

И. А. КОТЕЛЬНИКОВ

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

ТОМ 2

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Издание третье, исправленное и дополненное

РЕКОМЕНДОВАНО

*УМО по классическому университетскому образованию РФ
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся
по направлению «Физика» и по специальности «Физика»*



ЛАНЬ

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР •
• 2021 •

УДК 532.5
ББК 22.333я73

К 73 Котельников И. А. Лекции по физике плазмы. Том 2. Магнитная гидродинамика : учебное пособие для вузов / И. А. Котельников. — 3-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 448 с. : ил. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-8114-6933-8

Книга содержит расширенное изложение курса «Магнитная гидродинамика» для студентов физического факультета Новосибирского государственного университета и рекомендована УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлению «Физика» и по специальности «Физика». Детально излагаются теория классического переноса плазмы, теория двухжидкостной и одножидкостной магнитной гидродинамики. Основное внимание уделяется равновесию и устойчивости плазмы. Уровень изложения рассчитан на студентов, прослушавших курсы электродинамики и физики сплошных сред. Книга содержит более 150 задач с решениями.

Для студентов, аспирантов, преподавателей вузов, инженеров и научных работников, специализирующихся в физике и технике плазмы.

УДК 532.5
ББК 22.333я73

Рецензент

Д. Д. РЮТОВ — доктор физико-математических наук, академик РАН;
Г. Е. ВЕКШТЕЙН — доктор физико-математических наук, профессор.

Обложка
П. И. ПОЛЯКОВА

© Издательство «Лань», 2021
© И. А. Котельников, 2021
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2021

Предисловие

Книга «Магнитная гидродинамика» завершает двухтомное учебное пособие с общим заголовком «Лекции по физике плазмы». Второй том содержит расширенное изложение одноимённого курса, который студенты кафедры физики плазмы физического факультета Новосибирского государственного университета (НГУ) изучают в весенном семестре третьего года обучения после курса «Основы физики плазмы» в осенном семестре и перед курсом «Коллективные явления в плазме» в следующем учебном году. Лекции сопровождаются семинарскими занятиями, где студенты решают задачи, составляющие неотъемлемую часть курса, рассчитанного на 15 недель — по одной лекции и семинару в неделю. Основное внимание в курсе уделяется основам классической теории переноса плазмы в модели двухжидкостной магнитной гидродинамики, теории равновесия и устойчивости плазмы в рамках одножидкостной магнитной гидродинамики. Уровень изложения рассчитан на студентов, изучивших общие курсы механики, электродинамики и физики сплошных сред. Параллельно с «Магнитной гидродинамикой» студенты физического факультета НГУ изучают курс математической физики, поэтому книга содержит минимальные сведения из этой дисциплины.

Нынешняя структура теоретических курсов на кафедре физики плазмы НГУ сложилась после выхода второго издания моих «Лекций по физике плазмы» в 2013 году [1]. Часть тех лекций была перенесена в заново воссозданный курс «Магнитная гидродинамика». Его основу составил конспект лекций академика [Д. Д. Рютова](#), которые он читал в 1984–1993 годах, но объём учебного материала был значительно увеличен, в том числе за счёт добавления задач. Их число, а подчас и сложность многократно превышают тот предел, который способен усвоить за один семестр самый усердный студент, но я надеюсь, что время от времени он будет открывать мой учебник, став дипломированным физиком.

В наши дни магнитная гидродинамика разрослась в обширную науку, которая находит применение в самых разных отраслях человече-

ской деятельности. На кафедрах одного университета студенты зачастую могут слушать разительно непохожие курсы с одинаковым названием. Среди обширной литературы по магнитной гидродинамике найдётся не так уж много книг начального профессионального уровня, которые целиком посвящены этой науке [2–13]. Нужные сведения приходится по крупицам собирать по многим статьям, учебникам и монографиям. Рискнём выделить некоторые из них [14–36]. В нашем курсе магнитная гидродинамика излагается с прицелом на термоядерные исследования, поэтому основное внимание уделено проблеме равновесия и устойчивости плазмы в термоядерных установках. Ударные волны в плазме — важнейший раздел магнитной гидродинамики, имеющий множество приложений в астрофизике, — остались за рамками курса.

О нумерации формул и системе единиц

Формулы, рисунки и задачи нумеруются независимо в пределах каждой лекции. Для отсылок на такие вещи в пределах текущей лекции используется одинарная нумерация, но ссылку из другой лекции предваряет её номер. Например, (3.14) обозначает уравнение 14 в лекции 3; ссылка на ту же формулу из текста третьей лекции будет напечатана в виде (14). В решениях задач, которые вынесены в Приложение, используется тройная нумерация: например, (1.2.3) метит третье уравнение в решении второй задачи в первой лекции.

В обеих частях учебника используется единая нумерация лекций и параграфов, поэтому второй том открывается лекцией 16. Чтобы понимать содержание второй части, не обязательно (хотя и желательно) штудировать первую часть, если читатель знакомился с основами физики плазмы по другим учебникам. Параграфы, помеченные звёздочкой (*), предназначены для самостоятельного изучения по причине ограниченности аудиторного времени, а не из-за того, что они проще.

Косая дробная черта в математических формулах обозначает деление всего, что находится слева от неё, на всё, что справа. Иными словами, $4\pi L n e^4 / m^2 v^4$ следует понимать как $4\pi L n e^4 / (m^2 v^4)$ и никак иначе. Элемент объёма в трёхмерных интегралах записывается как $d^3x = dx dy dz$, тогда как dx обозначает дифференциально малый элемент контура интегрирования. Векторы обозначаются жирными курсивными буквами, а для тензора используется прямой шрифт без серифов, например \mathbf{p} — это вектор импульса, а \mathbf{P} — тензор давления. Точка по центру между двумя векторами отличает скалярное произведение $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ от пря-

мого (диадного) произведения $\mathbf{v}\mathbf{E}$ двух векторов (или тензоров). Знак « \times » обозначает векторное произведение. Обычно (но не всегда) скалярное произведение окружают круглые скобки, например $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$, а векторное произведение — квадратные скобки, например $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. Под повторяющимися греческими индексами подразумевается суммирование от 1 до 3 или от x через y до z , например скалярное произведение $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$ можно также записать в виде $v_\mu E_\mu = v_x E_x + v_y E_y + v_z E_z$. Другие обозначения вводятся по мере надобности.

Всюду в книге используется абсолютная физическая система единиц СГС. В формулах СГС отсутствуют нефизические коэффициенты, необходимые в Международной системе единиц СИ, а электрическое и магнитное поля имеют одинаковую размерность в соответствии с их физическим смыслом.

Благодарности

Эта книга отражает почти 50-летний опыт преподавания теоретических курсов на кафедре физики плазмы НГУ, которая с момента основания базируется в Институте ядерной физики СО РАН им. Г. И. Будкера. Структура курсов была заложена академиком [Д. Д. Рютовым](#). В разное время лекции читали А. С. Аракчеев, А. Д. Беклемишев, Б. Н. Брейзман, И. А. Котельников, С. В. Лебедев, К. В. Лотов, В. В. Приходько, А. Л. Санин, С. Л. Синицкий, Д. И. Сковородин, [Г. В. Ступаков](#), И. В. Тимофеев, Ю. А. Цидулко. На протяжении многих лет я также имел возможность обсуждать содержание курса с другими своими коллегами: Ю. И. Бельченко, А. В. Бурдаковым, Г. Е. Векштейном, В. И. Волосовым, А. А. Ивановым, А. И. Мильштейном, М. С. Чащиным, И. С. Черноштановым, А. П. Шкуриным. Я ценю их советы и доброе отношение ко мне. Особенно хочется отметить вклад [Геннадия Викторовича Ступакова](#), совместно с которым было подготовлено первое издание «Лекций» в 1996 году, а также [Дмитрия Дмитриевича Рютова](#), который прочёл рукописи двух первых изданий, сделав замечания, заставившие меня хорошенъко подумать. Мне помог также конспект лекций [Бориса Нухимовича Брейзмана](#), которые я слушал в 1978–1979 годах, будучи студентом. Он стал своего рода репером, определившим уровень сложности лекционного материала.

Академгородок, Новосибирск

i.a.kotelnikov@inp.nsk.su

17 февраля 2021 г.

Лекция 16

Плазма как сплошная среда

Динамика установления теплового равновесия. Магнитная гидродинамика. Моменты функции распределения. Система уравнений двухжидкостной МГД

Уравнение Фоккера—Планка с интегралом столкновений Ландау представляет кинетическое — наиболее строгое — описание плазмы. Однако во многих случаях достаточно ограничиться более простым *гидродинамическим приближением*, когда плазма рассматривается как проводящая жидкость — сплошная среда. В зависимости от требуемой точности гидродинамическое описание может быть одножидкостным, двухжидкостным или многожидкостным.

При движении проводящей жидкости в магнитном поле в ней индуцируются электрические поля и возникают электрические токи. На токи в магнитном поле действует сила Ампера, которая существенным образом влияет на движение жидкости. Эти же токи меняют и само магнитное поле. В результате возникает сложная картина взаимодействия проводящей среды и электромагнитного поля. Шведский физик Ханнес Альфвен ([Hannes Alfvén](#)) первым обратил внимание на связанный с этим круг явлений. Свои идеи, заложившие теоретические основы *магнитной гидродинамики*, Альфвен развивал в приложении к астрофизическим явлениям. Уравнения МГД — так для краткости называют магнитную гидродинамику — позднее были выведены из кинетического уравнения, что позволило установить границы их применимости. Однако зачастую магнитная гидродинамика даёт разумные предсказания даже в тех случаях, когда она формально неприменима. Авторы новейших монографий по теории МГД зачастую предпочитают говорить об эффектах, которые магнитная гидродинамика описывает или, напротив, не описывает (см., например, [8]). Не вдаваясь в дискуссию по столь запутанному вопросу, мы получим уравнения *двухжидкостной*

магнитной гидродинамики, вычислив моменты кинетического уравнения. И лишь затем, через несколько лекций, перейдём к более грубой модели одножидкостной магнитной гидродинамики, с которой начиналась теория Альфвена.

В рамках двухжидкостной МГД плазма рассматривается как сплошная среда, состоящая из двух взаимопроникающих жидкостей — электронной и ионной. Такая модель подходит для описания *простой плазмы*, состоящей из ионов одного сорта и электронов. При наличии ионов нескольких сортов каждый сорт нужно считать отдельной жидкостью, что приводит к *многожидкостной магнитной гидродинамике*. В тех случаях, когда макроскопические параметры электронов и ионов — в том числе их температура и средняя скорость движения — близки к друг другу, плазму можно рассматривать как одну жидкость, как в приближении одножидкостной магнитной гидродинамики.

§16.1. Динамика установления равновесия

Представим, что в начальный момент времени электроны и ионы имеют произвольное неравновесное распределение. Пусть средние начальные энергии отдельного электрона и отдельного иона соответственно равны W_e и W_i , а их средние направленные скорости — \mathbf{U}_e и \mathbf{U}_i , причём $U_e \ll \sqrt{2W_e/m_e}$ и $U_i \ll \sqrt{2W_i/m_i}$. Вследствие кулоновских столкновений начальная неравновесность будет *релаксировать*, а функции распределения электронов и ионов — приближаться к максвелловским. Темп релаксации характеризуется частотами $\nu_{ab}^{(p)}$ и $\nu_{ab}^{(\varepsilon)}$ (с разными комбинациями значений индексов a и b), которые определены соответственно в §8.2 и §8.4.

В плазме с многозарядными ионами (у которых велико зарядовое число, $Z \gg 1$) быстрее всего происходит выравнивание средних потоковых скоростей электронов и ионов, \mathbf{u}_e и \mathbf{u}_i (см. §8.5 и задачи 8.4 и 8.5). Вследствие рассеяния электронов на ионах за время порядка

$$\tau_e \sim \frac{1}{\nu_{ei}^{(p)}} \quad (1)$$

средние (направленные) скорости тех и других приближаются к значению

$$\mathbf{u}_e \approx \mathbf{u}_i \approx (m_i n_i \mathbf{U}_i + m_e n_e \mathbf{U}_e) / (m_i n_i + m_e n_e) \approx \mathbf{U}_i,$$

которое определяется законом сохранения импульса. Затем завершается «максвеллизация» распределения электронов в результате электрон-

электронных столкновений. За время порядка

$$\frac{1}{\nu_{ee}^{(p)}} \sim \frac{1}{\nu_{ee}^{(\varepsilon)}} \sim Z\tau_e \quad (2)$$

функция распределения электронов станет почти максвелловской с температурой

$$T_e = \frac{2}{3}W_e,$$

но полная кинетическая энергия электронного газа при этом почти не изменится. Аналогичный процесс в газе ионов займёт время порядка

$$\tau_i \sim \frac{1}{\nu_{ii}^{(p)}} \sim \frac{1}{\nu_{ii}^{(\varepsilon)}} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2} \frac{\tau_e}{Z^2}, \quad (3)$$

а температура ионов установится на уровне

$$T_i = \frac{2}{3}W_i.$$

Самый медленный процесс — выравнивание электронной и ионной температур. Он завершается за время

$$\frac{1}{\nu_{ei}^{(\varepsilon)}} \sim \frac{m_i}{m_e} \tau_e. \quad (4)$$

В результате в плазме устанавливается локальное термодинамическое равновесие, которое характеризуется приблизительно одинаковой температурой электронов и ионов.

Дальнейшая эволюция квазинейтральной плазмы продолжается в направлении выравнивания её параметров между различными частями пространства за счёт процессов переноса, которые приводят к перераспределению плотности, импульса и энергии между различными областями плазмы. Процессами переноса называют в совокупности диффузию, теплопроводность и вязкость. В замкнутой системе они ведут к установлению полного термодинамического равновесия. Процессам переноса будут посвящены лекции 17 и 18. Пока же достаточно пояснить, что эти процессы также обусловлены кулоновскими столкновениями, но идут ещё медленнее, нежели выравнивание температуры ионов и электронов в заданной точке пространства.

В незамкнутой системе состояние полного термодинамического равновесия вообще недостижимо. Например, если на плазму действуют

внешние силы, процессы переноса переводят плазму в стационарное состояние, в котором внешнее воздействие уравновешивается силой Ампера

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}].$$

Однако в состоянии полного термодинамического равновесия средние скорости электронов и ионов должны быть равны друг другу, $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i$. Кроме того, $e_i n_i = -e_e n_e$ вследствие квазинейтральности плазмы, поэтому плотность тока

$$\mathbf{J} = e_e n_e \mathbf{u}_e + e_i n_i \mathbf{u}_i = e_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \quad (5)$$

обращается в нуль, а вместе с ней и сила Ампера. Внешнее воздействие может также препятствовать выравниванию температур электронов и ионов. Следовательно, в состоянии локального термодинамического равновесия как электроны, так и ионы приближённо описываются «сдвинутой» максвелловской функцией распределения

$$f_{ma} = \frac{n_a}{(2\pi T_a/m_a)^{3/2}} \exp\left[-\frac{m_a(\mathbf{v} - \mathbf{u}_a)^2}{2T_a}\right], \quad (6)$$

но, вообще говоря, с разными *температурами* T_a и разными *потоковыми скоростями* \mathbf{u}_a ; здесь и далее индекс a заменяет либо e , либо i , а функция распределения выражена через скорость \mathbf{v} вместо импульса $\mathbf{p} = m_a \mathbf{v}$. Существенно, что параметры

$$n_a = n_a(\mathbf{r}, t), \quad T_a = T_a(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{u}_a = \mathbf{u}_a(\mathbf{r}, t),$$

характеризующие это распределение, меняются в пространстве и во времени. Скорость \mathbf{u}_a часто называют средней, но мы предпочитаем называть её потоковой, чтобы отличать от средней *тепловой скорости*

$$v_{Ta} = \sqrt{2T_a/m_a}. \quad (7)$$

Что касается плотности, то она должна удовлетворять условию квазинейтральности. Соответственно, для плазмы с многозарядными ионами имеем $n_e = Z n_i$.

Состояние полного термодинамического равновесия, как правило, отождествляют с полностью однородной плазмой, где плотность числа частиц n_a , температура T_a и скорость \mathbf{u}_a всюду одинаковы, а поэтому

дальнейшая эволюция прекращается, так что любые макроскопические параметры не зависят от ни координат, ни от времени. Такое представление о состоянии полного равновесия безусловно верно, если ограничиться рассмотрением квазинейтральной плазмы (как и сделано далее). Однако в заряженной плазме, состоящей, например, только из электронов, может существовать локализованное в пространстве состояние глобального термодинамического равновесия, которое характеризуется неоднородной плотностью [37]. Поэтому электронную плазму удаётся удерживать в лабораторных условиях в течение значительно более длительного времени, чем могут себе представить физики, занимающиеся исследованием «обычной» плазмы [38].

§16.2. Моменты функции распределения

Использование кинетического уравнения для описания плазмы в состоянии локального термодинамического равновесия избыточно. В этом случае достаточно установить, как будут меняться во времени и в пространстве плотность (концентрация) числа частиц n_a , температура T_a и потоковая скорость \mathbf{u}_a частиц плазмы каждого сорта, поскольку эти три параметра однозначно определяют функцию распределения частиц, если априори известно, что она является максвелловской. Гидродинамическая теория плазмы строится в предположении, что функция распределения частиц близка к максвелловской, так что

$$f_a = f_{\text{ма}} + \delta f_a, \quad \delta f_a \ll f_{\text{ма}}. \quad (8)$$

Разделение функции распределения f_a на максвелловский «остов» $f_{\text{ма}}$ и «возмущение» δf_a неоднозначно. Способ устранения такой неоднозначности определяется исключительно соображениями удобства при решении конкретной задачи. Например, в следующей лекции будет принято другое определение функции распределения Максвелла, которое отличается от (6) подстановкой $\mathbf{u}_a = 0$, а поправки, пропорциональные малой скорости \mathbf{u}_a , будут включены в δf_a . Здесь же мы примем соглашение, что параметры n_a , \mathbf{u}_a и T_a в формуле (6) определяются из уравнений

$$n_a = \int f_a d^3v, \quad (9a)$$

$$n_a \mathbf{u}_a = \int \mathbf{v} f_a d^3v, \quad (9b)$$

$$n_a T_a = \frac{1}{3} m_a \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_a)^2 f_a d^3 v. \quad (9\text{в})$$

Если ввести обозначение

$$\langle \dots \rangle_a \equiv \frac{1}{n_a} \int (\dots) f_a d^3 v$$

для моментов функции распределения, то определения скорости и температуры отдельной компоненты плазмы можно записать в компактном виде

$$\mathbf{u}_a = \langle \mathbf{v} \rangle_a, \quad T_a = \frac{1}{3} m_a \langle w^2 \rangle_a, \quad (10)$$

где $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_a$ обозначает хаотическую часть скорости; по определению

$$\langle \mathbf{w} \rangle_a = 0.$$

Моменты функции распределения суть среднее (или макроскопическое) значение той или иной величины.

Моменты максвелловской функции распределения либо выражаются через n_a , \mathbf{u}_a , T_a и инвариантные тензоры, либо равны нулю. Однако в общем случае вычисление момента высокого ранга порождает новый тензор того же ранга, который не выражается только через моменты более низкого ранга.

Поясним сказанное на примере тензора давления¹

$$\mathbf{P}_a = n_a m_a \langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle_a \quad (11)$$

с компонентами

$$P_{a,\mu\nu} = m_a n_a \langle w_\mu w_\nu \rangle_a.$$

В изотропной плазме

$$\langle w_\mu w_\nu \rangle_a = \frac{1}{3} \langle w^2 \rangle_a \delta_{\mu\nu},$$

причём символ Кронекера $\delta_{\mu\nu}$ определён так, что $\delta_{\mu\nu} = 1$, если $\mu = \nu$, и $\delta_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$. В другой записи то же соотношение имеет вид

$$\langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle_a = \frac{1}{3} \langle w^2 \rangle_a \mathbf{I},$$

¹ Следует отличать прямое произведение $\mathbf{a}\mathbf{b}$ векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} от скалярного произведения $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Первое является тензором с компонентами $a_\mu b_\nu$, а второе – скаляром $a_\mu b_\mu$; под повторяющимися индексами подразумевается суммирование, например $a_\mu b_\mu = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

где \mathbf{I} обозначает единичный тензор с компонентами $I_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. В неизотропной плазме тензор $\langle \mathbf{w}\mathbf{w} \rangle_a$ не выражается только через ранее введённые сущности, поэтому вводят тензор *вязких напряжений*

$$\boldsymbol{\pi}_a = m_a n_a \langle \mathbf{w}\mathbf{w} - \frac{1}{3} w^2 \mathbf{I} \rangle_a. \quad (12)$$

При этом

$$\mathbf{P}_a = p_a \mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}_a, \quad (13)$$

где

$$p_a = n_a T_a = \frac{1}{3} n_a m_a \langle w^2 \rangle_a \quad (14)$$

обозначает *парциальное давление* компоненты a . С тензором давления тесно связан тензор потока импульса

$$\boldsymbol{\Pi}_a = n_a m_a \langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle_a \quad (15)$$

с компонентами

$$\Pi_{a,\mu\nu} = n_a m_a \langle v_\mu v_\nu \rangle_a.$$

Так как

$$\langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle_a = \langle (\mathbf{u}_a + \mathbf{w})(\mathbf{u}_a + \mathbf{w}) \rangle_a = \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a + \langle \mathbf{w}\mathbf{w} \rangle_a,$$

имеем

$$\boldsymbol{\Pi}_a = n_a m_a \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a + \mathbf{P}_a. \quad (16)$$

Аналогичная картина возникает при вычислении тензора $\langle v_\mu v_\nu v_\lambda \rangle_a$ ещё более высокого ранга. Тем не менее можно предположить, что вновь возникающие немаксвелловские поправки малы и на каком-то шаге перехода от кинетического описания плазмы к гидродинамическому их можно отбросить. Если эта гипотеза верна, можно получить замкнутую систему уравнений для величин n_a , \mathbf{u}_a и T_a . Для этого нужно последовательно выполнить почленное интегрирование кинетического уравнения по всему пространству скоростей с весом 1, $m_a \mathbf{v}$ и $\frac{1}{2} m_a \mathbf{v}^2$. На этом пути помимо ранее определённого тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\pi}_a$ возникает ещё вектор потока энергии

$$\mathbf{q}_a = \frac{1}{2} m_a n_a \langle w^2 \mathbf{w} \rangle_a. \quad (17)$$

Как и $\boldsymbol{\pi}_a$, он обращается в нуль, если функция распределения в точности является максвелловской.

Наконец, отметим, что тензоры $\boldsymbol{\Pi}_a$, \boldsymbol{P}_a и $\boldsymbol{\pi}_a$ симметричны относительно перестановки индексов, например $\pi_{a,\mu\nu} = \pi_{a,\nu\mu}$. Симметрия следует непосредственно из определения этих тензоров.

§16.3. Моменты кинетического уравнения

Для вывода уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики запишем кинетическое уравнение в дивергентной форме:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} f_a + \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) f_a = C_{aa} + C_{ab}. \quad (18)$$

Здесь индексы a и b могут принимать значения e либо i , причём $a = e$, если $b = i$, и наоборот. В плазме с несколькими сортами ионов вместо C_{ab} следует писать сумму $\sum'_b C_{ab}$ по всем сортам частиц, не идентичным a (штрих у знака суммы здесь обозначает, что $b \neq a$), но мы не будем этого делать, ограничившись случаем простой плазмы, состоящей из ионов одного сорта и электронов.

Интегрируя кинетическое уравнение по пространству скоростей с весом 1, $m_a \mathbf{v}$, $\frac{1}{2} m_a \mathbf{v}^2$, вычислим последовательно первый, второй и третий моменты кинетического уравнения. Они выражают соответственно законы сохранения числа частиц, импульса и энергии.

§16.4. Уравнение непрерывности

Найдём первый момент кинетического уравнения, умножив уравнение (18) на $d^3 v$ и вычислив трёхмерный интеграл по всему пространству скоростей. Интегралы столкновений C_{aa} и C_{ab} в правой части уравнения выпадут согласно (15.1a), так как число частиц при кулоновских столкновениях сохраняется. Интеграл от третьего слагаемого в левой части (18) также равен нулю. В этом легко убедиться, преобразовав это слагаемое к интегралу по бесконечно удалённой поверхности в пространстве скоростей при помощи теоремы Остроградского—Гаусса (Carl Gauß, 1813 [39]; М. В. Остроградский, 1831 [40]):

$$\int d^3 v \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) f_a = \oint dS_v \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) f_a.$$

На этой поверхности функция распределения f_a равна нулю, а вместе с ней и весь интеграл. В оставшихся двух слагаемых можно поменять порядок интегрирования по скорости и дифференцирования по времени или координатам, после чего интегралы выражаются через моменты функции распределения. Например:

$$\int d^3v \frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3v f_a = \frac{\partial n_a}{\partial t}.$$

Получившуюся в итоге формулу

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (n_a \mathbf{u}_a) = 0$$

называют уравнением непрерывности и чаще всего записывают в виде

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \operatorname{div}(n_a \mathbf{u}_a) = 0.$$

Ещё одна форма уравнения непрерывности:

$$\frac{d_a n_a}{dt} + n_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a = 0, \quad (19)$$

больше похожая на другие уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики (см. ниже), использует обозначение

$$\frac{d_a}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_a \cdot \nabla)$$

для субстанциональной или лагранжевой производной. Две формы уравнения непрерывности эквивалентны вследствие тождества

$$\operatorname{div}(n_a \mathbf{u}_a) = (\mathbf{u}_a \cdot \nabla n_a) + n_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a.$$

§16.5. Уравнение движения

Теперь вычислим второй момент кинетического уравнения, предварительно записав его в виде

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} v_\nu f_a + \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial v_\nu} F_\nu f_a = C_{aa} + C_{ab}, \quad (20)$$

где $F_\nu = e_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right)_\nu$. Умножим это уравнение на вектор $m_a \mathbf{v}$ с компонентами $m_a v_\mu$ и проинтегрируем по d^3v . В интеграле от первого слагаемого в левой части легко распознать один из моментов функции распределения:

$$\int d^3v m_a v_\mu \frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3v m_a v_\mu f_a = \frac{\partial}{\partial t} m_a n_a \langle v_\mu \rangle_a = \frac{\partial}{\partial t} m_a n_a u_{a,\mu}.$$

Примерно то же происходит со вторым слагаемым:

$$\int d^3v m_a v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} v_\nu f_a = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \int d^3v m_a v_\mu v_\nu f_a = \frac{\partial}{\partial x_\nu} m_a n_a \langle v_\mu v_\nu \rangle_a = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Pi_{a,\mu\nu}.$$

В последнем слагаемом в левой части перед интегрированием нужно выполнить преобразование

$$v_\mu \frac{\partial}{\partial v_\nu} F_\nu f_a = \frac{\partial}{\partial v_\nu} v_\mu F_\nu f_a - F_\nu f_a \frac{\partial v_\mu}{\partial v_\nu} = \frac{\partial}{\partial v_\nu} v_\mu F_\nu f_a - F_\mu f_a.$$

Первый член в преобразованном выражении имеет вид дивергенции тензора $v_\mu F_\nu f_a$. При помощи теоремы Остроградского—Гаусса он преобразуется к интегралу по бесконечно удалённой поверхности, где $f_a = 0$. Следовательно,

$$\int d^3v v_\mu \frac{\partial}{\partial v_\nu} F_\nu f_a = - \int d^3v F_\mu f_a = -n_a \langle F_\mu \rangle_a = -e_a n_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_a \times \mathbf{B}] \right)_\mu.$$

Переходя к правой части кинетического уравнения, учтём, что

$$\int m_a \mathbf{v} C_{aa} d^3v = 0$$

вследствие закона сохранения импульса (15.16). Затем введём обозначение $R_{ab,\mu}$ для μ -проекции силы Брагинского

$$\mathbf{R}_{ab} = \int m_a \mathbf{v} C_{ab} d^3v = \int m_a \mathbf{w} C_{ab} d^3v. \quad (21)$$

Она действует на компоненту a со стороны компоненты b ; сразу отметим, что вследствие всё того же закона сохранения импульса (15.16)

$$\mathbf{R}_{ab} = -\mathbf{R}_{ba}. \quad (22)$$

В итоге получаем уравнение

$$\underline{m_a \frac{\partial}{\partial t} n_a u_{a,\mu}} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Pi_{a,\mu\nu} - e_a n_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_a \times \mathbf{B}] \right)_\mu = R_{ab,\mu}.$$

Далее в тензоре потока импульса $\Pi_{a,\mu\nu}$ выделим тензор давления $P_{a,\mu\nu}$ в соответствии с формулой (16):

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \Pi_{a,\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\underline{m_a n_a u_{a,\mu} u_{a,\nu}} + P_{a,\mu\nu} \right).$$

После этого объединим и преобразуем подчёркнутые слагаемые, выполнив отдельно дифференцирование скорости $u_{a,\mu}$ и её сомножителей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_a u_{a,\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} n_a u_{a,\mu} u_{a,\nu} &= \\ &= u_{a,\mu} \left(\frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} n_a u_{a,\nu} \right) + n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} u_{a,\mu} + u_{a,\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} u_{a,\mu} \right). \end{aligned}$$

Первое выражение в круглых скобках справа обращается в нуль в силу уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} n_a u_{a,\nu} = 0.$$

Второе выражение в круглых скобках образует субстанциональную производную скорости

$$\frac{d_a u_{a,\mu}}{dt} = \frac{\partial u_{a,\mu}}{\partial t} + u_{a,\nu} \frac{\partial u_{a,\mu}}{\partial x_\nu}.$$

В результате получим *уравнение движения*

$$m_a n_a \frac{d_a \mathbf{u}_a}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P}_a + e_a n_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_a \times \mathbf{B}] \right) + \mathbf{R}_{ab}, \quad (23)$$

где дивергенция $\nabla \cdot \mathbf{P}_a$ тензора \mathbf{P}_a является вектором с компонентами

$$(\nabla \cdot \mathbf{P}_a)_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} P_{a,\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} P_{a,\nu\mu}.$$

Ещё одна форма уравнения движения

$$m_a n_a \frac{d_a \mathbf{u}_a}{dt} = -\nabla p_a + e_a n_a \mathbf{E} + \frac{e_a}{c} n_a [\mathbf{u}_a \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \mathbf{\pi}_a + \mathbf{R}_{ab} \quad (24)$$

получается путём выделения в тензоре давления \mathbf{P}_a тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\pi}_a$ и парциального давления p_a согласно (13).

В правой части уравнения (24) стоят силы, действующие на компоненту («жидкость») сорта a в единице объёма плазмы. Первое слагаемое — это сила давления, второе и третье — сила Лоренца. Четвёртое слагаемое содержит тензор вязких напряжений $\boldsymbol{\pi}_a$ и представляет собой силу вязкости. Позднее мы узнаем, что вязкие силы возникают только в неоднородной плазме. Сила Брагинского \mathbf{R}_{ab} включает силу трения, пропорциональную разности $\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_a$ средних скоростей компонент плазмы, и так называемую термосилу, которая возникает в плазме с градиентом температуры электронов. Силу трения нетрудно вычислить, полагая, что обе компоненты имеют максвелловское распределение (задача 4), однако, как показывает точное решение кинетического уравнения (лекция 17), результат подобных вычислений оказывается верным с точностью до численного коэффициента порядка двух.

§16.6. Уравнение переноса тепла

Наконец, составим третий момент кинетического уравнения, умножив его на $\frac{1}{2}m_a v^2$ и выполнив интегрирование по пространству скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2}m_a n_a \langle v^2 \rangle_a + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{1}{2}m_a n_a \langle v^2 v_\nu \rangle_a - e_a n_a \langle v_\nu \rangle_a E_\nu = \\ = \frac{1}{2}m_a \int v^2 C_{aa} d^3v + \frac{1}{2}m_a \int v^2 C_{ab} d^3v. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь последнее слагаемое в левой части получено интегрированием по частям слагаемого с силой Лоренца в кинетическом уравнении, причём магнитная часть силы выпала, поскольку $\mathbf{v} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0$.

Вследствие закона сохранения энергии (15.1в), применённого к кулоновским столкновениям частиц одного сорта, находим, что

$$\frac{1}{2}m_a \int v^2 C_{aa} d^3v = 0.$$

Поэтому в правой части останется только второе слагаемое

$$\frac{1}{2}m_a \int v^2 C_{ab} d^3v = \frac{1}{2}m_a \int (\mathbf{u}_a + \mathbf{w})^2 C_{ab} d^3v =$$

$$\begin{aligned}
&= m_a \int (\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{w}) C_{ab} d^3v + \frac{1}{2} m_a \int w^2 C_{ab} d^3v = \\
&= \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab} + Q_{ab},
\end{aligned} \tag{26}$$

которое описывает обмен энергией между разными компонентами плазмы; здесь учтено, что $\frac{1}{2} m_a \int u_a^2 C_{ab} d^3v = \frac{1}{2} m_a u_a^2 \int C_{ab} d^3v = 0$. Часть переданной энергии

$$m_a \int (\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{w}) C_{ab} d^3v = \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab}$$

соответствует работе силы \mathbf{R}_{ab} , а

$$Q_{ab} \equiv \int \frac{1}{2} m_a w^2 C_{ab} d^3v \tag{27}$$

есть количество теплоты, которую напрямую получают частицы сорта a в столкновениях с частицами сорта b за единицу времени в единице объёма. Последнее слагаемое в левой стороне уравнения (25) перенесём в правую сторону, после чего она будет равна

$$Q_{ab} + e_a n_a \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E} + \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab}.$$

В оставшихся слева слагаемых выделим среднюю скорость \mathbf{u}_a аналогично тому, как это было сделано при выводе уравнения движения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m_a n_a \langle v^2 \rangle_a \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} m_a n_a \langle v^2 \mathbf{v} \rangle_a \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_a m_a u_a^2 + \frac{3}{2} n_a T_a \right) + \\
&+ \operatorname{div} \left(\underline{\frac{1}{2} n_a m_a u_a^2 \mathbf{u}_a} + \underline{\frac{3}{2} n_a T_a \mathbf{u}_a} + \mathbf{P}_a \cdot \mathbf{u}_a + \mathbf{q}_a \right).
\end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $\mathbf{P}_a \cdot \mathbf{u}_a = P_{a,\mu\nu} u_{a,\nu}$ для скалярного произведения тензора давления \mathbf{P}_a с вектором скорости \mathbf{u}_a , а также выделен вектор потока тепла $\mathbf{q}_a = \frac{1}{2} m_a n_a \langle w^2 \mathbf{w} \rangle_a$. Подчёркнутые слагаемые преобразуем, использовав сначала уравнение непрерывности:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} n_a m_a u_a^2 + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} n_a m_a u_a^2 \mathbf{u}_a \right) &= \\
&= \frac{1}{2} m_a n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} u_a^2 + \mathbf{u}_a \cdot \nabla u_a^2 \right) + \frac{1}{2} m_a u_a^2 \left(\frac{\partial n_a}{\partial t} + \operatorname{div} n_a \mathbf{u}_a \right) = \\
&= \frac{1}{2} m_a n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} u_a^2 + \mathbf{u}_a \cdot \nabla u_a^2 \right),
\end{aligned}$$

а затем соотношение

$$\frac{1}{2}m_an_a\left(\frac{\partial}{\partial t}u_a^2 + \mathbf{u}_a \cdot \nabla u_a^2\right) = -\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}_a) + n_a e_a \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E} + \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab},$$

следующее из уравнения движения (23) после умножения скалярно на \mathbf{u}_a . В итоге с левой стороны уравнения остаётся выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2}n_a T_a + \operatorname{div}\left(\frac{3}{2}n_a T_a \mathbf{u}_a + \mathbf{P}_a \cdot \mathbf{u}_a + \mathbf{q}_a\right) - \mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}_a) + n_a e_a \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E} + \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab}.$$

Оно поддаётся дальнейшему упрощению при помощи равенства

$$\operatorname{div}(\mathbf{P}_a \cdot \mathbf{u}_a) - \mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}_a) = (\mathbf{P}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a,$$

которое будет очевидно, если записать его в проекциях на оси координат:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} P_{a,\mu\nu} u_\nu - u_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} P_{a,\mu\nu} = P_{a,\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} u_\nu.$$

Далее полезно выделить в тензоре давления $P_{a,\mu\nu} = p_a \delta_{\mu\nu} + \pi_{a,\mu\nu}$ его изотропную часть $p_a \delta_{\mu\nu}$ и тензор вязких напряжений $\pi_{a,\mu\nu}$. Тогда

$$(\mathbf{P}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a = p_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a + (\boldsymbol{\pi}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a.$$

Наконец, нужно заметить, что $n_a T_a = p_a$, а

$$\frac{\partial p_a}{\partial t} + \operatorname{div}(p_a \mathbf{u}_a) = \frac{d_a p_a}{dt} + p_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a.$$

В итоге левая сторона исходного уравнения (25) преобразуется к виду

$$\frac{3}{2} \frac{d_a p_a}{dt} + \frac{5}{2} p_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a + \operatorname{div} \mathbf{q}_a + (\boldsymbol{\pi}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a + n_a e_a \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E} + \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab}.$$

Сравнивая её с правой стороной, замечаем, что слагаемые $n_a e_a \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E}$ и $\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab}$ есть и слева, и справа. Сокращая их, приходим к уравнению

$$\frac{3}{2} \frac{d_a p_a}{dt} + \frac{5}{2} p_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a = Q_{ab} - \operatorname{div} \mathbf{q}_a - (\boldsymbol{\pi}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a. \quad (28)$$

Первое слагаемое в его правой стороне описывает локальную передачу тепла от одной компоненты плазмы к другой. Второе слагаемое описывает нагрев вследствие переноса тепла. Наконец, третье слагаемое отвечает за нагрев вязким трением.

В уравнении (28) удобно выделить энтропию единицы объёма

$$s_a = n_a \ln(p_a^{3/2}/n_a^{5/2}) \quad (29)$$

(задача 3). Для этого нужно исключить $\operatorname{div} \mathbf{u}_a$ при помощи уравнения непрерывности (19). Так как $d(s_a/n_a) = \frac{3}{2} dp_a/p_a - \frac{5}{2} dn_a/n_a$, в результате получим *уравнение переноса тепла*

$$n_a T_a \frac{d_a}{dt} \frac{s_a}{n_a} = Q_{ab} - \operatorname{div} \mathbf{q}_a - (\boldsymbol{\pi}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a. \quad (30)$$

Электрическое и магнитное поля в явном виде не входят в это уравнение в полном соответствии с утверждением, что самосогласованное поле не изменяет энтропию плазмы (см. §13.3). Возможно только косвенное влияние самосогласованного поля на рост энтропии через поддержание электрического тока. Вследствие кулоновских столкновений плазма приобретает электрическое сопротивление, поэтому электрический ток нагревает плазму, как и любой другой проводник.

Омический нагрев входит в уравнение переноса тепла в виде доли величины Q_{ab} , которая имеет размерность мощности на единицу объёма. Другая часть Q_{ab} зависит от разности температур T_a и T_b (задача 6). Априори нельзя утверждать, что Q_{ab} меняет знак при перестановке индексов, как это происходит с силой \mathbf{R}_{ab} . Из закона сохранения энергии в кулоновских столкновениях (15.1в) и формулы (26) следует соотношение

$$Q_{ab} + Q_{ba} = -\mathbf{R}_{ab} \cdot \mathbf{u}_a - \mathbf{R}_{ba} \cdot \mathbf{u}_b = -\mathbf{R}_{ab} \cdot (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b). \quad (31)$$

Равенство $Q_{ab} = -Q_{ba}$ имеет место только в отсутствие электрического тока, когда $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_b$. Если же $\mathbf{u}_a \neq \mathbf{u}_b$, то $\mathbf{R}_{ab} \cdot (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b)$ определяет мощность омического нагрева.

§16.7. Двухжидкостная магнитная гидродинамика

Запишем систему уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики, собрав вместе все уравнения:

$$\frac{d_a n_a}{dt} + n_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a = 0, \quad (32a)$$

$$m_a n_a \frac{d_a \mathbf{u}_a}{dt} = -\nabla p_a + e_a n_a \mathbf{E} + \frac{e_a}{c} n_a [\mathbf{u}_a \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_a + \mathbf{R}_{ab}, \quad (32b)$$

$$n_a T_a \frac{d_a}{dt} \frac{s_a}{n_a} = Q_{ab} - (\boldsymbol{\pi}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a - \operatorname{div} \mathbf{q}_a. \quad (32\text{в})$$

Их следует дополнить уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (33\text{а})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_q, \quad (33\text{б})$$

где

$$\rho_q = e_e n_e + e_i n_i, \quad \mathbf{J} = e_e n_e \mathbf{u}_e + e_i n_i \mathbf{u}_i, \quad (34)$$

причём

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (35)$$

как легко проверить с помощью уравнения (32а).

Считая все происходящие в плазме движения медленными, со скоростями значительно меньше скорости света, в первом уравнении (33б) для магнитного поля обычно (но не всегда) пренебрегают током смещения $(1/c) \partial \mathbf{E} / \partial t$. Одновременно с этим необходимо изменить и второе уравнение (33б), иначе уравнения будут рассогласованы.

Чтобы понять, в каком направлении нужно размышлять, заметим, что система уравнений Максвелла (33) формально переопределена в том смысле, что на 6 неизвестных функций (три компоненты вектора \mathbf{E} и три компоненты вектора \mathbf{B}) имеется 8 скалярных уравнений. Однако последние уравнения в каждой паре (33а) и (33б), то есть уравнения для дивергенций, выступают своего рода начальными условиями для первых уравнений (уравнений для роторов). Действительно, вычислив дивергенцию первого уравнения (33а), ввиду тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ получим уравнение $\operatorname{div}(\partial \mathbf{B} / \partial t) = 0$. Его самым общим решением является $\operatorname{div} \mathbf{B} = f(\mathbf{r})$, где $f(\mathbf{r})$ – произвольная функция координат. Второе уравнение в паре (33а) требует признать эту функцию равной нулю.

Вернёмся ко второй паре уравнений Максвелла. Вычислив дивергенцию первого уравнения (33б), ввиду тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ и уравнения непрерывности (35) получаем скалярное равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi \frac{\partial \rho_q}{\partial t} = 0,$$

для которого второе уравнение (33б) выступает в роли начального условия. Если отбросить ток смещения и вновь вычислить дивергенцию первого уравнения (33б), очевидно, получим уравнение $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Таким образом, из системы уравнений Максвелла (33) получаем её упрощённый

вариант для использования совместно с уравнениями магнитной гидродинамики:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (36a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (36b)$$

Второе уравнение (36b) совместно с уравнением непрерывности (35) означает, что $\partial \rho_q / \partial t = 0$. Начальным условием для него является условие квазинейтральности $\rho_q = 0$.

Нужно понимать, что равенство $\rho_q \approx 0$ является приближённым, поэтому требовать выполнения условия $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, которое получается при подстановке $\rho_q = 0$ во второе уравнение (33b), было бы ошибкой. Если необходимо вычислить ρ_q , следует использовать уравнение

$$\rho_q = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad (37)$$

где электрическое поле \mathbf{E} нужно считать известным: вектор \mathbf{E} находят из первой пары уравнений Максвелла (36a) и обобщённого закона Ома, который будет получен в §18.4.

Сформулированная выше система уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики (32) и (36) формальна, пока нет способа вычислить моменты высших порядков, входящие в правые части уравнения движения и уравнения переноса тепла. Вычислению \mathbf{R}_{ab} , $\boldsymbol{\pi}_a$, \mathbf{q}_a , Q_{ab} посвящена следующая лекция.

Литература

Систематическое изложение предмета дано в 1-м томе сборника «Вопросы теории плазмы» в классической статье [15] С. И. Брагинского. Материалу лекции соответствуют §1 и §2.

Полезным дополнением могут служить статьи Р. Калсруда (Russell Kulsrud) [25] и Ф. Хинтона (Fred Hinton) [41] в «Основах физики плазмы». В книге Дж. Фридберга (Jeffrey Freidberg) «Plasma Physics and Fusion Energy» [10] содержанию лекции соответствует глава 10.

Задачи и вопросы

Задача 1. Оцените минимальный заряд ионов Z , при котором в лоренцевой плазме установление максвелловского распределения ионов и электронов происходит одинаково быстро. Считайте, что температуры ионов и электронов примерно одинаковы. [Решение ⇒ 252](#)

Задача 2. Докажите, что $\langle w_\mu w_\nu \rangle_a = \frac{1}{3} \langle w^2 \rangle_a \delta_{\mu\nu}$ при усреднении по изотропному распределению частиц. [Решение ⇒ 252](#)

Задача 3. Вычислите энтропию на единицу объёма плазмы с максвелловской функцией распределения. [Решение ⇒ 252](#)

Задача 4. Вычислите силу Брагинского (21), предполагая, что распределение электронов описывается «сдвинутой» функцией Максвелла (6), а средняя направленная скорость электронов мала по сравнению с их тепловой скоростью. [Решение ⇒ 253](#)

Задача 5. Используя решение предыдущей задачи, вычислите спирцевскую проводимость плазмы. [Решение ⇒ 253](#)

Задача 6. Вычислите удельную мощность Q_{ei} нагрева электронов ионами в простой плазме. [Решение ⇒ 254](#)

Задача 7. Укажите условие применимости уравнений (366). Можно ли использовать уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ для определения электрического поля в квазинейтральной плазме? [Решение ⇒ 254](#)

Задача 8. Используя законы сохранения (15.1) в кулоновских столкновениях, докажите равенство (31).

Задача 9. (Гирорелаксационный нагрев.) Плазма помещена в переменное магнитное поле, частота изменения которого сопоставима с частотой столкновений. Вычислите темп нарастания температуры плазмы. [Решение ⇒ 257](#)

Лекция 17

Процессы переноса

Кинетические коэффициенты. Метод Чепмена—Энскога и теория Брагинского. Термопроводность плазмы. Уравнение Фурье. Термосила. Сила трения. Проводимость плазмы.

*Перенос тепла током. *Тензор вязких напряжений

Процессы переноса, приближающие плазму к состоянию полного термодинамического равновесия, удаётся описать в рамках двухжидкостной магнитной гидродинамики, выразив высшие моменты функции распределения, такие как поток тепла \mathbf{q}_a и тензор вязких напряжений $\boldsymbol{\pi}_a$, через пространственные производные низших моментов n_a , \mathbf{u}_a и T_a для каждой «жидкости», помеченной здесь индексом a . Коэффициенты пропорциональности между высшими моментами функции распределения и пространственными производными n_a , \mathbf{u}_a и T_a называют *транспортными* или *кинетическими коэффициентами*, так как для их вычисления приходится в той или иной степени использовать представления, развитые в кинетической теории.

Гидродинамические уравнения, дополненные кинетическими коэффициентами, называют *уравнениями переноса*. Применительно к газам они были выведены в 1916–1917 годах независимо С. Чепменом ([Sydney Chapman](#)) и Д. Энскогом ([David Enskog](#)), причём разными способами. Формулировка теории Чепмена [42] была основана скорее на интуиции, тогда как в трактовке Энскога [43] большее внимание уделялось математической форме и изяществу. С. Чепмен и Т. Каулинг ([Thomas Cowling](#)) в своей книге [44] в 1939 году¹ вычислили некоторые коэффициенты переноса для плазмы в магнитном поле. Позднее Каулинг применил разложение функции распределения по ортогональным полиномам для вычисления кинетических коэффициентов [46]. Заметный вклад в теорию внесли [Л. Д. Ландау](#) [47, 48] и Л. Спitzer ([Lyman Spitzer](#)) [49]. Завер-

¹ Русский перевод [45] опубликован в 1960 году.

шил построение системы уравнений классического переноса в простой плазме С. И. Брагинский, придумав оригинальный способ «препарирования» интеграла столкновений, основанный на малости отношений масс электрона и иона [50, 51]. Позднее теория Брагинского была уточнена Е. М. Эпперлейном (E. M. Epperlein) и М. Г. Хайнсом (M. G. Haines) [52, 53].

§17.1. Кинетические коэффициенты

Каждый новый момент кинетического уравнения «зацепляет» момент функции распределения более высокого порядка, поэтому надо где-то оборвать цепочку уравнений для моментов. Радикальный способ — просто отбросить моменты высших порядков. Однако если это сделать прямо в уравнениях движения и переноса тепла (16.32), то будут выброшены процессы переноса. В кинетическом описании они обусловлены анизотропной немаксвелловской поправкой к функции распределения частиц плазмы, которая, в свою очередь, связана с неоднородностью макроскопических параметров плазмы. При вычислении моментов функции распределения эта поправка даёт потоки частиц, импульса и энергии, пропорциональные пространственным производным плотности числа частиц n , потоковой скорости \mathbf{u} и температуре T .

Идея Чепмена и Энскога, в полной мере реализованная Брагинским, состоит в том, что моменты высших порядков выражаются через пространственные производные моментов более низких порядков, которые считаются малыми. Для этого в кинетическом уравнении производная по времени от немаксвелловской поправки к функции распределения отбрасывается,² так как процессы переноса идут медленнее, чем установление локального термодинамического равновесия. Решение соответствующей стационарной задачи позволяет выразить моменты функции распределения высших порядков через пространственные производные моментов низших порядков. Найденные таким способом высшие моменты подставляют в гидродинамические уравнения, замыкая систему уравнений; из неё уже можно определить, как изменяются мак-

² На самом деле производные по времени от плотности, скорости и температуры в теории Брагинского выражаются через пространственные производные этих величин с помощью гидродинамических уравнений, в которых кинетические коэффициенты «занулены». Здесь мы излагаем упрощённый вариант теории. Более аккуратные вычисления кинетических коэффициентов на примере лоренцевой плазмы выполнены в задаче 18.11.

роскопические параметры плазмы с течением времени.

Помимо неоднородности макроскопических параметров, вносящих анизотропию в функцию распределения частиц плазмы, имеется и другой источник неравновесности, не имеющий прямого аналога в теории Чепмена и Энскога. Даже если в некоторой области плазма однородна, но средние скорости (или температуры) электронов и ионов различны, возникает обмен импульсом (энергией) между компонентами плазмы. Темп выравнивания скоростей (температур) в этом случае зависит только от локальной разности скоростей (температур) электронов и ионов. Соответственно, в моментах интеграла столкновений R_{ab} и Q_{ab} , входящих в уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики (16.32), появляются слагаемые, пропорциональные разности локальных скоростей и разности локальных температур.

Малые неоднородности различного вида, такие как неоднородность плотности, средней скорости или температуры, а также слабые неравновесности иного рода, такие как относительное движение электронов и ионов или различие их температур, создают малый переток частиц, импульса и тепла, так что различные процессы переноса можно рассматривать независимо один от другого. Это упрощает расчёт кинетических коэффициентов, позволяя разделить одну большую проблему на несколько частных задач. Например, чтобы вычислить поток тепла, вызванный градиентом температуры, градиентами других макроскопических параметров можно пренебречь.

Не имея возможности в полной мере изложить теорию Брагинского, мы рассмотрим только некоторые из процессов переноса, обусловленных кулоновскими столкновениями частиц в полностью ионизованной плазме. Параграф §17.7 и следующие за ним предназначены для самостоятельного изучения — из-за большого объёма материала пересказать их содержание за время аудиторной лекции было бы затруднительно.

§17.2. Теплопроводность плазмы

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в плазме с однородной плотностью

$$n_e = Z n_i$$

имеется градиент электронной температуры, направленный вдоль оси z , т. е.

$$\nabla T_e = (\partial T_e / \partial z) \hat{z},$$

где \hat{z} обозначает единичный вектор, ориентированный вдоль оси z . Будем считать, что магнитное поле отсутствует, $B = 0$, а ионы неподвижны, т. е.

$$\mathbf{u}_i = 0.$$

Предположим, что через плазму не протекает электрический ток, так как она изолирована от внешних проводников; тогда электронная компонента также находится в покое и её средняя скорость равна нулю, т. е.

$$\mathbf{u}_e = 0.$$

Для этого необходимо чем-то уравновесить градиент электронного давления

$$\nabla p_e = n_e \nabla T_e.$$

Это можно сделать, наложив на плазму электрическое поле

$$\mathbf{E} = E \hat{z},$$

которое должно удерживать электроны. Если плазма изолирована, электрическое поле создаётся зарядами, скапливающимися на её поверхности. Величина этого поля будет найдена ниже, а пока только зафиксируем тот факт, что в проводнике (каковым является плазма), электрическое поле возникает даже при отсутствии тока, если имеется градиент температуры. Этот эффект был открыт Т. Зеебеком ([Thomas Seebeck, 1821](#)).

Запишем кинетическое уравнение для функции распределения электронов, отбросив в нём производную $\partial f / \partial t$:

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v_z} = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (1)$$

Здесь $A = 2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei} / m^2$, причём $2A/v^3$ имеет смысл частоты столкновений $\nu_{ei}^{(p)}$, которая характеризует торможение электронов на ионах (см. §8.2). Скорость v_z направлена вдоль градиента температуры и связана с углом θ , который отсчитывается от того же направления, и модулем скорости v соотношением

$$v_z = v \cos \theta.$$

Для простоты мы воспользовались интегралом столкновений в приближении лоренцевой плазмы (15.23) и учли, что в силу симметрии задачи

искомая функция f не зависит от азимутального угла ψ вокруг оси z . Напомним, что в лоренцевой плазме $Z \gg 1$ столкновения электронов с электронами происходят в Z раз реже, нежели с ионами, так что ими можно пренебречь. Для краткости в промежуточных вычислениях опускаем индекс e у параметров, характеризующих электроны и их функцию распределения, в частности вместо f_e пишем $-e$, подразумевая, что $e > 0$ обозначает элементарный заряд. В конечном результате индексы будут восстановлены без дополнительных пояснений. Отметим также, что в данной лекции мы используем функцию распределения $f = f(\mathbf{v}, z)$ в пространстве скоростей, а не импульсов.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$f = f_m + \delta f, \quad (2)$$

где

$$f_m = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T} \right) \quad (3)$$

есть максвелловская функция распределения с нулевой потоковой скоростью, а $\delta f \ll f_m$. При подстановке $f = f_m + \delta f$ в правой части уравнения останется только δf , так как f_m не зависит от θ . В левой части оставим только слагаемые, содержащие f_m . В упрощённом таким способом кинетическом уравнении

$$v_z \frac{\partial f_m}{\partial z} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f_m}{\partial v_z} = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \delta f}{\partial \theta} \quad (4)$$

поправка к функции распределения δf содержится только в интегrale столкновений справа. Поэтому заранее ясно, что она будет обратно пропорциональна коэффициенту A , т. е. будет тем меньше, чем больше частота столкновений. Раскрывая производные слева с помощью легко проверяемых формул

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m}{\partial v_z} &= -\frac{mv_z}{T} f_m = -\frac{mv \cos \theta}{T} f_m, \\ \frac{\partial f_m}{\partial z} &= -\frac{3}{2T} \frac{\partial T}{\partial z} f_m + \frac{mv^2}{2T^2} \frac{\partial T}{\partial z} f_m = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{mv^2}{2T} - \frac{3}{2} \right) f_m, \end{aligned}$$

перепишем последнее уравнение в виде

$$\left[\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{mv^2}{2T} - \frac{3}{2} \right) + \frac{eE}{T} \right] f_m v \cos \theta = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \delta f}{\partial \theta}.$$

Оно решается методом разделения переменных. При подстановке

$$\delta f = \Phi(v) \cos \theta \quad (5)$$

правая часть уравнения превратится в $-2(A/v^3) \Phi(v) \cos \theta$, а множитель $\cos \theta$ справа и слева сократится, подтверждая нашу догадку относительно зависимости δf от θ . В итоге получаем уравнение на функцию $\Phi(v)$:

$$\Phi(v) = -\frac{v^4}{2A} \left[\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{mv^2}{2T} - \frac{3}{2} \right) + \frac{eE}{T} \right] f_m. \quad (6)$$

Это именно уравнение, а не искомый результат, поскольку в его правую сторону входит неизвестная величина электрического поля E . Чтобы найти её, нужно вспомнить, что параметры n_a , \mathbf{u}_a и T_a связаны с функцией распределения $f = f_m + \delta f$ формулами (16.9) при том, что разделение функции распределения на максвелловскую часть f_m и поправку δf , вообще говоря, неоднозначно. Действительно, можно, к примеру, выполнить преобразование $f_m \rightarrow f_m + \alpha f_m$, $\delta f \rightarrow \delta f - \alpha f_m$, которое не меняет сумму $f_m + \delta f$, но меняет слагаемые и при $\alpha \ll 1$ формально удовлетворяет требованию $\delta f \ll f_m$. В рассматриваемой задаче мы уже выбрали функцию f_m , причём в виде (3), который немного отличается от выражения (16.6) в предыдущей лекции. Поскольку для функции (3) выполнены равенства

$$n = \int f_m d^3v \quad (7a)$$

$$0 = \int \mathbf{v} f_m d^3v \quad (7b)$$

$$nT = \frac{1}{3}m \int \mathbf{v}^2 f_m d^3v, \quad (7c)$$

условия (16.9) при $\mathbf{u} = 0$ приводят к уравнениям

$$\int \delta f d^3v = 0, \quad (8a)$$

$$\int \mathbf{v} \delta f d^3v = 0, \quad (8b)$$

$$\int \mathbf{v}^2 \delta f d^3v = 0, \quad (8c)$$

где $d^3v = v^2 dv d\theta d\psi$, $d\theta = \sin \theta d\theta d\psi$, причём угол θ изменяется в пределах от 0 до π , а угол ψ — от 0 до 2π .

Условия (8а) и (8в) выполняются очевидным образом, так как интегралы в их левой части обращаются в нуль при интегрировании по углу θ . В условии (8б) интегралы от $v_x = v \sin \theta \cos \psi$ и $v_y = v \sin \theta \sin \psi$ обращаются в нуль при интегрировании по углу ψ вследствие азимутальной симметрии задачи. Нетривиальное условие получается из z -проекции:

$$\int v_z \delta f \, d^3v = \int \Phi(v) v \cos^2 \theta \, d^3v = 0.$$

Отделяя интегрирование по углу и вводя обозначение

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \int \cos^2 \theta \, d\Omega / \int d\Omega = \frac{1}{3},$$

его можно представить в виде

$$\langle \cos^2 \theta \rangle \int \Phi(v) v \, d^3v = 0.$$

Поскольку вычисление $\langle \cos^2 \theta \rangle$ даёт ненулевой множитель, в нуль должен обращаться интеграл $\int \Phi(v) v \, d^3v$. Используя формулу

$$\int f_m v^{2k-1} \, d^3v = \frac{2k!}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m} \right)^{k-1/2} n, \quad (9)$$

которую нетрудно проверить при любом целом k , из неё получаем

$$eE = -\frac{5}{2} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (10)$$

Подставляя этот результат в формулу (6), находим искомую поправку к функции распределения

$$\delta f = \frac{v^4}{2A} \left(4 - \frac{mv^2}{2T} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} f_m \cos \theta. \quad (11)$$

Оценивая δf при тепловой скорости электронов $v = v_T = \sqrt{2T/m}$, вспомним, что $2A/v^3 \sim v_{ei}^{(p)}$. Следовательно,

$$\delta f \sim \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial z} f_m \quad (12)$$

и неравенство $\delta f \ll f_m$ выполняется, если длина пробега электронов $\lambda \sim v_T/v_{ei}^{(p)}$ мала по сравнению с характерной длиной неоднородности температуры $\ell = T/|\partial T/\partial z|$. Соответственно, только при условии

$$\lambda \ll \ell \quad (13)$$

выполняется исходное предположение о близости функции распределения к максвелловской. Если оно нарушено, уравнения магнитной гидродинамики формально неприменимы. Это общее правило, хотя оно и получено на одном примере.

Зная функцию распределения f , нетрудно вычислить поток тепла

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} m \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f \, d^3 v. \quad (14)$$

В рассматриваемом случае он направлен вдоль оси z и обусловлен только поправкой δf . Так как $\mathbf{u} = 0$, имеем

$$q_z = \frac{1}{2} m \int v^3 \cos \theta \delta f \, d^3 v.$$

По порядку величины

$$q_z \sim m v_T^3 \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial z} n \sim n \lambda v_T \frac{\partial T}{\partial z}.$$

При аккуратном вычислении q_z нужно использовать формулы (9) с показателями $k = 4$ и $k = 5$, а в окончательном выражении появляется знак «минус», который означает, что поток тепла направлен против градиента температуры из более горячей области плазмы в более холодную:

$$q_z = -32 \sqrt{\frac{2}{\pi A}} \left(\frac{T}{m} \right)^{5/2} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

В векторной записи полученную формулу называют законом Фурье (Jean Fourier, 1822). Применительно к двухжидкостной магнитной гидродинамике закон Фурье записывают отдельно для электронов и для ионов:

$$\mathbf{q}_{Te} = -\kappa_e \nabla T_e, \quad \mathbf{q}_{Ti} = -\kappa_i \nabla T_i. \quad (15)$$

Коэффициенты κ_e и κ_i называются *коэффициентами теплопроводности*. Первый из них мы вычислили выше в пределе лоренцевой плазмы, однако по традиции его записывают в виде

$$\kappa_e = \frac{128}{3\pi} \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, \quad (16)$$

где параметр

$$\tau_e = \frac{3}{4\sqrt{2\pi}} \frac{m_e^{1/2} T_e^{3/2}}{n_i Z^2 e^4 \Lambda_{ei}} \quad (17)$$

характеризует время рассеяния тепловых электронов на ионах плазмы.³ Нужно понимать, что числовой множитель в формуле (16) зависит от величины Z . Его значение $128/3\pi = 13,58$ в формуле (16) соответствует пределу $Z \rightarrow \infty$, а при $Z = 1$ он равен 3,16 [15]. Причину такой зависимости, как и замысловатый выбор числовых коэффициентов в определении τ_e мы поясним в §17.5. Согласно вычислениям Брагинского [15], для ионов

$$\kappa_i = 3,91 \frac{n_i T_i \tau_i}{m_i}, \quad (18)$$

где

$$\tau_i = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \frac{m_i^{1/2} T_i^{3/2}}{n_i Z^4 e^4 \Lambda_{ii}}, \quad (19)$$

причём числовой коэффициент в формуле (18) не зависит от Z .

Полезно обратить внимание, что время τ_e примерно равно обратной частоте $1/\nu_{ei}^{(p)}$, которая характеризует потерю направленного импульса электронами в столкновениях с ионами (8.22в), хотя, на первый взгляд, могло бы показаться, что перенос тепла электронами связан с обменом энергией между ними же, а такой обмен характеризуется частотой $\nu_{ee}^{(\varepsilon)}$ (8.23а). Так как $\nu_{ei}^{(p)} \sim Z\nu_{ee}^{(\varepsilon)}$, при $Z = 1$ различие между $\nu_{ei}^{(p)}$ и $\nu_{ee}^{(\varepsilon)}$ несущественно и необходимо учитывать столкновения электронов как с ионами, так и с электронами. Однако при $Z \gg 1$ оказывается, что $\nu_{ei}^{(p)} \gg \nu_{ee}^{(\varepsilon)}$ и перенос тепла электронами ограничен преимущественно их столкновениями с ионами, тогда как частота $\nu_{ee}^{(\varepsilon)}$ характеризует темп максвеллизации функции распределения электронов. Что касается переноса тепла ионами, то характерное время этого процесса τ_i примерно равно $1/\nu_{ii}^{(\varepsilon)}$.

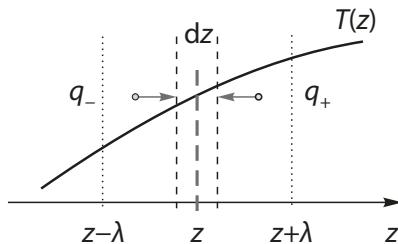
В общем случае расчёт кинетических коэффициентов — весьма сложная задача, но оценку порядка величины любого коэффициента можно получить при помощи простых и наглядных рассуждений, как показано в следующем параграфе.

§17.3. Уравнение Фурье

Рассмотрим процесс выравнивания температуры в плазме с однородным распределением плотности на элементарном уровне, не прибе-

³ Это время в $m_i/2m_e$ раз меньше времени τ_{ei} обмена энергией между электронами и ионами, которое было вычислено в §15.3, см. (15.19).

Рис. 1. К выводу уравнения теплопроводности. Если потоки частиц слева и справа одинаковы, $\Gamma_- = \Gamma_+ \equiv \Gamma$, то потоки тепла слева и справа, q_- и q_+ , различаются на величину, пропорциональную градиенту температуры T . Разность потоков $q(z - dz/2)$ и $q(z + dz/2)$, втекающих в тонкий слой и вытекающих из него, идёт на нагрев слоя.



гая к решению кинетического уравнения. Для определённости будем говорить о температуре электронов, хотя всё сказанное в равной степени будет применимо также и к ионам.

Пусть температура электронов $T(z)$ плавно увеличивается в положительном направлении оси координат z , как показано на рисунке 1, но электроны в среднем покоятся, поэтому через произвольное сечение z слева направо и справа налево за единицу времени проходит в точности одинаковое число электронов $\Gamma \sim nv_T$, где v_T — их тепловая скорость.

Поток тепла q возникает от того, что каждый электрон, приходящий слева, приносит в среднем меньшую энергию $K = \frac{3}{2}T$, чем электрон, приходящий из правой, более горячей области. Так как в промежуток времени τ между двумя столкновениями электрон пролетает расстояние порядка длины свободного пробега λ , электроны, приходящие в плоскость z справа, имеют энергию $K_+ \approx \frac{3}{2}T(z + \lambda)$, тогда как электроны слева приходят с энергией $K_- \approx \frac{3}{2}T(z - \lambda)$. Следовательно, поток тепла, идущий слева направо, равен

$$q_- = K_- \Gamma \approx \frac{3}{2} \left[T - \frac{\partial T}{\partial z} \lambda \right] nv_T.$$

Встречный поток тепла

$$q_+ = K_+ \Gamma \approx \frac{3}{2} \left[T + \frac{\partial T}{\partial z} \lambda \right] nv_T$$

отличается знаком перед вторым слагаемым. Суммарный поток тепла $q = q_- - q_+$ возникает из-за отсутствия баланса левого и правого потоков. Он равен

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z},$$

где коэффициент теплопроводности

$$\chi \sim n v_T \lambda$$

с точностью до числового коэффициента совпадает с расчётной формулой (16), если время $\tau = \lambda/v_T$ отождествить с τ_e , n с n_e и v_T с v_{Te} . Если же электроны заменить ионами, с точностью до числа порядка единицы он будет равен коэффициенту ионной теплопроводности (18). Подобным способом, не прибегая к трудоёмким вычислениям, удаётся оценить по порядку величины почти любые кинетические коэффициенты.⁴

Продолжая логику рассуждений, использованную выше для отыскания связи между потоком тепла и градиентом температуры, нетрудно получить уравнение, описывающее изменение локальной температуры плазмы. Выделим плоский тонкий слой плазмы между плоскостью $z - dz/2$ и плоскостью $z + dz/2$, как показано на рисунке 1. Внутри него заключены электроны с внутренней энергией $\frac{3}{2}nT dz$ (в расчёте на единицу площади слоя). Через левую границу слоя за время dt втекает энергия $q(z - dz/2) dt$ (в расчёте на единицу площади). Через правую границу за то же время вытекает энергия $q(z + dz/2) dt$. Разность

$$q(z - dz/2) dt - q(z + dz/2) dt \approx -\frac{\partial q}{\partial z} dz dt = \frac{\partial}{\partial z} \chi \frac{\partial T}{\partial z} dz dt$$

идёт на увеличение тепловой энергии электронов $\frac{3}{2}nT dz$ за счёт приращения температуры $dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt$. Приравнивая $\frac{3}{2}n dT dz$ и $\frac{\partial}{\partial z} \chi \frac{\partial T}{\partial z} dz dt$, получаем *уравнение теплопроводности*

$$\frac{3}{2}n \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \chi \frac{\partial T}{\partial z}.$$

В общем случае трёх пространственных измерений оно имеет вид

$$\frac{3}{2}n \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi \nabla T). \quad (20)$$

Поток тепла приводит к увеличению энтропии, что учтено слагаемым $\operatorname{div} \mathbf{q}_a$ в уравнении переноса тепла (16.30). Неудивительно поэтому, что уравнение теплопроводности можно вывести из уравнения переноса тепла путём отсечения «всего лишнего» (задача 6).

⁴ Исключение составляет коэффициент α_Λ , который определяет «косую» силу трения, см. §18.1.

В частном случае, когда плотность плазмы однородна и постоянна, обе стороны уравнения теплопроводности можно поделить на плотность n , внося её под операторы дифференцирования. Результат деления

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi \nabla T) \quad (21)$$

известен под названием *уравнение Фурье*. Величина

$$\chi = \frac{2}{3} \frac{\kappa}{n} \quad (22)$$

называется *коэффициентом температуропроводности* в отличие от коэффициента теплопроводности κ . Точно такое же уравнение описывает изменение концентрации C мельчайших частиц твёрдого вещества в жидкости в процессе броуновского движения. В задаче о диффузии броуновских частиц вместо χ пишут коэффициент диффузии D , а уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(D \nabla C)$$

называют *уравнением диффузии*.

Уравнение Фурье (21) с постоянным коэффициентом χ хорошо изучено. Из него следует, что зона прогрева от точечного источника тепла увеличивается пропорционально \sqrt{t} . Действительно, оценивая производную $\partial T / \partial t$ в левой части уравнения как T/t , а правую часть уравнения — как $\chi T/r^2$, получаем, что за время t нагретая область расширится на расстояние

$$r \sim \sqrt{\chi t}. \quad (23)$$

Фурье (Jean Fourier) специально для уравнения (21) разработал метод решения разложением в ряды, которые в наше время называют его именем. Решение Фурье описывает диффузное расплывание начального распределения температуры (задача 8), когда тепло от точечного источника распространяется так, что уже в следующий момент времени температура среды обращается в нуль лишь асимптотически на бесконечности, а размер прогретой области изменяется по закону (23). Однако к плазме метод Фурье, вообще говоря, неприменим, так как коэффициент температуропроводности сам зависит от температуры степенным образом, $\chi \propto T^{5/2}$. Решение уравнения теплопроводности со степенной зависимостью χ от T качественно отличается от случая $\chi = \text{const}$, предсказывая температурные волны с крутым фронтом (задача 9).

Из полученной выше оценки $\kappa \sim nv_T\lambda$ и соотношения $\chi \sim \kappa/n$ следует, что по порядку величины

$$\chi \sim \lambda v_T \sim \lambda^2/\tau \sim v_T^2\tau, \quad (24)$$

где $\lambda = 1/n\sigma$ — длина свободного пробега, σ — транспортное сечение кулоновских столкновений, n — плотность частиц, $\tau = \lambda/v_T$ — время свободного пробега, а v_T — тепловая скорость. Сравнение коэффициентов электронной и ионной температуропроводности показывает, что

$$\chi_e/\chi_i \sim v_{Te}^2\tau_e/v_{Ti}^2\tau_i \sim (m_i/m_e)^{1/2}(T_e/T_i)^{5/2}Z^2. \quad (25)$$

В типичных условиях $\chi_e/\chi_i \gg 1$ из-за огромной разницы в массе электронов и ионов. Следовательно, в водородной плазме ($Z = 1$) без магнитного поля тепло переносится преимущественно электронами.

§17.4. Термосила

В §17.2 мы установили, что при наличии градиента температуры в неподвижной плазме неизбежно возникает электрическое поле. Подставив

$$\mathbf{E} = -\frac{5}{2e}\nabla T_e = \frac{5}{2e_e}\nabla T_e$$

в уравнение движения электронной компоненты плазмы

$$m_e n_e \frac{d_e \mathbf{u}_e}{dt} = -\nabla p_e + e_e n_e \mathbf{E} - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e + \mathbf{R}_{ei}, \quad (26)$$

легко понять, что должна существовать ненулевая сила

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}_{ei},$$

чтобы электроны на самом деле были неподвижны. Действительно, пре-небрегая инерцией электронов (то есть заменяя нулём левую часть уравнения) и силой вязкости (то есть слагаемым $-\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e$ в правой части уравнения),⁵ а также подставляя $\nabla p_e = \nabla(n_e T_e) = n_e \nabla T_e$, находим силу

$$\mathbf{R}_T = -\frac{3}{2} n_e \nabla T_e, \quad (27)$$

⁵ Силы инерции и вязкости возникают только в движущейся среде. Тот факт, что $\boldsymbol{\pi}_e = 0$ при $\mathbf{u}_e = 0$, будет доказан в §17.8.

которая направлена против градиента температуры. Её называют *термосилой*. Индекс T в её обозначении подчёркивает, что термосила составляет только часть полной силы

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_u \quad (28)$$

взаимодействия электронов с ионами, которая включает ещё и силу трения \mathbf{R}_u . Последняя возникает при протекании электрического тока и будет вычислена в следующем параграфе. Пока же будем считать, что $\mathbf{R}_u = 0$. В силу закона сохранения импульса противоположная по направлению сила действует на ионы со стороны электронов:

$$\mathbf{R}_{ie} = -\mathbf{R}.$$

Происхождение термосилы связано с нетривиальной зависимостью частоты столкновений электронов с ионами от энергии сталкивающихся частиц. Из-за уменьшения частоты столкновений с ростом температуры электроны, приходящие в некоторую точку плазмы из более нагретой области, испытывают меньшее трение об ионы, нежели электроны, приходящие из области с меньшей электронной температурой. В результате возникает сила трения, направленная против градиента температуры. Удивительно то, что термосила, будучи силой трения по своему происхождению, не зависит от частоты столкновений. Однако этот парадоксальный результат легко объяснить, следуя методу анализа процессов переноса, который был использован в начале §17.3 (задача 1). Заметим также, что формулу (27) нетрудно получить при помощи прямых вычислений, если подставить функцию распределения электронов (11) в определение (16.21) силы Брагинского (задача 2).

