

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
“ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ”



Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
& Μηχανικών Υπολογιστών

Ινστιτούτο Νανοεπιστήμης &  
Νανοτεχνολογίας  
Εργαστήριο Στατιστικής  
Μηχανικής & Πολύπλοκων  
Δυναμικών Συστημάτων

---

# Προσομοιώσεις Βιολογικών Νευρώνων : Επίδραση του Συντελεστή Ολοκλήρωσης και της Τάσης Κατωφλίου Πυροδότησης

---

Τλια Διολέτη

15 Απριλίου 2020

## Περίληψη

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει τα αποτελέσματα από την προσομοίωση δικτύων βιολογικών νευρώνων σε Μη-Τοπική Συνδεσιμότητα δακτυλίου με σκοπό την μελέτη και τον εντοπισμό χιμαιρικών καταστάσεων. Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή του δυναμικού μεμβράνης των νευρώνων είναι το Leaky Integrate-and-Fire (LIF), που επιλύθηκε υπολογιστικά με τη μέθοδο Euler. Στη συνέχεια μεταβάλλονται παράμετροι του μοντέλου με σκοπό την διερεύνηση της επίδρασής τους στην δυναμική του συστήματος και πιο συγκεκριμένα η παράμετρος ολοκλήρωσης  $\mu$  αλλά και η τάση κατωφλίου  $u_{th}$ . Συνοπτικά, για μικρές τιμές της παραμέτρου σύζευξης  $\sigma$  εμφανίζονται οι "μοναχικές καταστάσεις" (solitary states). Για μεσαίες τιμές της σταθεράς  $\sigma$  παρατηρούνται είτε σχεδόν συγχρονισμένες είτε πλήρως ασυγχρόνιστες καταστάσεις ενώ για μεγάλες τιμές του  $\sigma$  δημιουργούνται χιμαιρικές καταστάσεις με 4 συγχρονισμένες και 4 ασυγχρόνιστες περιοχές. Αυτή η συμπεριφορά είναι γενική, τόσο για μικρές όσο και για μεγάλες τιμές της παραμέτρου ολοκλήρωσης  $\mu$ . Όταν η διαφορά ( $\mu - u_{th}$ ) είναι σχετικά μικρή ( $< 0.1$ ) τότε η συμπεριφορά του συστήματος δεν αλλάζει ποιοτικά. Για μεγαλύτερη διαφορά ( $0.3-0.4$ ) το σύστημα εμφανίζεται ασυγχρόνιστο χωρίς να προλαβαίνουν τουλάχιστον στη διάρκεια των προσομοιώσεων, να δημιουργηθούν χιμαιρικές καταστάσεις.

## Ευχαριστίες

Η παρούσα αναφορά αφορά την ερευνητική εργασία που πραγματοποιήθηκε στο Εργαστήριο Στατιστικής Μηχανικής και Πολύπλοκων Δυναμικών Συστημάτων του Ινστιτούτου Νανοεπιστήμης και Νανοτεχνολογίας (INN) του ΕΚΕΦΕ "Δημόκριτος", στα πλαίσια του προγράμματος Πρακτικής Άσκησης της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα Δρ. Αστέρω Προβατά για την ευκαιρία που μου έδωσε να συμμετάσχω στις δραστηριότητες του Εργαστηρίου, καθώς και για την υπομονή και καθοδήγησή της σε κάθε βήμα. Επίσης, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην υπόλοιπη ομάδα του Εργαστηρίου, καθώς και τους συναδέλφους μου Χαρδούβελη Γιώργο-Ορέστη, Φερίκογλου Άγγελο και Παναγιωταρά Ηλία για την παρέα και την αρμονική συνεργασία μας που έκανε αυτό το δίμηνο πέρα από παραγωγικό, δημιουργικό και ευχάριστο. Πολλά από όσα έμαθα στη διάρκεια της πρακτικής μου, τεχνικά και μη είναι χάρη σε εκείνους.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών κ. Ιωάννη Γκόνο που ως ακαδημαϊκός υπεύθυνος του προγράμματος πρακτικής άσκησης της Σχολής, μου έδωσε τη δυνατότητα να συμμετάσχω σε αυτό και να αποκτήσω χρήσιμα εφόδια για την ακαδημαϊκή και επαγγελματική μου σταδιοδρομία.

Τέλος, θα ήθελα να αναφέρω την προσφορά του Εθνικού Δικτύου Έρευνας και Τεχνολογίας για τη χρήση του υπερυπολογιστή Άρη (έργο pr007011), όπου πραγματοποιήθηκε ένα μεγάλο μέρος των προσομοιώσεων της παρούσας εργασίας.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Θεωρητικές έννοιες</b>	<b>6</b>
2.1	Μοντέλο Leaky Integrate-and-Fire . . . . .	6
2.2	Χιμαιρικές καταστάσεις . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Αλγόριθμος Προσομοίωσης</b>	<b>9</b>
3.1	Μέθοδος Euler . . . . .	9
3.2	Υπολογισμός αθροίσματος . . . . .	9
3.3	Κατώφλι . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Αποτελέσματα</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>21</b>
<b>A</b>	<b>Παράρτημα</b>	<b>24</b>

## Κατάλογος σχημάτων

1	Χρονική εξέλιξη του δυναμικού μεμβράνης ενός LIF ταλαντωτή για $\mu = 1$ . . . . .	6
2	Δομή και σύνδεση δικτύου σε μία διάσταση για $R=2$ . Πράσινο χρώμα: Νευρώνας όπου εστιάζουμε. Κόκκινο χρώμα: Αλληλεπιδρώντες νευρώνες. Μαύρο χρώμα: Μη αλληλεπιδρώντες νευρώνες . . . . .	7
3	Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), στυγμιότυπα (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων $\sigma = 0,4$ , $N=1000$ , $R=200$ , $u_{th} = 0,78$ . . . . .	12
4	Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), στυγμιότυπα (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων όπως στο Σχήμα 3 και $\sigma = 0,9$ . . . . .	14
5	Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), στυγμιότυπα (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων όπως στο Σχήμα 3 και $\sigma = 1,8$ . . . . .	16
6	Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), στυγμιότυπα (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων $\sigma = 0,4$ , $\mu = 0,8$ , $N=1000$ , $R=200$ . . . . .	18
7	Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), στυγμιότυπα (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων όπως στο Σχήμα 6 και $\sigma = 0,8$ . . . . .	19
8	Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), στυγμιότυπα (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων όπως στο Σχήμα 6 και $\sigma = 1,8$ . . . . .	20

