $U$	$dU = TdS - pdV$
$S, p$	enthalpy $H$	$dH = TdS + Vdp$
$T, V$	free energy $F$	$dF = -SdT - pdV$
$T, p$	free enthalpy $G$	$dG = -SdT + Vdp$

$H$  as the 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> thermodynamic identities respectively.

## 1.2 Thermodynamic response coefficients

The thermodynamic response coefficients characterize the way a system reacts when the external conditions enforced on it are modified.

### 1.2.1 Definition

#### Heat capacities

The heat capacities measure the response of a system when heats is brought to or extracted from it:

$$\text{the isochore heat capacity } C_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V \quad (\text{A.7})$$

$$\text{the isobare heat capacity } C_p = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p \quad (\text{A.8})$$

Using the thermodynamic identities for  $U$  and  $H$ , we have formulas which are easier to interpret physically:

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V \quad (\text{A.9})$$

$$C_p = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_p \quad (\text{A.10})$$

Notice that generally, the heat capacities depend on the state variables (e.g., the temperature but not only). They are extensive quantities but we can define their intensive counterparts, the heat capacities per unit mole, per unit mass or per unit volume by dividing by the number of mole  $n$ , the mass  $m$  or the volume  $V$ , commonly written as  $c_p$  and  $c_V$ . It enables us to work with quantities independently from the amount of mass involved (e.g., to work with the heat capacity of water in specified conditions of temperature, pressure, etc).

### Coefficients of compressibility and volumetric thermal expansion

The compressibility of a fluid determines the diminution of its volume when the pressure exerted on it increases. To determine the intrinsic compressibility of a fluid, we look at the relative change of volume  $-dV/V$  (where the minus sign is because we look at the diminution of the volume). We define:

$$\text{the isothermal compressibility } \chi_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T \quad (\text{A.11})$$

$$\text{the isentropic (i.e. adiabatic and mech. reversible) compressibility } \chi_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_S \quad (\text{A.12})$$

To quantify the increase of volume induced by an increase of temperature at constant pressure, we define the coefficient of volumetric thermal expansion:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p \quad (\text{A.13})$$

Most importantly, the coefficients  $\chi_T$  and  $\alpha$  can be deduced directly from the equation of state.

#### Thermoelastic coefficients are state functions

Like  $c_p$  and  $c_V$ ,  $\chi_T$ ,  $\chi_S$  and  $\alpha$  are state functions that is to say they are known as soon as the state of the system is known. They can be written as a function of the 3 variable chosen to parametrize this state. Indeed, we can express each of these coefficients as a derivative second of the suitable thermodynamic function. For instance, the thermodynamic identity of  $G$  leads to:

$$V(T, p) = \left. \frac{\partial G}{\partial p} \right|_T \quad (\text{A.14})$$

and we obtain:

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \right|_T \quad (\text{A.15})$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p} \right|_p \quad (\text{A.16})$$

Show that:

$$C_V = -T \left. \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right|_V \quad (\text{A.17})$$

$$C_p = -T \left. \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right|_p \quad (\text{A.18})$$

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \right|_S \quad (\text{A.19})$$

### Other thermoelastic coefficients

We can define many other response coefficients depending on the needs of the situation. For instance, the isobare thermal expansion coefficient is defined as:

$$\beta = \frac{1}{p} \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V \quad (\text{A.20})$$

and can be directly deduced from the equation of state.

1. You are studying the drop in temperature of a system when the pressure exerted on it decreases, under the assumption that the thermodynamic transformation is adiabatic and mechanically reversible. Which thermoelastic coefficient would you introduce? How would you call it?
2. Define a suitable coefficient for the Joule expansion (performed at constant internal energy) and another one for the Joule–Thomson expansion (performed at constant enthalpy).

### 1.2.2 Relations between coefficients

Whatever the type of fluid we are looking at, its thermodynamic response coefficients must obey certain generic relations that we discuss hereafter.

#### Triple product rule

For a given amount of moles  $n$ , the variables  $T$ ,  $P$  and  $V$  depend on each other through the equation of state. As a consequence, they must obey to the triple product rule:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_V = -1 \quad (\text{A.21})$$

We can reformulate this expression in terms of the thermodynamic response coefficients introduced in (A.13), (A.20) and (A.11):

$$\alpha = p\beta\chi_T \quad (\text{A.22})$$

#### Mayer relation

We look for an expression for the difference between the isobare and isochore heat capacities. To do so, we start from their definition as a function of the entropy given by equations (A.8) and (A.7) respectively:

$$\frac{C_P - C_V}{T} = \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p - \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V \quad (\text{A.23})$$

To reformulate the right hand side, we perform a change of variable to transform  $S(T, V)$  into  $S(T, p)$  and rewrite the first derivative as:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V + \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p \quad (\text{A.24})$$

which gives, once reinjected in (A.23):

$$C_P - C_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = V\alpha \quad (\text{A.25})$$

The remaining partial derivative can be deduced from Maxwell relation applied to the thermodynamic identity  $dF = -SdT - pdV$ :

$$\left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = p\beta = \frac{\alpha}{\chi_T} \quad (\text{A.26})$$

where we used the relation (A.22) in the last equality. Thus, we obtain Mayer relation:

$$C_P - C_V = \frac{TV\alpha^2}{\chi_T} \quad (\text{A.27})$$

### Groundhog Day

To retrieve Mayer relation, you might try to follow this unfruitful reasoning.

1. Write the derivative of the entropy with respect to the temperature, at constant pressure, performing the change of variables which enables you to go from  $S(U, V)$  to  $S(T, P)$ .
2. Simplify this equation by using the thermodynamic identities and find that...  
 $C_P = C_P$

This kind of circular identities are not uncommon when we manipulate thermodynamic response coefficients, so be careful and keep in mind the systematic rules stated in section 1.2.2.

### Reech relation

This relation connects the ratio of compressibilities to the ratio of heat capacities. The ratio of isothermal to isentropic compressibilities is:

$$\frac{\chi_T}{\chi_S} = \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T}{\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_S} \quad (\text{A.28})$$

We want to relate this ratio to the heat capacities  $C_P$  and  $C_V$ . To do so, we re-express the denominator of equation (A.28) as derivatives of the entropy  $S$ :

$$\frac{\chi_T}{\chi_S} = - \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T \cdot \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_p \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_V \quad (\text{A.29})$$

and now, we use the following equalities to make the heat capacities appear:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_V &= \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_V \\ \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_p &= \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_p \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

to deduce that:

$$\frac{\chi_T}{\chi_S} = \frac{C_P}{C_V} \cdot \left[ -\frac{\frac{\partial T}{\partial V}\Big|_p \cdot \frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T}{\frac{\partial T}{\partial p}\Big|_V} \right] \quad (\text{A.31})$$

=1 from the triple product rule

Hence, we obtain the Reech relation:

$$\frac{\chi_T}{\chi_S} = \frac{C_P}{C_V} = \gamma \quad (\text{A.32})$$

where we defined the adiabatic index  $\gamma$ .

### Derivatives of heat capacities

While  $\alpha$ ,  $\chi_T$  and  $\beta$  can directly be deduced from the equation of state, it is not the case of the heat capacities. However, at constant temperature, the derivative of  $C_V$  with respect to  $V$  and of  $C_P$  with respect to  $p$  can be computed directly from the equation of state:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_V}{\partial V}\Big|_T &= -T \frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\Big|_p \\ \frac{\partial C_p}{\partial p}\Big|_T &= -T \frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\Big|_p \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Demonstrate these relations using the thermodynamic identities relative to  $F$  and  $G$ .

### Generalisation

All the thermodynamic response coefficients of any fluid can be expressed as a function of 3 of them only. Usually, we take  $C_P$ ,  $\alpha$  and  $\chi_T$  as references since they are simpler to measure. Hereby, we present a systematic method for the expression of any response coefficient as a function of these 3 ones. The mathematical relationships between partial derivatives that can be used to do this are known. However, if we try them in turn, randomly, we risk getting locked into an unproductive vicious circle, where a given response coefficient ends up being equal to... itself after several lines, or pages, calculations. This is why we present here a systematic method allowing us to establish the desired relationships.

Consider any response coefficient. Its definition includes a multiplicative coefficient involving (possibly)  $T$ ,  $V$  and  $P$ , and a derivative of the type:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z, \quad (\text{A.34})$$

where  $x$ ,  $y$  and  $z$  are quantities associated with the fluid in equilibrium ( $T$ ,  $V$ ,  $p$ ,  $H$ ,  $S$ ... for example). It is this derivative that we must manipulate to express it in terms of  $C_p$ ,  $\alpha$  and  $\chi_T$ .