§17.5. Сила трения

Вычислим теперь силу трения электронов об ионы \mathbf{R}_u в однородной плазме при заданной средней скорости электронов относительно ионов.

Вновь ограничим себя случаем лоренцевой плазмы и заметим, что нужно искать решение уравнения (4) с подстановкой $\partial f_m / \partial z = 0$, считая электрическое поле E заданным параметром. Искомое решение получаем из формулы (6), отбрасывая слагаемые с $\partial T / \partial z$:

$$\delta f = -\frac{v^4}{2A} \frac{eE}{T} f_m \cos \theta. \quad (29)$$

Теперь условие (86) выполнено быть не может (если только $E \neq 0$), поскольку оно было получено для случая $\mathbf{u} = 0$. Обратившись к определению потоковой скорости (16.96), находим, что с учётом равенства (76)

$$n\mathbf{u} = \int \mathbf{v}(f_m + \delta f) d^3v = \int \mathbf{v} \delta f d^3v. \quad (30)$$

Отличным от нуля вновь оказывается только результат интегрирования проекции $v_z = v \cos \theta$ вектора скорости \mathbf{v} на направление электрического поля $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$. Так как $v_z \delta f \propto v^5 f_m \cos^2 \theta$, интегрирование, как и в §17.2, сводится к усреднению $\cos^2 \theta$ по полному телесному углу при помощи равенства $\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{3}$ с последующим использованием формулы (9) для случая $k = 3$. В итоге находим

$$\mathbf{u} = -\frac{2}{\sqrt{\pi A}} \left(\frac{2T}{m} \right)^{5/2} \frac{eE}{T}. \quad (31)$$

Раскрывая обозначение $A = 2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei} / m^2$ и восстанавливая индекс e у величин, относящихся к электронам, окончательный результат вычислений удобно представить в компактном виде

$$\mathbf{u} = \frac{32}{3\pi} \frac{e_e E \tau_e}{m_e}, \quad (32)$$

выделив характерное время (17) электрон-ионных столкновений τ_e .

Таким образом, мы вычислили потоковую скорость электронов, которую они приобретают в плазме под действием внешнего электрического поля для случая лоренцевой плазмы, который соответствует пределу $Z \rightarrow \infty$. В общем случае численный коэффициент в формуле (32) оказывается функцией числа Z , так что

$$\mathbf{u} = \frac{1}{C(Z)} \frac{e_e E \tau_e}{m_e}, \quad (33)$$

где величина $C(Z)$ изменяется в пределах от $3\pi/32 \approx 0,29$ до 1 (см. ниже).

Так как предыдущие вычисления выполнены в системе отсчёта, где ионы в среднем неподвижны, при переходе в иную систему отсчёта в полученных формулах нужно положить $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$, понимая \mathbf{u} (без индекса) как потоковую (среднюю направленную) скорость электронов относительно ионов. Учитывая это, вновь обратимся к гидродинамическому

уравнению движения электронов. В однородной плазме градиент давления равен нулю, а ускорение электронов электрическим полем уравновешивается силой трения, поэтому

$$e_e n_e \mathbf{E} + \mathbf{R}_u = 0. \quad (34)$$

Исключая \mathbf{E} с помощью формулы (33), получим

$$\mathbf{R}_u = -\mathbb{C}(Z) \frac{m_e n_e \mathbf{u}}{\tau_e}. \quad (35)$$

Разумеется тот же результат можно получить прямым вычислением интеграла в определении силы Брагинского (16.21). Для случая лоренцевой плазмы эти вычисления сделаны в задаче 3.

Формула (35) имеет простой смысл. При столкновениях электронов с ионами скорости электронов, почти не меняясь по величине, хаотически изменяют свое направление. Таким образом, за время порядка τ_e электроны теряют свою упорядоченную скорость $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$ относительно ионов; следовательно, они теряют (а ионы приобретают) импульс $n_e m_e \mathbf{u}$ в расчёте на единицу объёма. Это значит, что на электроны действует сила трения порядка $-n_e m_e \mathbf{u}/\tau_e$; равная ей, но противоположно направленная сила действует на ионы.

Полезно сравнить найденную функцию распределения электронов с максвелловской функцией распределения, которая характеризуется той же потоковой скоростью \mathbf{u} . Для этого выразим найденную поправку к функции распределения (29) через \mathbf{u} с помощью (31), в результате получим

$$\delta f = \frac{\sqrt{\pi} u v^4}{4(2T/m)^{5/2}} f_m \cos \theta \quad (36)$$

и заметим, что сдвинутое без деформации максвелловское распределение при малой величине \mathbf{u} описывается поправкой

$$\delta f_m = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \left[e^{-m(v-u)^2/2T} - e^{-mv^2/2T} \right] \approx \frac{muv}{T} f_m \cos \theta. \quad (37)$$

Различие δf и δf_m особенно заметно в пределе $v \rightarrow \infty$ и объясняется тем, что частота кулоновских столкновений уменьшается с ростом скорости электронов ($\nu_{ei}^{(p)} \propto v^{-3}$), поэтому более быстрые электроны разгоняются сильнее, чем медленные. В результате функция распределения электронов искажается так, что в создании средней скорости \mathbf{u} (и переносе электрического тока) относительно большую роль играют быстрые

электроны, для которых частота столкновений меньше, поэтому следует ожидать, что и сила трения будет меньше, чем для сдвинутого максвелловского распределения.

Если бы столкновения электронов между собой происходили гораздо чаще, чем столкновения электронов с ионами, эффект искажения функции распределения отсутствовал бы, так как именно столкновения частиц одного сорта устанавливают максвелловскую форму функции распределения. Так как

$$\nu_{ei}^{(p)} \sim \nu_{ee}^{(p)} Z,$$

формально случай сдвинутого как целое максвелловского распределения соответствует пределу $Z \rightarrow 0$. Однако на самом деле имеет место как раз обратная ситуация, и электроны сталкиваются с ионами так же часто (при $Z = 1$) или даже чаще (при $Z \gg 1$), чем между собой. Приведём значения численного коэффициента в формуле (35) для некоторых значений Z [15]:

$$\mathbb{C}(0) = 1, \mathbb{C}(1) \approx 0,51, \mathbb{C}(2) \approx 0,44, \mathbb{C}(4) \approx 0,38, \mathbb{C}(\infty) = \frac{3\pi}{32} \approx 0,29. \quad (38)$$

Случай сдвинутого без деформации максвелловского распределения и случай лоренцевой плазмы представляют собой два противоположных полюса. При $Z = 0$ (чего в действительности быть не может) сила трения максимальна, а при $Z = \infty$ (чего тоже не может быть) сила трения минимальна. При $Z = 1$ получается «эффект порядка единицы» и сила трения примерно вдвое меньше максимальной. Отметим, что величина τ_e , определяемая формулой (17), выбрана так, чтобы коэффициент $\mathbb{C}(Z)$ был равен 1 в том случае, когда максвелловское распределение электронов как целое (без деформации) сдвинуто относительно ионов на величину средней скорости \mathbf{u} (задача 16.4).

§17.6. Электропроводность плазмы

Вновь обратимся к уравнению (35), на этот раз чтобы вычислить коэффициент электрической проводимости σ в законе Ома

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (39)$$

Электрическую проводимость называют также электропроводностью или просто проводимостью, а коэффициент σ — удельной электропро-

водностью или удельной проводимостью. Если учесть, что в квазинейтральной плазме

$$\mathbf{J} = e_e n_e \mathbf{u}_e + e_i n_i \mathbf{u}_i = e_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) = e_e n_e \mathbf{u}, \quad (40)$$

совсем нетрудно найти величину σ , используя результаты вычисления силы трения. Комбинируя формулы (34), (35), (39) и (40), получаем

$$\sigma = \frac{1}{C(Z)} \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e} = \frac{1}{C(Z)} \frac{\omega_p^2 \tau_e}{4\pi}, \quad (41)$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e}$ — ленгмюровская частота. Этот результат, вероятно, впервые был опубликован в статье Л. Спирцера (Lyman Spitzer) и Р. Хэрма (Richard Härn) в 1953 году [49]. На примитивных первых компьютерах они численно рассчитали проводимость плазмы при различных значениях Z . Позднее эти результаты вошли в один из первых учебников по физике плазмы, который был написан Спирцером [54]. В этой связи проводимость плазмы, вычисленную по формуле (41), часто называют спирцеровской. Расчёты С. И. Брагинского были завершены на год раньше, но из-за режима секретности были опубликованы лишь в 1957 году [50].

§17.7. *Электронный поток тепла

Протекание тока сопровождается переносом тепла. Это явление описывается дополнительным слагаемым \mathbf{q}_u в полном потоке тепла

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_{Te} + \mathbf{q}_u, \quad (42)$$

который переносят электроны. Чтобы вычислить ту часть потока тепла, которая пропорциональна \mathbf{u} , в пределе лоренцевой плазмы нужно взять поправку к функции распределения электронов (36), использованную в §17.5 для вычисления силы трения, и действовать далее в соответствии с определением (14) вектора \mathbf{q} . Простые вычисления (задача 4) дают почти ожидаемый результат

$$\mathbf{q}_u = \frac{3}{2} n_e T_e \mathbf{u}, \quad (43)$$

который можно интерпретировать в том смысле, что каждый электрон переносит в среднем энергию $\frac{3}{2} T_e$. Однако не всё так просто. При $Z = 1$ коэффициент в формуле (43) будет примерно вдвое меньше, а для

воображаемого случая $Z = 0$ он вообще равен нулю (поскольку $\mathbf{q} = 0$ для максвелловского распределения).

Ионный поток тепла

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{Ti} \quad (44)$$

не содержит слагаемого, подобного \mathbf{q}_u , так как протекание тока почти не влияет на функцию распределения ионов.

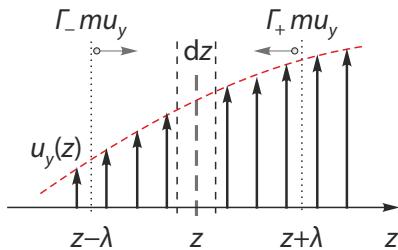
Как и термосила, поток тепла \mathbf{q}_u , вызванный протеканием тока, не содержит явно времени столкновений τ_e , хотя происхождение этого потока напрямую связано со столкновениями. Данный факт свидетельствует о непоследовательности теории Брагинского. С точки зрения «правильной теории» кинетические коэффициенты должны связывать термодинамические потоки с термодинамическими силами. Векторы \mathbf{q}_u и \mathbf{u} оба относятся к термодинамическим потокам. Точно так же, как формула (43) связывает два термодинамических потока, формула (27) выражает одну термодинамическую силу через другую (\mathbf{R}_T через ∇T_e). Поэтому не стоит удивляться, что соответствующие коэффициенты связи не зависят от частоты столкновений. Указанная непоследовательность теории Брагинского подробно обсуждается в монографии Р. Балеску (Radu Bălescu) [55] (см. также задачу 18.14). Если потоковую скорость с помощью формулы (31) выразить через напряжённость электрического поля, т. е. через термодинамическую силу, то парадокс разрешается и коэффициент пропорциональности между \mathbf{q}_u и \mathbf{E} , разумеется, будет зависеть от τ_e . Как ни странно, «правильная» теория Балеску почти не используется в физике плазмы, проигрывая в популярности теории Брагинского с «сухим» счётом.

§17.8. *Вязкость плазмы

Если потоковая скорость u_y меняется в направлении координаты z , то при отсутствии потока вещества возникает поток π_{yz} импульса mu_y вдоль оси z из-за дисбаланса односторонних потоков импульса $mu_y\Gamma$. Повторим рассуждения из §17.3, заменив температуру T на импульс mu_y , а поток тепла q — на поток импульса π_{yz} .

Пусть средний импульс электронов $mu_y(z)$ в направлении оси y медленно увеличивается по оси z , как показано на рисунке 2, но поток вдоль z отсутствует, так что через произвольное сечение z слева направо и справа налево за единицу времени проходит в точности одинаковое число электронов $\Gamma_- = \Gamma_+ = \Gamma \sim nv_T$.

Рис. 2. К выводу тензора вязких напряжений. Если потоки частиц слева и справа одинаковы, $\Gamma_- = \Gamma_+ = \Gamma$, так что ток отсутствует, потоки импульса mu_y слева и справа различаются на величину порядка $\pi_{yz} \sim \Gamma m\lambda \partial u_y / \partial z$. Разность потоков $\pi_{yz}(z-dz/2)$ и $\pi_{yz}(z+dz/2)$, втекающих в слой плазмы толщиной dz и вытекающих из него, равна силе, действующей на слой.



Электроны, приходящие в плоскость z слева, в среднем имеют импульс $mu_y(z - \lambda)$, тогда как электроны справа приходят с импульсом $mu_y(z + \lambda)$. Следовательно, поток импульса, идущий слева направо, равен

$$mu_y(z - \lambda)\Gamma = m \left[u_y - \lambda \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] \Gamma.$$

Навстречу ему идёт поток

$$mu_y(z + \lambda)\Gamma = m \left[u_y + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] \Gamma.$$

Суммарный поток импульса

$$\pi_{yz} = mu_y(z - \lambda)\Gamma - mu_y(z + \lambda)\Gamma = -2m\lambda\Gamma \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

можно представить в виде

$$\pi_{yz} = -\eta \frac{\partial u_y}{\partial z},$$

где величина

$$\eta \sim mnu_T\lambda \sim mn\lambda^2/\tau$$

называется коэффициентом вязкости.

Как следует из определения (16.12) тензора вязких напряжений π , он симметричен, а его след равен нулю, т. е. $\pi_{\mu\nu} = \pi_{\nu\mu}$ и $\pi_{\mu\mu} = 0$. Теперь же мы видим, что его компоненты пропорциональны пространственным производным вектора потоковой скорости. Компоненты тензора W , составленного из этих производных и обладающего указанными свойствами, имеют вид

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \delta_{\mu\nu}. \quad (45)$$

Он называется *тензором скорости сдвигов* и обращается в нуль, если плазма вращается как целое, $\mathbf{u} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}]$, или испытывает равномерное всестороннее сжатие, $\mathbf{u} = \text{const } \mathbf{x}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{\pi}_a = -\eta_a \mathbf{W}_a. \quad (46)$$

Как видно из уравнения движения плазмы (16.24), сила вязкости, действующая на частицы сорта a в единице объёма, равна

$$\mathbf{F}_a = -\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_a.$$

Это вектор с компонентами $F_{a,\mu} = -\partial \pi_{a,\mu\nu} / \partial x_\nu = -\partial \pi_{a,\nu\mu} / \partial x_\nu$. Если предположить, что $\eta_a = \text{const}$ (как в жидкости), вязкую силу можно представить в виде

$$\mathbf{F}_a = -\eta_a \left[\nabla^2 \mathbf{u}_a + \frac{1}{3} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_a \right],$$

но в плазме коэффициент вязкости η_a обычно изменяется на тех же пространственных масштабах, что и скорость \mathbf{u}_a .

В отличие от теплопроводности, которая в плазме без магнитного поля больше у электронов, в водородной плазме вязкие силы имеют преимущественно ионное происхождение, так как

$$\eta_i/\eta_e \sim m_i n_i v_{Ti}^2 \tau_i / (m_e n_e v_{Te}^2 \tau_e) \sim \sqrt{m_i/m_e} (T_i/T_e)^{5/2} / Z^3. \quad (47)$$

Однако в плазме с многозарядными ионами ситуация может перемениться на прямо противоположную при сравнительно небольшой величине $Z \sim 4-5$.

§17.9. *Выделение тепла

Предположим сначала, что масса ионов бесконечна. Тогда в системе отсчёта, где ионы в среднем покоятся (т. е. $\mathbf{u}_i = 0$), столкновения электронов с ионами будут происходить без обмена энергией. Распределение скоростей электронов в результате столкновений с ионами приближается к изотропному, поэтому энергия их упорядоченного движения со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$ переходит в тепло. Ионы же свою энергию не меняют. Выделение тепла в электронном газе в этом случае равно работе полной силы трения электронов об ионы:

$$Q_{ei} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}. \quad (48)$$

Так как согласно (28) сила Брагинского $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}_{ei}$ состоит из двух частей, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_u$, имеем $Q_{ei} = Q_u + Q_T$. Первое слагаемое, $Q_u = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_u$, описывает джоулев нагрев, который с помощью формул (35), (40), (41) можно переписать в более привычном виде:

$$Q_u = \frac{J^2}{\sigma}. \quad (49)$$

Второе слагаемое

$$Q_T = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_T \quad (50)$$

изменяет знак при перемене направления тока или градиента температуры; оно описывает обратимое выделение тепла. Аналогичное явление в металлах называется *эффектом Томсона* (William Thomson, 1851 [56]).

Учтём теперь, что отношение m_i/m_e хотя и велико, но конечно, и пусть сначала $\mathbf{u} = 0$. Если $T_e = T_i$, то между ионами и электронами существует тепловое равновесие и передачи тепла нет. Если же, например, $T_e > T_i$, то электроны передают тепло ионам. При столкновении лёгкого электрона с покоящимся тяжёлым ионом может быть передана доля энергии порядка $2m_e/m_i$. Таким образом, обмен энергией в единицу времени между электронами и ионами Q_Δ можно оценить так:

$$Q_\Delta = \frac{n_e}{\tau_e} \frac{2m_e}{m_i} \frac{3}{2}(T_e - T_i). \quad (51)$$

Эта оценка совпадает с формулой (15.17), которая была получена в §15.3 с помощью аккуратных вычислений.

Если одновременно $\mathbf{u} \neq 0$ и $T_e \neq T_i$, можно просто сложить оба указанных эффекта. Тогда

$$Q_{ei} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{R} - Q_\Delta. \quad (52)$$

Зная Q_{ei} , легко найти мощность нагрева ионов электронами Q_{ie} из соотношения (16.31), связывающего эти параметры:

$$Q_{ie} = Q_\Delta. \quad (53)$$

При высокой температуре в тепловом балансе плазмы могут играть заметную роль тормозное и циклотронное излучение электронов, а также нагрев альфа-частицами, которые возникают в термоядерных реакциях. Эти эффекты учитываются путём добавления к Q_{ei} и Q_{ie} соответствующих слагаемых.

Литература

Кинетические коэффициенты вычислены в статье С. И. Брагинского в 1-м томе сборника «Вопросы теории плазмы» [15]. Материалу лекции соответствуют §3 и §4. Особую ценность представляет качественное рассмотрение процессов переноса в §3.

Более конспективно метод Брагинского с разложением функции распределения частиц по ортогональным полиномам изложен В. А. Рожанским во 2-й главе «Теории плазмы». Там же в §1.6 вычислены коэффициенты переноса в слабоионизованной плазме.

В монографии Р. Балеску (Radu Bălescu) [55] изложена альтернативная теория классических процессов переноса плазмы, а также получены аппроксимационные формулы для кинетических коэффициентов при произвольной величине Z .

Задачи и вопросы

Задача 1. Покажите, что в плазме с градиентом температуры электронов на них действует термосила, даже если поток электронов в среднем равен нулю, и оцените её величину. Решение $\Rightarrow 258$

Задача 2. Найдите термосилу в лоренцевой плазме, вычислив интеграл в определении силы Брагинского. Решение $\Rightarrow 258$

Задача 3. Найдите силу трения электронов об ионы в лоренцевой плазме, вычислив интеграл в определении силы Брагинского. Решение $\Rightarrow 259$

Задача 4. Вычислите поток тепла, связанный с протеканием тока в лоренцевой плазме. Решение $\Rightarrow 259$

Задача 5. Пьяный пешеход каждые τ секунд делает шаг длиной λ в случайному направлении. На какое расстояние он удалится от пивной за время $t \gg \tau$ в среднем за достаточно большое число опытов? Решение $\Rightarrow 260$

Задача 6. Получите уравнение теплопроводности из уравнения переноса тепла. Решение $\Rightarrow 260$

Задача 7. Запишите уравнение движения ионной «жидкости» с учётом термосилы. Можно ли считать, что ионы действительно покоятся? Решение $\Rightarrow 260$

Задача 8. Найдите решение уравнения Фурье в безграничной среде, где в начальный момент было задано распределение температуры $T = T_0(x)$.

[Решение](#) ⇒ 261

Задача 9. Для степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры, $\chi = \beta T^n$, найдите закон, по которому обращается в нуль температура вблизи границы области, до которой в данный момент распространялось тепло от некоторого произвольного источника.

[Решение](#) ⇒ 262

Задача 10. Проверьте закон Видемана–Франца, согласно которому в проводниках отношение χ/σ коэффициента теплопроводности χ и коэффициента электрической проводимости σ пропорционально температуре.

[Решение](#) ⇒ 263

Лекция 18

Процессы переноса в магнитном поле

**Кинетические коэффициенты в замагниченной плазме.
Амбиополярная и бомовская диффузия. Обобщённый закон
Ома. Эффект Холла**

Магнитное поле вносит анизотропию в свойства плазмы. Процессы переноса, будь то диффузия, теплопроводность или вязкость, идут с разной скоростью в направлении вдоль и поперёк магнитного поля. Чем больше напряжённость магнитного поля, тем медленнее происходит перенос плазмы в поперечном направлении. Однако на скорость процессов переноса вдоль магнитных силовых линий¹ магнитное поле не влияет. Анизотропия особенно заметна в замагниченной плазме. Говорят, что плазма замагничена, если ларморовский радиус частиц меньше длины свободного пробега:

$$\rho \ll \lambda, \quad (1)$$

или, что то же самое, частота столкновений меньше циклотронной частоты:

$$\nu \ll \Omega. \quad (2)$$

В высокотемпературной плазме условие замагниченности для электронов выполняется уже в очень умеренном магнитном поле. Чтобы «замагнитить» ионы, требуется существенно более сильное магнитное поле. Гипотетически возможна ситуация, когда электроны замагнечены, а ионы — нет, но в термоядерных установках с магнитным удержанием плазмы замагнечены частицы всех сортов.

Современная теория объясняет наблюдаемые времена удержания плазмы в лабораторных установках разных типов, изучая *неоклассиче-*

¹ Магнитные силовые линии не являются линиями действия силы в прямом смысле этого слова, однако неправильный по своей сути термин увековечен трудами многих поколений физиков. В технических науках используется термин «линии магнитной индукции».

ские и турбулентные процессы переноса, но их анализ выходит за рамки вводного курса физики плазмы. За одним исключением мы ограничимся анализом классических процессов переноса в замагниченной плазме, не выходя за рамки теории [С. И. Брагинского](#), изложение которой было начато в предыдущей лекции. Отметим только, что неоклассические эффекты возникают, если существенную роль играет неоднородность магнитного поля, а турбулентный перенос связан с возбуждением в плазме неустойчивых колебаний.

§18.1. Кинетические коэффициенты в магнитном поле

Как показано в §17.2, в плазме без магнитного поля поток тепла, вызванный неоднородным нагревом, направлен против градиента температуры. Например, для электронов

$$\mathbf{q}_{Te} = -\kappa_e \nabla T_e. \quad (3)$$

В магнитном поле коэффициент теплопроводности становится тензором, и вместо (3) следует писать

$$\mathbf{q}_{Te} = -\mathbf{x}_e \cdot \nabla T_e, \quad (4)$$

что в покомпонентной записи означает

$$q_{Te,\mu} = -\kappa_{e,\mu\nu} \frac{\partial T_e}{\partial x_\nu}. \quad (5)$$

Поскольку \mathbf{B} – единственный векторный параметр, имеющийся в нашем распоряжении, тензор коэффициентов теплопроводности \mathbf{x}_e может быть «сконструирован» из компонентов единичного вектора $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ и инвариантных тензоров. Искомый тензор имеет вид

$$\kappa_{e,\mu\nu} = \kappa_{\parallel e} h_\mu h_\nu + \kappa_{\perp e} [\delta_{\mu\nu} - h_\mu h_\nu] + \kappa_{\wedge e} \epsilon_{\mu\nu\rho} h_\rho, \quad (6)$$

где скалярные коэффициенты $\kappa_{\parallel e}$, $\kappa_{\perp e}$ и $\kappa_{\wedge e}$ суть функции модуля магнитного поля $B = |\mathbf{B}|$, а $\delta_{\mu\nu}$ и $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ – соответственно единичный тензор второго ранга (символ Кронекера) и абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга (тензор Леви-Чивиты). Существенно, что такая зависимость удовлетворяет требованию симметрии по отношению к инверсии (смене знака) координат. Действительно, из анализа уравнения (5)

нетрудно понять, что тензор коэффициентов теплопроводности принадлежит к числу истинных тензоров² второго ранга, поскольку его компоненты не меняют знак при инверсии координат. Очевидно, что первые два слагаемых в (6) также не меняют знак, поскольку содержат произведение $h_\mu h_\nu$ компонентов вектора \mathbf{h} . Третье слагаемое линейно по вектору \mathbf{h} , но оно также не меняет знак при инверсии, поскольку \mathbf{B} является аксиальным вектором (псевдовектором). Величины $\chi_{\parallel e}$, $\chi_{\perp e}$ и $\chi_{\wedge e}$ называют соответственно коэффициентами продольной, поперечной и «косой» теплопроводности. Первый из них совпадает с коэффициентом теплопроводности незамагниченной плазмы χ_e , поскольку магнитное поле не влияет на движение заряженных частиц в направлении \mathbf{h} . Следовательно,

$$\chi_{\parallel e} \sim n_e \lambda_e v_{Te} \sim n_e \lambda_e^2 / \tau_e.$$

Как указано в §17.3, эта оценка соответствует наглядной физической картине явления, когда за время τ_e между двумя последовательными столкновениями электрон переносит энергию порядка $T_e = \frac{1}{2}m_e v_{Te}^2$ на расстояние порядка длины свободного пробега $\lambda_e \sim v_{Te} \tau_e$.

В направлении поперёк магнитного поля за то же время τ_e ведущий центр электрона смещается на меньшее расстояние порядка среднего лармировского радиуса $\rho_e \sim v_{Te} / |\Omega_e|$. Действительно, представим, что электрон совершает периодическое движение по круговой орбите радиуса ρ_e . В замагниченной плазме период этого движения $2\pi / |\Omega_e|$ мал по сравнению с τ_e , поэтому можно представить, что столкновения случаются один раз за много оборотов. В промежутках между столкновениями ведущий центр электрона движется по одной и той же силовой линии (если пренебречь магнитным дрейфом). Однако в момент столкновения он смещается примерно на расстояние порядка лармировского радиуса, как показано на рисунке 1 (с. 56). Исходя из этого наблюдения, нетрудно оценить теплопроводность замагниченной плазмы поперёк магнитного поля:

$$\chi_{\perp e} \sim n_e \rho_e^2 / \tau_e.$$

Аналогичные рассуждения, очевидно, применимы к ионам.

Сложнее показать, что

$$\chi_{\wedge e} \sim n_e v_{Te}^2 / \Omega_e,$$

² Тензор ранга n называют истинным, если при инверсии координат его компоненты преобразуются по закону $T_{i_1 \dots i_n} \rightarrow (-1)^n T_{i_1 \dots i_n}$. Если же $T_{i_1 \dots i_n} \rightarrow (-1)^{n+1} T_{i_1 \dots i_n}$, такой тензор называют псевдотензором.

где $\Omega_e = eB/m_e c$ – циклотронная частота электронов. Интересно, что в замагниченной плазме (т. е. при выполнении условия $|\Omega_e \tau_e| \gg 1$ для электронов и аналогичного для ионов) «косая» теплопроводность не зависит от частоты столкновений. В противоположном пределе $|\Omega_e \tau_e| \ll 1$ коэффициент $\kappa_{\wedge e}$ пропорционален $\Omega_e \tau_e$. Он мал по сравнению с $\kappa_{\parallel e}$ в обоих случаях, но в замагниченной плазме он больше, чем $\kappa_{\perp e}$. Однако косые потоки мало на что влияют, так как переносят тепло вдоль изотерм и не приводят непосредственно к охлаждению плазмы или к увеличению энтропии.

Объединяя формулы (4) и (6), электронный поток тепла можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{q}_{Te} = -\kappa_{\parallel e} \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp e} \nabla_{\perp} T_e - \kappa_{\wedge e} [\mathbf{h} \times \nabla_{\perp} T_e]. \quad (7)$$

Аналогичное соотношение

$$\mathbf{q}_{Ti} = -\kappa_{\parallel i} \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp i} \nabla_{\perp} T_i - \kappa_{\wedge i} [\mathbf{h} \times \nabla_{\perp} T_i] \quad (8)$$

связывает ионный поток тепла с градиентом ионной температуры.³ «Косые» слагаемые есть также в термосиле

$$\mathbf{R}_T = -\beta_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \beta_{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \beta_{\wedge} [\mathbf{h} \times \nabla T_e], \quad (9)$$

силе трения

$$\mathbf{R}_u = -\alpha_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} - \alpha_{\perp} \mathbf{u}_{\perp} - \alpha_{\wedge} [\mathbf{h} \times \mathbf{u}] \quad (10)$$

и потоке тепла

$$\mathbf{q}_u = \beta_{\parallel} T_e \mathbf{u}_{\parallel} + \beta_{\perp} T_e \mathbf{u}_{\perp} + \beta_{\wedge} T_e [\mathbf{h} \times \mathbf{u}], \quad (11)$$

связанном с электрическим током. Другое дело, что иногда они малы, как в силе трения. Например, $|\alpha_{\wedge}| \ll \alpha_{\perp} \sim \alpha_{\parallel}$ как при $|\Omega_e \tau_e| \gg 1$, так и при $|\Omega_e \tau_e| \ll 1$. С другой стороны, $\kappa_{\wedge e} \gg \kappa_{\perp e}$ и $\beta_{\wedge e} \gg \beta_{\perp e}$ при $|\Omega_e \tau_e| \gg \gg 1$. Напомним, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_u$ обозначает силу Брагинского $\mathbf{R} \equiv \equiv \mathbf{R}_{ei}$, которая действует на электроны со стороны ионов, а сила $\mathbf{R}_{ie} = = -\mathbf{R}$, которая действует на ионы, равна по величине, но направлена в противоположную сторону (см. §17.4).

³ В теории Брагинского принято писать разные знаки перед «косыми» слагаемыми в уравнениях для ионов и электронов, чтобы обеспечить положительность коэффициентов $\kappa_{\wedge e}$ и $\kappa_{\wedge i}$. Для единобразия мы пишем одинаковые знаки для частиц всех сортов, однако при этом некоторые «косые» коэффициенты переноса будут отрицательными, в частности $\kappa_{\wedge i} < 0$.

Как видно из сравнения формул (9) и (11), термосила и электронный поток тепла выражаются через один и тот же набор коэффициентов β_{\parallel} , β_{\perp} , β_{\wedge} , не имеющих специального названия.⁴ Этот факт следует из принципа симметрии кинетических коэффициентов, открытого Л. Онзагером (Lars Onsager, 1931 [57, 58]). Всего формулы (7)–(11) содержат 12 независимых коэффициентов: 6 коэффициентов κ и по 3 коэффициента α и β .

В работе Брагинского [15] на основе наглядных соображений сделаны оценки почти всех кинетических коэффициентов, кроме α_{\wedge} (косая сила трения) и β_{\perp} (перпендикулярная термосила). Но именно для этих коэффициентов расчёты Брагинского оказались неточны в пределе за-магнченной плазмы. Полученное позднее точное решение задачи о кинетических коэффициентах для электронов в лоренцевой плазме [53] предсказывает для коэффициентов α_{\wedge} и β_{\perp} степенную зависимость от B с дробным показателем степени. Известные к настоящему времени способы оценки кинетических коэффициентов из наглядных соображений собраны в решениях задач 1–3. В частности, в задаче 1 показано, как оценить β_{\perp} при помощи наглядных рассуждений, но оценить подобным образом α_{\wedge} вряд ли вообще возможно, поскольку косая сила трения $\mathbf{R}_{\wedge} = -\alpha_{\wedge}[\mathbf{h} \times \mathbf{u}]$ параллельна силе Лоренца $(e_e/m_e c)[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]$ и теряется на её фоне.

Как показано в §17.8, в плазме без магнитного поля тензор вязких напряжений π пропорционален тензору скорости сдвигов \mathbf{W} , а поэтому для определения π достаточно вычислить всего лишь по одному коэффициенту вязкости для электронов и ионов. При наличии магнитного поля нужно вычислить уже по 5 коэффициентов вязкости – ровно столько, сколько независимых компонентов имеет тензор \mathbf{W} , как и любой симметричный тензор с нулевым следом. Однако эти 5 коэффициентов выражаются всего лишь через две функции.

В пределе лоренцевой плазмы все кинетические коэффициенты для электронов вычислены в задачах 11–13.

⁴ В иностранной литературе β_{\parallel} , β_{\perp} и β_{\wedge} иногда называют коэффициентами термоэлектрической проводимости (thermoelectric conductivity), α_{\parallel} , α_{\perp} , α_{\wedge} – коэффициентами электрической резистивности (electrical resistivity). Коэффициенты κ_{\parallel} , κ_{\perp} , κ_{\wedge} имеют общепринятое название – коэффициенты теплопроводности (thermal conductivity).

§18.2. Амбиполярная диффузия

Рассмотрим диффузию плазмы поперёк магнитного поля. Пусть магнитное поле

$$\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$$

однородно и всюду направлено по оси z , но при этом существует градиент плотности частиц плазмы вдоль оси x :

$$\nabla n_e = (\partial n_e / \partial x) \hat{x}, \quad \nabla n_i = (\partial n_i / \partial x) \hat{x}.$$

Относительно температуры каждого сорта частиц будем считать, что она однородна, т. е. имеет одинаковую величину в любой точке плазмы, не исключая, что температура электронов T_e не равна температуре ионов T_i . Условимся, что e обозначает элементарный (положительный) заряд, а $e_e = -e$ и $e_i = Ze$ — соответственно заряды электронов и ионов. Тогда условие квазинейтральности $e_e n_e + e_i n_i = 0$ означает, что

$$n_e(x) = Z n_i(x).$$

Запишем уравнения движения электронов и ионов в гидродинамическом приближении, причём отбросим в них инерционные и вязкие члены, содержащие соответственно $\frac{d_a \mathbf{u}_a}{dt}$ и $\boldsymbol{\pi}_a$ ($a = e, i$), поскольку скорость движения, вызываемого диффузией, обычно мала, а вместе с ней малы также силы инерции и вязкости:

$$\begin{aligned} 0 &= -T_e \nabla n_e + e_e n_e \mathbf{E} + \frac{e_e n_e}{c} [\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] + \mathbf{R}_u, \\ 0 &= -T_i \nabla n_i + e_i n_i \mathbf{E} + \frac{e_i n_i}{c} [\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}] - \mathbf{R}_u. \end{aligned} \quad (12)$$

На всякий случай поясним, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_u$, так как термосила в данном случае равна нулю, поскольку нулю равен градиент температуры. В замагниченной плазме (где $|\Omega_e \tau_e| \gg 1$) коэффициенты в выражении (10) для силы трения \mathbf{R}_u описываются формулами

$$\alpha_{\parallel} = \mathbb{C}(Z) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \quad \alpha_{\perp} = \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \quad \alpha_{\Lambda} = \frac{\mathbb{D}(Z)}{|\Omega_e \tau_e|^{2/3}} \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \quad (13)$$

где $\mathbb{C}(Z)$ и $\mathbb{D}(Z)$ — числовые коэффициенты порядка единицы. Следовательно,

$$\mathbf{R}_u = -\mathbb{C}(Z) \frac{m_e n_e}{\tau_e} \mathbf{u}_{\parallel} - \frac{m_e n_e}{\tau_e} \mathbf{u}_{\perp} - \frac{\mathbb{D}(Z)}{|\Omega_e \tau_e|^{2/3}} \frac{m_e n_e}{\tau_e} [\mathbf{h} \times \mathbf{u}], \quad (14)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$. Первое слагаемое в (14) описывает силу трения в направлении магнитного поля. Его числовой коэффициент зависит от Z , как указано в §17.5. Второе слагаемое выражает силу, действующую поперёк магнитного поля. Величина Z входит в определение (17.17) параметра τ_e , но числовой коэффициент не зависит от Z и совпадает с результатом вычисления силы трения в приближении, когда функция распределения электронов представляет собой максвелловскую, сдвинутую без деформации как целое на величину средней скорости; сей факт имеет простое объяснение (задача 4). Наконец, третье слагаемое отвечает косой силе трения. Интересно, что она была вычислена Брагинским неправильно (задача 12), но ни она, ни продольная часть силы трения нам далее не потребуются.

Предположим, что электроны и ионы медленно движутся поперёк магнитного поля со скоростями $\mathbf{u}_{e\perp} = (u_{ex}, u_{ey}, 0)$ и $\mathbf{u}_{i\perp} = (u_{ix}, u_{iy}, 0)$ соответственно, оставив в формуле (14) только второе слагаемое (первое слагаемое равно нулю, а третье слагаемое мало). Проецируя уравнения (12) на ось x , учтём, что $R_x = 0$, поскольку, как мы увидим, скорости $u_{ex} = u_{ix} = u_x$ электронов и ионов в направлении x одинаковы:

$$\begin{aligned} -T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} + e_e n_e E_x + \frac{e_e n_e}{c} u_{ey} B &= 0, \\ -T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} + e_i n_i E_x + \frac{e_i n_i}{c} u_{iy} B &= 0. \end{aligned}$$

Складывая эти две проекции и учитывая условие квазинейтральности $e_e n_e + e_i n_i = 0$, находим плотность тока

$$e_e n_e (u_{ey} - u_{iy}) = \frac{c}{B} \left(T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} + T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} \right) = \frac{c}{B} \frac{\partial p}{\partial x},$$

где $p = n_e T_e + n_i T_i = n_e (T_e + T_i/Z)$ — давление плазмы. Следовательно,

$$R_y = -\frac{m_e n_e}{\tau_e} (u_{ey} - u_{iy}) = -\frac{1}{\Omega_e \tau_e} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Подставляя R_y в y -проекцию

$$e_e n_e E_y - \frac{e_e n_e}{c} u_{ex} B + R_y = 0$$

первого из уравнений движения (12), находим скорость расширения плазмы в направлении градиента плотности:

$$u_{ex} = c \frac{E_y}{B} - \frac{1}{m_e n_e \Omega_e^2 \tau_e} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (15)$$

Такой же результат получился бы из второго уравнения (12), подтверждая сделанное предположение, что

$$u_{ex} = u_{ix}.$$

Поэтому суммарный электрический ток электронов и ионов в направлении градиента плотности равен нулю:

$$J_x = e_e n_e u_{ex} + e_i n_i u_{ix} = e_e n_e (u_{ex} - u_{ix}) = 0,$$

обеспечивая сохранение квазинейтральности плазмы. Это свойство является отличительной чертой амбиполярной диффузии. Термин «амбиполярная диффузия» можно расшифровать как «двуполярная», т. е. совместная диффузия противоположно заряженных частиц.

Первое слагаемое в (15) соответствует электрическому дрейфу. Обычно оно равно нулю, так как наличие электрического поля E_y вдоль оси y означало бы, что к плазме приложено напряжение. Полагая $E_y = 0$ и умножая u_{ex} на n_e , находим диффузионный поток электронов

$$n_e u_{ex} = - \frac{n_e}{m_e n_e \Omega_e^2 \tau_e} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{T_e + T_i/Z}{m_e \Omega_e^2 \tau_e} \frac{\partial n_e}{\partial x}.$$

Поток ионов описывается аналогичным выражением

$$n_i u_{ix} = - \frac{n_i}{m_e n_e \Omega_e^2 \tau_e} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{T_e + T_i/Z}{m_e \Omega_e^2 \tau_e} \frac{\partial n_i}{\partial x}$$

в точности с тем же коэффициентом перед $\partial n_i / \partial x$ в правой части. Диффузионный поток

$$n_e \mathbf{u}_e = -D \nabla n_e, \quad n_i \mathbf{u}_i = -D \nabla n_i \quad (16)$$

направлен против градиента плотности. Коэффициент пропорциональности

$$D = \frac{T_e + T_i/Z}{m_e \Omega_e^2 \tau_e} \quad (17)$$

называют коэффициентом диффузии. При подстановке $n_e \mathbf{u}_e = -D \nabla n_e$ в уравнение непрерывности $\partial n_e / \partial t + \operatorname{div}(n_e \mathbf{u}_e) = 0$ получается уравнение диффузии

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \operatorname{div}(D \nabla n_e) \quad (18)$$

для электронов. Такое же уравнение с тем же коэффициентом диффузии получается и для ионов.

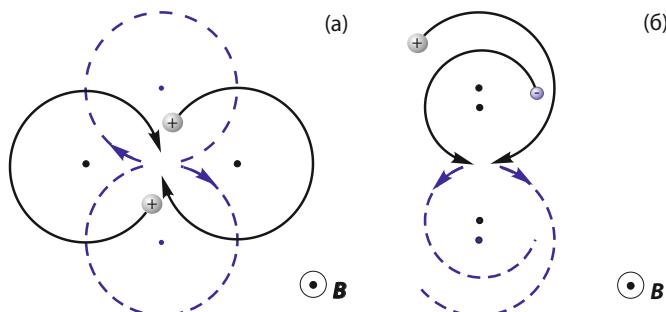


Рис. 1. (а) При столкновении тождественных частиц в магнитном поле их ведущие центры смещаются так, что суммарный сдвиг отсутствует. (б) При столкновении противоположно заряженных частиц их ведущие центры смещаются в одном и том же направлении.

Как ясно из приведённого вывода, диффузия возникает в результате трения между электронной и ионной компонентами плазмы при их скольжении относительно друг друга в направлении, перпендикулярном как градиенту плотности, так и магнитному полю.

На уровне кинетики частиц диффузия является результатом кулоновских столкновений электронов с ионами, тогда как столкновения между частицами одного сорта не приводят к диффузии.⁵ Рисунок 1а поясняет, что при столкновении тождественных частиц их ведущие центры смещаются так, что суммарный сдвиг отсутствует, и поэтому диффузия не возникает. Напротив, при столкновении разноимённо заряженных частиц, как на рисунке 1б, обе частицы в среднем смещаются в одну сторону, тем самым создавая диффузионный поток без нарушения квазинейтральности плазмы.

По порядку величины коэффициент диффузии равен квадрату ларморовского радиуса электрона $\rho_e \sim v_{Te}/\Omega_e$, делённому на время свободного пробега $\tau_{ei} \sim \tau_e$ между двумя последовательными столкновениями

⁵ Точнее будет сказать, что поправка к диффузионному потоку из-за столкновений тождественных частиц существенно меньше вычисленной. В заряженной плазме, состоящей только из электронов или только из одинаковых ионов, изменение плотности частиц описывается уравнением, которое значительно отличается от уравнения диффузии. Оно имеет стационарные решения, соответствующие локализованному в пространстве состоянию полного термодинамического равновесия [59].

электрона с ионами. Оценка

$$D_e \sim \frac{\rho_e^2}{\tau_e} \sim \frac{T_e}{m_e \Omega_e^2 \tau_e}$$

соответствует простой физической картине. При каждом столкновении с ионом, сопровождающемся рассеянием на угол порядка 90° , электрон смещается случайным образом на расстояние порядка ларморовского радиуса ρ_e .

Однако простота бывает обманчива. Если согласиться с утверждением, что $D \sim D_e$, то придётся объяснить, почему диффузионный поток определяется именно электронами, а не ионами, при том что диффузионные потоки электронов и ионов одинаковы. Оценивая D_i тем же способом, учтём, что $\rho_i \sim v_{Ti}/\Omega_i \sim (m_i T_i / m_e T_e)^{1/2} \rho_e / Z$, а $\tau_{ie} \sim (m_i / m_e) \tau_e / Z$. Следовательно,

$$D_i \sim \frac{\rho_i^2}{\tau_{ie}} \sim \frac{T_i / Z}{m_e \Omega_e^2 \tau_e}.$$

Сравнивая D , D_e и D_i , нетрудно видеть, что

$$D = D_e + D_i,$$

но нельзя утверждать, что подобное правило сложения верно во всех случаях.

В качестве контрпримера рассмотрим слабоионизованную плазму, где доминируют столкновения заряженных частиц с нейтральными атомами. Если магнитное поле отсутствует, парциальные коэффициенты диффузии оцениваются как произведение длины пробега λ (одинаковой для электронов и ионов) на тепловую скорость:

$$D_e \sim \lambda v_{Te}, \quad D_i \sim \lambda v_{Ti}.$$

Из-за большей подвижности электронов формально $D_e \gg D_i$, однако амбиполярное электрическое поле, которое возникает в результате пространственного разделения электронной и ионной компонент плазмы, выравнивает диффузионные потоки электронов и ионов, так что результирующий коэффициент диффузии вычисляется по формуле

$$D = \frac{2D_e D_i}{D_e + D_i} \approx 2D_i$$

(задача 7) и в итоге определяется ионами как наименее подвижной компонентой плазмы.

§18.3. Бомовская диффузия

Коэффициенты поперечного переноса обратно пропорциональны квадрату магнитного поля; например, согласно (17), $D \sim \rho_e^2/\tau_e \propto B^{-2}$. Однако до начала 1960-х годов в экспериментах не удавалось создать условия, при которых бы реализовывалась эта зависимость. Обобщив результаты экспериментов с газовыми разрядами, выполненных в конце 1940-х годов в рамках атомного проекта по разделению изотопов урана, Д. Бом (David Bohm) предложил полуэмпирическую формулу, которая предсказывает следующую зависимость коэффициента диффузии от параметров плазмы [60]:

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{cT}{eB}. \quad (19)$$

Позднее стало ясно, что в плазме, где коэффициенты переноса порядка бомовских, имеются интенсивные колебания (турбулентность), которые значительно увеличивают эффективную частоту рассеяния частиц, а формула Бома даёт верхний предел на величину коэффициентов переноса поперёк магнитного поля.

К этому выводу можно прийти с помощью следующих рассуждений. При увеличении частоты рассеяния коэффициенты поперечного переноса в замагниченной плазме увеличиваются пропорционально частоте столкновений, например для электронов $\chi_{\perp e} \sim \rho_e^2 \nu_e$. Так происходит до тех пор, пока эффективная частота столкновений ν_e не превысит циклотронную частоту $\omega_{ce} = |\Omega_e|$. При дальнейшем увеличении частоты рассеяния длина пробега λ_e станет меньше ларморовского радиуса ρ_e , возвращая нас к случаю незамагниченной плазмы, когда $\chi_{\perp e} \sim v_{Te}^2 / \nu_e$. Поскольку в незамагниченной плазме коэффициенты переноса только уменьшаются с ростом частоты столкновений, ясно, что они максимальны при $\nu_e \sim \omega_{ce}$. Полагая $\nu_e \sim \omega_{ce}$, находим, что

$$\chi_{\perp e} \sim v_{Te}^2 / \omega_{ce} \sim \rho_e^2 \omega_{ce} \sim cT/eB.$$

Примечательно, что масса электрона выпала из итогового результата, поэтому полученная оценка применима также и к ионам. С точностью до коэффициента 1/16 она совпадает с формулой Бома.

Теоретики предложили несколько правдоподобных вариантов вывода формулы Бома, аналогичных изложенному в задаче 8 (см., например, [61]).

§18.4. Обобщённый закон Ома

Вновь обратимся к уравнениям (12), на этот раз для того, чтобы найти проводимость плазмы в магнитном поле. Из двух уравнений (12) оставим только уравнение для электронов, в котором восстановим отброшенную ранее термосилу \mathbf{R}_T :

$$0 = -\nabla p_e + e_e n_e \mathbf{E} + \frac{e_e n_e}{c} [\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] + \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_T. \quad (20)$$

Вводя обозначение для плотности тока

$$\mathbf{J} = e_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i),$$

уравнение (10) перепишем в виде

$$\mathbf{R}_u = -\frac{\alpha_{\parallel}}{e_e n_e} \mathbf{J}_{\parallel} - \frac{\alpha_{\perp}}{e_e n_e} \mathbf{J}_{\perp} - \frac{\alpha_{\wedge}}{e_e n_e} [\mathbf{h} \times \mathbf{J}_{\perp}].$$

Затем выделим массовую скорость плазмы, отождествив её со средней направленной скоростью ионов, $\mathbf{V} = \mathbf{u}_i$, и исключим скорость электронов при помощи подстановки

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{V} + \frac{\mathbf{J}}{e_e n_e}.$$

Тогда после деления на $-e_e n_e$ уравнение (20) принимает форму *обобщённого закона Ома*

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = \frac{\nabla p_e - \mathbf{R}_T}{e_e n_e} + \varrho_{\parallel} \mathbf{J}_{\parallel} + \varrho_{\perp} \mathbf{J}_{\perp} + \varrho_{\wedge} [\mathbf{h} \times \mathbf{J}_{\perp}], \quad (21)$$

который в самом общем виде устанавливает связь между электрическим полем и током в плазме. Параметры⁶

$$\varrho_{\parallel} = \frac{\alpha_{\parallel}}{e_e^2 n_e^2}, \quad \varrho_{\perp} = \frac{\alpha_{\perp}}{e_e^2 n_e^2}, \quad \varrho_{\wedge} = \frac{\alpha_{\wedge} + m_e n_e \Omega_e}{e_e^2 n_e^2} \quad (22)$$

называют коэффициентами удельного сопротивления. В замагниченной плазме (при $|\Omega_e \tau_e| \gg 1$) с учётом формул (13) имеем

$$\varrho_{\parallel} = \frac{4\pi \mathbb{C}(Z)}{\omega_{pe}^2 \tau_e}, \quad \varrho_{\perp} = \frac{4\pi}{\omega_{pe}^2 \tau_e}, \quad \varrho_{\wedge} \approx \frac{4\pi \Omega_e}{\omega_{pe}^2}, \quad (23)$$

⁶ Следует отличать ϱ от обозначения ларморовского радиуса ρ .

причём $\varrho_\wedge \gg \varrho_\perp \sim \varrho_\parallel$.

В частном случае, когда $\mathbf{V} = 0$ и $\mathbf{J} = 0$, обобщённый закон Ома редуцируется до уравнения $\mathbf{E} = (\nabla p_e - \mathbf{R}_T)/e_e n_e$. Оно обращается в тождество, если температура однородна (тогда $\mathbf{R}_T = 0$), плотность плазмы удовлетворяет закону Больцмана (тогда $n_e = n_{e0} e^{-e_e \varphi / T_e}$), а электрическое поле потенциально (т. е. $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$). Таким образом, обобщённый закон Ома вполне оправдывает свое название, объединяя закон Ома и закон Больцмана.

§18.5. Эффект Холла

Последнее слагаемое в правой части обобщённого закона Ома (21) описывает *эффект Холла*. В этом и следующем параграфах мы обсудим несколько конкретных проявлений эффекта Холла, пренебрегая термосилой и градиентом давления электронов в уравнении (21).

В однородной плазме, где равны нулю градиент давления ∇p_e и термосила \mathbf{R}_T , обобщённый закон Ома принимает максимально простой вид

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = \varrho_\parallel \mathbf{J}_\parallel + \varrho_\perp \mathbf{J}_\perp + \varrho_\wedge [\mathbf{h} \times \mathbf{J}_\perp]. \quad (24)$$

Отсюда следует, что при протекании тока поперёк магнитного поля в плазме возникает *холловское электрическое поле*

$$\mathbf{E}_H = \varrho_\wedge [\mathbf{h} \times \mathbf{J}_\perp] \approx \frac{1}{e_e n_e c} [\mathbf{B} \times \mathbf{J}_\perp], \quad (25)$$

которое примерно в $\varrho_\wedge / \varrho_\perp \sim |\Omega_e \tau_e|$ раз больше, чем электрическое поле $\mathbf{E}_\perp = \varrho_\perp \mathbf{J}_\perp$ в направлении тока \mathbf{J}_\perp .

Рассмотрим сначала стационарное протекание тока. Тогда результат зависит от геометрии задачи и, в частности, от формы границы плазмы.

Пусть плазма имеет форму цилиндра, а электрическое поле направлено по радиусу, как показано на рисунке 2а. Обратившись к уравнению (12), нетрудно видеть, что при отсутствии градиента плотности электронная и ионная компоненты плазмы будут вращаться вокруг оси цилиндра с одинаковой скоростью

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_e = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}],$$

равной скорости электрического дрейфа (см. §4.3 в первом томе), а электрическая сила будет уравновешена силой Лоренца. Из равенства $\mathbf{u}_e =$

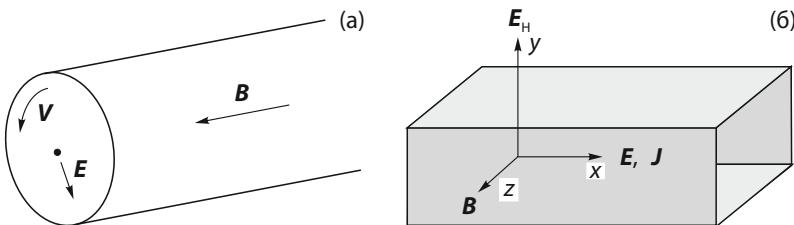


Рис. 2. Эффект Холла в стационарном поле.

$= \mathbf{u}_i$ следует, что сила Брагинского будет равна нулю, $\mathbf{R} = 0$, как и электрический ток, $\mathbf{J} = 0$. А раз ток не возникает, то плазма ведёт себя как непроводящий диэлектрик. Удивительное рядом!

Вычислим диэлектрическую проницаемость плазмы ϵ , приравняв два выражения для плотности энергии w электрического поля в диэлектрике. С одной стороны,

$$w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}.$$

С другой — w складывается из собственной энергии электрического поля и кинетической энергии частиц плазмы:

$$w = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{m_i u_i^2}{2} n_i = \left(1 + \frac{4\pi m_i n_i c^2}{B^2}\right) \frac{E^2}{8\pi}.$$

Вводя обозначение $c_A = B/\sqrt{4\pi m_i n_i}$ альфвеновской скорости, находим искомую диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon = 1 + c^2/c_A^2.$$

Совершенно иная ситуация складывается, если движение плазмы запрещено граничными условиями. Пусть имеется плоский плазменный канал, как показано на рисунке 2б, причём $\mathbf{V} = 0$. Ток в направлении поперёк канала не может существовать, если стенки канала непроводящие или оторваны от плазмы вакуумным зазором. Подставляя $J_y = 0$ в x -проекцию уравнения (24), немедленно находим

$$J_x = \frac{1}{\varrho_\perp} E_x = \frac{\omega_{pe}^2 \tau_e}{4\pi} E_x.$$

Теперь выясняется, что магнитное поле никак не влияет на электрический ток. Этот факт в своё время заинтересовал Э. Холла (Edwin Hall) и

привёл к открытию в 1879 году эффекта, названного в его честь [62]. Читатель может повторить опыт Холла, сравнив сопротивление металлического провода при включении и выключении магнитного поля. Впрочем, нужно пояснить, что магнитное поле создаёт холловское электрическое поле

$$E_y = \varrho_\wedge J_x \approx \frac{4\pi\Omega_e}{\omega_{pe}^2} J_x.$$

Оно формируется поляризационными электрическими зарядами на поверхности проводника. Холловское поле E_y в $\Omega_e\tau_e$ раз больше, чем поле E_x вдоль проводника.

§18.6. Переменный ток в плазме

Предположим теперь, что электрическое поле осциллирует столь быстро, что ионы почти неподвижны, не успевая приобрести заметную скорость за период изменения поля, которое в среднем за период равно нулю. Иными словами, $\mathbf{V} = \mathbf{u}_i = 0$. Тогда обобщённый закон Ома принимает максимально простой вид

$$\mathbf{E} = \varrho_\parallel \mathbf{J}_\parallel + \varrho_\perp \mathbf{J}_\perp + \varrho_\wedge [\mathbf{h} \times \mathbf{J}_\perp]. \quad (26)$$

Формулу (26) нетрудно обратить, выражив плотность тока \mathbf{J} через \mathbf{E} . Искомую зависимость представим в виде

$$\mathbf{J} = \sigma_\parallel \mathbf{E}_\parallel + \sigma_\perp \mathbf{E}_\perp + \sigma_\wedge [\mathbf{h} \times \mathbf{E}_\perp]. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26) и приравнивая коэффициенты при $\mathbf{E}_\parallel, \mathbf{E}_\perp, [\mathbf{h} \times \mathbf{E}_\perp]$ справа и слева, находим коэффициенты электрической проводимости плазмы⁷

$$\sigma_\parallel = \frac{1}{\varrho_\parallel}, \quad \sigma_\perp = \frac{\varrho_\perp}{\varrho_\perp^2 + \varrho_\wedge^2}, \quad \sigma_\wedge = -\frac{\varrho_\wedge}{\varrho_\perp^2 + \varrho_\wedge^2}. \quad (28)$$

При $|\Omega_e\tau_e| \gg 1$ коэффициенты σ_\perp и σ_\parallel существенно различаются по величине, причём

$$\sigma_\perp \sim \frac{\sigma_\parallel}{(\Omega_e\tau_e)^2} \ll \sigma_\parallel,$$

⁷ В теории Брагинского [15] параметр σ_\wedge не используется, а величина ϱ_\perp неудачно обозначена через $1/\sigma_\perp$. Справедливости ради нужно отметить, что Брагинский нигде не называет свой параметр σ_\perp проводимостью плазмы.

тогда как

$$\varrho_{\perp} \sim \varrho_{\parallel}.$$

Коэффициент ϱ_{\parallel} не зависит от B , а ϱ_{\perp} изменяется не более чем в 3 раза при изменении B от 0 до ∞ . В связи с этим иногда говорят, что магнитное поле почти не влияет на сопротивление плазмы. Однако подобное утверждение заведомо неверно в отношении коэффициентов электропроводности. Только в изотропной среде коэффициенты электропроводности и сопротивления обратно пропорциональны один другому.

В хорошо проводящей плазме удобно выражать электрическое поле через ток, а не наоборот. Такой способ лучше соответствует качественной картине явлений, если индуктивное сопротивление больше активного и внешние условия задают именно ток, а электрическое поле определяется по нему согласно закону Ома. В этом смысле форма записи (26) предпочтительнее (27). Например, оказывается, что в задаче о проникновении переменного поля в плазму толщина скин-слоя выражается через ϱ_{\perp} , а не σ_{\perp} (задача 9).

§18.7. *Вязкость плазмы в магнитном поле

В замагниченной плазме тензор вязких напряжений $\boldsymbol{\pi}$ по-прежнему можно выразить через тензор скорости сдвигов (17.45), но одного коэффициента η , как в §17.8, теперь уже будет недостаточно.

При наличии магнитного поля перенос импульса вдоль и поперёк поля происходит существенно по-разному, причём имеет значение также направление самого переносимого импульса. Связь тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\pi}$ с тензором скорости сдвигов \mathbf{W} , который определён уравнением (17.45), при этом сильно усложняется и содержит уже пять независимых коэффициентов вязкости. Симметричный тензор второго ранга со следом, равным нулю, такой как $\boldsymbol{\pi}$ или \mathbf{W} , имеет пять независимых элементов, поэтому самый общий вид линейной зависимости $\boldsymbol{\pi}$ от \mathbf{W} содержит именно пять независимых коэффициентов:

$$\boldsymbol{\pi} = -\eta_0 \mathbf{W}_0 - \eta_1 \mathbf{W}_1 - \eta_2 \mathbf{W}_2 - \eta_3 \mathbf{W}_3 - \eta_4 \mathbf{W}_4. \quad (29)$$

Тензоры \mathbf{W}_p составлены из компонентов тензора \mathbf{W} так, что они взаимно ортогональны, т. е.

$$W_{p\alpha\beta} W_{q\alpha\beta} = 0, \quad (30)$$

если $p \neq q$. В специальной системе координат, где $\mathbf{h} = \{0, 0, 1\}$:

$$\mathbf{W}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_{xx} + W_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & W_{xx} + W_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 2W_{zz} \end{bmatrix}, \quad (31a)$$

$$\mathbf{W}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_{xx} - W_{yy} & W_{xy} + W_{yx} & 0 \\ W_{xy} + W_{yx} & -W_{xx} + W_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (31b)$$

$$\mathbf{W}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_{xz} + W_{zx} \\ 0 & 0 & W_{yz} + W_{zy} \\ W_{xz} + W_{zx} & W_{yz} + W_{zy} & 0 \end{bmatrix}, \quad (31b)$$

$$\mathbf{W}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -W_{xy} - W_{yx} & W_{xx} - W_{yy} & 0 \\ W_{xx} - W_{yy} & W_{xy} + W_{yx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (31\Gamma)$$

$$\mathbf{W}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -W_{yz} - W_{zy} \\ 0 & 0 & W_{xz} + W_{zx} \\ -W_{yz} - W_{zy} & W_{xz} + W_{zx} & 0 \end{bmatrix}. \quad (31\Delta)$$

Для разложения тензора \mathbf{W} достаточно трёх тензоров $\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$, так как

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2,$$

но слагаемое $[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ в кинетическом уравнении порождает ещё два тензора \mathbf{W}_3 и \mathbf{W}_4 , как подтверждает решение задачи 13.

Рассмотрим несколько простых частных случаев возникновения вязкости плазмы в сильном магнитном поле, таком что $\Omega\tau > 1$. При этом всегда будем считать, что магнитное поле направлено вдоль оси z .

Если скорость тоже направлена по оси z и имеет производную в этом же направлении, то возникает поток импульса

$$\pi_{zz} = -\eta_0 \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

того же порядка, что и без поля, причём

$$\eta_0 \sim nm \frac{\lambda^2}{\tau} \sim nm v_T^2 \tau,$$

так как продольный импульс свободно переносится вдоль магнитного поля. Такой поток импульса создаёт силу вязкости

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} \eta_0 \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Пусть теперь скорость u_z изменяется в перпендикулярном к полю направлении, скажем в направлении оси x . Перенос импульса будет происходить при этом поперёк магнитного поля. Поэтому, оценивая коэффициент вязкости, надо подставить ларморовский радиус ρ вместо длины свободного пробега λ , что даёт поток импульса и силу вязкости

$$\pi_{zx} = -\eta_2 \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad F_z = \frac{\partial}{\partial x} \eta_2 \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad (32)$$

где

$$\eta_2 \sim nm \frac{\rho^2}{\tau} \sim \frac{\eta_0}{(\Omega\tau)^2}. \quad (33)$$

Аналогичное уменьшение коэффициента вязкости в $(\Omega\tau)^2$ раз получается и в случае, когда вдоль оси x изменяется поперечная составляющая скорости u_y . Тогда

$$\pi_{xy} \sim -\eta_1 \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad F_y \sim \frac{\partial}{\partial x} \eta_1 \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad (34)$$

причём $\eta_2 \sim \eta_1$.

Перенос поперечного импульса ослабляется магнитным полем, даже если этот перенос происходит вдоль поля. Например, если u_x изменяется по направлению z , т. е. $\partial u_x / \partial z \neq 0$, то тензор скорости сдвигов $W_{\mu\nu}$ получается таким же, как и при $\partial u_z / \partial x \neq 0$, так что и $\pi_{\mu\nu}$ будет таким же: $\pi_{xz} = -\eta_2 \partial u_x / \partial z$. Можно сказать, что вследствие вращения частица как бы «забывает» о своей поперечной упорядоченной скорости через время порядка Ω^{-1} , за которое она успевает сместиться лишь на расстояние порядка своего ларморовского радиуса.

Как показывает расчёт в задаче 13 на примере лоренцевой плазмы, тензор вязких напряжений содержит также члены, которые в сильном магнитном поле уменьшены не в $(\Omega\tau)^2$ раз, а в лишь в $\Omega\tau$ раз по сравнению со случаем слабого магнитного поля. Например, при $\partial u_y / \partial x \neq 0$ возникают потоки импульса и сила вязкости, равные

$$\pi_{xx} = -\pi_{yy} = -\eta_3 \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad F_x = \frac{\partial}{\partial x} \eta_3 \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad (35)$$

причём соответствующий коэффициент вязкости

$$\eta_3 \sim \frac{\eta_0}{\Omega\tau} \sim mn \frac{v_T^2}{\Omega}$$

в пределе $|\Omega\tau| \gg 1$ не зависит от параметра τ , характеризующего столкновения. При $\partial u_x / \partial z \neq 0$ возникают поток импульса и сила

$$\pi_{yz} = -\eta_4 \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad F_y = \frac{\partial}{\partial z} \eta_4 \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (36)$$

где $\eta_4 \sim \eta_3$. Силы (35) и (36), зависящие от коэффициентов η_3 и η_4 , направлены перпендикулярно скорости и не приводят к диссипации энергии. Такие, не зависящие от τ члены в потоке импульса аналогичны «косым» слагаемым в потоке тепла. Они описывают так называемую **бесстолкновительную вязкость**. Коэффициенты η_3 и η_4 отрицательны для ионов и положительны для электронов. Это лишний раз свидетельствует, что бесстолкновительная вязкость не является «настоящей» вязкостью.

Наконец, рассмотрим сжатие плазмы поперёк сильного магнитного поля, когда поправки к изотропному тензору давления pI возникают вследствие эффекта вмороженности магнитного поля, который подробнее будет описан в §19.4. Пока же достаточно принять на веру, что при сжатии плазмы магнитные силовые линии тоже сжимаются и магнитное поле увеличивается пропорционально увеличению плотности: $B \propto n$. Пусть скорость u_x изменяется в направлении оси x , так что $\operatorname{div} \mathbf{u} = \partial u_x / \partial x = -\dot{n}/n \neq 0$. В растущем (вместе с плотностью) магнитном поле частицы увеличивают энергию своего поперечного движения и посредством столкновений выравнивают распределение энергии по всем трём степеням свободы. Это выравнивание не является полным, так как столкновения происходят не бесконечно часто. В результате поперечное давление оказывается больше продольного на долю порядка $\tau \dot{B}/B = \tau \dot{n}/n$, создавая анизотропные потоки импульса:

$$\pi_{xx} = \pi_{yy} \sim p \frac{\tau \dot{n}}{n} \sim -\eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \pi_{zz} \sim \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (37)$$

Таким образом, при движении с $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$ коэффициент вязкости в сильном магнитном поле имеет тот же порядок величины, что и без поля.

В отличие от теплопроводности, которая вдоль поля больше у электронов, а поперёк — у ионов (при $\Omega_i \tau_i \gg 1$), вязкость ионов при $T_e \sim T_i$ всегда гораздо больше, чем электронов, так как

$$\eta_0^i \sim \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \eta_0^e, \quad \frac{\eta_0^i}{\Omega_i \tau_i} \sim \frac{m_i}{m_e} \frac{\eta_0^e}{\Omega_e \tau_e}, \quad \frac{\eta_0^i}{\Omega_i^2 \tau_i^2} \sim \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{3/2} \frac{\eta_0^e}{\Omega_e^2 \tau_e^2}. \quad (38)$$

Иными словами, вязкость плазмы определяется ионами. В практических расчётах с привлечением уравнений магнитной гидродинамики вязкостью чаще всего пренебрегают, считая её малой поправкой. Однако имеется важный пример, когда учёт вязкости меняет вывод об устойчивости плазмы. Оказывается, что сохранение дивергенции тензора вязкости в уравнениях движения ионов в определённом смысле эквивалентно учёту так называемого эффекта конечного ларморовского радиуса (эффекта КЛР), который содействует стабилизации желобковой неустойчивости; она будет рассмотрена в лекции 28.

Литература

Кинетические коэффициенты вычислены в статье [15] С. И. Брагинского в 1-м томе сборника «Вопросы теории плазмы». В §2 приведена сводка результатов для замагниченной плазмы, а в §4 описан способ расчёта и приведены результаты для магнитного поля произвольной величины.

Современная формулировка двухжидкостной магнитной гидродинамики дана в статьях Р. Калсруда (Russell Kulsrud) [25] и Ф. Хинтона (Fred Hinton) [41] в «Основах физики плазмы». В книге Дж. Фридберга (Jeffrey Freidberg) «Ideal Magnetohydrodynamics» [8] материалу лекции соответствует глава 2. В другой книге того же автора «Plasma Physics and Fusion Energy» [10] основы двухжидкостной МГД излагаются в главе 10.

Выявленные к настоящему времени неточности в теории Брагинского собраны в статье Е. М. Эпперлейна (E. M. Epperlein) и М. Г. Хайнса (M. G. Haines) [53]. Альтернативная формулировка уравнений переноса плазмы изложена в монографии Р. Балеску (Radu Bălescu) [55], который указывал на определённую непоследовательность теории Брагинского.

Задачи и вопросы

Задача 1. Оцените термосилу R_T в замагниченной плазме при разной ориентации градиента температуры относительно направления магнитного поля. Решение $\Rightarrow 263$

Задача 2. Оцените электронный поток тепла q_u в замагниченной плазме при разной ориентации градиента температуры относительно направления магнитного поля. Решение $\Rightarrow 264$

Задача 3. Покажите, что при наличии градиента температуры, перпендикулярного магнитному полю, возникает «косой» поток тепла $q_{T\wedge}$ в направлении, перпендикулярном как магнитному полю, так и градиенту температуры, и оцените его величину. [Решение ⇒ 265](#)

Задача 4. Вычислите силу трения в замагниченной плазме, перпендикулярную направлению магнитного поля. [Решение ⇒ 265](#)

Задача 5. Почему в замагниченной плазме при одинаковой величине потоковой скорости сила трения, перпендикулярная магнитному полю, больше, чем сила трения вдоль магнитного поля? [Решение ⇒ 266](#)

Задача 6. Сравните вклад электронов и ионов в теплопроводность плазмы в магнитном поле. [Решение ⇒ 267](#)

Задача 7. Вычислите коэффициент амбиполярной диффузии в слабоионизованном газе. [Решение ⇒ 267](#)

Задача 8. Оцените коэффициент бомовской диффузии, рассматривая рассеяние заряженных частиц на турбулентных флюктуациях электрического поля. Может ли коэффициент диффузии быть больше бомовского? [Решение ⇒ 268](#)

Задача 9. Полупространство $x > 0$ занято плазмой, которая помещена в магнитное поле \mathbf{B}_0 , направленное вдоль оси z . На границе плазмы создано переменное магнитное поле с круговой частотой ω и амплитудой \mathbf{B} , существенно меньшей \mathbf{B}_0 . Исследуйте проникновение переменного поля в плазму (скин-эффект). Зависит ли толщина скин-слоя от величины B_0 ? [Решение ⇒ 269](#)

Задача 10. Исследуйте двумерное движение плазмы в плоскости xy и найдите распределение скоростей $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$, которое обеспечивает равенство нулю тензора \mathbf{W}_3 , описывающего бесстолкновительную вязкость. [Решение ⇒ 270](#)

Задача 11. Выведите уравнение для поправки функции распределения электронов в лоренцевой плазме, выразив производные от равновесной функции распределения через производные гидродинамических величин. [Решение ⇒ 271](#)

Задача 12. Используя уравнение для поправки к функции распределения электронов в лоренцевой плазме, полученное в задаче 11, вычислите кинетические коэффициенты, которые определяют силу Брагинского и электронный поток тепла. [Решение ⇒273](#)

Задача 13. Используя уравнение для поправки к функции распределения электронов в лоренцевой плазме, полученное в задаче 11, вычислите кинетические коэффициенты, которые определяют тензор вязких напряжений электронной компоненты. [Решение ⇒277](#)

Задача 14. Установите правило преобразования между кинетическими коэффициентами Брагинского и Балеску. [Решение ⇒281](#)

Задача 15. Вычислите кинетические коэффициенты Балеску для лоренцевой плазмы. [Решение ⇒282](#)

Задача 16. Вычислите «бесстолкновительные» кинетические коэффициенты в замагниченной плазме. [Решение ⇒283](#)

Лекция 19

Одножидкостная магнитная гидродинамика

**Теория Альфвена. Резистивная магнитная гидродинамика.
Идеальная магнитная гидродинамика. Вмороженность и
диффузия магнитного поля**

Система уравнений магнитной гидродинамики, предложенная Ханнесом Альфвеном ([Hannes Alfvén](#)), может быть получена путём редуцирования уравнений двухжидкостной МГД. Однако Альфвен просто дописал в уравнение Эйлера, описывающее движение идеальной жидкости, силу Ампера. Анализируя подправленные таким образом уравнения гидродинамики, он предсказал существование неизвестных ранее МГД-волн и выяснил, что при движении проводящей жидкости в магнитном поле возникают исключительно интересные и неожиданные явления. Настолько неожиданные, что идеи Альфвена с недоверием воспринимались современниками.

Уникальные свойства проводящей жидкости связаны с тем, что при перемещении проводника в магнитном поле возбуждаются токи индукции, которые оказывают обратное воздействие как на жидкость, так и на поле. Свои идеи Альфвен развивал применительно к космической плазме, но обнаруженные им явления возникают в любой подвижной проводящей среде. Теория Альфвена исходит из одножидкостной модели плазмы, поэтому её следовало бы называть *одножидкостной магнитной гидродинамикой*, если важно подчеркнуть её отличие от двухжидкостной магнитной гидродинамики, но обычно слово «одножидкостная» опускают там, где это не должно вызывать недоразумений.