# 1 Εισαγωγή

Η εργασία επικεντρώνεται στην μελέτη της δυναμικής και ειδικότερα στην εμφάνιση χιμαιρικών καταστάσεων σε προσομοιωμένα δίκτυα βιολογικών νευρώνων. Σύμφωνα με τον ορισμό των Panaggio and Abrams [1], ένα δυναμικό σύστημα που αποτελείται από πολλούς συζευγμένους ταλαντωτές βρίσκεται σε χιμαιρική κατάσταση όταν παρατηρούμε σε αυτό συνύπαρξη συγχρονισμένων και ασυγχρονιστων περιοχών. Πολλές εργασίες έχουν συμβάλει στη καλύτερη κατανόηση των χιμαιρικών καταστάσεων, ανάμεσά τους και εργασίες του Εργαστηρίου Στατιστικής Μηχανικής και Πολύπλοκων Δυναμικών Συστημάτων του ΕΚΕΦΕ «Δημόκριτος» όπου πραγματοποιήθηκε η παρούσα πρακτική άσκηση. Προηγούμενες λοιπόν ερευνητικές εργασίες του εργαστηρίου είχαν ως αντικείμενο την μελέτη βιολογικών νευρωνικών δικτύων σε διάφορες τοπολογίες, μονοδιάστατες όπως η παρούσα, διδιάστατες αλλά και τρισδιάστατες με διαφορετικών ειδών συνδεσμολογίες όπως κατοπτρικές (reflecting), διαγώνιες (diagonal) και μη-τοπικές (non local) [2, 3, 4, 5]. Σε αυτές τις εργασίες το δυναμικό των νευρώνων περιγράφεται με διαφορετικά μοντέλα όπως τα μοντέλα FitzHugh-Nagumo και "ολοκλήρωσης πυροδότησης με απώλειες" (leaky integrate-and-fire, LIF), και στις περισσότερες περιπτώσεις παρατηρήθηκαν χιμαιρικές καταστάσεις.

Η παρούσα μελέτη προσομοιώνει ένα δίκτυο νευρώνων σύμφωνα με το μοντέλο LIF, σε μη-τοπική συνδεσιμότητα. Η δυναμική τέτοιων δικτύων έχει διερευνηθεί για σταθερή τιμή της παραμέτρου ολοκλήρωσης  $\mu = 1$  και για τάση κατωφλίου πυροδότησης  $u_{th} = 0,98$  με και χωρίς περίοδο εφησυχασμού. Έτσι έχει παρατηρηθεί πως για ορισμένες τιμές του  $\sigma$  ευνοούνται οι χιμαιρικές καταστάσεις με διαφορετική πολλαπλότητα μάλιστα [3, 4, 6]. Η συγκεκριμένη εργασία εστιάζει στην εξερεύνηση της επίδρασης που έχουν διαφορετικές τιμές των παραμέτρων  $\mu$  και  $u_{th}$  στην εμφάνιση των χιμαιρικών καταστάσεων στο σύστημα. Θα παρουσιαστούν με συνοπτικό τρόπο τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων και να γίνει εξαγωγή βασικών συμπερασμάτων.

Η οργάνωση της εργασίας γίνεται σε 4 κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά σε θεωρητικές έννοιες που κρίνονται απαραίτητες για την κατανόηση της εργασίας. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφονται τα σχετικά με τις προσομοιώσεις στοιχεία, ενώ στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματά των εν λόγω προσομοιώσεων. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μια σύνοψη των αποτελεσμάτων της πρακτικής άσκησης.

## 2 Θεωρητικές έννοιες

### 2.1 Μοντέλο Leaky Integrate-and-Fire

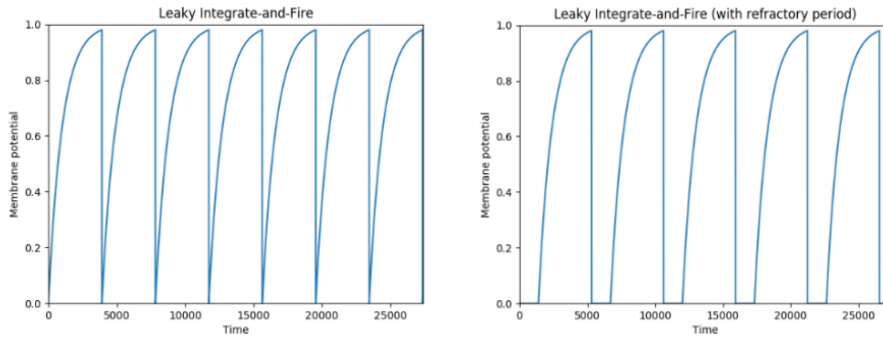
Το μοντέλο ολοκλήρωσης πυροδότησης με απώλειες ή **Leaky Integrate-and-Fire** (LIF) όπως αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία, περιγράφει τη χρονική μεταβολή του δυναμικού μεμβράνης ενός νευρώνα. Το LIF απαρτίζεται από μία βασική εξίσωση που περιγράφει το δυναμικό της μεμβράνης κατά την φόρτιση, Εξ. (1), και από μία συνθήκη που περιγράφει την εκφόρτιση της μεμβράνης, Εξ. (2):

$$\frac{du(t)}{dt} = \mu - u(t) \quad (1)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t + \varepsilon) = 0, u \geq u_{th} \quad (2)$$

Η μεταβλητή  $u$  αντιστοιχεί στο δυναμικό μεμβράνης ενός νευρώνα, ενώ η σταθερά  $\mu$  στην εξίσωση (1) είναι ένα άνω όριο του οποίου την τιμή το δυναμικό τείνει να προσεγγίσει. Στην εξίσωση (2)  $u_{th}$ , δυναμικό κατωφλίου πυροδότησης, είναι το μέγιστο δυναμικό στο οποίο μπορεί να βρεθεί η μεμβράνη. Μετά από αυτό η μεμβράνη εξαναγκάζεται να επιστρέψει στο δυναμικό επαναφοράς (εδώ ίσο με μηδέν).

Η χρονική συμπεριφορά του δυναμικού ενός νευρώνα που ακολουθεί το μοντέλο αυτό φαίνεται στο Σχήμα 1.α.



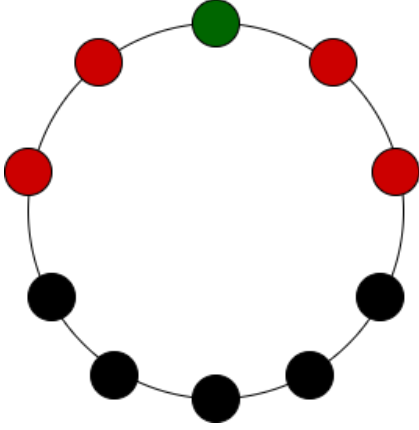
(α) Χωρίς περίοδο εφησυχασμού (β) Με περίοδο εφησυχασμού  $0.35T_s$

Σχήμα 1: Χρονική εξέλιξη του δυναμικού μεμβράνης ενός LIF ταλαντωτή για  $\mu = 1$

Μία ακόμα ιδιότητα που προέρχεται από παρατηρήσεις βιολογικών νευρώνων είναι η αδυναμία τους να αποπολωθούν κατά τη διάρκεια ενός μικρού

χρονικού διαστήματος μετά την επαναπόλωσή τους. Το διάστημα αυτό αποκαλείται **Περίοδος Εφησυχασμού**  $p_r$  (Refractory Period). Η διαφοροποίηση στη συμπεριφορά ενός νευρώνα με την προσθήκη αυτής της ιδιότητας φαίνεται στο Σχήμα 1.β. Η περίοδος αυτή δεν υλοποιήθηκε στην παρούσα προσομοίωση για λόγους απλότητας και αποφυγής της εισαγωγής περισσότερων παραμέτρων στο σύστημα.