We will have to use the following formulas (appendix, formulas (??) and (??), p. XXX): on the one hand, the derivative above can be written:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z = \frac{1}{(\partial y / \partial x)_z}; \quad (\text{A.35})$$

On the other hand, with the triple product rule, we can reinject  $z$  in the derivatives (do not forget the – sign):

$$\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z = - \frac{(\partial z / \partial y)_x}{(\partial z / \partial x)_y}. \quad (\text{A.36})$$

So here is the suggested method.

- Firstly, we reduce ourselves to derivatives using only  $S, T, p, V$ : for this we eliminate the thermodynamic functions  $U, F, H$  or  $G$ . If one of these thermodynamic functions is in position  $z$ , that is to say in variable kept constant during the derivation, we bring it to the numerator using the relation (A.36); For example

$$\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_H = - \frac{(\partial H / \partial y)_x}{(\partial H / \partial x)_y}. \quad (\text{A.37})$$

If the thermodynamic function is in the denominator (position of  $y$ ), it is the relation (A.35) that we use to bring it to the numerator. Assuming it is  $G$ ,

$$\left. \frac{\partial x}{\partial G} \right|_z = \frac{1}{(\partial G / \partial x)_z}; \quad (\text{A.38})$$

Once the thermodynamic function ( $U, F, H$  or  $G$ ) is brought into the numerator (position of  $x$ ), we eliminate it by introducing the expression for its differential. For example, to calculate  $(\partial H / \partial y)_z$ , we write

$$dH = TdS + Vdp, \quad (\text{A.39})$$

which immediately gives

$$\left. \frac{\partial H}{\partial y} \right|_z = T \left. \frac{\partial S}{\partial y} \right|_z + V \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_z. \quad (\text{A.40})$$

The method indicated above must be adapted when the derivative to be calculated involves two thermodynamic functions of the type  $U, F, H, G$ : for example  $(\partial H / \partial y)_U$ . In such a case, we start by treating the potential found in the numerator:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial y} \right|_U = T \left. \frac{\partial S}{\partial y} \right|_U + V \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_U. \quad (\text{A.41})$$

and we are reduced to derivatives involving a single potential.

We thus end up with one (most often several) derivative(s) where only  $S, T, p$  and  $V$  appear;

- Then, we eliminate  $S$ , leaving only  $T, p, V$ . To do this we start by bringing  $S$  to the numerator of the derivatives (position of  $x$  in the expression (A.34)), by one of the identities (A.35) and (A.36). Among the six derivatives that we can then be confronted with<sup>1</sup>, two are expressed directly from the heat capacities:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V = \frac{C_V}{T}; \quad \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_P = \frac{C_p}{T}. \quad (\text{A.42})$$

---

<sup>1</sup>We have a single function,  $S$ , and three variables:  $T, V$  and  $p$ . There are three ways to choose two variables from the three and two ways, in each case, to arrange them (one inside the derivative, the other outside).

Two others can be transformed by the Maxwell relations coming from the differentials of  $F$  and  $G$ :

$$\frac{\partial S}{\partial V}\Big|_T = \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V; \quad \frac{\partial S}{\partial p}\Big|_T = -\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p. \quad (\text{A.43})$$

There remain the last two,  $\frac{\partial S}{\partial V}\Big|_p$ , and  $\frac{\partial S}{\partial p}\Big|_V$ , for which we can use the process consisting of intercalating  $\partial_T$ :

$$\frac{\partial S}{\partial V}\Big|_p = \frac{\partial S}{\partial T}\Big|_p \times \frac{\partial T}{\partial V}\Big|_p = \frac{C_p}{T} \frac{1}{(\partial V/\partial T)_p}, \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial S}{\partial p}\Big|_V = \frac{\partial S}{\partial T}\Big|_V \times \frac{\partial T}{\partial p}\Big|_V = \frac{C_V}{T} \frac{1}{(\partial p/\partial T)_V}. \quad (\text{A.45})$$

3. The remaining derivatives only involve, at this stage,  $T, p, V$ . By again using one of the two relations (A.35) and (A.36), we bring  $V$  to the numerator (position of  $x$  in (A.34)). The expressions obtained necessarily contain only

$$\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T \quad \text{or} \quad \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p \quad (\text{A.46})$$

which can be replaced by  $-V\chi_T$  (formula (??)) or  $V\alpha$  (formula (??)).

Followed scrupulously, step by step, the previous recipe makes it possible to express any response coefficient as a function of  $C_V$  and  $C_p$ ,  $\alpha$  and  $\chi_T$ , possibly with factors where  $T, V, p, n$  may appear. It is then sufficient to use the Mayer relation (??) in order to eliminate  $C_V$ .

Of course, it is not always as a function of  $C_p, \alpha$  and  $\chi_T$  that the expression of the coefficient studied is the most convenient; it depends on the problem we are looking at. It may happen that we simply make a coefficient calculable from the equation of state, or that we keep  $C_V$ , rather than  $C_p$ . In fact, we adapt the manipulations of this part third point above according to the desired goal; but the two first points are to be followed exactly.

### Clapeyron relations

We introduce:

$$\text{the isothermal dilatation coefficient } l = T \frac{\partial S}{\partial V}\Big|_T \quad (\text{A.47})$$

$$\text{the isothermal compression coefficient } h = T \frac{\partial S}{\partial P}\Big|_T \quad (\text{A.48})$$

Show that:

$$l = PT\beta \quad (\text{A.49})$$

$$h = -VT\alpha \quad (\text{A.50})$$

## 1.3 Ideal gases

### DGLR1 6.II.A.4 1.3.1 Conditions of validity

### DGLR2 I.A.III.3

For a collection of  $N$  particles of mass  $m$  and average velocity  $v$  in a classic (i.e. non-degenerate) fluid, the kinetic energy is linked to the temperature  $T$  by:

$$N \cdot \frac{mv^2}{2} = N \cdot K \frac{k_B T}{2} \quad \text{where } \begin{cases} k_B \text{ is Boltzmann constant} \\ K \text{ is the number of internal degrees of freedom of each particle} \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

For point particles, the only internal degrees of freedom are the ones due to their position so  $K = 3$ .

Computing the potential energy of interaction is a more challenging task. To simplify, let us consider the case of a uniform and fully ionized hydrogen plasma composed of protons and electrons of number density  $n$ . As long as particles remain far enough from each other to neglect nuclear forces, the interaction between 2 particles can be represented through the electrostatic force. We position ourselves from the point of view of a fiducial ion represented in black in Fig ?? (it could have been an electron). Within a shell of radius  $r$  and thickness  $dr$  around our ion, the number of particles is  $dN = 4\pi nr^2 dr$ . Since the average distance  $d$  to the closest ion is  $d = n^{-1/3}$ , we conclude that the number of particles within this shell will be large for  $r \gg d$  but very low or even null for  $r \lesssim$  a few  $d$ . As a consequence, at large distance, the contribution of electrons and ions to the interaction with our ion will cancel out, an effect called Coulomb shielding. On the contrary, the interaction with the neighboring particles (i.e. within a few times  $d$ ) should be accounted for. Each of this interaction corresponds on average an energy:

$$e_{p,1} \sim \pm \frac{e^2}{d} \quad \text{where } e \text{ is the charge of an electron} \quad (\text{A.52})$$

where the sign depends on whether the interaction is with another ion (+) or with an electron (-). To simplify, we lower the range of neighboring particles to  $d$  but consider only positive signs. We get the interaction energy of the ion with its neighbours within a sphere of radius  $d$ :

$$e_p \sim \frac{4\pi n d^3}{3} e_{p,1} = \frac{4\pi e^2 n^{1/3}}{3} \quad (\text{A.53})$$

We get the total potential energy of interaction for all  $N$  particles contained within the plasma by writing:

$$E_p \sim \frac{N}{2} e_p \quad (\text{A.54})$$

where the factor  $1/2$  is to avoid counting twice the interaction energy between particles.

In conclusion, the gas can be considered as ideal if:

$$k_B T \gg \frac{4\pi e^2 n^{1/3}}{3} \quad (\text{A.55})$$

which can be reformulated in terms of mass density  $\rho$  using  $\rho = n \cdot \mu m_p$ :

$$T \rho^{-1/3} \gg \frac{4\pi e^2}{3 k_B (\mu m_p)^{1/3}} \quad (\text{A.56})$$

from which we conclude that the ideal gas approximation tends to be more valid at high temperature and low density. For  $\mu = 0.5$  (fully ionized hydrogen plasma), we have the

following condition to behave as an ideal gas:

$$\left(\frac{T}{5,500\text{K}}\right) \left(\frac{\rho}{4 \cdot 10^{-7}\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}}\right)^{-1/3} \gg 1 \quad (\text{A.57})$$

### Solar values

For the Sun, the photosphere conditions are:

$$\begin{cases} T & \sim 5,500\text{K} \\ \rho & \sim 4 \cdot 10^{-7}\text{g} \cdot \text{cm}^{-3} \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

while the core conditions are:

$$\begin{cases} T & \sim 3 \cdot 10^7\text{K} \\ \rho & \sim 1.6 \cdot 10^2\text{g} \cdot \text{cm}^{-3} \end{cases} \quad (\text{A.59})$$

Is it safer to assume that the solar plasma behaves as an ideal gas at the photosphere or at the core?