Из-за огромного различия масс ионов и электронов двухжидкостная магнитная гидродинамика представляет собой более адекватное описание плазмы, нежели одножидкостная. Однако существует класс круп-

номасштабных сравнительно медленных движений, для которых различие в движении ионов и электронов мало, и поэтому плазму можно рассматривать как гомогенную проводящую жидкость в согласии с первоначальной идеей Альфвена. Следуя Альфвену, мы изложим феноменологический вывод уравнений магнитной гидродинамики, а формальное преобразование двухжидкостной теории МГД в одножидкостную оставим читателю в виде задачи 1.

Уравнения одножидкостной МГД часто используются там, где их нельзя строго обосновать, например при изучении плазмы в геометрии, слишком сложной для применения более совершенных моделей. При этом модель одножидкостной МГД позволяет понять и прогнозировать явления, которые затем уточняются с учётом более тонких физических эффектов. В связи с этим возникло несколько вариантов одножидкостной МГД. В этой и следующей лекциях мы последовательно сформулируем системы уравнений *резистивной*, *идеальной*, *холловской* и *анизотропной* магнитной гидродинамики. Однако основным инструментом исследования равновесия и устойчивости плазмы в дальнейшем будут уравнения идеальной МГД.

§19.1. Теория Альфвена

В первом приближении плазму можно считать идеальным газом с уравнением состояния

$$p = n_i T_i + n_e T_e \quad (1)$$

где p — давление, n_i — плотность ионов, n_e — плотность электронов. Возможным различием температур электронов и ионов в рамках одножидкостной МГД обычно пренебрегают, предполагая, что $T_e = T_i = T$.

Так как масса электронов m_e значительно меньше массы ионов m_i , массовая плотность плазмы

$$\rho = m_e n_e + m_i n_i \simeq m_i n_i$$

с огромной точностью определяется ионами, а потоковая скорость

$$\mathbf{V} = \frac{m_e n_e \mathbf{u}_e + m_i n_i \mathbf{u}_i}{\rho} \simeq \mathbf{u}_i$$

практически равна средней скорости ионов \mathbf{u}_i в физически малом элементе объёма плазмы (ср. §18.4). Соответственно, $d\mathbf{V}/dt$ есть ускорение

этого элемента плазмы, который можно представить в виде капельки подкрашенного вещества. С добавлением силы Ампера гидродинамическое уравнение Эйлера принимает вид

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}], \quad (2)$$

где \mathbf{B} — магнитное поле, \mathbf{J} — плотность электрического тока, а

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)F \quad (3)$$

обозначает субстанциональную (или лагранжеву) производную произвольной функции $F(\mathbf{x}, t)$ координат \mathbf{x} и времени t . Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (4)$$

часто записывают в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (5)$$

чтобы сделать его более похожим на другие уравнения магнитной гидродинамики, которые традиционно записывают через субстанциональные производные по времени. Эквивалентность уравнений (4) и (5) доказывается с помощью векторного тождества

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla \rho) + \rho \operatorname{div} \mathbf{V}$$

и формулы (3), в которой нужно взять $F = \rho$.

Плотность электрического заряда и плотность электрического тока соответственно равны

$$\begin{aligned} \rho_q &= e_i n_i + e_e n_e, \\ \mathbf{J} &= e_i n_i \mathbf{u}_i + e_e n_e \mathbf{u}_e. \end{aligned}$$

Из уравнений непрерывности для электронов и ионов получается уравнение сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (6)$$

Будем далее везде предполагать, что плазма квазинейтральна. Это не значит, что в плазме отсутствует объёмный заряд: предполагается лишь, что величина ρ_q мала по сравнению с

$$e_i n_i \approx -e_e n_e. \quad (7)$$

При этом плотность тока записывается в виде

$$\mathbf{J} = e_e n_e \mathbf{u}, \quad (8)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$. Условие квазинейтральности (7) накладывает на величины, описывающие плазму, одну связь. Следовательно, из системы уравнений для плазмы одно уравнение должно быть исключено, а именно уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_q, \quad (9)$$

в которое явно входит объёмный заряд.

Считая, что все происходящие в плазме движения медленные и протекают со скоростями, которые значительно меньше скорости света, в уравнении (6) можно пренебречь производной $\partial\rho_q/\partial t$. В тех же условиях в уравнениях Максвелла можно пренебречь током смещения и записать

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (11)$$

Тогда уравнения (11) будут совместны, поскольку $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} \equiv 0$.

Пренебрегая величиной ρ_q , мы не накладываем никаких условий на $\operatorname{div} \mathbf{E}$. Вихревые электрические поля определяются при этом из первого уравнения (10), а потенциальные поля, возникающие в результате малой раскомпенсации положительных и отрицательных зарядов (сами эти поля не малы!), определяются условием $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ совместно с уравнениями движения. Иными словами, собственные потенциальные электрические поля в плазме автоматически подбираются именно так, чтобы не допустить слишком сильного разделения положительных и отрицательных зарядов. Уравнение (9) при этом может служить для того, чтобы по известному \mathbf{E} найти ρ_q .

Отдельного пояснения заслуживает обсуждение вопроса, почему в уравнении Эйлера (2) опущена электрическая сила $\rho_q \mathbf{E}$. Можно показать, что при нерелятивистских скоростях движения она мала по сравнению как с левой стороной этого уравнения, так и с силой Ампера (задача 2).

Уравнения (10), (11) в таком же виде входят в систему двухжидкостной магнитной гидродинамики (§16.7), но в одножидкостной магнитной гидродинамике они служат лишь отправной точкой для получения финальных уравнений.

Во-первых, заметим, что с помощью первого уравнения (11) можно исключить плотность тока из силы Ампера в уравнении движения (2), переписав его в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}]. \quad (12)$$

Во-вторых, можно исключить электрическое поле, скомбинировав первое уравнение (10) с законом Ома. В одножидкостной магнитной гидродинамике вместо обобщённого закона Ома (§18.4) используют более грубое приближение

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}',$$

связывающее электрическое поле \mathbf{E}' с плотностью тока \mathbf{J}' в системе отсчёта, движущейся вместе с жидким элементом. Преобразование Лоренца для полей в эту систему отсчёта при $V \ll c$ даёт

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}],$$

тогда как плотность тока в обеих системах отсчёта одинакова:

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J},$$

что является следствием приближения $\rho_q = 0$; поэтому

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}, \quad (13)$$

причём $\mathbf{J} = (c/4\pi) \text{rot } \mathbf{B}$ в соответствии с уравнением (11). Выражая отсюда \mathbf{E} и подставляя в первое уравнение (10), с помощью векторного тождества

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \nabla \text{div } \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$$

при дополнительном предположении, что коэффициент проводимости является константой, $\sigma = \text{const}$, приведём его к виду

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (14)$$

Уравнения (1), (5), (12) и (14) составляют основу системы уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики. Чтобы замкнуть эту систему уравнений, её нужно дополнить уравнением для температуры T .

Единого рецепта, каким должно быть это дополнительное уравнение, нет. Если из всех диссипативных процессов учитывать только омический нагрев плазмы, следует использовать уравнение

$$\frac{p}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{J^2}{\sigma} \quad (15)$$

с показателем $\gamma = 5/3$. Оно согласуется с уравнением (13) (и его следствием (14)) в том смысле, что в нём также пренебрегают всеми видами диссипации, кроме омической. Так как

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + \gamma \operatorname{div} \mathbf{V},$$

последнее уравнение иногда представляют в виде

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma p \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\gamma - 1}{\sigma} J^2. \quad (16)$$

§19.2. Резистивная магнитная гидродинамика

Суммируя сказанное выше, сформулируем систему уравнений *резистивной магнитной гидродинамики*:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (17a)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}], \quad (17b)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma p \operatorname{div} \mathbf{V} + \frac{\gamma - 1}{\sigma} J^2, \quad (17c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (17d)$$

Она игнорирует все диссипативные процессы, за исключением электрического сопротивления. Будучи сравнительно простой, система уравнений (17) стала важным инструментом исследования равновесия и устойчивости плазмы. В последующих лекциях мы не раз используем её для получения важнейших результатов магнитогидродинамической теории.

§19.3. Идеальная магнитная гидродинамика

Очевидный недостаток резистивной магнитной гидродинамики состоит в том, что проводимость считается скалярной величиной. В применении к плазме такое приближение далеко от действительности, так

как в магнитном поле электрическая проводимость является тензором. Однако во многих задачах применяют ещё более упрощённый способ описания, устремив проводимость σ к бесконечности. При $\sigma \rightarrow \infty$ сколь угодно малое электрическое поле вызвало бы бесконечный ток, который создал бы бесконечное магнитное поле, что невозможно. Следовательно, в сопутствующей системе отсчёта, связанной с плазмой, электрическое поле \mathbf{E}' равно нулю, а поэтому

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (18)$$

Векторное произведение $[\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$ зависит только от компоненты скорости \mathbf{V}_\perp , перпендикулярной магнитному полю, поэтому равенство (18) накладывает определённые ограничения на \mathbf{V}_\perp , при том что скорость вдоль магнитного поля \mathbf{V}_\parallel может иметь любое значение. Из того же уравнения (18) следует, что в приближении идеальной МГД проекция электрического поля на направление магнитного поля равна нулю, $\mathbf{E}_\parallel = 0$. Учитывая это, прямой подстановкой несложно проверить, что скорость электрического дрейфа

$$\mathbf{v}_E = \frac{c}{B^2}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \quad (19)$$

(вычисленная по формуле (4.14) в §4.3) обращает равенство (18) в тождество. Иными словами, плазма движется со скоростью электрического дрейфа.

Уравнения (18) и (19) по сути эквивалентны, но их смысл различен: если уравнение (18) трактуется так, что движение плазмы порождает электрическое поле, то уравнение (19) говорит, что это электрическое поле приводит плазму в движение. Как мы увидим в параграфе §19.4, такое движение «вмораживает» магнитное поле в плазму.

При $\sigma = \infty$ слагаемые в уравнениях (17), содержащие σ , обращаются в нуль и мы получаем систему уравнений *идеальной магнитной гидродинамики*:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0, \quad (20a)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}], \quad (20b)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma p \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (20c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \quad (20d)$$

(H. Alfvén, 1942 [63]). Третье уравнение в этой системе эквивалентно уравнению состояния

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \quad (21)$$

изотропной плазмы с показателем политропы $\gamma = 5/3$. Оно описывает движение, в котором энтропия каждой жидкости остаётся постоянной вдоль траектории движения, аналогично тому, как функция распределения в бесстолкновительной плазме неизменна вдоль траектории в фазовом пространстве (§13.2). Если же характерные размеры неоднородности в плазме невелики, то из-за высокой электронной теплопроводности более адекватным может быть приближение изотермической плазмы

$$\frac{dT}{dt} = 0, \quad (22)$$

которое соответствует политропе с показателем $\gamma = 1$. Действительно, подставляя $p = \rho T/m_i$ и $\gamma = 1$ в уравнение состояния (21), получаем уравнение (22). В некоторых случаях правдоподобные предсказания даёт приближение несжимаемой жидкости, согласно которой (20в) заменяется уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (23)$$

Оно соответствует пределу бесконечной скорости звука $c_s = \sqrt{\gamma p/\rho}$ и получается из уравнения (20в), если после деления на γp перейти к пределу $\gamma \rightarrow \infty$.

Уравнения идеальной магнитной гидродинамики (20) неплохо описывают крупномасштабные, сравнительно медленные движения в плазме, для которых несущественно различие в движении отдельных групп частиц. В частности, эти уравнения используют для расчётов равновесия плазмы в магнитном поле в условиях, когда несущественна её анизотропия, т. е. функция распределения частиц по скоростям близка к максвелловской.

§19.4. Вмороженность и диффузия магнитного поля

Рассмотрим подробнее уравнение (14) и постараемся выяснить его физический смысл. При $\mathbf{V} = 0$ первое слагаемое в его правой части обращается в нуль и оно принимает форму уравнения диффузии

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad (24)$$

с коэффициентом

$$D_m = c^2/4\pi\sigma, \quad (25)$$

который и в самом деле называют коэффициентом магнитной диффузии. Можно сказать, что вследствие резистивности плазмы магнитное поле просачивается в плазму по диффузионному закону. За время t поле проникает в плазму приблизительно на расстояние $\sqrt{2D_m t}$. Для периодического процесса время t порядка обратной частоты $1/\omega$, а указанное расстояние близко к толщине скин-слоя

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}, \quad (26)$$

который в электротехнике характеризует глубину проникновения высокочастотного тока в проводник.

Если толщина скин-слоя мала по сравнению с характерным размером неоднородности магнитного поля L , конечным сопротивлением плазмы можно пренебречь (сделав замену $\sigma \rightarrow \infty$). В движущейся плазме в качестве частоты ω можно взять отношение V/L . Соответственно, условие $\delta \ll L$ означает, что

$$V \gg \frac{c^2}{2\pi\sigma L}.$$

Именно в этом случае мы приходим к идеальной магнитной гидродинамике, когда второе слагаемое в правой части уравнения (14) можно отбросить:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (27)$$

Покажем, что в такой форме оно описывает эффект «вмороженности» магнитного поля в проводящую среду. Чтобы понять, о чём идет речь, рассмотрим произвольный замкнутый контур l , движущийся вместе с плазмой (рис. 1), и подсчитаем магнитный поток

$$\Phi = \int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})$$

через поверхность S , ограниченную контуром. Прежде всего напомним несколько фактов относительно свойств магнитного потока. Равенство нулю дивергенции магнитного поля, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, взаимно однозначно соответствует следующим утверждениям:

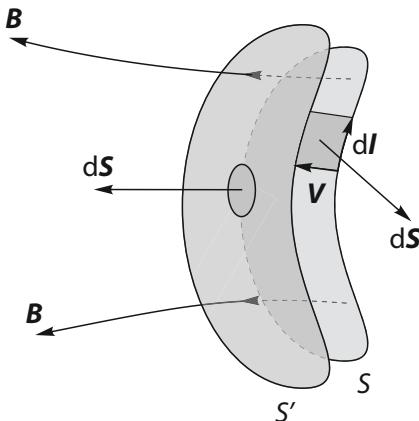


Рис. 1. Вмороженность магнитного поля в идеально проводящую плазму. Поток магнитного поля через любой жидкий контур, движущийся вместе с плазмой, сохраняется. Силовые линии магнитного поля не пересекают контур и поэтому как бы «приклеены» к жидким элементам плазмы.

1. Потоки, входящий в объём и выходящий из него, равны.
2. Через любую поверхность, натянутую на данный замкнутый контур, проходит один и тот же поток.

Чтобы доказать первое утверждение, достаточно воспользоваться теоремой Гаусса—Остроградского (Carl Gauß, 1813 [39]; М. В. Остроградский, 1831 [40]), которая совместно с уравнением $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ доказывает, что магнитный поток через замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = \int (\nabla \cdot \mathbf{B}) d^3x = 0.$$

Чтобы доказать второе утверждение, следует обратить внимание на то, что между любыми двумя поверхностями, натянутыми на один замкнутый контур, имеется замкнутый объём, а затем, как и раньше, можно воспользоваться теоремой Гаусса—Остроградского.

Обратимся теперь к контуру, движущемуся вместе с плазмой. Изменение потока через этот контур

$$\Delta\Phi = \int_{S'} (\mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S}) - \int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) \quad (28)$$

за малое время Δt есть разность потоков через контур l в момент времени t и тот же контур, перемещённый вместе с плазмой в новое положение S' в момент времени $t + \Delta t$; здесь $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{B}' = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$, а $d\mathbf{S}$ — элемент поверхности, рассматриваемый как вектор, направленный по нормали к поверхности и составляющий правый винт с направлением обхода контура. Поскольку величина магнитного потока опре-

деляется лишь контуром и не зависит от формы поверхности S , натянутой на него, поверхность S можно выбрать так, что она будет составлена из поверхности S' и узкой ленты ΔS шириной $V \Delta t$, соединяющей два контура. Предполагая именно такой выбор, преобразуем правую часть уравнения (28), вычтя и прибавив поток $\int_{S'} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})$ через площадку S' в момент времени t :

$$\Delta\Phi = \left[\int_{S'} (\mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S}) - \int_{S'} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) \right] - \left[\int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) - \int_{S'} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) \right].$$

Выражение в первой паре квадратных скобок с точностью до малых величин второго порядка по Δt записывается через производную магнитного поля по времени:

$$\Delta t \int_{S'} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right).$$

Выражение между второй парой скобок равно интегралу $\int_{\Delta S} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})$ по поверхности ленты. Этот интеграл можно представить в виде интеграла по контуру l , так как каждый элемент контура за указанное время сместится на расстояние $V \Delta t$, заметая площадку $[dl \times V \Delta t]$. В соответствии с известной формулой Стокса (George Stokes, 1854 [64]) интеграл по замкнутому контуру $\Delta t \oint_l \mathbf{B} \cdot [dl \times \mathbf{V}] = \Delta t \oint_l dl \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$ можно преобразовать к интегралу по натянутой на него поверхности, поэтому вторая пара в итоге даёт

$$\Delta t \int_S \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{S}.$$

Собирая все слагаемые, получаем соотношение

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \int_S \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{S},$$

из которого следует, что вследствие (27) в пределе $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0. \quad (29)$$

Сохранение магнитного потока означает, что силовые линии магнитного поля не пересекают линию контура. Поскольку это утверждение верно для любого контура l , движущегося вместе с проводящей жидкостью, получается, что силовые линии как бы вмороожены в неё, приклеены к её частичкам. Представление о вморооженности магнитного поля

упрощает качественный анализ картины движения идеально проводящей плазмы. Эффект вмороженности (англ. frozen-in) был теоретически предсказан Х. Альфвенином (Hannes Alfvén) в 1943 году [65], но приведённый выше вывод был предложен значительно позже [66].

Вернёмся к уравнению (27); ему может быть дано и другое наглядное толкование (Д. А. Франк-Каменецкий [67]). Раскроем $\text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$ в правой части уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \mathbf{B} \cdot \text{div} \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{V} \cdot \text{div} \mathbf{B}.$$

Подставляя сюда

$$\text{div} \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

из уравнения непрерывности (5) и учитывая, что $\text{div} \mathbf{B} = 0$, а

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{dt},$$

после простой перегруппировки слагаемых получим альтернативную форму уравнения вмороженности

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{B}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{V}, \quad (30)$$

эквивалентную исходной записи (27).

С другой стороны, рассмотрим какую-либо «жидкую линию», т. е. линию, перемещающуюся вместе с составляющими её частицами жидкости. Пусть $\delta \mathbf{l}$ есть элемент длины такой линии; определим, как он меняется с течением времени. Если \mathbf{V} есть скорость жидкости в точке на одном конце элемента $\delta \mathbf{l}$, то её скорость на другом конце будет $\mathbf{V} + (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{V}$. Поэтому в течение времени dt элемент $\delta \mathbf{l}$ изменится на $dt(\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{V}$, т. е.

$$\frac{d\delta \mathbf{l}}{dt} = (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{V}.$$

Мы видим, что изменение векторов $\delta \mathbf{l}$ и \mathbf{B}/ρ со временем определяется одним и тем же уравнением. Отсюда следует, что если в начальный момент эти векторы совпадают по направлению, то они останутся параллельными и в дальнейшем, а их длины будут меняться пропорционально друг другу. Другими словами, если две бесконечно близкие частицы жидкости находятся на одной и той же силовой линии, то и в дальнейшем они будут находиться на одной и той же силовой линии, а

величина B/ρ будет меняться пропорционально расстоянию между ними.

Переходя от бесконечно близких точек к точкам, находящимся на любом конечном расстоянии друг от друга, приходим к выводу, что каждая силовая линия перемещается вместе с находящимися на ней жидкими частицами. Можно сказать, что (при $\sigma \rightarrow \infty$) магнитные силовые линии как бы вмороожены в вещество жидкости, перемещаясь вместе с ним. Величина же B/ρ меняется в каждой точке пропорционально растяжению соответствующей «жидкой линии».

Важное следствие вморооженности магнитного поля состоит в том, что при движении плазмы линии магнитного поля не могут разрываться или пересоединяться. Иными словами, в рамках идеальной магнитной гидродинамики изменение топологии магнитного поля невозможно.

Наконец, укажем, что эффекты анизотропии (а конкретно эффект Холла, который игнорируется без должных оснований в модели идеальной магнитной гидродинамики) приводят к тому, что магнитное поле оказывается вморооженным не столько в плазму, сколько в электронную компоненту плазмы. Гидродинамике анизотропной плазмы посвящена следующая лекция, а уравнения холловской магнитной гидродинамики сформулированы в §20.6.

Литература

Начало лекции воспроизводит §2 из первой главы учебника [Б. Б. Ка-
домцева](#) «Коллективные явления в плазме» [28]. В книге «Plasma Physics and Fusion Energy» [10] [Дж. Фридберга](#) (Jeffrey Freidberg) материал лекции соответствует глава 11. Углублённое изучение одножидкостной магнитной гидродинамики можно начать со второй главы монографии «МГД-неустойчивости» [Г. Бейтмана](#) (Glenn Bateman) [6].

Переход от уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики к одножидкостной модели подробно обсуждается в §6 статьи [С. И. Брагинского](#) в сборнике «Вопросы теории плазмы» [15]. Вывод МГД-уравнений с обсуждением сделанных предположений можно найти также в книге [Т. Бойда](#) (T. J. M. Boyd) и [Дж. Сандерсона](#) (Jeff Sanderson) «The Physics of Plasmas» [30] и некоторых других публикациях.

Представление о вморооженности магнитного поля как частном случае теории МГД-инвариантов даёт часть 3 монографии [В. И. Ильгисони-
са](#) «Классические задачи физики горячей плазмы» [36]. Там же в части 4

изложены основы топологии магнитных силовых линий в плазменных установках.

Задачи и вопросы

Задача 1. Выведите уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики из уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики.

[Решение](#) ⇒ 285

Задача 2. Почему в уравнении движения плазмы (2) опущена сила $\rho_q \mathbf{E}$? Выясните условия, когда эта сила мала по сравнению с другими членами этого уравнения.

[Решение](#) ⇒ 286

Задача 3. При каких условиях в уравнении непрерывности (6) можно пренебречь плотностью электрических зарядов ρ_q ?

[Решение](#) ⇒ 286

Задача 4. Система уравнений (20) не содержит параметров, характеризующих столкновения между частицами. Означает ли это, что её можно использовать для описания бесстолкновительной плазмы?

Задача 5. Докажите, что любое магнитное поле локально можно записать через потенциалы Клебша $\alpha^1(\mathbf{x}, t)$ и $\alpha^2(\mathbf{x}, t)$ в виде $\mathbf{B} = [\nabla \alpha^1 \times \nabla \alpha^2]$. Проверьте, что силовая линия магнитного поля есть пересечение поверхностей $\alpha^1 = \text{const}$ и $\alpha^2 = \text{const}$. Можно ли подобным образом описать магнитное поле такое, что бесконечная силовая линия плотно устигает поверхность тора, нигде не замыкаясь на себя?

[Решение](#) ⇒ 286

Задача 6. Используя представление магнитного поля $\mathbf{B} = [\nabla \alpha^1 \times \nabla \alpha^2]$ через потенциалы Клебша $\alpha^1 = \alpha^1(\mathbf{x}, t)$, $\alpha^2 = \alpha^2(\mathbf{x}, t)$, доказать, что уравнение (27) выполняется, если $d\alpha^1/dt = d\alpha^2/dt = 0$. Означает ли это, что силовые линии движутся вместе с плазмой?

[Решение](#) ⇒ 288

Задача 7. Найдите потенциалы Клебша для осесимметричной магнитной ловушки с прямой осью и плоскими силовыми линиями.

[Решение](#) ⇒ 289

Задача 8. Укажите потенциалы Клебша для токамака с вложенными магнитными поверхностями.

[Решение](#) ⇒ 289

Задача 9. Предположим, что идеально проводящая жидкость, несущая с собой магнитное поле, натекает на непроводящий клин с гладкими стенками. При этом соседние элементы жидкости расходятся на произвольно большое расстояние. Будут ли разрываться магнитные силовые линии?

[Ответ ⇒ 290](#)

Задача 10. Когда магнитный диполь вращается вокруг своей оси, магнитное поле не испытывает никакого видимого вращения. Каким образом вращение ионосферы влияет на магнитное поле Земли?

[Ответ ⇒ 290](#)

Лекция 20

Гидродинамика анизотропной плазмы

Тензор напряжений магнитного поля. Гидродинамика анизотропной плазмы. Адиабаты Чу–Голдбергера–Лоу. Консервативная форма уравнений идеальной магнитной гидродинамики. *Холловская МГД

Расширяя область применения гидродинамического описания, можно избавиться от предположения об изотропии плазмы. В очередной лекции мы сначала рассмотрим эффекты, связанные с анизотропией давления плазмы. Соответствующую версию магнитной гидродинамики называют *теорией двух адиабатических инвариантов* или просто *адиабатами Чу–Голдбергера–Лоу*. Затем без вывода запишем уравнения идеальной МГД в так называемой *консервативной форме*, которая особенно полезна при численном моделировании явлений в плазме и установлении граничных условий в местах контакта плазмы с твёрдой стенкой или вакуумным зазором; вывод консервативной формы вынесен в задачи. В заключение лекции сформулируем уравнения *холловской магнитной гидродинамики*, которая, в отличие от идеальной МГД, учитывает эффект Холла.

§20.1. Тензор напряжений магнитного поля

Обратимся к уравнению движения плазмы (19.206) и запишем его в координатном представлении:

$$\rho \frac{dV_\mu}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_\mu} + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}]_\mu. \quad (1)$$

Не предполагая далее, что плазма изотропна, слагаемое $\partial p / \partial x_\mu$ заменим на $\partial P_{\mu\nu} / \partial x_\nu$, припомнив, что при выводе уравнений двухжидкостной

гидродинамики в §16.5 была проделана обратная замена $P_{\mu\nu}$ на $p \delta_{\mu\nu}$. Второе слагаемое преобразуем с помощью векторного тождества

$$[\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] = -\frac{1}{2} \nabla B^2 + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Его проекцию на ось x_μ можно записать как

$$[\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}]_\mu = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} B^2 + B_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} B_\mu = -\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{1}{2} B^2 \delta_{\mu\nu} - B_\mu B_\nu \right),$$

так как $\partial B_\nu / \partial x_\nu = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Таким образом,

$$\rho \frac{dV_\mu}{dt} = -\frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad (2)$$

где

$$T_{\mu\nu} = \frac{B^2}{8\pi} \delta_{\mu\nu} - \frac{B_\mu B_\nu}{4\pi}. \quad (3)$$

В других обозначениях то же уравнение имеет вид

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P} - \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (4)$$

Тензор

$$\mathbf{T} = \frac{B^2}{8\pi} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{4\pi} \quad (5)$$

с компонентами (3) называется *тензором напряжений магнитного поля*.¹ Чтобы выявить его смысл, заметим, что компоненты $T_{\mu\nu}$ имеют размерность давления, введём единичный вектор $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ вдоль направления магнитного поля, параметр $p_m = B^2/8\pi$ и перегруппируем слагаемые в формуле (3):

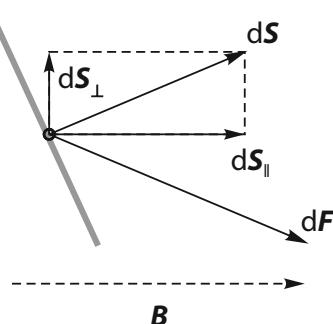
$$T_{\mu\nu} = p_m (\delta_{\mu\nu} - h_\mu h_\nu) - p_m h_\mu h_\nu. \quad (6)$$

Так как слева в уравнении (4) стоит масса единицы объёма ρ , умноженная на ускорение dV/dt , его правая часть

$$\mathbf{f} = -\nabla \cdot \mathbf{P} - \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (7)$$

¹ Тензор напряжений магнитного поля $\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{T}$ введён Максвеллом (J. Maxwell, 1861) и имеет знак, противоположный \mathbf{T} .

Рис. 1. Магнитное поле действует на элемент площадки $d\mathbf{S}$ с силой $d\mathbf{F}_m = -\mathbf{T} \cdot d\mathbf{S}$. Оно тянет площадку вдоль своего направления с силой $d\mathbf{F}_{m\parallel} = (B^2/8\pi) d\mathbf{S}_{\parallel}$ и давит поперёк с силой $d\mathbf{F}_{m\perp} = -(B^2/8\pi) d\mathbf{S}_{\perp}$. Если магнитное поле непрерывно на поверхности, суммарная сила с двух сторон поверхности будет равна нулю.



есть сила в расчёте на единицу объёма. Интеграл этой силы по произвольному объёму, занятому плазмой, с помощью теоремы Остроградского—Гаусса можно преобразовать к интегралу по замкнутой поверхности выделенного объёма:

$$\int \mathbf{f} d^3x = - \oint (\mathbf{P} + \mathbf{T}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Отсюда следует, что

$$d\mathbf{F} = -\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} - \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S}$$

есть сила, действующая на элемент поверхности $d\mathbf{S}$. Очевидно, что первое слагаемое в $d\mathbf{F}$ представляет газокинетическую часть этой силы, а второе слагаемое суть сила, создаваемая магнитным полем. Чтобы вычислить эту силу, составим свёртку $(-\mathbf{T} \cdot d\mathbf{S})_{\mu} = -T_{\mu\nu} dS_{\nu}$, с тензором (6):

$$-T_{\mu\nu} dS_{\nu} = -p_m (\delta_{\mu\nu} - h_{\mu} h_{\nu}) dS_{\nu} + p_m h_{\mu} h_{\nu} dS_{\nu},$$

и заметим, что $h_{\mu} h_{\nu} dS_{\nu}$ есть проекция $d\mathbf{S}_{\parallel} = \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot d\mathbf{S})$ вектора $d\mathbf{S}$ на направление магнитного поля, заданное единичным вектором \mathbf{h} . Соответственно, $(\delta_{\mu\nu} - h_{\mu} h_{\nu}) dS_{\nu} = dS_{\mu} - h_{\mu} (h_{\nu} dS_{\nu})$ будет проекцией $d\mathbf{S}_{\perp} = d\mathbf{S} - d\mathbf{S}_{\parallel}$ на плоскость, перпендикулярную \mathbf{h} . Следовательно,

$$-\mathbf{T} \cdot d\mathbf{S} = -p_m d\mathbf{S}_{\perp} + p_m d\mathbf{S}_{\parallel}.$$

Здесь первое слагаемое описывает силу, которая действует на площадку с сечением $d\mathbf{S}_{\perp}$, нормаль к которой перпендикулярна магнитному полю (рис. 1). Эта сила направлена против вектора $d\mathbf{S}_{\perp}$ и поэтому представляет собой *давление магнитного поля*. Второе слагаемое описывает силу, приложенную к площадке с сечением $d\mathbf{S}_{\parallel}$, нормаль к которой параллельна магнитному полю. Эта сила направлена вдоль вектора $d\mathbf{S}_{\parallel}$ и поэтому отвечает *напряжению магнитного поля*.

Следует обратить внимание, что

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (8)$$

в вакуумном магнитном поле, где $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. Проще всего в этом убедиться, обратившись к уравнению движения в исходной форме (1), где второе слагаемое очевидным образом обращается в нуль, если $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. Следовательно, в вакуумном поле равен нулю также интеграл $\phi(\mathbf{T} \cdot d\mathbf{S})$ по любой замкнутой поверхности. Сей факт означает, что магнитная сила возникает только за счёт искажения магнитного поля плазмой.

§20.2. Анизотропное давление

До сих пор мы обсуждали плазму, в которой самым коротким было время между последовательными столкновениями частиц, за исключением, быть может, периода ларморовского вращения. Начиная с лекции 16 мы предполагали, что любой малый элемент плазмы релаксирует к максвелловскому распределению быстрее, чем изменялись его макроскопические свойства, что оправдывает локальное описание через параметры, характеризующие это максвелловское распределение. Такая упорядоченность времён допускает гидродинамическое приближение. С другой стороны, во многих важных случаях время межчастичных столкновений настолько велико, что столкновения можно не учитывать. Например, в термоядерном реакторе с магнитным удержанием плазму заведомо следует считать бесстолкновительной, так как длина свободного пробега многократно превышает размеры системы. К такой бесстолкновительной плазме гидродинамическое описание, как кажется на первый взгляд, неприменимо. Однако даже для слабых магнитных полей ларморовский период остаётся короче всех макроскопических времён, поэтому плазма двумерно упорядочена в любом направлении, перпендикулярном магнитному полю. Это обстоятельство открывает в ограниченных пределах возможность гидродинамического описания даже бесстолкновительной плазмы.

Поскольку в плазме с редкими столкновениями обмен энергиями между степенями свободы не происходит, давление $p_{||}$ вдоль магнитного поля \mathbf{B} может отличаться от давления p_{\perp} поперёк \mathbf{B} . В системе декартовых координат, где магнитное поле направлено вдоль оси z , тензор

давления записывается диагональной матрицей

$$P_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где p_{\perp} называют *поперечным*, а p_{\parallel} — *продольным* давлением плазмы. Недиагональные элементы тензора давления малы, поскольку распределение электронов и ионов обладает осевой симметрией относительно направления магнитного поля из-за быстрого ларморовского вращения частиц, которое неизбежно приводит к размешиванию по фазе вращения (например, из-за небольшой неоднородности магнитного поля). Примером является плазма, где распределение частиц описывается бимаксвелловской функцией

$$f = \frac{n}{(2\pi/m)^{3/2} T_{\perp} T_{\parallel}^{1/2}} \exp\left(-\frac{mv_x^2 + mv_y^2}{2T_{\perp}} - \frac{mv_z^2}{2T_{\parallel}}\right)$$

(задача 1). В произвольно ориентированной системе координат по аналогии с $T_{\mu\nu}$ имеем

$$P_{\mu\nu} = p_{\perp}(\delta_{\mu\nu} - h_{\mu}h_{\nu}) + p_{\parallel}h_{\mu}h_{\nu}, \quad (10)$$

где $p_{\perp} = nT_{\perp}$, $p_{\parallel} = nT_{\parallel}$.

Уравнение движения анизотропной плазмы получается при подстановке формул (6) и (10) в уравнение (2):

$$\rho \frac{dV_{\mu}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} [(p_{\perp} + p_m)(\delta_{\mu\nu} - h_{\mu}h_{\nu}) + (p_{\parallel} - p_m)(h_{\mu}h_{\nu})]. \quad (11)$$

В векторных обозначениях сила в его правой части выражается через градиенты вдоль ($\nabla_{\parallel} = \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \nabla)$) и поперёк ($\nabla_{\perp} = \nabla - \nabla_{\parallel}$) магнитного поля, а также вектор кривизны магнитных силовых линий $\kappa = (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h}$. Действительно, если дифференцировать первые множители (содержащие давление), получим

$$-(\delta_{\mu\nu} - h_{\mu}h_{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (p_{\perp} + p_m) - (h_{\mu}h_{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (p_{\parallel} - p_m),$$

что составляет проекцию вектора

$$-\nabla_{\perp}(p_{\perp} + p_m) - \nabla_{\parallel}(p_{\parallel} - p_m)$$

на ось x_μ . Дифференцирование вторых множителей даёт

$$(2p_m + p_\perp - p_\parallel) \frac{\partial}{\partial x_\nu} (h_\mu h_\nu),$$

так как $\partial \delta_{\mu\nu} / \partial x_\nu = 0$. Производную в последнем выражении преобразуем с помощью уравнения $\partial B_\nu / \partial x_\nu = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, вытащив множитель $B_\nu = B h_\nu$, из-под знака дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} (h_\mu h_\nu) = B h_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{h_\mu}{B} = B (\mathbf{h} \cdot \nabla) \frac{h_\mu}{B}.$$

Здесь уже нетрудно распознать проекцию вектора

$$B(\mathbf{h} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{h}}{B} = (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} + B \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \frac{1}{B} = \boldsymbol{\kappa} - \frac{\nabla \parallel B}{B}.$$

Собирая слагаемые, замечаем, что $\nabla \parallel p_m$ сокращается с $-2p_m \nabla \parallel B/B$. В итоговом уравнении

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla_\perp \left(p_\perp + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \left(p_\perp - p_\parallel + \frac{B^2}{4\pi} \right) \boldsymbol{\kappa} - \nabla \parallel p_\parallel - (p_\perp - p_\parallel) \frac{\nabla \parallel B}{B} \quad (12)$$

первые два слагаемых справа описывают силы, действующие поперёк, а последние два — вдоль магнитного поля. Эквивалентная форма того же уравнения

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla_\perp p_\perp + (p_\perp - p_\parallel) \boldsymbol{\kappa} - \nabla \parallel p_\parallel - (p_\perp - p_\parallel) \frac{\nabla \parallel B}{B} + \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] \quad (13)$$

получается, если слагаемые, содержащие только магнитное поле, вернуть к исходному виду силы Ампера, как в уравнении (19.2).

§20.3. Адиабаты Чу—Голдбергера—Лоу

Чтобы замкнуть систему МГД-уравнений для анизотропной плазмы, необходимо найти замену уравнению (19.20в), которое подразумевает изотропию давления. Покажем, что величины p_\perp и p_\parallel подчиняются уравнениям состояния

$$\frac{d}{dt} \frac{p_\perp}{\rho B} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{p_\parallel B^2}{\rho^3} = 0, \quad (15)$$

которые верны, если сохраняются адиабатические инварианты μ и J_{\parallel} (лекция 6).

Поперечное давление p_{\perp} пропорционально квадрату поперечной скорости v_{\perp}^2 , усреднённому по всем частицам, и плотности плазмы ρ . Вследствие инвариантности $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ величина v_{\perp}^2 пропорциональна B , поэтому

$$p_{\perp} \propto \rho v_{\perp}^2 \propto \rho B,$$

что подтверждает уравнение (14).

Инвариантность J_{\parallel} означает, что сохраняется величина $v_{\parallel}l$, где l — протяженность трубки плазмы вдоль магнитной силовой линии. В рассматриваемом случае $l \propto B/\rho$. Действительно, масса плазмы в магнитной трубке $M = \rho l S$ сохраняется, как и поток магнитного поля $\Phi = BS$ через сечение трубы S , поэтому $\rho l/B = M/\Phi = \text{const}$. Следовательно, $v_{\parallel} \propto 1/l \propto \rho/B$ и продольное давление

$$p_{\parallel} \propto \rho v_{\parallel}^2 \propto \rho^3/B^2,$$

что подтверждает уравнение (15). Уравнения (14) и (15) называют *адиабатами Чу—Голдбергера—Лоу* [68]. Математически строгим методом их можно получить, составив третий момент бесстолкновительного кинетического уравнения (задача 11).

Адиабаты Чу—Голдбергера—Лоу (ЧГЛ) могут быть истолкованы следующим образом. При сжатии плазмы в направлении магнитного поля величина B не изменяется, поэтому из уравнения (15) следует, что $p_{\parallel} \propto \rho^3$, т. е. продольное давление связано с плотностью плазмы политропой с показателем $\gamma = 3$, как в системах с одной степенью свободы. При сжатии плазмы в направлении, перпендикулярном магнитному полю, согласно условию вмороженности $B \propto \rho$ и уравнение (14) интерпретируется как политропа $p_{\perp} \propto \rho^2$ с показателем $\gamma = 2$, как в системе.

Простота уравнений (14) и (15) обеспечила популярность теории Чу—Голдбергера—Лоу. Однако жёсткие требования к условиям сохранения адиабатических инвариантов μ и особенно J_{\parallel} сильно ограничивают пределы её применимости, когда необходимы точные результаты. С другой стороны, уравнения Чу—Голдбергера—Лоу иногда используются для решения задач за пределами их применимости. Примером задачи, где теория Чу—Голдбергера—Лоу даёт количественно неверный результат, служит вычисление критерия устойчивости относительно зеркальной неустойчивости в однородной замагниченной плазме (§25.5).

§20.4. Консервативная форма МГД-уравнений

Говорят, что уравнения записаны в консервативной форме, если производная по времени от какой-либо величины выражена через дивергенцию соответствующего потока. Консервативная форма уравнений идеальной магнитной гидродинамики в координатном представлении выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\rho V_\nu), \quad (16a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho V_\mu = -\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\rho V_\mu V_\nu + p\delta_{\mu\nu} + \frac{B^2}{8\pi}\delta_{\mu\nu} - \frac{B_\mu B_\nu}{4\pi}\right), \quad (16b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{8\pi}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\rho V^2 \mathbf{V}}{2} + \frac{\gamma p \mathbf{V}}{\gamma - 1} + \frac{[\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]]}{4\pi}\right)_\nu, \quad (16b)$$

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_\nu}(B_\mu V_\nu - V_\mu B_\nu). \quad (16g)$$

В векторной записи те же уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}), \quad (17a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathbf{V} = -\nabla \cdot \left(\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I} + \frac{B^2}{8\pi} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{4\pi}\right), \quad (17b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{8\pi}\right) = -\nabla \cdot \left(\frac{\rho V^2 \mathbf{V}}{2} + \frac{\gamma p \mathbf{V}}{\gamma - 1} + \frac{[\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]]}{4\pi}\right), \quad (17b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{B} \mathbf{V} - \mathbf{V} \mathbf{B}). \quad (17g)$$

Здесь \mathbf{I} обозначает единичный тензор второго ранга с компонентами $I_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, которые выражаются символом Кронекера $\delta_{\mu\nu}$; \mathbf{ab} есть прямое (диадное) произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , причём $(\mathbf{ab})_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu$. Уравнение непрерывности чаще всего записывают именно в консервативной форме (17a), и мы уже не раз её использовали. Выводу уравнений (17b)–(17g) посвящены задачи 6–8. Заметим, что уравнение переноса тепла (17b) с учётом других уравнений МГД эквивалентно более простому уравнению состояния (19.20b), которое в консервативной форме принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^{\gamma-1}} = -\operatorname{div}\left(\frac{p \mathbf{V}}{\rho^{\gamma-1}}\right) \quad (17b')$$

(задача 9).

В случае плазмы с анизотропным давлением, которое изменяется, как предписано адиабатами Чу—Голдбергера—Лоу, уравнения (17б) и (17в) подлежат замене. В уравнении (17б) достаточно заменить \mathbf{pI} на тензор давления \mathbf{P} . Дополнительно можно заменить входящее в это уравнение выражение для тензора напряжений магнитного поля его обозначением \mathbf{T} :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + \mathbf{P} + \mathbf{T}). \quad (18б)$$

Аналог уравнения (17в) для анизотропной плазмы получен в задаче 8:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{\text{Tr} \mathbf{P}}{2} + \text{Tr} \mathbf{T} \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{\text{Tr} \mathbf{P}}{2} + \text{Tr} \mathbf{T} \right) \mathbf{V} + (\mathbf{P} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{V} \right]. \quad (18в)$$

Здесь Tr обозначает след тензора второго ранга. В частности,

$$\frac{\text{Tr} \mathbf{P}}{2} = \frac{P_{\alpha\alpha}}{2} = p_{\perp} + \frac{p_{\parallel}}{2}, \quad \text{Tr} \mathbf{T} = T_{\alpha\alpha} = \frac{B^2}{8\pi}.$$

Интегрируя любое из уравнений (16), (17) или (18) по объёму выделенной неподвижной области с помощью теоремы Остроградского—Гаусса, можно убедиться, что его правая часть представляет собой поток массы, импульса, энергии либо магнитного поля через границу данной области. Например, из уравнения непрерывности (16а) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d^3x = - \oint \rho V_\nu dS_\nu, \quad (19)$$

причём частную производную $\partial/\partial t$ слева можно заменить на субстанциональную производную d/dt , поскольку интеграл уже не зависит от координат (по ним выполнено интегрирование). Отсюда видно, что ρV_ν есть ν -компоненты потока массы. Аналогичным образом из уравнения движения (16б) в консервативной форме следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho V_\mu d^3x = - \oint \left(\rho V_\mu V_\nu + p \delta_{\mu\nu} + \frac{B^2}{8\pi} \delta_{\mu\nu} - \frac{B_\mu B_\nu}{4\pi} \right) dS_\nu, \quad (20)$$

где подынтегральное выражение в правой части имеет смысл тензора потока импульса. Действительно, мы знаем (см. §16.2), что $\Pi_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu + p \delta_{\mu\nu}$ представляет собой тензор потока импульса, связанного с движением частиц плазмы, а $T_{\mu\nu} = (B^2/8\pi) \delta_{\mu\nu} - B_\mu B_\nu / 4\pi$ есть тензор напряжений магнитного поля (§20.1).

Уравнение (17в) имеет особое название — *уравнение переноса энергии*. Оно показывает, что плотность энергии плазмы в магнитном поле

состоит из трёх частей: кинетической энергии $\rho V^2/2$, внутренней энергии плазмы $p/(\gamma - 1)$ и энергии магнитного поля $B^2/8\pi$. Поток энергии также составляют три части: поток кинетической энергии $\rho V^2 \mathbf{V}/2$, поток тепловой энергии $\gamma p \mathbf{V}/(\gamma - 1)$ и вектор Пойнтинга $(c/4\pi)[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$, который с учётом формулы (19.18) равен $(c/4\pi)[\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]]$.

Другая версия уравнения переноса энергии — уравнение (18в) — позволяет интерпретировать величину

$$W = \frac{\rho V^2}{2} + \frac{\text{Tr}\mathbf{P}}{2} + \text{Tr}\mathbf{T} = \frac{\rho V^2}{2} + p_\perp + \frac{p_\parallel}{2} + \frac{B^2}{8\pi} \quad (21)$$

как энергию, заключённую в единице объёма анизотропной плазмы. Согласно (18в) энергия выделенного объёма плазмы изменяется за счёт выноса энергии при вытекания плазмы со скоростью \mathbf{V} через поверхность этого объёма и работы $\mathbf{V} \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{T})$ над вытекающей плазмой. Стоит заметить, что тензор давления и тензор напряжений магнитного поля не вполне симметрично входят в выражение (21) для W . Это не должно вызывать удивление, поскольку связь между энергией и следом тензора кажется случайной. Для электромагнитного поля утверждение $W = T_{\alpha\alpha}$ следует из равенства нулю следа 4-мерного тензора энергии-импульса. Для тепловой энергии соотношение $W = \frac{1}{2} P_{\alpha\alpha}$ следует из определения тензора давления.

Консервативные формы уравнений идеальной МГД особенно полезны при численных расчётах. Например, можно записать эти уравнения в конечных разностях так, что в процессе изменения переменных во времени они будут строго сохранять полную массу, импульс, полную энергию, поток магнитного поля, несмотря на то, что разностные уравнения лишь приближённо моделируют операцию дифференцирования.

§20.5. Границные условия на поверхности разрыва

Консервативная форма уравнений особенно полезна для выявления естественных граничных условий, которые позволяют рассматривать исследуемую систему как изолированную. Систему можно считать изолированной, если суммарный поток каждой величины через замкнутую поверхность, окружающую систему, как в формулах (19) и (20), равен нулю.

На поверхности разрыва, где какая-либо величина меняется скачком, как плотность или давление плазмы на её границе с вакуумом,

должны быть непрерывны нормальные к поверхности компоненты потоков. В частности, интегрируя уравнение непрерывности (16а) по малой окрестности границы, нетрудно доказать, что на границе (в системе отсчёта, где она неподвижна) должна быть непрерывна нормальная к границе компонента вектора ρV :

$$\llbracket \rho V_n \rrbracket = 0. \quad (22\text{a})$$

Здесь и далее при помощи двойных квадратных скобок мы обозначаем разность потоков (в данном случае — ρV_n) с внешней и внутренней стороны границы плазмы, а индексом n помечаем нормальные компоненты. Из уравнений (16б)–(16г) следуют граничные условия

$$\left[\left[\rho V_\mu V_n + \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \delta_{\mu n} - \frac{B_\mu B_n}{4\pi} \right] \right] = 0, \quad (22\text{б})$$

$$\left[\left[\frac{\rho V^2}{2} V_n + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} V_n + \frac{1}{4\pi} (B^2 V_n - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) B_n) \right] \right] = 0, \quad (22\text{в})$$

$$\llbracket B_\mu V_n - V_\mu B_n \rrbracket = 0. \quad (22\text{г})$$

Как было отмечено в §20.4, вместо громоздкого уравнения переноса энергии (16в) можно использовать эквивалентное ему уравнение политропы (17в') в консервативной форме, из которого следует граничное условие

$$\left[\left[\frac{p V_n}{\rho^{\gamma-1}} \right] \right] = 0, \quad (22\text{д})$$

которое заметно проще условия (22в). Дополнительно нужно учесть условие

$$\llbracket B_n \rrbracket = 0, \quad (23)$$

которое следует из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. В важном частном случае, когда граница плазмы образована магнитными силовыми линиями, нужно считать, что нормальная к границе компонента магнитного поля равна нулю с обеих сторон границы, т. е.

$$B_n = 0. \quad (24)$$

Если к тому же отсутствует поток плазмы через границу, то

$$V_n = 0. \quad (25)$$

Примером может служить описание участка границы плазмы с вакуумом в системе отсчёта, где участок неподвижен. При дополнительных предположениях (24) и (25) условия (22а), (22в), (22г), (22д) и (23) выполняются автоматически, а из (22б) получаем условие

$$\left[\left[p + \frac{B^2}{8\pi} \right] \right] = 0. \quad (26)$$

Оно означает, что сумма давления плазмы и давления магнитного поля одинакова по обе стороны поверхности разрыва.

§20.6. *Холловская магнитная гидродинамика

По сравнению с обобщённым законом Ома (18.21), который сформулирован в §18.4, в его упрощённой версии

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (27)$$

принятой в идеальной МГД (уравнение (19.18) в §19.3), отсутствует цеплый ряд слагаемых, в том числе последнее слагаемое в правой части (18.21). Как сказано в §18.5, оно описывает Холловское электрическое поле

$$\mathbf{E}_H = \varrho_{\wedge}[\mathbf{h} \times \mathbf{J}] \approx \frac{1}{e_e n_e c}[\mathbf{B} \times \mathbf{J}] = \frac{1}{c}[\mathbf{B} \times (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)]. \quad (28)$$

Легко представить ситуацию, когда другие слагаемые в правой части (18.21) малы. Например, в плазме с холодными электронами равно нулю первое слагаемое (включающее градиент электронного давления и термосилу), а при достаточно большой электропроводности плазмы будут малы второе и третье слагаемые ($\varrho_{||} \rightarrow 0$, $\varrho_{\perp} \rightarrow 0$). Последнее же слагаемое в замагниченной плазме имеется всегда, и оно тем больше, чем больше магнитное поле. Оставляя только это слагаемое в правой части обобщённого закона Ома и учитывая, что $\mathbf{u}_i = \mathbf{V}$, заключаем, что холловское электрическое поле (28) нужно прибавить к «идеальному» полю (27). В результате получаем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] \quad (29)$$

вместо (19.18) и

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] \quad (30)$$

вместо (19.27). Последнее уравнение означает, что вследствие эффекта Холла магнитное поле вмороожено в электронную компоненту плазмы, а не в ионную, как в модели идеальной МГД.

Версию одножидкостной магнитной гидродинамики, которая включает эффект Холла, называют холловской (ХМГД). Чтобы составить соответствующую ей систему уравнений, исключим скорость электронов из уравнения (30) при помощи цепочки равенств

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{V} + \frac{\mathbf{J}}{e_e n_e} = \mathbf{V} + \frac{c \operatorname{rot} \mathbf{B}}{4\pi e_e n_e}.$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \left[\left(\mathbf{V} + \frac{c}{4\pi e_e n_e} \operatorname{rot} \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} \right]. \quad (31)$$

Другие уравнения заимствуются из системы идеальной магнитной гидродинамики.

Физическая значимость предела ХМГД отмечалась достаточно давно, например в статье [22], однако термин «холловская МГД» был введен, по-видимому, Л. Тёрнером (Leaf Turner) в 1986 году [69]. Различие между идеальной и холловской магнитной гидродинамикой, очевидно, несущественно, если скорость электронов близка к скорости ионов. Кроме того, электрическое поле Холла (28) перпендикулярно \mathbf{J} и поэтому не связано с диссипацией энергии, что до некоторой степени оправдывает использование простейшей формы закона Ома (19.18) в теории идеальной МГД. Однако в некоторых случаях учёт эффекта Холла приводит к качественно иным предсказаниям теории (задача 12).

Литература

Для углублённого изучения одножидкостной магнитной гидродинамики можно рекомендовать статью Р. Калсруда (Russell Kulsrud) в сборнике «Основы физики плазмы» [25], а также монографию «МГД-неустойчивости» Г. Бейтмана (Glenn Bateman) [6]; её вторая глава является прекрасным введением в тему лекции.

Эффект Холла и его связь с явлением вморооженности магнитного поля в плазму рассматриваются в §4.2 учебника Б. Б. Кадомцева «Коллективные явления в плазме» [28].

Применение магнитной гидродинамики к описанию некоторых явлений в бесстолкновительной плазме обосновано в статье Т. Ф. Волкова

[18] в 4-м томе «Вопросов теории плазмы» и в монографии Дж. Фридберга (Jeffrey Freidberg) «Ideal Magnetohydrodynamics» [8, §2.5].

Задачи и вопросы

Задача 1. Вычислите тензор давления в плазме с бимаксвелловским распределением частиц.

Задача 2. Функция распределения «плещущихся» ионов, которые образуются при наклонной инжекции высокоэнергетичных атомарных пучков в относительно холодную мишленную плазму, приближённо равна

$$f(\varepsilon, \mu) = \frac{N}{\sqrt{\varepsilon}} \delta\left(\mu - \frac{\sin^2 \theta_0}{B_0} \varepsilon\right),$$

где $\varepsilon = mv^2/2$ — энергия ионов ($\varepsilon < \varepsilon_0$), $\mu = mv_\perp^2/2B$ — их магнитный момент, θ_0 — угол инжекции, B_0 — магнитное поле в месте входа пучка в плазму, N — нормировочный множитель, δ — дельта-функция. Найдите давление $p_\perp(B)$ и $p_\parallel(B)$ «плещущихся» ионов в зависимости от напряжённости магнитного поля.

Задача 3. Выведите уравнение (13), вычислив сумму дрейфового, диамагнитного и поляризационного токов в плазме при помощи усреднения скорости дрейфа заряженных частиц в неоднородном переменном магнитном поле.

Решение $\Rightarrow 290$

Задача 4. Вычислите производную по времени интеграла $\int_U f(\mathbf{x}, t) d^3x$ по жидкому объёму U , который движется в поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$.

Ответ $\Rightarrow 292$

Задача 5. Вычислите производную по времени интеграла $\int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S}$ по поверхности S , натянутой на жидкий контур l , который движется в поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$.

Ответ $\Rightarrow 292$

Задача 6. Перепишите уравнение движения (19.206) в консервативной форме (166).

Решение $\Rightarrow 292$

Задача 7. Выведите уравнение переноса энергии (16в) в изотропной плазме и объясните смысл каждого его члена. Как изменить это уравнение, чтобы оно было совместимо с системой уравнений резистивной МГД (19.17)?

Решение $\Rightarrow 292$

Задача 8. Выведите уравнение переноса магнитного потока (16г) в консервативной форме и вычислите производную dB/dt .

[Решение](#) ⇒ 294

Задача 9. Запишите уравнение политропы (19.20в) в консервативной форме.

[Решение](#) ⇒ 295

Задача 10. Обобщая решение задачи 7, выведите уравнение переноса энергии (18в) в анизотропной плазме, предположив, что состояние плазмы описывается адиабатами Чу—Голдбергера—Лоу.

[Решение](#) ⇒ 295

Задача 11. Получите адиабаты Чу—Голдбергера—Лоу, составив моменты бесстолкновительного кинетического уравнения.

[Решение](#) ⇒ 298

Задача 12. Покажите, что уравнение (31) описывает образование ударной волны в задаче о проникновении магнитного поля в неоднородную плазму (нелинейный скин-эффект).

[Решение](#) ⇒ 300

Лекция 21

Равновесие плазмы

Теорема вириала. Равновесие изотропной плазмы.

Равновесие анизотропной плазмы. Плазма как диамагнетик

В реальных условиях плазма редко бывает спокойной. В ней легко возникают колебания разного рода. Но прежде чем начать их изучение, полезно взглянуть на состояние равновесия, когда плазма находится в покое. Разумеется, можно представить себе неограниченную однородную плазму, заполняющую всё пространство и находящуюся в глобальном термодинамическом равновесии. Такая предельная идеализация часто используется при теоретическом анализе колебаний плазмы. Если же отойти от умозрительных построений, следует признать, что реальная плазма всегда неоднородна и ограничена в пространстве. Она может находиться в покое, только если имеются силы, препятствующие её разлёту. В космическом пространстве плазму удерживает собственное гравитационное поле звёзд, а в лаборатории — сила Ампера со стороны внешнего магнитного поля. Данный факт имеет строгое обоснование в форме теоремы вириала. Изучение равновесных конфигураций плазмы начнём с доказательства этой теоремы.

§21.1. Теорема вириала

Умножим уравнение движения плазмы

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V_\mu = - \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\rho V_\mu V_\nu + P_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}), \quad (1)$$

записанное в консервативной форме, на x_μ и проинтегрируем по всему доступному объёму. Пусть система находится в стационарном состоянии, тогда производная по времени равна нулю и, следовательно,

$$\int x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\rho V_\mu V_\nu + P_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) d^3x = 0.$$

Интегрируя по частям, выделим интеграл по поверхности, окружающей систему:

$$\begin{aligned} & \int x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\rho V_\mu V_\nu + P_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) d^3x = \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x_\nu} [x_\mu (\rho V_\mu V_\nu + P_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})] d^3x - \int \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu} (\rho V_\mu V_\nu + P_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) d^3x = \\ &= \oint [x_\mu (\rho V_\mu V_\nu + P_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})] dS_\nu - \int (\rho V_\mu V_\mu + P_{\mu\mu} + T_{\mu\mu}) d^3x = 0. \end{aligned}$$

Так как на большом расстоянии от плазмы её собственное магнитное поле достаточно быстро убывает, поверхностный интеграл стремится к нулю, если в область интегрирования включить достаточно большой объём. Пренебрегая этим интегралом, заключаем, что

$$\int (\rho V_\mu V_\mu + P_{\mu\mu} + T_{\mu\mu}) d^3x = \int \left(\rho V^2 + 2p_\perp + p_\parallel + \frac{B^2}{8\pi} \right) d^3x = 0. \quad (2)$$

Поскольку все члены в подынтегральном выражении положительны, равенство интеграла нулю невозможно. Это означает, что изолированная система не может находиться в равновесии. Данное утверждение известно как *теорема вириала* (В. Д. Шафранов, 1963) [16]. Учёт отброшенного поверхностного интеграла делает равенство возможным, но в таком случае система не может считаться изолированной.

Выражение «вириал» происходит от латинских слов «vis», «viris» — «сила» или «энергия». Оно было введено Р. Клаузиусом (Rudolf Clausius) в 1870 году [70]. В механике теорема вириала связывает среднюю кинетическую энергию со средней потенциальной энергией. Та же теорема вириала предсказывает, что собственное гравитационное поле звёзд способно длительное время удерживать сферические скопления плазмы (задача 1). Напротив, собственное магнитное поле не способно удержать плазму от разлёта, поэтому для удержания плазмы в лабораторных условиях используют внешнее магнитное поле, созданное токами в медных или сверхпроводящих магнитных катушках.

§21.2. Равновесие изотропной плазмы

Говоря о равновесии, обычно подразумевают состояние, в котором плазма неподвижна и $\mathbf{V} = 0$. Согласно уравнению (19.2) такое равно-

весие возможно только в том случае, если градиент давления уравновешен силой Ампера:

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{J}, \mathbf{B}]. \quad (3)$$

Наличие тока \mathbf{J} в равновесии, строго говоря, делает представление о неподвижной плазме условным, так как электроны должны двигаться, чтобы создавать ток, даже если ионы неподвижны.

Магнитное поле \mathbf{B} и плотность тока \mathbf{J} связаны уравнением

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (4)$$

и, кроме того,

$$\text{div } \mathbf{J} = 0, \quad (5)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (3) вытекают равенства

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla p) = 0, \quad (\mathbf{J} \cdot \nabla p) = 0, \quad (7)$$

которые можно рассматривать как условия постоянства давления вдоль магнитных силовых линий и линий тока: по этим направлениям сила Ампера не действует, и плазма может свободно расширяться вдоль направлений \mathbf{B} и \mathbf{J} . Вместе с тем условия (7) означают, что силовые линии и линии тока должны лежать на поверхностях $p = \text{const}$.

Поверхности $p = \text{const}$ называют *магнитными поверхностями*. Если пытаться изолировать плазму от стенок магнитным полем — а такая проблема возникла в связи с поисками путей достижения управляемого термоядерного синтеза, — то магнитные поверхности должны быть замкнуты и вложены друг в друга так, чтобы на границе плазмы давление обращалось в нуль, достигая максимального значения внутри неё. Уложить на эти поверхности силовые линии и линии тока так, чтобы нигде не возникало особых точек (таких как «протыкание» магнитной поверхности проводником с током), можно только в том случае, если они представляют собой систему вложенных друг в друга тороидальных поверхностей. Таким образом, поиск равновесных конфигураций изотропной плазмы приводит к задаче о равновесии в торе, которая будет рассмотрена в лекции 23. Если имеются «открытые» магнитные силовые линии, которые уходят на бесконечность, как в пробкотроне, то на

бесконечность уходят и магнитные поверхности, вследствие чего удержание плазмы в ограниченном объёме будет невозможно. Между тем известно (см. §6.4), что отдельные заряженные частицы могут удерживаться в пробкотроне. Вот только плазма в пробкотроне не изотропна.

§21.3. Равновесие анизотропной плазмы

В системах магнитного удержания плазмы типа пробкотрон из-за наличия конуса потерь обычно $p_\perp > p_\parallel$. Подставляя $\mathbf{V} = 0$ в уравнение (20.12), получим уравнение равновесия анизотропной плазмы:

$$-\nabla_\perp \left(p_\perp + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \left(p_\perp - p_\parallel + \frac{B^2}{4\pi} \right) \boldsymbol{\kappa} - \nabla_\parallel p_\parallel - (p_\perp - p_\parallel) \frac{\nabla_\parallel B}{B} = 0, \quad (8)$$

где $\nabla_\parallel = \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \nabla)$, $\nabla_\perp = \nabla - \nabla_\parallel$, $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ – единичный вектор, касательный к магнитной силовой линии, а $\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h}$ – вектор кривизны.

Введём единичный вектор нормали к магнитной силовой линии

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\kappa}/\kappa, \quad (9)$$

где $\kappa = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\kappa})$ есть проекция вектора кривизны на направление вектора нормали, и вектор бинормали

$$\mathbf{b} = [\mathbf{h} \times \mathbf{n}]. \quad (10)$$

Триада $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{h}\}$ составляет правую ортонормированную тройку векторов (см. также §5.2), и наряду с (10) имеют место также равенства

$$\mathbf{h} = [\mathbf{n} \times \mathbf{b}], \quad \mathbf{n} = [\mathbf{b} \times \mathbf{h}]. \quad (11)$$

Заметим, что вектор нормали определён с точностью до знака, поскольку при замене $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ величина $\boldsymbol{\kappa}$ также меняет знак, $\boldsymbol{\kappa} \rightarrow -\boldsymbol{\kappa}$, сохранив вектор кривизны $\boldsymbol{\kappa} \equiv (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h} = \mathbf{x}\mathbf{n}$. Неоднозначность обычно устраивается тем, что направление вектора нормали выбирают так, чтобы он был направлен преимущественно от плазмы наружу; при этом величина проекции $\boldsymbol{\kappa}$ вектора кривизны на направление нормали может быть как больше, так и меньше нуля. Уравнение равновесия (8) полезно записать в проекциях на выбранную таким способом тройку векторов:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(p_\perp + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \left(p_\perp - p_\parallel + \frac{B^2}{4\pi} \right) \boldsymbol{\kappa}, \quad (12a)$$

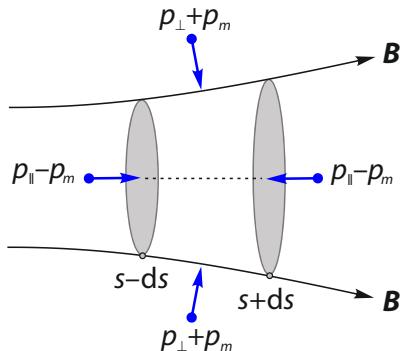


Рис. 1. К выводу уравнения (12в). Сумма пары сил $(p_{\parallel} - p_m)S_{\parallel}$, которые действуют на торцы выделенного элемента плазменной трубы при $s \pm ds$, в равновесии уравновешивается проекцией на осевую магнитную силовую линию силы $\int_{S_{\perp}} (p_{\perp} + p_m) dS$, которая действует на боковую стенку трубы.

$$\frac{\partial}{\partial b} \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0, \quad (12б)$$

$$\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial s} = -\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B} \frac{\partial B}{\partial s}, \quad (12в)$$

где

$$\partial/\partial n = (\mathbf{n} \cdot \nabla), \quad \partial/\partial b = (\mathbf{b} \cdot \nabla), \quad \partial/\partial s = (\mathbf{h} \cdot \nabla)$$

обозначают производные по направлению нормали \mathbf{n} , бинормали \mathbf{b} и касательный \mathbf{h} к магнитной силовой линии соответственно. Из уравнения (12а) следует, что производная по нормали от суммарного поперечного давления плазмы и магнитного поля пропорциональна кривизне магнитной силовой линии, причём $\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\kappa})$, тогда как производная по направлению бинормали (12б) всегда равна нулю. Из уравнения (12в) следует, что продольное давление p_{\parallel} уменьшается вдоль магнитной силовой линии при увеличении магнитного поля по мере приближения к магнитной пробке.

Покажем, как уравнения (12) можно вывести с помощью наглядных рассуждений. Рассмотрим сначала проекцию (12в) на направление магнитного поля. На рисунке 1 показан короткий отрезок плазменной трубы (поверхность которой образована магнитными силовыми линиями) небольшой длины $2ds$ и с небольшим переменным сечением S_{\parallel} . Вводя обозначения

$$P_{\perp} = p_{\perp} + p_m, \quad P_{\parallel} = p_{\parallel} - p_m, \quad p_m = \frac{B^2}{8\pi},$$

с помощью этого рисунка запишем проекцию суммарной силы, которая действует на изображённый элемент плазменной трубы, на направле-

ние вектора \mathbf{h} :

$$-\left[P_{\parallel}(s) S_{\parallel}(s) \right]_{s-ds}^{s+ds} + \mathbf{h} \cdot \int_{S_{\perp}} (-P_{\perp} d\mathbf{S}) = 0.$$

Здесь первое слагаемое есть разность сил, действующих на торцы выделенного элемента, а второе слагаемое есть сила, которую создаёт давление на его боковые стенки. Так как

$$\int \nabla p d^3x = \oint p d\mathbf{S} = p \oint d\mathbf{S} = 0$$

для любой постоянной функции $p = \text{const}$, а давление P_{\perp} на поверхности трубы достаточно малого размера почти постоянно, заключаем, что приближённо

$$-\mathbf{h} \cdot \int_{S_{\perp}} P_{\perp} d\mathbf{S} \approx -P_{\perp}(s) \mathbf{h} \cdot \int_{S_{\perp}} d\mathbf{S} = P_{\perp}(s) \mathbf{h} \cdot \int_{S_{\parallel}} d\mathbf{S} = P_{\perp}(s) \left[S_{\parallel}(s) \right]_{s-ds}^{s+ds}.$$

Так как магнитный поток $B(s) S_{\parallel}(s)$ через сечение трубы сохраняется, $S_{\parallel}(s) = \text{const} / B(s)$ и поэтому

$$-\left[\frac{P_{\parallel}(s)}{B(s)} \right]_{s-ds}^{s+ds} + P_{\perp}(s) \left[\frac{1}{B(s)} \right]_{s-ds}^{s+ds} = 0.$$

Переходя в этом выражении к пределу $ds \rightarrow 0$, получаем уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial s} \frac{P_{\parallel}}{B} + P_{\perp} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{B} = 0,$$

которое, как легко проверить, тождественно уравнению (12в).

Чтобы вывести уравнение (12а), обратимся к рисунку 2 и рассмотрим небольшой элемент плазменной трубы с прямоугольным сечением $S_{\parallel} = \Delta R \times \Delta b$, которая имеет средний радиус кривизны R и опирается на малый угол ϕ . Сумма пары сил $P_{\parallel} S_{\parallel}$, которые действуют на торцы выделенного элемента, имеет проекцию на нормаль к осевой магнитной силовой линии $\phi P_{\parallel} S_{\parallel}$. В равновесии эта проекция уравновешивается суммой сил $P_{\perp} r \Delta b$, которые действуют на боковые стенки плазменной трубы при $r = R \pm \Delta R/2$. Поэтому

$$-P_{\perp}(r) r \phi \Delta b \Big|_{r=R-\Delta R/2}^{r=R+\Delta R/2} + P_{\parallel} \phi \Delta R \Delta b = 0.$$

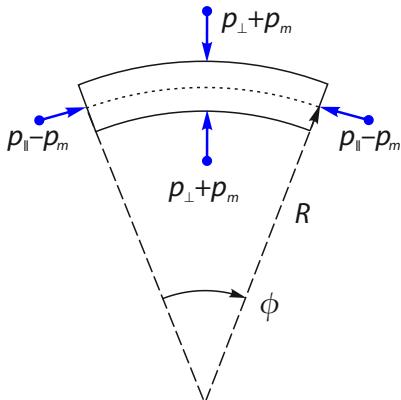


Рис. 2. К выводу уравнения (12а). Элемент плазменной трубки с сечением $S_{\parallel} = \Delta R \times \Delta b$ имеет средний радиус кривизны R и опирается на малый угол ϕ . Сумма пары сил $(p_{\parallel} - p_m)S_{\parallel}$, которые действуют на торцы выделенного элемента, имеет проекцию на нормаль к осевой магнитной силовой линии $\phi(p_{\parallel} - p_m)S_{\parallel}$. В равновесии эта проекция уравновешивается суммой сил $(p_{\perp} + p_m)\phi r \Delta b$, действующей на боковую стенку трубы при $r = R \pm \Delta R/2$.

Переходя в этом выражении к пределу $\Delta R \rightarrow 0$, получим уравнение

$$-\frac{\partial P_{\perp}}{\partial R} = \frac{P_{\perp} - P_{\parallel}}{R}.$$

Оно эквивалентно уравнению (12а), так как на рисунке 2 вектор кривизны направлен в сторону уменьшения радиуса R и поэтому $\partial/\partial n = -\partial/\partial R$.

Укажем ещё одну форму уравнения равновесия. Она получается из уравнения (20.13) при $\mathbf{V} = 0$:

$$-\nabla_{\perp} p_{\perp} + (p_{\perp} - p_{\parallel})\boldsymbol{\kappa} - \nabla_{\parallel} p_{\parallel} - (p_{\perp} - p_{\parallel})\frac{\nabla_{\parallel} B}{B} + \frac{1}{c}[\mathbf{J} \times \mathbf{B}] = 0. \quad (13)$$

Отсюда нетрудно выразить перпендикулярную магнитному полю компоненту плотности тока:

$$\mathbf{J}_{\perp} = \frac{c}{B} [\mathbf{h} \times \nabla p_{\perp}] - \frac{c(p_{\perp} - p_{\parallel})}{B} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}]. \quad (14)$$

Подход, применённый к анализу равновесия анизотропной плазмы, полезен и в случае изотропной плазмы. Соответствующие уравнения получаются из уравнений (12) при подстановке $p_{\perp} = p_{\parallel} = p$:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{B^2}{4\pi} \boldsymbol{\kappa}, \quad \frac{\partial}{\partial b} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial s} = 0. \quad (15)$$

В векторном виде они же означают, что

$$\nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{B^2}{4\pi} \boldsymbol{\kappa}, \quad \nabla_{\parallel} p = 0. \quad (16)$$

Кроме того,

$$\mathbf{J}_\perp = \frac{c}{B} [\mathbf{h} \times \nabla p], \quad (17)$$

причём ∇p , \mathbf{J}_\perp и \mathbf{B} составляют правую ортогональную тройку векторов.

Из первого уравнения (16) видно, что в конфигурации с прямыми магнитными силовыми линиями (где $\kappa = 0$) сумма давлений плазмы и магнитного поля является константой, т. е.

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const.} \quad (18)$$

Следовательно, магнитное поле меньше там, где больше давление плазмы, т. е. плазма является диамагнетиком. Искривление магнитного поля создаёт дополнительную силу в направлении вогнутости магнитных силовых линий вследствие их натяжения.

§21.4. Плазма как диамагнетик

Суммируя магнитные моменты

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{mv_\perp^2}{2B^2} \mathbf{B}$$

всех частиц в единице объёма плазмы, находим вектор намагниченности, который в обычных магнетиках отождествляют с магнитным моментом единицы объёма вещества:

$$\mathbf{M} = -\frac{p_\perp}{B^2} \mathbf{B}. \quad (19)$$

Здесь $p_\perp = \sum_a n_a \langle mv_\perp^2/2 \rangle_a$, как и прежде, обозначает давление плазмы поперёк магнитного поля. Ток намагничивания

$$\mathbf{J}_\mu = c \operatorname{rot} \mathbf{M} = -c \operatorname{rot} \left(\frac{p_\perp}{B^2} \mathbf{B} \right) \quad (20)$$

в физике плазмы принято называть *диамагнитным током*.