Για τη δημιουργία του δικτύου χρησιμοποιείται τοπολογία **Μη-Τοπικής Συνδεσιμότητας** (Non-Local Connectivity) δακτυλίου. Ο κάθε νευρώνας  $i$  στον δακτύλιο είναι συνδεδεμένος, όχι μόνο με τους άμεσους γείτονές του, αλλά και με όλους τους νευρώνες που απέχουν από αυτόν ακτίνα  $R$  όπως φαίνεται στο Σχ.2 .



Σχήμα 2: Δομή και σύνδεση δικτύου σε μία διάσταση για  $R=2$ . Πράσινο χρώμα: Νευρώνας όπου εστιάζουμε. Κόκκινο χρώμα: Αλληλεπιδρώντες νευρώνες. Μαύρο χρώμα: Μη αλληλεπιδρώντες νευρώνες

Προκειμένου να λάβουμε υπόψιν την αλληλεπίδραση του κάθε νευρώνα με τους γειτονικούς του σε ακτίνα  $R$ , προσθέτουμε στη διαφορική εξίσωση του δυναμικού και έναν αρνητικό όρο που είναι ανάλογος της μέσης διαφοράς του δυναμικού του νευρώνα  $i$  με τους υπόλοιπους. Ο όρος είναι αρνητικός άρα μελετάμε την περίπτωση της αρνητικής ή απωστικής σύζευξης (repulsive coupling) με την οποία προηγούμενες εργασίες του εργαστηρίου έχουν εντοπίσει χημειρικές καταστάσεις η πολλαπλότητα των οποίων εξαρτάται από το  $\sigma$  και το  $R$ .

Η διαφορική εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \mu - u_i(t) - \frac{\sigma}{2R} \sum_{j \in [i-R, i+R]} (u_j(t) - u_i(t)), \forall i \in [1, N] \quad (3)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_i(t + \epsilon), \text{ όταν } u \geq u_{th}, \text{ με } u_{th} < \mu \quad (4)$$



όπου  $\sigma$  είναι ο συντελεστής σύζευξης (coupling strength) και δηλώνει το πόσο ενεργό ρόλο έχει στη διαμόρφωση του δυναμικού του νευρώνα η αλληλεπίδραση με τους γειτονικούς του, η παράμετρος  $\mu$  αντιστοιχεί στον ρυθμό με τον οποίο συγκεντρώνει "συνεισφορές" από τους γειτονικούς του νευρώνες,  $R$  είναι η ακτίνα σύνδεσης που δείχνει με πόσους νευρώνες συνδέεται δεξιά και αριστερά ο συγκεκριμένος κόμβος  $i$  και  $N$  είναι ο συνολικός αριθμός νευρώνων στο δακτύλιο.

## 2.2 Χιμαιρικές καταστάσεις

Στην αρχαιοελληνική μυθολογία η Χίμαιρα ήταν ένα πλάσμα που έβγαζε φωτιά από το στόμα, με σώμα κατσίκας, κεφάλι λιονταριού και ουρά που κατέληγε σε κεφάλι φιδιού. Χιμαιρική χαρακτηρίζεται η κατάσταση κατά την οποία σε ένα δίκτυο συνδεδεμένων ταλαντωτών, ένα μέρος των κόμβων ταλαντώνεται συγχρονισμένα, ενώ ένα άλλο μέρος είναι ασυγχρόνιστο. Πριν από την ανακάλυψή τους τις αρχές του 2000 από τον Kuramoto [7], υπήρχε η πεποίθηση πως δίκτυα όμοιων συνδεδεμένων ταλαντωτών με την πάροδο του χρόνου, είτε θα οδηγηθούν σε μια καθολική κατάσταση συγχρονισμού, είτε θα είναι όλοι ασυγχρόνιστοι. Αυτό το γεγονός κάνει την δυνατότητα ενός συστήματος να σταθεροποιηθεί σε μια κατάσταση συνύπαρξης συγχρονισμένων και ασυγχρόνιστων περιοχών ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα και απρόσμενη [1].

Οι χιμαιρικές καταστάσεις έχουν αναζητηθεί και βρεθεί σε διάφορα δυναμικά συστήματα όπως μηχανικών ταλαντωτών [8], σε μοντέλο του εγκεφάλου γάτας [9], ενώ θα μπορούσαν να συσχετιστούν με τον ημισφαιρικό ύπνο κάποιων ζώων, την επιληψία [10] κ.α. . Η παρούσα εργασία μελετά δίκτυα βιολογικών νευρώνων, ενώ σημειώνεται πως έχουν παρατηρηθεί χιμαιρικές καταστάσεις σε μια πληθώρα νευρωνικών μοντέλων όπως το FitzHugh–Nagumo [11], Hindmarsh–Rose model [12], στο LIF που εξετάζουμε και εδώ και σε άλλα [4].

## 3 Αλγόριθμος Προσομοίωσης

### 3.1 Μέθοδος Euler

Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 1, σκοπός του προγράμματος είναι η προσομοίωση της διαφορικής εξίσωσης (4) για ένα σύνολο νευρώνων τοποθετημένων πάνω σε δακτύλιο μεγέθους  $N$ .

Για να γίνει ο υπολογισμός των τιμών των δυναμικών των νευρώνων από τον υπολογιστή απαιτείται η επίλυσή της διαφορικής εξίσωσης μέσω κάποιας μεθόδου αριθμητικής ανάλυσης. Λόγω του ότι δεν περιμένουμε απότομες αλλαγές στις τιμές των δυναμικών (spikes), η επιλογή μιας απλής μεθόδου πρώτης τάξης με αρκετά μικρό βήμα είναι αρκετή. Γι αυτό το λόγο επιλέχθηκε η Μέθοδος Euler [13].

Σύμφωνα με αυτή, ο υπολογισμός μίας διαφορικής εξίσωσης του τύπου  $dy(t)/dt = f(t, y(t))$  γίνεται επαναληπτικά ως  $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$  όπου  $t_n = n \cdot h$  και  $h$  είναι το χρονικό βήμα της επανάληψης.

Στην προσομοίωση της παρούσας εργασίας, η παράγωγος  $f_i$  του δυναμικού του νευρώνα  $i$  (με κάποιες τροποποιήσεις που εξηγούνται στις επόμενες ενότητες) είναι βασισμένη στην εξίσωση (4) και έχει την εξής μορφή:

$$f(t_n, u_i(t_n)) = \mu - u_i(t_n) - \frac{\sigma}{2R} \sum_{j \in [i-R, i+R]} (u_j(t_n) - u_i(t_n)) \quad (5)$$

Το τμήμα του κώδικα που αναλαμβάνει την υλοποίηση της μεθόδου είναι το παρακάτω:

```
unext[i]=u[i]+dt*(mi-u[i]-(couplingStrength*sum)/(2*r)) ;
```

Όπου  $dt$  είναι το χρονικό βήμα,  $u[i]$  και  $unext[i]$  οι τιμές του δυναμικού του νευρώνα  $i$  την παρούσα και την επόμενη επανάληψη,  $mi$  η παράμετρος  $\mu$ ,  $couplingStrength$  ο συντελεστής  $\sigma$ ,  $r$  η ακτίνα σύνδεσης ( *coupling range*) και  $sum$  το άθροισμα της εξίσωσης (5).