### 1.3.2 Equation of state and fundamental relation

An ideal gas obeys an equation of state which can be expressed in different ways, depending on the set of variables we use to describe its state.

#### In Astrophysics

First and foremost, the privileged expression of the equation of state for ideal gases in Astrophysics is:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{k_B T}{\mu m_p} \quad (\text{A.60})$$

with:  $\begin{cases} \text{the mass density } \rho \text{ (in g} \cdot \text{cm}^{-3}\text{)} \\ \text{the pressure } P \text{ (in dyn)} \\ \text{the temperature } T \text{ (in K)} \\ \text{the dimensionless mean molecular weight } \mu \text{ (see section ??)} \\ \text{the Boltzmann constant } k_B \sim 1.38 \cdot 10^{-16}\text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \\ \text{the mass of a proton } m_p \sim 1.67 \cdot 10^{-24}\text{g} \end{cases}$

#### In Thermodynamics

Second, the expression you have probably seen in high school:

$$pV = nRT \quad \text{where } R \text{ is the ideal gas constant.} \quad (\text{A.61})$$

with:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{the volume } V \text{ (in cm}^{-3}\text{)} \\ \text{the pressure } P \\ \text{the temperature } T \\ \text{the number of moles } n \text{ (in mole)} \\ \text{the ideal gas constant } R \sim 8.3 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \end{array} \right.$

The equivalence between these two formulations comes from the definition of the Avogadro number  $\mathcal{N}_A$ :

$$\rho = \frac{N \mu m_p}{V} = n \mathcal{N}_A \frac{\mu m_p}{V} \quad \text{with } N \text{ the number of particles} \quad (\text{A.62})$$

So once we reinject it in equation (A.60), we retrieve equation (A.61), provided we account for the definition of the ideal gas constant  $R = k_B \mathcal{N}_A$ .

### Other formulations

Then, we can reformulate the first one to deduce alternative expressions. For instance:

$$P = \nu k_B T \quad (\text{A.63})$$

with:

with:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{the number density of particles } \nu \text{ (written } n \text{ in the main course chapters)} \\ \text{the pressure } P \\ \text{the temperature } T \end{array} \right.$

### Fundamental relation

This equation does not contain all the thermodynamical information though since not all ideal gases are the same. For instance, they might have different dependence on the temperature for their thermodynamic response coefficients (see section 1.2). Using this equation of state, let us determine the fundamental relation which is the equation which contains all the thermodynamical information. To do this, we must rely on a thermodynamical function whose suitable state variables appear in the equation of state (i.e.  $T$ , and  $p$  and/or  $V$ ). It is either the free energy  $F(T, V)$  or the free enthalpy  $G(T, p)$ . Let us work with the former. We have:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{T,n} = -p = -\frac{nRT}{V} \quad (\text{A.64})$$

where the first equality stems from the thermodynamical identity, and the second one from the equation of state for ideal gases. We can integrate this equation with respect to  $V$  in order to obtain<sup>2</sup>:

$$F(T, V) = -nRT \ln [Va(T, n)] \quad (\text{A.65})$$

where  $a(T)$  is the constant of integration (constant in the sense that it does not depend on the variable of integration,  $V$ , but it does depend on  $T$  and  $n$ ) which is homogeneous to the inverse of a volume (such as the argument of the logarithm has no dimension). The free energy  $F$  is an extensive variable so it can be written as:

$$F(T, V) = nf(T, V/n) \quad (\text{A.66})$$

---

<sup>2</sup>Until now, we did not account for changes in number of particles (i.e.  $dn = 0$ ). But here, due to extensiveness properties, we need to account for  $n$ , which is the 3<sup>rd</sup> state variable of  $F$  (and  $U$ ,  $H$  and  $G$ ).

where  $f$  is the free energy per unit mole. As a consequence, we can rewrite equation (A.65) as:

$$F(T, V) = -nRT \ln \left[ \frac{V}{n} b(T) \right] \quad (\text{A.67})$$

The nature of the function  $b(T)$  varies from an ideal gas to another.

#### Fundamental relation with the free enthalpy

Determine the fundamental relation based on  $G(T, p)$  in the same way as we just did from  $F(T, V)$ .

### 1.3.3 Joule laws

The entropy  $S$  can be computed from the thermodynamic identity of  $F$  for instance:

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V \quad (\text{A.68})$$

From the equation (A.67), we obtain the general expression of the entropy of an ideal gas:

$$S = nR \left[ \ln \left( \frac{Vb(T)}{n} \right) + T \frac{b'(T)}{b(T)} \right] \quad (\text{A.69})$$

Where notice that this entropy does not obey the 3<sup>rd</sup> principle of thermodynamics,  $S \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$ , since it does not go to zero when the temperature goes to zero, at  $n$  and  $V$  constant. This is because the ideal gas model breaks up at very low temperature, as shown by equation (A.56).

We can now deduce the internal energy  $U$  of an ideal gas from  $F$  and  $S$ :

1.  $U(T, V) = n u(T)$

where  $u(T)$  is given by:

$$u(T) = RT^2 \frac{b'(T)}{b(T)} \quad (\text{A.70})$$

Remarkably, it shows that the internal energy per unit mole of an ideal gas depend only on the temperature, which is Joule's 1<sup>st</sup> law.

#### Joule's 2<sup>nd</sup> law

Following the same reasoning, derive Joule's 2<sup>nd</sup> law.

As a consequence, we can use the heat capacities to write, for an ideal gas:

$$dU = C_V dT \quad (\text{A.71})$$

$$dH = C_P dT \quad (\text{A.72})$$

### From Joule to the equation of state

Show that, on the reverse, the equation of state  $f(T, p, V) = 0$  of a system of given mass which obeys the Joule laws (i.e. whose internal energy  $U$  and enthalpy  $H$  only depend on the temperature  $T$ ) has to be of the form  $pV = KT$ , with  $K$  a constant which must depend linearly on the mass.

### 1.3.4 Internal energy and enthalpy

In order to explicit the expression of the internal energy of an ideal gas, we leave, in this section, the framework of thermodynamics and undertake a short excursion in the real of statistical mechanics. Due to the equipartition theorem, the kinetic energy per particle is shared equally among all of its internal degrees of freedom  $k$ :

$$e_K = k \frac{k_B T}{2} \quad (\text{A.73})$$

Hence, if the gas is ideal, we can neglect the potential energy of interaction and the total internal energy per unit mass  $u$  is given by the sum of each particle's kinetic energy:

$$u = \frac{N}{m_{\text{tot}}} e_K = \frac{k}{2} \frac{k_B T}{\mu m_p} \quad (\text{A.74})$$

$$u = \frac{k}{2} \frac{P}{\rho} \quad (\text{A.75})$$

According to Joule's 1<sup>st</sup> law and the equation of state ( $P/\rho \propto T$ ), it means that the number of internal degrees of freedom of each particle  $k$ , is necessarily a function of the temperature only (see insert "Internal degrees of freedom" below).

### 1.3.5 Thermodynamic response coefficients

#### Heat capacities

For an ideal gas, we know the derivatives of the heat capacities per mole from equations (A.33) and the equation of state:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial c_V}{\partial V} \right|_T &= 0 \\ \left. \frac{\partial c_p}{\partial p} \right|_T &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

so the heat capacities of an ideal gas depend only on the temperature.

Using the expression (A.75), we can explicit the isochore and isobare heat capacities per unit mass,  $c_V$  and  $c_P$ :

$$c_V = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_V = \frac{k}{2} \frac{k_B}{\mu m_p} \quad (\text{A.77})$$

$$c_P = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_V \stackrel{H=U+PV}{=} \underbrace{\left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_P + \left. \frac{P}{m_{\text{tot}}} \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P}_{=P \left. \frac{\partial(1/\rho)}{\partial T} \right|_P} \stackrel{\frac{1}{\rho}=\frac{k_B T}{P \mu m_p}}{=} \frac{k}{2} \frac{k_B}{\mu m_p} + \frac{k_B}{\mu m_p} = \frac{k+2}{2} \frac{k_B}{\mu m_p} \quad (\text{A.78})$$

### Adiabatic index

For an ideal gas, the adiabatic index  $\gamma$  defined in equation (A.32) depends only on the number of internal degrees of freedom of each particle:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{k+2}{k} \begin{cases} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1 \\ = 5/3 \text{ for } k = 3 \end{cases} \quad (\text{A.79})$$

so for an ideal gas,  $\gamma \in [1, 5/3]$  and the internal energy per unit mass  $u$  is:

$$u = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{P}{\rho} \quad (\text{A.80})$$

1. Express Mayer relation for an ideal gas.
2. Deduce the expression of the heat capacities per unit mass as a function of the adiabatic index (and physical constants).