В электродинамике сплошных сред [71, §29] поле

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

называют напряжённостью магнитного поля в отличие от индукции магнитного поля \mathbf{B} . Однако в плазме определённое таким способом поле \mathbf{H} не имеет ясного смысла. Дело в том, что помимо тока намагничивания в плазме имеется ток, вызванный дрейфом заряженных частиц, тогда как в твёрдых магнетиках дрейф отсутствует.

В стационарном магнитном поле частицы дрейфуют со скоростью

$$\frac{d\mathbf{R}_\perp}{dt} = c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2} + \frac{v_\perp^2}{2\Omega_a} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_\parallel^2}{\Omega_a} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}], \quad (21)$$

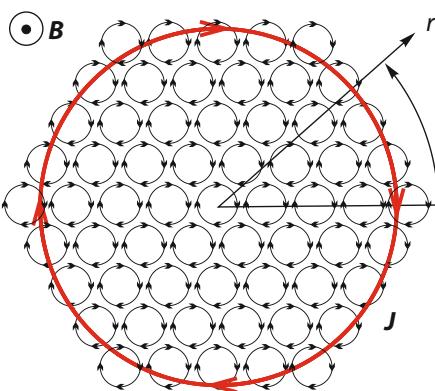
которая есть сумма скорости электрического (§4.3), градиентного (§5.1) и центробежного дрейфов (§5.2). Чтобы вычислить плотность тока, созданного дрейфовым движением, нужно умножить скорость дрейфа на плотность зарядов $e_a n_a$ частиц соответствующего сорта, выполнить суммирование по сортам частиц и усреднение по скоростям. При этом выясняется, что электрический дрейф (первое слагаемое в (21)) не создаёт ток, так как вклады электронов и ионов взаимно сокращаются вследствие квазинейтральности. Так как скорость градиентного дрейфа (второе слагаемое) пропорциональна квадрату поперечной скорости v_\perp , результат суммирования и усреднения будет пропорционален поперечному давлению плазмы $p_\perp = \sum_a n_a \langle mv_\perp^2/2 \rangle_a$. Наконец, ток, созданный центробежным дрейфом, будет пропорционален продольному давлению $p_\parallel = \sum_a n_a \langle mv_\parallel^2 \rangle_a$. Таким образом, дрейфовое движение создаёт ток с плотностью

$$\mathbf{J}_{\text{dr}} = \frac{cp_\perp}{B^2} [\mathbf{h} \times \nabla B] + \frac{cp_\parallel}{B} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}]. \quad (22)$$

Дрейфовый ток не может быть отождествлен ни с током проводимости (как в проводниках), ни с поляризационным током (как в диэлектриках), так как градиентный и центробежный дрейфы существуют в плазме даже без электрического поля, создавая новый вид тока, отсутствующий в обычных проводниках, диэлектриках и магнетиках. Как следствие, электродинамика плазмы строится на иных принципах, нежели электродинамика других сред. В сумме диамагнитный и дрейфовый токи дают ток (14), обеспечивающий равновесие анизотропной плазмы (задача 3).

Механизм формирования диамагнитного тока можно проиллюстрировать на простом примере. На рисунке 3 схематически изображены ларморовские токи в цилиндрическом плазменном столбе, внутри которого давление однородно. Внутри плазмы ларморовские токи взаимно

Рис. 3. Происхождение диамагнитного тока в плазме. Ларморовские токи в цилиндрическом столбе плазмы формируют кольцевой диамагнитный ток на её границе. Он уменьшает магнитное поле в плазме. Градиент магнитного поля ∇B на краю плазмы создаёт дрейфовый ток, который направлен против диамагнитного и частично компенсирует вызванное им уменьшение магнитного поля.



компенсируются, и поэтому $J_\mu = 0$. Однако вблизи границы формируется кольцевой ток вдоль периметра столба. Сила взаимодействия этого тока с магнитным полем уравновешивает разность давлений на границе плазменного столба. Одновременно тот же ток уменьшает магнитное поле внутри плазмы. Поскольку сумма давления плазмы и магнитного поля остаётся неизменной при переходе через границу плазмы, как это предписывает равенство (18), на границе возникают градиент магнитного поля ∇B и, как следствие, дрейфовый ток J_{dr} , который частично компенсирует диамагнитный ток. Для цилиндрического столба плазмы $J_{dr}/J_\perp = -4\pi p_\perp/B^2$, $J_\mu/J_\perp = 1 + 4\pi p_\perp/B^2$ (задача 4).

Мы вернёмся к обсуждению диамагнетизма плазмы в §22.2 при анализе равновесия плазмы в тета-пинче. В §22.4 будет показано, что при определённых условиях плазма в винтовом пинче может обладать свойствами парамагнетика.

Литература

Прекрасным введением в теорию равновесия плазмы является первая глава книги Б. Б. Кадомцева «Коллективные явления в плазме» [28]. Материал лекции соответствуют §2 и §3.

Монография «Ideal MHD» [13] Дж. Фридберга (Jeffrey Freidberg) содержит современное изложение теории равновесия и МГД-устойчивости плазмы в различных устройствах.

Задачи и вопросы

Задача 1. Докажите теорему вириала для механической системы частиц, в которой потенциал взаимодействия между каждой парой частиц пропорционален некоторой степени расстояния между частицами. Проверьте, что теорема вириала предсказывает устойчивое удержание плазмы собственным гравитационным полем звезды. [Решение ⇒ 302](#)

Задача 2. Вычислите диамагнитный ток в релятивистской плазме. [Решение ⇒ 303](#)

Задача 3. Проверьте формулу (14), вычислив сумму диамагнитного и дрейфового токов. [Решение ⇒ 303](#)

Задача 4. На примере θ -пинча вычислите отношение плотности дрейфового и диамагнитного токов к суммарной плотности тока. [Решение ⇒ 304](#)

Задача 5. Допустим, функция распределения удовлетворяет бесстолкновительному кинетическому уравнению и не зависит от времени. Вычислите для такой функции тензор давления. Будет ли он удовлетворять уравнениям равновесия? Верно ли обратное утверждение: если тензор давления удовлетворяет уравнениям равновесия, то функция распределения удовлетворяет стационарному кинетическому уравнению?

Задача 6. Можно ли уложить на линии тока и магнитного поля на поверхность постоянного давления, которая имеет форму шара? Форму тора?

Задача 7. Упростите уравнение (12a), считая магнитное поле вакуумным, то есть $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. [Решение ⇒ 305](#)

Задача 8. Вычислите кривизну магнитных силовых линий в параксиальном пробкотроне и убедитесь, что в уравнении (12a) можно пренебречь правой частью по сравнению с левой. [Решение ⇒ 305](#)

Лекция 22

Пинчи

**Равновесие в пинче. Диффузный и скинированный пинчи.
Тета-пинч. Зет-пинч. Соотношение Беннета.
Винтовой пинч. Бессиловые конфигурации.
Пинч с обращённым полем**

Изучение реально существующих равновесных конфигураций начнём с плазмы в цилиндре. На практике такое равновесие достигается в ограниченных по длине системах, но теоретически плазменный цилиндр (шнур, столб) удобно рассматривать как бесконечный по длине, пренебрегая явлениями на его торцах. При наличии цилиндрической симметрии в системе координат $\{r, \theta, z\}$ с осью z вдоль оси симметрии параметры плазмы зависят только от одной координаты r . Такие конфигурации являются примером одномерного равновесия и называются *пинчами*.

§22.1. Равновесие в пинче

Выражая компоненты плотности тока

$$J_\theta = -\frac{c}{4\pi} \frac{d}{dr} B_z, \quad J_z = \frac{c}{4\pi r} \frac{d}{dr} r B_\theta$$

из уравнения (21.4), радиальную проекцию

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{c} [J_\theta B_z - J_z B_\theta]$$

уравнения равновесия (21.3) приводим к виду

$$\frac{dp}{dr} + \frac{d}{dr} \frac{B_z^2}{8\pi} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \frac{r^2 B_\theta^2}{8\pi}. \quad (1)$$

Одно только уравнение (1) на три функции $p(r)$, $B_\theta(r)$ и $B_z(r)$ оставляет большой произвол в выборе параметров системы, поэтому существует большое разнообразие равновесных конфигураций. Два полюса этого разнообразия составляют *тета-пинч* (θ -пинч) и *зет-пинч* (Z -пинч). Так называют плазменные конфигурации с цилиндрической симметрией, в которых ток имеет только θ - или только z -компоненту. Тета-пинч создают, пропуская разрядный ток через цилиндрический проводник с продольным разрезом, окружающий столб газа, как показано на рисунке 1. Разряд ионизует газ, а продольное магнитное поле B_z сжимает образовавшуюся плазму. Зет-пинч образуется при пропускании разрядного тока непосредственно через столб газа, как показано на рисунке 2. Образовавшаяся плазма сжимается азимутальным магнитным полем этого тока. Пинч, в котором есть обе компоненты тока (и обе компоненты поля), называют *винтовым*.

Вторичной характеристикой пинчей служит радиальное распределение тока. Если ток течёт по тонкой шкурке плазмы, пинч называют *скинированным*. Если же ток распределён по сечению плазмы, такой пинч называют *диффузным*. Реальные пинчи (тета-, зет- и винтовые) скорее следует считать диффузными. Скинированный пинч — это идеализация, которая бывает полезна при теоретическом рассмотрении равновесия и устойчивости плазмы.

Эффект пинчевания тока, то есть стягивания собственным магнитным полем, известен с незапамятных времён. Считается, что в первый раз пинч-эффект был открыт в 1790 году голландцем Ван Марумом (*Martinus van Marum*) [72]. Однако объяснение эффекта пинчевания было найдено только в XX веке [73, 74], а сам термин «пинч» (англ. *pinch*) в физику плазмы, по-видимому, был введён Л. Тонксом (*Lewi Tonks*) в 1937 году [75].

§22.2. Тета-пинч

Пусть продольный ток J_z вдоль оси пинча отсутствует. Тогда $B_\theta = 0$. В этом случае плазма удерживается от разлёта в радиальном направлении благодаря азимутальному току J_θ , поэтому соответствующую конфигурацию называют θ -пинчем (тета-пинч). Интегрируя уравнение (1) при $B_\theta = 0$, получаем

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{B_{\text{vac}}^2}{8\pi} = \text{const}, \quad (2)$$

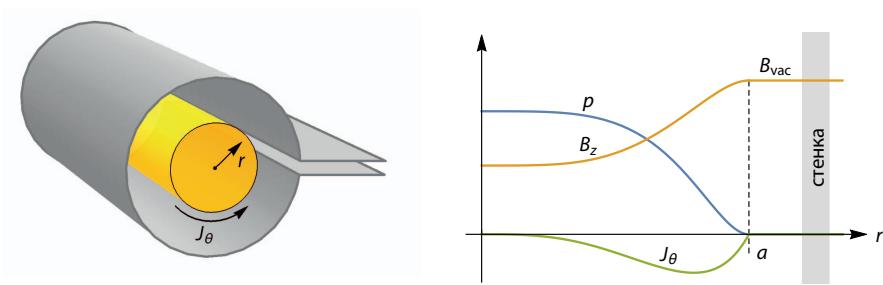


Рис. 1. Геометрия θ -пинча (слева) и равновесные профили давления, магнитного поля и плотности тока (справа). Импульсный ток в одновитковой катушке, окружающей газоразрядную камеру, создаёт азимутальное электрическое поле, которое ионизирует газ, и продольное магнитное поле, которое сжимает столб плазмы.

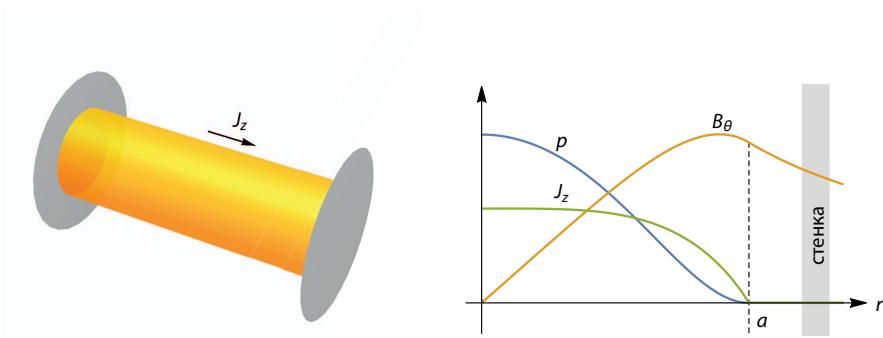


Рис. 2. Геометрия Z -пинча (слева) и равновесные профили давления, магнитного поля и плотности тока (справа). Импульс напряжения на торцевых электродах инициирует разряд в газе. Разрядный ток в плазме создаёт азимутальное магнитное поле, которое сжимает столб плазмы.

где $B = B_z$, а B_{vac} — поле вне плазмы. Тот же результат следует из уравнения (21.18), которое верно для любой конфигурации изотропной плазмы в магнитном поле с прямыми силовыми линиями. Он означает, что давление плазмы уравновешивается перепадом магнитного давления $B_{\text{vac}}^2/8\pi - B^2/8\pi$, а плазма обладает свойствами диамагнетика, так как в области, занятой плазмой, поле ослабевает (§21.4). Например, если $p = B_{\text{vac}}^2/8\pi$, то внутри плазмы магнитное поле вообще отсутствует. При $p > B_{\text{vac}}^2/8\pi$ равенство (2) не может быть выполнено. На практике это означает, что равновесие плазмы со свободной границей невозможно, если давление плазмы p превышает давление внешнего магнитного поля $B_{\text{vac}}^2/8\pi$.

В плазме с низким давлением $p \ll B^2/8\pi$ магнитное поле ослабляется на малую величину. Подставляя $B = B_{\text{vac}} + \delta B$ в уравнение (2) и пренебрегая слагаемым, пропорциональным $(\delta B)^2$, получаем

$$\delta B = -\frac{\beta}{2} B_{\text{vac}}, \quad (3)$$

где

$$\beta = \frac{8\pi p}{B_{\text{vac}}^2}. \quad (4)$$

При этом в уравнении равновесия

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{c} J_\theta B_z \quad (5)$$

величину $B_z = B \approx B_{\text{vac}}$ можно приблизительно считать константой. Если к тому же давление плазмы внутри шнуря однородно, а затем быстро убывает до нуля на его границе, то весь ток сосредоточен на поверхности плазмы. Величину поверхностного тока $I_s = \int J_\theta dr$ легко найти, если проинтегрировать уравнение (5) по малой окрестности границы, пренебрегая изменением B в этой окрестности:

$$p = -\frac{1}{c} I_s B. \quad (6)$$

Полученное выражение имеет смысл баланса сил на границе и означает, что давление плазмы p внутри шнуря уравновешивается силой Ампера, действующей на его границу.

Параметр β играет важную роль в физике плазмы. Его иногда называют *относительным давлением* плазмы, но чаще просто говорят о

бета плазмы по названию греческой буквы β . Согласно определению (4), параметр β характеризует отношение давления плазмы к давлению магнитного поля вне плазмы. Полезно заметить, что из уравнения (2) следует ограничение

$$\beta \leq 1. \quad (7)$$

Иногда параметр β определяют как локальное отношение давления плазмы к давлению магнитного поля в той же точке плазмы, т. е.

$$\beta' = \frac{8\pi p}{B^2}. \quad (8)$$

Такая «локальная бета» в θ -пинче может принимать любое значение в интервале от нуля до бесконечности:

$$\beta' \leq \infty. \quad (9)$$

Если же $\beta \ll 1$, то различие между β и β' несущественно.

Тета-пинч — это не просто удобная теоретическая модель равновесной конфигурации плазмы. В первые годы исследований по программе управляемого термоядерного синтеза (УТС) было построено немало подобных устройств. Примерная схема экспериментальной установки типа θ -пинч показана на рисунке 1. Предварительно ионизованный газ заполняет газоразрядную трубку из непроводящего материала (обычно из кварца или пирекса), которая окружена катушкой, состоящей из одного витка. Виток подсоединен к большой конденсаторной батарее высокого напряжения, которая первоначально отключена. После замыкания ключа конденсатор разряжается через виток, создавая магнитное поле в газоразрядной трубке. Параметры конденсаторной батареи подобраны так, чтобы время нарастания поля было минимальным, порядка пары микросекунд, в то время как общая длительность разряда составляет несколько десятков микросекунд. Из-за скин-эффекта быстро распущее магнитное поле не успевает проникать в плазму и действует как поршень, сжимая её. При сжатии плазма нагревается.

В θ -пинчах были достигнуты первые заметные успехи программы УТС [76]. Ионы были нагреты до температуры 1–4 кэВ при плотности $(1\text{--}2) \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Пиковое значение параметра β на оси плазмы достигало $0,77 \text{ и } 0,9$ при среднем значении по объёму плазмы $\beta \sim 0,05$. Интерферометрические измерения радиального профиля параметров плазмы продемонстрировали идеальное удержание плазмы с вложенными

друг в друга круглыми магнитными поверхностями без каких-либо свидетельств макроскопической неустойчивости. В θ -пинчах впервые в лабораторных условиях было получено значительное количество термоядерных нейтронов.

Самой большой проблемой θ -пинчей являются потери через торцы. В пинчах мало что можно сделать, чтобы улучшить продольное удержание частиц или энергии, так как плазма свободно вытекает вдоль магнитных силовых линий за время порядка L/c_s , где L — длина пинча, а c_s — скорость звука (она примерно равна тепловой скорости ионов).

Чтобы уменьшить вытекание плазмы на торцы, можно попробовать усилить магнитное поле вблизи торцов, создав так называемые *магнитные пробки*. Получившуюся в результате конфигурацию принято называть *открытой* или *адиабатической ловушкой*. Первое название навеяно тем, что магнитные силовые линии в области удержания плазмы не замкнуты, то есть как бы открыты. Второе название связано с тем, что удержание заряженных частиц в такой ловушке обеспечивается сохранением адиабатического инварианта — магнитного момента, как это сказано в §22.4 первой части данного учебного пособия [77].

Более принципиальный способ подавления огромных потерь плазмы на торцы состоит в замене θ -пинчей тороидальными конфигурациями, в которых вообще нет торцов. Однако просто так согнуть θ -пинч в тор не получится. В следующей лекции будет показано, что такое равновесие невозможно из-за так называемого шинного эффекта, поэтому нужны дополнительные «ухищрения». К такому же выводу можно прийти, используя формулу (6) и сравнивая величину поверхностного тока на внутреннем и внешнем обводах тора (задача 1).

§22.3. Зет-пинч

В другом предельном случае $B_z = 0$ столб плазмы стягивается к оси магнитным полем протекающего по нему тока J_z вследствие обычного пинч-эффекта. Чтобы выяснить условия равновесия, умножим уравнение (1) на $-\pi r^2/\pi a^2$ и проинтегрируем его по r от нуля до радиуса $r = a$, где давление плазмы очень мало:

$$-\frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \pi r^2 \frac{dp}{dr} dr = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \pi \frac{d}{dr} \frac{r^2 B_\theta^2}{8\pi} dr. \quad (10)$$

Тот же результат можно получить из уравнения (21.16), если учесть, что вектор кривизны направлен к оси системы и $x = -1/r$. После интегри-

рования по частям в левой части уравнения (10) получим

$$-\frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \pi r^2 \frac{dp}{dr} dr = -\frac{1}{\pi a^2} \pi r^2 p \Big|_0^a + \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p 2\pi r dr = \bar{p},$$

если учесть, что $r^2 p$ обращается в нуль на обоих пределах интегрирования, а также условиться, что черта сверху обозначает усреднение по сечению Z -пинча, то есть

$$\overline{(\dots)} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi r (\dots) dr. \quad (11)$$

Правая часть того же уравнения равна $B_\theta^2(a)/8\pi$, поскольку $rB_\theta = 0$ при $r = 0$. Следовательно,

$$\bar{p} = \frac{B_\theta^2(a)}{8\pi}. \quad (12)$$

Полученное равенство можно представить в виде

$$\bar{\beta} = 1, \quad (13)$$

где

$$\beta = \frac{8\pi p}{B_\theta^2(a)}. \quad (14)$$

Таким образом, среднее значение бета в Z -пинче в точности равно единице, тогда как в θ -пинче даже локальное значение бета не может быть больше единицы. То же равенство позволяет выразить внутреннюю энергию плазмы

$$W = \frac{3}{2} \bar{p} \pi a^2$$

в расчёте на единицу длины пинча через полный ток

$$I = \int_0^a 2\pi r J_z dr$$

в плазме. Так как $B_\theta(a) = 2I/ca$, из (12) следует равенство

$$W = \frac{3I^2}{4c^2}, \quad (15)$$

которое называют соотношением Беннетта (Willard Bennett) [78].

В первые годы термоядерных исследований было выполнено множество экспериментов с Z -пинчами. Их схема показана на рисунке 2. В отличие от θ -пинча, конденсаторная батарея разряжается через два электрода, которые расположены на торцах газоразрядной трубы. Высокое напряжение между электродами ионизирует газ и формирует ток вдоль разряда. Магнитное поле тока сжимает и нагревает столб плазмы. В первых же экспериментах выяснилось, что Z -пинч катастрофически неустойчив, причём неустойчивость часто приводит к полному гашению плазмы после пары микросекунд. Неустойчивости пинчей мы подробно обсудим в лекции 27. Современные исследования сконцентрированы вокруг так называемых быстрых Z -пинчей [79].

§22.4. Винтовой пинч

В *винтовом пинче* (англ. screw pinch) возможность манипулирования профилем одновременно двух компонент магнитного поля, $B_\theta(r)$ и $B_z(r)$, вместо только одной, $B_\theta(r)$ или $B_z(r)$, открывает перспективу достижения устойчивой конфигурации плазмы с высоким значением бета. Чем больше бета, тем более плотную плазму можно удерживать при заданной предельной величине внешнего магнитного поля, которая ограничена существующими технологиями. Умножая уравнение (1) на $-\pi r^2/\pi a^2$ и интегрируя его по r от нуля до радиуса столба плазмы $r = a$, как в предыдущем параграфе, но допуская теперь существование обеих компонент магнитного поля, получим равенство

$$\frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi r p dr + \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi r \frac{B_z^2}{8\pi} dr - \frac{B_z^2(a)}{8\pi} = \frac{B_\theta^2(a)}{8\pi},$$

которое означает, что

$$\bar{p} + \frac{\overline{B_z^2}}{8\pi} = \frac{B_z^2(a)}{8\pi} + \frac{B_\theta^2(a)}{8\pi}, \quad (16)$$

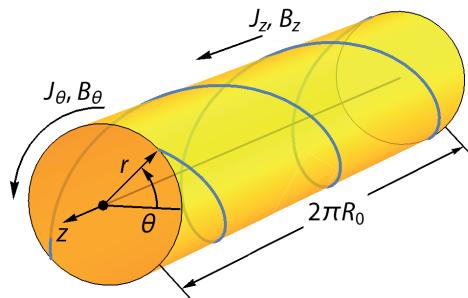
где черта сверху вновь обозначает усреднение (11) по сечению пинча. Определив параметр бета как

$$\beta = \frac{8\pi p}{B_\theta^2(a) + B_z^2(a)}, \quad (17)$$

равенство (16) можно представить в виде

$$1/\bar{\beta} = 1 + \overline{B_z^2}/8\pi\bar{p} \geq 1.$$

Рис. 3. Винтовой пинч. Магнитные силовые линии имеют форму спиралей, шаг которых зависит от радиуса спирали. В теории токамаков отрезок винтового пинча длиной $2\pi R_0$ используется для моделирования магнитного поля в торе с радиусом большой окружности R_0 .



Отсюда следует, что

$$\bar{\beta} \leq 1, \quad (18)$$

причём равенство имеет место в случае Z -пинча.

В винтовом пинче, в отличие от Z -пинча, стягивание столба плазмы к оси собственным магнитным полем продольного тока J_z может быть остановлено давлением продольного магнитного поля B_z внутри столба. Действительно, при уменьшении площади S_z сечения шнура увеличивается B_z , так как вследствие вмопрежности сохраняется магнитный поток $\Phi = B_z S_z$. При этом возникает своеобразный *парамагнетизм плазмы*, с чем связано другое название винтового пинча — *парамагнитный пинч*; в настоящее время оно используется редко.

Чтобы уточнить понятие парамагнетизма плазмы, вновь обратимся к уравнению (16) и перепишем его в виде

$$\beta_p = 1 + \frac{B_z^2(a) - \overline{B_z^2}}{B_\theta^2(a)}, \quad (19)$$

где безразмерный параметр

$$\beta_p = \frac{8\pi\bar{p}}{B_\theta^2(a)} \quad (20)$$

называют *полоидальной бетой*. Из уравнения (19) видно, что $B_z^2(a) > \overline{B_z^2}$, если $\beta_p > 1$; в этом случае плазма является диамагнетиком. Напротив, $B_z^2(a) < \overline{B_z^2}$ и плазма является парамагнетиком, если $\beta_p < 1$.

В винтовом пинче магнитные силовые линии становятся спиральными. В этом состоит существенное отличие как от θ -пинча, так и от Z -

пинча, где магнитные силовые линии — плоские. В Z -пинче все магнитные силовые линии образуют окружности, которые лежат в плоскости $z = \text{const}$, а в θ -пинче силовые линии — прямые, которые параллельны оси z .

Чтобы найти уравнение магнитной силовой линии в винтовом пинче, достаточно заметить, что её элемент $d\mathbf{l} = (dr, r d\theta, dz)$ параллелен вектору $\mathbf{B} = \{0, B_\theta, B_z\}$ и поэтому

$$\frac{dr}{dz} = 0, \quad r \frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta(r)}{B_z(r)}. \quad (21)$$

На одном шаге Δz спирали с радиусом r магнитная силовая линия поворачивается на угол $\Delta\theta = 2\pi$, поэтому

$$\Delta z = \frac{\Delta\theta}{d\theta/dz} = \frac{2\pi r B_z(r)}{B_\theta(r)}.$$

Отношение шага спирали к длине пинча $L = 2\pi R_0$ называют *коэффициентом запаса устойчивости* (англ. kink safety factor):

$$q = \frac{\Delta z}{2\pi R_0} = \frac{r B_z(r)}{R_0 B_\theta(r)}. \quad (22)$$

В θ -пинче $q = \infty$, и он устойчив; в Z -пинче $q = 0$, и он неустойчив. Как шаг спирали Δz , так и параметр q , вообще говоря, меняются с радиусом. Поэтому соседние силовые линии, лежащие на цилиндрах разных радиусов, скрещены. В таких случаях говорят, что магнитное поле имеет *шир* (англ. shear). Происхождение всех этих терминов связано с теорией равновесия и устойчивости плазмы в токамаках (лекция 23), а винтовой пинч с длиной $2\pi R_0$ является удобной моделью тора с радиусом R_0 . Наконец, определим функции

$$\Phi_z(r) = \int_0^r B_z(r) 2\pi r dr, \quad (23)$$

$$\Phi_\theta(r) = 2\pi R_0 \int_0^r B_\theta(r) dr. \quad (24)$$

Величина $\Phi_z(r)$ имеет смысл магнитного потока через круг радиуса r в плоскости $z = \text{const}$, а $\Phi_\theta(r)$ есть величина магнитного потока через прямоугольник с размерами $r \times 2\pi R_0$ в плоскости $\theta = \text{const}$. С их помощью можно дать наиболее универсальное определение коэффициента запаса устойчивости:

$$q = \frac{d\Phi_z}{d\Phi_\theta}, \quad (25)$$

которое поддаётся обобщению на случай более сложных равновесных конфигураций плазмы. Выражение (25) подразумевает, что магнитный поток Φ_θ выбран в качестве «радиальной» координаты вместо r . Мы узнаем, что выбор подобных «хитрых» координат упрощает анализ равновесия плазмы в сложных многомерных конфигурациях.

§22.5. Бессиловые конфигурации

В плазме могут формироваться равновесные конфигурации, в которых давление плазмы пренебрежимо мало по сравнению с давлением магнитного поля. Как следует из уравнения равновесия (21.3), при $\nabla p = 0$ ток должен протекать вдоль магнитного поля:

$$[\mathbf{J} \times \mathbf{B}] = 0. \quad (26)$$

Такое равновесие называют *бессиловым*. Бессиловые конфигурации нередко возникают на Солнце, когда магнитные поля, генерируемые внутри Солнца, «всплывают» на его поверхность. В лабораторных условиях бессиловое равновесие осуществляется, если велики потери энергии и плазма не нагревается.

Самые простые бессиловые конфигурации возникают при наличии цилиндрической симметрии. При этом имеется одно уравнение (1) с $dp/dr = 0$ на две функции $B_\theta(r)$ и $B_z(r)$, что допускает большой произвол в выборе конфигураций. Но один частный случай представляет интерес в связи с экспериментами с сильноточными разрядами, стабилизированными умеренным продольным полем. В таких разрядах давление плазмы невелико из-за различного рода аномальных потерь (усиленной диффузии и теплопроводности), а экспериментально наблюдаемое распределение полей близко к бессиловому, у которого плотность тока пропорциональна магнитному полю, так что

$$\text{rot } \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}, \quad (27)$$

причём $\lambda = \text{const}$. Решение уравнения (27) выражается через функции Бесселя J_0 и J_1 :

$$B_z = B_0 J_0(\lambda r), \quad B_\theta = B_0 J_1(\lambda r). \quad (28)$$

Чтобы доказать это, применим оператор rot к обеим сторонам уравнения (27):

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \lambda \text{rot } \mathbf{B} = \lambda^2 \mathbf{B}.$$

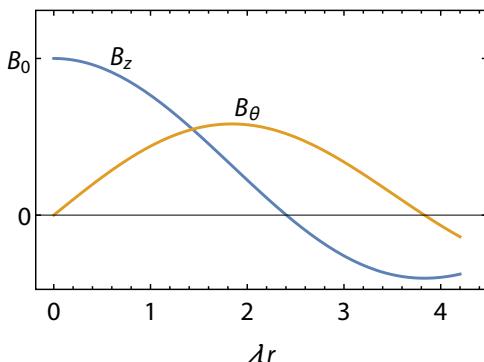


Рис. 4. Радиальный профиль бессилового магнитного поля в диффузном пинче. В импульсном эксперименте параметр λ растёт со временем, что приводит к сжатию радиального профиля поля, в результате чего на периферии столба плазмы может появиться область $r > 2,4/\lambda$, где B_z меняет знак.

Так как $\text{rot} \text{rot } \mathbf{B} = \nabla \text{div } \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$, приходим к уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \lambda^2 \mathbf{B} = 0.$$

Если магнитное поле зависит только от r , его z -проекция сводится к известному уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} B_z + \lambda^2 B_z = 0,$$

решение которого, регулярное при $r = 0$, выражается через функцию Бесселя первого рода с нулевым индексом:

$$B_z = B_0 J_0(\lambda r).$$

Так как $J_0(0) = 1$, B_0 есть величина B_z на оси цилиндра. Азимутальную компоненту магнитного поля проще всего найти из азимутальной проекции уравнения (27):

$$B_\theta = \frac{1}{\lambda} (\text{rot } \mathbf{B})_\theta = -\frac{1}{\lambda} \frac{dB_z}{dr} = B_0 J_1(\lambda r).$$

Радиальные профили (28) компонент бессилового магнитного поля в цилиндре показаны на рисунке 4. Профиль плотности тока $\mathbf{J} = (c\lambda/4\pi)\mathbf{B}$ повторяет профиль магнитного поля, поэтому найденное равновесие относится к классу *диффузных пинчей*, в которых ток размазан по сечению плазмы.

Бесселевые функции осциллируют при больших значениях аргумента λr , поэтому магнитное поле (28) может менять направление. Смена

направления проходит в точках нулей функций Бесселя. Они тем ближе к оси цилиндра, чем больше параметр λ . Этот параметр связан с отношением полного тока I , протекающего через плазму, к магнитному потоку Φ . В цилиндре радиуса a

$$I = \int_0^a 2\pi r J_z dr = \frac{c\lambda}{4\pi} \int_0^a 2\pi r B_z dr = \frac{c\lambda}{4\pi} \Phi.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{4\pi I}{c\Phi}.$$

Обычно разряд заключен в металлический кожух с достаточно высокой проводимостью, поэтому магнитный поток через сечение кожуха сохраняется и равен $\Phi = \pi a^2 B_{\text{vac}}$, где B_{vac} — начальное значение продольного магнитного поля перед разрядом. По мере увеличения разрядного тока (и параметра λ) продольное магнитное поле стягивается к оси, что можно интерпретировать как *paramагнетизм плазмы*. При $\lambda = 2,4/a$ поле B_z обращается в нуль на границе шнура, а при $\lambda > 2,4/a$ даже меняет свой знак и формируется *пинч с обращённым полем*.

Изменение направления B_z на периферии разряда при увеличении разрядного тока наблюдается экспериментально, причём хорошо совпадают и числовые значения параметра λa , соответствующие изменению знака поля: эксперимент даёт $\lambda = 2,8/a$, что очень близко к теоретическому значению $\lambda = 2,4/a$.

Почему из множества возможных бессиловых конфигураций в эксперименте наблюдается именно та, для которой параметр λ не зависит от координат, объяснил Дж. Тейлор (John Taylor) [80]. Он предположил, что в диффузном пинче развивается магнитогидродинамическая турбулентность, в результате которой энергия магнитного поля и плазмы переходит в тепловую энергию, а затем уносится из шнура за счёт потерь на стенку. Однако теряется не вся энергия, а только некоторая её часть, так как вследствие высокой проводимости плазмы приближённо сохраняется интеграл

$$K = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3x, \quad (29)$$

взятый по всему объёму плазмы (задача 3). Его называют *магнитной спиральностью*. Для магнитного поля с плоскими магнитными силовыми линиями $K = 0$, поэтому магнитная спиральность является мерой сложности топологии магнитного поля (задача 4).

Наличие дополнительного интеграла движения K означает, что далеко не всякая перестройка магнитного поля возможна даже при возникновении турбулентного движения. Если искать минимум энергии магнитного поля при $K = \text{const}$, то соответствующая вариационная задача приводит к бессиловому полю, которое подчиняется уравнению (27) с $\lambda = \text{const}$ (задача 5). Таким образом, наблюдаемое экспериментально бессиловое поле в диффузных пинчах связано с развитием мелкомасштабной магнитогидродинамической турбулентности, в которой энергия магнитного поля релаксирует к минимуму при заданной спиральности.

Существование в рамках идеальной магнитной гидродинамики дополнительных интегралов движения, помимо полной массы, полного импульса и полной энергии системы, было доказано Л. Вольтьером (*Lodewijk Woltjer*). Он же проверил, что состояние с $\lambda = \text{const}$ соответствует минимуму энергии магнитного поля при заданной магнитной спиральности [81].

Литература

В монографии [Б. Б. Кадомцева](#) «Коллективные явления в плазме» [28] равновесию плазмы в пинчах и других магнитных системах посвящён §3.

В монографии «Ideal MHD» [13] [Дж. Фридберга](#) (Jeffrey Freidberg) теория равновесия плазмы в пинчах изложена в главе 5.

Теория МГД-инвариантов, таких как магнитная спиральность, изложена в монографии [В. И. Ильгисоника](#) «Классические задачи физики горячей плазмы» [36].

Задачи и вопросы

Задача 1. Представьте, что отрезок соленоида, внутри которого находится θ -пинч, свёрнут в круглый тор. Используя формулу (6), докажите, что равновесие изотропной плазмы в такой конфигурации невозможно.

[Решение](#) \Rightarrow 306

Задача 2. Запишите уравнение равновесия для винтового пинча с анизотропной плазмой.

[Решение](#) \Rightarrow 306

Задача 3. Докажите, что в рамках идеальной магнитной гидродинамики магнитная спиральность сохраняется при подходящем выборе граничных условий.

[Решение](#) ⇒ 307

Задача 4. Вычислите магнитную спиральность (29) для открытой ловушки с плоскими магнитными силовыми линиями и диффузного пинча с бессиловым магнитным полем.

[Решение](#) ⇒ 308

Задача 5. Найдите магнитное поле, которое имеет минимальную энергию при заданной магнитной спиральности.

[Решение](#) ⇒ 309

Задача 6. Выведите в самом общем виде уравнение магнитного поля, которое не меняется вдоль одной из координат (например, z) и обеспечивает бессиловое равновесие плазмы.

[Решение](#) ⇒ 310

Задача 7. Докажите, что бессиловой винтовой пинч является парамагнитным, т. е.

$$\int_0^a (B_z^2(a) - B_z^2(r))r \, dr \leq 0,$$

где $B_z(a)$ — внешнее магнитное поле на краю плазмы.

[Решение](#) ⇒ 310

Задача 8. Докажите, что потенциальное магнитное поле есть состояние с минимумом энергии, которое может быть достигнуто в процессе релаксации внутри некоторой фиксированной области пространства.

[Решение](#) ⇒ 310

Лекция 23

Токамаки

Равновесие в торе. Шинный эффект. Удельный объём магнитного поля. Винтовой пинч как модель токамака.
Магнитные поверхности. Поверхностные величины

Описанные в предыдущей лекции одномерные равновесия в цилиндрических пинчах следует считать теоретической идеализацией, так как практически реализовать систему, бесконечно протяженную в одном направлении, невозможно. Если взять отрезок θ -пинча конечной длины, магнитные силовые линии неизбежно упрются в торцы лабораторной установки, что нарушит термоизоляцию плазмы. Потери плазмы на торцы можно уменьшить, поставив магнитные пробки на концах пинча. Соответствующие конфигурации относят к классу открытых ловушек, которые называют также адиабатическими. Примером является пробкotron Будкера—Поста ([§6.4](#)). Линейные ловушки лишь частично решают проблему подавления продольных потерь. Кардинальное решение состоит в том, чтобы плазменный шнур свернуть в тор. Устройства, в которых плазма имеет вид тора, называют *токамаками*. В этой лекции мы приступим к изучению равновесия плазмы в токамаке. Равновесие плазмы в симметричном токамаке по сути является двумерным, так как симметричный тор инвариантен относительно поворота на любой угол вокруг его оси.

§23.1. Шинный эффект

Из интуитивных соображений можно было бы ожидать, что в торе с очень большим радиусом кривизны небольшие участки плазменного шнура приближенно можно рассматривать как пинч с прямой осью. Однако кривизна, сколь бы малой она ни была, приводит к возникновению *шинного эффекта*, в результате которого плазма разлетается, увели-

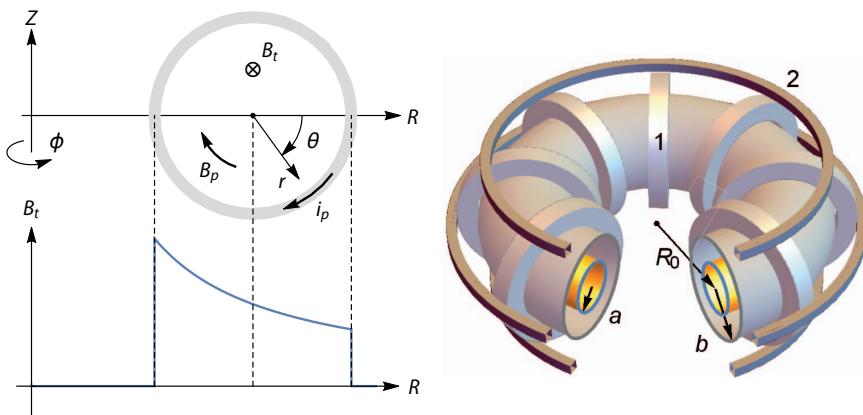


Рис. 1. В симметричном торе тороидальное магнитное поле убывает обратно пропорционально расстоянию R от оси Z , так как по теореме Стокса $2\pi RB_t(R) = 4\pi I_p/c$, где I_p — полоидальный ток, протекающий через круг радиуса R . Внутри тора $I_p = IN = \text{const}$, где I — ток в катушке, намотанной на тор, а N — число катушек. Вне тора $I_p = 0$.

Рис. 2. Схема токамака: 1 — катушки тороидального поля, 2 — катушки вертикального поля, R_0 и b — большой и малый радиусы тороидальной камеры, a — малый радиус плазменного шнуря. Тороидальный ток в плазме возбуждает первичная обмотка трансформатора (не показана), которая формирует магнитное поле, охватывающее меридиональное сечение камеры.

чивая радиус тора. Примерно так же раздувается автомобильная шина по мере увеличения давления в ней.¹ Неограниченному расширению шины препятствуют упругие силы в резиновой камере шины. Чтобы воспрепятствовать расширению плазмы в торе, в ней индуцируют тороидальный ток вдоль обхода тора.

Выясним сначала, что произойдёт, если тороидальный ток в плазме отсутствует. При сворачивании θ -пинча в тор магнитное поле искривляется. Искривлённое магнитное поле неоднородно: в симметричном торе оно убывает обратно пропорционально расстоянию R от оси (оси симметрии Z) тора, как поясняет рисунок 1. Действительно, из теоремы Стокса следует, что при осевой симметрии *тороидальное магнитное по-*

¹ По свидетельству Д. Д. Рютова [82], предлагаемое здесь объяснение шинного эффекта, как и его название, принадлежат Г. И. Будкеру. Чаще данный эффект называют баллонным.

ле равно

$$B_t = \frac{2I_p}{cR}, \quad (1)$$

где I_p — полный *полоидальный ток*, протекающий через круг радиуса R с центром на оси тора. В простейшей модели ток I_p течёт по прямому проводу вдоль оси тора, но в реальном токамаке он распределен по виткам катушек тороидального магнитного поля, как показано на рисунке 2. Для любого круга, окружность которого находится внутри катушек, ток $I_p = IN$ одинаков и равен произведению тока I в отдельной катушке на полное число катушек N . Если же эта окружность расположена вне катушек, то $I_p = 0$, поэтому снаружи $B_t = 0$, как показано на рисунке 1.

Будучи диамагнетиком, плазма должна выталкиваться в радиальном направлении, так как магнитное поле ослабевает к наружному обводу тора. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим небольшой сегмент плазменного шнура, опирающийся на угол ϕ (рисунок 3). Для простоты будем считать, что малый радиус плазменного тора a мал по сравнению с радиусом кривизны R , который примерно равен большому радиусу тора. Малость обратного аспектного отношения,

$$a/R \ll 1, \quad (2)$$

позволяет пренебречь изменением магнитного давления $p_m = B_t^2/8\pi$ по сечению плазмы. Тогда можно считать, что на торцы выделенного сегмента навстречу друг к другу под небольшим углом ϕ действуют силы

$$\pi a^2(p_{\parallel} - p'_m),$$

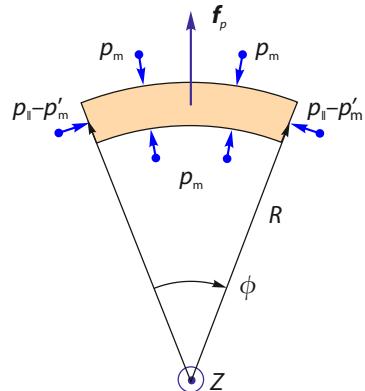
где p'_m обозначает давление магнитного поля внутри плазмы, ослабленное вследствие диамагнетизма. В соответствии с уравнениями (21.12a) и (21.12б), при малой кривизне магнитных силовых линий сумма попечного давления плазмы и давления магнитного поля приблизительно постоянна по сечению плазменного шнура, поэтому

$$p'_m \approx p_m - p_{\perp}.$$

Тот же факт для случая изотропной плазмы следует из уравнения (22.2). Таким образом, суммарная сила со стороны торцов равна

$$\pi a^2(p_{\parallel} - p'_m)\phi = \pi a^2(p_{\parallel} + p_{\perp} - p_m)\phi.$$

Рис. 3. Шинный эффект в токамаке. Плазма выталкивается в область более слабого магнитного поля. Сумма сил \mathbf{f}_p , действующих на выделенный сегмент плазмы в тороидальном магнитном поле, направлена от оси Z по большому радиусу тора R . Чтобы уравновесить выталкивающую силу, в плазме создают тороидальный ток вдоль оси плазменного шнура.



Она частично компенсируется силой давления магнитного поля p_m на боковую поверхность сегмента. Как было отмечено в конце §20.1, при отсутствии плазмы суммарная сила давления магнитного поля на боковые и торцевые участки поверхности сегмента в точности равна нулю, т. е.

$$\oint \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Это означает, что слагаемое $-\pi a^2 p_m \phi$ в силе, действующей на торцы, сокращается. Поскольку длина выделенного сегмента равна ϕR , заключаем, что в расчёте на единицу длины на плазменный шнур в направлении большого радиуса тора действует сила

$$f_p = \frac{\pi a^2}{R} (p_{\parallel} + p_{\perp}). \quad (3)$$

Под действием этой силы плазма расширяется с ускорением

$$\ddot{R} = \frac{f_p}{\pi a^2 \rho} = \frac{p_{\parallel} + p_{\perp}}{\rho R} \sim \frac{c_s^2}{R},$$

где ρ — массовая плотность плазмы, а $c_s \sim \sqrt{(p_{\parallel} + p_{\perp})/\rho}$ — скорость звука. Оценивая $\ddot{R} \sim b/\tau^2$, находим, что за время

$$\tau \sim \frac{\sqrt{bR}}{c_s} = \frac{b}{c_s} \sqrt{\frac{R}{b}} \quad (4)$$

плазма вылетит на стенки тороидальной камеры с малым радиусом b (предполагается, что $a \lesssim b \ll R$). Это время лишь незначительно больше времени свободного разлёта плазмы b/c_s при $B = 0$.

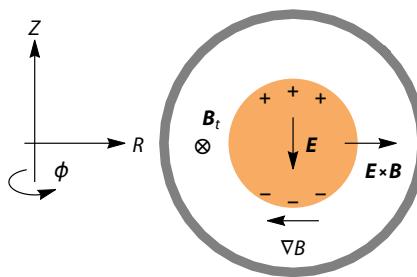


Рис. 4. Шинный эффект возникает вследствие разделения положительных и отрицательных зарядов в неоднородном магнитном поле. Поляризация плазмы создаёт вертикальное электрическое поле, которое инициирует электрический дрейф в сторону от оси тора. Исследованию дрейфовых траекторий частиц в токамаке посвящены задачи 8–10.

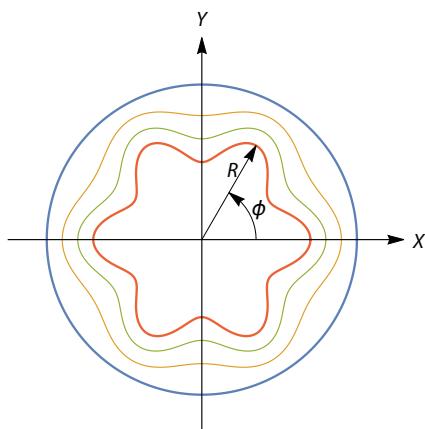
Механизм возникновения шинного эффекта нетрудно понять, анализируя траектории движения заряженных частиц в неоднородном магнитном поле тора. Как показано на рисунке 4, отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные ионы в таком поле дрейфуют в вертикальном направлении, но в противоположные стороны. В результате плазма поляризуется и возникает вертикальное электрическое поле. Оно ориентировано так, что скорость электрического дрейфа (одинаковая для электронов и ионов) направлена в сторону от оси тора и плазма выбрасывается на внешний обвод тора. Таким образом, при наличии одного только тороидального магнитного поля тороидальное равновесие плазмы невозможно.

В следующих параграфах мы рассмотрим два способа преодоления последствий шинного эффекта, которые постепенно подведут нас к пониманию современной концепции токамака.

§23.2. Удельный объём магнитного поля

Причину шинного эффекта можно пояснить ещё одним способом. Для простоты представим, что плазма изотропна, и рассмотрим трубку плазмы в торе, образующие которой совпадают с магнитными силовыми линиями. Допустим, что давление плазмы p однородно по сечению трубки и значительно меньше давления магнитного поля $B^2/8\pi$. Тогда, как мы установили в §22.2, анализируя равновесие в θ -пинче, магнитное поле будет очень слабо изменяться при пересечении границы плазмы. При этом согласно (22.6) давление плазмы уравновешивается силой

Рис. 5. Магнитные силовые линии в торе с гофрированным магнитным полем, вид сверху. Расстояние R от оси тора точки на силовой линии зависит от тороидального угла ϕ . Гипотетически можно создать равновесную конфигурацию тороидальной плазмы, увеличив длину силовых линий на внутреннем обводе тора так, что величина интеграла $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ по замкнутой силовой линии будет одинакова на внешнем и внутреннем обводах тора.



взаимодействия поверхностного тока I_s с магнитным полем B :

$$p = -\frac{1}{c} I_s B. \quad (5)$$

Но в простой тороидальной геометрии соотношению (5) удовлетворить нельзя. В самом деле, в силу сохранения заряда произведение поверхности тока на длину магнитной силовой линии $I_s 2\pi R$ должно оставаться постоянным. Поэтому на внутреннем обводе плазменного тора поверхностный ток I_s должен быть несколько больше, чем на внешнем. Но магнитное поле $B = B_t$ также больше на внутреннем обводе. Следовательно сила, действующая со стороны магнитного поля на плазменный шнур, должна давать некоторую равнодействующую, направленную наружу в сторону убывания магнитного поля.

В принципе, можно компенсировать диамагнитное выталкивание в торе с замкнутыми магнитными силовыми линиями, если отказаться от осевой симметрии. Допустим, что с помощью дополнительных катушек создана такая конфигурация, что внутренняя силовая линия немногодлиннее наружной, как показано на рисунке 5. Пусть опять давление плазмы мало и постоянно. Тогда условие равновесия границы имеет вид (5), где I_s — компонента поверхностного тока, нормальная к магнитному полю B , а следовательно, и к силовой линии. Из условия сохранения электрического заряда имеем равенство

$$\oint I_s ds = -c \oint p \frac{ds}{B} = \text{const.}$$

Так как $p = \text{const}$, то отсюда следует, что интеграл

$$U = \oint \frac{ds}{B} \quad (6)$$

вдоль любой замкнутой магнитной силовой линии на границе плазмы должен иметь одно и то же значение, как заметил Б. Б. Кадомцев [83].

Этот результат легко обобщается на случай произвольного распределения давления. В самом деле, любое плавное распределение давления по некоторой координате, нумерующей поверхности $p = \text{const}$, можно приближённо представить в виде набора многих ступенек. На каждой из таких ступенек величина U должна быть постоянной. Другими словами, для равновесия необходимо, чтобы давление p было постоянно на поверхности $U = \text{const}$, т. е.

$$p = p(U). \quad (7)$$

Если давление плазмы мало, то под величиной B в интеграле для U можно понимать вакуумное магнитное поле B_{vac} . В этом случае условие $p = p(U)$ является необходимым и достаточным условием равновесия. В симметричном торе, показанном на рисунке 2,

$$U = \frac{2\pi R}{2I_p/cR} \propto R^2,$$

поэтому поверхности $U = \text{const}$ представляют собой бесконечные круглые цилиндры $R = \text{const}$, что означает невозможность удержания плазмы в ограниченной области пространства. Однако если произвести гофрировку магнитного поля, как показано на рисунке 5, чтобы величина U имела одинаковое значение на некоторых тороидальных поверхностях, образованных замкнутыми магнитными силовыми линиями, то равновесная конфигурация плазмы всё-таки может иметь форму тора, хотя и гофрированного.

Интеграл (6) называют *удельным объёмом* магнитного поля, так как

$$U \Delta\Phi = \oint \frac{\Delta\Phi}{B} ds = \oint S(s) ds = V$$

есть объём магнитной плазменной трубки, в которую захвачен магнитный поток $\Delta\Phi$. Понятие удельного объёма магнитного поля бывает полезным и в системах с незамкнутыми магнитными силовыми линиями.

Например, в открытой ловушке с бесконечно сильными магнитными пробками вводят определение

$$U = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B}, \quad (8)$$

где интеграл вычисляется между координатами пробок s_1 и s_2 (задача 5).

§23.3. Тороидальный ток

Тор с гофрированным магнитным полем является поучительной теоретической моделью. Хотя были попытки исследовать подобные системы удержания плазмы экспериментально [84], они не имели продолжения. В реальных токамаках для компенсации силы диамагнитного выталкивания (3) в плазме возбуждают *тороидальный ток* I_t вдоль направления обхода тора. При смещении плазмы (и тока) на малое расстояние ΔR от оси в проводящей камере возникает ток-изображение $-I_t$ на расстоянии $r = b^2/\Delta R$ от центральной окружности тора. С силой

$$f_t = -\frac{I_t}{c} \frac{2I_t}{rc} = -\frac{2I_t^2}{b^2 c^2} \Delta R \quad (9)$$

он возвращает тороидальный ток к оси тора. Эта сила в точности уравновешивает выталкивающую силу f_p при

$$\Delta R = \frac{\pi a^2 b^2 c^2}{2I_t^2 R} (p_{\parallel} + p_{\perp}). \quad (10)$$

В импульсных экспериментах тороидальный ток в плазме возбуждают при помощи импульсного трансформатора, а для поддержания постоянного тока используют более сложные методы. Так как ток-изображение в конечном итоге затухает, в стационарных экспериментах устанавливают полоидальные катушки, как показано на рисунке 2. Они создают вертикальное магнитное поле, перпендикулярное плоскости тора. Оно оказывает на тороидальный ток в плазме такое же действие, как и ток-изображение, компенсируя выталкивающую силу шинного эффекта. Токи, текущие в полоидальных катушках, могут изменить положение плазмы в камере и форму сечения плазменного шнура.

Тороидальный ток создаёт *полоидальное магнитное поле* B_p . Оно является аналогом азимутального магнитного поля B_{θ} в винтовом пинче, тогда как тороидальное магнитное поле B_t — это аналог продольного

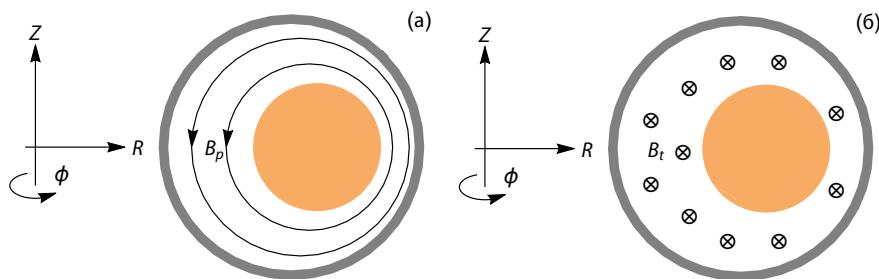


Рис. 6. Идеально проводящая стенка тороидальной камеры может компенсировать шинный эффект и остановить расширение плазменного шнуря при наличии полоидального магнитного поля (а), но не в случае чисто тороидального магнитного поля (б). Силовые линии полоидального магнитного поля сгущаются вблизи внешнего обвода тора при раздутии плазменного шнуря, тогда как линии тороидального магнитного поля просто раздвигаются и плазма просачивается между ними.

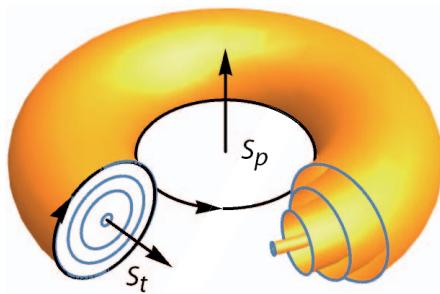
магнитного поля B_z . Таким образом, в первом приближении токамак — это согнутый в тор винтовой пинч. Рисунок 6 поясняет, почему одно только тороидальное магнитное поле не может подавить шинный эффект. Как показано на рисунке 6а, при смещении плазменного шнуря к внешнему обводу проводящей тороидальной камеры полоидальное магнитное поле усиливается на внешнем ободе и ослабляется на внутреннем ободе, так что возникает разность магнитного давления, которая возвращает плазму назад. Если же полоидальное магнитное поле отсутствует, как на рисунке 6б, плазма просто раздвигает магнитные силовые линии.

При моделировании тора отрезком винтового пинча предполагают, что торцы пинча «склеены». Это означает, что пространственное расположение таких величин, как давление p , магнитное поле \mathbf{B} , плотность тока \mathbf{J} , должно быть задано функциями, которые периодичны по координате z с периодом $2\pi R_0$, равным длине окружности магнитной оси тора.

§23.4. Магнитные поверхности

Полоидальное магнитное поле, направленное вдоль малого обвода тора, в сумме с тороидальным полем вдоль большого обвода тора качественно меняет топологию магнитных силовых линий, разматы-

Рис. 7. Система вложенных магнитных поверхностей в симметричном токамаке. Магнитный поток через контур, целиком лежащий на магнитной поверхности, не меняется при непрерывной деформации контура. Он не зависит от формы и положения поверхности, натянутой на контур. Показаны полоидальное S_p и тороидальное S_t сечения тора, которые натянуты на контуры, идущие соответственно вдоль большого и малого обводов тора.



вая замкнутые кольца в спирали, которые навиваются на *магнитную ось* — центральную кольцевую магнитную линию внутри шнура плазмы. Счётное множество² силовых линий может замыкаться на себя после одного или нескольких обходов вокруг тора (см. ниже). Другие же линии бесконечны. Занимая ограниченное пространство, они плотно устилают поверхность тора.

Рассмотрим систему вложенных тороидальных поверхностей, образованных такими бесконечными магнитными силовыми линиями, как показано на рисунке 7. Поскольку силовая линия бесконечна, но лежит на ограниченной в пространстве поверхности, она бесконечно близко подходит к любой наперёд заданной точке поверхности. В связи с этим говорят, что силовая линия *эргодически* устилает всю поверхность. Так как в изотропной плазме давление постоянно вдоль магнитной силовой линии (§21.2), оно оказывается постоянным и на всей поверхности, образованной такой силовой линией.

В теории равновесия плазмы поверхность постоянного давления называют *магнитной поверхностью*. Почти все магнитные поверхности в токамаке образованы бесконечными силовыми линиями, не имеющими начала и конца. Выделенные поверхности, на которых силовые линии замкнуты, называются *рациональными*. Для замкнутой силовой линии можно ввести понятие *удельного объёма магнитного поля* U . Поэтому в тех случаях, когда U имеет ясный смысл, магнитную поверх-

² В теории множеств счётным называют бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.

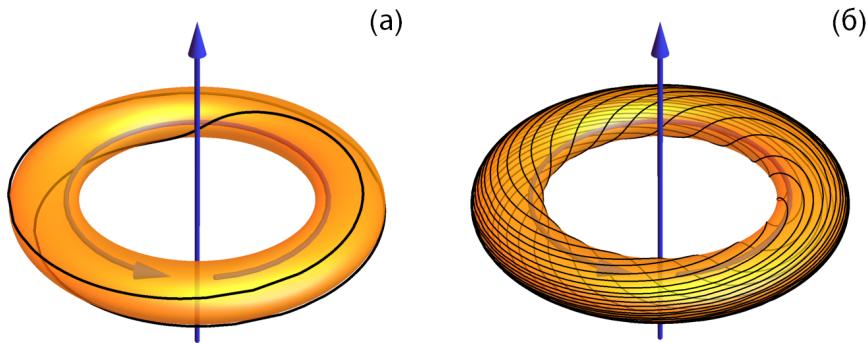


Рис. 8. Магнитные силовые линии суперпозиции прямого тока, расположенного на оси кругового тока: (а) силовая линия на рациональной магнитной поверхности $m = 2, n = 1$ замыкается после двух обходов вокруг прямого тока; (б) силовая линия квазивномерно покрывает иррациональную магнитную поверхность.

ность определяют как поверхность $U = \text{const}$.

На рациональной магнитной поверхности параметр q , введённый в §22.4 на примере винтового пинча, выражается рациональным числом. Действительно, если магнитная силовая линия замыкается после m оборотов вокруг оси тора (вдоль большого обвода тора) и после n оборотов вокруг магнитной оси (вдоль малого обвода тора), то шаг спирали силовой линии в эквивалентном винтовом пинче длины $2\pi R_0$ можно найти, составив равенство $m 2\pi R_0 = n \Delta z$. Поскольку $q = \Delta z / 2\pi R_0$ согласно (22.22), для такой силовой линии

$$q = \frac{m}{n}. \quad (11)$$

В общем случае q есть иррациональное число, а магнитная силовая линия не замыкается, имея бесконечную длину. Рисунок 8 поясняет сказанное. Он изображает тороидальную магнитную поверхность, которая формируется в магнитном поле кольца с током, на оси симметрии которого расположен прямой проводник, по которому также течёт ток. На рисунке 8а показана силовая линия на рациональной магнитной поверхности $m = 2, n = 1$; на рисунке 8б силовая линия квазивномерно покрывает иррациональную магнитную поверхность.

Учтём теперь, что магнитные силовые линии \mathbf{B} и линии плотности

тока \mathbf{J} лежат на магнитной поверхности, как вообще на любой поверхности $p = \text{const}$ (§21.2). Поскольку магнитные силовые линии нигде не протыкают магнитную поверхность, магнитный поток через любое (с одной оговоркой) сечение магнитной поверхности одинаков. То же утверждение верно в отношении потока вектора плотности тока. Оговорка же состоит в том, что сечения должны быть топологически эквивалентны, т. е. одно сечение можно получить из другого непрерывной деформацией контура, который является границей сечения и целиком лежит на магнитной поверхности. На рисунке 7 показаны два топологически неэквивалентных сечения тороидальной магнитной поверхности. Полоидальное (большое) сечение S_p опирается на контур, который окружает главную ось тора Z . Тороидальное (малое) сечение S_t опирается на контур, который окружает магнитную ось тора, то есть окружность радиуса R_0 вблизи центра плазменного шнуря. Очевидно, что тороидальный контур невозможно деформировать в полоидальный контур (и наоборот) без разрыва контура.

Для описания равновесия в реальном токамаке удобно использовать так называемые *поверхностные величины*, которые являются функцией только магнитной поверхности, т. е. постоянны на магнитной поверхности. К таким величинам в первую очередь следует причислить магнитные потоки через большое и малое сечения тора.

Полоидальный магнитный поток через большое сечение тора

$$\Psi = \int_{S_p} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) \quad (12)$$

будет одинаков, как бы мы ни пытались сместить и деформировать контур обхода и форму поверхности, натянутой на этот контур, если контур целиком лежит на одной и той же магнитной поверхности. Это означает, что Ψ является поверхностной величиной в указанном выше смысле. Точно так же поверхностной величиной является *тороидальный магнитный поток*

$$\Phi = \int_{S_t} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}). \quad (13)$$

Он вычисляется как поток магнитного поля через малое сечение тора и также не зависит ни от контура обхода (с указанной выше оговоркой), ни от формы поверхности, натянутой на контур.

Поскольку линии тока также лежат на магнитной поверхности, аналогичным образом можно определить *тороидальный ток* внутри дан-

ной магнитной поверхности

$$I_t = \int_{S_t} (\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}) \quad (14)$$

и *полоидальный ток* через полоидальное сечение

$$I_p = \int_{S_p} (\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}), \quad (15)$$

которые также будут поверхностными величинами в том смысле, что I_p будет иметь одинаковое значение для любого большого сечения фиксированной магнитной поверхности, а I_t будет иметь одно и то же значение для любого малого сечения одной и той же магнитной поверхности.

Так как давление постоянно на магнитной поверхности, функция p также является поверхностной величиной.

Так как и $\Phi = \text{const}$, и $\Psi = \text{const}$ на магнитной поверхности, можно считать, что $\Phi = \Phi(\Psi)$ или $\Psi = \Psi(\Phi)$. Следовательно, все поверхностные величины можно представить как функции полоидального (или тороидального) магнитного потока. Например:

$$p = p(\Psi), \quad I_p = I_p(\Psi), \quad I_t = I_t(\Psi).$$

Обобщая определение (22.25) запаса устойчивости $q = d\Phi_z/d\Phi_\theta$, данное для винтового пинча, следует принять, что в токамаке

$$q = -\frac{d\Phi}{d\Psi}. \quad (16)$$

Знак «минус» связан с тем, что полоидальный магнитный поток Ψ отсчитывается от главной оси тора, тогда как азимутальный поток Φ_θ — от оси пинча. Ясно, что параметр q также является поверхностной величиной.

Понятие магнитной поверхности вводят также для плазмы с неизотропным давлением, что особенно актуально для открытых ловушек. В плазме с неизотропным давлением давление меняется вдоль магнитной силовой линии и поэтому не может считаться постоянным на магнитной поверхности. Не подходит также определение магнитной поверхности как поверхности, которую заметает бесконечная силовая линия, поскольку в таких системах силовые линии выходят из области удержания плазмы. Его место занимает так называемое условие замыкания токов (задача 6).

Литература

В монографии Б. Б. Кадомцева «Коллективные явления в плазме» [28] равновесию плазмы в токамаках посвящены заключительные разделы §3.

В монографии «Plasma Physics and Fusion Energy» [10] Дж. Фридберга (Jeffrey Freidberg) материалу лекции соответствует §11.

Детально физика удержания плазмы в токамаках изложена в монографиях Б. Б. Кадомцева [85] и Дж. Вессона (John Wesson) [86].

Задачи и вопросы

Задача 1. Описать равновесие плазмы в магнитном поле прямого тока, не предполагая, что $\beta \ll 1$. Решение $\Rightarrow 312$

Задача 2. Представьте кольцо с током, на оси симметрии которого расположен прямой проводник с током, как показано на рисунке 8. В такой конфигурации магнитные силовые линии имеют форму спиралей, охватывающих кольцо. Какая часть силовых линий замкнута, а какая эргодически покрывает тороидальную поверхность? Решение $\Rightarrow 312$

Задача 3. Почему бесконечная магнитная силовая линия в предыдущем примере лежит на поверхности, а не занимает конечный объём?

Решение $\Rightarrow 313$

Задача 4. Проверьте, что магнитное поле в симметричном токамаке можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi} [\nabla\Psi \times \nabla\phi] + RB_t \nabla\phi,$$

где $\Psi = \Psi(R, Z)$ — полоидальный магнитный поток, $B_t = B_t(R, Z)$ — тороидальное магнитное поле, ϕ — азимутальный угол в цилиндрической системе координат $\{R, \phi, Z\}$.

Задача 5. Плазма удерживается в магнитном поле между отражающими торцами, которые имеют такую форму, что в каждой точке перпендикуляры направлению магнитного поля. Докажите, что давление плазмы постоянно на поверхности

$$U = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} = \text{const},$$

где интегрирование осуществляется вдоль магнитной силовой линии между точками её пересечения с торцами.

[Решение ⇒ 313](#)

Задача 6. Получите условие замыкания токов в анизотропной плазме, доказав, что

$$\int \frac{ds}{B^2} [\mathbf{h} \times \mathbf{x}] \cdot \nabla(p_{\perp} + p_{\parallel}) = 0,$$

где интегрирование осуществляется вдоль магнитной силовой линии между точками, в которых давление плазмы обращается в нуль.

[Решение ⇒ 315](#)

Задача 7. Найдите магнитные поверхности в винтовом магнитном поле.

[Решение ⇒ 316](#)

Задача 8. Исследуйте форму дрейфовых траекторий в тороидальном магнитном поле.

[Решение ⇒ 317](#)

Задача 9. Исследуйте форму дрейфовых траекторий пролётных частиц в тороидальном магнитном поле с вращательным преобразованием.

[Решение ⇒ 317](#)

Задача 10. Исследуйте форму дрейфовых траекторий запертых частиц в тороидальном магнитном поле с вращательным преобразованием.

[Решение ⇒ 319](#)

Задача 11. Выразите силу Ампера $(1/c)[\mathbf{J} \times \mathbf{B}]$ через компоненты полоидального и тороидального магнитных полей.

[Решение ⇒ 320](#)

Задача 12. Используя результат задачи 11, вычислите силу, действующую на плазменный шнур в направлении большого радиуса тора.

[Решение ⇒ 322](#)

Лекция 24

Двумерные равновесия

Магнитное поле в токамаке. Уравнение Грэда—Шафранова.

Решение Соловьёва. Магнитные острова.

***Релаксированное равновесие в токамаке**

Помимо классического токамака известны другие, родственные ему системы магнитного удержания плазмы, такие как сферический токамак, сферомак и конфигурация с обращённым полем. Подобные конфигурации обладают симметрией относительно вращения вокруг оси тора, так что равновесие зависит только от двух координат, по сути являясь двумерным. Это рождает тороидальные системы с аксиально-симметричными открытыми ловушками, в которых равновесие плазмы также оказывается двумерным. Двумерные равновесия, как в торе, так и в открытой ловушке, описывает уравнение Грэда—Шафранова. Но есть и различия. Например, в тороидальных системах могут формироваться магнитные острова и универсальные профили давления и тока, как в диффузном пинче. Лекция начинается с математического описания магнитного поля в токамаке, вывода уравнения Грэда—Шафранова и завершается формулированием вариационного принципа, который позволяет найти самосогласованные профили давления и тока в токамаке.

§24.1. Магнитное поле в токамаке

Выразим магнитное поле в симметричном токамаке через поверхностные величины, которые были введены в §23.4. Для этого обратимся к рисунку 1 и зададим цилиндрическую систему координат $\{R, \phi, Z\}$ с осью R вдоль большого радиуса тора и осью Z вдоль оси симметрии тора. Азимутальный угол ϕ в теории токамаков называют тороидальным углом; он изменяется в пределах от 0 до 2π и задаёт направление обхода

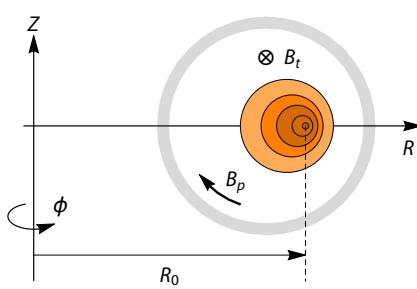


Рис. 1. В цилиндрической системе координат $\{R, \phi, Z\}$ ось Z направлена вдоль большой оси тора, а ось R – вдоль большого радиуса тора. Компоненты магнитного поля в симметричном токамаке можно выразить через полоидальный магнитный поток $\Psi(R, Z)$ и полоидальный ток $I_p(R, Z)$ через круг радиуса R в плоскости $Z = \text{const}$. Внутренние магнитные поверхности смещены в сторону внешнего обвода тора сильнее, чем внешние.

по окружности большого радиуса тора. В указанной системе координат тороидальное магнитное поле

$$\mathbf{B}_t = \{0, B_\phi(R, Z), 0\} \quad (1)$$

в каждой точке направлено вдоль приращения тороидального угла ϕ , тогда как полоидальное магнитное поле

$$\mathbf{B}_p = \{B_R(R, Z), 0, B_Z(R, Z)\} \quad (2)$$

имеет две компоненты B_R и B_Z , направленные соответственно вдоль осей R и Z . Вследствие симметрии системы относительно вращения вокруг оси Z ни одна из функций B_R , B_ϕ , B_Z не зависит от тороидального угла ϕ .

Тороидальная компонента магнитного поля выражается через полоидальный ток $I_p(R, Z)$ по формуле (23.1):

$$B_\phi = \frac{2I_p}{cR}. \quad (3)$$

Компоненты полоидального магнитного поля удобно связать с так называемым редуцированным (т. е. делённым на 2π) полоидальным магнитным потоком $\psi(R, Z) = \Psi(R, Z)/2\pi$. Поскольку

$$\Psi(R, Z) = \int_0^R 2\pi R' B_Z(R', Z) dR', \quad (4)$$

ясно, что

$$B_Z = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}. \quad (5)$$

Подставляя это выражение в уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, записанное в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} RB_R + \frac{\partial B_Z}{\partial Z} = 0,$$

получим

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} RB_R + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z \partial R} = 0,$$

откуда следует

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z}. \quad (6)$$

Аналогичным образом для полоидального тока из его определения

$$I_p(R, Z) = \int_0^R 2\pi R' J_Z(R', Z) dR' \quad (7)$$

следует, что

$$J_Z = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial I_p}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial i_p}{\partial R}, \quad (8)$$

где $i_p(R, Z) = I_p(R, Z)/2\pi$. Поскольку в равновесии $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, повторяя вывод формулы (6), находим, что

$$J_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial i_p}{\partial Z}. \quad (9)$$

Тороидальную компоненту плотности тока $J_t = J_\phi$ удаётся выразить через полоидальный магнитный поток, вычислив ротор магнитного поля:

$$\begin{aligned} J_\phi &= \frac{c}{4\pi} [\nabla \times \mathbf{B}]_\phi = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\partial B_R}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial R} \right) = \\ &= -\frac{c}{4\pi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = \\ &= -\frac{c}{4\pi R} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right). \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\Delta^* \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = R^2 \operatorname{div} \left(\frac{1}{R^2} \nabla \psi \right)$$

для оператора, который иногда называют *шафрианом*, результат вычислений можно записать в компактном виде

$$J_\phi = -\frac{c}{4\pi R} \Delta^* \psi. \quad (10)$$

Таким образом, все компоненты \mathbf{B} и \mathbf{J} удаётся выразить через редуцированный полоидальный магнитный поток ψ и редуцированный полоидальный ток i_p :

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad B_\phi = \frac{4\pi i_p}{cR}, \quad B_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad (11)$$

$$J_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial i_p}{\partial Z}, \quad J_\phi = -\frac{c}{4\pi R} \Delta^* \psi, \quad J_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial i_p}{\partial R}. \quad (12)$$

Эти формулы можно записать в элегантной векторной форме, приняв во внимание, что $\nabla \phi = \{0, 1/R, 0\}$. Например, для магнитного поля имеем

$$\mathbf{B} = [\nabla \psi \times \nabla \phi] + \frac{4\pi i_p}{c} \nabla \phi. \quad (13)$$

В соответствии с этой формулой магнитное поле всюду перпендикулярно градиенту функции ψ . Следовательно, поверхность $\psi = \text{const}$ действительно является магнитной поверхностью, на которой лежат магнитные силовые линии. Тот же вывод верен в отношении линий тока.