Αυτός ο υπολογισμός, εκτελείται σειριακά για όλα τα στοιχεία πάνω στο δακτύλιο και στο τέλος κάθε επανάληψης, οι τιμές του πίνακα *unext* αντιγράφονται στον πίνακα *u*.

### 3.2 Υπολογισμός αθροίσματος

Το τμήμα του κώδικα που εκτελεί αυτό τον υπολογισμό είναι το παρακάτω:

```
//calculate sum
```

```

sum=0.0;
for(j=1; j<=r; j++){
    int n1=i-j;
    if (n1<0){n1+=n;}
    int n2=i+j;
    if (n2>=n){n2-=n;}
    sum=sum+(u[n1]-u[i]);
    sum=sum+(u[n2]-u[i]);
}

```

Όπου υπολογίζονται οι δείκτες κάθε φορά των γειτόνων σε απόσταση  $j$  στα αριστερά ( $n1$ ) και δεξιά ( $n2$ ) του τρέχοντα νευρώνα  $i$  και συνυπολογίζονται οι συνεισφορές τους στο άθροισμα. Προσέχουμε, επειδή πρόκειται για δακτύλιο και επομένως ο νευρώνας με αύξοντα αριθμό 0 είναι άμεσος γείτονας με τον χιλιοστό νευρώνα, αν οι δείκτες είναι εκτός του εύρους  $[1,N]$  να προσθαφαιρέσουμε τον κατάλληλο αριθμό ώστε να λάβουμε υπ' όψιν σωστά τις περιοδικές οριακές συνθήκες.

### 3.3 Κατώφλι

Αφού γίνει ο υπολογισμός της τιμής  $unext[i]$  με βάση τα παραπάνω, ελέγχεται αν το δυναμικό ξεπέρασε την τιμή κατωφλίου που ορίζεται για κάθε εκτέλεση. Η τιμή αυτή οφείλει να είναι μικρότερη της σταθεράς  $\mu$ . Μόλις το όριο αυτό ξεπεραστεί πραγματοποιούνται δύο λειτουργίες. Αρχικά, η τιμή του δυναμικού μηδενίζεται όπως ορίζει το μοντέλο. Δεύτερον, αν έχει ξεπεραστεί ένας ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων ( $minIter$ ), ώστε να έχουν σχηματιστεί εμφανώς οι χιμαιρικές καταστάσεις, γίνεται ανανέωση της γωνιακής συχνότητας ταλάντωσης του νευρώνα  $i$ . Η συχνότητα αυτή (Mean Phase Velocity) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega_i = 2\pi \cdot \frac{c_i(\Delta t)}{\Delta t} \quad (6)$$

όπου  $c_i$  ο αριθμός πλήρων ταλαντώσεων που έχει πραγματοποιήσει ο νευρώνας  $i$  σε χρόνο  $\Delta t$ , όπου ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί στον αριθμό επαναλήψεων μετά την επανάληψη  $minIter$ .

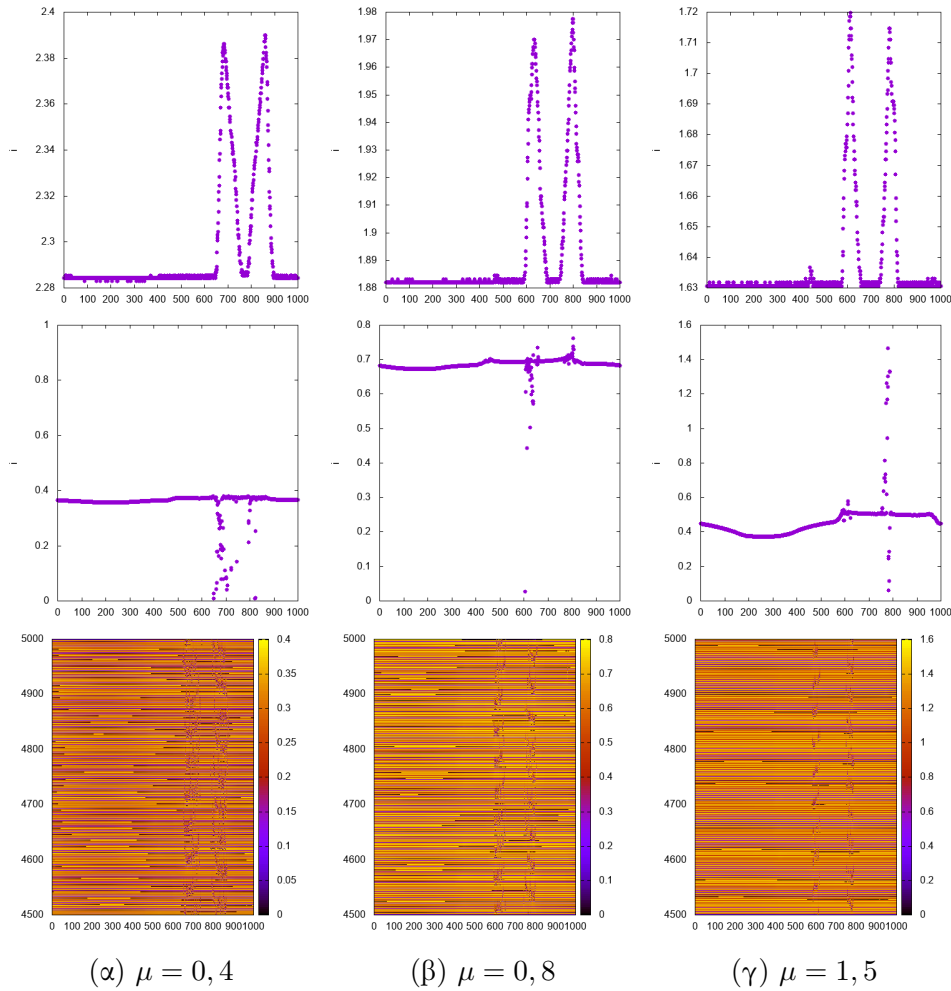
Η υλοποίηση των παραπάνω γίνεται με το παρακάτω τμήμα κώδικα:

```
/*if threshold is exceeded*/  
if(u[i]>uth){  
    u[i]=0.0;  
    /*mean phase velocity calculation*/  
    if(it>=minIter){  
        cycles[i]++;  
    }  
}
```

## 4 Αποτελέσματα

Όλες οι προσομοιώσεις πραγματοποιήθηκαν με  $N=1000$  νευρώνες , ακτίνα  $R=200$  και τιμές  $\sigma=0,1-1,9$ .