#### Internal degrees of freedom

For a monoatomic ideal gas, particles are modeled as points so  $k = 3$  and  $\gamma = 5/3$ . For a diatomic ideal gas, the situation is more complicated. We still have 3 degrees of freedom from the position of the center of mass (often called translational degrees of freedom), but we can also have rotational and vibrational degrees of freedom, depending on the ambient temperature (see course of Quantum mechanics). At low temperature, both rotational and vibrational degrees of freedom are frozen that is to say that the thermal agitation is not high enough to populate the energy levels associated to rotation and vibration of the diatomic particle. At higher temperature, the rotational levels are accessible, which adds 2 degrees of freedom (since the particle is axisymmetric around the axis joining the 2 particles so only 2 Euler angles are needed to orientate the particle in space) and yields  $\gamma = 7/5 = 1.4$ . At even higher temperature, the particle can vibrate which adds 2 more degrees of freedom (for the frequency and the amplitude of the oscillation) and yields  $\gamma = 9/7$ . The emission lines associated to these rotational and vibrational levels play a key role in spectroscopic Astronomy.

#### 1.3.6 Laplace law

In this section, we comment on the link between the adiabatic and polytropic index. In differential form, the equation of state of an ideal gas can be written as:

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (\text{A.81})$$

Now, let us assume that this ideal gas undergoes an adiabatic (i.e.  $\delta Q = 0$ ) and mechanically reversible (i.e. no created entropy,  $\delta^c S = 0$ ) transformation. Then, according to the second principle of thermodynamics, the transformation is isentropic ( $dS = 0$ ). We use the first

principle of thermodynamics to eliminate  $T$  from equation (A.81):

$$du \stackrel{\delta Q=0}{=} -Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \stackrel{(A.75)}{=} \frac{k}{2} \frac{k_B}{\mu m_p} dT \quad (\text{A.82})$$

so:

$$\frac{dP}{P} = \underbrace{\frac{k+2}{2}}_{=\gamma} \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{A.83})$$

where the fact that the transformation is mechanically reversible makes the differential approach legit. We deduce the Laplace law:

$$P\rho^{-\gamma} = \text{constant} \quad \text{for an ideal gas when } dS = 0 \quad (\text{A.84})$$

Instead of eliminating the temperature from equation (A.81), we could have removed either the pressure or the mass density and we would have obtained respectively:

$$T^\gamma P^{-(\gamma-1)} = \text{constant} \quad (\text{A.85})$$

$$T\rho^{-(\gamma-1)} = \text{constant} \quad (\text{A.86})$$

Relation (A.84) is a polytropic relation of polytropic exponent  $\Gamma = \gamma$ . It means that an ideal gas undergoing an isentropic transform behaves as a polytrope (chapters ?? and ??). We will in chapter ?? that when radiative transport can be neglected, convection is an adiabatic process. As a consequence, if radiation pressure can be ignored and the gas is ideal and completely ionized with  $\mu$  uniform, a fully convective star behaves as a polytrope of exponent  $\Gamma = \gamma = 5/3$  i.e. of index  $n = 3/2$ .

On the reverse, an ideal gas undergoing non-isentropic transformations (e.g., due to shocks or non-adiabatic processes) might still behave as a polytrope but in this case,  $\gamma \neq \Gamma$ .

# Chapter B

## Special relativity

In special relativity, the momentum  $p$  and the velocity  $v$  of a particle are not trivially connected by the classic formula  $p = mv$ . Instead, the momentum is the fundamental quantity which stems from analytical mechanics. Any particle of mass  $m$  at rest is embedded with a rest-mass energy  $mc^2$ , where  $c \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$  is the speed of light. Once we account for its rest-mass energy, a particle of mass  $m$  and momentum  $p$  has a total energy  $E$  given by:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \quad (\text{B.1})$$

The kinetic energy of this particle is obtained by subtracting the rest-mass energy from the total energy:

$$E_K = E - mc^2 \quad (\text{B.2})$$

The momentum  $p$  of the particle is related to the speed  $v$  and the rest-mass  $m$  by:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (\text{B.3})$$

where the argument of the square root is always positive since  $v < c$ .

### Limit cases

#### Non-relativistic case

In the non-relativistic regime, the total energy of a particle is dominated by its rest-mass energy so  $pc \ll mc^2$  and:

$$p \ll mc \quad (\text{B.4})$$

As a consequence, the kinetic energy in the non-relativistic regime is given by:

$$E_K \sim \frac{p^2}{2m} \quad (\text{B.5})$$

and  $p = mv$ , with  $v$  the velocity of the particle.

#### Relativistic case

In this case,  $p \gg mc$  and  $v \sim c$ . Therefore:

$$E_K \sim pc \quad (\text{B.6})$$

# **Chapter C**

## **Physical constants**

Name	Notation	Value	Memo	Unit
Gravitational constant	$G$	$6.67430 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-8}$	$\text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Speed of light in vacuum	$c$	$2.99792458 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^{10}$	$\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$
Boltzmann constant	$k_B$	$1.380650 \cdot 10^{-16}$	$1.4 \cdot 10^{-16}$	$\text{erg} \cdot \text{K}^{-1}$
Planck constant	$h$	$6.626069 \cdot 10^{-27}$	$6.6 \cdot 10^{-27}$	$\text{erg} \cdot \text{s}$
Proton mass	$m_p$	$1.6726216 \cdot 10^{-24}$	$1.7 \cdot 10^{-24}$	$\text{g}$
Electron mass	$m_e$	$9.109382 \cdot 10^{-28}$	$9.1 \cdot 10^{-28}$	$\text{g}$
Elementary charge	$e$	$4.80326 \cdot 10^{-10}$	$4.8 \cdot 10^{-10}$	$\text{esu}$
Electron-volt	eV	$1.6021765 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-12}$	erg
Atomic mass unit	$m_u$	$1.6605388 \cdot 10^{-24}$	$1.7 \cdot 10^{-24}$	$\text{g}$
Neutron mass	$m_n$	$1.6749272 \cdot 10^{-24}$	-	$\text{g}$
$\alpha$ -particle mass	$m_\alpha$	$6.6446562 \cdot 10^{-24}$	-	$\text{g}$
Angström	$\text{\AA}$	$1 \cdot 10^{-8}$	-	cm
Reduced Planck constant	$\hbar = h/2\pi$	$1.054571817 \cdot 10^{-27}$	-	$\text{erg} \cdot \text{s}$
Avogadro's number	$\mathcal{N}_A = 1/m_u$	$6.022142 \cdot 10^{23}$	-	$\text{g}^{-1}$
Ideal gas constant	$R = k_B \mathcal{N}_A$	$8.31447 \cdot 10^7$	-	$\text{erg} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3}$	$5.67040 \cdot 10^{-5}$	-	$\text{erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \text{K}^{-4}$
Radiation density constant	$a = 4\sigma/c$	$7.56578 \cdot 10^{-15}$	-	$\text{erg} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Fine structure constant	$\alpha = e^2/\hbar c$	$7.2973525693 \cdot 10^{-3}$	-	-
Solar mass	$M_\odot$	$1.9884 \cdot 10^{33}$	$2 \cdot 10^{33}$	$\text{g}$
Solar radius	$R_\odot$	$6.9634 \cdot 10^{10}$	$7 \cdot 10^{10}$	cm
Solar luminosity	$L_\odot$	$3.839 \cdot 10^{33}$	$3.8 \cdot 10^{33}$	$\text{erg} \cdot \text{s}^{-1}$
Solar effective temperature	$T_\odot$	5780	-	K
Earth mass	$M_\oplus$	$5.972 \cdot 10^{27}$	$6 \cdot 10^{27}$	$\text{g}$
Earth radius	$R_\oplus$	$6.371 \cdot 10^8$	$6.4 \cdot 10^8$	cm
Astronomical unit	AU	$1.49597871 \cdot 10^{13}$	$1.5 \cdot 10^{13}$	cm
Year	yr	$3.15576 \cdot 10^7$	$\pi \cdot 10^7$	s
Parsec	pc=1AU/1"	$3.085678 \cdot 10^{18}$	-	cm
Light-year	ly= $c \times \text{yr}$	$9.460730472 \cdot 10^{17}$	-	cm
Distance to closest star	-	-	1	pc
Distance to MW center	-	-	8	kpc

TABLE C.1: Main constants in cgs units, subdivided into fundamental, convenient, intermediate and astronomical ones (from top to bottom). The "Memo" column indicates the approximate value to memorize, except for the "intermediate constants" sections where the formulas should be memorized instead.

