Вопросы к экзамену по алгебре и геометрии (1 семестр)

* 1. Бинарные отношения. Теорема об эквивалентности.
* 2. Функции. Теоремы о функциях и биекциях.
* 3. Основные правила комбинаторики. Вычисления мощностей декартовой степени множества, булеана множества и множества функций.
* 4. Размещения и перестановки. Четность перестановки. Свойства умножения произвольных перестановок и транспозиций.
* 5. Число сочетаний. Свойства числа сочетаний.
* 6. Полугруппа, моноид, группа. Свойства нейтрального и обратного.
* 7. Кольцо и поле. Свойства нуля, противоположного и обратимого. Гомоморфизм и изоморфизм.
* 8. Матрицы и действия над ними. Свойства действий над матрицами.
* 9. Определитель. Определение. Свойства: транспонирование, вынесение множителя, перестановка строк, одинаковые строки.
* 10. Свойства определителя: сумма строк, основное элементарное преобразование.
* 11. Миноры адъюнкты. Свойство разложения определителя по строке. Свойство "чужие
* адъюнкты".
* 12. Определитель верхнетреугольной матрицы и эффективный алгоритм вычисления определителя произвольного порядка.
* 13. Определитель блочно-верхнетреугольной матрицы и определитель произведения матриц.
* 14. Обратная матрица.
* 15. Элементарные преобразования матриц. Решение матричного уравнения AX = B с
* обратимой A.
* 16. Система линейных уравнений. Частное и общее решение. Теорема об общих решениях
* системы и соответствующей однородной системы. Матричное представление.
* 17. Метод Гаусса. Свободные и зависимые переменные.
* 18. Теорема Крамера и следствия из нее.
* 19. Формула Кардано.
* 20. Конструкция поля комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа.
* 21. Сопряженные комплексные числа.
* 22. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
* 23. Корень из комплексного числа.
* 24. Корни из единицы и их свойства. Построение правильного 5-угольника циркулем и
* линейкой.
* 25. Линейные операции с векторами. Свойства.
* 26. Базисы на прямой, на плоскости в пространстве. Разложение по базису. Координаты
* вектора. Линейные операции с векторами в координатах.
* 27. Скалярное произведение в трехмерном пространстве. Свойства скалярного произведения. Скалярное произведение в координатах.
* 28. Векторное и смешанное произведения в трехмерном пространстве. Теорема о смешанном произведении.
* 29. Свойства векторного произведения. Ослабленный закон сокращения в скалярном произведении. Векторное и смешанное произведения в координатах.
* 30. Координаты вектора в разных базисах. Матрица перехода. Координаты точки в разных системах координат. Формулы замены переменных при переходе к новой системе ко-
* ординат. Поворот.
* 31. Уравнения прямой на плоскости. Направляющий и главный векторы.
* 32. Взаимное расположение прямых. Пучок прямых.
* 33. Полуплоскости, определяемые прямой. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
* 34. Уравнения плоскости в пространстве. Направляющие и главный векторы.
* 35. Взаимное расположение плоскостей. Пучок плоскостей.
* 36. Полупространства, определяемые плоскостью. Расстояние от точки до плоскости в пространстве.
* 37. Уравнения прямой в пространстве. Направляющий вектор.
* 38. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
* 39. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Расстояние между прямыми в пространстве.
* 40. Кольцо формальных степенных рядов. Его обратимые элементы.
* 41. Кольцо многочленов. Степени. Обратимые элементы.
* 42. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов над ассоциативно-коммутативным кольцом с 1. Следствие над полем.
* 43. Отношение делимости в кольце и его свойства. НОД и его свойства.
* 44. Теорема о НОД в кольце многочленов над полем. Взаимно-простые многочлены.
* 45. Теорема Безу. Корни многочлена. Равенство многочленов и задаваемых ими функций над бесконечным полем. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
* 46. Неприводимые многочлены. Их свойства. Теорема о разложении в произведение неприводимых.
* 47. Описание неприводимых многочленов над полями комплексных чисел и действительных чисел. (Основная теорема алгебры без доказательства)
* 48. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел. Критерий Эйзенштейна.
* 49. Производная многочлена и отделение кратных множителей
* 1  
  1. Множества и операции над ними. Декартово произведение множеств. Отображения. Инъекция, сюръекция, биекция. Произведение отображений. Обратное отображение и критерий его существования.  
    
  2. Мощность конечного множества. Булеан множества. Мощность прямого произведения конечного числа конечных множеств и булеана n-элементного множества.  
    
  2  
  3. Бинарные отношения. Операции над бинарными отображениями. Рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. Отношения эквивалентности. Разбиения множества и фактор-множество. Связь между отношениями эквивалентности и разбиениями множества.  
    
  4. Отношения частичного порядка. Наибольшие, наименьшие, максимальные и минимальные элементы. Диаграмма чума. Отношения квазипорядка, ассоциированные элементы.  
    