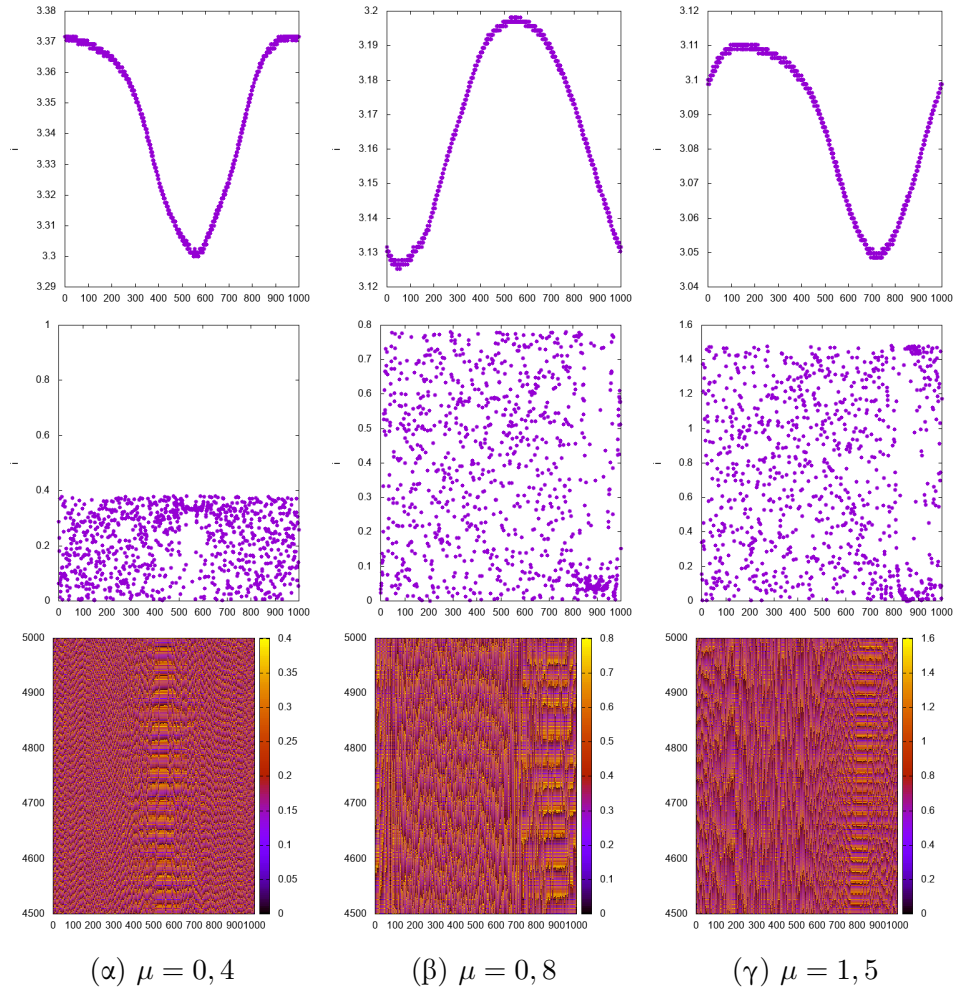
Ορισμένα χαρακτηριστικά αποτελέσματα των προσομοιώσεων με διαφορετικές τιμές του  $\mu$  και σταθερή τη διαφορά  $u_{th} = \mu - 0,02$  παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα :



Σχήμα 3: Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), στυγμιότυπα (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων  $\sigma = 0,4$  ,  $N=1000$  ,  $R=200$  ,  $u_{th} = 0,78$

Στο Σχήμα 3 παρατηρούμε ότι οι τιμές της μέσης κυκλικής συχνότητας μειώνονται με την αύξηση του  $\mu$ , τόσο στις συγχρονισμένες όσο και στις ασυγχρόνιστες περιοχές. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει ποσοτικά (προσεγγιστικά) τις μεταβολές αυτές.

$\mu$	$\omega_{coh}$	$\omega_{incoh}$	$\Delta\omega$
0.4	2.285	2.39	0.105
0.8	1.86	1.98	0.12
1.5	1.63	1.72	0.09

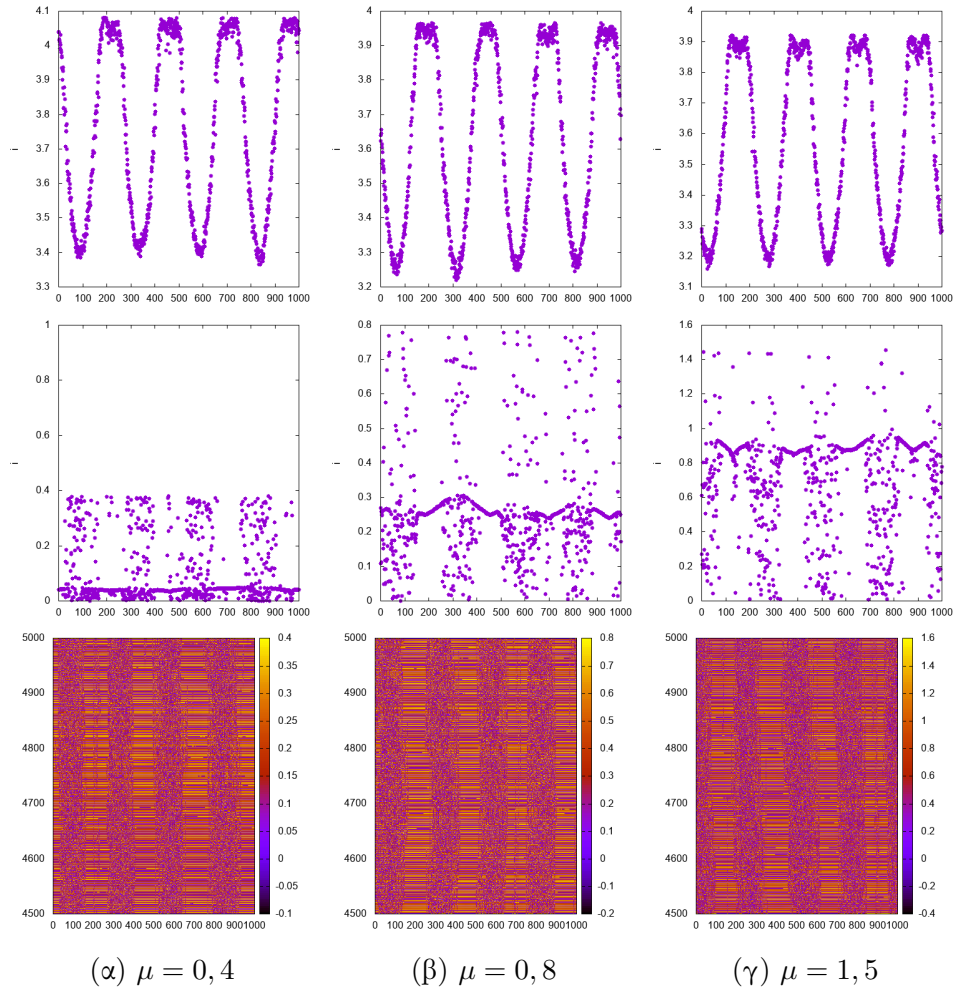


Σχήμα 4: Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), στυγμιότυπα (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων όπως στο Σχήμα 3 και  $\sigma = 0,9$

Στο Σχήμα 4 παρατηρούμε ότι οι τιμές της μέσης κυκλικής συχνότητας μειώνονται με την αύξηση του  $\mu$ , τόσο στις συγχρονισμένες όσο και στις ασυγχρόνιστες περιοχές, ενώ η διαφορά αυτών των τιμών για όλα τα  $\mu$  είναι  $<0.1$ . Ο παρακάτω πίνακας δείχνει ποσοτικά (προσεγγιστικά) τις μεταβολές αυτές.