На границе плазмы, заданной некоторой магнитной поверхностью $\psi = \text{const}$, магнитное поле непрерывно, если, конечно, отсутствует поверхностный ток. Отсюда следует, что на границе плазмы должны быть непрерывны компоненты градиента $\nabla \psi$. Это требование эквивалентно непрерывности самой функции ψ и её производной $\partial \psi / \partial n$ по нормали к границе:

$$[\![\psi]\!] = 0, \quad [\![\partial \psi / \partial n]\!] = 0. \quad (14)$$

§24.2. Уравнение Грэда–Шафранова

Запишем проекцию

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{1}{c} (J_\phi B_Z - J_Z B_\phi)$$

уравнения равновесия (21.3) на ось R и подставим в её правую часть выражения для компонент магнитного поля и плотности тока из предыдущего параграфа. Производную $\partial p/\partial R$ в левой части преобразуем, рассматривая давление $p = p(\psi)$ как функцию полоидального магнитного потока ψ . Аналогичным образом распишем производную di_p/dR в правой части. В результате получим уравнение

$$\frac{dp}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{1}{c} \left(-\frac{c}{4\pi R} \Delta^* \psi \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{di_p}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{4\pi i_p}{cR} \right),$$

где и левая, и правая части содержат множитель $\partial \psi / \partial R$. Сокращая его, получим *уравнение Грэда—Шафранова*

$$\frac{dp}{d\psi} = -\frac{1}{4\pi R^2} \Delta^* \psi - \frac{2\pi}{c^2 R^2} \frac{di_p^2}{d\psi}.$$

Чаще его записывают немного иначе, чтобы подчеркнуть, что неизвестной величиной является функция магнитного потока $\psi(R, Z)$ от координат:

$$\Delta^* \psi = -4\pi R^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{8\pi^2}{c^2} \frac{di_p^2}{d\psi}. \quad (15)$$

При этом функции $p = p(\psi)$, $i_p = i_p(\psi)$, которые описывают распределение давления и тока между магнитными поверхностями, должны быть заданы. Вне плазмы $p = 0$, $i_p = 0$ и поэтому

$$\Delta^* \psi = 0. \quad (16)$$

На границе плазмы функция $\psi(R, Z)$ удовлетворяет граничным условиям (14).

Уравнение (15) было написано независимо В. Д. Шафрановым [87] и Х. Грэдом (Harold Grad) в соавторстве с Х. Рубином (Hanan Rubin) [88]. Уравнение Грэда—Шафранова является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных. Оно описывает осесимметричные тороидальные равновесия, такие как токамак, сферический токамак, сферомак или конфигурация с обращённым полем. Конкретный класс равновесия (например, стандартный токамак) в значительной степени определяется выбором функций $p(\psi)$ и $i_p(\psi)$ и граничными условиями.

Приближённое решения уравнения (15) для токамака с круглым сечением плазменного шнуря в пределе малой величины обратного аспектного отношения a/R было построено В. Д. Шафрановым [89]. В этом

случае магнитные поверхности представляют собой вложенные тороиды с приблизительно круглым сечением, причём центры кругов сдвинуты к внешнему обводу тора тем сильнее, чем меньше радиус сечения, как показано на рисунке 1. Величину сдвига называют *смещением Шафранова* (задача 6).

§24.3. Решение Соловьёва

Для нахождения равновесной плазменной конфигурации уравнение (15) должно быть решено относительно ψ при заданных функциях $p(\psi)$ и $i_p(\psi)$; одну из поверхностей $\psi = \text{const}$ можно выбрать в качестве граничной. Альтернативным способом расчёта равновесия с использованием уравнения Грэда—Шафранова является задание потока ψ на фиксированной граничной магнитной поверхности заданной формы.

В качестве простейшего примера найдём решение уравнения (15) для специального случая, впервые исследованного [В. Д. Шафрановым](#) [16] и дополненного [Л. С. Соловьёвым](#) [90]. Выберем функции $p(\psi)$ и $i_p(\psi)$ так, что

$$4\pi \frac{dp}{d\psi} = -A, \quad \frac{8\pi^2}{c^2} \frac{di_p^2}{d\psi} = -C, \quad (17)$$

где параметры A и C считаются константами. Смысл такого приближения станет ясен позднее. Подставляя функции (17) в уравнение (15), приходим к линейному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\Delta^* \psi = AR^2 + C. \quad (18)$$

Его решение может быть найдено как сумма

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \quad (19)$$

частного решения ψ_0 неоднородного уравнения и общего решения ψ_1 однородного уравнения. Так как

$$\Delta^* \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + 4R^2 \frac{\partial}{\partial R^2} \frac{\partial \psi}{\partial R^2},$$

легко проверить прямой подстановкой, что

$$\psi_0 = \frac{A}{8} (R^2 - R_0^2)^2 + \frac{C}{2} Z^2$$

удовлетворяет неоднородному уравнению (18) и, следовательно, является его частным решением; как станет ясно позднее, параметр R_0 определяет радиус магнитной оси. Общее решение однородного уравнения можно искать в виде двойного полинома по координатам R, Z заданной степени. Для примера выберем полином четвёртой степени

$$\psi_1 = D \left[\frac{1}{2} R^2 Z^2 - \frac{1}{8} (R^2 - R_0^2)^2 \right].$$

Заметим, что константы в предложенном решении намеренно подобраны так, чтобы функции ψ_0 и ψ_1 были равны нулю на магнитной оси с координатами $R = R_0, Z = 0$. Потребуем также, чтобы полоидальный магнитный поток ψ вблизи магнитной оси был пропорционален квадрату малого радиуса r , но не зависел от полоидального угла θ (см. рис. 23.1), как в винтовом пинче. Делая подстановку

$$R = R_0 + r \cos \theta, \quad Z = -r \sin \theta$$

и разлагая ψ по малому радиусу r до квадратичных членов, получаем

$$\psi = \frac{1}{4} [C + AR_0^2 - (C - AR_0^2 + 2DR_0^2) \cos(2\theta)] r^2.$$

Это разложение не зависит от θ , если

$$D = \frac{AR_0^2 - C}{2R_0^2}. \quad (20)$$

При этом сечение магнитных поверхностей вблизи магнитной поверхности будет круглым. Если же величина D немного отличается от значения, определяемого формулой (20), сечение будет иметь форму эллипса, а сами магнитные поверхности будут вложены друг в друга. Теперь должно быть ясно, что выбор функций $p(\psi)$ и $i_p^2(\psi)$, так чтобы их производные были константами, приблизительно соответствует параболическому радиальному профилю давления и квадрату полоидального тока вблизи магнитной оси.

На рисунке 2 показаны сечения магнитных поверхностей плоскостью (R, Z) для случая $C = 0$, когда отсутствует полоидальный ток i_p , а следовательно, и тороидальное магнитное B_t также равно нулю. Этот пример был впервые описан в статье [16, с. 104–105] В. Д. Шафранова. В гидродинамике он известен как сферический вихрь Хилла, а в физике плазмы как конфигурация с обращённым полем (Field Reversed Configuration, FRC). Впервые конфигурации типа FRC наблюдались в экспериментах с тета-пинчами [91]. Конкретно для рисунка 2 константа D

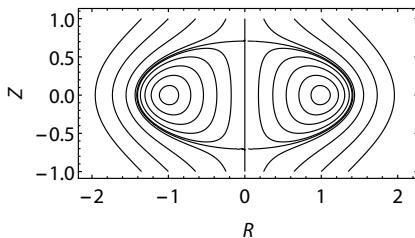


Рис. 2. Пример решения уравнения (18) при $R_0 = 1, A = 1, C = 0, D = 1/2$; впервые исследован в статье В.Д. Шафранова [16], моделирует конфигурацию с обращённым полем.

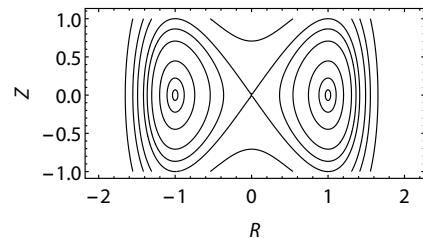


Рис. 3. Пример решения уравнения (18) при $R_0 = 1, A = 1, C = 1/4, D = 1/2$; моделирует сферический токамак с обратной треугольностью.

вычислена по формуле (20), поэтому сечения магнитных поверхностей вблизи магнитной оси, где $\psi = 0$, имеют круглое сечение. Любую поверхность $\psi = \text{const} > 0$ можно принять за границу плазмы, на которой $p = 0$. Если на границе $\psi < A/16$, то получаются ограниченные в пространстве тороидальные конфигурации типа FRC. Снаружи от поверхности с $p = 0$ магнитное поле, необходимое для равновесия, определяется решением уравнения (16).

Рисунок 3 построен для случая, когда имеются полоидальный ток и тороидальное магнитное поле ($C \neq 0$). Он иллюстрирует решение, которое приблизительно соответствует так называемому сферическому токамаку. Здесь константа D отличается от вычисленной по формуле (20), поэтому сечение магнитных поверхностей вблизи магнитной оси имеет форму эллипса.

Несмотря на свою простоту и тот факт, что плотность тока всюду конечна и не равна нулю на краю плазмы, как следовало бы ожидать для реалистичных равновесных конфигураций плазмы, модельные профили (17) давления и полоидального тока позволяют выявить некоторые общие свойства тороидальных равновесий. Мы показали, что вариацией параметров A и C можно продемонстрировать разнообразие возможных равновесных конфигураций плазмы, включая стандартные и сферические токамаки, сферомаки, а также конфигурации с обращённым полем. Решения уравнения Грэда–Шафранова в приближении Соловьёва, которые ещё более реалистично моделируют существующие тороидальные системы удержания плазмы, предложены в статье Дж. Фридберга (Jeffrey Freidberg) и А. Серфона (Antoine Cerfon) [92].

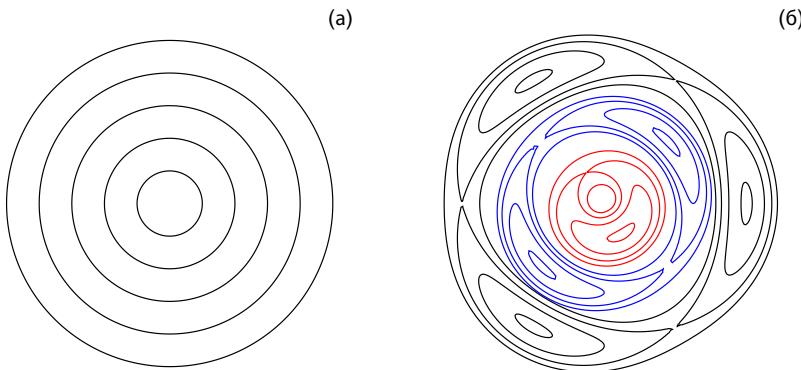


Рис. 4. Сечение магнитных поверхностей: (а) вложенные поверхности; (б) поверхности с островной структурой $m = 1, 2, 3, n = 1$.

Уравнение Грэда–Шафранова, изначально написанное для тороидальных магнитных систем, нашло применение также в теории равновесия плазмы в открытых ловушках типа пробкотрон. Для таких ловушек также можно построить решение в приближении Соловьёва (задача 5).

§24.4. Магнитные острова

До сих пор мы изучали «идеальные» равновесные конфигурации плазмы, образованные системой вложенных магнитных поверхностей, которые окружают одну общую магнитную ось, как показано на рисунке 4а. Существует более широкий класс магнитных полей, которые включают винтовые структуры с так называемыми магнитными островами. Такие структуры формируются вблизи некоторых рациональных поверхностей при наличии несимметричных (зависящих от тороидального угла ϕ) резонансных возмущений магнитного поля, как показано на рисунке 4б.

В самом общем определении *магнитный остров* – это трубка плазмы со своей собственной системой вложенных магнитных поверхностей, окружающих *местную магнитную ось*. Каждый магнитный ост-

ров винтообразно прокручивается вокруг малого и большого обводов тора, следуя вдоль замкнутой магнитной силовой линии, которая является его местной магнитной осью. Вся структура острова замыкается сама на себя после одного или нескольких обходов тора в зависимости от числа обходов, которое делает местная магнитная ось.

Исследование магнитных островов в торе — непростая задача. Поэтому рассмотрим эквивалентный винтовой пинч с длиной $L = 2\pi R_0$, равной длине окружности тороида с большим радиусом R_0 , и введём цилиндрическую систему координат $\{r, \theta, z\}$ с осью z вдоль оси симметрии пинча, как показано на рисунке 22.3. Невозмущённое магнитное поле в таком цилиндре

$$\mathbf{B} = \{0, B_\theta(r), B_z(r)\} \quad (21)$$

зависит только от расстояния r до оси шнура, причём $B_r = 0$. Уравнение магнитных силовых линий

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{dz}{B_z} = \frac{r d\theta}{B_\theta}$$

имеет очевидное решение

$$r = \text{const}, \quad \theta = \text{const} + \frac{z}{q(r) R_0}. \quad (22)$$

Параметр $q(r) = r B_z(r) / R_0 B_\theta(r)$ характеризует запас устойчивости (§22.4) и имеет смысл отношения числа оборотов m магнитной силовой линии по большому азимуту тора (по углу ϕ) к числу оборотов n по малому азимуту тора (по углу θ). Если $q = m/n$, где m и n — взаимно простые целые числа, то в торе магнитная силовая линия замыкается после m оборотов по большому азимуту и n оборотов по малому азимуту. Замкнутые силовые линии лежат на рациональных магнитных поверхностях. В токамаках параметр q является монотонно растущей функцией радиуса r , включая область вне токового канала, в которой $q \propto r^2$.

Представим теперь, что на идеальное магнитное поле цилиндра наложено малое возмущение, которое изменяется по некоторому закону как вдоль оси цилиндра z , так и по азимуту θ . Ввиду однородности задачи по θ и z малое возмущение можно разлагать в ряд Фурье по этим координатам и рассматривать отдельные гармоники независимо от других. Кроме того, ввиду всей той же малости возмущения поправками к ненулевым B_θ, B_z в первом приближении можно пренебречь. Таким образом, будем считать, что возмущение имеет только радиальную компоненту

$$B_r = B_{mn} \sin(\zeta), \quad (23)$$

где B_{mn} — малая амплитуда, $\zeta = m\theta - nz/R_0$, а m и n — целые числа.

Принимая во внимание вид возмущения магнитного поля, будем искать траекторию силовой линии в виде

$$r = r(\theta, z) = r(\zeta)$$

вблизи рациональной поверхности $r = r_{mn}$, такой что

$$q(r_{mn}) = m/n. \quad (24)$$

Так как на рациональной поверхности магнитные силовые линии замыкаются сами на себя после нескольких оборотов, винтовые возмущения с тем же шагом, что и шаг силовой линии, оказываются резонансными и приводят к сильному искажению магнитных поверхностей.

Появление радиального магнитного поля вызывает блуждание силовой линии по радиусу вблизи рациональной магнитной поверхности. Вычисления начнём с того, что запишем производную $dr/d\zeta$, выразив её через компоненты магнитного поля:

$$\frac{dr}{d\zeta} = \frac{dr}{dz} / \frac{d\zeta}{dz} = \frac{dr}{dz} \left(m \frac{d\theta}{dz} - \frac{n}{R_0} \right)^{-1} = \frac{B_r}{B_z} \left(\frac{m}{q} - n \right)^{-1} R_0.$$

Интегрируя полученное таким образом уравнение

$$\frac{dr}{d\zeta} = \frac{B_{mn}}{B_z} \left(\frac{m}{q} - n \right)^{-1} R_0 \sin(\zeta),$$

выберем константу интегрирования δ так, чтобы $r = r_{mn}$ при $B_{mn} = 0$:

$$\frac{1}{R_0} \int_{r_{mn}}^r \left(\frac{m}{q(r)} - n \right) B_z(r) dr = -B_{mn} [\cos(\zeta) + \delta].$$

Вблизи рациональной поверхности, характеризуемой целыми числами m и n , приближённо можно считать, что под знаком интеграла

$$\left(\frac{m}{q(r)} - n \right) \approx -\frac{n^2}{m} q'(r_{mn})(r - r_{mn}),$$

а $B_z(r) \approx B_z(r_{mn})$. Выполнив интегрирование, получим уравнение

$$\frac{n^2 q' B_z}{2m R_0} (r - r_{mn})^2 = B_{mn} [\cos(\zeta) + \delta], \quad (25)$$

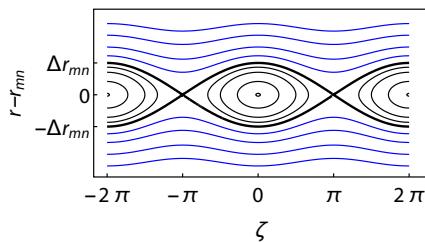


Рис. 5. Проекция магнитных силовых линий на плоскость $r\zeta$ вблизи рациональной магнитной поверхности при наличии резонансного возмущения магнитного поля. Внутри сепаратрисы (жирная линия) формируются магнитные острова.

где параметр $q'B_z$ вычисляется при $r = r_{mn}$.

Пусть для определённости $B_{mn} > 0$, $q' > 0$ и $m > 0$ (другие варианты сводятся к этому случаю посредством сдвига координаты $\zeta \rightarrow \zeta + \pi$ и смены знака m при смене знака q'). Тогда уравнение (25) имеет два вещественных решения

$$r(\zeta) = r_{mn} \pm \sqrt{\frac{2mR_0B_{mn}}{n^2B_zq'}(\cos \zeta + \delta)}$$

при условии, что $\delta > -1$. При $-1 < \delta < 1$ они описывают две половинки замкнутой кривой в плоскости $r\zeta$ (рис. 5). При $\delta = -1$ эта замкнутая кривая вырождается в центр с координатами $r = r_{mn}$, $\zeta = 2\pi k$ (с целым k), а при $\delta \rightarrow 1$ она приближается к сепаратрисе, которая проходит через узловые точки $r = r_{mn}$, $\zeta = \pi + 2\pi k$. При $\delta > 1$ решение описывает две незамкнутые периодические кривые, которые обходят рациональную поверхность снизу и сверху.

В трёхмерном пространстве кривые $r = r(\zeta)$ определяют поверхности $r = r(m\theta - nz/R_0)$. На таких поверхностях давление плазмы постоянно, поскольку оно постоянно вдоль магнитной силовой линии, а незамкнутая бесконечная силовая линия плотно устилает поверхность. Иными словами, уравнение (25) есть не что иное, как уравнение магнитной поверхности, которую в изотропной плазме отождествляют с поверхностью $p = \text{const}$.

Внутри области между частями сепаратрисы вокруг силовой линии с координатами $r = r_{mn}$, $\zeta = 2\pi k$ (т. е. вокруг местной магнитной оси) давление плазмы постоянно на каждой поверхности, отвечающей замкнутой кривой. Вообще говоря, на разных замкнутых кривых давление плазмы различно, но процессы переноса стремятся его выровнять, формируя острова постоянного давления внутри сепаратрисы. В узком смысле именно такие области постоянного давления принято называть

магнитными островами. Ширину острова оценивают по максимальному расстоянию между верхней и нижней частями сепаратрисы:

$$\Delta r_{rm} = \max(r - r_{mn}) = \sqrt{\frac{4mR_0B_{mn}}{n^2B_zq}}. \quad (26)$$

Существование островных структур магнитного поля давно известно, но их значение в физике токамаков, по-видимому, было в полной мере осознано после статьи Т. Стикса ([Thomas Stix](#)) [93].

Образование магнитных островов связано с перестройкой топологии магнитного поля в плазме. В рамках идеальной магнитной гидродинамики такая перестройка невозможна вследствие вмороженности магнитного поля. Поэтому для изучения динамики формирования магнитных островов необходимо учитывать конечную проводимость плазмы. Если представить, что вначале возмущение магнитного поля отсутствовало, а затем было включено в какой-то момент времени, то магнитные острова появятся в плазме вследствие развития тириング-неустойчивости, которой будет посвящена лекция 30.

Сложные возмущения, состоящие из множества периодических возмущений типа (23) с разными номерами m , n , создают сложную структуру магнитных островов. Если расстояние между центрами островов $|r_{mn} - r_{m'n'}|$ меньше их суммарной ширины $\Delta r_{mn} + \Delta r_{m'n'}$, острова перекрываются. Перекрытие островов приводит к стохастизации траекторий магнитных силовых линий, давление выравнивается во всей области перекрытия.

Магнитные острова могут появляться в плазме из-за особенностей магнитной системы установки. Особенно нежелательно наличие возмущений с большими значениями номеров m и n . Они формируют густую сеть рациональных поверхностей (24), облегчая перекрытие магнитных островов. Отсюда возникают жёсткие требования к аккуратности проектирования и изготовления магнитной системы.

Не всякое возмущение магнитного поля приводит к образованию магнитных островов. В частности, магнитные острова не возникают, если $n = 0$, поскольку $q < \infty$ и подходящих рациональных поверхностей (24) не существует. Это наблюдение позволяет в весьма широких пределах безопасно варьировать геометрию магнитного поля в токамаках, создавая равновесные конфигурации плазменного тора с необычной формой сечения. Например, оказалось, что в плазме с D-образной формой сечения можно обеспечить устойчивое удержание плазмы с весьма большим значением параметра $\beta = 8\pi p/B^2$.

Наличие магнитных островов служит причиной усиления процессов переноса плазмы (транспортных процессов). Во-первых, внутри самого острова перенос больше, а во-вторых, взаимодействуя друг с другом, острова порождают множество островков более высокого порядка. Всё это приводит к тому, что в плазме токамака развивается процесс релаксации к состоянию с более низкой энергией, как сказано в следующем параграфе.

§24.5. *Релаксированное равновесие в токамаке

Уравнения магнитогидродинамического равновесия допускают широкий набор профилей давления. Однако эксперимент показывает, что в плазме токамака сами собой устанавливаются некоторые универсальные профили распределения по радиусу давления, температуры и плотности тока. Эти профили достаточно устойчивы по отношению к внешним воздействиям, поэтому можно предположить, что и в токамаке реализуется релаксированное состояние, подобно тому, что имеет место в пинче с обращённым полем (§22.5).

Эксперимент показывает, что существуют два типа релаксированных состояний. Они получили названия *L*-моды и *H*-моды. Мода в данном контексте означает состояние плазмы или режим её удержания. Название «*H*-мода» происходит от английских слов *high mode* (высокая мода) и соответствует лучшему режиму удержания плазмы. Термин «*L*-мода» связан со словом *low* (низкая) и означает режим, который реализуется проще всего. Для достижения *H*-моды требуется обеспечить некоторые специфические условия на периферии плазмы.

Впервые *H*-режим был обнаружен на установке ASDEX [94] при достаточно мощном дополнительном нагреве плазмы, причём существенную роль играл полоидальный дивертор. Так называется конфигурация магнитного поля, когда внутри некоторой тороидальной магнитной поверхности, которую называют сепаратрисной, имеются вложенные друг в друга тороидальные поверхности, а наружу от сепаратрисной поверхности магнитные силовые линии разомкнуты и оканчиваются на стенах камеры. Наличие сепаратрисы делает возможным образование резкого скачка на периферии плазмы, так что профиль температуры в основной области удержания плазмы оказывается более широким.

Существование релаксированных *L*- и *H*-состояний плазмы можно объяснить, используя примерно ту же аргументацию, что и для диффузного пинча (§22.5). Основная идея здесь опять состоит в том, что плазма

релаксирует к состоянию с минимальной энергией при некоторых дополнительных связях. Только и энергия, и связи несколько отличаются от таковых для диффузного пинча.

Дело в том, что плазма токамака гораздо более устойчива, чем плазма диффузного пинча. Если в диффузном пинче достаточно легко развивается процесс пересоединения магнитных силовых линий по всему сечению плазменного шнура, то в токамаке аналогичный процесс реализуется только во время бурного срыва тока. В более спокойной фазе стабильного удержания плазмы в токамаке наблюдаются лишь небольшие винтовые возмущения — так называемые колебания Мирнова. Они могут приводить к пересоединению силовых линий только вблизи рациональных магнитных поверхностей, на которых $q = m/n$, где m, n — целые числа. Как показано в §24.4, вблизи рациональных поверхностей происходит образование магнитных островов. Наличие магнитных островов служит причиной усиления транспортных процессов: во-первых, внутри самого острова перенос больше, а во-вторых, взаимодействуя друг с другом, острова порождают множество островков более высокого порядка. Все это приводит к тому, что и в плазме токамака может развиваться процесс релаксации к состоянию с более низкой энергией. Это состояние можно найти с помощью вариационного принципа, который был сформулирован в 1986 году в трёх публикациях разных авторов [95–97]. Излагаемая ниже теория принадлежит Б. Б. Кадомцеву.

В токамаке тороидальное магнитное поле B_t значительно больше полоидального поля B_p , поэтому энергию тороидального магнитного поля можно считать фиксированной. Следовательно, достаточно учесть лишь энергию полоидального магнитного поля и энергию плазмы:

$$W = \int \left(\frac{B_p^2}{8\pi} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) 2\pi r dr. \quad (27)$$

Что касается связей, то их можно построить на основе приведённых выше рассуждений о возможности развития мелкоостровной структуры магнитных поверхностей.

Вблизи каждого острова одновременно образуются плоские участки на радиальных профилях $p(r)$, $J_t(r)$, $q(r)$, где J_t — плотность тороидального тока. Поэтому при малых отклонениях от стационарного состояния эти величины можно считать функциями одна другой: например p и J_t можно считать функциями q , что и означает наложение связей при вычислении вариаций, которые минимизируют энергию (27). Вычисления упрощаются, если p и J_t выражать через величину $\chi = 1/q$, а

не q . Исходя из формулы (13) и пренебрегая тороидальной кривизной, запишем полоидальное магнитное поле в виде

$$B_p = -\frac{1}{R_0} \frac{d\psi}{dr}, \quad (28)$$

где ψ — полоидальный магнитный поток (4), а r — малый радиус тора (см. рис. 23.1). Заметим также, что

$$B_p = \frac{rB_t}{R_0 q} = \frac{rB_t}{R_0} \chi, \quad (29)$$

причём тороидальное магнитное поле B_t приблизительно постоянно в области удержания плазмы. При образовании острова величина ψ варьируется только вблизи острова, а вдали от него она остаётся той же самой в силу вмороженности магнитного поля в плазму на больших масштабах. Аналогично ведёт себя и плотность тока J_t . Поэтому вариационная задача нахождения минимума энергии при заданной связи может быть сформулирована следующим образом:

$$\delta F = \delta(W + \lambda I_t) = 0, \quad (30)$$

где W — энергия (27), λ — множитель Лагранжа, а

$$I_t = \int 2\pi J_t r dr \quad (31)$$

обозначает полный (тороидальный) ток в плазме. Варьирование в (30) фактически производится по ψ , но сначала нужно учесть, что δF выражается через χ :

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta \int \left[\frac{B_p^2}{8\pi} + \frac{p(\chi)}{\gamma - 1} + \lambda J_t(\chi) \right] 2\pi r dr = \\ &= \int \left[\frac{r^2 B_t^2}{4\pi R_0^2} \chi + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dp}{d\chi} + \lambda \frac{dJ_t}{d\chi} \right] \delta \chi 2\pi r dr. \end{aligned}$$

Подставив сюда

$$\delta \chi = -\frac{1}{rB_t} \frac{d}{dr} \delta \psi$$

и выполнив интегрирование по частям, получим

$$\delta F = \frac{2\pi}{B_t} \int \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 B_t^2}{4\pi R_0^2} \chi + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dp}{d\chi} + \lambda \frac{dJ_t}{d\chi} \right] \delta \psi dr,$$

так как тороидальное магнитное поле B_t приближённо постоянно в области удержания плазмы. Чтобы вариация δF обращалась в нуль при произвольной вариации $\delta\psi$, необходимо выполнение равенства

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 B_t^2}{4\pi R_0^2} \chi + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dp}{d\chi} + \lambda \frac{dJ_t}{d\chi} \right] = 0. \quad (32)$$

В качестве первого приближения можно принять простые функциональные зависимости давления и плотности тока от величины χ :

$$p = p_0 \chi^2, \quad J_t = J_0 \chi^2.$$

После подстановки этих выражений в (32) получим

$$(r^2 + r_*^2)\chi = \text{const}, \quad (33)$$

где через r_*^2 обозначена положительная константа, включающая в себя множитель Лагранжа. В токамаках, как правило, величина χ на магнитной оси близка к единице. Подстановка $\chi = 1$ при $r = 0$ даёт

$$\chi = \frac{1}{1 + r^2/r_*^2}, \quad p = \frac{p_0}{(1 + r^2/r_*^2)^2}, \quad J = \frac{J_0}{(1 + r^2/r_*^2)^2}. \quad (34)$$

Величина r_*^2 может быть связана с полным током: интегрируя в (31) в пределах от 0 до ∞ , получим

$$r_*^2 = \frac{I_t}{\pi J_0}.$$

Найденные профили соответствуют релаксированному состоянию H -режима. Строго говоря, профили p и J_t нигде не обращаются в нуль. Это означает, что на периферии плазмы нужно обеспечить скачки температуры и давления, которые были бы достаточно устойчивы и не влияли бы на релаксацию энергии. Такие скачки могут, например, образовываться на сепаратрисной поверхности в токамаке с полоидальным дивертором.

Если условия для такого скачка отсутствуют и периферийная плазменная шуба оказывается достаточно холодной, то H -мода не осуществляется, т. е. полной релаксации плазмы не происходит. Однако и в этом случае более «шумной» плазмы условный минимум энергии W опять может достигаться, но на более узком классе вариаций. Сузить класс вариаций можно, например, с помощью ещё одной связи. Если считать,

что этот более интенсивный процесс пересоединения силовых линий больше сходен с релаксацией диффузного пинча, то в качестве дополнительной связи можно выбрать условие сохранения магнитной спиральности (22.29). Соответствующая вариационная задача позволяет найти профили давления и плотности тока, плавно убывающие до нуля на границе плазмы $r = a$. Эти профили сходны с экспериментальными профилями L -режима. Тем самым прослеживается непрерывный переход от диффузного пинча к H -режиму хорошего удержания плазмы в токамаке.

Литература

Равновесие плазмы в токамаках детально исследовано в четвёртой главе монографии Б. Б. Кадомцева «Tokamak plasma: a complex physical system» [85] и третьей главе монографии «Tokamaks» под редакцией Дж. Вессона (John Wesson) [86].

Последовательная теория равновесия в тороидальных магнитных системах изложена в статье Л. С. Соловьёва и В. Д. Шафранова в пятом сборнике «Вопросы теории плазмы» [19].

Поучительные примеры решения уравнения Грэда—Шафранова, которые описывают современные тороидальные магнитные системы для удержания плазмы, обсуждаются в главе 6 монографии Дж. Фридберга (Jeffrey Freidberg) «Ideal MHD» [13].

Физика конфигураций со слабым или равным нулю тороидальным полем, таких как конфигурация с обращённым полем (Field Reversed Configurations), изложена в статье М. Тужевского (M. Tuszewski) [98].

Задачи и вопросы

Задача 1. Проверьте, что в пределе $R \rightarrow \infty$ уравнение Грэда—Шафранова переходит в уравнение равновесия винтового пинча.

Решение \Rightarrow 324

Задача 2. Выведите граничные условия для уравнения Грэда—Шафранова на границе плазмы с вакуумом.

Задача 3. Предположим, что задано много гармоник возмущения радиального поля, соответствующих некоторым рациональным магнитным поверхностям внутри плазмы. Когда больше возможностей для пе-

рекрытия магнитных островов — при малом или большом шире (англ. shear, §22.4)?

[Решение](#) ⇒ 325

Задача 4. Все ли внутренние силовые линии магнитного острова имеют одинаковое значение q относительно главной магнитной оси тора? Если так, то рационально ли это значение q ?

[Ответ](#) ⇒ 325

Задача 5. Постройте пример решения уравнения Грэда—Шафранова, который описывает равновесие в пробкотроне.

[Решение](#) ⇒ 325

Задача 6. Сформулируйте вариационный принцип для уравнения Грэда—Шафранова. Запишите лагранжиан $L = \int \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, R, Z) R dR dZ$, такой что равенство нулю его вариации δL при произвольной вариации $\delta\psi$ полоидального потока ψ приводит к уравнению (15).

[Ответ](#) ⇒ 326

Задача 7. Найдите решение уравнения Грэда—Шафранова для токамака с малым обратным аспектным отношением a/R .

[Решение](#) ⇒ 326

Лекция 25

МГД-волны

Уравнение малых колебаний. Альфеновские волны.

Магнитозвуковые волны. *Полярные диаграммы.

МГД-волны в анизотропной плазме.

Шланговая и диамагнитная неустойчивости

Вмороженное магнитное поле придаёт плазме особую упругость, благодаря которой возникают особые МГД-волны, не имеющие аналогов в других средах. В однородной стационарной среде волны с малой амплитудой распространяются независимо друг от друга, поэтому их можно представить в виде линейной суперпозиции *собственных колебаний*. Каждое собственное колебание характеризуют фиксированные значения *волнового вектора* \mathbf{k} и *круговой частоты* ω . Они связаны функциональной зависимостью $\omega = \omega(\mathbf{k})$, которую называют *законом дисперсии* или *дисперсионным уравнением*. Задачей теории является установление этой зависимости. В плазме для одного вектора \mathbf{k} обнаруживается несколько разных частот $\omega(\mathbf{k})$, которые соответствуют собственным колебаниям с разной *поляризацией*. Поляризацию волны характеризует направление переменного поля относительно направления волнового вектора и внешнего стационарного магнитного поля.

Теория волн в плазме представляет собой обширный раздел физики плазмы, которому в Новосибирском государственном университете посвящён отдельный курс лекций «Коллективные явления в плазме». В одной лекции курса «Магнитной гидродинамики» можно коснуться лишь краешка этой сложной науки — мы изучим так называемые альфеновские и магнитозвуковые волны в однородной плазме. В общей теории волн в плазме эти МГД-волны соответствуют низкочастотному пределу, поскольку уравнения магнитной гидродинамики применимы, если частота колебаний значительно меньше ионной циклотронной частоты, $\omega \ll \Omega_i$.

§25.1. Уравнение малых колебаний

Следуя общему методу теоретического анализа собственных колебаний, в рамках идеальной магнитной гидродинамики сначала находят равновесное (в более общей постановке задачи — стационарное) состояние плазмы. Затем на это состояние накладывают возмущение и линеаризуют уравнения МГД по малой амплитуде возмущения. Полученная таким образом система уравнений описывает *линейные колебания*.

Вывод этой системы уравнений начнём с того, что выпишем ещё раз исходные уравнения идеальной МГД (19.20):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div}(\mathbf{V}), \quad (1a)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma p \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (1c)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}]. \quad (1d)$$

Напомним, что d/dt обозначает субстанциональную (или лагранжеву) производную, в частности

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla \rho), \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}.$$

Рассмотрим самое простое стационарное состояние и предположим, что плазма с плотностью ρ_0 и давлением p_0 равномерно заполняет обширное пространство, а магнитное поле $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ однородно и направлено вдоль оси z декартовой системы $\{x, y, z\}$; равновесную скорость плазмы считаем равной нулю, $\mathbf{V}_0 = 0$. Подстановка постоянных величин $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, $\mathbf{V} = 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ в уравнения (1), очевидно, обращает их в тождество, что и означает равновесие данного состояния плазмы.

Наложим на это равновесное состояние малое возмущение $\delta\mathbf{V}$, δp , $\delta\rho$ $\delta\mathbf{B}$ и линеаризуем уравнения (1), т. е. подставим

$$p = p_0 + \delta p, \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{V} = \delta\mathbf{V}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}$$

и оставим лишь те слагаемые, которые содержат малые величины не выше чем в первой степени. Например:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + (\delta\mathbf{V} \cdot \nabla \delta\rho) \rightarrow \frac{\partial \delta\rho}{\partial t},$$

$$\rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) = (\rho_0 + \delta\rho) \operatorname{div}(\delta\mathbf{V}) \rightarrow \rho_0 \operatorname{div}(\delta\mathbf{V}).$$

Слагаемые нулевого порядка, т. е. такие, которые не содержат возмущённых величин, в данном случае обращаются в нуль, поэтому в линеаризованных уравнениях останутся только слагаемые первого порядка, которые содержат возмущённые величины в первой степени. Опуская далее для краткости индекс «0» у невозмущённых величин, вместо (1) получим уравнения

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = -\rho \operatorname{div}(\delta\mathbf{V}), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = -\gamma p \operatorname{div} \delta\mathbf{V}, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\delta\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (2c)$$

$$\rho \frac{\partial \delta\mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla \delta p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \delta\mathbf{B} \times \mathbf{B}]. \quad (2d)$$

Эту систему уравнений можно ещё упростить, если вместо скорости $\delta\mathbf{V}$ ввести в рассмотрение смещение плазмы из положения равновесия ξ , связанное с $\delta\mathbf{V}$ естественным соотношением

$$\delta\mathbf{V} = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (3)$$

Подставив это выражение для $\delta\mathbf{V}$ в уравнения (2), после интегрирования по времени, которое сводится к зачёркиванию $\partial/\partial t$ в первом, втором и третьем уравнениях, находим

$$\delta\rho = -\rho \operatorname{div} \xi, \quad (4)$$

$$\delta p = -\gamma p \operatorname{div} \xi, \quad (5)$$

$$\delta\mathbf{B} = \operatorname{rot}[\xi \times \mathbf{B}]. \quad (6)$$

Первое из этих соотношений просто означает, что плотность в данной точке уменьшается пропорционально вытекшему из объёма количеству жидкости. Примерно такой же смысл имеет второе соотношение.

Рассмотрим третье соотношение. Заметим прежде всего, что в его правую часть входит фактически лишь перпендикулярная магнитному полю компонента ξ_\perp вектора смещения $\xi = \xi_\perp + \xi_\parallel$, так как векторное произведение коллинеарных векторов $\xi_\parallel \equiv (\xi \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}/B^2$ и \mathbf{B} равно нулю. Применяя известное соотношение векторного анализа

$$\operatorname{rot}[\xi_\perp \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\xi_\perp + \xi_\perp \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \xi_\perp - (\xi_\perp \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

и учитывая, что $\mathbf{B} = \text{const}$ (напомним, что \mathbf{B} теперь обозначает \mathbf{B}_0), запишем выражение для $\delta\mathbf{B}$ в виде

$$\delta\mathbf{B} = B \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial z} - \mathbf{B} \operatorname{div} \xi_{\perp}. \quad (7)$$

Первое слагаемое здесь имеет простой смысл. Если ξ_{\perp} изменяется в зависимости от z , то силовые линии магнитного поля, вмороженного в плазму, искривляются (рис. 1 на с. 164). В результате у магнитного поля появляется компонента, пропорциональная $\partial\xi_{\perp}/\partial z$ и перпендикулярная невозмущённому полю. Второе слагаемое в уравнении (7) имеет тот же смысл, что и в выражении (4) для $\delta\rho$. Оно показывает, что при расширении вещества в плоскости xy , перпендикулярной \mathbf{B} , силовые линии раздвигаются, так что магнитное поле вдоль направления \mathbf{B} ослабевает (рис. 2а на с. 167).

Перейдем теперь к уравнению (2г). Сначала упростим второе слагаемое в его правой части, представляющее возмущение силы Ампера

$$\delta\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \delta\mathbf{B} \times \mathbf{B}]. \quad (8)$$

Для этого воспользуемся векторным тождеством

$$[\operatorname{rot} \delta\mathbf{B} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \delta\mathbf{B} - \nabla(\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{B})$$

и учтём, что

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \delta\mathbf{B} = B \frac{\partial \delta\mathbf{B}}{\partial z} = B^2 \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial z^2} - B^2 \nabla_{\parallel} \operatorname{div} \xi_{\perp},$$

где $\nabla_{\parallel} = \hat{z} \partial/\partial z$ — проекция градиента в направлении оси z , а

$$-\nabla(\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{B}) = B^2 \nabla \operatorname{div} \xi_{\perp}.$$

Следовательно,

$$\delta\mathbf{f} = \frac{B^2}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial z^2} + \nabla_{\perp} \operatorname{div} \xi_{\perp} \right), \quad (9)$$

где $\nabla_{\perp} = \nabla - \nabla_{\parallel}$. Подставляя $\delta\rho$ и $\delta\mathbf{f}$ в уравнение (2г), получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla \operatorname{div} \xi + c_A^2 \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial z^2} + c_A^2 \nabla_{\perp} \operatorname{div} \xi_{\perp}, \quad (10)$$

где $c_s = \sqrt{\gamma p/\rho}$ — скорость звука в газе, $c_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ — альфвеновская скорость. Уравнение (10) описывает малые МГД-колебания однородной идеально проводящей среды.

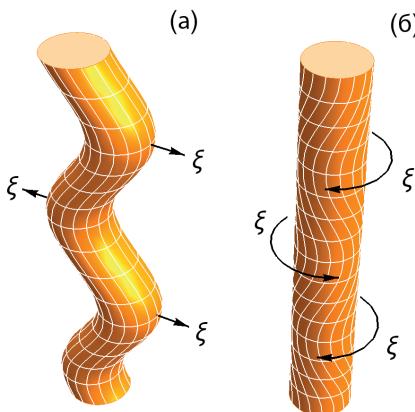


Рис. 1. Смещение плазмы в альфвеновской волне: изгибание (а) и кручение (б) трубки плазмы, образованной магнитными силовыми линиями; возмущения плотности и давления плазмы отсутствуют.

§25.2. Альфвеновские волны

Одно векторное уравнение (10) соответствует трём скалярным и поэтому описывает три типа волн. Среди них наиболее удивительными свойствами обладают альфвеновские волны, названные в честь Х. Альфена (Hannes Alfvén, 1942) [63].

Чтобы получить уравнение альфвеновских колебаний, рассмотрим более узкий класс функций ξ , в котором смещение вдоль магнитного поля отсутствует, а движение в поперечном направлении является неожидаемым:

$$\xi_{\parallel} = 0, \quad \operatorname{div} \xi_{\perp} = 0. \quad (11)$$

При этом $\operatorname{div} \xi = 0$, так что в правой части уравнения (10) остаётся только второе слагаемое, и мы получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t^2} = c_A^2 \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial z^2} \quad (12)$$

для ξ_{\perp} . Оно описывает альфвеновскую волну (англ. shear Alfvén wave). Помимо этого уравнение возникает в теории малых колебаний натянутой струны. Любое его решение можно представить в виде колебаний, распространяющихся вдоль оси z (вдоль струны) со скоростью $\pm c_A$. В альфвеновских колебаниях возмущается только магнитное поле, причём

$$\delta \mathbf{B} = B \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial z}, \quad (13)$$

а $\delta\rho = 0$ и $\delta\mathbf{p} = 0$, как следует из уравнений (4) и (5) ввиду $\operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0$.

Аналогия со струной возникает не только из-за формального сходства уравнений малых колебаний — она имеет и более глубокий физический смысл. В самом деле, вследствие эффекта вморможенности смещение плазмы меняет направление магнитного поля согласно уравнению (13), искривляя силовые линии. Натяжение силовых линий точно так же, как натяжение струны, создаёт возвращающую силу, которая стремится вернуть плазму в исходное состояние. Однако в исходное состояние плазма возвращается, имея некоторую скорость, и поэтому продолжает движение, искривляя силовую линию в противоположном направлении. Так возникают альфвеновские колебания.

Решение уравнения (12) при дополнительном условии (11) легко найти, если начать со случая плоской монохроматической волны. Как известно, в однородной среде произвольное возмущение можно представить в виде суперпозиции таких волн. Подставляя

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\xi}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \quad (14)$$

в уравнение (12), получаем *дисперсионное уравнение*

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 c_A^2, \quad (15)$$

где k_{\parallel} — проекция волнового вектора \mathbf{k} на направление магнитного поля. Уравнение имеет два решения

$$\omega = \pm k_{\parallel} c_A.$$

Если ввести обозначение

$$\mathbf{c}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

для вектора альфвеновской скорости, дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$\omega(\mathbf{k}) = \pm(\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_A). \quad (16)$$

Двум знакам в формуле (16) отвечают два направления групповой скорости

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \pm\mathbf{c}_A$$

и, соответственно, два направления распространения волны: вдоль и против направления магнитного поля. С точностью до этих знаков групповая скорость альфвеновских волн не зависит ни от направления волнового вектора \mathbf{k} , ни от длины волны $2\pi/k$. Этот факт кардинально отличает альфвеновские волны от волн других типов. Например, частота

звуковой волны в газе $\omega = \pm kc_s$ не зависит от направления распространения, а групповая скорость $\partial\omega/\partial\mathbf{k} = \pm c_s \mathbf{k}/k$ параллельна волновому вектору; то же утверждение верно в отношении электромагнитных волн в изотропной среде.

Поскольку групповая скорость альфвеновских волн не зависит ни от частоты, ни от длины волны, т. е. отсутствует частотная и пространственная дисперсия, из любого набора плоских альфвеновских волн можно составить пакет волн, который будет распространяться, не меняя своей формы. Единственное ограничение состоит в том, что должно быть выполнено условие (11). Для возмущений вида (14) оно означает, что вектор смещения ξ должен быть перпендикулярен как магнитному полю, так и волновому вектору:

$$(\mathbf{k} \cdot \xi) = 0, \quad (\mathbf{B} \cdot \xi) = 0. \quad (17)$$

Ввиду отсутствия дисперсии альфвеновские волны могут быть локализованы вблизи трубки магнитных силовых линий и могут двигаться вдоль трубки, не расплываясь. Например, если в некоторой плоскости производится смещение плазмы типа кручения, как на рисунке 1б, то соответствующее возмущение побежит вдоль силовых линий с альфвеновской скоростью и будет локализовано внутри цилиндра, в котором начальное смещение было отлично от нуля. Общее решение уравнений (11) и (12) можно представить в виде

$$\xi(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{h} \times \nabla \Psi_+(\mathbf{x} - \mathbf{c}_A t)] + [\mathbf{h} \times \nabla \Psi_-(\mathbf{x} + \mathbf{c}_A t)], \quad (18)$$

где \mathbf{h} — единичный вектор в направлении магнитного поля, а произвольные функции Ψ_+ и Ψ_- описывают волны, бегущие в противоположные стороны.

§25.3. Магнитный звук

Рассмотрим два других типа колебаний, в которых ξ_{\parallel} и $\operatorname{div} \xi_{\perp}$ отличны от нуля. Для анализа таких колебаний удобно использовать уравнения именно для этих двух величин.

Проецируя уравнение (10) на направление магнитного поля, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial z^2} + c_s^2 \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \xi_{\perp} \quad (19)$$

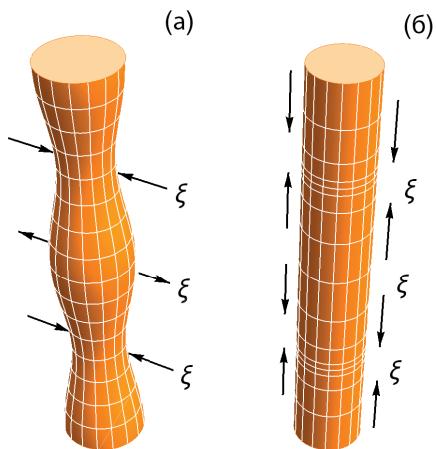


Рис. 2. Смещение плазмы в звуковых волнах в пределе $c_s^2/c_A^2 \ll 1$: (а) магнитный звук, (б) ионно-звуковая волна; при произвольном отношении c_s^2/c_A^2 эти волны называют быстрым и медленным магнитным звуком.

для продольной компоненты смещения ξ_{\parallel} . Уравнение для $\operatorname{div} \xi_{\perp}$ получится, если взять дивергенцию перпендикулярной магнитному полю составляющей уравнения (10). Результат имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \xi_{\perp} = c_s^2 \nabla_{\perp}^2 \operatorname{div} \xi_{\perp} + c_s^2 \nabla_{\perp}^2 \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial z} + c_A^2 \nabla^2 \operatorname{div} \xi_{\perp}, \quad (20)$$

где $\nabla_{\perp}^2 = \operatorname{div} \nabla_{\perp}$, $\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \partial^2/\partial z^2$.

Уравнения (19) и (20) нужно решать совместно. Для начала рассмотрим случай плазмы низкого давления, который характеризуется малым значением параметра

$$\beta = \frac{8\pi p}{B^2} \sim \frac{c_s^2}{c_A^2} \ll 1.$$

В этом случае эти уравнения приближённо «расцепляются». Действительно, при $c_s \ll c_A$ в уравнении (20) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными c_s^2 , получив в итоге *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_A^2 \nabla^2 \psi, \quad (21)$$

где введено обозначение $\psi = \operatorname{div} \xi_{\perp}$. Это уравнение описывает так называемый *магнитный звук* с законом дисперсии

$$\omega(\mathbf{k}) = \pm k c_A. \quad (22)$$

Для сравнения укажем, что закон дисперсии обычных звуковых колебаний в плазме без магнитного поля имеет вид $\omega(\mathbf{k}) = \pm kc_s$. Для колебаний с частотой (22) левая часть уравнения (19) существенно больше, чем его правая часть, за исключением случая, когда $\xi_{\parallel} \ll \xi_{\perp}$, поэтому в магнитозвуковых колебаниях приблизительно $\xi_{\parallel} = 0$. Упругая сила в таких колебаниях создаётся давлением магнитного поля, причём альфеновскую скорость $c_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ можно рассматривать как скорость звука $c_s = \sqrt{\gamma p/\rho}$ в среде, где давление p равно $B^2/8\pi$, плотность $\rho = m_i n_i$, а показатель адиабаты $\gamma = 2$. Условие $\gamma = 2$ связано с вмороженностью поля в плазму, благодаря чему при $\xi_{\parallel} = 0$ магнитное поле должно изменяться пропорционально плотности, $B \propto \rho$, а его давление должно быть пропорционально квадрату плотности плазмы.

Уравнение (19) описывает также самостоятельную ветвь колебаний, в которых $\operatorname{div} \xi_{\perp}$ можно положить равной нулю. Для этих колебаний имеем

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial z^2} \quad (23)$$

с законом дисперсии

$$\omega(\mathbf{k}) = \pm k_{\parallel} c_s. \quad (24)$$

Такие колебания называют *ионно-звуковыми*. Они представляют собой звук, распространяющийся вдоль магнитного поля, причём смещение плазмы происходит только вдоль магнитного поля.

Таким образом, трём типам волн соответствуют три типа смещений с тремя разными поляризациями. В альфеновских волнах смещение приводит к искривлению магнитных силовых линий (рис. 1), в магнитозвуковых — к их сжатию и разрежению (рис. 2а), а в ионно-звуковых при $\beta \ll 1$ магнитное поле почти не возмущается (рис. 2б) и плазма совершает одномерные движения, т. е. каждая её трубка «заключена в жёсткие магнитные стенки».

Если параметр β не мал, то разделение на магнитный и ионный звук провести нельзя. В этом случае уравнения (19), (20) нужно решать совместно. Поскольку они линейны, произвольное возмущение ξ можно представить в виде суперпозиции плоских волн. Для одной такой плоской волны вида (14) из дифференциальных уравнений (19), (20) получаем систему алгебраических уравнений

$$(\omega^2 - c_s^2 k_{\parallel}^2) \xi_{\parallel} = c_s^2 k_{\parallel} (\mathbf{k}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp}),$$

$$(\omega^2 - c_A^2 k^2 - c_s^2 k_\perp^2)(\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp) = c_s^2 k_\parallel k_\perp^2 \xi_\parallel.$$

Чтобы она имела нетривиальные (то есть не равные тождественно нулю) решения, её детерминант должен обращаться в нуль. Это требование приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega^4 - (c_A^2 + c_s^2)k^2\omega^2 + c_A^2 c_s^2 k_\parallel^2 k^2 = 0, \quad (25)$$

которое является квадратным относительно ω^2 и, следовательно, имеет два корня:

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2} \left(k^2 c_A^2 + k^2 c_s^2 \pm \sqrt{(k^2 c_A^2 + k^2 c_s^2)^2 - 4k^2 k_\parallel^2 c_A^2 c_s^2} \right). \quad (26)$$

Больший корень ω_+^2 , который получается выбором знака «плюс» в формуле (26), соответствует *быстрой магнитозвуковой волне* (англ. fast magnetosonic wave), а меньший корень ω_-^2 , который получается выбором знака «минус», принадлежит *медленной магнитозвуковой волне* (англ. slow magnetosonic wave). Нетрудно убедиться, что выражение под знаком квадратного корня в (26) всегда положительно (или в крайнем случае равно нулю), а значение квадратного корня меньше, чем сумма первых двух слагаемых (или в крайнем случае равно этой сумме); поэтому оба корня всегда положительны. Это означает, что обе волны существуют при всех возможных значениях параметров, причём их частоты вещественны. Вектор смещения магнитозвуковых волн лежит в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{B} . Этот факт можно сформулировать в виде равенства

$$(\boldsymbol{\xi} \cdot [\mathbf{k} \times \mathbf{B}]) = 0. \quad (27)$$

При $c_s^2 \ll c_A^2$ быстрая волна превращается в магнитозвуковую, а медленная — в ионно-звуковую, которые обсуждались выше. В этом пределе

$$\omega_+^2 \approx k^2 c_A^2, \quad \omega_-^2 \approx k_\parallel^2 c_s^2.$$

При $c_s^2 \gg c_A^2$ быстрая магнитозвуковая волна становится обычной звуковой волной, а медленная волна вырождается в альфвеновскую. Она имеет тот же закон дисперсии (15), что и альфвеновская волна, но перпендикулярную ей поляризацию. Можно сказать, что в несжимаемой среде (чему формально соответствует предел $c_s \rightarrow \infty$) существует альфвеновская волна с двумя независимыми поляризациями. В этом случае

$$\omega_+^2 \approx k^2 c_s^2, \quad \omega_-^2 \approx k_\parallel^2 c_A^2.$$

Стоит указать ещё два случая, когда дисперсионное уравнение (25) существенно упрощается. Если волна распространяется строго вдоль магнитного поля, то есть $k_{\perp} = 0$ и $k^2 = k_{\parallel}^2$, тогда

$$\omega_+^2 = \max(c_A^2, c_s^2)k_{\parallel}^2, \quad \omega_-^2 = \min(c_A^2, c_s^2)k_{\parallel}^2.$$

Если же волна распространяется поперёк магнитного поля, то есть $k_{\parallel} = 0$ и $k^2 = k_{\perp}^2$, то

$$\omega_+^2 = (c_A^2 + c_s^2)k_{\perp}^2, \quad \omega_-^2 = 0.$$

В общем случае «косого» распространения волн под произвольным углом к магнитному полю интерпретации выражений (26) помогают фазовые и групповые поляры, которые построены в следующем параграфе.

§25.4. *Полярные диаграммы

Полезным инструментом исследования МГД-волн являются полярные диаграммы. Фазовая полярная диаграмма (*фазовая поляра*) представляет собой графическое изображение зависимости фазовой скорости

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} \quad (28)$$

от угла θ между направлениями волнового вектора \mathbf{k} и магнитного поля \mathbf{B} в полярной системе координат (v_{ph}, θ) . Заметим, что величина v_{ph} не зависит от длины k волнового вектора \mathbf{k} , однако это утверждение верно только в рамках магнитной гидродинамики и выражает отсутствие частотной дисперсии, учёт которой был бы необходим при $\omega \gtrsim \Omega_i$.

Фазовые поляры всех трёх типов МГД-волн показаны на рисунке 3а при $c_s < c_A$ и на рисунке 3б при $c_s > c_A$. Для быстрой магнитозвуковой волны фазовая поляра имеет вид овала, сплюснутого вдоль направления магнитного поля, а для медленной — двух соприкасающихся овалов, сплюснутых в поперечном направлении (рис. 3а). При $\beta = c_s^2/c_A^2 \rightarrow 0$ большой овал переходит в окружность радиуса c_A , а диаграмма для ионно-звуковой волны превращается в две соприкасающиеся окружности с диаметром c_s . В противоположном предельном случае $c_s/c_A \rightarrow \infty$, который соответствует приближению несжимаемой жидкости, полярная диаграмма магнитного звука переходит в две соприкасающиеся окружности с диаметром c_A . Точно такая же диаграмма соответствует альфеновской волне при любых β .

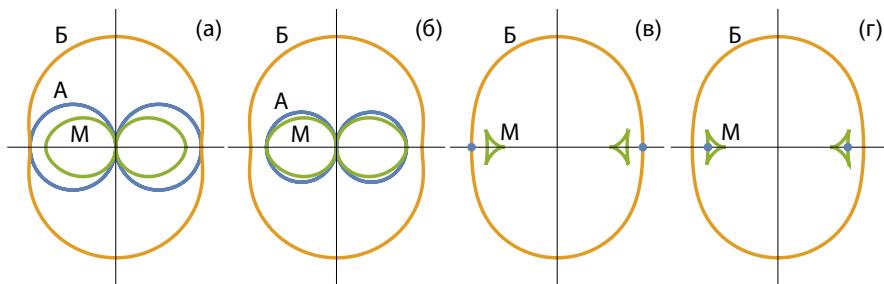


Рис. 3. Фазовая (а, б) и групповая (в, г) поляры при $c_s^2/c_A^2 = 2/3$ (а, в) и $c_s^2/c_A^2 = 3/2$ (б, г): А – альфеновская волна, Б – быстрая магнитозвуковая волна, М – медленная магнитозвуковая волна; магнитное поле направлено горизонтально; (в, г) групповая поляра альфеновской волны вырождается в точку.

Наряду с фазовой полярной диаграммой можно построить поверхность фазовых скоростей для любых векторов \mathbf{k} в трёхмерном пространстве. Однако в данном случае такие поверхности получаются вращением двумерных диаграмм вокруг направления магнитного поля, поэтому переход к трёхмерному представлению не добавляет новых знаний. С практической точки зрения более интересна полярная диаграмма групповой скорости

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad (29)$$

изображающая зависимость величины групповой скорости от её направления. Групповую поляру называют *диаграммой Фридрихса*, но иногда диаграммами Фридрихса называют и фазовую, и групповую поляры.

Как известно, групповая скорость определяет скорость распространения волнового пакета. В приближении идеальной МГД групповая скорость не зависит от числового значения \mathbf{k} . Это означает, что все возмущения, распространяющиеся в данном направлении, имеют одну и ту же скорость. В частности, возмущение в виде импульса всё время будет иметь одну и ту же неизменную форму. Отсюда видно, что групповая полярная диаграмма представляет собой картину импульса, распространяющегося от мгновенного точечного источника: каждому участку диаграммы можно поставить в соответствие небольшой волновой пакет, распространяющийся с групповой скоростью.

Диаграммы Фридрихса изображены на рисунках 3г и д соответственно при $c_s < c_A$ и $c_s > c_A$. Для быстрой магнитозвуковой волны диаграм-

ма имеет вид овала, для медленной — двух «заостренных» треугольников, а для альфвеновской волны она вырождается в две точки. Групповая поляра показывает, как распространяется импульс от мгновенного точечного источника: соответствующее возмущение отлично от нуля в области между быстрой и медленной полярами с повышенной амплитудой вблизи границ, т. е. поляр.

Интересная особенность в диаграммах Фридрихса возникает при $c_s = c_A$ [99, 100]. В этом случае формула (26) предсказывает

$$\omega_{\pm}^2 = k^2 c_A^2 (1 \pm |\sin \theta|),$$

где θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{B} , т. е. $\cos \theta = k_{\parallel}/k$. На фазовой поляре при этом образуется угловая точка при $\theta = 0$ и, соответственно, вектор групповой скорости не стремится к горизонтальному направлению при $\theta \rightarrow 0$, а со-ставляет с ним конечный угол, равный приблизительно $\theta_0 = 26^\circ$. В этом случае в плазме должно наблюдаться явление, аналогичное внутренней конической рефракции в оптике: падающий вдоль \mathbf{B} нормально к границе «пучок» магнитогидродинамических волн должен развернуться в конус с углом раствора $\theta_0 = 26^\circ$. Однако до настоящего времени это явление экспериментально не наблюдалось.

§25.5. МГД-волны в анизотропной плазме

В анизотропной плазме альфвеновские и магнитозвуковые колебания могут стать неустойчивыми, причём амплитуда неустойчивых решений нарастает по экспоненциальному закону.

Для колебаний альфвеновского типа (11) в анизотропной плазме вместо (12) получаем уравнение (задача 9)

$$\frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t^2} = \frac{2p_m + p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho} \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial z^2},$$

где $p_m = B^2/8\pi$. Оно описывает поперечные колебания с частотой

$$\omega_{\pm} = \pm k_{\parallel} c_A \sqrt{1 + \frac{\beta_{\perp}}{2} - \frac{\beta_{\parallel}}{2}}, \quad (30)$$

где $\beta_{\perp} = 8\pi p_{\perp}/B^2$, $\beta_{\parallel} = 8\pi p_{\parallel}/B^2$. Как и в изотропной плазме, они распространяются вдоль магнитного поля, но при

$$\beta_{\parallel} > 2 + \beta_{\perp} \quad (31)$$

их частота становится мнимой, так что

$$\omega = \pm i\Gamma, \quad \Gamma = k_{\parallel} c_A \sqrt{\frac{\beta_{\parallel}}{2} - \frac{\beta_{\perp}}{2} - 1}. \quad (32)$$

Одна из двух частот (32) имеет отрицательную мнимую часть, $\omega = -i\Gamma$; соответствующее ей возмущение затухает со временем по экспоненциальному закону $\xi \propto \exp(-i\omega t) = \exp(-\Gamma t)$, причём параметр Γ в этом случае называют *декрементом затухания*. Частота с положительной мнимой частью, $\omega = +i\Gamma$, соответствует *шланговой неустойчивости* (англ. kink, firehorse). Название навеяно аналогией с неустойчивостью гибкого шланга, который начинает сильно извиваться при большом напоре протекающей через шланг жидкости (задача 8). Неустойчивое возмущение нарастает со временем по экспоненциальному закону $\xi \propto \exp(+\Gamma t)$, а параметр Γ в таком случае называют *инкрементом неустойчивости*.

Шланговая неустойчивость была теоретически предсказана Л. И. Рудаковым и Р. З. Сагдеевым [101] в рамках МГД-приближения. В кинетической теории порог развития этой неустойчивости [102, 103] заметно отличается:

$$\beta_{\parallel} > 1 + \beta_{\perp}. \quad (33)$$

Считается, что шланговая неустойчивость развивается в плазме солнечного ветра и что с ней связана диссипация на фронте межпланетных ударных волн.

Зеркальная неустойчивость, которую также называют *диамагнитной*, является антиподом шланговой неустойчивости в том смысле, что она возникает при обратном соотношении между p_{\perp} и p_{\parallel} . МГД-теория с использованием адиабат Чу—Голдбергера—Лоу предсказывает [101], что возмущения магнитозвукового типа неустойчивы, если

$$\frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} > 6 + \frac{6}{\beta_{\perp}} \quad (34)$$

(задача 10). Однако кинетическая теория предсказывает существенно более низкий порог развития зеркальной неустойчивости [102, 104]:

$$\frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} > 1 + \frac{1}{\beta_{\perp}} \quad (35)$$

(задача 11). Существенное расхождение критериев (31) и (33), (34) и (35) свидетельствует об ограниченности теории Чу—Голдбергера—Лоу.

Литература

В книге «Коллективные явления в плазме» [28] Б. Б. Кадомцева материалу лекции соответствует §1 главы 2. В «Электродинамике сплошных сред» [71] Л. Д. Ланда и Е. М. Лифшица МГД-волнам посвящён параграф §69; в последующих параграфах здесь рассмотрены МГД-течения с разрывами и ударные волны в плазме.

Эксперименты по регистрации МГД-волн описаны в §4.18 «Введение в физику плазмы» Ф. Чена (Francis Chen) [105].

В §6 главы 5 «Основ физики плазмы» Н. Кролла (Nicholas Krall) и А. Трайвелписа (Alvin Trivelpiece) [106] приведён вывод дисперсионного уравнения МГД-волн в рамках теории Чу—Голдбергера—Лоу. Более детально это уравнение исследовано в статье Т. Ф. Волкова в сборнике «Вопросы теории плазмы» [18].

Введением в физику течений проводящей жидкости в магнитном поле и теорию ударных волн в замагниченной плазме может стать учебник «Основы магнитной гидродинамики» Р. В. Половина и В. П. Демущего [7]. Его дополняет учебник «Магнитная гидродинамика» А. Г. Куликовского и Г. А. Любимова [12].

Задачи и вопросы

Задача 1. Проверьте, что формула (18) даёт общее решение уравнений (11) и (12) для вектора смещения плазмы в альфвеновской волне.

Задача 2. Идеально проводящая жидкость с плотностью ρ находится в однородном магнитном поле $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. В момент времени $t = 0$ в жидкости возникает поле скоростей $V_x = -\omega(z)y$, $V_y = \omega(z)x$, $V_z = 0$. Найдите магнитное поле в произвольный момент времени $t > 0$, считая возникающее возмущение магнитного поля малым по сравнению с \mathbf{B} .

Решение $\Rightarrow 333$

Задача 3. Вычислите энергию альфвеновской волны.

Решение $\Rightarrow 333$

Задача 4. В приближении резистивной МГД вычислите декремент затухания альфвеновской волны, вызванного конечной проводимостью плазмы.

Решение $\Rightarrow 334$

Задача 5. При каких условиях фазовые скорости быстрой и медленной магнитозвуковых волн будут равны? Какова будет поляризация волн при таком вырождении?

[Ответ](#) $\Rightarrow 335$

Задача 6. В начальный момент времени в однородной изотропной плазме, помещённой в однородное магнитное поле \mathbf{B} , возникает локальное возмущение (например, маленький взрыв). Три наблюдателя расположены на равном расстоянии R от места взрыва под углом 0° , 45° и 90° к направлению магнитного поля. Через какое время наблюдатели узнают о взрыве? Какой наблюдатель узнает первым? Считайте известными скорость звука c_s и альфеновскую скорость c_A .

[Решение](#) $\Rightarrow 335$

Задача 7. Плоскопараллельный слой анизотропной плазмы с толщиной a помещён во внешнее магнитное поле $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, параллельное слою. Найдите собственные частоты колебаний слоя, в которых все величины зависят только от координаты x , перпендикулярной слою. Плотность плазмы ρ , давление p_\perp , p_\parallel .

[Решение](#) $\Rightarrow 336$

Задача 8. По идеально гибкому нерастяжимому шлангу, натянутому с силой F , протекает жидкость с плотностью ρ и скоростью v . Найдите условие возникновения шланговой неустойчивости для возмущений с характерной длиной, значительно превышающей радиус сечения шланга a .

[Ответ](#) $\Rightarrow 337$

Задача 9. Выведите уравнение альфеновских колебаний в анизотропной плазме.

[Решение](#) $\Rightarrow 337$

Задача 10. Проверьте, что в анизотропной плазме магнитозвуковая волна может быть неустойчивой (зеркальная неустойчивость).

[Решение](#) $\Rightarrow 339$

Задача 11. Получите критерий зеркальной неустойчивости, вычислив возмущение давления плазмы при изменении магнитного поля с помощью дрейфового кинетического уравнения.

[Решение](#) $\Rightarrow 340$

Лекция 26

Гидромагнитная устойчивость плазмы

Неустойчивости плазмы. Метод малых колебаний.

Спектр МГД-колебаний. Энергетический принцип.

Потенциальная энергия возмущений.

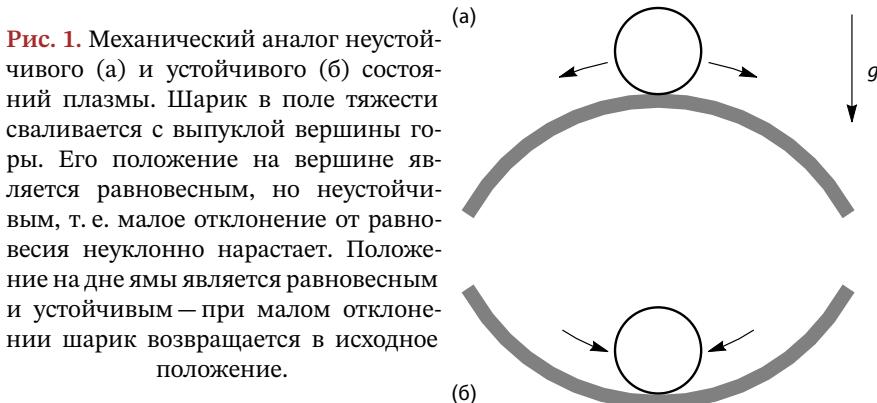
* Вариационный принцип

Подобно тому как механическое равновесие материальной точки в поле сил не всегда устойчиво, плазма может быть неустойчива относительно отклонений от положения равновесия. Неустойчивые равновесия крайне сложно, если вообще возможно, реализовать на практике. Попробуйте, например, установить шарик на вершине полусферы, как на рисунке 1. Это положение неустойчиво в отличие от положения шарика на дне впадины.

Плазма — крайне капризное творение природы. При малейшей возможности она вываливается на стенки лабораторной установки, что неоднократно случалось на заре термоядерных исследований. Изучение устойчивости должно быть следующим обязательным этапом теоретического исследования плазмы после отыскания равновесной конфигурации. Заключительная часть нашего курса магнитной гидродинамики целиком посвящена рассмотрению различного рода неустойчивостей плазмы.

§26.1. Неустойчивости плазмы

Допустим, что облако плазмы приведено в состояние, которое по всем расчётам является равновесным. Это означает, что плотность, давление и все другие параметры, характеризующие свойства плазмы, не должны меняться со временем. Будет ли такое состояние сохраняться



бесконечно долго или же малые случайные возмущения (флуктуации) будут нарастать, вызывая разрушение исходного равновесия? Такова в самой общей постановке задача об устойчивости. Общепринятый подход к её решению состоит в последовательном рассмотрении эволюции различных возмущений, начиная с простейших моделей идеальной МГД. Постепенно усложняя теорию, затем можно учсть диссиацию, многокомпонентность плазмы, кинетические эффекты и т.д. Существенно, что надобность в этих дополнительных исследованиях возникает, только если плазма устойчива в МГД-приближении, так как МГД-неустойчивости на практике оказываются самыми разрушительными и самыми быстрыми.

Все неустойчивости в плазме условно можно разделить на две большие группы — гидромагнитные и кинетические.

К *гидромагнитным* (гидродинамическим) относят такие неустойчивости, которые связаны с перемещением макроскопических фрагментов плазмы. При теоретическом исследовании таких неустойчивостей используют уравнения магнитной гидродинамики, приближённо считая, что все заряженные частицы в каждом небольшом, но макроскопическом объёме совершают одно и то же среднее движение.

В *кинетических* неустойчивостях существенно различие в движении разных групп частиц, находящихся в одном и том же объёме. Примером является пучковая неустойчивость, возникающая в результате взаимодействия частиц пучка с электронами и ионами плазмы. Кинетические неустойчивости, как правило, связаны с высокочастотными и коротковолновыми колебаниями. В этом смысле они являются «микро-

скопическими» по отношению к крупномасштабному гидродинамическому движению.

Различают также потенциальные (или электростатические) и электромагнитные неустойчивости. В *потенциальных неустойчивостях* возмущение магнитного поля считается равным нулю, а электрическое поле выражается через электрический потенциал:

$$\delta\mathbf{B} = 0, \quad \delta\mathbf{E} = -\nabla\delta\varphi.$$

В *электромагнитных неустойчивостях*

$$\delta\mathbf{B} \neq 0.$$

Представление об отсутствии $\delta\mathbf{B}$ является приближением в той или иной степени и используется для упрощения задачи. Гидромагнитные неустойчивости могут быть как потенциальными, так и электромагнитными. То же утверждение верно и в отношении кинетических неустойчивостей.

Существуют два основных метода исследования МГД-неустойчивостей.

Метод малых колебаний, который также называют *спектральным методом*, позволяет не только ответить на вопрос, устойчиво ли состояние плазмы, но и исследовать спектральный состав неустойчивых возмущений, вычислить их инкременты нарастания. Однако этот метод технически сложен и поэтому не всегда может быть полностью реализован.

Энергетический принцип основывается на гипотезе, что в устойчивом равновесии достигается минимум потенциальной энергии. Энергетический принцип позволяет сформулировать критерий устойчивости, но не позволяет найти собственные частоты неустойчивых колебаний.

Шланговая и зеркальная неустойчивости, рассмотренные в §25.5, являются примерами МГД-неустойчивостей, которые возникают при сильной анизотропии плазмы. Другой основной причиной возникновения неустойчивых колебаний плазмы является неоднородность её плотности, давления и температуры в сочетании с неоднородностью магнитного поля и кривизной магнитных силовых линий. Одного этого перечня достаточно, чтобы согласиться с утверждением, что изучение неустойчивостей плазмы даже в простейшем МГД-приближении требует привлечения изощрённого математического аппарата.

§26.2. Метод малых колебаний

В связи с большими математическими трудностями обычно выделяют более простую задачу — исследовать устойчивость относительно малых возмущений. Идея такого подхода состоит в том, что плазма с равновесными параметрами, такими как плотность ρ_0 , давление p_0 , магнитное поле \mathbf{B}_0 , скорость \mathbf{V}_0 , подвергается малой виртуальной деформации, при которой возникают добавки $\delta\rho$, δp , $\delta\mathbf{B}$, $\delta\mathbf{V}$ к равновесным значениям параметров плазмы. Судьба такого состояния плазмы затем прослеживается с помощью уравнений МГД. Предположение о малости амплитуды облегчает математическое исследование таких деформаций, так как позволяет линеаризовать уравнения.

