Задача Ситникова

1 Задача МакМиллана

Полная энергия тела малой массы равна

$$E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{GM_1m}{r_1} - \frac{GM_2m}{r_2}$$

Далее принимаем следующее:

$$G = 1,\ r_1 = r_2\ -\ \text{из симметрии задачи},\ M_1 = M_2 = \frac{1}{2},$$

$$a = 1\ -\ \text{большая полуось орбиты массивных тел}$$

В частном случае, называемом задачей МакМиллана, траектории массивных тел считаются окружностями

Тогда расстояние между массивным телом и малым телом можно выразить через координату следующим образом

$$r = \sqrt{1+y^2}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{m}{\sqrt{1+y^2}}$$

Энергия сохраняется, разделим на массу и продифференцируем по времени

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{E}{m}\Big) = \dot{y}\ddot{y} + \frac{\dot{r}}{r^2} = 0$$

$$\dot{y}\ddot{y} + \frac{dr}{dy}\frac{\dot{y}}{r^2} = 0$$

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\ddot{y} + \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

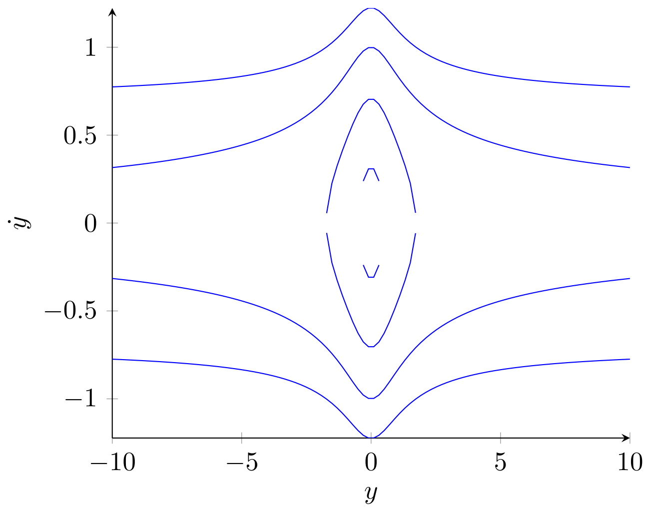
Это уравнение описывает точно решаемую систему, его записывают в виде системы

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = -\frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Система двумерная, такие системы не бывают хаотическими.

Фазовый портрет имеет следующий вид

$$\dot{y}^2 = \frac{2E}{m} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$



2 Задача Ситникова

Отличие в том, что теперь траектории - эллиптические орбиты, выражение для r начинает зависеть от времени

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{(\rho^2(t) + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Система будет выглядеть следующим образом

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = -\frac{y}{(\rho^2(u)+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dot{u} = 1 \end{cases}$$

Можно показать, что система является хаотической.