# Chapter D

## Energy transport

In this appendix, we remind the reader about the main mechanisms of energy transport, and especially the Physics of conduction. The latter might look unnecessary since it rarely dominates energy transport in stellar interiors. However, the mathematical formalism used to model it closely matches the description of radiative energy transport in very opaque (a.k.a. "optically thick") environments. In particular, we will see that the diffusion equation applies to conductive and radiative transports (at least when the opacity is high). The third mechanism of energy transport, convection, is tightly bound to the questions of stability in hydrodynamics. Indeed, convection involves the bulk motion of macroscopic segments of the fluid and this turbulence needs to be sustained by an instability (e.g., buoyancy forces).

### 4.1 The three mechanisms of energy transport

#### 4.1.1 Radiation

Radiative energy transport takes place between two systems of different temperatures separated by a transparent (a.k.a. optically thin) medium (e.g., vacuum). The transfer of energy is made possible by emission and absorption of photons. At thermal equilibrium, the spectrum and intensity of the radiative field is well described by black body radiation and the source function is given by Planck function. The power associated to black body emission increases very sharply with the temperature of the system ( $\propto T^4$ ). As a consequence, although the exchange of photons proceeds in both directions, the net flux is from the hottest parts to the coolest ones. It is most efficient in high temperature and/or low density environments (the upper left corner in Figure ??).

#### 4.1.2 Conduction

Conduction is the mechanism of energy transfer between two immobile systems (e.g., still fluid particles). It results from collisions between particles (molecules or atoms) animated by a thermal agitation movement. The particles of the system with the highest temperature ("hot system") have a higher kinetic energy of thermal agitation than the system with a lower temperature ("cold system"). During shocks, the former transfer energy to the latter. Heat transfer is particularly efficient in dense and rigid media (e.g., solids), but it can also be preponderant in fluids, especially when they become degenerate.

#### 4.1.3 Convection

Thermal convection involves a fluid moving at macroscopic scales. Fluid particles carry energy and transit between regions of the fluid with different temperatures. Like radiative and conductive transport, it is caused by a temperature gradient. For example, in a room heated from the floor, the air located at floor level, warmer and therefore lighter than the air located above, tends to rise. In fluids, the efficiency of convective transport generally surpasses the efficiency of conduction, especially at low density. It is the reason why you

blow on your mate and/or steer your coffee with a spoon rather than waiting for them to cool down by conduction through the interface with the air.

XXX FIGURE 23.1

## 4.2 Thermal flux

### 4.2.1 Definition

#### Energy current density

Heat transfer by conduction is carried by a current of energy inside the material called energy current. An energy current appears in any ambient where the temperature is not uniform. In this situation we do not have global thermodynamic equilibrium, but we assume local thermodynamic equilibrium. Thermal current is described by a vector field  $\mathbf{j}$  called the energy current density. To define this vector field, we consider an infinitesimal surface  $dS$  centered on a point M. We choose a unit vector  $\mathbf{n}$  orthogonal to the surface to orientate this surface<sup>1</sup>. Then, the energy current density  $\mathbf{j}$  is related to the infinitesimal amount of energy  $\delta^2 Q$  crossing this surface in the direction of  $\mathbf{n}$  between times  $t$  and  $t + dt$  through:

$$\delta^2 Q = \mathbf{j}(M, t) \cdot \underbrace{\mathbf{n} dS}_{d\mathbf{S}} dt \quad (\text{D.1})$$

where we introduced the orientated surface element vector  $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ . The vector field  $\mathbf{j}$  indicates the local direction of energy flow, and its magnitude quantifies this flow. For instance, if the energy flows along the surface,  $\mathbf{j} \perp \mathbf{n}$  and  $\delta Q = 0$  since no energy crosses the surface.

The magnitude of the energy current density  $|\mathbf{j}|$  is in  $\text{erg}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$  since it quantifies the amount of energy crossing a surface per unit time.

XXX FIGURE 23.3

#### Thermal flux

The thermal flow  $d\Phi$  is the amount of energy crossing the surface  $dS$  in the direction of  $\mathbf{n}$  per unit time:

$$d\Phi = \frac{\delta^2 Q}{dt} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{D.2})$$

### 4.2.2 Fourier law

#### Expression

Fourier law is a phenomenological law: it is not demonstrated and has no theoretical foundations but it is a statement which, to a certain extent, accurately describes the phenomena. It states that the energy current density is proportional to the local temperature gradient:

$$\mathbf{j}(M, t) = -\lambda \nabla T \quad (\text{D.3})$$

where  $\lambda(M, t)$  is the thermal conductivity at point M at time  $t$ , in  $\text{erg}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

<sup>1</sup>Here, the choice is arbitrary since the surface is not closed.

material	thermal conductivity at 300K (in $\text{erg}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ )
copper	400
steel	50
glass	1
water	0.6
air (at sea-level pressure)	0.03

### Thermal conductivity

Like electric conductivity, thermal conductivity depends on the material and on the thermodynamic conditions (e.g., the temperature). For example, solid metals (e.g., copper) have high thermal (and electric) conductivity. Liquids, gases and non-metallic solids have lower thermal conductivity (see table above). Thermal insulators are composite materials. A first possibility is to have a solid material finely dispersed in a volume essentially filled with air, which is the case with glass wool. In a material like expanded polystyrene, a solid matrix contains many air-filled cavities. Heat transfer inside such materials can involve several modes: conduction in the solid part, conduction and radiation in the gaps or cavities (convection is avoided if they are small).

The minus sign in the Fourier law is a fundamental consequence of the second principle of thermodynamics. It states that the energy always flows from the warmer to the cooler regions. This law encapsulates irreversibility. Indeed, if we transform  $t$  in  $-t$ , (i.e. if we reverse the direction of time flow), the energy flows backwards (i.e.  $j$  becomes  $-j$ ) but the temperature gradient remains unchanged, so the Fourier law is no longer verified.

Fourier law is one of the multiple phenomenological laws which yield a diffusion equation to describe the local transmission of matter or energy through erratic motions. They all have the same mathematical structure and state that a vector field associated to a flux is proportional to an intensive variable.

**Fourier law:** the energy current density is proportional to the gradient of temperature.

**Ohm law:** the electric current density is proportional to the gradient of electric potential.

**Fick law:** the particle current density is proportional to the gradient of number density.

Mutatis mutandis.

### Kinetic derivation of Fourier law

Assume that the amount of kinetic energy carried by each particle is  $k_B T$  and that the corresponding velocity is  $v$ .

1. Adopt a kinetic approach to retrieve Fourier law in an environment of particle density  $n$  where the mean free path  $l$  is microscopic.
2. Deduce the expression of the thermal conductivity.  $(1/3)vl * nkBT$

### Conditions of validity

There are multiple situations where the Fourier law is not valid. Among its main limitations, we can cite the following ones:

- If the thermal gradient is too strong, the relationship between the energy current flux  $j$  and the temperature gradient  $\nabla T$  is no longer linear.

- If the thermal gradient varies too quickly over time, the relationship between the thermal flow and this gradient ceases to be instantaneous. Instead, there is a delay in establishing the heat flow (like for retarded potentials in electrodynamics)
- There are anisotropic media where the thermal conductivity depends on the direction of propagation of the heat flux: for example, in graphite, the conductivity is 400 times higher in directions parallel to the atomic layers than perpendicular to them. It is also the case in strongly magnetized environments (e.g., the solar corona and neutron stars) where conduction along the magnetic field lines is much stronger than perpendicular to them. In such environments, the thermal conductivity is a tensor field (instead of a scalar field) and the heat flow is no longer necessarily colinear with the temperature gradient.

## 4.3 Diffusion

### 4.3.1 Local energy transport equation

We can apply the first principle of thermodynamics in order to obtain an equation which locally connects the temperature field  $T(M, t)$  to the energy current density field  $\mathbf{j}(M, t)$ . We proceed in a way analogous to the reasoning which enabled us to derive the continuity equation in section 2.3.

In an ideal gas (whether it is classic or degenerate, relativistic or not), we can apply Joule's first law to determine the infinitesimal change of internal energy  $d^2U$  of an infinitesimal amount of mass  $dm$  in an infinitesimal volume  $dV$  undergoing an infinitesimal variation of temperature  $dT$ :

$$d^2U = c_V dm \cdot dT = \rho c_V dV dT \quad (\text{D.4})$$

where  $c_V$  is the isochore heat capacity per unit mass and  $\rho$  is the mass density.