В отличие от предыдущей лекции, считаем, что плазма неоднородна, но по-прежнему в равновесии $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$. Временно сохраняя индекс «0» у невозмущённых величин, запишем линеаризованные уравнения:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \delta\mathbf{V} \cdot \nabla \rho_0 = -\rho_0 \operatorname{div} \delta\mathbf{V}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + \delta\mathbf{V} \cdot \nabla p_0 = -\gamma p_0 \operatorname{div} \delta\mathbf{V}, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\delta\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0], \quad (1c)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta\mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla \delta p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 \times \delta\mathbf{B}] + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \delta\mathbf{B} \times \mathbf{B}_0]. \quad (1d)$$

По сравнению с системой уравнений (25.2) в предыдущей лекции здесь добавлены члены с $\nabla \rho_0$ и ∇p_0 в первых двух уравнениях, а в последнем уравнении учтено, что в равновесии

$$-\nabla p_0 + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0] = 0.$$

Вновь, как и в §25.1, определим смещение плазмы из положения равновесия так, что

$$\delta\mathbf{V} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t},$$

и выполним интегрирование по времени в уравнениях (1a)–(1c):

$$\delta\rho = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}, \quad (2)$$

$$\delta p = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}, \quad (3)$$

$$\delta\mathbf{B} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0]. \quad (4)$$

После подстановки этих выражений в (1г) получается дифференциальное уравнение второго порядка

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}[\xi], \quad (5)$$

где введено обозначение для линейного оператора

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[\xi] = & \nabla(\xi \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} \xi) + \\ & + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} [\xi \times \mathbf{B}_0]] + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \operatorname{rot} [\xi \times \mathbf{B}_0] \times \mathbf{B}_0]. \end{aligned} \quad (6)$$

Не будет ошибкой называть $\mathbf{F}[\xi]$ функцией, но термин «оператор» и обозначение $\mathbf{F}[\xi]$ вместо $\mathbf{F}(\xi)$ лишний раз напоминают, что \mathbf{F} содержит операторы векторного дифференцирования ∇ , rot и div . Полезно заметить, что \mathbf{F} — не только линейный, но ещё и вещественный оператор, так как функции ρ_0 и \mathbf{B}_0 заведомо вещественны в отличие от вектора смещения ξ , который иногда удобно считать комплексным. Вещественность \mathbf{F} означает, что

$$(\mathbf{F}[\xi])^* = \mathbf{F}[\xi^*], \quad (7)$$

где звёздочка обозначает комплексное сопряжение.

Уравнение (5) следует дополнить граничными условиями. Их конкретный вид зависит от условий задачи. Рассмотрим два примера.

Вначале предположим, что плазма окружена проводящим кожухом, на поверхности которого тангенциальная компонента электрического поля обращается в нуль, т. е.

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = 0,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к проводящей стенке. Поскольку в приближении идеальной магнитной гидродинамики

$$\mathbf{E} = -(1/c)[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \approx -(1/c)[\partial \xi / \partial t \times \mathbf{B}_0],$$

тангенциальная компонента вектора $[\xi \times \mathbf{B}_0]$ также должна быть равна нулю, т. е.

$$\mathbf{n} \times [\xi \times \mathbf{B}_0] = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0)\xi - (\mathbf{n} \cdot \xi)\mathbf{B}_0 = 0. \quad (8)$$

Если вектор \mathbf{B}_0 параллелен поверхности проводника, то $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0) = 0$ и указанное граничное условие означает, что нормальная компонента смещения на стенке должна обращаться в нуль, т. е.

$$(\mathbf{n} \cdot \xi) = 0. \quad (9)$$

Это условие совершенно естественно, так как плазма не может втекать в твёрдую непоглощающую стенку; при этом смещение вдоль магнитного поля $\xi_{\parallel} = (\xi \cdot \mathbf{B}_0)/B_0$ может быть любым. В общем случае, когда $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0) \neq 0$, условия (8) и (9) вместе означают, что все три компоненты вектора смещения равны нулю в месте контакта, $\xi = 0$.

Переходя ко второму примеру, учтём, что для улучшения термоизоляции высокотемпературной плазмы создают такие равновесные конфигурации, в которых плазма отделена от проводников буферной вакуумной областью с пренебрежимо малой плотностью. Этот случай является очевидно, и наиболее общим.

Пусть S_0 есть равновесная граница между плазмой и вакуумом. Для общности предположим, что на границе плазмы может протекать поверхностный ток, и поэтому при переходе через границу давление плазмы и магнитное поле могут испытывать конечные скачки. Поскольку такая граница является по существу математической идеализацией очень тонкого переходного слоя, который в равновесном состоянии представляет собой набор магнитных поверхностей (постоянного давления), то и равновесная граница S_0 является магнитной поверхностью. Поэтому нормальная компонента магнитного поля на S_0 равна нулю. Вследствие вмороженности магнитное поле увлекается плазмой, и на смещённой границе плазмы S нормальная компонента магнитного поля также будет равна нулю. Следовательно, на границе плазмы с внутренней стороны имеет место соотношение

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad (10)$$

где \mathbf{n} обозначает единичный вектор нормали к S . Такое же условие должно выполняться и с внешней стороны границы. Действительно, из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ следует непрерывность нормальной компоненты магнитного поля на любой поверхности разрыва, т. е. $[\![\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}]\!] = 0$, где двойные квадратные скобки обозначают разность величин на противоположных сторонах поверхности разрыва. Поэтому если $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) = 0$ изнутри плазмы, то такое же условие должно выполняться и снаружи.

На смещённой границе плазмы должно также выполняться условие баланса давлений

$$[\![p + B^2/8\pi]\!] = 0, \quad (11)$$

так как в противном случае ускорение границы было бы бесконечно большим. Ранее граничные условия (10) и (11) были получены в §20.5.

Решая линейную задачу, их следует линеаризовать. Процедура линеаризации в данном случае весьма поучительна, поскольку нужно учесть не только линейные поправки δp , $\delta \mathbf{B}$, но и смещение границы; мы оставим её для самостоятельного решения (задача 1).

§26.3. Свойства спектра МГД-колебаний

После линеаризации задача о малых колебаниях плазмы вблизи равновесного состояния сводится к решению линейного уравнения (5) с линейными же граничными условиями. Вследствие линейности задачи зависимость всех функций от времени можно выбрать в виде колебаний с заданными частотами. Формально сей факт записывают в виде

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \sum_k a_k \xi_k(\mathbf{x}) e^{-i\omega_k t}, \quad (12)$$

где k символизирует набор чисел, которые тем или иным способом нумеруют разные колебания. Для простоты будем считать, что спектр частот является дискретным, то есть для описания всех колебаний достаточно дискретного набора чисел (в таком случае все числа можно считать целыми), оставляя за рамками нашего рассмотрения интересный и всё ещё не до конца исследованный случай непрерывного спектра, когда какое-то из чисел изменяется непрерывно на отрезке вещественной оси.

Подстановка представления (12) в уравнение (5) приводит к задаче на собственные значения. После отделения временного множителя для каждой собственной функции $\xi_k(\mathbf{x})$ получаем уравнение

$$-\rho_0 \omega_k^2 \xi_k = \mathbf{F}[\xi_k], \quad (13)$$

которое при выбранных так или иначе граничных условиях имеет решение только при некоторых выделенных значениях частоты ω_k , которые называют собственными частотами.

Используя свойство самосопряжённости оператора $\mathbf{F}[\xi]$, можно сделать важные выводы относительно собственных значений ω_k и собственных функций ξ_k , не решая саму задачу на собственные значения. Говорят, что оператор \mathbf{F} самосопряжённый¹ (англ. self-adjoint), если, интегрируя по частям, можно доказать справедливость равенства

$$\int \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F}[\xi] d^3x = \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}[\boldsymbol{\eta}] d^3x \quad (14)$$

¹ Другое название – эрмитовый (англ. hermitian).

для любых ξ и η , которые удовлетворяют граничным условиям. Интегрирование по частям для оператора (6) оказывается весьма нетривиальным и громоздким упражнением (задача 14), однако в определённом смысле свойство самосопряжённости очевидно (см. §26.4), поскольку является следствием существования интеграла энергии исходной, нелинейно-аризованной системы уравнений идеальной магнитной гидродинамики (§20.4).

Предполагая свойство самосопряжённости доказанным, убедимся прежде всего, что квадраты собственных частот вещественны. Для этого заметим, что если $\xi(x)$ удовлетворяет уравнению (13), то комплексно-сопряженная функция координат $\xi^*(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\rho_0 \omega_k^{*2} \xi_k^* = \mathbf{F}[\xi_k^*], \quad (15)$$

поскольку оператор \mathbf{F} является не только линейным, но и вещественным; см. (7). Умножим теперь уравнение (13) скалярно на ξ_k^* , а уравнение (15) — на ξ_k и затем вычтем из первого уравнения. Выполнив интегрирование по пространству, занятому плазмой, получим

$$-(\omega_k^2 - \omega_k^{*2}) \int \rho_0 |\xi_k|^2 d^3x = \int \xi_k^* \cdot \mathbf{F}[\xi_k] d^3x - \int \xi_k \cdot \mathbf{F}[\xi_k^*] d^3x.$$

Вследствие самосопряжённости оператора \mathbf{F} интегралы в правой части последнего равенства сокращаются, из чего следует равенство

$$\omega_k^2 = \omega_k^{*2}, \quad (16)$$

поскольку интеграл в левой части равенства заведомо не равен нулю. Таким образом, квадрат собственной частоты действительно оказывается вещественной величиной.

Вещественность ω_k^2 означает, что частоты ω_k собственных колебаний либо чисто вещественные (при $\omega_k^2 > 0$), либо чисто мнимые (при $\omega_k^2 < 0$). Равновесное состояние устойчиво, если все собственные значения ω_k^2 положительны, тогда все собственные частоты вещественны. В противном случае, когда хотя бы одно собственное значение ω_k^2 отрицательно, имеется пара чисто мнимых собственных частот $\omega_k = \pm i\Gamma_k$. Соответствующие им колебания изменяются во времени по закону $e^{-i\omega_k t} = e^{\pm\Gamma_k t}$. Одно из них экспоненциально затухает и описывает устойчивые колебания, но второе экспоненциально нарастает и даёт неустойчивое решение.

Существенно, что при воображаемом изменении параметров системы переход из устойчивого состояния в неустойчивое происходит, когда какая-нибудь собственная частота ω_k проходит через нуль. Иными словами, вблизи границы устойчивости неустойчивые возмущения развиваются чрезвычайно медленно, квазистатически. Стоит подчеркнуть важность этого результата. В общем случае переход в неустойчивое состояние происходит, когда $\operatorname{Im} \omega = 0$, но $\operatorname{Re} \omega \neq 0$, что значительно усложняет поиск границы устойчивости. Самосопряжённость оператора $F[\xi]$ гарантирует, что на границе устойчивости $\operatorname{Im} \omega$ и $\operatorname{Re} \omega$ равны нулю одновременно. Это уникальное свойство линейных колебаний в идеальной МГД ведёт к элегантной и эффективной процедуре проверки устойчивости плазмы, которая известна как энергетический принцип (§26.4).

Что касается собственных функций, то аналогичным образом можно доказать, что они ортогональны с весом ρ_0 , т. е.

$$\int \rho_0 (\xi_k^* \cdot \xi_l) d^3x = 0, \quad (17)$$

если $k \neq l$ (задача 3). Без ограничения общности все собственные функции можно считать вещественными. Действительно, если ξ_k является решением задачи на собственные значения, то и ξ_k^* будет собственной функцией, которая отвечает тому же собственному значению ω_k^2 . Вещественные линейные комбинации $(\xi_k + \xi_k^*)/2$ и $(\xi_k - \xi_k^*)/2i$ этих функций также будут собственными функциями, что и требовалось доказать. Тем не менее в конкретных задачах использование комплексных функций может упрощать ход вычислений, например в тех случаях, когда вследствие однородности задачи по какой-либо координате функцию ξ можно разложить в ряд Фурье.

§26.4. Энергетический принцип

В простейшей геометрии задачу на собственные значения иногда удается решить до конца, и тогда её решение даёт исчерпывающую информацию о низкочастотных колебаниях плазмы, в том числе о её устойчивости. Однако в более сложных случаях поиск решения связан со значительными математическими трудностями. Кроме того, процедура вычисления собственных частот попросту избыточна, поскольку для прояснения вопроса об устойчивости системы достаточно было бы найти одно только минимальное собственное значение квадрата частоты (или только его знак). В этой связи полезно научиться выносить суждение об

устойчивости или неустойчивости плазмы, не находя все собственные частоты.

Этой цели служит *энергетический принцип*. Он позволяет судить об устойчивости равновесного состояния плазмы, исследуя поведение потенциальной энергии для различных возможных возмущений равновесного состояния.

Чтобы сформулировать энергетический принцип, условимся, что точка сверху далее обозначает дифференцирование по времени, и умножим уравнение

$$\rho_0 \ddot{\xi} = \mathbf{F}[\xi]$$

скалярно на $\dot{\xi}^*$, прибавим комплексно-сопряжённое выражение и проинтегрируем по объёму системы. Сумма членов в левой части полученного уравнения

$$\int \rho_0 (\dot{\xi}^* \cdot \ddot{\xi} + \dot{\xi} \cdot \ddot{\xi}^*) d^3x = \frac{d}{dt} \int \rho_0 (\dot{\xi}^* \cdot \dot{\xi}) d^3x = \frac{d}{dt} \int \rho_0 |\dot{\xi}|^2 d^3x$$

образует производную по времени интеграла

$$K = \frac{1}{2} \int \rho |\dot{\xi}|^2 d^3x, \quad (18)$$

который, очевидно, имеет смысл кинетической энергии возмущения. С учётом свойства самосопряжённости оператора \mathbf{F} сумма членов справа

$$\int (\dot{\xi}^* \cdot \mathbf{F}[\xi] + \dot{\xi} \cdot \mathbf{F}[\xi^*]) d^3x = \int (\dot{\xi}^* \cdot \mathbf{F}[\xi] + \xi^* \cdot \mathbf{F}[\dot{\xi}]) d^3x = \frac{d}{dt} \int \xi^* \cdot \mathbf{F}[\xi] d^3x$$

также сворачивается в производную по времени другого интеграла

$$W = -\frac{1}{2} \int \xi^* \cdot \mathbf{F}[\xi] d^3x, \quad (19)$$

который можно трактовать как потенциальную энергию возмущения. Итоговое уравнение

$$\frac{d}{dt} (K + W) = 0 \quad (20)$$

выражает закон сохранения энергии²

$$K + W = \text{const.} \quad (21)$$

² Из приведённого вывода видно, что самосопряжённость по сути эквивалентна существованию интеграла энергии, поэтому она вполне очевидна без длинных доказательств, поскольку факт существования интеграла энергии в рамках идеальной магнитной гидродинамики следует из уравнения (20.16в) в §20.4.

Очевидно, что $K > 0$ для любого возмущения, хотя бы где-то отличного от нуля. Напротив, величина W может иметь любой знак.

Из условия постоянства энергии возмущений (21) следует, что любое возмущение, которое даёт уменьшение потенциальной энергии (W отрицательно), приводит к возрастанию кинетической энергии, что свидетельствует о неустойчивости системы в линейном приближении. Это означает, что начальное возмущение скорости нарастает. Совсем не обязательно, чтобы это возмущение обладало самой большой скоростью нарастания или было собственной функцией уравнений или тем состоянием, к которому, вероятно, придёт система в процессе эволюции. Пойдёт любая пробная функция, лишь бы она удовлетворяла граничным условиям и была интегрируема. Это является одним из преимуществ использования выражения (19) для исследования устойчивости.

И напротив, если любое возмущение приводит к увеличению потенциальной энергии W , то система линейно устойчива по отношению к экспоненциально нарастающим колебаниям. Строгое доказательство этого утверждения содержится в работах [107, 108].

В цитированной выше современной форме энергетический принцип сформулирован в работе И. Б. Бернштейна (Ira Bernstein), Е. А. Фримана (Edward Frieman), М. Д. Крускала (Martin Kruskal) и Р. М. Калслруда (Russell Kulsrud) [109]. Частично он использовался и ранее, в частности некоторые исследователи указывают статьи С. Лундквиста [110], С. И. Брагинского и Б. Б. Кадомцева [111], а также К. Хайна, Р. Люста и А. Шлюттера [112, 113].

§26.5. Потенциальная энергия возмущений

Существует несколько способов преобразования выражения для потенциальной энергии $W(\xi^*, \xi)$, включая интегрирование по частям, разбиение различных членов на части, добавление членов, интеграл от которых для заданных граничных условий равен нулю и т. д. Например, очень важной является симметричная форма записи потенциальной энергии, в которой ξ содержится только внутри слагаемых, представляющих собой полный квадрат. Существование такой симметричной формы само по себе доказывает самосопряжённость оператора $F[\xi]$ (задача 14).

Подстановка оператора (6) в определение (19) даёт первое выраже-

ние для потенциальной энергии в плазме

$$W = -\frac{1}{2} \int \xi^* \cdot \left\{ \nabla(\xi \cdot \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \xi) + \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \delta \mathbf{B}] + \frac{1}{c} [\delta \mathbf{J} \times \mathbf{B}] \right\} d^3x, \quad (22)$$

где введены обозначения

$$\delta \mathbf{B} = \operatorname{rot}[\xi \times \mathbf{B}], \quad \mathbf{J} = (c/4\pi) \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \delta \mathbf{J} = (c/4\pi) \operatorname{rot} \delta \mathbf{B},$$

а индекс «0» у равновесных величин для краткости опущен. Можно показать, что только слагаемое $\xi^* \cdot \nabla(\gamma p \operatorname{div} \xi)$ в подынтегральном выражении содержит проекцию смещения $\xi_{\parallel} = (\xi \cdot \mathbf{h})$ на направление невозмущённого магнитного поля $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$, а в остальных слагаемых вместо ξ можно писать $\xi_{\perp} = [[\mathbf{h} \times \xi] \times \mathbf{h}]$. Например, очевидно, что возмущение магнитного поля можно представить в виде $\delta \mathbf{B} = \operatorname{rot}[\xi_{\perp} \times \mathbf{B}]$. Также ясно, что $\xi \cdot \nabla p = \xi_{\perp} \cdot \nabla p$, поскольку $\mathbf{h} \cdot \nabla p = 0$. Кроме того, $\xi^* \cdot [\delta \mathbf{J} \times \mathbf{B}] = \xi_{\perp}^* \cdot [\delta \mathbf{J} \times \mathbf{B}]$, причём $\delta \mathbf{J} = (c/4\pi) \operatorname{rot} \delta \mathbf{B}$ не зависит от ξ_{\parallel} , как и $\delta \mathbf{B}$. Отдельного доказательства требует только тот факт, что сумма слагаемых $\nabla(\xi \cdot \nabla p)$ и $(1/c)[\mathbf{J} \times \delta \mathbf{B}]$ не имеет проекции на \mathbf{h} (задача 6). Члены с p и $\delta \mathbf{J}$ можно проинтегрировать по частям по объёму плазмы V_P (задача 7). Это даёт так называемую стандартную форму потенциальной энергии произвольного смещения в изотропной плазме:

$$W_F = \frac{1}{2} \int_{V_P} \left\{ \frac{|\delta \mathbf{B}|^2}{4\pi} + \gamma p |\operatorname{div} \xi|^2 + (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) \operatorname{div} \xi_{\perp}^* + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot [\xi_{\perp}^* \times \delta \mathbf{B}]) \right\} d^3x. \quad (23)$$

К ней нужно добавить интеграл

$$W_{SV} = \frac{1}{2} \int \left(\delta p + \frac{\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{4\pi} \right) \xi_{\perp}^* \cdot dS \quad (24)$$

по поверхности, окружающей плазму, причём $\delta p = -\xi_{\perp} \cdot \nabla p - \gamma p \operatorname{div} \xi$. Если плазма простирается до жёсткой идеально проводящей стенки, где $\xi = 0$, то этот интеграл обращается в нуль.

Если же плазма окружена вакуумной областью, то интеграл (24) можно преобразовать так, чтобы выделить вклад вакуумного зазора между плазмой и стенкой проводящей камеры (задача 9). Тогда

$$W = W_F + W_V + W_S, \quad (25)$$

где W_F вычисляется по формуле (23), слагаемое

$$W_V = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{vac}}} \frac{|\delta \mathbf{B}|^2}{4\pi} d^3x, \quad (26)$$

представляет собой возмущение энергии магнитного поля в вакуумном зазоре и

$$W_S = \frac{1}{2} \int |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 \left[\nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \right] \cdot d\mathbf{S} \quad (27)$$

обозначает интеграл по поверхности плазмы, причём $\llbracket A \rrbracket = A_{\text{out}} - A_{\text{in}}$ обозначает скачок величины A на поверхности плазмы — разность между величиной A_{out} снаружи и A_{in} внутри плазмы; этот интеграл не равен нулю только для равновесий с поверхностным током (задача 10). Такое обобщение энергетического принципа с учётом вакуумной области было сделано Бернштейном с соавторами [109].

Поскольку только второе слагаемое $\gamma p |\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}|^2$ в (23) зависит от ξ_{\parallel} и это слагаемое заведомо неотрицательно, наиболее неустойчивы такие возмущения, для которых оно минимально. Минимизация $\gamma p |\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}|^2$ при заданном $\boldsymbol{\xi}_{\perp}$ осуществляется подбором ξ_{\parallel} . Во многих (но не во всех) случаях минимум соответствует равенству

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0, \quad (28)$$

когда это слагаемое обращается в нуль (задача 11). Условие (28) означает, что движение плазмы несжимаемое.

Заведомо неотрицательно также первое слагаемое в (23), и оно равно нулю, если

$$\delta \mathbf{B} = 0. \quad (29)$$

Условие (29) означает, что смещение плазмы не возмущает магнитное поле. Такие возмущения называют *желобковыми*. Они наиболее опасны в плазме низкого давления, где $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$, и поэтому равно нулю последнее слагаемое в (23). При этом в плазме с градиентом давления третье слагаемое $(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^*$ может иметь любой знак, внося либо стабилизирующий (положительный), либо дестабилизирующий (отрицательный) вклад в величину W_F . Ясно поэтому, что устойчивость желобковых и несжимаемых возмущений нужно исследовать в первую очередь. Только если они устойчивы, переходят к исследованию *баллонных* возмущений, в которых $\delta \mathbf{B} \neq 0$.

§26.6. *Вариационный принцип

Самосопряжённость оператора \mathbf{F} позволяет сформулировать вариационный принцип для задачи на собственные значения [109]. Составив

скалярное произведение уравнения (13) с ξ_k^* и выполнив интегрирование по объёму плазмы, получим

$$\omega_k^2 = \frac{W(\xi_k^*, \xi_k)}{K(\xi_k^*, \xi_k)}, \quad (30)$$

где

$$W(\xi^*, \xi) = -\frac{1}{2} \int \xi^* \cdot F[\xi] d^3x,$$

$$K(\xi^*, \xi) = \frac{1}{2} \int \rho \xi^* \cdot \xi d^3x = \frac{1}{2} \int \rho |\xi|^2 d^3x.$$

Хотя функцию ξ_k можно считать вещественной, как было показано в §26.3, в выражении (30) допускается, что она может быть комплексной Фурье-амплитудой. Забудем теперь, каким образом получено соотношение (30), и представим, что ξ_k есть произвольная функция координат, а не решение задачи на собственные значения. Чтобы подчеркнуть такое изменение точки зрения, опустим индекс k у всех величин в формуле (30):

$$\omega^2 = \frac{W(\xi^*, \xi)}{K(\xi^*, \xi)}. \quad (31)$$

Вариационный принцип гласит, что любая функция ξ , для которой квадрат частоты ω^2 , вычисленный по формуле (31), является экстремумом, будет собственной функцией ξ_k задачи на собственные значения.

Для доказательства сделаем подстановку $\xi \rightarrow \xi + \delta\xi$ и $\omega^2 \rightarrow \omega^2 + \delta\omega^2$, условившись, что $\delta\omega^2 = 0$ и $\delta\xi = 0$ соответствует экстремуму квадрата частоты. Тогда

$$\omega^2 + \delta\omega^2 = \frac{W(\xi^*, \xi) + W(\delta\xi^*, \xi) + W(\xi^*, \delta\xi) + W(\delta\xi^*, \delta\xi)}{K(\xi^*, \xi) + K(\delta\xi^*, \xi) + K(\xi^*, \delta\xi) + K(\delta\xi^*, \delta\xi)}.$$

Для малых вариаций $\delta\xi$ отсюда получаем

$$\delta\omega^2 = \frac{W(\delta\xi^*, \xi) + W(\xi^*, \delta\xi) - \omega^2 [K(\delta\xi^*, \xi) + K(\xi^*, \delta\xi)]}{K(\xi^*, \xi)},$$

где

$$W(\delta\xi^*, \xi) = -\frac{1}{2} \int \delta\xi^* \cdot F[\xi] d^3x,$$

$$W(\xi^*, \delta\xi) = -\frac{1}{2} \int \xi^* \cdot \mathbf{F}[\delta\xi] d^3x = -\frac{1}{2} \int \delta\xi \cdot \mathbf{F}[\xi^*] d^3x,$$

$$K(\delta\xi^*, \xi) = \frac{1}{2} \int \rho \delta\xi^* \cdot \xi d^3x,$$

$$K(\xi^*, \delta\xi) = \frac{1}{2} \int \rho \xi^* \cdot \delta\xi d^3x.$$

Поэтому условие $\delta\omega^2 = 0$ приводит к уравнению

$$\int \{\delta\xi^* \cdot (\mathbf{F}[\xi] + \omega^2 \rho \xi) + \delta\xi \cdot (\mathbf{F}[\xi^*] + \omega^2 \rho \xi^*)\} d^3x,$$

которое должно выполняться при любой вариации $\delta\xi$. Это возможно, если

$$-\omega^2 \rho \xi = \mathbf{F}[\xi],$$

то есть функция ξ , доставляющая экстремум ω^2 , является решением задачи на собственные значения, что и требовалось доказать.

На основе вариационного принципа разработан эффективный метод численного тестирования МГД-устойчивости. Для его реализации выбирают какой-нибудь простой, но достаточно полный набор базисных функций ξ_n и записывают ξ как сумму этих функций:

$$\xi = \sum_n a_n \xi_n.$$

Подстановка суммы в выражение для W даёт

$$W = \sum A_{mn} a_m a_n,$$

где коэффициенты

$$A_{mn} = W(\xi_m, \xi_n)$$

называют матричными элементами. После того как они вычислены, выражение для W можно минимизировать перебором коэффициентов a_n при некоторой выбранной нормировке ξ (исключающей одновременное обращение в нуль всех коэффициентов a_n). Удачный выбор или достаточно большое количество базисных функций дают весьма точное указание, может ли W быть отрицательным. Стоит отметить, что минимизацию W по отношению к a_n может осуществлять при любом удобном выборе нормировки ξ , не обязательно $K(\xi, \xi) = \text{const}$. Однако при этом мы теряем возможность получить реальную оценку инкремента или вычислить структуру собственных функций. Указанная процедура определения границ устойчивости очень эффективна в многомерной геометрии,

где другие численные методы затруднительны. Примером применения вариационного принципа является исследование неустойчивости Рэлея—Тейлора в задачах 17–20.

Литература

Обстоятельное введение в теорию МГД-устойчивости плазмы имеется в учебнике «*Lectures in Magnetohydrodynamics*» [11] Д. Шнака (*Dalton Schnack*). Для детального изучения теории МГД-устойчивости плазмы можно рекомендовать статью Б. Б. Кадомцева [17] в сборнике «Вопросы теории плазмы», монографию Дж. Фридберга (*Jeffrey Freidberg*) «*Ideal Magnetohydrodynamics*» [8] или её более позднее переиздание «*Ideal MHD*» [13].

Энергетический принцип в современной формулировке был предложен в статье И. Бернштейна (*Ira Bernstein*) с соавторами [109]. Различные формы энергетического принципа обсуждаются в монографии Г. Бейтмана (*Glenn Bateman*) «МГД-неустойчивости» [6, §5.4]. Там же в третьей главе разъясняется вариационный принцип на последовательности постепенно усложняющихся примеров в приложении к неустойчивости Рэлея—Тейлора.

Задачи и вопросы

Задача 1. Линеаризуйте граничные условия (10), (11) на смещённой границе плазмы с вакуумом.
Решение \Rightarrow 341

Задача 2. Система линейных уравнений (1) содержит 8 скалярных уравнений первого порядка для малых возмущений $\delta\rho$, δp , $\delta\mathbf{B}$ и $\delta\mathbf{V}$, которые выражаются через 8 скалярных функций. Уравнение (5) для ξ содержит 3 скалярных уравнения второго порядка, и поэтому эквивалентна системе шести уравнений первого порядка. Куда исчезли ещё два уравнения?
Решение \Rightarrow 343

Задача 3. Докажите свойство ортогональности (17) собственных функций краевой задачи (13).
Решение \Rightarrow 343

Задача 4. Можно ли утверждать, что в неоднородной плазме все собственные колебания имеют дискретный спектр?
Решение \Rightarrow 344

Задача 5. Необходимым или достаточным условием устойчивости плазмы является энергетический принцип?

[Решение ⇒ 344](#)

Задача 6. Докажите, что только слагаемое $\xi^* \cdot \nabla(\gamma p \operatorname{div} \xi)$ в потенциальной энергии возмущения (22) содержит продольное смещение ξ_{\parallel} .

[Решение ⇒ 346](#)

Задача 7. Выведите формулу (23) для вклада плазмы W_F в потенциальную энергию возмущения ξ , выполнив интегрирование по частям в формуле (22).

[Решение ⇒ 347](#)

Задача 8. Выведите формулу (23) для вклада плазмы W_F в потенциальную энергию произвольного возмущения ξ , вычислив вариацию суммы тензоров давления и напряжений магнитного поля $\mathbf{P} + \mathbf{T}$.

[Решение ⇒ 349](#)

Задача 9. Докажите, что интеграл (24) по свободной поверхности границы плазмы с вакуумным зазором равен сумме интегралов (26) и (27).

[Решение ⇒ 351](#)

Задача 10. Преобразуйте подынтегральное выражение в интеграле (26) по свободной поверхности границы плазмы, выразив его через кривизну магнитных силовых линий.

[Решение ⇒ 353](#)

Задача 11. Найдите продольное смещение ξ_{\parallel} , которое минимизирует потенциальную энергию (23).

[Решение ⇒ 354](#)

Задача 12. Проверьте утверждение, что энергетический принцип предсказывает устойчивость МГД-волн в однородной изотропной плазме.

Задача 13. Какие из следующих операторов являются самосопряжёнными при нулевых граничных условиях на концах интервала: $\mathbf{F}[\xi] = \xi$, $\mathbf{F}[\xi] = \partial\xi/\partial x$, $\mathbf{F}[\xi] = \partial^2\xi/\partial x^2$?

Задача 14. Докажите самосопряжённость оператора (6).

[Решение ⇒ 356](#)

Задача 15. Объясните разницу между вариационным и энергетическим принципами.

[Решение ⇒ 359](#)

Задача 16. Сформулируйте вариационный принцип на примере краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (задача Штурма—Лиувилля).

[Решение ⇒ 359](#)

Задача 17. Исследуйте устойчивость плазмы в поле тяжести (неустойчивость Рэлея—Тейлора). Выведите уравнение малых колебаний для вертикальной проекции вектора смещения стратифицированной плазмы, считая, что магнитное поле имеет шир ([§22.4](#)) и перпендикулярно силе тяжести, а движение плазмы является несжимаемым.

[Решение ⇒ 361](#)

Задача 18. Используя уравнение ([Б.26.17.15](#)), полученное в задаче 17, найдите спектр малых колебаний плазмы с резкой границей в магнитном поле с широм.

[Решение ⇒ 365](#)

Задача 19. Используя уравнение ([Б.26.17.15](#)), найдите спектр колебаний в стратифицированной среде, где плотность изменяется по экспоненциальному закону. Магнитное поле отсутствует.

[Решение ⇒ 366](#)

Задача 20. Сформулируйте вариационный принцип для уравнения, которое получено в задаче 17. Исследуйте с его помощью неустойчивость Рэлея—Тейлора в стратифицированной плазме.

[Решение ⇒ 367](#)

Задача 21. Используя вариационный принцип, сформулированный в задаче 20, оцените инкремент желобковой неустойчивости в пробкотроне.

[Решение ⇒ 368](#)

Задача 22. Выберите уравнение малых колебаний стратифицированной плазмы в магнитном поле без шир, учитывая сжимаемость плазмы. Укажите условия, при которых сжимаемость несущественна.

[Решение ⇒ 368](#)

Лекция 27

Неустойчивости пинчей

Неустойчивости Z-пинча. Перетяжки и змейки.

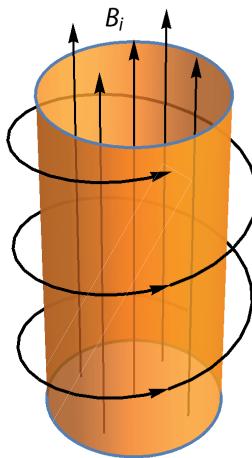
Винтовая неустойчивость. Критерий Крускала—Шафранова.

***Критерий Сайдема**

В связи с разнообразием конфигурации пинчей невозможно прийти к универсальному заключению относительно их устойчивости. Тета-пинчу внутренне присуща устойчивость по отношению к МГД-возмущениям, тогда как зет-пинч катастрофически неустойчив. Винтовой пинч занимает промежуточное положение. Известны несколько неустойчивостей, важнейшими из которых являются перетяжки (шейки) и изгибы (змейки). Все неустойчивости можно описать единым образом с помощью метода малых колебаний в пределе *скинированного пинча*, в котором весь ток протекает в тонкой шкурке на поверхности столба плазмы. Для исследования устойчивости *диффузного пинча*, в котором ток распределён по сечению пинча, чаще применяют энергетический принцип.

Анализ устойчивости плазмы в пинчах начнём с уточнения понятия *скинированного пинча*. Механизм возникновения неустойчивостей в таком пинче удаётся понять с помощью наглядных рассуждений. Последовательный расчёт устойчивости скинированного пинча вынесен в серию задач. Их особенностью является наличие свободной границы плазмы, форма которой меняется приискажении магнитного поля. В конце лекции будет получен критерий Крускала—Шафранова устойчивости возмущений в винтовом пинче. Примеры анализа устойчивости диффузного пинча с помощью энергетического принципа даны в виде задач.

Рис. 1. Модель скинированного пинча. Весь ток течёт по тонкой шкурке цилиндрического столба плазмы с радиусом a . Продольный ток J_z создаёт снаружи (в области $r > a$) азимутальное магнитное поле $B_\theta = 2I/cr$. Магнитное поле B_i внутри плазмы (в области $r < a$) однородно и направлено вдоль оси столба. Вне плазмы продольное магнитное поле B_z также однородно. Давление плазмы уравновешивается разностью давлений магнитного поля вне и внутри плазмы.



§27.1. Скинированный пинч

Механизм возникновения «перетяжек» и «змеек» в Z-пинче проще всего понять на примере *скинированного пинча*. Предположим, что цилиндрический столб плазмы радиуса a скинирован, т. е. и весь ток течёт в тонком поверхностном слое (рис. 1). Тогда в равновесии внутри столба давление p не зависит от расстояния r от оси цилиндра, которую мы отождествим с осью z цилиндрической системы координат $\{r, \theta, z\}$. Снаружи (при $r > a$) поверхностный ток I , который течёт в направлении оси z , создаёт азимутальное магнитное поле

$$B_\theta(r) = \frac{2I}{cr}. \quad (1)$$

Продольное поле, направленное вдоль оси столба, создаётся как внешними токами, так и азимутальным током на поверхности столба. Оно равно B_i внутри пинча и B_z — снаружи. Из уравнения равновесия (22.1) следует, что

$$p + \frac{B_i^2}{8\pi} = \frac{B_z^2}{8\pi} + \frac{B_\theta^2(a)}{8\pi}. \quad (2)$$

При увеличении толщины поверхностного слоя, в котором течёт ток, скинированный пинч переходит в *диффузный пинч*. В диффузном пинче давление и магнитное поле неоднородны по сечению столба плазмы.

Строго говоря, любой реальный пинч является диффузным, так как толщина токового слоя на поверхности плазмы всегда конечна и не равна нулю. В этом смысле понятие скинированного пинча является теоретической идеализацией, достоверность которой следует сопоставлять с реальными условиями эксперимента. Из самых общих соображений можно ожидать, что модель скинированного пинча пригодна для исследования возмущений, длина волн которых значительно больше толщины поверхностного слоя.

В теоретических расчётах возмущения разных типов характеризуют значениями волновых чисел. В задаче об устойчивости цилиндрического пинча произвольное смещение плазмы из равновесного состояния можно представить в виде ряда Фурье – набора гармоник вида

$$\xi(r, \theta, z, t) = \xi(r) e^{ikz + im\theta - i\omega t} \quad (3)$$

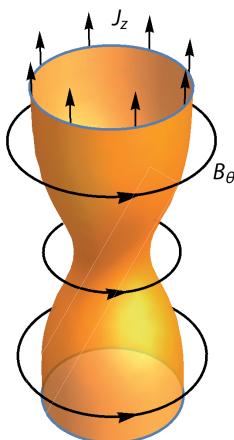
или их вещественных комбинаций с разными значениями волновых чисел k и m . Азимутальное волновое число $m = k_\theta r$ может принимать целочисленные значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, поскольку смещение ξ , очевидно, должно быть периодично по углу θ с периодом 2π . Аксиальное волновое число k также, вообще говоря, квантуется. Например, если ξ обращается в нуль на торцах пинча (вследствие вмороженности магнитного поля в проводящие электроды), то величина k должна быть кратна $2\pi/L$, где L – длина пинча. Так называемые перетяжки соответствуют смещениям с $m = 0$ и $k \neq 0$. У змеек и винтовых возмущений $|m| = 1$, $k \neq 0$. Смещения с $|m| \geq 2$ также могут быть неустойчивы. Частоты всех подобных колебаний вблизи границы устойчивости удаётся рассчитать на примере всё того же скинированного пинча. Расчёт оказывается поучительным, но весьма громоздким (задачи 1–5). Мы ограничимся простыми примерами, в которых вывод относительно устойчивости возмущения можно сделать с помощью наглядных рассуждений.

§27.2. Перетяжки

Покажем, что скинированный Z -пинч неустойчив относительно возмущений, которые называют *перетяжками* (англ. sausage).

Представим, что $B_i = B_z = 0$ и что на столбе плазмы с радиусом a возникла небольшая перетяжка, так что радиус столба r в одном месте стал меньше a , как показано на рисунке 2. Нетрудно видеть, что магнитное поле вне плазмы непосредственно у её поверхности $B_\theta = 2I/cr$ превысит начальное значение $B_\theta = 2I/ca$, а вместе с этим вырастет и давление

Рис. 2. Возмущение типа «перетяжка» в зет-пинче. В месте случайного сужения столба плазмы на поверхности плазмы увеличивается магнитное поле B_θ , которое создаётся током J_z , текущим в тонкой шкурке плазмы; газокинетическое давление плазмы не может компенсировать увеличение давления магнитного поля, которое быстро пережимает столб плазмы.



магнитного поля $p_m = B_\theta^2/8\pi$. С внутренней стороны границы давление останется прежним, поскольку плазма может свободно вытекать из области перетяжки. В результате возникнет самоускоряющийся процесс, который приведёт к быстрому углублению перетяжки и в конечном итоге к разрыву плазменного шнура. Из-за индуктивности внешних электрических цепей, питающих пинч, ток не сможет прекратиться мгновенно, почти всё напряжение, приложенное к пинчу, будет собрано к месту разрыва, там возникнут сильные электрические и магнитные поля. В сильноточных экспериментах с зет-пинчами в конце 1950-х годов даже наблюдалось большое количество нейтронов, что поначалу было принято за начало термоядерной реакции.

Создание сильного продольного магнитного поля B_i внутри плазмы способно предотвратить (говорят: стабилизировать) развитие перетяжки. Критерий устойчивости (условие стабилизации) перетяжки можно получить при помощи следующих элементарных рассуждений.

Предположим, что в исходном состоянии существует баланс давлений плазмы и магнитного поля, так что при $r = a$ имеет место равенство (2). При возникновении перетяжки давление плазмы останется прежним, как сказано выше, т. е.

$$p = \text{const.}$$

Полный ток через сечение плазмы не изменится, поэтому

$$B_\theta(a) a = \text{const.}$$

Вследствие вмороженности магнитного поля в плазму магнитный поток через сечение шнура также сохраняется, т. е.

$$B_i a^2 = \text{const.}$$

Внешнее продольное магнитное поле B_z не изменится:

$$B_z = \text{const.}$$

если предположить, что вся конструкция помещена в непроводящую камеру или даже в проводящую камеру, но достаточно большого радиуса. Отсюда заключаем, что при небольшом изменении радиуса плазмы $a \rightarrow a + \delta a$ в некоторой области вариации параметров системы непосредственно у границы плазмы определяются соотношениями

$$\delta p = 0, \quad \delta B_i = -2(\delta a/a)B_i, \quad \delta B_\theta = -(\delta a/a)B_\theta(a), \quad \delta B_z = 0.$$

Система устойчива, если при $\delta a < 0$ суммарное давление внутри шнура возрастает быстрее, чем снаружи, т. е.

$$\delta p + \frac{B_i \delta B_i}{4\pi} > \frac{B_\theta(a) \delta B_\theta}{4\pi} + \frac{B_z \delta B_z}{4\pi}.$$

Отсюда находим критерий устойчивости плазмы относительно возмущений типа перетяжки:

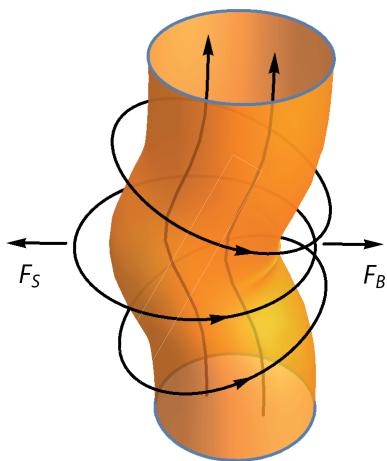
$$B_i^2 > \frac{1}{2} B_\theta^2(a). \tag{4}$$

Внешнее продольное магнитное поле B_z не входит в полученный критерий. Более аккуратный расчёт показывает, что зависимость от B_z имеется, но она слаба (задача 2). Если внешние стенки проводящей камеры расположены близко к поверхности плазмы, необходимо учесть сохранение магнитного потока через сечение камеры. Тогда критерий устойчивости будет содержать также B_z и радиус камеры.

Необходимость стабилизации перетяжки приводит к уменьшению предельного значения параметра β , которое достижимо в удерживающей плазме. Если определить этот параметр как отношение давления плазмы к давлению магнитного поля вне плазмы, т. е.

$$\beta = \frac{8\pi p}{B_\theta^2(a) + B_z^2},$$

Рис. 3. Возмущение типа змейка в скинированном Z -пинче. С внутренней стороны изгиба столба плазмы магнитные силовые линии гуще, а давление магнитного поля больше. Результирующая сила F_s стремится увеличить амплитуду изгиба. Если внутри столба плазмы имеется продольное магнитное поле, результирующая сила натяжения силовых линий F_B стремится уменьшить амплитуду изгиба.



и скомбинировать уравнение (2) с критерием (4), получим

$$\beta = 1 - \frac{B_i^2}{B_\theta^2(a) + B_z^2} < 1 - \frac{B_\theta^2}{2B_\theta^2 + 2B_z^2}. \quad (5)$$

Отсюда видно, что требование устойчивости плазмы накладывает ограничение на предельное давление плазмы, которое можно создать при заданной величине магнитного поля.

Интересно, что диффузный Z -пинч гипотетически можно сделать устойчивым относительно перетяжек, подобрав особым образом профиль давления, однако этот профиль малопригоден для реальных экспериментов с пинчами (задачи 7, 8).

§27.3. Змейки

Стабилизация возмущений одного вида ещё не означает, что плазма устойчива. В частности, помимо перетяжек пинч может быть неустойчив к возмущениями изгиба, которые также называют змейками (англ. kink).

Вновь представим себе пинч с вмороженным продольным полем $B_i \neq 0$ и допустим вначале, что $B_z = 0$. Как видно из рисунка 3, силовые линии поля B_θ вне пинча в этом случае замкнуты. Под изгибом они гуще, чем над ним, поэтому равнодействующая сила F_s будет направлена

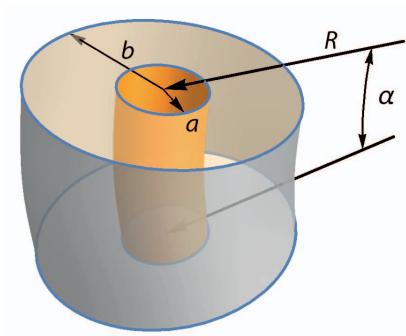


Рис. 4. Вычисление силы F_s при изгибе столба плазмы. Воображаемый цилиндрический объём с внутренним радиусом a и внешним радиусом $b > a$ окружает столб плазмы радиуса a . Торцы цилиндра и боковые стенки имеют такую форму, что замкнутые магнитные силовые линии целиком лежат на них. Суммарная сила давления магнитного поля изнутри цилиндра на его стенки равна нулю, поэтому сумма сил, действующих на торцы, приблизительно равна силе, которая действует на внутреннюю боковую стенку.

так, чтобы увеличивать величину изгиба. Натяжение же искривленных линий продольного поля B_i даёт силу F_B , направленную в противоположную сторону. Если $F_B > F_s$, то столб плазмы по отношению к такому изгибу будет устойчив.

Чтобы конкретизировать условие устойчивости, рассмотрим место изгиба (рис. 4) и предположим, что длина изгиба $\lambda \sim 1/k$ значительно больше радиуса столба плазмы, $\lambda \gg a$. Силу F_s , действующую со стороны азимутального поля на плазму, можно оценить следующим образом. Выделим вокруг пинча цилиндрический объём радиуса $b > a$, торцы которого образованы плоскостями, проходящими через центр кривизны и ориентированными так, что ось цилиндра перпендикулярна им в точке, где она пересекает эти плоскости. Будем считать, что угол α между плоскостями мал, $\alpha \ll 1$. Из этого цилиндра мысленно удалим объём, занятый плазмой. Оставшийся объём имеет форму толстостенной трубы, но эта труба пуста, а её стенки заняты только вакуумным магнитным полем. Напомним, что полная сила, действующая на замкнутый объём со стороны вакуумного магнитного поля, равна нулю (§20.1). Данный факт совершенно очевиден в том случае, когда столб плазмы не искривлён. Действительно, силы магнитного давления, действующие на противоположные торцы, взаимно сокращают друг друга, а силы, которые действуют на внутреннюю и внешнюю цилиндрические стенки трубы, равны нулю каждая в отдельности вследствие цилиндрической симметрии. То же верно в отношении поля, которое действует на стенки тру-

бы изнутри. Используем данный факт, чтобы подсчитать силу, которая действует на внутренний цилиндр искривлённой трубы, т. е. на поверхность столба плазмы.

Так как силовые линии азимутального поля лежат в плоскостях торцов, сила магнитного давления, действующая на отдельный торец изнутри цилиндра, направлена наружу и равна

$$F_{\parallel} = \int_a^b \frac{B^2}{8\pi} 2\pi r dr.$$

Она компенсируется силой, действующей на противоположный торец, если цилиндр не искривлен. При наличии изгиба возникает проекция суммы этих сил

$$\alpha F_{\parallel},$$

которая направлена к центру кривизны. Радиус кривизны R связан с длиной цилиндра l и углом α соотношением $l = \alpha R$.

Вблизи от искривлённого пинча поле B можно описывать так же, как и для бесконечно длинного проводника с током. Тогда $B = B_{\theta}(a) a/r$, где $B_{\theta}(a)$ — поле на поверхности пинча. Однако на расстояниях $r = b \gtrsim \lambda$ эффект искривления исчезает (компенсируется соседним искривлением пинча в противоположную сторону) и интеграл следует «обрезать» при $r \sim \lambda$. По той же причине силу, которая действует на удалённую цилиндрическую поверхность $r = b$, следует считать равной нулю. Поэтому сила, действующая на внутреннюю цилиндрическую поверхность трубы, равна αF_{\parallel} со знаком «минус», т. е. направлена от центра кривизны. В расчёте на единицу длины столба плазмы сила, вызванная возмущением поля при искривлении, есть

$$F_S = \frac{\alpha}{l} F_{\parallel} \approx \frac{1}{R} \int_a^{\lambda} \frac{B^2}{8\pi} 2\pi r dr = \frac{B_{\theta}^2(a) a^2}{4R} \ln \frac{\lambda}{a}.$$

Сила натяжения, связанная с искривлением силовых линий поля B_i внутри плазмы, приблизительно равна

$$F_B = -2 \frac{\alpha}{l} \frac{B_i^2}{8\pi} \pi a^2 = -\frac{B_i^2}{4R} a^2;$$

она складывается из двух частей: силы $F_{\parallel} = -(\alpha/l)(B_i^2/8\pi)\pi a^2$, действующей на торцы сегмента, и такой же по величине силы F_{\perp} , действующей

на его боковую поверхность (см. решение задачи 25.9). Столб плазмы устойчив относительно изгиба, если полная сила

$$F_S + F_B = \frac{a^2}{4R} \left[B_\theta^2(a) \ln \frac{\lambda}{a} - B_i^2 \right]$$

отрицательна. Отсюда возникает условие устойчивости

$$B_i^2 > B_\theta^2(a) \ln(\lambda/a). \quad (6)$$

Точный расчёт приводит к похожему критерию устойчивости возмущений типа змейки в Z-пинче (задача 3).

Так как из условия равновесия $p + B_i^2/8\pi = B_\theta^2(a)^2/8\pi$ следует, что $B_i^2 < B_\theta^2(a)$, ясно, что пинч нельзя полностью стабилизировать сильным внутренним продольным полем относительно длинноволновых возмущений типа змейки. Но такая неустойчивость может быть стабилизована проводящими стенками камеры, если они расположены достаточно близко к шнтуру. Действительно, при смещениях столба плазмы в проводящих стенках должны наводиться индукционные токи, взаимодействие с которыми стремится вернуть плазму в исходное положение. Расчёты показывают, что пинч с вмороженным продольным полем B_i может быть устойчив, если радиус проводящей камеры удовлетворяет условию $b < 5a$ (задача 5). Сочетание этих способов стабилизации в своё время широко применялось для удержания высокотемпературной плазмы.

Если продольное магнитное поле имеется и внутри, и вне столба плазмы с продольным током, то полное магнитное поле оказывается винтовым. В таком поле столб, искривившись по винтовой силовой линии, сможет пролезть между магнитными силовыми линиями, не искривляя их.

§27.4. Винтовые возмущения

Пример перетяжек и змеек показывает, что достаточно сильное внутреннее продольное магнитное поле B_i способно стабилизировать эти виды возмущений. Интересно, что наличие внешнего продольного поля B_z почти не меняет их условие стабилизации (§27.2 и задача 2). Именно поэтому мы до сих пор считали, что $B_z = 0$. Однако на практике продольное поле создаётся внешними катушками, поэтому сложно представить себе ситуацию, чтобы оно имелось внутри пинча ($B_i \neq 0$), но отсутствовало снаружи ($B_z = 0$).

Если $B_z \neq 0$, магнитные силовые линии вне шнура плазмы идут по спиралям и не всякое искривление шнура приводит к изменению магнитного поля. Действительно, если возмущение идёт вдоль спирали магнитной силовой линии, то она не деформируется и дополнительное натяжение не возникает. Поэтому такие *винтовые возмущения* неустойчивы, и шнур может принять форму спирали с шагом, равным шагу спирали магнитной силовой линии

$$\lambda = 2\pi a B_z / B_\theta.$$

Максимальный шаг спирали, форму которой может принять шнур, ограничен длиной системы L . Поэтому если сделать продольное поле достаточно сильным, так чтобы шаг силовой линии был больше длины системы, $\lambda > L$, то искривление шнура не возникнет. На этом наблюдении основан метод стабилизации пинча сильным продольным полем. Условие устойчивости в этом случае имеет вид

$$2\pi a B_z / B_\theta > L \quad (7)$$

и известно как *критерий Крускала–Шафранова* [114, 115]. Механизм возникновения винтовой неустойчивости можно пояснить на примере тонкого провода с током в продольном магнитном поле (задача 9).

Применительно к токамаку с большим аспектным отношением R/a и длиной большого обвода $L = 2\pi R$ после замены $B_z = B_t$, $B_\theta = B_p$ критерий (7) записывается в эквивалентном виде

$$q = \frac{B_t a}{B_p R} > 1. \quad (8)$$

Теперь мы видим, почему q имеет смысл коэффициента запаса устойчивости: чем больше q , тем более устойчив шнур плазмы по отношению к винтовой неустойчивости. В реальных условиях токамаков, где для стабилизации используется сильное продольное магнитное поле, плазма достаточно устойчива при $q > 2\text{--}3$.

Поскольку $B_p(a) = 2I_t/ca$, условие (8) ограничивает тороидальный ток I_t , который можно пропустить через плазму без потери устойчивости. Можно также сказать, что условие (8) ограничивает параметр $\beta_t = 8\pi p/B_t^2$ сверху очень низким значением. Действительно, предположим, что плазма удерживается только полоидальным магнитным полем B_p , а тороидальное магнитное поле B_t предназначено только для

устойчивости. Из уравнения (2) баланса давлений плазмы и магнитного поля по малому радиусу при подстановке $B_i = B_z = B_t$ находим, что в этом случае

$$p = \frac{B_\theta^2(a)}{8\pi},$$

поэтому полоидальная бета $\beta_p = 8\pi p/B_p^2 = 8\pi p/B_\theta^2$ может приближаться к единице, $\beta_p = 1$. Однако при этом тороидальная бета $\beta_t = 8\pi p/B_t^2$ будет мало, так как согласно (8)

$$\beta_t = \beta_p \frac{B_p^2}{B_t^2} < \frac{a^2}{R^2}. \quad (9)$$

Низкая бета означает низкую эффективность использования магнитного поля, так как при существующих технических ограничениях на величину поля для обеспечения устойчивости плазмы приходится снижать её давление. Другой вывод, который следует из ограничения (9), состоит в том, что необходимо строить токамаки с максимально низким аспектным отношением R/a . По этому пути идут создатели большинства новейших установок этого типа.

§27.5. *Критерий Сайдема

Модель скинированного пинча, для которой получены обсуждавшиеся выше критерии устойчивости, чрезвычайно идеализирована. В действительности скин-слой нельзя считать бесконечно тонким не только потому, что в реальных условиях ток распределен по радиусу в довольно широких пределах, но и по той причине, что даже в случае очень тонкого скин-слоя возможны такие возмущения, длина волн которых сравнима с толщиной скин-слоя.

В пинче с распределенным током внутри и вне плазмы существуют обе компоненты поля: и аксиальная, и азимутальная, т. е. суммарное магнитное поле является винтовым. Устойчивость такого пинча удается исследовать с помощью энергетического принципа. Это исследование требует весьма громоздких вычислений (задачи 10 и 11), но некоторые суждения о том, какие возмущения наиболее неустойчивы, можно сделать, не прибегая к сложным вычислениям.

Рассмотрим, как произвольное винтовое возмущение ξ вида (3) с заданными волновыми числами $m \neq 0$ и $k \neq 0$ распространяется вдоль

магнитной силовой линии. Обозначим элемент длины силовой линии ds . Так как

$$\frac{d}{ds} = \frac{B_z}{B} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{B_\theta}{Br} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad B = \sqrt{B_\theta^2 + B_z^2},$$

дифференцирование функции ξ по s даёт

$$\frac{d\xi}{ds} = ik_{\parallel}\xi,$$

где введено обозначение

$$k_{\parallel} = ik \frac{B_z}{B} + i \frac{m}{r} \frac{B_\theta}{B} \quad (10)$$

для волнового числа вдоль магнитной силовой линии. Смещение ξ постоянно на силовой линии, т. е. $k_{\parallel} = 0$, если

$$k = -\frac{m}{r} \frac{B_\theta}{B_z}.$$

Такого рода возмущения называют *желобковыми* или *перестановочными*, поскольку их можно рассматривать как перестановку соседних силовых трубок плазмы без деформации магнитного поля. Так как магнитные силовые линии не деформируются, дополнительное натяжение, возвращающее плазму в исходное состояние, не возникает. Поэтому такие возмущения наиболее неустойчивы.

Рассматривая пинч как «распрямлённую» модель токамака с коэффициентом запаса устойчивости

$$q(r) = \frac{B_z r}{B_\theta R},$$

можно записать

$$k_{\parallel} = \frac{B_z}{B} \left(k + \frac{m}{q(r)R} \right). \quad (11)$$

По своему смыслу смещение элемента плазмы ξ должно быть однозначной функцией координат, поэтому на обводе тора $L = 2\pi R$ должно укладываться целое число периодов возмущения. Следовательно, $k = 2\pi n/L = n/R$, где n — целое число, и мы приходим к выводу, что $k_{\parallel} = 0$ на рациональной магнитной поверхности с радиусом $r = r_{mn}$ таким, что $q(r_{mn}) = -m/n$.

Выясним, как будет изменяться продольное волновое число k_{\parallel} при переходе от силовой линии, лежащей на рациональной магнитной поверхности, к силовой линии на другой, достаточно близкой магнитной поверхности. Разлагая k_{\parallel} по малому параметру $\delta r = r - r_{mn}$, находим

$$k_{\parallel} \approx \frac{B_z}{B} \frac{d}{dr} \left(k + \frac{m}{qR} \right) \delta r = \frac{B_z}{B} \frac{m}{R} \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{q} \right) \delta r. \quad (12)$$

Для магнитных систем типа токамак в этом выражении можно приблизительно принять $B_z/B \approx 1$.

Из формулы (12) следует, что при заданных значениях волнового числа m и радиального смещения δr фаза возмущения на силовой линии, равная $k_{\parallel}s$, будет тем ближе к постоянной величине, чем меньше величина шири (§22.4), которая характеризуется параметром

$$\theta_s = \frac{r}{q} \frac{dq}{dr}. \quad (13)$$

Смысъ этого результата нетрудно уяснить. Постоянство фазы смещения ξ при переходе от одной силовой линии к другой означает наименьшее возмущение магнитного поля. Следовательно, при значениях θ_s , близких к нулю, возможна перестановка соседних силовых трубок без искажения магнитного поля, поэтому возмущения перестановочного типа могут свободно распространяться по радиусу, вызывая неустойчивость плазмы. При увеличении θ_s такие деформации будут стабилизироваться, так как с перемещением плазмы в направлении r в этом случае будет связано сильное искажение поля. Количественный критерий устойчивости для мелкомасштабных возмущений, локализованных вблизи рациональных магнитных поверхностей, получен Б. Сайдемом (*Bergen Suydam*) [116]. Согласно критерию Сайдема, винтовой пинч локально устойчив, если

$$-8\pi r \frac{dp}{dr} < \frac{B_z^2}{4} \theta_s^2, \quad (14)$$

то есть градиент давления меньше (по абсолютной величине) некоторого значения, пропорционального θ_s^2 ; здесь предполагается, что давление p убывает с радиусом и $dp/dr < 0$.

Литература

Анализу устойчивости пинчей относительно МГД-возмущений посвящены §7 и §8 статьи [Б. Б. Кадомцева](#) в сборнике «Вопросы теории

плазмы» [17]. В §7 решена задача об устойчивости скинированного пинча методом малых колебания, а в §8 исследована устойчивость диффузного пинча при помощи энергетического принципа.

Современное состояние теории устойчивости пинчей отражено в главе 11 монографии Дж. Фридберга (Jeffrey Freidberg) «Ideal MHD» [13]. В статье Д. Д. Рютова с соавторами [117] уточнён критерий устойчивости винтового пинча с целью корректного учёта граничных условий на торцах пинча.

Задачи и вопросы

Задача 1. Выведите дисперсионное уравнение малых колебаний скинированного пинча.

[Решение ⇒ 370](#)

Задача 2. Используя дисперсионное уравнение, полученное в задаче 1, исследуйте устойчивость возмущений типа перетяжка.

[Решение ⇒ 374](#)

Задача 3. Используя дисперсионное уравнение, полученное в задаче 1, исследуйте устойчивость возмущений типа змейка при $B_z = 0$.

[Решение ⇒ 375](#)

Задача 4. Используя дисперсионное уравнение, полученное в задаче 1, исследуйте устойчивость возмущений с азимутальным числом $m \geq 1$ при $B_z \gg B_\theta$.

[Решение ⇒ 375](#)

Задача 5. Исследуйте влияние стенок проводящей камеры на устойчивость пинча в условиях задачи 3.

[Решение ⇒ 376](#)

Задача 6. Исследуйте устойчивость тета-пинча с помощью энергетического принципа.

[Решение ⇒ 377](#)

Задача 7. Исследуйте устойчивость зет-пинча с помощью энергетического принципа.

[Решение ⇒ 378](#)

Задача 8. Исследуйте устойчивость зет-пинча с помощью условия конвективной устойчивости Кадомцева (§28.2).

[Решение ⇒ 381](#)

Задача 9. Оцените инкремент винтовой неустойчивости тонкого провода с током в продольном магнитном поле.

[Решение ⇒ 382](#)

Задача 10. Исследуйте устойчивость винтового пинча с помощью энергетического принципа. Покажите, что минимизация потенциальной энергии (26.23) приводит к уравнению Эйлера—Лагранжа для радиальной компоненты вектора смещения $\xi_r(r)$.
Решение \Rightarrow 383

Задача 11. Используя решение задачи 10, найдите условие устойчивости локализованных возмущений в винтовом пинче (критерий Сайдема).
Решение \Rightarrow 385

Лекция 28

Желобковая неустойчивость

Желобковые возмущения. Условие конвективной устойчивости Кадомцева. Критерий Розенблюта—Лонгмайра. Инкремент желобковой неустойчивости. Методы стабилизации желобковой неустойчивости

Градиент давления плазмы в неоднородном магнитном поле может приводить к *желобковой неустойчивости* (англ. flute). Её называют также конвективной или перестановочной неустойчивостью (interchange). В наиболее рафинированном виде желобковая неустойчивость проявляется в ловушках с замкнутыми магнитными силовыми линиями, например в торе с гофрированным полем ([§23.2](#)). В классическом токамаке возмущения желобкового типа возможны вблизи рациональных магнитных поверхностей, но они успешно подавляются широм магнитного поля ([§27.5](#)). В открытых ловушках с незамкнутыми магнитными силовыми линиями желобковые возмущения представляют серьёзную опасность, поскольку характеризуются большим значением инкремента неустойчивости. Для подавления желобковой неустойчивости разработаны эффективные методы, которые кратко обсуждаются в заключительном параграфе. Ему предшествуют параграфы, где сформулированы два критерия устойчивости желобковых возмущений: условие конвективной устойчивости Кадомцева для систем с замкнутыми магнитными силовыми линиями и критерий Розенблюта—Лонгмайра для аксиально-симметричных открытых ловушек.

§28.1. Желобковые возмущения

Рассмотрим отдельную замкнутую плазменную трубку, образованную магнитными силовыми линиями и заполненную плазмой низкого давления с $\beta \ll 1$. Так как плазма стремится расширяться, то эта трубка

выталкивается в сторону, где она увеличивает свой объём.

Однако движение трубы в сильном магнитном поле не является свободным: всякое заметное её искривление связано с большим увеличением магнитной энергии и поэтому недопустимо. Возможно лишь такое перемещение трубы, при котором возмущение магнитного поля $\delta\mathbf{B} = \text{rot}[\xi \times \mathbf{B}]$ близко к нулю. Этот факт можно также усмотреть, анализируя выражение (26.23) для потенциальной энергии возмущения W_P : при $\beta \rightarrow 0$ она будет заведомо положительной из-за доминирования слагаемого $(\delta\mathbf{B})^2/4\pi$, если $\delta\mathbf{B} \neq 0$, что означает невозможность возмущений такого рода. Полагая

$$\text{rot}[\xi \times \mathbf{B}] = 0, \quad (1)$$

находим, что векторное произведение $[\xi \times \mathbf{B}]$ должно быть равно градиенту некоторой скалярной функции:

$$[\xi \times \mathbf{B}] = \nabla \chi. \quad (2)$$

Поскольку

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = -\frac{1}{c}\left[\frac{\partial \xi}{\partial t} \times \mathbf{B}\right],$$

электрическое поле такого возмущения является потенциальным, т. е.

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\nabla \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (3)$$

Кроме того, из выражения (2) следует, что функция χ постоянна вдоль плазменной трубы, т. е.

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \chi = 0.$$

Очевидно, что $\varphi = (1/c)\partial \chi / \partial t$ можно отождествить с электрическим потенциалом, причём величина φ также не меняется вдоль магнитного поля. Именно такие возмущения называют *желобковыми*. В тех случаях, когда желобковые возмущения неустойчивы, говорят о *желобковой неустойчивости*. Так как $\delta\mathbf{B} = 0$, желобковая неустойчивость относится к классу потенциальных неустойчивостей.

§28.2. Условие конвективной устойчивости Кадомцева

Объём выделенной плазменной трубы равен

$$V = \oint \Delta S \, ds,$$

где $\Delta S = \Delta S(s)$ — площадь поперечного сечения трубы, а интеграл вычисляется вдоль магнитной силовой линии. Но $B \Delta S = \Delta \Phi$ есть магнитный поток, который остаётся постоянным как вдоль трубы, так и во времени вследствие вмороженности магнитного поля в идеальную плазму. Поэтому

$$V = \Delta \Phi \oint \frac{ds}{B}. \quad (4)$$

Плазма, как и всякий газ, стремится расширяться. При расширении выделенная трубка с плазмой должна двигаться в направлении увеличения функции

$$U = \oint \frac{ds}{B}. \quad (5)$$

Отсюда нетрудно прийти к выводу, что плазма будет находиться в равновесии только в том случае, если её давление будет постоянно на поверхности постоянного значения U , т. е. $p = p(U)$. Другим способом условие равновесия $p = p(U)$ было получено в §23.2, исходя из иных соображений.

Исследуем теперь устойчивость такого равновесия. Пусть всё та же трубка с плазмой смещается на малое расстояние, раздвигая соседние трубы. Если это смещение имеет вид желобка, т. е. его форма подстраивается под форму силовых линий невозмущённого магнитного поля, то относительное изменение объёма трубы равно

$$\delta V/V = \delta U/U,$$

а изменение давления вследствие адиабатического расширения

$$\delta p/p = -\gamma \delta U/U.$$

Давление же в трубках, окружающих рассматриваемый желобок, равно

$$p(U + \delta U) = p + (dp/dU)\delta U.$$

Если смещение происходит в сторону возрастания U , т. е. $\delta U > 0$, а давление в желобке окажется больше, чем давление окружающей его плазмы, то желобок будет всплывать дальше и такое распределение плазмы будет неустойчиво. Если же, наоборот, давление в желобке окажется

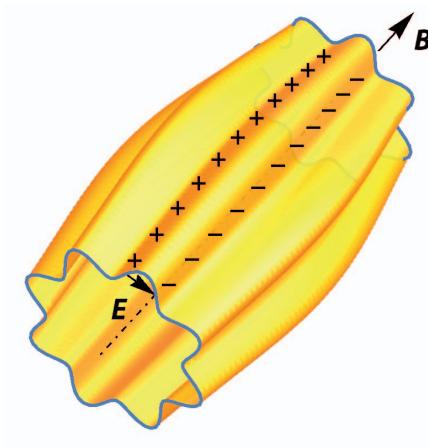


Рис. 1. Механизм желобковой неустойчивости. В неоднородном магнитном поле ионы и электроны дрейфуют в противоположные стороны, в результате чего всплывающий желобок поляризуется. Возникшее электрическое поле создаёт электрический дрейф в направлении градиента давления плазмы. В зависимости от знака средней кривизны магнитных силовых линий электрической дрейф либо возвращает желобок в равновесное состояние, либо удаляет от него.

меньше, т. е. $-\gamma p \delta U/U < (dp/dU)\delta U$ при $\delta U > 0$, то он будет вытесняться обратно в сторону равновесия и плазма будет устойчивой. Таким образом, в магнитной ловушке с замкнутыми силовыми линиями условие устойчивости есть

$$\frac{dp}{dU} > -\gamma \frac{p}{U}. \quad (6)$$

В таком виде оно было получено [Б. Б. Кадомцевым](#) в 1957 году в результате строгого анализа уравнений движения плазмы низкого давления [83]. К тому же условию приводит минимизация потенциальной энергии желобковых возмущений (задача 1). На границе плазмы производная dp/dU обычно велика по сравнению с p/U , так что правой частью в (6) можно пренебречь. В этом случае можно использовать упрощённое условие устойчивости

$$\frac{dp}{dU} > 0. \quad (7)$$

Оно означает, что давление плазмы должно быть больше в области с большим U . Так как эта область соответствует более слабым магнитным полям, её можно назвать *магнитной ямой*. Таким образом, для устойчивости плазмы относительно возмущений желобкового типа достаточно, чтобы плазма располагалась в магнитной яме.

Физический механизм возникновения желобковой неустойчивости поясняет рисунок 1. В неоднородном магнитном поле ионы и электро-

ны дрейфуют в противоположные стороны (лекция 5), создавая дрейфовый ток. В равновесном состоянии линии тока лежат в магнитной поверхности, не приводя к разделению зарядов и поляризации плазмы. Однако всплывающая трубка плазмы будет окружена плазмой с другими параметрами, в результате чего на боковой поверхности всплывающей трубки будет скапливаться электрический заряд, создавая электрическое поле. Это поле направлено поперёк магнитного поля и поперёк направления смещения желобка. Вызванный им электрический дрейф имеет проекцию на направление нормали к поверхности постоянного давления. В зависимости от знака средней кривизны магнитных силовых линий электрический дрейф может либо возвращать желобок в исходное состояние (устойчивость), либо удалять его от этого состояния, разрушая равновесное состояние (неустойчивость).

В следующем параграфе критерий устойчивости плазмы относительно желобковых возмущений записан в форме, которая явно содержит кривизну магнитных силовых линий.

§28.3. Критерий Розенблюта—Лонгмайра

Примером магнитной системы для удержания плазмы, в которой существенную роль играет желобковая неустойчивость, является открытая ловушка с магнитными пробками (§6.4). В простейшем варианте такая ловушка создаётся двумя одинаковыми коаксиальными катушками, которые включены в одном направлении, имеют общую ось и расположены на некотором расстоянии одна от другой (рис. 6.4). Магнитное поле между катушками несколько слабее, чем в плоскости катушек, так что центральная часть поля заключена между двумя магнитными «пробками» — областями с усиленным полем. Плазма в такой ловушке анизотропна и $p_{\parallel} \neq p_{\perp}$. Однако это обстоятельство не является существенным для желобковой неустойчивости. Имеет значение лишь то, в какую сторону — наружу или внутрь плазмы — убывает магнитное поле.

Чтобы не отвлекаться на частности, связанные с анизотропией плазмы, рассмотрим открытую ловушку с бесконечно сильными магнитными пробками. Приближённо плазма в такой ловушке изотропна, поэтому можно воспользоваться условием конвективной устойчивости Кадомцева, которое получено для замкнутых магнитных силовых линий, если принять, что интегрирование в (5) идёт между максимумами магнитного поля в пробках. Для простоты будем также считать, что магнитное поле в ловушке аксиально-симметрично, так что силовые линии

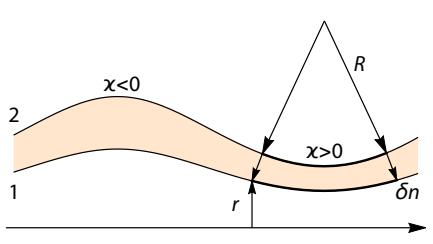


Рис. 2. К выводу критерия Розенблюта—Лонгмайра. В плазме низкого давления $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, поэтому интегралы $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ по выделенным отрезкам магнитных силовых линий равны друг другу, т. е. $B_2 R = B_1(R + \delta n)$, где $R = 1/\kappa$ — радиус кривизны силовых линий, а $B_1 = B$ и $B_2 = B + \delta B$ — величина магнитного поля на линиях 1 и 2.

плоские и лежат в сечении rz цилиндрической системы координат, как показано на рисунке 2. Магнитные поверхности в такой ловушке удобно маркировать (редуцированным, т. е. делённым на 2π) магнитным потоком

$$\Phi(r, z) = \int_0^r B_z(r, z) r dr$$

через окружность радиуса r в плоскости $z = \text{const}$, подразумевая, что $p = p(\Phi)$, $U = U(\Phi)$. При этом $dp/dU = (dp/d\Phi)/(dU/d\Phi)$ и, чтобы воспользоваться условием конвективной устойчивости (7), необходимо вычислить производную $dU/d\Phi$.

Рассмотрим две близкие магнитные силовые линии (рис. 2) и вычислим изменение

$$\delta U = \delta \int \frac{ds}{B}$$

функции $U = \int ds/B$ при переходе от силовой линии 1 (которая ближе к оси $r = 0$) ко внешней силовой линии 2 (которая дальше от оси). Пусть δn обозначает расстояние по нормали между этими линиями. Для простоты ограничимся случаем $\beta \ll 1$ и будем считать, что $\text{rot } \mathbf{B} = 0$.