$\mu$	$\omega_{\text{coh}}$	$\omega_{\text{incoh}}$	$\Delta\omega$
0.4	3.301	3.37	0.069
0.8	3.125	3.199	0.074
1.5	3.047	3.11	0.063



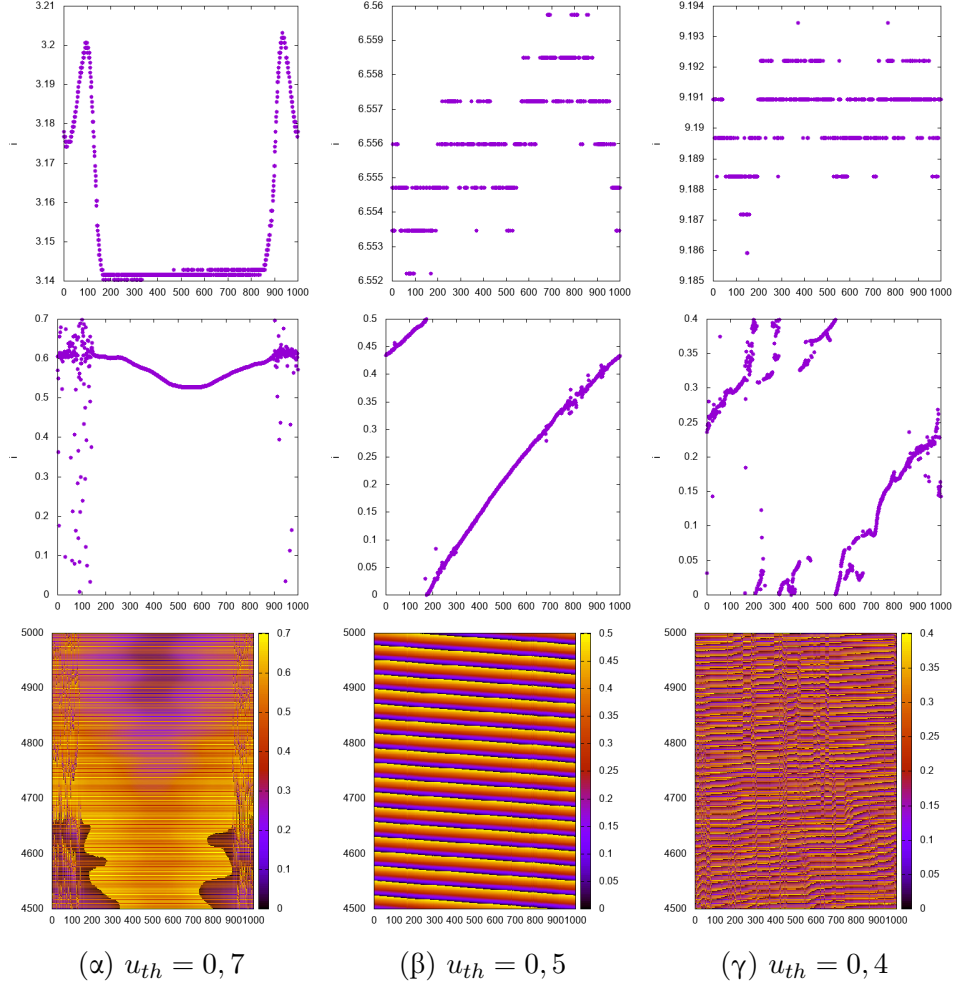


Σχήμα 5: Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), στυγμιότυπα (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων όπως στο Σχήμα 3 και  $\sigma = 1,8$

Στο Σχήμα 5 παρατηρούμε ότι οι τιμές της μέσης κυκλικής συχνότητας μειώνονται με την αύξηση του  $\mu$ , τόσο στις συγχρονισμένες όσο και στις ασυγχρόνιστες περιοχές. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει ποσοτικά (προσεγγιστικά) τις μεταβολές αυτές.

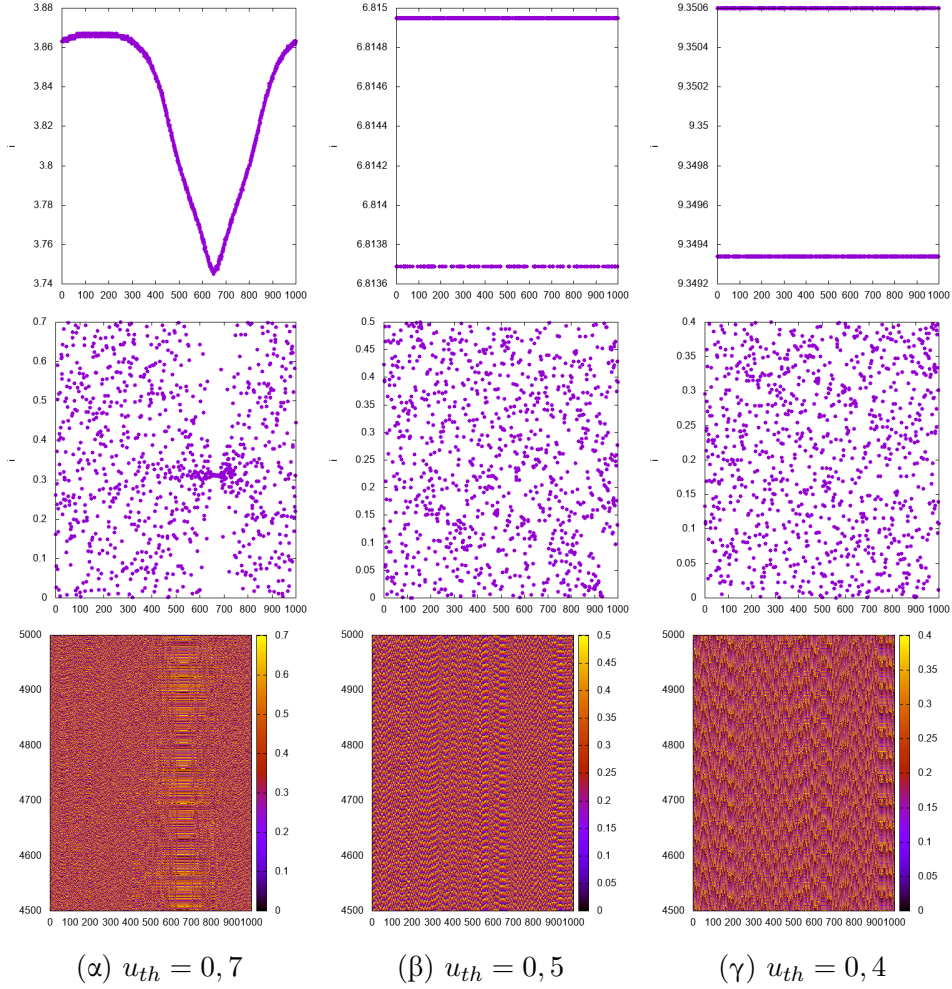
$\mu$	$\omega_{coh}$	$\omega_{incoh}$	$\Delta\omega$
0.4	3.4	4.09	0.69
0.8	3.25	3.98	0.73
1.5	3.19	3.93	0.74