In an incompressible environment (e.g., a solid or a liquid), the same relation between the internal energy and the temperature holds true.

The variation of internal energy between times  $t$  and  $t + dt$  is given by:

$$d^2U = \rho c_V dV [T(M, t + dt) - T(M, t)] = \rho c_V dV \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (\text{D.5})$$

where we used the definition of a derivative. We integrate over the fiducial volume  $V$  to obtain:

$$dU = \iiint_V \left( \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} dt \right) dV \quad (\text{D.6})$$

where  $\rho$  and  $c_V$  remains within the integral since in the general case, they are not uniform. On the other hand, the infinitesimal heat  $\delta Q$  transferred to this volume within  $dt$  corresponds to the thermal flow across the surface of this volume:

$$\delta Q = -\Phi dt = - \left( \iint_{\Sigma} d\Phi \right) dt = - \left( \iint_{\Sigma} \mathbf{j} dS \right) dt \quad (\text{D.7})$$

where the minus sign is because the surface  $\Sigma$  around the volume is closed so  $dS$  is orientated outwards (but the convention of thermodynamics sets  $\delta Q > 0$  for energy being received). Now, we write  $\epsilon$  the rate of local energy production per unit mass induced, for instance, by nuclear reactions or neutrino losses in a star (or Joule heating in a solid metal).

If we neglect the variations of internal energy induced by the work of pressure forces (e.g., in an incompressible environment), we can use the first principle of thermodynamics to get:

$$dU = \delta Q + \iiint_V \rho \epsilon dV \quad (\text{D.8})$$

$$\iiint_V \left( \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} dV \right) dt = - \left( \oint j dS \right) dt + \iiint_V \rho \epsilon dV \quad (\text{D.9})$$

$$\iiint_V \left( \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot j - \rho \epsilon \right) dV = 0 \quad (\text{D.10})$$

where we used the Green-Ostrogradsky divergence theorem.

In the case of photons, for radiative energy transport, the only source of variation of the internal energy is  $\delta Q$  since we cannot define a variation of the spatial volume occupied by photons.

Since this equality is true for any volume  $V$ , we have:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho c_V} \nabla \cdot j = \frac{1}{c_v} \epsilon \quad (\text{D.11})$$

In specific geometries

XXX 4.1, 4.2, 4.3 of Tout-en-un 1D Cartesian 1D cylindrical 1D spherical

### 4.3.2 Diffusion equation

Now, we invoke Fourier law (D.3) to express the energy current density field  $j(M, t)$  as a function of the gradient of the temperature field  $T(M, t)$ . Once reinjected in equation (D.11), we get:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c_V}}_D \Delta T = \frac{1}{c_v} \epsilon \quad (\text{D.12})$$

where we used that  $\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \Delta T$ , and where we introduced the thermal diffusivity  $D$ . Eventually, when energy transport proceeds mainly through conduction, the time evolution of the temperature field, in a medium of thermal diffusivity  $D$  and heat capacity per unit mass  $c_V$ , is given by the diffusion equation with a power source  $\epsilon$ :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T + \frac{\epsilon}{c_v}} \quad (\text{D.13})$$

In specific geometries

XXX Tout-en-un 5.1.a (1D Cartesian) 5.1.d (1D cylindrical and 1D spherical)

The approach in the exercise above is a way to determine some of the terms in the Laplacian operator  $\Delta$  expressed in Cartesian, cylindrical and spherical geometries. When we directly use the geometry-independent expression of the diffusion equation (D.12), we can refer to the

Wikipedia page "[Del in cylindrical and spherical coordinates](#)" to get the expression of the Laplacian operator in Cartesian, cylindrical and spherical geometries.

### Scales

Let us look at the diffusion equation without source terms. It relates a partial derivative with respect to time to a partial derivative with respect to space. Consequently, it introduces a link between the characteristic timescale  $\tau$  of temporal variations of temperature, and the characteristic length scale  $L$  of spatial variations of temperature:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T}{\tau} \quad (\text{D.14})$$

$$\Delta T \sim \frac{T}{L^2} \quad (\text{D.15})$$

so the diffusion equation gives, in orders of magnitude:

$$\frac{T}{\tau} \sim D \frac{T}{L^2} \quad \text{i.e.} \quad L \sim \sqrt{D\tau} \quad (\text{D.16})$$

This is the fluid counterpart of the result we derived from a kinetic viewpoint in the exercise "Kinetic scales" in section [2.1.1](#).

#### Como un huevo a una castaña

Cooking a boiled chicken egg takes  $t_0 = 3$  minutes. An average egg has a mass  $m_0 \sim 60\text{g}$ . How long would it take to hard-boil an ostrich egg, knowing that its mass is between  $m_1 \sim 1.5\text{kg}$ ?

### 4.3.3 Boundary conditions

The diffusion equation (D.12) is a partial differential equation of second order in space and first order in time. To solve it, we need the prior knowledge of  $D$  (and of  $\epsilon$  and  $c_V$  if there are energy sources) but also (i) an initial condition  $T(M, t = 0)$  and (ii) boundary conditions. The latter can be set by the specificities of the problem (e.g., Newton's conduction law between a liquid and a solid, temperature continuity at the interface between two solids or an adiabatic wall) but in general, there are two main families of boundary conditions.

- **Dirichlet boundary conditions:** in this case, the value of the temperature is directly set in 2 different points.
- **Von Neumann boundary conditions:** in this case, the energy flux (e.g., through the 1<sup>st</sup> order spatial derivative of the temperature) is set in 2 different points.

We can mix these two types of boundary conditions, for instance by setting, at the same point, the temperature and its spatial derivative (as we did to solve the Lane-Emden equation (3.11) which is an ordinary differential equation of second order).

#### Conducting slab

XXX p.741 the temperature is set to  $T_1$  in  $x_1$  and  $T_2$  in  $x_2$  (Dirichlet boundary conditions)

## Diffusion equation in steady state

XXX Tout en un 5.4

1. Without sources

- (a) 1D Cartesian
- (b) 1D cylindrical
- (c) 1D spherical

2. With sources (adiabatic wall  $\leftrightarrow$  set T)

## Numerical resolution

XXX Tout en un 5.5

X

XX Tout en un 23.2 3 1. 2.c.e 6 7 1 2 3.a.d 8 9 10 11 1 2 3 13 14 15 1 2 3

# Chapter E

## Spectroscopy

Light has an intensity, but it also has a color<sup>1</sup>. The latter is represented by the distribution of number of photons (or total photon energy) per wavelength  $\lambda$  (or frequency  $\nu$ ): how much light is there of each color? This distribution is called a spectrum and carries the spectroscopic information, in opposition to the photometric information which represents the luminosity integrated over a waverange (i.e. the bolometric luminosity). In the stellar spectra displayed in Figure 1.4, two separated components are visible:

- **Continuum** - It is the smooth and slowly varying part of the spectrum which can be approximated by the Planck function because the emission is almost the one of a black body.
- **Absorption lines** - They are the sharp drops in the spectrum which occur around specific wavelengths.

The only spectrum in Figure 1.4 where the two components are not clearly separated is the top panel, because stars of spectral type M5 are so cool that their spectrum contains a lot of molecular absorption lines, so many that they overlap on top of each other and significantly damp the whole continuum. A handful of stars like Wolf-Rayet stars (like the one in Figure E.1) also have **emission lines**, sharp increases in the spectrum which occur around specific wavelengths. In this appendix, we provide a short description of the formation of spectral lines.

### 5.1 Quantum chemistry

Quantum chemistry is an empirical and pragmatic approach of electronic structure of atoms. It does not require in-depth knowledge of Quantum mechanics and it provides a good understanding to interpret astronomical observations such as emission/absorption lines. Once you will have solved the atomic structure of the hydrogen in the class of Quantum mechanics, you will see that the computation of the energy levels of an atom is involving and cannot be intuited. Therefore, quantum chemistry remains a powerful tool to perform radiative transfer without questioning the fundamental reasons of the atoms' electronic structures which is, here, taken for granted.

---

<sup>1</sup>Actually, it even carries a third information: the polarization.