Как показано на рисунке, выделим два коротких сегмента выбранных силовых линий, которые опираются на общий малый угол и соединены отрезками нормалей δn . Так как $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, интеграл $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ по замкнутому контуру, образованному этими сегментами и отрезками нормалей, равен нулю. Но равны нулю также интегралы по отрезкам нормалей, поскольку они перпендикулярны магнитному полю. Следовательно, интегралы $\int B ds$ по выделенным сегментам силовых линий

одинаковы. Если считать, что радиус кривизны силовой линии 2 равен R , то радиус кривизны линии 1 будет равен $R + \delta n$. Поэтому из равенства интегралов следует соотношение

$$B_2 R = B_1 (R + \delta n)$$

между величиной полей $B_1 = B$ и $B_2 = B + \delta B$ на выбранных силовых линиях. Отсюда находим

$$\frac{\delta B}{B} = \frac{\delta n}{R}.$$

Возвращаясь к вычислению δU , учтём, что величина $B ds$ не меняется при переходе между силовыми линиями, поэтому

$$\delta U = \delta \int \frac{ds}{B} = \int ds B \delta \frac{1}{B^2} = \int ds B \left(-2 \frac{\delta B}{B^3} \right) = -2 \int ds \frac{\delta n}{BR}.$$

Параметр δn можно выразить через магнитный поток

$$\delta \Phi = r B \delta n$$

между магнитными поверхностями, на которых лежат наши выделенные силовые линии, так что

$$\delta U = -2 \int ds \frac{\delta \Phi}{r B^2 R}.$$

Радиус r магнитной силовой линии, радиус кривизны R и магнитное поле B меняются вдоль силовой линии, но величина $\delta \Phi$ остаётся постоянной и её можно вынести из-под знака интеграла. Следовательно,

$$\frac{dU}{d\Phi} = -2 \int \frac{ds}{r B^2 R} = -2 \int \frac{\chi ds}{r B^2}, \quad (8)$$

где $\chi = 1/R$ — кривизна силовой линии. Учитывая, что давление плазмы убывает при удалении от оси ловушки и поэтому $dp/d\Phi < 0$, заключаем, что условие (7), согласно которому $dp/dU = (dp/d\Phi)/(dU/d\Phi) > 0$, в данном случае эквивалентно неравенству $dU/d\Phi < 0$. Таким образом, плазма в аксиально-симметричной адиабатической ловушке устойчива по отношению к желобковым колебаниям при условии

$$\int \frac{\chi ds}{r B^2} > 0, \quad (9)$$

которое называют *критерием Розенблюта—Лонгмайра* (*Marshall Rosenbluth, Conrad Longmire* [118]).

В простейшей открытой ловушке — пробкотроне — кривизна κ положительна на концах силовых линий вблизи магнитных пробок и отрицательна в середине, так что вклад в интеграл средней области, где магнитное поле меньше, доминирует и условие (9) не выполняется. Это предсказание можно подтвердить несложным расчётом. Ограничимся рассмотрением магнитных силовых линий, проходящих вблизи оси ловушки z . Форму таких линий нетрудно найти из уравнения

$$\Phi \approx \frac{1}{2}r^2B(z) = \frac{1}{2}r_0^2B_0 = \text{const},$$

выражающего постоянство магнитного потока через сечение магнитной поверхности, связав радиус магнитной силовой линии $r(z)$ с величиной магнитного поля $B(z)$ на оси z . Отсюда следует, что

$$r(z) = r_0 \sqrt{B_0/B(z)}, \quad (10)$$

где r_0 и B_0 — некоторые константы, которые выпадут из финального выражения. Угол наклона таких приосевых силовых линий к оси системы мал, в связи с чем приближение (10) называют *параксиальным* по аналогии с параксиальным приближением приосевых лучей в оптике. В этом приближении

$$ds \approx dz, \quad \kappa \approx \frac{d^2r}{dz^2}$$

и поэтому

$$\int \frac{\kappa ds}{rB^2} = \int \frac{dz}{B^{3/2}} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{B^{1/2}}.$$

Выполнив далее однократное интегрирование по частям между максимумами магнитного поля, где $dB/dz = 0$, приходим к выражению

$$\int \frac{\kappa ds}{rB^2} = - \int \left(\frac{d}{dz} \frac{1}{B^{3/2}} \right) \left(\frac{d}{dz} \frac{1}{B^{1/2}} \right) dz = - \frac{3}{4} \int \frac{dz}{B^4} \left(\frac{dB}{dz} \right)^2,$$

которое заведомо отрицательно. Поэтому плазма в простом пробкотроне неустойчива относительно желобковых колебаний. После осознания этого факта были разработаны различные методы стабилизации желобковой неустойчивости в открытых ловушках. Некоторые из них будут рассмотрены в §28.5.

§28.4. Инкремент желобковой неустойчивости

Оценим инкремент желобковой неустойчивости в аксиально-симметричном пробкотроне с помощью энергетического принципа. Так как желобковые колебания потенциальны, начнём с того, что в выражении (26.23) для потенциальной энергии W_F опустим первое и четвёртое слагаемые, содержащие $\delta\mathbf{B}$. Оставшиеся слагаемые дают плазменную часть потенциальной энергии:

$$W_P = \frac{1}{2} \int \left\{ \gamma p |\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}|^2 + (\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla p) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_\perp^* \right\} d^3x. \quad (11)$$

С помощью формулы (2) ту часть смещения плазмы в желобковых колебаниях, которая ориентирована поперёк магнитного поля, можно записать в виде

$$\boldsymbol{\xi}_\perp = \frac{[\mathbf{B} \times \nabla \chi]}{B^2}, \quad (12)$$

где потенциал χ остаётся постоянным на силовой линии. В аксиально-симметричной ловушке силовая линия однозначно определяется величиной магнитного потока и значением азимутального угла θ , поэтому

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \chi(\Phi) e^{im\theta - i\omega t}. \quad (13)$$

Дальнейшие вычисления существенно упрощаются в пределе, когда азимутальное число m велико. Можно показать, что инкремент желобковой неустойчивости максимален в пределе $m \rightarrow \infty$. Ограничившись этим пределом, рассмотрим желобковые возмущения, в которых трубка плазмы имеет вид узкого лезвия ножа. Всплывая, «нож» легко раздвигает соседние участки плазмы, почти не возмущая магнитное поле. Нормальная компонента возмущения

$$\xi_n = -\frac{im\chi}{rB} \quad (14)$$

в $m \gg 1$ раз больше других компонент, и поэтому ими можно пренебречь. В частности, переходя к вычислению $\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}$, мы пренебрежём вкладом продольной части смещения ξ_\parallel . Вычисляя

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_\perp = \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{B}}{B^2} \times \nabla \chi \right] = \nabla \chi \cdot \left[\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right] - \frac{\mathbf{B}}{B^2} \cdot [\nabla \times \nabla \chi],$$

сначала учтём, что $[\nabla \times \nabla \chi] = 0$. На следующем шаге,

$$\operatorname{div} \xi_\perp = \nabla \chi \cdot \left[\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right] = \nabla \chi \cdot \frac{[\nabla \times \mathbf{B}]}{B^2} + \nabla \chi \cdot \left[\nabla \frac{1}{B^2} \times \mathbf{B} \right],$$

ограничимся случаем потенциального магнитного поля, когда $[\nabla \times \mathbf{B}] = 0$. Тогда

$$\operatorname{div} \xi_\perp = \nabla \chi \cdot \left[\nabla \frac{1}{B^2} \times \mathbf{B} \right] = \frac{2im\chi}{rB^2} \frac{\partial B}{\partial n} = \frac{2im\chi}{rB} \kappa = -2\xi_n \kappa, \quad (15)$$

поскольку при $\beta \rightarrow 0$ из уравнения равновесия (21.15) следует, что $\partial B / \partial n = \kappa B$, где $\partial / \partial n$ обозначает производную по нормали к силовой линии. В параксиальном приближении кривизна κ мала, поэтому первым слагаемым в (11) можно пренебречь по сравнению со вторым. В оставшемся выражении

$$W_P = \frac{1}{2} \int (\xi_\perp \cdot \nabla p) \operatorname{div} \xi_\perp^* d^3x \quad (16)$$

перейдём к интегрированию по магнитному потоку и длине силовой линии при помощи замен

$$d\Phi = rB dn, \quad d^3x = r dn ds d\theta = \frac{1}{B} d\Phi ds d\theta,$$

а также учтём, что

$$(\xi_\perp \cdot \nabla p) = \xi_n \frac{\partial p}{\partial n} = r \xi_n B \frac{dp}{d\Phi}.$$

Собирая все формулы вместе, заметим, что величины $r \xi_n B = -im\chi$ и $dp/d\Phi$ постоянны на магнитной силовой линии, поэтому их можно вынести из-под знака интеграла по длине силовой линии. В результате получаем выражение

$$W_P = - \int d\theta \int d\Phi \frac{dp}{d\Phi} |rB\xi_n|^2 \int ds \frac{\kappa}{rB^2}, \quad (17)$$

у которого во внутреннем интеграле нетрудно распознать критерий Розенблюта—Лонгмайра (9). В системах, представляющих практический интерес, давление убывает по радиусу, поэтому $dp/d\Phi < 0$. Тогда $W_P > 0$ при выполнении критерия (9), что соответствует устойчивости системы согласно энергетическому принципу.

В противоположном случае $W_P < 0$ и желобковое возмущение будет неустойчиво. Его амплитуда $\xi_0 \propto e^{\Gamma t}$ будет нарастать по экспоненциальному закону с инкрементом $\Gamma > 0$. Чтобы найти инкремент желобковой неустойчивости при помощи вариационного принципа (26.31), нужно величину W_P поделить на интеграл

$$K = \frac{1}{2} \int \rho |\xi|^2 d^3x \approx \frac{1}{2} \int d\theta \int d\Phi \int ds \frac{\rho}{B} |\xi_n|^2.$$

Нетрудно видеть, что экстремум выражения

$$\Gamma^2 = -\omega^2 = -\frac{W_P}{K}$$

достигается для таких возмущений ξ_n , которые локализованы на магнитной поверхности, где производная $dp/d\Phi$ максимальна по абсолютному значению. Для плазмы с резкой границей производная $dp/d\Phi$ может достигать очень больших значений, а вместе с ней и инкремент неустойчивости. Можно ожидать, что такие мелкомасштабные возмущения приводят к быстрому слаживанию границы плазмы, и тогда на первый план выступают крупномасштабные возмущения с характерным масштабом изменения ξ_n порядка радиуса плазмы a . Принимая для грубой оценки, что $dp/d\Phi \sim p/a^2 B$, $p \sim \rho v_{Ti}^2$ и $x \sim a/L^2$, где L – длина ловушки, а v_{Ti} – тепловая скорость ионов, находим, что инкремент неустойчивости порядка обратного времени пролёта иона между магнитными пробками:

$$\Gamma \sim \frac{v_{Ti}}{L}. \quad (18)$$

Таким образом, желобковая неустойчивость разваливает равновесное состояние плазмы за время одного пролёта иона между магнитными пробками. Тот же результат можно получить, решая модельную задачу об устойчивости границы плазмы в искусственном гравитационном поле (задача 4).

§28.5. Методы стабилизации желобковой неустойчивости

Причиной неустойчивости плазмы в аксиально-симметричной открытой ловушке относительно желобковых возмущений в конечном итоге является тот факт, что точка минимума магнитного поля на оси такой ловушки в действительности является седловой: магнитное поле

нарастает от этой точки в направлении вдоль оси к магнитным пробкам, но убывает поперёк оси. Поэтому в поисках способов стабилизации желобковой неустойчивости прежде всего стоит попытаться отыскать такие конфигурации магнитного поля, чтобы его напряжённость возрас-tала во всех направлениях от области, занятой плазмой, а не только в продольном направлении, как это имеет место в обычной ловушке. Такие конфигурации существуют и в принципе исключают возможность возникновения желобковой неустойчивости.

Два других способа стабилизации желобковой неустойчивости основаны на подавлении поляризационных электрических полей, возникающих в плазме из-за магнитного дрейфа ионов и электронов в неоднородном поле ловушки. В одном случае это достигается путём создания достаточно хорошей проводимости между удерживаемой плазмой и эквипотенциальными металлическими электродами, расположенными вне её — по торцам за магнитными пробками. В другом методе поля подавляются с помощью специальной системы электродов, которые размещаются вокруг плазмы и не находятся с ней в непосредственном электрическом контакте; между электродами внешними источниками создаются в каждый данный момент времени электрические поля, противоположные по направлению полям в плазме и препятствующие тем самым нарастанию начальных желобковых возмущений. Рассмотрим подробнее эти и некоторые другие способы стабилизации плазмы.

Средний минимум B

Наиболее радикальным способом борьбы с желобковой неустойчивостью является создание такой магнитной конфигурации, при которой магнитное поле имело бы минимум и нарастало во все стороны. Такие конфигурации получили название ловушек с минимумом B или с магнитной ямой.

Впервые стабилизация желобковой неустойчивости с помощью магнитной ямы была достигнута М. С. Иоффе с сотрудниками [119–122]. Они использовали комбинированную систему, в которой к обычным круглым катушкам была добавлена стабилизирующая обмотка, состоявшая из системы линейных проводников, размещённых параллельно оси ловушки на некотором расстоянии от неё, как это показано на рисунке 3а. Токи в соседних проводниках были направлены во взаимно противоположных направлениях, поэтому создаваемое ими магнитное поле было равно нулю на оси ловушки и монотонно нарастало по ра-

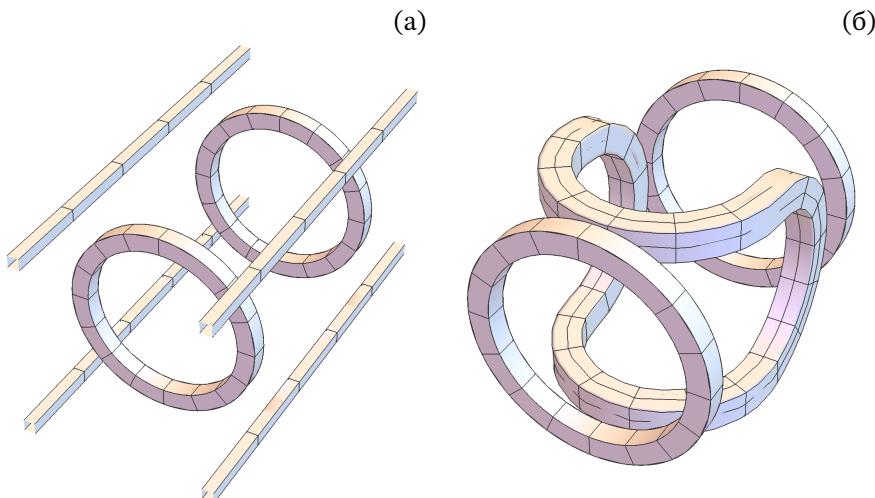


Рис. 3. Примеры магнитных конфигураций с минимумом B : (а) пробкотрон с «палками Иоффе», (б) пробкотрон с катушкой типа бейсбол.

диусу. Тем самым можно было скомпенсировать радиальный спад магнитного поля пробкотрона и сделать суммарное поле нарастающим от центра ловушки к периферии, если пропускать через эту дополнительную обмотку ток достаточной величины.

Магнитные силовые линии суммарного поля имеют довольно сложную геометрию. Только узкий пучок приосевых силовых линий проходит вдоль всей ловушки, не вываливаясь на боковые стенки. Линии, отстоящие дальше от оси в центральном сечении ловушки, пересекают стенку в местах зазоров между проводниками стабилизирующей обмотки. Тем не менее эта конфигурация представляет собой типичную адиабатическую ловушку и притом с минимумом магнитного поля внутри объёма, занятого плазмой.

Позднее различными авторами был предложен целый ряд конфигураций с минимумом B ; пример такой конфигурации с катушкой типа бейсбол показан на рисунке 3б. Как оказалось, все они содержат в качестве ключевого конструктивного элемента катушку, формирующую квадрупольное магнитное поле.

Чтобы понять, почему это так, выясним, при каких условиях можно получить минимум магнитного поля (по абсолютной величине) в неко-

торой точке. Пусть эта точка совпадает с началом координат и пусть магнитное поле в этой точке \mathbf{B}_0 направлено вдоль оси z . Поскольку вблизи искривлённой силовой линии магнитное поле изменяется линейно в поперечном направлении, то для того чтобы точка $r = 0$ была минимумом B , требуется, чтобы осевая силовая линия была прямой (точнее, её кривизна в точке $r = 0$ должна быть равна нулю). В этом случае в разложении скалярного потенциала ψ для магнитного поля $\mathbf{B} = \nabla\psi$ должны отсутствовать линейные по x и y члены, так что

$$\psi = B_0 z + az \left(\frac{z^2}{3} - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \frac{b}{2}(x^2 - y^2) + \dots, \quad (19)$$

где первые два члена описывают аксиально-симметричную часть поля, которая не меняется при вращении системы координат вокруг оси z . Мы учли в этом разложении, что $\nabla^2\psi = \operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, и допустили, что оси x , y повернуты так, что последний квадрупольный член имеет диагональный вид. Все остальные члены в правой части уравнения (19), которые условно показаны многоточием, имеют более высокий порядок по x , y , z и поэтому могут быть отброшены. Из (19) следует, что вблизи $x = y = z = 0$ магнитное поле имеет вид

$$B = B_0 + az^2 + \left(\frac{b^2}{B_0} - a \right) \frac{x^2 + y^2}{2} + \dots, \quad (20)$$

где точки заменяют члены более высокого порядка малости. Отсюда видно, что наложение магнитных пробок, т. е. усиление поля вдоль z (при $a > 0$), автоматически приводит к его ослаблению в радиальном направлении, но это может быть скомпенсировано достаточно сильным квадрупольным полем ($b^2 > aB_0$).

Цикл работ группы Иоффе по подавлению желобковой неустойчивости в адиабатических ловушках полями с минимумом B явился определённым этапом в исследованиях по физике высокотемпературной плазмы. Это была первая убедительная демонстрация возможности стабилизации магнитогидродинамической неустойчивости плазмы.

Позднее появилась концепция среднего минимума B , которая допускает, что в отдельных сегментах ловушки минимум B может отсутствовать, но он имеет место в среднем по всей длине ловушки. В рамках такой концепции были построены модульные открытые ловушки. Каждая такая ловушка состояла из нескольких сегментов (ячеек, модулей), из которых только некоторые имели минимума B . Обычно это были две

концевые ячейки, а центральный длинный сегмент проектировался аксиально-симметричным; предполагалось, что в основном в этом длинном модуле будет выделяться энергия термоядерных реакций.

Стабилизация торцами

Возмущения желобкового типа в открытой ловушке можно стабилизировать, если обеспечить хороший электрический контакт плазмы с торцевыми проводниками, например поместив их непосредственно за магнитными пробками. Подобную ситуацию можно также осуществить в эксперименте, если внешнюю область между пробкой и проводящей стенкой вакуумной камеры заполнить холодной плазмой, которая является более хорошим проводником, чем стенка. На проводящих торцах смещение ξ должно обращаться в нуль вследствие вмороженности магнитного поля в твёрдый (и поэтому неподвижный) проводящий материал торцов. Для предписанной формы желобка (2) равенство $\xi = 0$ на концах силовой линии означает, что и всюду $\xi = 0$. Физический же механизм подавления желобковой неустойчивости проводящими торцами состоит в том, что поляризационный заряд, который возникает при всплытии желобка, стекает на торцы и там нейтрализуется. Недостатком такого метода стабилизации является значительное увеличение потерь энергии из плазмы на торцы, в результате чего она быстро остывает. Создать термоядерный реактор с таким методом стабилизации плазмы вряд ли получится, но в установках с умеренными параметрами плазмы торцевая стабилизация была достигнута экспериментально [123, 124]. Достаточно давно было понято [125], что контакт с торцами не может быть идеальным из-за конечного удельного сопротивления дебаевского слоя, который формируется в плазме на поверхности проводника. Но даже при таком конечном удельном сопротивлении стабилизирующий эффект может быть значительным [126].

Подавляя желобковую неустойчивость, стабилизация торцами или концевыми ячейками с минимумом B оставляет возможность развития других неустойчивостей. В частности, в магнитном поле центральной ячейки, где не создан минимум B , возможна баллонная неустойчивость, если давление плазмы превысит критическое значение. Баллонной неустойчивости посвящена следующая лекция.

Метод обратных связей

Поляризационные заряды желобковых возмущений создают вблизи поверхности плазмы местные азимутальные электрические поля, которые вызывают нарастание начальных возмущений и дрейф желобков к стенке вакуумной камеры. Если окружить плазму системой изолированных электродов и изменять потенциалы этих электродов так, чтобы в каждый момент времени всюду по азимуту создавались электрические поля, противоположные по направлению полям в плазме, то таким способом можно ослабить и даже полностью подавить рост желобковых возмущений. Управление потенциалами отдельных электродов осуществляется автоматически системой небольших емкостных датчиков, размещенных вблизи электродов и следящих за изменением потенциала на поверхности плазмы. Сигналы с датчиков усиливаются и в нужной фазе подаются обратно на соответствующие электроды.

В 1960–1970-х годах были предприняты достаточно успешные попытки стабилизации плазмы обратными связями на нескольких открытых ловушках при относительно низкой плотности плазмы [127]. После этого широкое использование квадрупольных стабилизаторов с минимумом B привело к фактическому отказу от метода стабилизации обратными связями. Позднее метод был усовершенствован, и в небольшом эксперименте для изучения стабилизации желобковых возмущений были применены оптические датчики и электромагнитные исполнительные механизмы [128].

Вихревое удержание

Можно сделать торцевую проводящую пластину в форме концентрических, взаимно изолированных колец и таким образом получить контроль над радиальным распределением потенциала в плазме. В этом случае электростатический потенциал будет заданной функцией магнитного потока, $\varphi = \varphi(\Phi)$. Профилирование электростатического потенциала позволяет контролировать частоту вращения плазмы $\omega(\Phi)$, которое создаётся электрическим дрейфом плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Эксперименты на газодинамической ловушке в новосибирском Институте ядерной физики показали, что достаточно сильное положительное электрическое смещение внешней поверхности плазмы приводит к улучшению устойчивости [129, 130]. Теория, разработанная А. Д. Бекле-

мишевым [131, 132], связывает этот эффект с нелинейной вихревой стабилизацией, где сдвиговое течение, возникающее вблизи границы плазмы, предотвращает пересечение этой границы плотной центральной частью столба плазмы, где формируется вихрь.

Эффекты КЛР

Как сказано в §28.3, в рамках идеальной МГД самыми неустойчивыми среди возмущений желобкового типа являются самые мелкомасштабные, $m \rightarrow \infty$. Однако выводы магнитогидродинамической теории перестают быть достоверными, если

$$\frac{a}{L} < m \frac{\rho_i}{a}. \quad (21)$$

Из-за конечного лармировского радиуса среднее электрическое поле, которое «видят» ионы, немного отличается от электрического поля на траектории электронов, поэтому их скорости электрического дрейфа попе́рёк магнитного поля различны (задача 4.5). Это создаёт разделение зарядов в противофазе с разделением зарядов из-за градиентного и центробежного дрейфа частиц, которые приводят к желобковой неустойчивости. Можно также сказать, что лармировское вращение размывает поляризационный заряд, который возникает при всплытии желобка, и неустойчивость подавляется эффектами конечного лармировского радиуса (эффектами КЛР). Как было показано в классической работе [133] Розенблюта, Кролла и Ростокера, эффекты КЛР могут стабилизировать все желобковые колебания, кроме $m = 1$, поэтому на практике часто бывает достаточно озабочиться только стабилизацией этой ветви желобковых колебаний. Особый статус колебаний с азимутальным числом $m = 1$ связан с тем, что они представляют собой смещение плазменного шнура как целого без внутренних деформаций. Чтобы учесть эффект КЛР в уравнениях магнитной гидродинамики, нужно добавить вязкие члены к тензору потока импульса. Этот способ учёта эффектов КЛР был предложен почти одновременно в статьях [134, 135] двух разных авторов (задача 7).

Литература

На интуитивном уровне желобковая неустойчивость в плазме описана в §1.2 пятой главы в учебнике «Коллективные явления в плазме»

[28] Б. Б. Кадомцева. Методы теоретического исследования желобковой неустойчивости в открытых и замкнутых ловушках изложены в монографии А. Б. Михайловского [23]. Различные способы стабилизации желобковой неустойчивости плазмы анализируются в обзорных статьях разных авторов [126, 127].

Задачи и вопросы

Задача 1. Выразите потенциальную энергию желобковых колебаний в системе с замкнутыми магнитными силовыми линиями через удельный объём магнитного поля U , минимизируя общее выражение (26.23) в пределе плазмы низкого давления. [Решение](#) ⇒ 387

Задача 2. Получите результат предыдущей задачи, подсчитывая работу по перестановке трубы плазмы, образованной магнитными силовыми линиями. [Решение](#) ⇒ 390

Задача 3. Используя решение предыдущей задачи, оцените инкремент желобковой неустойчивости. [Решение](#) ⇒ 391

Задача 4. Оцените инкремент желобковой неустойчивости в разреженной плазме, решив задачу о движении трубы плазмы в искусственном поле тяжести. [Решение](#) ⇒ 393

Задача 5. Найдите профиль магнитного поля в аксиально-симметричной открытой ловушке, который обеспечивает минимизацию инкремента желобковой неустойчивости. [Решение](#) ⇒ 396

Задача 6. Выведите критерий Розенблута—Лонгмайра для плазмы с анизотропным давлением. [Решение](#) ⇒ 396

Задача 7. Решите задачу о желобковой неустойчивости в искусственном поле тяжести, приняв во внимание эффекты конечного ларморовского радиуса. [Решение](#) ⇒ 399

Лекция 29

Баллонная неустойчивость

Баллонные возмущения. Предельная бета.

Уравнение баллонных колебаний.

Методы стабилизации баллонной неустойчивости

§29.1. Баллонные возмущения

Если МГД-устойчивость плазмы в открытой ловушке обеспечивается за счёт контакта плазмы с хорошо проводящими торцами или стабилизирующими ячейками, расположенными за магнитными пробками, чисто желобковые возмущения будут подавлены, но неустойчивыми могут стать **баллонные возмущения**. В отличие от желобковых возмущений они локализованы в области неблагоприятной кривизны магнитных силовых линий (где $\kappa < 0$), искажая магнитное поле примерно так, как показано на рисунке 1, приближаясь к нулю в области благоприятной кривизны (где $\kappa > 0$). Деформация магнитных силовых линий требует затрат энергии, источником которых является внутренняя энергия плазмы $p/(\gamma - 1)$, поэтому возмущения баллонного типа неустойчивы только при конечном значении относительного давления плазмы, превышающем предельное значение, известное как *предельная бета*:

$$\beta > \beta_{\text{crit}} \quad (\text{неустойчивость}). \quad (1)$$

Задачей точной теории является вычисление параметра β_{crit} , но мы ограничимся простыми рассуждениями и оценками по порядку величины. В частности, для простоты предположим, что идеально проводящие торцы помещены непосредственно в пробках. Тем самым мы сужаем класс возможных возмущений, допускаемых к соревнованию при минимизации потенциальной энергии возмущений, поэтому найденные значения β_{crit} дадут в действительности верхнюю границу этой величины. Вместе с тем отличие истинных значений β_{crit} от этой верхней границы должно быть малым, поскольку за пробкой располагается глубокая

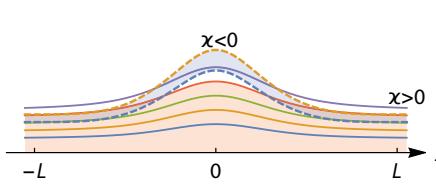


Рис. 1. Баллонные возмущения иска-
жают магнитное поле и локализова-
ны в области неблагоприятной кри-
визны, где $\kappa < 0$; трубка плазмы, по-
казанная пунктиром, всплыивает на-
ружу в области отрицательной кри-
визны, но зафиксирована в торцах
ловушки.

(и заполненная плазмой) магнитная яма (область благоприятной кри-
визны), вследствие чего магнитные силовые линии фактически жёстко
закреплены в пробках, возвращая нас к условию вмороженности в тор-
цы.

§29.2. Уравнение баллонных колебаний

Проведём анализ устойчивости возмущений баллонного типа с по-
мощью энергетического принципа. Ожидая, что предельное значение
 β_{crit} может быть малым (мы будем рады ошибиться), рассмотрим с са-
мого начала плазму с $\beta \ll 1$. Ответ на вопрос об устойчивости в этом
случае существенно зависит от того, насколько малым может быть сде-
лано возмущение энергии магнитного поля

$$W_B = \int \frac{(\delta B)^2}{8\pi} d^3x = \int d\theta \int d\Phi \int ds \frac{(\delta B)^2}{8\pi B}. \quad (2)$$

Желобковые возмущения выделены именно тем, что возмущение маг-
нитного поля δB практически равно нулю, поэтому они могут быть
неустойчивы даже при $\beta \rightarrow 0$. Чтобы найти β_{crit} , величину возмущения
магнитной энергии W_B нужно сравнивать с потенциальной энергией
(28.17), которую мы вычислили, изучая желобковые возмущения. Одна-
ко теперь следует учесть, что величина произведения $(rB\xi_n)^2$ может ме-
няться вдоль магнитной силовой линии, поэтому её нельзя выносить
из-под знака внутреннего интеграла. С учётом такой поправки имеем

$$W_P = - \int d\theta \int d\Phi \frac{dp}{d\Phi} \int ds \frac{\kappa}{rB^2} (rB\xi_n)^2. \quad (3)$$

В соответствии с реальной ситуацией будем считать, что магнитные
силовые линии составляют малый угол с магнитной осью системы (па-

раксиальное приближение) и что расстояние между пробками $2L$ больше суммарной длины пробок $2L_m$, которые могут быть разделены квазиоднородной частью. Малый параметр, характеризующий точность параксиального приближения, есть a/L_m , где a — поперечный размер плазмы в однородной части ловушки и $L_m < L$ — длина пробки. В параксиальном приближении интегрирование по силовой линии (по ds) можно заменить интегрированием по оси ловушки (по dz). Условимся, что пробкам соответствуют координаты $z = \pm L$, а однородная часть ловушки занимает область $|z| < L - L_m$.

Для желобковых возмущений в аксиально-симметричном пробкотроне согласно (28.14) имеет место соотношение

$$\xi_n = \frac{\text{const}}{rB}.$$

Отсюда в параксиальном приближении находим

$$\xi_n(z) \approx \xi_0 \sqrt{\frac{B_0}{B(z)}} \equiv \xi_{\text{fl}}(z), \quad (4)$$

где ξ_0 и B_0 — амплитуда смещения плазменной трубки и магнитное поле при $z = 0$. Амплитуда смещения $\xi_0 = \xi_0(\Phi, \theta)$ предполагается функцией магнитного потока Φ и азимутального угла θ , которая в случае мелкомасштабного возмущения резко пикирована (локализована) вблизи некоторых значений Φ_* и θ_* , но до поры до времени этот факт не существует для последующих вычислений. Смещение (4) не удовлетворяет условию вмороженности $\xi_n(\pm L) = 0$ на торцах, поэтому вместо (4) следует рассмотреть смещение более общего вида

$$\xi_n(z) = \alpha(z) \xi_{\text{fl}}(z), \quad (5)$$

где $\alpha(z)$ — неизвестная пока безразмерная функция. Наложим на неё граничные условия

$$\alpha(\pm L) = 0, \quad \alpha(0) = 1. \quad (6)$$

Первое из них обеспечивает выполнение условия вмороженности в торцы, а второе имеет смысл условия нормировки — оно фиксирует величину смещения в центре ловушки. Учитывая симметрию задачи, предположим, что искомая функция $\alpha(z)$ чётная, т. е. $\alpha(-z) = \alpha(z)$, поэтому достаточно найти решение лишь для одной половины ловушки, скажем,

для $0 < z < L$. Нечётное решение $\alpha(-z) = -\alpha(z)$ также существует. Оно получается для граничных условий $\alpha(\pm L) = \alpha(0) = 0$, однако ему соответствует большее по величине значение β_{crit} .

В смещённом положении трубы магнитное поле внутри неё отличается от окружающего на величину $\delta \mathbf{B} = \text{rot}[\xi \times \mathbf{B}]$, причём $[\xi \times \mathbf{B}] = \alpha [\xi_{\text{fl}} \times \mathbf{B}] = \alpha \nabla \chi$, где функция χ определяет потенциал в желобковых колебаниях согласно (28.2). Выполняя несложные вычисления, учтём, что градиент $\nabla \alpha$, как и вектор \mathbf{B} , почти параллелен оси z , поэтому

$$\delta \mathbf{B} = \text{rot}[\alpha \nabla \chi] = [\nabla \alpha \times \nabla \chi] = [\nabla \alpha \times [\xi_{\text{fl}} \times \mathbf{B}]] = \xi_{\text{fl}} \frac{d\alpha}{dz} \mathbf{B}. \quad (7)$$

Следовательно,

$$W_B = \int d\theta \int d\Phi \int ds \frac{(\delta \mathbf{B})^2}{8\pi B} = \frac{1}{8\pi} \int d\theta \int d\Phi \int dz \xi_{\text{fl}}^2 B \left(\frac{d\alpha}{dz} \right)^2.$$

Подставляя сюда формулу (4) для ξ_{fl} , находим магнитную часть энергии баллонных возмущений:

$$W_B = \frac{1}{8\pi} \int d\theta \int d\Phi \xi_0^2 B_0 \int dz \left(\frac{d\alpha}{dz} \right)^2. \quad (8)$$

Плазменную часть энергии (3) также преобразуем, пользуясь параксиальным приближением:

$$\begin{aligned} W_P &= - \int d\theta \int d\Phi \frac{dp}{d\Phi} \int ds \frac{\kappa}{rB^2} (rB\xi_n)^2 = \\ &= - \int d\theta \int d\Phi \frac{dp}{d\Phi} \int dz \frac{(r_0 B_0 \xi_0 \alpha)^2}{r_0 B_0^{1/2} B^{3/2}} \frac{d^2}{dz^2} \left(r_0 \sqrt{\frac{B_0}{B}} \right) = \\ &= - \int d\theta \int d\Phi \frac{dp}{d\Phi} \xi_0^2 r_0^2 \int dz \frac{B_0^{3/2}}{B^{3/2}} \alpha^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(\sqrt{\frac{B_0}{B}} \right). \end{aligned}$$

Подставляя сюда $r_0^2 = 2\Phi/B_0$ и вводя обозначение $q(z) = \sqrt{B_0/B(z)}$, получаем

$$W_P = - \frac{1}{8\pi} \int d\theta \int d\Phi \xi_0^2 B_0 \frac{16\pi\Phi}{B_0^2} \frac{dp}{d\Phi} \int dz \alpha^2 q^3 \frac{d^2 q}{dz^2}. \quad (9)$$

Следовательно, суммарная энергия $W_F = W_B + W_P$ возмущения баллонного типа равна

$$W_F = \frac{1}{8\pi} \int d\theta \int d\Phi \xi_0^2 B_0 \int dz \{ (\alpha')^2 + 2\beta(\Phi)\alpha^2 q^3 q'' \}, \quad (10)$$

где

$$\beta(\Phi) = -\frac{8\pi\Phi}{B_0^2} \frac{dp}{d\Phi}, \quad (11)$$

а штрих обозначает производную по z . В частном случае, когда давление имеет параболический профиль и $p(\Phi) = p_0(1 - \Phi/\Phi_a)$ при $\Phi < \Phi_a$, на крайней силовой линии $\Phi = \Phi_a$ значение функции (11) совпадает с традиционным определением параметра бета — $\beta_0 = 8\pi p_0/B_0^2$, где p_0 имеет смысл давления плазмы на её оси при $\Phi = 0$. Результат вычисления интегралов в формуле (10) зависит от вида функции $\xi_0 = \xi_0(\Phi, \theta)$. Далее мы предположим, что эта функция описывает мелкомасштабное возмущение, ширина которого $\delta\Phi$ существенно меньше Φ_a . Тогда можно пренебречь изменением функции $\beta(\Phi)$ на размере возмущения и отделить интегрирование по Φ и θ от интеграла по z , так что

$$W_F = \left(\frac{1}{8\pi} \iint d\theta d\Phi \xi_0^2 B_0 \right) \left(\int dz \{ (\alpha')^2 + 2\bar{\beta}\alpha^2 q^3 q'' \} \right), \quad (12)$$

где параметр

$$\bar{\beta} = \iint d\theta d\Phi \xi_0^2 \beta(\Phi) / \iint d\theta d\Phi \xi_0^2 \quad (13)$$

приблизительно равен значению функции (11) на магнитной силовой линии, вблизи которой локализовано возмущение.

В соответствии с энергетическим принципом (§26.4) система устойчива, если минимальное значение интеграла (12) больше нуля. Чтобы найти этот минимум, возьмём вариацию интеграла

$$\delta \int_0^L dz \{ (\alpha')^2 + 2\beta\alpha^2 q^3 q'' \} = 2 \int_0^L dz \{ \alpha' \delta\alpha' + 2\bar{\beta}q^3 q'' \alpha \delta\alpha \}$$

и приравняем её к нулю. Так мы получим уравнение, которому должна удовлетворять экстремаль, т. е. функция $\alpha(z)$, доставляющая минимум энергии возмущения $W_B + W_P$. Поскольку значения функции $\alpha(z)$ на концах интервала интегрирования заданы граничными условиями (6), вычисляя вариацию, нужно считать, что $\delta\alpha(0) = \delta\alpha(L) = 0$. Выполнив с учётом этого факта интегрирование по частям, получим выражение

$$2 \int_0^L dz \{ -\alpha'' + 2\bar{\beta}q^3 q'' \alpha \} \delta\alpha,$$

которое обращается в нуль при любой вариации $\delta\alpha$, если

$$\alpha'' - 2\bar{\beta}q^3q''\alpha = 0. \quad (14)$$

Как видно, вычисление величины β_{crit} , при котором существует отличное от нуля решение уравнения (14) с указанными выше граничными условиями, сводится к квантово-механической задаче об определении условий возникновения уровня нулевой энергии в потенциале

$$V(z) = \begin{cases} \infty, & \text{если } z < 0; \\ 2\bar{\beta}q^3q'', & \text{если } 0 < z < L; \\ \infty, & \text{если } z > L. \end{cases} \quad (15)$$

Можно также сказать, что предельное значение $\bar{\beta}_{\text{crit}}$ параметра $\bar{\beta}$ является собственным значением классической задачи Штурма—Лиувилля для уравнения (14) с граничными условиями (6), а решение этой задачи $\alpha(z)$ является собственной функцией. Нетрудно доказать, что подстановка собственной функции и собственного значения в интеграл (10) обращает в нуль энергию баллонных колебаний, что согласно с энергетическому принципу соответствует пограничному (англ. marginal) состоянию между устойчивостью и неустойчивостью (задача 1).

§29.3. Предельная бета

В наше время методы компьютерных вычислений достигли такой стадии совершенства, что любой человек, не владеющий методами решения дифференциальных уравнений, может почувствовать себя великим математиком, написав за полчаса программу для вычисления собственных функций и собственных значений задачи Штурма—Лиувилля. Тем не менее мы воспользуемся представившимся случаем, чтобы наглядно продемонстрировать метод приближённого вычисления $\bar{\beta}_{\text{crit}}$ с помощью вариационного принципа, который обсуждался в §26.6.

Заметим, что функция q^3q'' приблизительно равна нулю вне магнитной пробки (при $0 < z < L - L_m$) и быстро спадает вглубь пробки вместе с ростом пробочного отношения $B/B_0 = 1/q^2$, как показано на рисунке 2. Характерный размер потенциальной ямы приблизительно равен L_m , а сама яма расположена в области пробки, примыкающей к однородному магнитному полю, то есть там, где $B/B_0 \sim 1$ и $z \approx L - L_m$. Вне области потенциальной ямы уравнение (14) сводится к тривиальному равенству

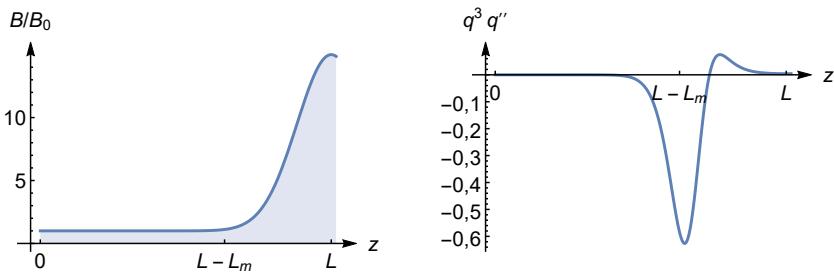


Рис. 2. Вычисление β_{crit} в модели длинного пробкотрона: слева — профиль магнитного поля, справа — соответствующий ему потенциал $q^3 q''$; для расчёта выбран профиль магнитного поля $B(z)/B_0 = 1 + (K - 1)(e^{-(z-L)^2/\Delta L^2} + e^{-(L+z)^2/\Delta L^2})$ с параметрами $K = 15$, $L = 6$, $\Delta L = 1$, $L_m \approx 2.2\Delta L$.

$\alpha'' = 0$, поэтому там $\alpha(z)$ является линейной функцией координаты z . С двух сторон от потенциальной ямы производная α' является константой, но константа меняется в месте расположения ямы. Сконструируем из линейных функций тестовую функцию

$$\alpha_1(z) = \begin{cases} 1, & |z| \leq L - L_m, \\ \frac{L - |z|}{L_m}, & L - L_m < |z| \leq L, \end{cases} \quad (16)$$

обладающую указанными свойствами, подставим её в интеграл (10) и приравняем результат к нулю. Из полученного таким образом уравнения находим приближённое значение предельной бета:

$$\bar{\beta}_{\text{crit}} = -\frac{1}{2} \int_0^L dz (\alpha'_1)^2 \Big/ \int_0^L dz \alpha_1^2 q^3 q''. \quad (17)$$

Для магнитного поля, показанного на рисунке 2, вычисленная таким образом величина $\bar{\beta}_{\text{crit}} = 0,580$ лишь незначительно отличается от точного собственного значения $\bar{\beta}_{\text{crit}} = 0,597$. График собственной функции $\alpha(z)$ показан на рисунке 3, там же пунктиром показана тестовая функция $\alpha_1(z)$.

Как сказано в §26.6, на основе вариационного принципа разработан эффективный метод численного тестирования МГД-устойчивости. В применении к задаче о вычислении предельной бета для его реализации нужно выбрать какой-нибудь достаточно полный набор базисных

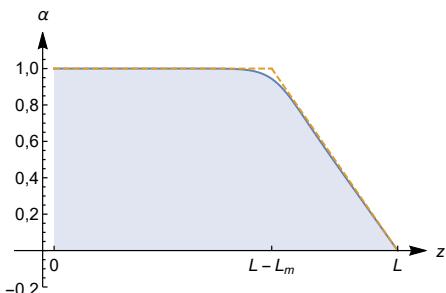


Рис. 3. График собственной функции $\alpha(z)$ задачи Штурма—Лиувилля для профиля магнитного поля, который изображён на рисунке 2. Пунктиром показан график пробной функции (16).

функций $\alpha_n(z)$, удовлетворяющих граничным условиям, и записать $\alpha(z)$ как сумму

$$\alpha(z) = \sum_n c_n \alpha_n(z)$$

этих функций с некоторыми коэффициентами c_n . Подстановка этой суммы в интеграл (10), который должен быть равен нулю, приводит к выражению для $\bar{\beta}_{\text{crit}}$, которое аналогично (17), но зависит от всех коэффициентов c_n . Минимизируя это выражение перебором коэффициентов c_n , вычисляют предельное значение $\bar{\beta}_{\text{crit}}$.

Обсудим полученные результаты. Вычисленное значение $\bar{\beta}_{\text{crit}}$ оказалось близко к единице. Для других профилей магнитного поля $B(z)$ оно может даже превышать единицу (задача 2), тогда как, приступая к выводу уравнения баллонных колебаний в §29.2, мы использовали приближение $\beta \ll 1$ и считали магнитное поле вакуумным. Следовательно, наша гипотеза была не совсем верна. Тем не менее наш труд не был совсем уж бесполезен. Во-первых потому, что, как мы увидим чуть ниже, приближение $\beta \ll 1$ даёт правильный количественный результат в случае плазмы с крутым профилем давления. Во-вторых, теперь мы можем утверждать, что предельная бета в аксиально-симметричном пробкортоне, вообще говоря, не мало по сравнению с единицей. С другой стороны, оно не может быть и больше единицы, поскольку равновесие невозможно, если давление плазмы превышает давление магнитного поля снаружи от столба плазмы (§22.2). Таким образом, можно ожидать, что $\bar{\beta}_{\text{crit}} \lesssim 1$.

Наконец, выясним, как влияет радиальный профиль давления на предельную величину бета. Локальное значение $\beta(\Phi_a)$ функции $\beta(\Phi) = (-8\pi\Phi/B_0^2) dp/d\Phi$ на крайней магнитной силовой линии $\Phi = \Phi_a$ для конкретного профиля давления $p(\Phi) = p_0(1 - \Phi/\Phi_a)$ лишь случайно

совпало с классическим определением относительного давления $\beta_0 = 8\pi p_0/B_0^2$. Для более крутого профиля давления $p(\Phi) = p_0(1 - \Phi^2/\Phi_a^2)$ получаем $\beta(\Phi_a) = 2\beta_0$, поэтому истинное предельное значение $\beta_{\text{crit}} = \bar{\beta}_{\text{crit}}/2$ параметра β_0 будет в 2 раза меньше, чем $\bar{\beta}_{\text{crit}}$. Вообще же, для профиля давления, близкого к ступеньке, предельное значение β_0 тем меньше, чем тоньше пограничный слой (задача 3). Это означает, что баллонная неустойчивость выглаживает резкую границу плазмы.

Более сложные расчёты, не использующие приближение $\beta \ll 1$ предсказывают значение $\beta_{\text{crit}} \approx 0,7$ [136, 137] для плазмы с гладким профилем давления. Оно было вычислено для профиля магнитного поля, который найден в задаче 28.5. В экспериментах на установке газодинамическая ловушка достигнуто $\beta = 0,6$ [138], причём величина β была ограничена мощностью нагрева плазмы.

§29.4. Методы стабилизации баллонной неустойчивости

Большое значение параметра β в аксиально-симметричных открытых ловушках достигнуто сравнительно недавно, но и оно не превышает значение β_{crit} , предсказываемое теорией. Достоверно доказанных проявлений баллонной неустойчивости в экспериментах с открытыми ловушками до настоящего времени не обнаружено. Возможно, именно поэтому методы стабилизации баллонной неустойчивости в научной литературе обсуждаются нечасто. Один из предложенных методов стабилизации состоит в том, чтобы окружить область неблагоприятной кривизны массивным проводником. Так как баллонные возмущения искажают магнитное поле, они наводят в проводнике токи изображения, которые стабилизируют неустойчивость. Такая стеночная стабилизация плазмы с большой бета теоретически исследована в работах Г. Берка (Herbert Berk) и других авторов [139–148]. Теория предсказывает, что стеночная стабилизация работает, если проводящая стенка расположена достаточно близко к границе плазмы, а бета достаточно велика. При этом остаётся открытым вопрос, как попасть в режим стеночной стабилизации, ведь для того, чтобы достигнуть больших значений бета, нужно проскочить режим умеренных значений, когда стеночная стабилизация ещё не эффективна.

В тороидальных системах типа токамак баллонная неустойчивость имеет более низкое предельное значение параметра β . Теория очень сложна, и более надёжные результаты получаются с помощью численных расчётов.

Литература

Неустойчивости баллонных колебаний в токамаках кратко обсуждаются в §8.2 монографии «МГД-неустойчивости» Г. Бейтмана (Glenn Bateman) [6] и более подробно в главе 12 монографии «Ideal MHD» [13] Дж. Фридберга (Jeffrey Freidberg).

Уравнение баллонных колебаний для открытых ловушек в параксиальном приближении при произвольном отношении давления плазмы к давлению магнитного поля получено в статье У. Ньюкомба (William Newcomb) [149]. Формула для потенциальной энергии желобковых и баллонных возмущений в аксиально-симметричной непараксиальной открытой ловушке получена в статье [109] И. Бернштейна (Ira Bernstein) с соавторами.

Задачи и вопросы

Задача 1. Докажите, что подстановка решения уравнения (14), которое соответствует предельному значению β_{crit} , обращает в нуль энергию возмущения (10). Решение $\Rightarrow 400$

Задача 2. Используя любое программное обеспечение, вычислите предельную бета для магнитного поля вида

$$B(z)/B_0 = 1 + (K - 1) \left[\frac{b^3}{(b^2 + (z - L)^2)^{3/2}} + \frac{b^3}{(b^2 + (L + z)^2)^{3/2}} \right],$$

которое приблизительно описывает открытую ловушку с пробочным отношением K и катушками сильного поля, расположенными в плоскостях $z = \pm L$ и имеющими радиус b . Постройте графики, аналогичные рисункам 2 и 3. Повторите расчёты для профиля магнитного поля на рисунке 2.

Задача 3. Исследуйте устойчивость относительно баллонных возмущений плазмы, в которой радиальный профиль давления имеет форму ступеньки. Решение $\Rightarrow 401$

Задача 4. Выведите уравнение баллонных колебаний в открытой ловушке, не предполагая, что давление плазмы мало по сравнению с давлением магнитного поля. Ответ $\Rightarrow 402$

Лекция 30

Магнитное пересоединение и тиринг-неустойчивость

**Пересоединение магнитных силовых линий.
Резистивные неустойчивости. Тиринг-неустойчивость**

Приближение идеальной МГД нарушается на больших временных масштабах из-за диффузии плазмы поперёк магнитного поля или, что эквивалентно, диффузии магнитного поля в плазму. Этот эффект описывается вторым слагаемым в правой части уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (1)$$

которое было получено в §19.1. Второе слагаемое учитывает ненулевое электрическое сопротивление плазмы. Хотя сопротивление часто ведёт к затуханию малых возмущений, имеются примеры, когда оно играет дестабилизирующую роль. Существует особый класс неустойчивостей плазмы, которые возникают только в присутствии сопротивления. Причина, по которой сопротивление может вывести плазму из равновесия, состоит в том, что оно снимает ограничения, накладываемые вморооженностью магнитного поля, и делает возможными качественно новые типы возмущений, которые могут эффективно высвобождать магнитную энергию. Наиболее известным примером таких неустойчивостей является *тиринг-неустойчивость*, в результате которой происходит пересоединение магнитных силовых линий. Вместе с тем эффект конечного сопротивления плазмы способен существенным образом изменить представления о таких неустойчивостях, которые известны в теории идеальной магнитной гидродинамики. Примером является резистивно-гравитационная неустойчивость (задача 1), которую можно рассматривать как замедленную версию гравитационной неустойчивости (задача 28.4). И тиринг-, и резистивно-гравитационная неустойчивость при-

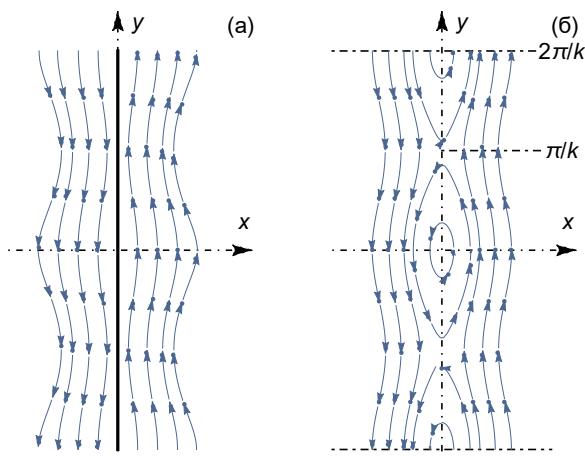


Рис. 1. МГД-равновесие плазмы вблизи нейтрального слоя в задаче о плоском слое плазмы между двумя идеально проводящими поверхностями, которые подвергаются малой деформации: (а) идеальное равновесие до пересоединения магнитных силовых линий; токовый слой изображён толстой сплошной линией; (б) релаксированное равновесие с магнитными островами после магнитного пересоединения. В результате пересоединения выделяется часть энергии магнитного поля (задачи 2 и 3).

надлежат к большому классу *резистивных неустойчивостей*. В свою очередь, резистивные неустойчивости являются частью более широкого класса неустойчивостей, называемых диссипативными. В этой лекции мы ограничимся рассмотрением тириинг-неустойчивости.

§30.1. Пересоединение магнитных силовых линий

Как мы знаем, при движении плазмы с высокой электропроводностью, когда второе слагаемое в уравнении (1) пренебрежимо мало, магнитные силовые линии следуют за плазмой, как будто они в неё вмороожены. Как сказано в §19.4, свойство вморооженности гарантирует сохранение топологии магнитных силовых линий. Однако это утверждение верно, пока верно приближение идеальной магнитной гидродинамики. При сложных движениях плазмы силовые линии с различными направлениями могут близко подходить друг к другу, как показано на

рисунке 1а. Затем они могут либо разойтись, сохранив топологию, либо «перезамкнуться», как показано на рисунке 1б. Факт сближения силовых линий с сильно различающимися направлениями магнитного поля означает, что вблизи точки сближения велика плотность электрического тока, возникает *токовый слой*, поэтому даже малое сопротивление приводит к большому выделению тепловой энергии. Эта энергия черпается из магнитного поля, энергия которого уменьшается в результате пересоединения силовых линий. Таким образом, в процессе *пересоединения* конечная электропроводность «срабатывает» только в малых областях с высокой плотностью тока, но при этом может происходить существенное изменение топологии силовых линий.

Из интуитивных соображений можно ожидать, что в высокотемпературной плазме, обладающей очень малым сопротивлением, резистивные неустойчивости развиваются чрезвычайно медленно, на временных масштабах, сопоставимых с временем диффузии плазмы поперёк магнитного поля. Время диффузии оценивается как

$$\tau_R = L^2/\eta, \quad (2)$$

где L — характерный размер плазменного образования, а $\eta = c^2/4\pi\sigma$ — коэффициент магнитной диффузии (его также называют коэффициентом магнитной вязкости). Если бы время нарастания резистивных неустойчивостей было порядка τ_R , они были бы малоинтересны, так как нет смысла обсуждать равновесие плазмы на временах, больших чем время диффузии.

В плазме низкого давления, где тепловое давление p мало по сравнению с магнитным ($\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1$), а роль пересоединения является наиболее важной, характерная динамическая скорость плазмы определяется альфвеновской скоростью $c_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$. Следовательно, в системе с пространственным масштабом L уравнение (1) определяет две различные временные шкалы: динамическая шкала времени

$$\tau_A = L/c_A \quad (3)$$

и глобальное резистивное время $\tau_R = L^2/\eta$. Некоторые резистивные неустойчивости нарастают за время, которое больше τ_A , но меньше τ_R . Примером является *тиринг-неустойчивость*. Название происходит от английского слова «tearing», что можно перевести как неустойчивость разрыва. Она развивается в неоднородном магнитном поле вблизи *нейтрального слоя*, где какая-либо компонента магнитного поля меняет на-

правление на противоположное. В результате неустойчивости происходит частичная аннигиляция полей противоположного направления, а на месте нейтрального слоя образуются магнитные острова.

Как сказано выше, характерные времена, связанные с перестройкой топологии магнитного поля, лежат где-то между τ_A и τ_R . Рассмотрим для примера некоторую активную область в солнечной короне. Там магнитное поле подвергается непрерывной деформации из-за фотосферных потоков, которые увлекают за собой магнитные силовые линии. Поскольку типичный временной масштаб этих потоков составляет приблизительно 10^3 с, что намного больше, чем динамическое время $\tau_A \sim 10$ с, соответствующее возмущение можно рассматривать как квазистатическое. Достаточно давно было высказано предположение [150], что если корональное магнитное поле остаётся вмороженным (что при $\tau_R \sim 10^{14}$ с выглядит правдоподобно), результирующее деформированное бессиловое равновесие не может быть гладким и должно содержать особенности в виде токовых слоев. Эту идею иллюстрирует задача 2, где показано, что деформация слоя плазмы, внутри которой имеется нейтральный слой, неизбежно вынуждает формирование токового слоя.

При наличии токового слоя темп нарастания тириング-неустойчивости действительно может быть значительно больше, чем предписываемое время «простой» диффузии на характерном масштабе плазмы L , так как диффузия происходит на малой толщине токового слоя, при том что в малом объёме всё же может высвободиться значительное количество магнитной энергии. Теория резистивной тириング-неустойчивости, объясняющая её удивительно большой темп нарастания, была впервые предложена Г. Фюртом (Harold Furth), Дж. Киллином (John Killeen) и М. Розенблютом (Marshall Rosenbluth) [151].

Важность процессов магнитного пересоединения была понята поначалу в применении к физике Солнца и магнитосфера Земли. Само понятие «магнитное пересоединение» было, вероятно, впервые введено Дж. Данжи (J. W. Dungey) в 1953 году [152]. В настоящее время установлено, что процесс магнитного пересоединения лежит в основе широкого спектра взрывных явлений, наблюдавшихся в космической и лабораторной плазме (солнечная корональная активность, магнитосферные суббури, явления срыва в токамаках и т. д.).

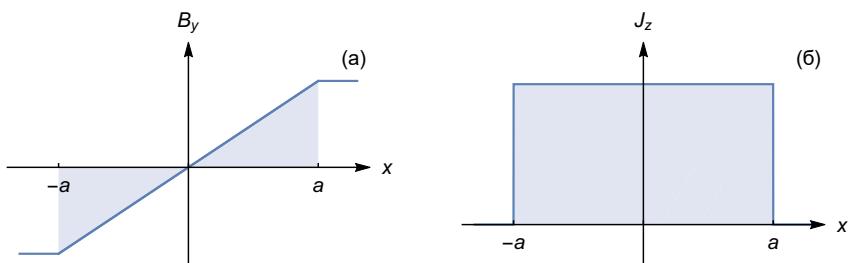


Рис. 2. Равновесие плазмы с токовым слоем: (а) профиль магнитного поля, (б) профиль плотности тока.

§30.2. Тиринг-неустойчивость

Математические методы исследования тиринг-колебаний нетривиальны. Это связано с тем, что малое электрическое сопротивление в линеаризованных уравнениях для возмущения магнитного поля входит как малый коэффициент перед старшей производной. В этой ситуации математика призывает к особой бдительности. Физический смысл математических затруднений был разъяснён в предыдущем параграфе: в очень узком нейтральном слое из-за конечной проводимости плазмы происходит разрыв и пересоединение магнитных силовых линий. Такая кардинальная перестройка топологии магнитного поля требует привлечения особого математического аппарата.

Рассмотрим простейшую модель развития тиринг-неустойчивости в задаче о равновесии плазмы в нейтральном слое. Пусть давление плазмы достигает максимума в плоскости $x = 0$, магнитное поле направлено по оси y , равно нулю в нейтральной плоскости $x = 0$ и нарастает при удалении в обе стороны от неё с характерным пространственным масштабом a , причём направления B_y в областях $x > 0$ и $x < 0$ противоположны, как показано на рисунке 2. Такая переполюсовка магнитного поля поддерживается током J_z вдоль оси z . На всю описанную конфигурацию может быть наложено сильное магнитное поле B_z , направленное вдоль оси z . Оно не влияет на результат расчёта и в реальной ситуации может быть аналогом сильного тороидального магнитного поля B_t в tokamаке. Тогда B_y можно уподобить полоидальному магнитному полю B_p . Однако для простоты далее мы предполагаем, что поле B_z отсутствует.

Подобное равновесие обладает избытком свободной энергии, заклю-

ченной в магнитном поле. Потенциально этот избыток энергии мог бы высвободиться, если бы произошла «аннигиляция» встречных магнитных полей, что не противоречит сохранению интегрального магнитного потока через полное сечение плазмы. Например, если мы представим себе модификацию $B_y(x)$, которая может возникнуть в результате взаимного сокращения положительных и отрицательных полей B_y в некоторой окрестности нейтральной плоскости, станет ясно, что энергия магнитного поля $\int(B_y^2/8\pi)d^3x$ будет уменьшена. Реальная тириング-неустойчивость не может уничтожить магнитное поле таким «диффузным» способом. Точнее, она развивается значительно быстрее, чем могла бы случиться диффузия, так как включает волнобразные возмущения плазмы вблизи плоскости $x = 0$, которые вызывают пересоединение магнитных силовых линий и образование магнитных островов. Такой тип возмущений также вынуждает уменьшение магнитной энергии. Таким образом, самым быстрым физическим механизмом аннигиляции магнитного поля в нейтральном слое является пинчевание, т. е. разбиение первоначально плоского токового слоя на отдельные жгуты и образование магнитных островов вокруг этих жгутов.

В пределе нулевого сопротивлении плазмы конфигурация, изображённая на рисунке 2а, представляет собой устойчивое состояние равновесия. Это утверждение следует, в частности, из анализа неустойчивости Рэлея—Тейлора в задачах 26.17 и 26.20. Действительно, согласно вариационному принципу (Б.26.20.2), частота колебаний ω вещественна, если равна нулю сила тяжести g . Тот же вывод подтверждает решение задачи 2.

§30.3. Основные уравнения

Подмеченная аналогия с неустойчивостью Рэлея—Тейлора не случайна. В частности, уравнение (Б.26.17.15), полученное в задаче 26.17, верно вне тонкой окрестности нейтральной плоскости, однако вблизи неё, где существенно сопротивление плазмы, его следует заменить. Мы заново выведем необходимые уравнения, сократив некоторые детали вывода.

Начнём с того, что вместо системы уравнений (19.20) идеальной МГД запишем систему уравнений (19.17) резистивной магнитной гидродинамики, причём с самого начала будем считать, что движение плаз-

мы является несжимаемым:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (4б)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (4в)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (4г)$$

Уравнение несжимаемости (4в) заменяет уравнение состояния (19.20в), а уравнение (4г) заменяет уравнение вмороженности (19.20г); уравнение непрерывности (19.20а) нам не потребуется.

Предположим, что в равновесии все величины зависят только от координаты x , причём магнитное поле

$$\mathbf{B} = B_y(x) \hat{\mathbf{y}},$$

как и ток

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{\mathbf{z}},$$

перпендикулярны осям x . В состоянии равновесия с $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ все уравнения (4) выполняются автоматически, кроме x -компоненты уравнения (4б), согласно которой суммарное давление плазмы и магнитного поля должно быть константой:

$$P = p + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const.}$$

Чтобы исследовать устойчивость такого равновесия относительно малых возмущений, линеаризуем уравнения (4), выполнив замену $P \rightarrow P + \delta P$, $\mathbf{V} \rightarrow \delta \mathbf{V}$, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + \delta \mathbf{B}$, и оставим только линейные слагаемые; для краткости здесь и далее мы не пишем индекс 0 у равновесных величин. Слагаемые нулевого порядка, которые не содержат малых величин δP , $\delta \mathbf{V}$, $\delta \mathbf{B}$, представляют равновесное решение и поэтому автоматически сокращаются. Ради максимального упрощения задачи будем считать, что движение плазмы двумерно, так что $\delta \mathbf{V}$ и $\delta \mathbf{B}$ имеют только x - и y -компоненты. Наконец, рассмотрим возмущения, которые вытянуты вдоль оси z , и поэтому любую компоненту возмущения можно представить в виде

$$\delta A(\mathbf{x}, t) = \delta A(x) \exp(iky - i\omega t).$$

Распишем по компонентам линеаризованную версию уравнения (4б). Проекцию

$$-i\omega\rho \delta V_x = -\frac{\partial \delta P}{\partial x} + \frac{ik}{4\pi} B_y \delta B_x \quad (5)$$

на ось x сохраним в исходном виде, а в проекции

$$-i\omega\rho \delta V_y = -ik \delta P + \frac{1}{4\pi} \left(B_y ik \delta B_y + \delta B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} \right),$$

на ось y исключим δV_y и δB_y с помощью уравнений

$$\operatorname{div} \delta \mathbf{V} = \frac{\partial \delta V_x}{\partial x} + ik \delta V_y = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \delta \mathbf{B} = \frac{\partial \delta B_x}{\partial x} + ik \delta B_y = 0. \quad (7)$$

В результате получим

$$\frac{\omega}{k} \rho \frac{\partial \delta V_x}{\partial x} = -ik \delta P + \frac{1}{4\pi} \left(\delta B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_y \frac{\partial \delta B_x}{\partial x} \right) = -ik \delta P - \frac{1}{4\pi} B_y^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta B_x}{B_y}. \quad (8)$$

Исключая затем δP из двух уравнений (5) и (8), получаем одно уравнение второго порядка:

$$\frac{\omega}{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \delta V_x}{\partial x} \right) - k^2 \rho \delta V_x \right] = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(B_y^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta B_x}{B_y} \right) - k^2 B_y \delta B_x \right]. \quad (9)$$

Оно содержит две неизвестные функции δV_x и δB_x , поэтому требуется ещё одно уравнение, которое получим, линеаризуя уравнение (4г). Его x -компонента

$$-i\omega \delta B_x = ik B_y \delta V_x + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial^2 \delta B_x}{\partial x^2} - k^2 \delta B_x \right) \quad (10)$$

совместно с уравнением (9) составляет систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на две функции.

§30.4. Решение вне резистивного слоя

Если пренебречь сопротивлением плазмы, перейдя к пределу $\sigma \rightarrow \infty$ в уравнении (10), получим соотношение

$$\delta B_x = -\frac{k}{\omega} \delta V_x B_y. \quad (11)$$

С его помощью исключаем δB_x в уравнении (9), чтобы получить одно уравнение второго порядка для одной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\omega^2 \rho - \frac{k^2 B_y^2}{4\pi} \right) \frac{\partial \delta V_x}{\partial x} \right] = k^2 \left(\omega^2 \rho - \frac{k^2 B_y^2}{4\pi} \right) \delta V_x. \quad (12)$$

По сути оно совпадает с уравнением (Б.26.17.15) на с. 365 в задаче 26.17 о неустойчивости Рэлея–Тейлора (при условии $g = 0$) и описывает устойчивые альфвеновские колебания в низкочастотном пределе. Обычно частота таких колебаний есть

$$\omega = \frac{k B_y}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Однако рассматриваемая конфигурация имеет ту особенность, что B_y зависит от x . Если частота ω попадает в интервал значений, которые может принимать $k B_y(x)/\sqrt{4\pi\rho}$, тогда уравнение (12) становится сингулярным в том смысле, что коэффициент перед второй производной исчезает в точке альфвеновского резонанса, где $\omega = k B_y(x)/\sqrt{4\pi\rho}$. Так как здесь нас интересуют неустойчивости, мы не будем исследовать устойчивые колебания более подробно. Достаточно отметить, что спектр возможных решений уравнения (12) содержит дискретные колебания с $\omega > \max(k|B_y|/(4\pi\rho)^{1/2})$ и континuum колебаний с более низкой частотой, которые сильно затухают вблизи сингулярности из-за эффектов, не описываемых в модели идеальной МГД.

При учёте сопротивления, но на достаточном удалении от резистивного слоя (как влево, так и вправо от плоскости $x = 0$ на рисунке 2) можно ожидать, что приближение идеальной МГД по-прежнему верно. Поскольку частоты ω неустойчивых возмущений в конечном итоге окажутся намного меньше, чем характерные частоты альфвеновских колебаний, в уравнениях (9) и (12) можно опустить слагаемые, содержащие ω , – они описывают инерцию плазмы. Два упрощённых таким способом уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(B_y^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta B_x}{B_y} \right) = k^2 B_y \delta B_x, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(B_y^2 \frac{\partial \delta V_x}{\partial x} \right) = k^2 B_y^2 \delta V_x \quad (14)$$

эквивалентны ввиду (11). Они описывают возмущения вне «резистивного слоя», заметно левее и заметно правее плоскости $x = 0$.

При $|kx| \ll 1$, но либо левее, либо правее резистивного слоя можно считать, что $B_y = B'_y x$, и искать решение уравнения (13) в виде $\delta B_x \propto x^\alpha$. Простые вычисления показывают, что имеются два решения и $\delta B_x \propto x$ либо $\delta B_x = \text{const}$. Соответственно, решение уравнения (14) есть $\delta V_x = \text{const}$ либо $\delta V_x \propto 1/x$. Нас будет интересовать второе (сингулярное) решение

$$\delta B_x \propto x^0, \quad \delta V_x \propto x^{-1}. \quad (15)$$

Можно показать, что первое решение

$$\delta B_x \propto x^1, \quad \delta V_x \propto x^0, \quad (16)$$

регулярное при $|x| \rightarrow 0$, «плохо» ведёт себя при $|x| \rightarrow \infty$ (задача 4). Сингулярное решение (15) уравнения (13) устроено так, что δB_x приближается к некоторой ненулевой константе по мере того, как $x \rightarrow 0$ либо слева, либо справа. Такое решение не могло бы существовать, если бы уравнение (13) было применимо вплоть до точки $x = 0$, где из него следует, что δB_x должно быть нулюм. Однако такое решение разрешено в резистивном случае, когда уравнение (11) должно быть заменено уравнением (10). Именно такое неисчезающее возмущение δB_x в точке, где $B_y = 0$, характеризует резистивную тириング-неустойчивость.

Тонкую область вокруг плоскости $x = 0$ удобно рассматривать как пограничный (резистивный) слой между двумя областями применимости модели идеальной МГД слева и справа от слоя. На начальной стадии тириング-неустойчивости резистивный слой приблизительно совпадает с токовым слоем, но затем токовый слой размывается. Можно сформулировать некоторые граничные условия для области применимости модели идеальной МГД, интегрируя уравнения резистивной МГД в пределах резистивного слоя. Будем считать, что толщина слоя δ мала по сравнению с длиной волны $2\pi/k$. Тогда из уравнения (7) следует, что значения δB_x при $x \rightarrow -\delta$ и $x \rightarrow +\delta$ приблизительно одинаковы, если предположить, что y -компоненты δB_y конечна в пределах резистивного слоя. Этот факт мы запишем в виде граничного условия

$$[\delta B_x] = 0, \quad (17)$$

где двойные квадратные скобки обозначают разность значений между правой и левой границами резистивного слоя. Хотя величина δB_y конечна, она может испытывать скачок в пределах резистивного слоя, поскольку внутри него может протекать большой ток δJ_z в направлении

оси z . Интегрирование уравнения $\operatorname{rot} \delta\mathbf{B} = (4\pi/c)\delta\mathbf{J}$ по толщине резистивного слоя приводит к граничному условию

$$[\![\delta B_y]\!] = \frac{4\pi}{c} \delta I_z,$$

где $I_z = \int J_z dx$ – ток через сечение слоя. В соответствии с уравнением (7) скачок в δB_y подразумевает наличие скачка в производной $\partial \delta B_x / \partial x$ и

$$[\! [\frac{\partial \delta B_x}{\partial x}] \!] = -ik[\![\delta B_y]\!],$$

при том что величина δB_x приблизительно постоянна. Относительная величина скачка $(\partial \delta B_x / \partial x) / \delta B_x$ в теории тиринг-неустойчивости считается параметром задачи и обозначается как Δ' . Следовательно,

$$[\! [\frac{\partial \delta B_x}{\partial x}] \!] = \Delta' \delta B_x. \quad (18)$$

Решение во внешней области полностью определяет значение параметра Δ' . Представим, например, конфигурацию магнитного поля, в которой B_y стремится к константе при $x \rightarrow \pm\infty$ (возможно, разной при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$). Тогда решением уравнения (13) на большом удалении от резистивного слоя будут экспоненты $e^{\pm kx}$, поэтому существуют решения, обращающиеся в нуль как при $x \rightarrow +\infty$ правее резистивного слоя (если взять e^{-kx}), так и при $x \rightarrow -\infty$ слева от него (если взять e^{+kx}). Протягивая эти решения (например, при помощи численного интегрирования) к резистивному слою, мы увидим, что они подходят к нему при $x \rightarrow \pm\delta$ с некоторыми значениями $\delta B_x(\pm\delta)$. Эти значения можно уравнить, умножая решение правее (или левее) слоя на постоянный множитель, причём умноженная функция по-прежнему будет решением уравнения (13) вследствие его линейности. При этом значения производных $\partial \delta B_x / \partial x$ на границах резистивного слоя определят величину Δ' .