  3  
  5. Размещения и перестановки. Транспозиции. Четные и нечетные перестановки, смена четности перестановки при транспозиции. Теорема о перечислении перестановок.  
    
  6. Сочетания. Биномиальные коэффициенты и их свойства.  
    
  4  
  7. Универсальные алгебры. Группоиды, полугруппы, моноиды, группы: примеры и простейшие свойства. Свойство степеней элементов в конечной группе.  
    
  8. Кольца и поля: примеры и простейшие свойства, характеристика поля. Подалгебры. Гомоморфизмы, изоморфизмы, изоморфные вложения, эндоморфизмы, автоморфизмы.  
    
  5  
  9. Комплексные числа: определение, алгебраическая форма записи, комплексное сопряжение.  
    
  10. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Возведение комплексных чисел в степень и извлечение корней из них.  
    
  6  
  11. Строение общего решения системы линейных уравнений.  
    
  7  
  12. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: приведение матрицы к ступенчатому виду, общая схема метода Гаусса и обоснование его корректности.  
    
  13. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: случаи несовместной, определенной и неопределенной системы. Число свободных переменных в неопределенной системе. Метод Гаусса-Жордана в случае определенной системы.  
    
  8  
  14. Определители: определение и свойства с 1-го по 7-е.  
    
  15. 8-е и 9-е свойства определителей. Определитель треугольной матрицы. Вычисление определителя произвольной квадратной матрицы методом приведения к треугольному виду.  
    
  9  
  16. Крамеровские системы линейных уравнений. Теорема Крамера и следствия из нее.  
    
  10  
  17. Линейные операции над векторами. Критерий коллинеарности векторов. Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора.  
    
  11  
  18. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, критерий ортогональности векторов, ослабленный закон сокращения. Вычисление скалярного произведения векторов, длины вектора и угла между векторами по их координатам.  
    
  12  
  19. Векторное произведение векторов: определение, свойства, 2-й критерий коллинеарности векторов, геометрический смысл векторного произведения, его вычисление по координатам векторов.  
    
  13  
  20. Смешанное произведение векторов: определение, свойства, критерий компланарности векторов. Геометрический смысл смешанного произведения и его вычисление по координатам векторов. Определение ориентации тройки векторов с помощью смешанного произведения.  
    
  14  
  21. Система координат, координаты точки. Деление отрезка в данном отношении. Замена системы координат. Поворот системы координат на плоскости.  
    
  15  
  22. Общее и параметрические уравнения кривой на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости (параметрические, каноническое, по двум точкам, общее, с угловым коэффициентом, в отрезках).  
    
  23. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Пучок прямых.  
    
  24. Полуплоскости, определяемые прямой. Расстояние от точки до прямой на плоскости.  
    
  16  
  25. Общее и параметрические уравнения поверхности. Виды уравнений плоскости (параметрические, каноническое, по трем точкам, общее, в отрезках).  
    
  26. Взаимное расположение двух плоскостей. Пучок плоскостей.  
    
  27. Полупространства, определяемые плоскостью. Расстояние от точки до плоскости.  
    
  17  
  28. Общие и параметрические уравнения кривой в пространстве. Виды уравнений прямой в пространстве (общие, параметрические, канонические, по двум точкам).
* 29. Взаимное расположение прямой и плоскости. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве.  
    
  30. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым. Расстояние между скрещивающимися прямыми.  
    
  18  
  31. Многочлены от одной переменной: определение, операции, кольцо многочленов. Теорема о делении многочленов с остатком.  
    
  32. Наибольший общий делитель двух многочленов. Взаимно простые многочлены.  
    
  19  
  33. Многочлены как функции. Корни многочленов. Теорема Безу и следствие из нее. Связь между равенством многочленов как последовательностей и их равенством как функций.  
    
  34. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. Интерполяционный многочлен Лагранжа.  
    
  20  
  35. Неприводимые многочлены. Разложение многочлена на неприводимые множители.  
    
  36. Производная многочлена, ее свойства. Отделение кратных множителей.  
    
  37. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.  
    
  21  
  38. Теорема Гаусса и следствия из нее. Неприводимые многочлены над полями C и R.  
    
  39. Лемма Гаусса. Эквивалентность неприводимости многочленов над Z и над Q. Критерий Эйзенштейна.  
    
  22  
  40. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов.  
    
  23  
  41. Базис векторного пространства. Разложение вектора по базису. Равномощность базисов. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Теорема об изоморфизме векторных пространств.  
    
  24  
  42. Подпространства. Связь между размерностью подпространства и размерностью пространства. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерности суммы подпространств.  
    
  43. Прямая сумма подпространств. Теорема о прямой сумме. Проекция вектора на подпространство. Дополняющее подпространство.  
    
  44. Линейные многообразия. Критерий совпадения линейных многообразий. Следствие о векторе сдвига.