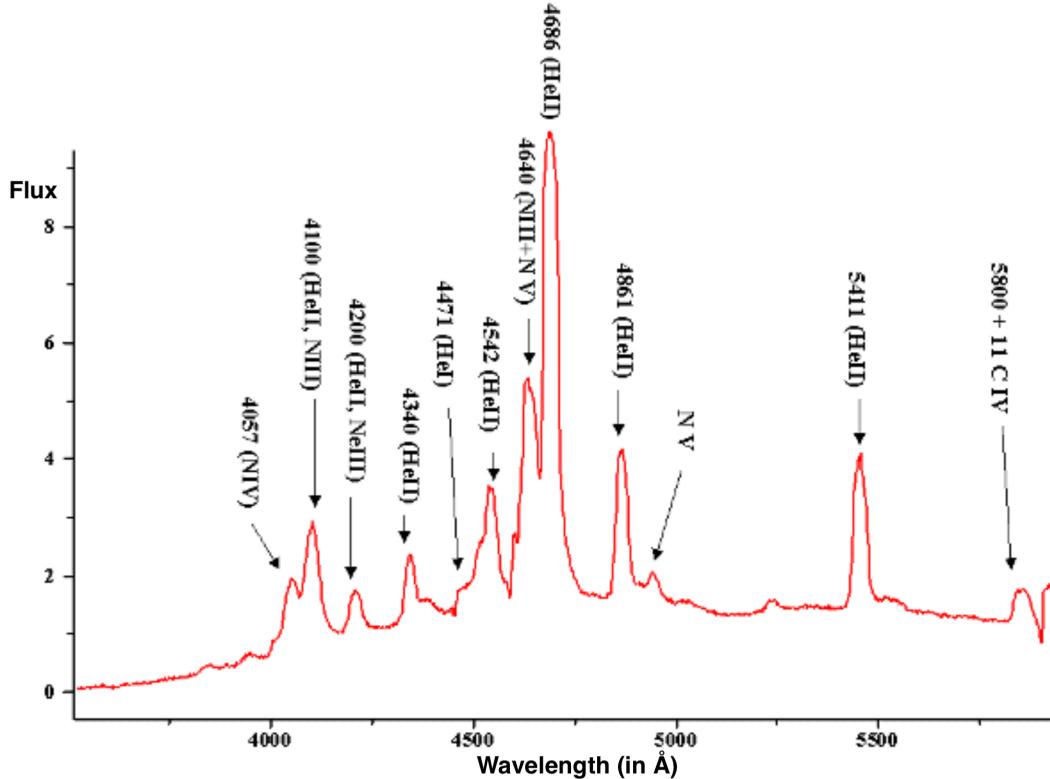


FIGURE E.1: Spectrum of a Wolf-Rayet star, a sub-category of evolved massive stars with effective temperature ranging from 20 to 200 kK. Prominent emission lines are clearly visible (see the review by [Crowther, 2006](#)).

### 5.1.1 Mendeleyev table

### 5.1.2 Atomic orbitals and quantum numbers

### 5.1.3 Bohr model

### 5.1.4 Electronic structure

**Pauli principle**

**Madelung-Klechkowski rule**

**Hund rule**

### 5.1.5 Covalent bond

## 5.2 Emission and absorption

### 5.2.1 Emission/absorption lines

KWW 14 **Ions**

L 1.5

In Astrophysics, ions have a specific notation. Let us write  $Z$  the number of protons in the nucleus of an atom, and  $N_e$  the number of bound electrons around this nucleus. Then, an atom has  $Z = N_e$  and is electrically neutral. If this atom is written  $X$  in chemical notation (e.g., hydrogen H, helium He, carbon C, etc), then, we write the neutral state as XI, with the latin number I. For instance, neutral hydrogen is written HI.

If one electron is torn apart,  $N_e = Z - 1$  and the atom carries a net positive charge  $e$ . In this case, we call it an ion<sup>2</sup> and write it XII, with the latin number II. For instance, when a hydrogen atom loses its unique electron, it is left with a naked proton that we write HII. We go on until there is no longer any electron left around the nucleus.

### Transitions

Spectral lines are the result of discrete energy transitions in an atom or an ion, that is to say when an electron jumps from a bound energy level to another (upward or downward). We call them bound-bound transition, in contrast with bound-free and free-free transitions. Quantum mechanics teaches us that these energy levels are quantified: their position is set by the solutions of the Schrödinger equation (see for instance the energy levels of the atom of hydrogen in Figure E.2). When an electron jumps from a lower to a higher (resp. a higher to a lower) energy level, we call it excitation (resp. de-excitation). Excitation (resp. de-excitation) requires energy (resp. releases energy). Excitation manifests through the absorption of kinetic energy (collisional excitation), or through the absorption of a photon (radiative excitation). De-excitation triggers the emission of a photon or can be caused by a collision. Hereafter, we focus on radiative processes only.

In all cases, the energy exchange during a transition has to match the energy difference  $\Delta E$  between the two levels involved. As a consequence, the photons emitted or absorbed must have the specific wavelength  $\lambda = hc/|\Delta E|$  and frequency  $\nu = |\Delta E|/h$ . In terms of opacity, an absorption line at a given frequency means that the opacity at this specific frequency is large, much larger than the opacity around this absorption line (e.g., the one due to Thomson scattering of free electrons): it is called resonant absorption.

### Optical depth

Absorption lines are typically produced in the atmosphere of stars, above the photosphere. By definition, the atmosphere is optically thin in the sense that most photons make it through without interacting, but those which have frequencies close from the ones where resonant absorption is to be expected will not make it. If the optical depth was to be computed at these specific frequencies, the atmosphere wouldn't qualify as optically thin.

In contrast, emission lines typically originate from structures which are globally optically thin (e.g., planetary nebulae), where there is no underlying continuum to outshine they're contribution. They are produced as excited electrons de-excite and emit a photon at the frequency corresponding to the energy difference between levels.

### Line width

The spectral width of the absorption/emission line is XXX

#### 5.2.2 Continuous emission/absorption

There are also emission/absorption mechanisms which are not resonant but instead alter the whole continuum (e.g., black body radiation, and absorption of light by dust grains and water droplets). For instance, the Earth's atmosphere filters out a fraction of the incident solar flux, even in the optical range (see Figure E.3). It explains why it's easier to perform high quality observations of the night sky in altitude and in dry environments like the Atacama desert in the Andean Altiplano. Although it's good news for life on Earth, the strong atmospheric absorption in X-rays prevents us from building ground-based X-ray telescopes.

---

<sup>2</sup>Although it is not fully ionized since there are electrons left (except if it is hydrogen).

L Fig.1.5  
Tab.1.4

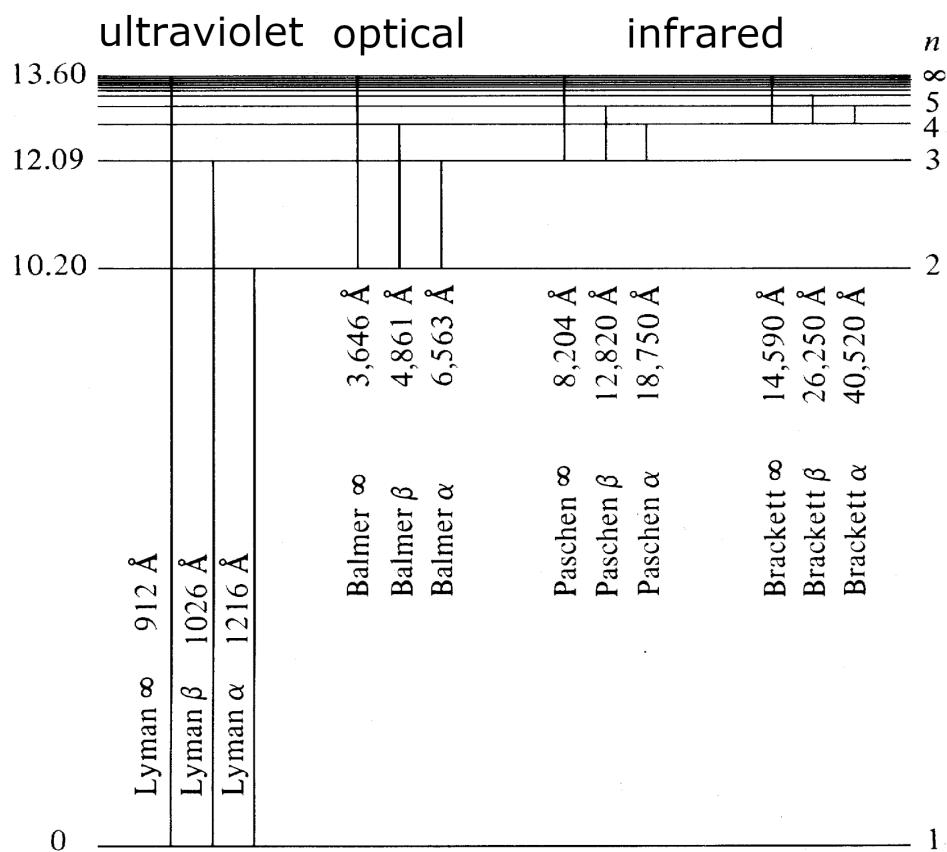


FIGURE E.2: Energy levels of the hydrogen atom, with the energy (in eV) on the left, and the level index on the right (from ground state  $n = 1$  to the free state  $n = \infty$ ). The bound levels approach the ionization boundary at  $\sim 13.6\text{eV}$ . For each of the four first hydrogen levels (respectively Lyman lines in UV, Balmer lines in optical and Paschen and Bracket lines in IR), the bound states are designated by vertical lines with the name and wavelength of the corresponding spectral line. Balmer lines, commonly called H ( $H\alpha$ ,  $H\beta$ , etc), represent an ubiquitous diagnostic tool in Astronomy.