Ακολουθούν ορισμένα αποτελέσματα των προσομοιώσεων με διαφορετικές τιμές της διαφοράς  $\mu - u_{th}$  και σταθερή τιμή του  $\mu = 0,8$  :



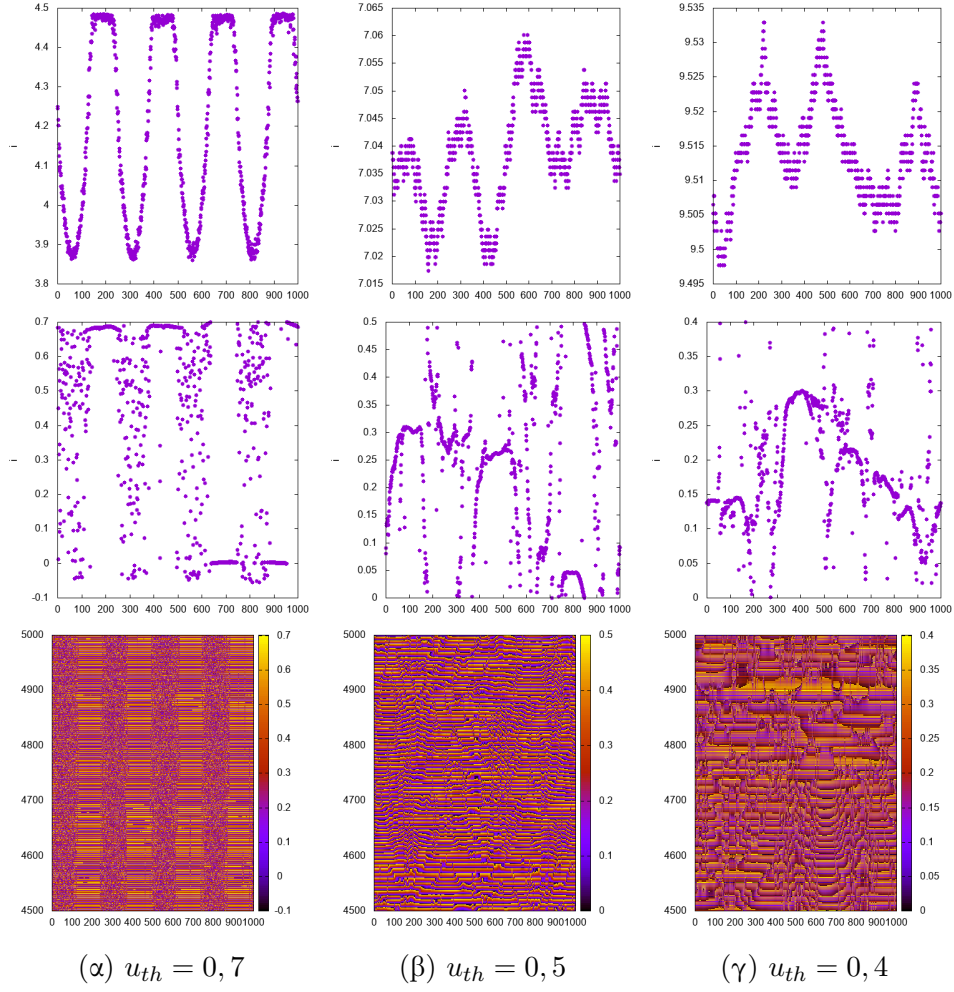
Σχήμα 6: Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), συγχρονισμός (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων  $\sigma = 0,4$  ,  $\mu = 0,8$  ,  $N=1000$ ,  $R=200$

Στο Σχήμα 6 παρατηρούμε ότι όταν η διαφορά  $(\mu - u_{th})$  είναι μικρή δεν υπάρχει μεγάλη ποιοτική διαφοροποίηση και για μικρές τιμές του  $\sigma$  εμφανίζονται οι μοναχικές καταστάσεις, ενώ για μεγαλύτερες τιμές της διαφοράς το σύστημα πέφτει σε συγχρονισμό καθώς η διαφορά  $\Delta\omega$  παίρνει πολύ μικρές τιμές.



Σχήμα 7: Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), στυγμιότυπα (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων όπως στο Σχήμα 6 και  $\sigma = 0,8$

Από το Σχήμα 7 παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου  $\sigma$ , όταν η διαφορά  $(\mu - u_{th})$  είναι μικρή η συμπεριφορά του συστήματος δεν αλλάζει ποιοτικά και παρατηρούνται οι χιμαιρικές καταστάσεις με 1 συγχρονισμένη και 1 ασυγχρόνιστη περιοχή. Καθώς όμως η διαφορά  $(\mu - u_{th})$  αυξάνεται οι μέσες κυκλικές συχνότητες των συγχρονισμένων κι ασυγχρόνιστων περιοχών πλησιάζουν και παρατηρείται το φαινόμενο του συγχρονισμού συχνοτήτων, ενώ οι φάσεις δεν συγχρονίζονται πλήρως (αλλά παραμένουν τυχαίες), όπως στα Σχήματα 7 β και 7 γ.



Σχήμα 8: Δίκτυο LIF: Κυκλική συχνότητα (πρώτη γραμμή), στυγμιότυπα (δεύτερη γραμμή) και χωροχρονικά διαγράμματα (τρίτη γραμμή) για τιμές παραμέτρων όπως στο Σχήμα 6 και  $\sigma = 1,8$

Στο Σχήμα 8 παρατηρούμε τα ίδια φαινόμενα, όπως και στο Σχήμα 7 όσον αφορά την ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος καθώς μεταβάλλεται η διαφορά ( $\mu - u_{th}$ ). Επιπλέον, για μεγάλες τιμές της διαφοράς η χωρική δομή του συστήματος παρουσιάζει διαλειπτικότητα (intermittency) καθώς εμφανίζονται και εξαφανίζονται τυχαία συγχρονισμένες/ασυγχρονιστες περιοχές.