L 1.3

### The greenhouse effect

Absorption in the infrared plays a key-role in the greenhouse effect. Indeed, the core waverange of the solar incident flux is in the optical, where the atmosphere is mostly transparent. Since the Earth is in thermal balance, it emits as a black body and its equilibrium temperature  $T$  is such that the emitted black body luminosity is equal to the absorbed luminosity. The albedo (see section 1.1.1) of the Earth is  $A \sim 31\%$ , which means that only  $1 - A = 69\%$  of the incident solar luminosity is actually absorbed, the rest being directly reflected:

$$4\pi R_{\oplus}^2 \sigma T^4 = (1 - A)L_{\text{inc}} \quad (\text{E.1})$$

where  $R_{\oplus}$  is the Earth radius. The incident flux is the fraction of the solar radiative field intercepted by the Earth at a distance  $d$ :

$$L_{\text{inc}} = L_{\odot} \Omega = L_{\odot} \frac{\pi R_{\oplus}^2}{4\pi d^2} \quad (\text{E.2})$$

with  $\Omega$  the solid angle corresponding to the Earth as seen from the Sun (this result is equivalent to the one derived in the exercise "Spherical dilution of light" in section 1.1.1). Using Stefan-Boltzmann law to write the solar luminosity as a function of the effective temperature and radius of the Sun, we have the Earth equilibrium temperature:

$$T = T_{\odot} \left( \frac{R_{\odot}}{2d} \right)^{1/2} (1 - A)^{1/4} \sim 255 \text{ K} = -18 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad (\text{E.3})$$

So the Earth spectrum peaks in infrared, but doesn't this temperature look quite chill to you? Fortunately enough, the greenhouse effect warms us up. It comes from the much higher absorptivity of the Earth atmosphere in infrared, where most of the radiation is re-emitted, than in optical, the waveband of the incident flux: indeed, the thermal equilibrium (E.1) ensures that the emitted luminosity is the same as the absorbed one, but it doesn't mean that the emitted spectrum is the same as the incident one. Actually, it is impossible since the Sun and the Earth effective temperatures are different, and the black body spectrum is set by these temperatures. As a consequence, the atmosphere does not absorb much of the optical radiation coming from the Sun, but it absorbs a significant fraction of the re-emitted infrared radiation coming from the ground, mostly due to carbon dioxide and water (Fig. E.3, bottom panel). When these molecules re-emit the photons, they do so isotropically so half of the flux is re-emitted towards the ground, which increases the incident flux and, by then, the equilibrium temperature of the Earth which is actually  $T \sim 290\text{K}=17 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . However, the extremely quick increase of the concentration of carbon dioxide in the Earth atmosphere since the XIX<sup>th</sup> century will likely trigger a positive feedback loop: as capitalist extractivism and consumerism leads to an increasing rate of fossil fuels burning, the greenhouse effect amplifies and major reservoirs of greenhouse gases trapped in the oceans (e.g., methane hydrates) and in the ground (e.g., permafrost and salt marshes) are susceptible to be released. Venus, where the surface temperature and pressure (respectively 737K and 92atm) are the highest in the solar system, is a good illustration of what happens when the greenhouse effect surges.

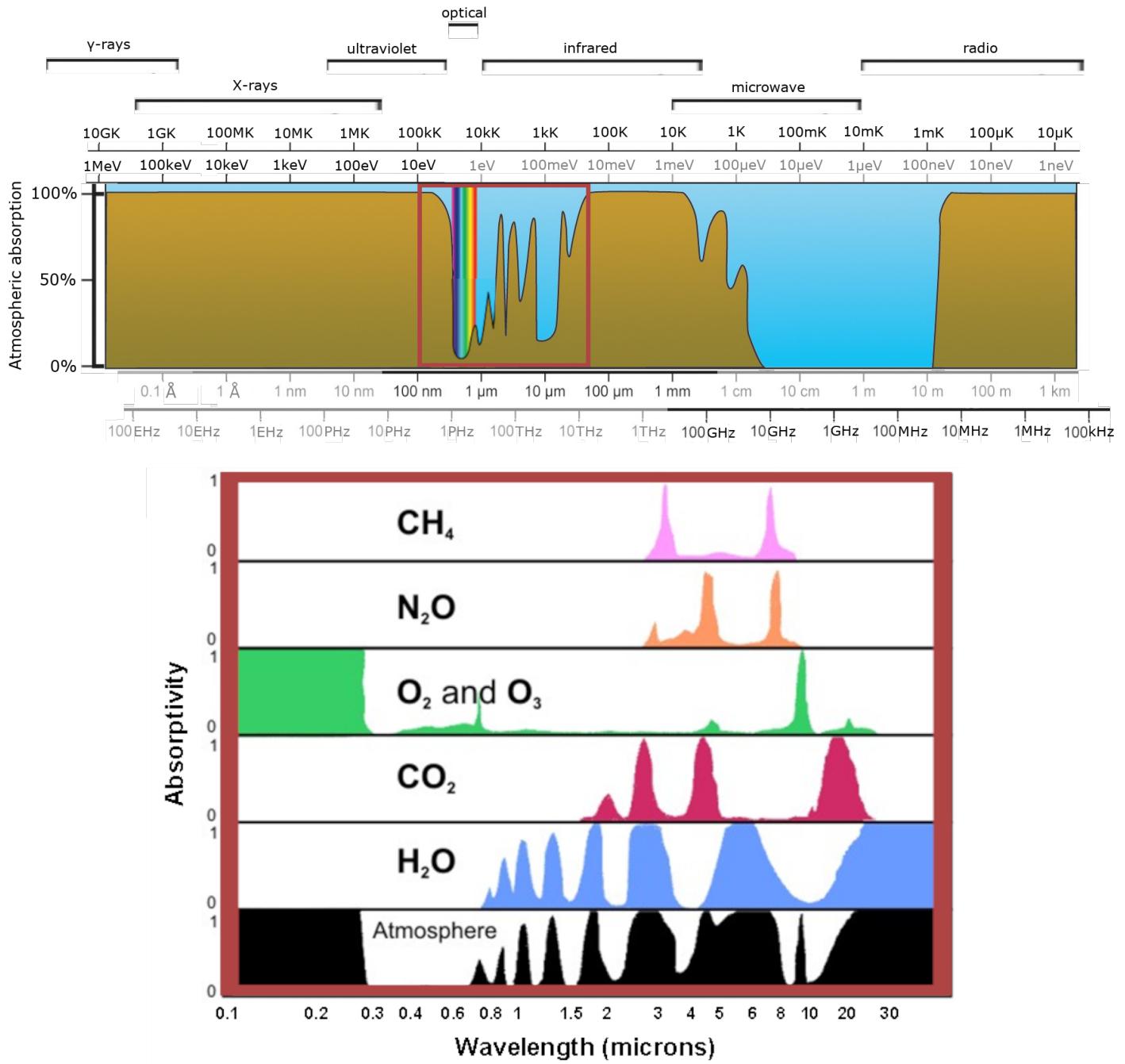


FIGURE E.3: (top) Atmospheric absorption across the electromagnetic spectrum. From bottom to top, the scales are for frequencies, wavelengths  $\lambda$ , energies  $E$  and temperatures  $T = E/k_B$ . To deduce the temperature of the black body with maximum emission at  $\lambda$ , divide  $T$  by 5. In the frequency, wavelength and energy scales, the black segments represent those where we commonly use this unit (e.g., eV in X-rays,  $\mu\text{m}$  in IR and Hz in radio). The main waveranges are represented at the very top. They overlap and are usually subdivided into sub-domains (hard/soft X-rays, extreme, far and near UV, near, mid and far IR, millimetric...). (bottom) Contribution to absorption of a few molecules, over the waverange in red in the top panel. The net absorption is represented in the bottom panel. The ozone layer ( $\text{O}_3$ ) in the upper atmosphere (15-30km) absorbs most of the incident UV radiation while carbon dioxide ( $\text{CO}_2$ ), the main chemical driver of the greenhouse effect, absorbs the infrared emission from the ground.

Black body temperature

In the caption of Figure E.3, where does the factor 5 comes from?