## 5 Συμπεράσματα

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω αποτελέσματα των προσομοιώσεων, το σύστημα φαίνεται να έχει ίδια συμπεριφορά στις αντίστοιχες τιμές του  $\sigma$  ανεξάρτητα από την τιμή του  $\mu$ . Αυτό σημαίνει πως για μικρά  $\sigma = 0,3 - 0,4$  βλέπουμε μοναχικές καταστάσεις (solitary states) να δημιουργούνται. Καθώς αυξάνεται το  $\sigma$  οι νευρώνες είναι σχεδόν συγχρονισμένοι ώπου στο  $0,8 - 0,9$  δημιουργούνται χιμαιρικές καταστάσεις, οι οποίες στη συνέχεια δίνουν τη θέση τους σε μοτίβα ασυγχρόνιστα, μέχρι το  $\sigma = 1,6 - 1,9$  όπου βλέπουμε χιμαιρικές καταστάσεις με 4 συγχρονισμένες και 4 ασυγχρόνιστες περιοχές.

Μεταβάλλοντας την διαφορά  $\mu - u_{th}$  αρχικά μέχρι μια απόσταση  $0,1$  το σύστημα έχει παρόμοια συμπεριφορά, με τη σημαντικότερη διαφορά που παρατηρείται να είναι πως οι χιμαιρικές καταστάσεις εμφανίζονται σε λιγότερες τιμές του  $\sigma$ . Για παράδειγμα στις τιμές  $\sigma = 1,6 - 1,7$  το σύστημα δεν βρίσκεται ξεκάθαρα σε χιμαιρική κατάσταση αλλά σε ασυγχρόνιστη κατάσταση. Για μεγαλύτερη διαφορά  $(0,3 - 0,4)$  το σύστημα εμφανίζεται ασυγχρόνιστο χωρίς να προλαβαίνουν τουλάχιστον στη διάρκεια των προσομοιώσεων, να δημιουργηθούν χιμαιρικές καταστάσεις.

## Αναφορές

- [1] Mark Panaggio and Daniel Abrams. Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*, 28, 03 2014.
- [2] Nefeli Dimitra Tsigkri-DeSmedt, Johanne Hizanidis, Eckehard Schöll, Philipp Hövel, and Astero Provata. Chimeras in leaky integrate-and-fire neural networks: effects of reflecting connectivities. *The European Physical Journal B*, 90(7):139, Jul 2017.
- [3] N.D. Tsigkri-DeSmedt, J. Hizanidis, P. Hövel, and A. Provata. Multi-chimera states in the leaky integrate-and-fire model. *Procedia Computer Science*, 66:13 – 22, 2015. 4th International Young Scientist Conference on Computational Science.
- [4] Tsigkri-DeSmedt, Nefeli-Dimitra, Koulterakis, Ioannis, Karakos, Georgios, and Provata, Astero. Synchronization patterns in lif neuron networks: merging nonlocal and diagonal connectivity. *Eur. Phys. J. B*, 91(12):305, 2018.
- [5] T. Kasimatis, J. Hizanidis, and A. Provata. Three-dimensional chimera patterns in networks of spiking neuron oscillators. *Phys. Rev. E*, 97:052213, May 2018.
- [6] N.D. Tsigkri-DeSmedt, J. Hizanidis, P. Hövel, and A. Provata. Multi-chimera states and transitions in the leaky integrate-and-fire model with nonlocal and hierarchical connectivity. *The European Physical Journal Special Topics*, 225(6):1149–1164, Sep 2016.
- [7] Yoshiki Kuramoto and Dorjsuren Battogtokh. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators: A soluble case. *J. Nonlin. Phenom. Complex Syst.*, 5, 12 2002.
- [8] Erik Andreas Martens, Shashi Thutupalli, Antoine Fourrière, and Oskar Hallatschek. Chimera states in mechanical oscillator networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(26):10563–10567, 2013.
- [9] M.S. Santos, J.D. Szezech, F.S. Borges, K.C. Iarosz, I.L. Caldas, A.M. Batista, R.L. Viana, and J. Kurths. Chimera-like states in a neuronal network model of the cat brain. *Chaos, Solitons Fractals*, 101:86 – 91, 2017.

- [10] Ralph Andrzejak, Christian Rummel, Florian Mormann, and Kaspar Schindler. All together now: Analogies between chimera state collapses and epileptic seizures. *Scientific Reports*, 6:23000, 03 2016.
- [11] Iryna Omelchenko, Astero Provata, Johanne Hizanidis, Eckehard Schöll, and Philipp Hövel. Robustness of chimera states for coupled fitzhugh-nagumo oscillators. *Phys. Rev. E*, 91:022917, Feb 2015.
- [12] Johanne Hizanidis, Vasileios G. Kanas, Anastasios Bezerianos, and Tassos Bountis. Chimera states in networks of nonlocally coupled hindmarsh-rose neuron models. *I. J. Bifurcation and Chaos*, 24, 2014.
- [13] Euler integration method, wikipedia, Sep 2019.



## A Παράρτημα

Εδώ παρατίθεται ο κώδικας που εκτελεί την προσομοίωση

```
#include <stdio.h>          /* printf, scanf, puts, NULL
    */
#include <stdlib.h>          /* srand, rand */
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <iomanip>
using namespace std;
double myrand(double fMin, double fMax) //
{
    double f = (double)rand() / RAND_MAX;
    return fMin + f * (fMax - fMin);
}

int main(int argc, char *argv[]) {
    double pi=3.14159;
    int n=1000;
    int r= atoi(argv[1]);
    double m=atof(argv[2]);
    double uth=atof(argv[3]);
    double couplingStrength=atof(argv[4]);
    double u[n], unext[n];
    double sum;
    double dt=0.001;
    double simTime=5000.0;
    double time=0.0;
    int iterations= (int) (simTime/dt);
    //double refTime; //refIter=refTime/dt
    //int refIter=3;
    int refractoryPeriod[n];
    int minIter=2000;
    int cycles[n];
    double omega[n];
    int it=0;
    int i,j,k;
    int seed= 436875663;
    srand(436875663);
    ofstream outfile (argv[5]);
```

```

/*initializations */
for(i=0; i<n; i++){
    u[i]=myrand(0.0,uth);
    unext[i]=0.0;
    refractoryPeriod[i]=0;
    cycles[i]=0;
    omega[i]=0.0;
}

for(it=0; it<=iterations; it++){
    /*for each element*/
    time+=dt;
    for(i=0; i<n; i++){
        //calculate sum
        sum=0.0;
        for(j=1; j<=r; j++){
            int n1=i-j;
            if (n1<0){n1+=n;}
            int n2=i+j;
            if (n2>=n){n2-=n;}
            sum=sum+(u[n1]-u[i]);
            sum=sum+(u[n2]-u[i]);
        }
        unext[i]=u[i]+dt*(m-u[i]-(couplingStrength*sum)
            /(2*r));
    }
    /*new initial u*/
    for(i=0;i<n;i++){
        u[i]=unext[i];
        /*if threshold is exceeded*/
        if(u[i]>uth){
            u[i]=0.0;
            /*mean phase velocity calculation*/
            if(it>=minIter){
                cycles[i]++;
            }
        }
    }
    //save unext.
    //save omega
    if(it%1000==0){
        for(i=0;i<n;i++){

```

```
        omega[i]=2.0*pi*cycles[i]/(time-dt*minIter);
        outfile<<fixed<<setprecision(5)<<time<<"\t"<<i<<
            "\t"<<u[i]<<"\t"<<omega[i]<<"\n";

    }

}

return 0;
}
```