§30.5. Резистивный слой

Внутри резистивного слоя вместо (11) используем уравнение (10) с подстановкой $B_y = B'_y x$ и $\omega = i\Gamma$. Ожидая, что слой окажется тонким по сравнению с длиной волны, отбросим в нём слагаемое справа, содержащее $k^2 \delta B_x$, поскольку при $k\delta \ll 1$ оно мало по сравнению с $\partial^2 \delta B_x / \partial x^2$. Кроме того, учтём, что возмущение δB_x приблизительно постоянно в

пределах резистивного слоя, и поэтому слева в этом уравнении δB_x можно заменить константой δB_{x0} . Тогда указанное уравнение принимает вид

$$i\Gamma \delta B_{x0} + kB'_y x \delta V_x = \frac{ic^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 \delta B_x}{\partial x^2}. \quad (19)$$

В уравнении (9) также пренебрежём слагаемыми, которые содержат k^2 , подставим $B_y = B'_y x$ и вынесем плотность ρ из-под знака дифференцирования, считая её более гладкой функцией, нежели $\delta V_x \propto 1/x$. В упрощённом таким способом уравнении

$$i\Gamma \rho \frac{\partial^2 \delta V_x}{\partial x^2} = -\frac{kB'_y}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta B_x}{x} \right)$$

преобразуем правую сторону с помощью цепочки тождеств

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta B_x}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \delta B_x}{\partial x} - \delta B_x \right) = \frac{\partial^2 \delta B_x}{\partial x^2}.$$

Исключив производную $\partial^2 \delta B_x / \partial x^2$ с помощью уравнения (19), получим

$$\Gamma \rho \frac{c^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \delta V_x}{\partial x^2} = kB'_y x (i\Gamma \delta B_{x0} + kB'_y x \delta V_x). \quad (20)$$

Систему уравнений (19) и (20) удаётся решить в общем виде (задача 5), но мы ограничимся оценками по порядку величины. На границе резистивного слоя при $x \sim \pm\delta$ все члены в уравнении (20) одного порядка. Приравнивая слагаемое слева и второе слагаемое справа и оценивая $\partial^2 \delta V_x / \partial x^2$ как $\delta V_x / \delta^2$, находим

$$\delta \sim (\Gamma \rho c^2 / \sigma)^{1/4} (kB'_y)^{-1/2}. \quad (21)$$

Сравнивая затем слагаемые справа, получаем

$$\delta V_x \sim \Gamma \delta B_{x0} / kB'_y \delta \sim \Gamma \delta B_{x0} (\Gamma \rho c^2 / \sigma)^{-1/4} (kB'_y)^{-1/2}. \quad (22)$$

Наконец, интегрируя уравнение (19) по толщине резистивного слоя, вычислим скачок производной $\delta B_x / \partial x$. Учитывая, что слагаемые в левой части уравнения (19) одного порядка в соответствии с (22), для оценки интеграла можно взять произведение первого слагаемого на δ . Поэтому

$$\Delta' = \frac{1}{\delta B_{x0}} \left[\left[\frac{\partial \delta B_x}{\partial x} \right] \right] \sim \frac{4\pi\sigma}{c^2} \Gamma \delta = \frac{4\pi \Gamma^{5/4} \rho^{1/4}}{(c^2/\sigma)^{3/4} (kB'_y)^{1/2}}. \quad (23)$$

Отсюда находим инкремент тириング-неустойчивости

$$\Gamma \sim (\Delta'/4\pi)^{4/5} (c^2/\sigma)^{3/5} (kB'_y)^{2/5} \rho^{-1/5}. \quad (24)$$

Его можно переписать в более понятных обозначениях, выразив через параметры τ_A и τ_R , которые определены формулами (2) и (3). Отождествляя масштаб L с толщиной нейтрального слоя a и приравнивая B в формуле (3) (куда входит $c_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$) к $B'_y a$, находим, что в новых обозначениях

$$\Gamma \sim \frac{(\Delta' a)^{4/5} (ka)^{4/5}}{\tau_A^{2/5} \tau_R^{3/5}}. \quad (25)$$

Точное решение добавляет в эту формулу коэффициент порядка $1/2$ (задача 3). В типичных условиях $\tau_A \ll \tau_R$, $\Delta' a \sim 1$, $ka \sim 1$, поэтому время нарастания тириング-неустойчивости Γ^{-1} в соответствии с формулой (25) близко к среднему геометрическому характерных времён и

$$\tau_A \ll \Gamma^{-1} \ll \tau_R.$$

Таким образом, тириング-неустойчивость нарастает заметно медленнее, чем типичные неустойчивости идеальной МГД (что вполне ожидаемо), но заметно быстрее, чем происходит диффузия магнитного поля (что не вполне очевидно).

В результате роста тириング-возмущений образуются магнитные острова, как показано на рисунке 1. Действительно, положительное возмущение магнитного поля δB_x вблизи $x = 0$ уводит силовую линию в область положительных значений x . По мере смещения по x появляется невозмущённое магнитное поле B_y вдоль оси y и силовая линия уходит вдоль y . При этом изменяется фаза возмущённого поля δB_x и силовая линия начинает смещаться к плоскости $x = 0$, а затем в область отрицательных значений x . Здесь невозмущённое магнитное поле меняет направление и уводит силовую линию в направлении $-y$. Фаза возмущения δB_x опять меняется, и в результате силовая линия совершает полный оборот, образуя магнитный остров. Вдали же от нейтрального слоя возмущённое поле δB_x лишь деформирует силовую линию, не вызывая изменения её топологии. Линия, разделяющая замкнутые и разомкнутые силовые линии магнитного поля, называется сепаратрисой.

Тириング-неустойчивость играет важную роль в токамаках. Релаксационные колебания, наблюдаемые в токамаках в некоторых режимах,

связаны с тем, что внутри плазменного шнура из-за тириング-неустойчивости время от времени происходит перестройка магнитной конфигурации, при которой избыток энергии магнитного поля передаётся плазме. Неустойчивость такого типа может оказаться важной также в астрофизике и геофизике. В частности, вспышки на Солнце также связывают с развитием тириング-неустойчивости.

Литература

МГД-неустойчивости, связанные с конечной электропроводностью плазмы, рассмотрены в §1.3 замечательной книги Б. Б. Кадомцева «Коллективные явления в плазме» [28].

Упрощённая теория тириング-неустойчивости, изложенная в §30.2–§30.5, частично воспроизводит содержание главы 20 из учебника «Introduction to plasma physics» [29] Р. Голдстона (Robert J. Goldston) и П. Резерфорда (Paul H. Rutherford). Более обстоятельно теория магнитного пересоединения представлена в статье Д. Бискампа (Dieter Biskamp) [153] и в лекционных заметках Г. Е. Векштейна [154]. Роль магнитного пересоединения в различных физических явлениях обсуждается в статье Б. Б. Кадомцева [155]. Монография Э. Пристя (Eric Priest) и Т. Форбса (Terry Forbes) [32] целиком посвящена теории магнитного пересоединения и её приложениям в астрофизике и лабораторном эксперименте.

Задачи и вопросы

Задача 1. Вычислите инкремент градиентно-диссипативной неустойчивости, изменив решение задачи 28.4 так, чтобы учесть конечное сопротивление плазмы.

Решение \Rightarrow 402

Задача 2. (Задача Тейлора — модель вынужденного магнитного пересоединения.) В промежутке между двумя плоскими идеально проводящими поверхностями имеется магнитное поле $\mathbf{B}_0 = B_{y0}(x/a)\hat{\mathbf{y}} + B_{z0}\hat{\mathbf{z}}$, которое вмороожено в плазму, причём коэффициенты B_{y0} и B_{z0} являются константами. Первоначально проводящие поверхности были расположены в плоскостях $x_{\pm} = \pm a$. Затем внешняя сила слегка изгибает проводящие плоскости, так что $x_{\pm} = \pm(a + \delta_0 \cos ky)$. В линейном приближении найдите магнитное поле после деформации границ слоя плазмы, предполагая, что амплитуда деформации мала, $\delta_0/a \ll 1$. Рассмотрите

равновесие до и после пересоединения магнитных силовых линий.

[Решение](#) \Rightarrow 405

Задача 3. Используя решение предыдущей задачи, вычислите возмущение энергии магнитного поля до и после пересоединения магнитных силовых линий. Сколько энергии выделится в результате пересоединения?

[Решение](#) \Rightarrow 407

Задача 4. Докажите, что не существует решения уравнения (13), у которого $\delta B_x \propto x$ при $x \rightarrow 0$ и $\delta B_x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

[Решение](#) \Rightarrow 408

Задача 5. Найдите решение уравнений (19) и (20).

[Решение](#) \Rightarrow 409

Приложение Б

Ответы к задачам

Лекция 16

Задача 16.1. Масса ионов m_i с зарядовым числом Z приблизительно в $2Z$ раз больше массы протона $m_p \approx 1836m_e$. Так как $\tau_{ii}/\tau_{ee} \sim (m_i/m_e)^{1/2}/Z^3$, находим, что $\tau_{ii} < \tau_{ee}$ при $Z > (2m_p/m_e)^{1/5} \approx 5$. Таким образом, в термоядерном реакторе, работающем на смеси бора ($Z = 5$) и водорода ($Z = 1$), ионы бора максвеллизируются так же быстро, как и электроны.

Задача 16.2. Изотропия означает отсутствие выделенного направления, например заданного каким-либо вектором. В таком случае тензор $\langle w_\mu w_\nu \rangle_a$ можно представить в виде суммы инвариантных тензоров второго ранга со скалярными коэффициентами. С точностью до коэффициента имеется только один такой тензор — единичный тензор $\delta_{\mu\nu}$, поэтому $\langle w_\mu w_\nu \rangle_a = \mathbb{A} \delta_{\mu\nu}$. Чтобы найти коэффициент \mathbb{A} , достаточно составить одно уравнение, например вычислить свёртку $\langle w_\mu w_\nu \rangle_a \delta_{\mu\nu} = \langle w^2 \rangle_a$. Так как $\delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\mu} = 3$, получаем $\langle w^2 \rangle_a = 3\mathbb{A}$. Таким образом, $\langle w_\mu w_\nu \rangle_a = \frac{1}{3} \langle w^2 \rangle_a \delta_{\mu\nu}$.

Задача 16.3. Вычислив интеграл

$$s_a = - \int [\ln f_a + \text{const}] f_a d^3v$$

с максвелловской функцией распределения (16.6), получим

$$s_a = n_a \ln \frac{T_a^{3/2}}{n_a} + \text{const } n_a .$$

Второе слагаемое опускают как несущественное. Например, оно выпадает из уравнения переноса тепла (16.30). Вводя обозначение $p_a = n_a T_a$ в последнем выражении, получим формулу (16.29).

Задача 16.4. Пусть ионы в среднем покоятся, т. е. $\mathbf{u}_i = 0$. Так как по условию задачи функция распределения электронов является максвелловской, слагаемое в интеграле столкновений, отвечающее за столкновения электронов с электронами, равно нулю, $C_{ee} = 0$. Формально это соответствует пределу лоренцевой плазмы, когда кинетическое уравнение приводится к виду (15.23). Его правая часть содержит выражение для интеграла столкновений электронов с ионами:

$$C_{ei} = \frac{2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}{m_e^2 v^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f_e}{\partial \theta},$$

где θ — угол между \mathbf{v} и \mathbf{u}_e .

Разложим функцию распределения (16.6) до слагаемого, линейного по u_e , и представим её в виде $f_e = f_{me} + \delta f_e$, где

$$f_{me} = n_e \exp(-m_e v^2 / 2T_e) / (2\pi T_e / m_e)^{3/2}, \quad \delta f_e = (m_e v u_e \cos \theta) f_{me} / T_e.$$

Сила трения вычисляется по формуле (16.21), которая в данном случае принимает вид

$$\mathbf{R}_{ei} = m_e \int \mathbf{v} C_{ei} d^3 v.$$

Собирая все формулы вместе, после несложных вычислений получаем

$$\mathbf{R}_{u,ei} = -\frac{m_e n_e \mathbf{u}_e}{\tau_e},$$

где

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{n_i Z^2 e^4 \Lambda_{ei}}{m_e^{1/2} T_e^{3/2}},$$

а индекс u в обозначении силы $\mathbf{R}_{u,ei}$ указывает, что её происхождение связано с относительным движением электронов и ионов. Точное решение, включающее нахождение функции распределения электронов, отличается от $\mathbf{R}_{u,ei}$ числовым коэффициентом, который в пределе $Z \rightarrow \infty$ равен $3\pi/32 \approx 0.29$ (см. §17.5).

Если $\mathbf{u}_i \neq 0$, в формулах выше достаточно заменить \mathbf{u}_e на $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$.

Задача 16.5. Пренебрегая инерцией (массой) электронов, заменим левую часть уравнения (16.326) нулю, а в правой части отбросим градиент давления, взякие силы, а также магнитную часть силы Лоренца, полагая для простоты, что магнитное поле отсутствует. Подставляя $\mathbf{R}_{u,ei} = -m_e n_e \mathbf{u} / \tau_e$, имеем равенство

$$0 = e_e n_e \mathbf{E} - \frac{m_e n_e \mathbf{u}}{\tau_e}.$$

Согласно закону Ома $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. С другой стороны, $\mathbf{J} = e_e n_e \mathbf{u}$. Сравнивая эти две формулы, находим удельную электрическую проводимость плазмы

$$\sigma = \frac{\omega_p^2 \tau_e}{4\pi}.$$

Полученное выражение называют спитцеровской проводимостью плазмы в честь Л. Спитцера (Lyman Spitzer). Он численно рассчитал σ для разных значений Z [49]. Другим способом спитцеровская проводимость плазмы была вычислена в задаче 8.7.

Задача 16.6. Предположим, что функции распределения ионов и электронов являются максвелловскими, но с разными температурами T_i и T_e . Тогда можно использовать кинетическое уравнение (15.29) для пробных частиц (электроны) в плазме, где полевые частицы (ионы) имеют максвелловское распределение. Так как функция распределения электронов изотропна, производные по углу в левой части этого уравнения выпадают, и мы получаем

$$C_{ei} = -\frac{4\pi Z^2 e^4 \Lambda_{ei}}{m_e^2 v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \frac{m_e}{m_i} \frac{dh_i}{dv} \left(f_e + \frac{T_i}{m_e v} \frac{\partial f_e}{\partial v} \right) \right].$$

Для максвелловской функции распределения, $f_e = f_{me}$, выражение в круглых скобках преобразуется к $(1 - T_i/T_e)f_{me}$. Так как скорость электронов велика по сравнению с тепловой скоростью ионов, приближённо $h_i(v) = n_i/v$. Поэтому

$$C_{ei} = \frac{4\pi Z^2 e^4 \Lambda_{ei} n_i}{m_i m_e v^2} \left(1 - \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{\partial f_{me}}{\partial v}.$$

Удельная мощность нагрева вычисляется по формуле (16.27), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$Q_{ei} = \int \frac{1}{2} m_e v^2 C_{ei} dv.$$

Подставляя сюда C_{ei} , получаем

$$Q_{ei} = \frac{3n_e}{\tau_e} \frac{m_e}{m_i} (T_i - T_e),$$

где время τ_e определено в задаче 16.4. Эта формула другим способом была получена Л. Д. Ландау [47, 48] (см. §15.3). Так как она не содержит малых градиентов макроскопических величин, немаксвелловские анизотропные поправки к функции распределения частиц плазмы, пропорциональные этим градиентам, можно отбросить при вычислении Q_{ei} , что оправдывает начальное предположение относительно вида функции распределения частиц.

Задача 16.7. Обратимся к точной системе уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (16.7.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (16.7.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_q, \quad (16.7.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (16.7.4)$$

В плазме

$$\mathbf{J} = e_e n_e \mathbf{u}_e + e_i n_i \mathbf{u}_i, \quad (16.7.5)$$

$$\rho_q = e_e n_e + e_i n_i. \quad (16.7.6)$$

Из уравнения (16.7.1) находим, что по порядку величины вихревая часть электрического поля равна

$$\mathbf{E} \sim \frac{LB}{c\tau}, \quad (16.7.7)$$

где L и τ обозначают характерный масштаб и характерное время изменения магнитного поля. Сравнивая

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} \sim \frac{B}{L} \quad (16.7.8)$$

с током смещения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \sim \frac{E}{c\tau} \sim \frac{LB}{c^2\tau^2}, \quad (16.7.9)$$

видим, что последнее слагаемое в уравнении (16.7.2) мало по сравнению с его левой частью, если

$$\tau \gg L/c. \quad (16.7.10)$$

Следовательно, для достаточно медленных процессов им можно пренебречь. Из редуцированного таким образом уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (16.7.11)$$

следует, что

$$\mathbf{J} \sim \frac{cB}{4\pi L}, \quad (16.7.12)$$

причём

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (16.7.13)$$

Далее из уравнения (16.7.3) получаем

$$\rho_q \sim \frac{E}{4\pi L} \sim \frac{B}{4\pi c\tau}. \quad (16.7.14)$$

На основании оценок (16.7.12) и (16.7.14) заключаем, что в выражении

$$\mathbf{F} = \rho_q \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] \quad (16.7.15)$$

для силы, действующей на единицу объёма плазмы, при $\tau \gg L/c$ первое слагаемое (электрическая сила) существенно меньше второго слагаемого (сила Ампера), если

$$E \ll B, \quad (16.7.16)$$

так как по порядку величины

$$\rho_q \mathbf{E} \sim \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi L}, \quad \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] \sim \frac{\mathbf{B}^2}{4\pi L}. \quad (16.7.17)$$

С учётом оценки (16.7.7) для вихревой части электрического поля находим, что условие $\mathbf{E} \ll \mathbf{B}$ заведомо выполняется для медленных движений плазмы, таких что $\tau \gg L/c$. При таких условиях пространственный заряд практически не влияет на движение плазмы и в первом приближении можно считать, что

$$\rho_q = 0. \quad (16.7.18)$$

Обратим внимание, что ток смещения и соответствующая ему плотность электрических зарядов являются релятивистскими поправками: как следует из (16.7.9) и (16.7.14), обе эти величины исчезающе малы в пределе $c \rightarrow \infty$. Поэтому в последовательной теории отбрасывание тока смещения влечёт за собой пренебрежение плотностью заряда плазмы и наоборот. Это означает, что уравнение (16.7.3) необходимо заменить на условие квазинейтральности (16.7.18) или эквивалентное ему условие бездивергентности плотности тока (16.7.13).

Действительно, система уравнений Максвелла (16.7.1)–(16.7.4) формально переопределена, так как на 6 неизвестных функций (по 3 компоненты электрического и магнитного полей) при заданных источниках полей \mathbf{J} и ρ_q имеется 8 скалярных уравнений. Тем не менее она разрешима, поскольку уравнения (16.7.3) и (16.7.4) фактически играют роль начальных условий для уравнений (16.7.1) и (16.7.2). Вычислив дивергенцию уравнения (16.7.1), получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (16.7.19)$$

которое тождественно выполняется вследствие (16.7.4). Аналогично, вычислив дивергенцию уравнения (16.7.2) с учётом уравнения

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (16.7.20)$$

получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \frac{\partial \rho_q}{\partial t}. \quad (16.7.21)$$

Оно обращается в тождество вследствие (16.7.3). При отбрасывании тока смещения в уравнении (16.7.2) последнее уравнение сокращается до

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} = 0. \quad (16.7.22)$$

Оно обращается в тождество при условии $\rho_q = 0$, что и требовалось доказать.

Было бы ошибкой накладывать условие $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, которое формально получается из объединения уравнений (16.7.3) и (16.7.18). Рассмотрим в качестве примера электростатическую задачу, в которой $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, $n_e = n_e(\varphi, \mathbf{r})$ и

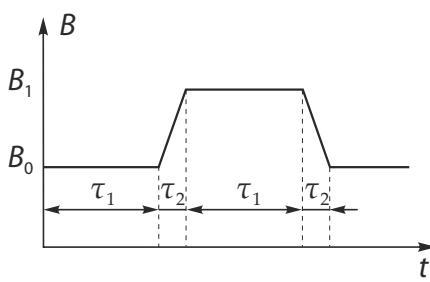


Рис. 16.9.1. Модель гирорелаксационного нагрева. Магнитное поле изменяется с периодом $2(\tau_1 + \tau_2)$. В течение коротких интервалов τ_1 вследствие сохранения магнитного момента изменяется поперечная энергия частиц плазмы. В течение длинных интервалов τ_2 кулоновские столкновения выравнивают поперечную и продольную энергии.

$n_i = n_i(\varphi, \mathbf{r})$. Приравнивание $\rho_q = e_en_e + e_in_i$ к нулю даёт уравнение, из которого определяется функция $\varphi(\mathbf{r})$. Условие квазинейтральности подразумевает, что электрическое поле, найденное по формуле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, удовлетворяет неравенству $|\operatorname{div}\mathbf{E}/e_en_e| \ll 1$. Иными словами, объёмная плотность зарядов достаточно мала, чтобы не влиять на движение плазмы, но достаточно велика, чтобы поддерживать её квазинейтральность.

Таким образом, для медленных движений с существенно досветовыми скоростями, $v \sim L/\tau \ll c$, вместо точной системы уравнений Максвелла (13.13), (13.14) можно использовать уравнения (16.36а), (16.36б), как это сделано в теории двухжидкостной магнитной гидродинамики. С другой стороны, условие квазинейтральности плазмы $\rho_q = 0$ не означает, что $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$.

Задача 16.9. Рассмотрим простую модель гирорелаксационного нагрева плазмы. Будем считать, что магнитное поле изменяется с периодом $2(\tau_1 + \tau_2)$ от минимального значения B_0 до максимального значения $B_1 = (1 + \eta)B_0$, как показано на рисунке 16.9.1, причём $\Omega^{-1} \ll \tau_2 \ll \nu^{-1} \ll \tau_1$, где Ω – циклотронная частота, а ν – частота кулоновских столкновений. Пусть в течение первого промежутка времени τ_1 магнитное поле равно B_0 , затем плавно нарастает до значения B_1 за время τ_2 . В течение второго промежутка времени τ_1 магнитное поле поддерживается на уровне B_1 , а затем плавно уменьшается до исходного значения B_0 за время τ_2 . В течение коротких промежутков времени происходит изменение поперечной энергии частицы $W_{\perp} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2$ пропорционально изменению величины магнитного поля B , так как $\mu = W_{\perp}/B = \text{const}$ с точностью до малых поправок порядка $\nu\tau_2$. В течение длинных промежутков вследствие кулоновских столкновений происходит выравнивание поперечной W_{\perp} и продольной $W_{\parallel} = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$ энергий. Величины W_{\perp} , W_{\parallel} и $W = W_{\perp} + W_{\parallel}$ в моменты времени, соответствующие окончанию очередного интервала, указаны в таблице 16.9.1. Складывая W_{\perp} и W_{\parallel} в последней строке таблицы, находим

$$W_1 = \frac{(1 + 2\eta/3)(1 + \eta/3)}{1 + \eta} W_0.$$

t	W_{\perp}	W_{\parallel}	W
τ_1	$\frac{2}{3}W_0$	$\frac{1}{3}W_0$	W_0
$\tau_1 + \tau_2$	$\frac{2}{3}W_0(1 + \eta)$	$\frac{1}{3}W_0$	$W_0\left(1 + \frac{2\eta}{3}\right)$
$2\tau_1 + \tau_2$	$\frac{2}{3}W_0\left(1 + \frac{2\eta}{3}\right)$	$\frac{1}{3}W_0\left(1 + \frac{2\eta}{3}\right)$	$W_0\left(1 + \frac{2\eta}{3}\right)$
$2\tau_1 + 2\tau_2$	$\frac{2}{3}W_0\left(1 + \frac{2\eta}{3}\right)/(1 + \eta)$	$\frac{1}{3}W_0\left(1 + \frac{2\eta}{3}\right)$	W_1

Таблица 16.9.1. Энергия частиц при гирорелаксационном нагреве.

При $\eta \ll 1$ изменение энергии частицы за период равно $W = W_1 - W_0 \approx \frac{2}{9}\eta^2 W_0$. Поскольку частота кулоновских столкновений ионов и электронов существенно различна, подбором длительности интервалов τ_1 и τ_2 можно обеспечить селективный нагрев электронов или ионов.

Лекция 17

Задача 17.1. Пусть электроны и ионы в среднем покоятся, так что через произвольное сечение $z = z_0$ слева направо и справа налево в единицу времени проходит в точности одинаковое число электронов $\Gamma \sim n_e v_{Te}$ (как на рисунке 17.1). Со стороны ионов на эти потоки действуют силы трения R_- и R_+ соответственно. По порядку величины $R_{\pm} \sim m_e \Gamma v_{ei}$, причём сила R_- направлена налево (против потока частиц слева), а сила R_+ — направо (против потока частиц справа). Так как частота столкновений v_{ei} уменьшается с ростом температуры, при наличии градиента температуры $\partial T_e / \partial z$ суммарная сила трения $R_T = R_+ - R_-$ будет направлена в сторону более холодной области, т. е. против градиента температуры. Учитывая, что в плоскость $z = z_0$ попадают электроны в среднем с расстояний порядка $\lambda \sim v_{Te}/v_{ei}$, из области $z > z_0$ будут приходить электроны с энергией, примерно на $\lambda \partial T_e / \partial z$ большей энергии электронов, приходящих из области $z < z_0$. Следовательно, результирующая сила по порядку величины равна

$$R_T \sim -\frac{\lambda}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} m_e \Gamma v_{ei} \sim -\frac{m_e v_{Te}^2}{T_e} n_e \frac{\partial T_e}{\partial z} \sim -n_e \frac{\partial T_e}{\partial z}.$$

Она не зависит от частоты столкновений.

Задача 17.2. Чтобы найти термосилу R_T , следуя определению силы Брагинского (16.21), нужно вычислить интеграл

$$R_T = m_e \int \mathbf{v} C_{ei} d^3v,$$

взяв в качестве C_{ei} правую часть уравнения (17.4):

$$C_{ei} = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \delta f}{\partial \theta},$$

где угол θ отсчитывается от направления градиента температуры, и учесть, что согласно (17.11) и (17.3)

$$\delta f = \frac{v^4}{2A} \left(4 - \frac{mv^2}{2T} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \cos \theta f_m, \quad f_m = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T} \right).$$

При этом параметр $A = 2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei} / m^2$ сокращается, вследствие чего результат вычислений не зависит от частоты столкновений. Выполнив интегрированием, получим $\mathbf{R}_T = -\frac{3}{2} n_e \nabla T_e$.

Задача 17.3. Чтобы найти силу трения \mathbf{R}_u электронов об ионы, следуя её определению (16.21), нужно вычислить интеграл

$$\mathbf{R}_u = m_e \int \mathbf{v} C_{ei} d^3 v,$$

взяв в качестве C_{ei} правую часть уравнения (17.4), как в задаче 17.2, и учесть, что согласно (17.36)

$$\delta f = \frac{\sqrt{\pi} u v^4}{4(2T/m)^{5/2}} f_m \cos \theta.$$

Выполнив интегрированием, получим

$$\mathbf{R}_u = -\frac{3\pi}{32} \frac{m_e n_e \mathbf{u}}{\tau_e},$$

где параметр τ_e определён формулой (17.17).

Задача 17.4. Подставляя в формулу (17.14) функцию распределения электронов $f = f_m + \delta f$, найденную в §17.5, нужно учесть, что

$$\delta f = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{v^4 u}{(2T/m)^{5/2}} f_m \cos \theta$$

и \mathbf{u} имеют один и тот же порядок малости. Оставляя в (17.14) только линейные по δf или \mathbf{u} слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \int \frac{1}{2} m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f d^3 v \approx \\ &\approx \int \frac{1}{2} m v^2 \mathbf{v} \delta f d^3 v - \int m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} f_m d^3 v - \int \frac{1}{2} m v^2 \mathbf{u} f_m d^3 v = \end{aligned}$$

$$= 4nT\mathbf{u} - nT\mathbf{u} - \frac{3}{2}nT\mathbf{u} = \frac{3}{2}nT\mathbf{u}.$$

Вычисленная величина $\mathbf{q}_u = \frac{3}{2}n_e T_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$ составляет часть полного электронного потока тепла $\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_u + \mathbf{q}_{Te}$.

Задача 17.5. Пусть Δx_j — это смещение пешехода вдоль дороги за один шаг, а j — номер шага. По условию задачи величина Δx_j может быть с равной вероятностью равна как $+\lambda$, так и $-\lambda$. Сделав $N = t/\tau$ шагов, пешеход окажется в точке $x = \sum_{j=1}^N \Delta x_j$. Среднее значение $\langle x \rangle$ равно нулю, так как

$$\langle x \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N \Delta x_j \right\rangle = \sum_{j=1}^N \langle \Delta x_j \rangle = \sum_{j=1}^N 0 = 0.$$

Вычислим средний квадрат

$$\langle x^2 \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N \Delta x_j \sum_{k=1}^N \Delta x_k \right\rangle.$$

Выделив в двойной сумме слагаемые с $j = k$, заметим, что все другие при усреднении дадут нуль:

$$\langle x^2 \rangle = \sum_{j=1}^N \langle \Delta x_j^2 \rangle + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1, j \neq k}^N \langle \Delta x_j \Delta x_k \rangle = \sum_{j=1}^N \langle \Delta x_j^2 \rangle = \lambda^2 N.$$

Таким образом, через время $t = N\tau$ пешеход окажется приблизительно на расстоянии

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\tau} t}$$

от места старта, однако достоверно нельзя сказать, справа или слева от него он будет обнаружен.

Задача 17.6. Чтобы получить уравнение теплопроводности из уравнения переноса тепла, нужно в правой части (16.30) отбросить все слагаемые, кроме $\operatorname{div} \mathbf{q}_a$, а слева заменить полную производную $d_a/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}_a \cdot \nabla)$ на $\partial/\partial t$, приняв, что $\mathbf{u}_a = 0$. Затем нужно подставить справа $\mathbf{q}_a = -\kappa_a \nabla T_a$, слева — $s_a = n_a \ln(T_a^{3/2}/n_a)$ и вынести n_a за знак дифференцирования, считая, что плотность постоянна. В итоге получается уравнение теплопроводности (17.20). Часто его используют вместо уравнения переноса тепла, тем самым пренебрегая джоулевым и вязкостным нагревом плазмы, за который отвечают отброшенные в (16.30) слагаемые.

Задача 17.7. При подстановке $\mathbf{R}_{ie} = -\mathbf{R}_T = \frac{3}{2}n_e \nabla T_e$, $\mathbf{E} = \frac{5}{2}\nabla T_e/e_e$ в уравнение движения ионной компоненты плазмы

$$m_i n_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\nabla(n_i T_i) + e_i n_i \mathbf{E} + \frac{e_i n_i}{c} [\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}] + \mathbf{R}_{ie}$$

в условиях, предполагавшихся при выводе формулы для термосилы (однородность плотности плазмы и отсутствие магнитного поля) в §17.4, с учётом условия квазинейтральности $e_e n_e + e_i n_i = 0$ выясняется, что правая часть уравнения не равна нулю:

$$m_i n_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -n_i \nabla T_i - n_e \nabla T_e.$$

Это означает, что ионы придут в движение, а вместе с ними начнут двигаться и электроны. При этом средняя скорость электронов \mathbf{u}_e , входящая в уравнения двухжидкостной МГД, не может существенно отличаться от средней скорости ионов \mathbf{u}_i , иначе произошло бы нарушение квазинейтральности плазмы. Поскольку скорость электронов входит в уравнение движения электронной компоненты в произведении $m_e n d\mathbf{u}_e / dt$ с малой массой электронов m_e , её учёт при выводе формулы для термосилы дал бы ничтожно малую поправку. Именно малость массы электронов по сравнению с массой ионов оправдывает использование уравнения равновесия электронной компоненты при выводе формул для коэффициента теплопроводности и термосилы в §17.2 и §17.3.

Задача 17.8. Так как уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T$$

линейно, его решение можно искать в виде суммы гармоник. Разложим исходное решение $T(\mathbf{x}, t)$ в интеграл Фурье по координатам:

$$T(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} T_{\mathbf{k}}(t).$$

Для каждой гармоники $T_{\mathbf{k}}(t)$ уравнение теплопроводности даёт обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dT_{\mathbf{k}}}{dt} = -\chi k^2 T_{\mathbf{k}},$$

которое имеет решение вида

$$T_{\mathbf{k}}(t) = T_{0\mathbf{k}} e^{-\chi k^2 t}.$$

Так как при $t = 0$ должно быть $T = T_0(\mathbf{x})$, ясно, что $T_{0\mathbf{k}}$ представляет собой коэффициент Фурье-разложения функции $T_0(\mathbf{x})$, т. е.

$$T_{0\mathbf{k}} = \int d^3 x' T_0(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}.$$

Собирая гармоники, получаем

$$T(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int d^3 x' T_0(\mathbf{x}') e^{ik \cdot (x - x')} e^{-\chi k^2 t}.$$

Выполнив интегрирование по $d^3 k$, окончательно находим

$$T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi\chi t)^{3/2}} \int d^3 x' T_0(\mathbf{x}') \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{4\chi t}\right].$$

Пусть при $t = 0$ температура равна нулю везде, за исключением малой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$, в которой она принимает очень большое значение, но так, что полное количество тепла, пропорциональное интегралу $\int d^3 x T_0(\mathbf{x})$, остается конечным. Такое распределение можно представить дельта-функцией:

$$T_0(\mathbf{x}) = \text{const } \delta(\mathbf{x}).$$

Подстановка этого распределения в найденное выше решение даёт

$$T(\mathbf{x}, t) = \frac{\text{const}}{(4\pi\chi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\chi t}\right).$$

С течением времени температура в точке $\mathbf{x} = 0$ падает как $t^{-3/2}$. Одновременно повышается температура в окружающем пространстве, причём заметно прогретая область постепенно расширяется. Полуширина пика температуры, вычисленная по уровню $1/e$ от максимального значения, равна $\sqrt{4\chi t}$.

Описанный процесс теплопроводности обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения распространяется мгновенно на всё пространство. Это свойство сохраняется и для среды с зависящей от температуры теплопроводностью χ , если только эта зависимость не приводит к обращению χ в нуль в какой-либо области пространства. Если же χ есть функция температуры, убывающая и обращающаяся в нуль вместе с нею, то это приводит к такому замедлению процесса распространения тепла, в результате которого влияние любого теплового возмущения будет простираться в каждый момент времени лишь на некоторую конечную область пространства.

Задача 17.9. Если $\chi = \beta T^n$, где β и n — константы, уравнение теплопроводности приводится к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta \operatorname{div}(T^n \nabla T).$$

В течение небольшого интервала времени малый участок границы можно считать плоским, а скорость v его перемещения в пространстве — постоянной. Соответственно этому ищем решение в виде $T = T(x - vt)$, где x — координата в

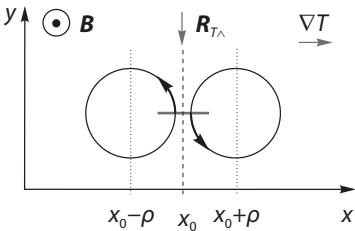


Рис. 18.1.1. Вычисление термосилы $\mathbf{R}_{T\Lambda}$ в магнитном поле.

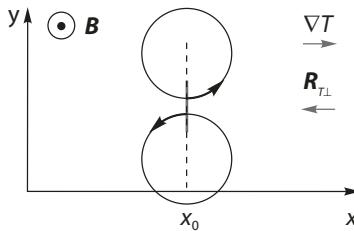


Рис. 18.1.2. Вычисление термосилы $\mathbf{R}_{T\perp}$ в магнитном поле.

направлении, перпендикулярном границе. Для искомой функции $T(\xi)$, зависящей от одного аргумента $\xi = x - vt$, имеем уравнение

$$-v \frac{dT}{d\xi} = \beta \frac{d}{d\xi} T^n \frac{dT}{d\xi}.$$

Интегрируя его дважды, находим закон обращения T в нуль:

$$T \propto (-\xi)^{1/n}.$$

Если $n > 0$, это решение имеет смысл только при $\xi < 0$, что следует трактовать как наличие ненагретой зоны при $x > vt$. Если же $n < 0$, не существует решений, обращающихся в нуль на конечном расстоянии, т. е. тепло в каждый момент распределено по всему пространству.

Задача 17.10. С помощью формул (17.16), (17.41) и (17.38) находим, что для лоренцевой плазмы $\chi_e/\sigma = 4T_e/e^2$.

Лекция 18

Задача 18.1. Выражение для термосилы в магнитном поле содержит три члена:

$$\mathbf{R}_T = -\beta_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \beta_{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \beta_{\Lambda} [\mathbf{h} \times \nabla T_e].$$

Как оценить продольную термосилу, $\mathbf{R}_{T\parallel} = -\beta_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e$, показано в задаче 17.1 для плазмы без магнитного поля; из неё следует, что $\beta_{\parallel} \sim n_e$.

Применим аналогичный метод к плазме в сильном магнитном поле, которое направлено по оси z , а градиент температуры направлен вдоль оси x , как показано на рисунке 18.1.1. В этом случае косая термосила, $\mathbf{R}_{T\Lambda} = -\beta_{\Lambda} [\mathbf{h} \times \nabla T_e]$, параллельна оси y . В сильном магнитном поле ($|\Omega_e \tau_e| \gg 1$) электроны врашаются по окружностям радиуса $\rho_e \sim v_{Te}/|\Omega_e|$, поэтому в плоскость $x = x_0$

приходят электроны справа и слева с расстояний порядка ρ_e . Эти электроны «принесут с собой» разность температур порядка $\rho_e \partial T_e / \partial x$ и, как видно из рисунка 18.1.1, вызывают раскомпенсацию сил трения у потоков, направленных по оси y , поскольку частота столкновений ν_{ei} убывает с ростом температуры. Действительно, сила трения $m_e n_e v_{Te} / \tau_e$, которая действует на электроны, приходящие в плоскость x_0 справа, направлена вверх и по величине меньше, чем сила трения, которая действует на электроны, приходящие слева, и направлена вниз. Таким образом, в результате столкновений с ионами возникает термосила, которая направлена вниз вдоль оси y и по порядку величины равна

$$R_{T\wedge} \sim -\frac{\rho_e}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x} \frac{m_e n_e v_{Te}}{\tau_e} \sim -\frac{n_e}{|\Omega_e \tau_e|} \frac{\partial T_e}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что $\beta_\wedge \sim n_e / |\Omega_e \tau_e|$. Аналогичное явление в металлах, приводящее к возникновению электрического поля, перпендикулярного магнитному полю и градиенту температуры, называется эффектом Нернста.

Оценим теперь термосилу в направлении оси x . Как показано на рисунке 18.1.2, потоки вдоль оси x образуются в точке $x = x_0$ электронами, приходящими в среднем из областей с $x = x_0$, поэтому силы трения, действующие на встречные потоки вдоль оси x , полностью компенсируются. Однако такая логика неприменима к электронам, которые двигаются столь медленно, что успевают затормозиться за один оборот по ларморовской окружности. Так как частота столкновений обратно пропорциональна кубу скорости электронов, из условия $\nu_{ei} \sim |\Omega_e|$ находим, что характерная скорость таких электронов v' по порядку величины равна $v_{Te}/|\Omega_e \tau_e|^{1/3}$. Число таких электронов в единице объема $n'_e \sim (v'/v_{Te})^3 n_e$ существенно меньше плотности электронов n_e . Сила, которая действует на поток $n'_e v'$ медленных электронов, летящих слева направо, примерно равна $m_e n'_e v' \Omega_e$ и направлена влево. Сила, которая действует на встречный поток, примерно равна по величине, но чуть меньше и направлена вправо. Две силы компенсируются с точностью до множителя $(\rho'_e/T_e) \partial T_e / \partial x$, где $\rho'_e \sim v'/\Omega_e$. Собирая все множители, получаем

$$R_{T\perp} \sim -m_e n'_e v' \Omega_e \frac{\rho'_e}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x} \sim -\frac{n_e}{|\Omega_e \tau_e|^{5/3}} \frac{\partial T_e}{\partial x}.$$

Отсюда находим, что $\beta_\perp \sim n_e / |\Omega_e \tau_e|^{5/3}$.

Задача 18.2. Так как $\nu_{ei} \propto v^{-3}$, ток вдоль магнитного поля (или в плазме без магнитного поля) переносится преимущественно более быстрыми электронами. Поэтому в системе координат, где $\mathbf{u}_e = 0$, в направлении $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$ летит больше быстрых электронов, а в направлении $-\mathbf{u}$ — больше медленных. Хотя в этой системе потоки электронов компенсируются, потоки энергии не компенсируются, и возникает поток тепла в направлении \mathbf{u} . Так как этот «эффект порядка единицы» (как ясно из расчёта силы трения), соответствующий поток

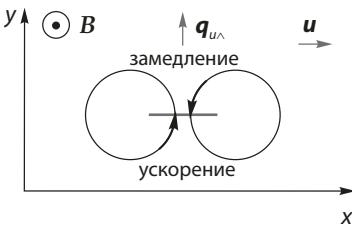


Рис. 18.2.1. Вычисление потока тепла $\mathbf{q}_{u\wedge}$ в магнитном поле.

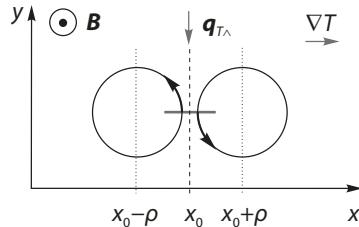


Рис. 18.2.2. Вычисление потока тепла $\mathbf{q}_{T\wedge}$ в магнитном поле.

тепла $\mathbf{q}_{u\parallel} = \beta T_e \mathbf{u}_{\parallel}$ имеет порядок величины $n_e T_e u_{\parallel}$. Как и продольная термосила, он связан со столкновениями, хотя его выражение не содержит τ_e явно.

Если ток течёт поперек сильного магнитного поля, то тоже возникает поток тепла, но по другой причине. Сила, уравновешивающая трение электронов об ионы, в течение одного полупериода вращения электрона ускоряет его, а в течение другого полупериода — замедляет (рис. 18.2.1). Поэтому площадку, лежащую в плоскости векторов \mathbf{u} и \mathbf{B} , пересекают с одной стороны ускоренные электроны, а с другой — замедленные. Разность их энергий имеет порядок величины $(m_e u / \tau_e) \rho_e$. В результате возникает поток тепла

$$q_{u\wedge} \sim \frac{m_e u_{\perp}}{\tau_e} \rho_e n_e v_{Te} \sim \frac{n_e T_e}{|\Omega_e \tau_e|} u_{\perp}.$$

Задача 18.3. Косой поток тепла возникает из-за того, что через площадку в плоскости, натянутой на векторы \mathbf{B} и ∇T_e , проходят в среднем более быстрые электроны с одной стороны, чем с другой (рис. 18.2.2).

Если даже односторонние потоки $\Gamma \sim n_e v_{Te}$ в точности компенсированы, то у односторонних потоков энергии $q \sim n_e T_e v_{Te}$ остаётся некомпенсированной доля порядка $(\rho_e \partial T_e / \partial x) / T_e$. В результате возникает поток тепла в направлении оси y :

$$q_{Te\wedge} \sim n_e v_{Te} \rho_e \frac{\partial T_e}{\partial x} \sim \frac{n_e T_e}{m_e \Omega_e} \frac{\partial T_e}{\partial x}.$$

Аналогичный результат получается для ионов. Косые потоки переносят тепло вдоль изотерм и не приводят непосредственно к охлаждению плазмы или к увеличению энтропии, поэтому не стоит удивляться, что косые потоки у ионов и электронов имеют противоположные знаки.

Задача 18.4. Вычисления удобно делать в системе отсчёта, где данный элемент плазмы покоятся. Пренебрегая величинами порядка m_e/m_i , эту систему можно считать совпадающей с системой покоя ионной компоненты. Электрический ток в такой системе — чисто электронный, поэтому решать надо кинетическое уравнение для электронов.

Предположим, что движение электронов относительно ионов (со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp$) создаётся электрическим полем \mathbf{E} , которое приложено перпендикулярно сильному магнитному полю \mathbf{B} . Поправка δf к максвелловскому распределению f_m , которую выберем в виде

$$f_m + \delta f = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T} \right), \quad (18.4.1)$$

удовлетворяет линеаризованному кинетическому уравнению

$$e_e \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial \mathbf{v}} + [\mathbf{v} \times \Omega_e] \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{v}} = C_{ei} + C_{ee}. \quad (18.4.2)$$

В сильном магнитном поле правой частью этого уравнения (она приблизительно пропорциональна частоте столкновений ν_{ei}) можно пренебречь по сравнению со вторым слагаемым в левой части (которое пропорционально циклотронной частоте Ω_e). Написать решение уравнения (18.4.2) с нулевой правой частью можно, не решая само уравнение. Действительно, под действием электрического поля, которое перпендикулярно магнитному полю, все электроны будут дрейфовать со скоростью электрического дрейфа

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_E = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] / B^2,$$

и равновесной будет функция распределения в виде сдвинутого максвелловского распределения, которое получается из (18.4.1) заменой $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{u}$:

$$f_m + \delta f = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T} \right) \approx f_m + \frac{m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})}{T} f_m. \quad (18.4.3)$$

Сила трения в том случае, когда электроны описываются «сдвинутой» максвелловской функцией распределения, вычислена в задаче 16.4 и равна

$$\mathbf{R}_{u\perp} = -\frac{m_e n_e \mathbf{u}_\perp}{\tau_e}, \quad (18.4.4)$$

где параметр τ_e задан формулой (17.17).

Задача 18.5. Если под действием какой-нибудь силы, например электрического поля, у электронов возникает средняя скорость \mathbf{u} , направленная вдоль \mathbf{B} , то их функция не будет просто сдвинутым на \mathbf{u} как целое максвелловским распределением. Это объясняется тем, что частота кулоновских столкновений уменьшается с ростом скорости электронов ($\nu_{ei}^{(p)} \propto v^{-3}$), поэтому доля быстрых электронов при той же средней (потоковой) скорости \mathbf{u} будет больше, чем при простом сдвиге всей функции распределения как целого, а средняя сила, действующая на электроны, будет меньше.

Так как сила трения $\mathbf{R}_{u\perp}$, перпендикулярная магнитному полю, равна силе, которая действует на сдвинутое максвелловское распределение (задача 18.4), продольная сила $\mathbf{R}_{u\parallel}$ будет меньше, чем $\mathbf{R}_{u\perp}$.

Задача 18.6. Сравнивая ионную и электронную теплопроводности, лучше говорить о коэффициентах температуропроводности, которые характеризуют поток энергии в расчёте на одну частицу, например $\chi_{\perp e} = \kappa_{\perp e}/\frac{3}{2}n_e$ и $\chi_{\perp i} = \kappa_{\perp i}/\frac{3}{2}n_i$. Учитывая, что

$$\tau_e/\tau_i \sim \sqrt{m_e/m_i}(T_e/T_i)^{3/2}Z^2$$

(см. §17.2), находим

$$\begin{aligned}\chi_{\parallel e}/\chi_{\parallel i} &\sim v_{Te}^2 \tau_e/v_{Ti}^2 \tau_i \sim (m_i/m_e)^{1/2} (T_e/T_i)^{5/2} Z^2, \\ \chi_{\perp e}/\chi_{\perp i} &\sim v_{Te}^2 \Omega_e^{-2} \tau_e^{-1}/v_{Ti}^2 \Omega_i^{-2} \tau_i^{-1} \sim (m_e/m_i)^{1/2} (T_i/T_e)^{1/2}, \\ \chi_{\wedge e}/\chi_{\wedge i} &\sim v_{Te}^2 \Omega_e^{-1}/v_{Ti}^2 \Omega_i^{-1} \sim (T_e/T_i)Z.\end{aligned}$$

В изотермической водородной плазме теплопроводность вдоль магнитного поля обеспечивается преимущественно электронами, а поперёк поля — ионами; косые потоки тепла, переносимые ионами и электронами, одинаковы, но они направлены вдоль изотерм и не приводят к изменению энтропии.

Задача 18.7. Пусть степень ионизации настолько мала, что столкновениями заряженных частиц друг с другом можно пренебречь по сравнению с их столкновениями с нейтральными атомами. Даже в этих условиях, как объяснил В. Шоттки (Walter Schottky, 1924 [156]), диффузия одного сорта заряженных частиц, например электронов, влияет на диффузию другого сорта заряженных частиц — ионов.

Запишем уравнения движения электронов и ионов в слабоионизованном газе без магнитного поля, учитывая, что те и другие тормозятся преимущественно в столкновениях с нейтральными атомами, которые в среднем неподвижны:

$$\begin{aligned}m_e n_e \frac{d_e \mathbf{u}_e}{dt} &= -\nabla p_e + e_e n_e \mathbf{E} - m_e n_e \nu_{ea} \mathbf{u}_e, \\ m_i n_i \frac{d_i \mathbf{u}_i}{dt} &= -\nabla p_i + e_i n_i \mathbf{E} - m_i n_i \nu_{ia} \mathbf{u}_i.\end{aligned}\tag{18.7.1}$$

Здесь ν_{ea} и ν_{ia} обозначают соответственно частоту рассеяния электронов и ионов на нейтральных атомах, а \mathbf{u}_e и \mathbf{u}_i — скорости электронов и ионов. Пусть распределение температуры однородно, следовательно $\nabla p_e = T \nabla n_e$, $\nabla p_i = T \nabla n_i$. Предполагая, что движение будет медленным, пренебрежём левыми частями уравнений (18.7.1) и найдём установившиеся потоки электронов и ионов:

$$n_e \mathbf{u}_e = \frac{e_e n_e}{m_e \nu_{ea}} \mathbf{E} - \frac{T}{m_e \nu_{ea}} \nabla n_e, \quad n_i \mathbf{u}_i = \frac{e_i n_i}{m_i \nu_{ia}} \mathbf{E} - \frac{T}{m_i \nu_{ia}} \nabla n_i.$$

Те же потоки можно выразить через коэффициенты диффузии $D_e = T/m_e \nu_{ea}$, $D_i = T/m_i \nu_{ia}$ и коэффициенты подвижности $b_e = 1/m_e \nu_{ea}$, $b_i = 1/m_i \nu_{ia}$:

$$n_e \mathbf{u}_e = e_e n_e b_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e, \quad n_i \mathbf{u}_i = e_i n_i b_i \mathbf{E} - D_i \nabla n_i.\tag{18.7.2}$$

Эти коэффициенты связаны друг с другом соотношениями Эйнштейна ([Albert Einstein, 1905 \[157\]](#))

$$b_e = D_e/T, \quad b_i = D_i/T, \quad (18.7.3)$$

которые в наших вычислениях получились естественным образом из уравнений движения. Уравнения непрерывности для электронов и ионов

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{u}_e = 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{u}_i = 0$$

с учётом (18.7.2) и (18.7.3) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} &= D_e \operatorname{div} \left[\nabla n_e - \frac{e_e n_e}{T} \mathbf{E} \right], \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} &= D_i \operatorname{div} \left[\nabla n_i - \frac{e_i n_i}{T} \mathbf{E} \right]. \end{aligned} \quad (18.7.4)$$

К ним надо добавить уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi (e_i n_i + e_e n_e) \quad (18.7.5)$$

для электрического потенциала φ .

Система уравнений (18.7.4), (18.7.5) допускает полное аналитическое исследование при разной степени ионизации газа, т. е. при различном соотношении дебаевской длины λ_D и характерного линейного размера облака газа L . Однако мы ограничимся случаем квазинейтральной плазмы, когда $\lambda_D \ll L$. Формально это соответствует строгому равенству $e_e n_e + e_i n_i = 0$. Дополнительно учтём, что в слабоионизованной плазме ионы, как правило, ионизованы однократно, поэтому $e_i = -e_e = e > 0$, так что $n_e = n_i = n$. Исключив затем электрическое поле из уравнений (18.7.4), получим уравнение диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n \quad (18.7.6)$$

с коэффициентом

$$D = \frac{2D_i D_e}{D_i + D_e}. \quad (18.7.7)$$

Хотя сечения рассеяния электронов и ионов на нейтральных атомах, вообще говоря, одного порядка величины, их коэффициенты диффузии существенно различны благодаря разнице тепловых скоростей, $D_e/D_i \sim v_{Te}/v_{Ti} \sim \sqrt{m_i/m_e}$, так что $D_e \gg D_i$. Это обстоятельство придаёт процессу диффузии своеобразные черты. Получается, что $D \approx 2D_i$, т. е. процесс диффузии определяется ионами как наиболее медленно диффундирующими частицами. Их коэффициент диффузии оценивается как произведение длины свободного пробега, $\lambda_i \sim v_{Ti}/\nu_{ia}$, на их тепловую скорость, $D_i \sim \lambda_i v_{Ti}$.

Задача 18.8. Предположим, что в плазме возникли переменные электрические поля с амплитудой E , изменяющиеся независимо в точках на расстоянии, большем ℓ . Будем также считать, что характерная частота изменения полей заметно меньше ионной циклотронной частоты, $\omega \ll \Omega_i$, так что они вызывают дрейф частиц со скоростью $u \sim cE/B$, которая хаотически изменяет свое направление после того, как частица прореагирует на расстояние порядка ℓ . Коэффициент возникающей при этом диффузии можно оценить с помощью формулы $D_B \sim u\ell \sim cE\ell/B$. Так как флуктуации подпитываются тепловой энергией частиц, естественно предположить также, что $eE\ell \sim T$. В результате получим $D_B \sim cT/eB$.

Вообще говоря, коэффициент диффузии может быть больше вычисленного по формуле Бома, так как он вписал в формулу (18.19) численный коэффициент $1/16$, обобщив результаты серии экспериментов в рамках одного конкретного проекта. Экспериментально почти четырёхкратное превышение фактического коэффициента диффузии над бомовским было обнаружено в работе [158].

Задача 18.9. Будем считать, что плазма однородна и неподвижна, магнитное поле параллельно границе плазмы и направлено по оси z , а ось x направлена по нормали к границе вглубь плазмы; соответственно, ось y лежит в плоскости границы. Отбрасывая ток смещения $(1/c)\partial E/\partial t$ в уравнениях Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J},$$

исключая магнитное поле \mathbf{B} , а также плотность тока \mathbf{J} при помощи формулы (18.27), получаем уравнение

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}] = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{\perp} E_{\perp} + \sigma_{\wedge} [\mathbf{h} \times \mathbf{E}] + \sigma_{\parallel} E_{\parallel}),$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{B}_0/B_0 = \hat{z}$. Расписывая его по компонентам, оставляя только производные по x (поскольку поле слабо меняется в плоскости границы) и предполагая гармоническую зависимость \mathbf{E} от времени, приходим к системе уравнений

$$0 = \frac{4\pi i \omega}{c^2} (\sigma_{\perp} E_x - \sigma_{\wedge} E_y), \quad (18.9.1)$$

$$-\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} (\sigma_{\perp} E_y + \sigma_{\wedge} E_x), \quad (18.9.2)$$

$$-\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_{\parallel} E_z. \quad (18.9.3)$$

Из последнего уравнения следует, что глубина проникновения продольной компоненты электрического поля E_z равна

$$\delta_{\parallel} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\sigma_{\parallel}}} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega/\varrho_{\parallel}}}. \quad (18.9.4)$$

Из двух других уравнений получаем

$$-\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_{\parallel}^2}{\sigma_{\perp}} E_y \quad (18.9.5)$$

для E_y и такое же уравнение для $E_x = (\sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp})E_y$. Таким образом,

$$\delta_{\perp} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega/\varrho_{\perp}}}, \quad (18.9.6)$$

где

$$\varrho_{\perp} = \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_{\parallel}^2}.$$

В отличие от коэффициентов проводимости σ_{\perp} , σ_{\parallel} , коэффициенты удельного сопротивления ϱ_{\perp} , $\varrho_{\parallel} = 1/\sigma_{\parallel}$ слабо зависят от магнитного поля B_0 (см. §18.6). В замагниченной плазме $\sigma_{\perp} \ll \sigma_{\parallel}$, тогда как $\varrho_{\perp} \sim \varrho_{\parallel}$. Отсюда следует, что толщина скин-слоя слабо зависит от поляризации переменного поля относительно направления внешнего магнитного поля B_0 .

Задача 18.10. Комбинируя формулы

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} \delta_{\mu\nu}$$

и

$$\mathbf{W}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -W_{xy} - W_{yx} & W_{xx} - W_{yy} & 0 \\ W_{xx} - W_{yy} & W_{xy} + W_{yx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

получаем

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требование равенства нулю всех элементов тензора \mathbf{W}_3 даёт два независимых уравнения на две функции v_x , v_y . Их общее решение

$$v_x(x, y) = \frac{1}{2} [f_1(x + iy) + f_2(x - iy)],$$

$$v_y(x, y) = \frac{1}{2i} [f_1(x + iy) - f_2(x - iy)]$$

выражается через две произвольные функции f_1 , f_2 одной переменной. Дополнительное требование вещественности скоростей v_x , v_y предполагает, что $f_2(x - iy)$ есть функция, комплексно-сопряжённая $f_1(x + iy)$. Следовательно,

$$v_x(x, y) = \operatorname{Re} f_1(x + iy), \quad v_y(x, y) = \operatorname{Im} f_1(x + iy).$$

Частный случай $f_1(z) = z$ соответствует всестороннему равномерному сжатию с неравной нулю дивергенцией скорости. Другой частный случай $f_1(z) = iz$ соответствует твердотельному вращению с нулевой дивергенцией скорости. Требование равенства нулю дивергенции скорости приводит к уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = f'_1(x + iy) + f'_2(x - iy) = 0.$$

Вследствие произвольности x и y производные f'_1 и f'_2 должны быть равны нулю каждая по отдельности, что соответствует жёсткому смещению $f_1(z) = \text{const}$ без деформации. Как сказано в §28.5, учёт бесстолкновительной вязкости в уравнениях магнитной гидродинамики эквивалентен учёту эффектов конечного лармировского радиуса (эффектов КЛР), которые стабилизируют желобковую неустойчивость. Поскольку бесстолкновительная вязкость равна нулю для жёстких (твёрдотельных) смещений плазмы, эффекты КЛР не могут стабилизировать желобковые возмущения жёсткого типа.

Задача 18.11. В лоренцевой плазме столкновениями электронов с электронами можно пренебречь, так как столкновения с ионами происходят в Z раз чаще, а зарядовое число ионов велико, $Z \gg 1$. Запишем кинетическое уравнение для электронов, оставив в правой части только интеграл столкновений электронов с ионами:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e_e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = C'_{ei}[f_e]. \quad (18.11.1)$$

Так как тепловая скорость ионов мала по сравнению со скоростями электронов, интеграл столкновений $C'_{ei}[f_e]$ не зависит от вида функции распределения ионов (если пренебречь поправками, содержащими малое отношение m_e/m_i). Он имеет наиболее простой вид в системе отсчёта, где ионы в среднем покоятся. Вводя обозначение $\mathbf{w}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}_i$, где \mathbf{u}_i — потоковая скорость ионов, пишем

$$C'_{ei}[f_e] = \frac{2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial w'_\alpha} \left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{w'} - \frac{w'_\alpha w'_\beta}{w'^3} \right) \frac{\partial f_e}{\partial w'_\beta}. \quad (18.11.2)$$

Следуя методу Брагинского, ищем решение уравнения (18.11.1) в виде

$$f_e = f_m + \delta f, \quad (18.11.3)$$

где

$$f_m = f_m(w) = \frac{n_e}{(2\pi T_e/m_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_e w^2}{2T_e}\right), \quad (18.11.4)$$

$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_e$, а макроскопические параметры электронов n_e , T_e , \mathbf{u}_e являются, вообще говоря, функциями координат \mathbf{x} и времени t . Подставляя (18.11.3) в уравнение (18.11.1), будем считать, что поправка δf к максвелловской части f_m функции распределения электронов, электрическое поле \mathbf{E} и производные

(как по координатам, так и по времени) макроскопических параметров малы и имеют один и тот же порядок малости. Отбрасывая в левой части уравнения слагаемые, квадратичные по малому параметру разложения, получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{p_e} \frac{d_e p_e}{dt} + \left(\frac{m_e w^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{T_e} \frac{d_e T_e}{dt} \right\} f_m - \\ & - \left\{ e_e E + \frac{e_e}{c} [\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] - \frac{1}{n_e} \frac{\partial p_e}{\partial \mathbf{x}} - m_e \frac{d_e \mathbf{u}_e}{dt} \right\} \cdot \frac{\mathbf{w}}{T_e} f_m + \\ & + \left\{ \left(\frac{m_e w^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{x}} \right\} \cdot \mathbf{w} f_m + \\ & + \left\{ \frac{m_e}{T_e} \frac{\partial u_{ev}}{\partial x_\mu} \right\} w_\mu w_\nu f_m + \frac{e_e}{m_e c} [\mathbf{w} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{w}} = C'_{ei}[f_e], \quad (18.11.5) \end{aligned}$$

где

$$\frac{d_e}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}.$$

Наряду с разложением (18.11.3) функции распределения f_e на максвелловский остаток f_m , центрированный относительно средней скорости электронов, и малую поправку δf используем также другое разложение

$$f_e = f'_m + \delta f',$$

где малая поправка $\delta f'$ выделяется на фоне максвелловского распределения $f'_m = f_m(w')$, которое центрировано относительно средней скорости ионов. Оно удобно тем, что f'_m обращает в нуль правую часть кинетического уравнения, поэтому $C'_{ei}[f_e] = C'_{ei}[\delta f']$. Так как предполагается, что средние направленные скорости электронов и ионов, \mathbf{u}_e и \mathbf{u}_i , малы по сравнению с тепловой скоростью электронов $v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$, с нужной точностью

$$f'_m = f_m - \frac{m_e}{T_e} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) f_m, \quad \delta f' = \delta f + \frac{m_e}{T_e} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) f_m,$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$. После подстановки $\delta f'$ в интеграл столкновений (18.11.2) можно заменить $\mathbf{w}' = \mathbf{w} + \mathbf{u}$ на \mathbf{w} , поскольку поправка $\delta f'$ сама по себе мала. В результате простых вычислений находим, что

$$C'_{ei}[f_e] = C_{ei}[\delta f] - \nu_{ei} \frac{m_e}{T_e} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) f_m,$$

где

$$\nu_{ei} = 4\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei} / m_e^2 w^3,$$

а C_{ei} (без штриха) вычисляется по формуле (18.11.2) для C'_{ei} с заменой \mathbf{w}' на \mathbf{w} .

Производные $d_e p_e/dt$ и $d_e T_e/dt$ внутри первой пары фигурных скобок в уравнении (18.11.5) удаётся исключить с помощью соотношения $p_e = n_e T_e$, уравнения непрерывности (16.32а)

$$\frac{d_e}{dt} \ln(n_e) = -\operatorname{div} \mathbf{u}_e$$

и уравнения адиабаты

$$\frac{d_e}{dt} \ln(p_e/n_e^{5/3}) = 0,$$

которое получается из уравнения передачи тепла (16.32в) путём отбрасывания малых слагаемых второго порядка (таких как вязкий нагрев $(\boldsymbol{\pi}_e \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_e$ и дивергенция потока тепла $\operatorname{div} \mathbf{q}_e$) или содержащих малое отношение m_e/m_i (как прямой нагрев электронов ионами Q_{ei}), после чего первое слагаемое в левой части (18.11.5) приводится к виду

$$\left\{ -\frac{m_e w^2}{3 T_e} \frac{\partial u_{e\gamma}}{\partial x_\gamma} \right\} f_m.$$

В сумме с предпоследним слагаемым в левой части оно даёт

$$\frac{m_e w_\mu w_\nu}{2 T_e} W_{\mu\nu} f_m,$$

где

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial u_{e\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_{e\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{e\gamma}}{\partial x_\gamma} \delta_{\mu\nu}$$

обозначает тензор скорости сдвигов. Внутри второй пары фигурных скобок производную $d_e \mathbf{u}_e / dt$ можно исключить при помощи уравнения движения электронов (16.32б), в котором следует пренебречь вязкой силой $-\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e$, так как она содержит вторые производные по координатам (см. далее) и мала по сравнению с силой $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{ei}$. Перенося на правую сторону все слагаемые, содержащие δf , получаем

$$\begin{aligned} \{\mathbf{R} + n_e v_{ei} m_e \mathbf{u}\} \cdot \frac{\mathbf{w}}{n_e T_e} f_m + \left\{ \left(\frac{m_e w^2}{2 T_e} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{x}} \right\} \cdot \mathbf{w} f_m + \\ + \frac{m_e w_\mu w_\nu}{2 T_e} W_{\mu\nu} f_m = C_{ei}[\delta f] - [\mathbf{w} \times \boldsymbol{\Omega}_e] \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{w}}, \quad (18.11.6) \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\Omega}_e = (e_e/m_e c) \mathbf{B}$. Напомним, что заряд электрона $e_e = -e$ содержит знак, а $e > 0$ обозначает положительный элементарный заряд. Соответственно, циклотронная частота $\Omega_e = e_e B / m_e c$ считается отрицательной величиной.

Задача 18.12. Решение уравнения (18.11.6), полученного в задаче 18.11, удобно искать в виде

$$\delta f = \frac{w_\mu}{w} A_\mu + \left[\frac{w_\mu}{w} \frac{w_\nu}{w} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] B_{\mu\nu}, \quad (18.12.1)$$

где элементы вектора A_μ и тензора $B_{\mu\nu}$ зависят от длины w вектора \mathbf{w} , но не от его направления. Форма (18.12.1) обеспечивает выполнение условий

$$\int \delta f d^3w = 0, \quad \int w^2 \delta f d^3w = 0,$$

гарантирующих, что параметры n_e и T_e максвелловского распределения (18.11.4) совпадают с плотностью

$$n_e = \int f_e d^3v,$$

и температурой

$$T_e = \frac{m_e}{3n_e} \int w^2 f_e d^3v$$

в данной точке. Параметр \mathbf{u}_e отождествляется с потоковой скоростью электронов

$$\mathbf{u}_e = \frac{1}{n_e} \int \mathbf{v} f_e d^3v$$

при дополнительном условии

$$\int \mathbf{w} \delta f d^3w = \frac{1}{3} \int w \mathbf{A} d^3w = 0. \quad (18.12.2)$$

Замечательно, что оба члена в представлении (18.12.1) сохраняют свою структуру под действием интеграла столкновений:

$$C_{ei}[\delta f] = -\nu_{ei} \frac{w_\mu}{w} A_\mu - 3\nu_{ei} \left[\frac{w_\mu}{w} \frac{w_\nu}{w} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] B_{\mu\nu}. \quad (18.12.3)$$

Кроме того, они обладают свойством ортогональности при усреднении по равновероятным направлениям вектора \mathbf{w} . Обозначая угловыми скобками результат усреднения, имеем равенства

$$\langle w_\mu \rangle = 0, \quad \langle w_\mu w_\nu \rangle = \frac{1}{3} w^2 \delta_{\mu\nu}, \quad \langle w_\alpha w_\mu w_\nu \rangle = 0. \quad (18.12.4)$$

Умножая δf и $C_{ei}[\delta f]$ на w_α и проводя усреднение, избавляемся от вторых слагаемых в (18.12.1) и (18.12.3), содержащих $B_{\mu\nu}$. То же самое происходит при усреднении уравнения (18.11.6). Такая процедура позволяет отделить уравнение для вектора A_μ от уравнения для тензора $B_{\mu\nu}$.

Найдём сначала вектор \mathbf{A} . Подставив формулы (18.12.1) и (18.12.3) в уравнение (18.11.6), умножив результат на \mathbf{w} и выполнив усреднение с помощью формул (18.12.4), получим

$$\nu_{ei} \mathbf{A} + \Omega_e [\mathbf{h} \times \mathbf{A}] = -\mathbf{s}, \quad (18.12.5)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ и введено обозначение

$$\mathbf{s} = \{\mathbf{R} + n_e \nu_{ei} m_e \mathbf{u}\} \frac{w}{n_e T_e} f_m + \left\{ \left(\frac{m_e w^2}{2 T_e} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{x}} \right\} w f_m.$$

Решение уравнения (18.12.5) можно представить в виде

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{\nu_{ei}} \mathbf{s}_{\parallel} - \frac{\nu_{ei}}{\nu_{ei}^2 + \Omega_e^2} \mathbf{s}_{\perp} + \frac{\Omega_e}{\nu_{ei}^2 + \Omega_e^2} [\mathbf{h} \times \mathbf{s}_{\perp}], \quad (18.12.6)$$

где $\mathbf{s}_{\parallel} = \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{s})$, $\mathbf{s}_{\perp} = \mathbf{s} - \mathbf{s}_{\parallel}$. Его нетрудно получить, если умножить уравнение (18.12.5) один раз векторно на \mathbf{h} , другой раз скалярно на \mathbf{h} , учесть тождество $\mathbf{h} \times [\mathbf{h} \times \mathbf{A}] = -\mathbf{A}_{\perp}$, а затем исключить из полученного набора уравнений $[\mathbf{h} \times \mathbf{A}]$.

Подставив \mathbf{A} в условие (18.12.2), можно выразить \mathbf{R} через другие параметры, входящие в определение \mathbf{s} . Из сравнения слагаемых в формуле (18.12.6) следует, что выражение для продольной части силы \mathbf{R}_{\parallel} , порождённой первым слагаемым, получается из поперечной части \mathbf{R}_{\perp} , которой отвечают второе и третье слагаемые, путём предельного перехода $\Omega_e \rightarrow 0$. В связи с этим достаточно ограничиться вычислением \mathbf{R}_{\perp} . В результате комбинирования формул (18.12.2) и (18.12.6) получается уравнение для \mathbf{R}_{\perp} :

$$\frac{2}{3m_e\nu_T} \left\{ \mathbb{A}_{7,0} \mathbf{R}_{\perp} - \Omega \mathbb{A}_{10,0} [\mathbf{h} \times \mathbf{R}_{\perp}] + \mathbb{A}_{4,0} m_e n_e \nu_T \mathbf{u}_{\perp} - \Omega \mathbb{A}_{7,0} [\mathbf{h} \times m_e n_e \nu_T \mathbf{u}_{\perp}] + \mathbb{A}_{7,1} n_e \nabla_{\perp} T_e - \Omega \mathbb{A}_{10,1} [\mathbf{h} \times n_e \nabla_{\perp} T_e] \right\} = 0, \quad (18.12.7)$$

где безразмерная функция

$$\mathbb{A}_{k,l}(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{V^k}{1 + \Omega^2 V^6} \left(V^2 - \frac{5}{2} \right)^l e^{-V^2} dV$$

зависит от безразмерного параметра $\Omega = \Omega_e/\nu_T$, а $\nu_T = 4\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}/m_e^2 v_{Te}^3$ обозначает частоту электрон-ионных столкновений ν_{ei} при $w = v_{Te}$. Решая уравнение (18.12.7) тем же методом, что и уравнение (18.12.5), находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\perp} = & -\{ [\mathbb{A}_{4,0} \mathbb{A}_{7,0} + \Omega^2 \mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{10,0}] m_e n_e \nu_T \mathbf{u}_{\perp} + \\ & + \Omega [\mathbb{A}_{4,0} \mathbb{A}_{10,0} - \mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{7,0}] [\mathbf{h} \times m_e n_e \nu_T \mathbf{u}_{\perp}] + \\ & + [\mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{7,0} + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,1} \mathbb{A}_{10,0}] n_e \nabla_{\perp} T_e + \\ & + \Omega [\mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{10,0} - \mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{10,1}] [\mathbf{h} \times n_e \nabla_{\perp} T_e] \} / \{ \mathbb{A}_{7,0}^2 + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0}^2 \}. \end{aligned} \quad (18.12.8)$$

Переходя к вычислению потока тепла

$$\mathbf{q}_e = \int \frac{1}{2} m_e w^2 \mathbf{w} f_e d^3 v = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{2} m_e w^2 \right) w \mathbf{A} d^3 w,$$

заметим, что условие (18.12.2) позволяет переписать интеграл, подлежащий вычислению, в виде

$$\mathbf{q}_e = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{2} m_e w^2 - \frac{5}{2} T_e \right) w \mathbf{A} d^3 w. \quad (18.12.9)$$

Далее уже нетрудно сообразить, что результат вычисления интеграла можно получить из левой части формулы (18.12.7), увеличив на единицу второй индекс в коэффициентах $\mathbb{A}_{k,l}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{e\perp} = & \frac{2}{3} \frac{T_e}{m_e \nu_T} \left\{ \mathbb{A}_{7,1} \mathbf{R}_\perp - \Omega \mathbb{A}_{10,1} [\mathbf{h} \times \mathbf{R}_\perp] + \mathbb{A}_{4,1} m_e n_e \nu_T \mathbf{u}_\perp - \right. \\ & \left. - \Omega \mathbb{A}_{7,1} [\mathbf{h} \times m_e n_e \nu_T \mathbf{u}_\perp] + \mathbb{A}_{7,2} n_e \nabla_\perp T_e - \Omega \mathbb{A}_{10,2} [\mathbf{h} \times n_e \nabla_\perp T_e] \right\}. \end{aligned} \quad (18.12.10)$$

Из полученного выражения с помощью формулы (18.12.8) нужно исключить \mathbf{R}_\perp . Итоговые формулы для \mathbf{R} и \mathbf{q}_e можно немного упростить при помощи легко проверяемых тождеств

$$\mathbb{A}_{4,0} + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0} = \frac{3}{2}, \quad \mathbb{A}_{4,1} + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,1} = 0. \quad (18.12.11)$$

Сравнивая результат с формулами¹

$$\mathbf{R} = -\alpha_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} - \alpha_{\perp} \mathbf{u}_{\perp} - \alpha_{\wedge} [\mathbf{h} \times \mathbf{u}] - \beta_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \beta_{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \beta_{\wedge} [\mathbf{h} \times \nabla T_e], \quad (18.12.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e = & \beta_{\parallel} T_e \mathbf{u}_{\parallel} + \beta_{\perp} T_e \mathbf{u}_{\perp} + \beta_{\wedge} T_e [\mathbf{h} \times \mathbf{u}] - \kappa_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \kappa_{\wedge} [\mathbf{h} \times \nabla T_e], \\ & \end{aligned} \quad (18.12.13)$$

находим так называемые векторные кинетические коэффициенты, через которые выражаются сила \mathbf{R} и поток \mathbf{q}_e :

$$\begin{aligned} \alpha_{\perp} = & \left(\frac{9\sqrt{\pi}}{8} \frac{\mathbb{A}_{7,0}}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0}^2} \right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \\ \alpha_{\wedge} = & \left(\Omega_e \tau_e \left[\frac{3}{2} \frac{\mathbb{A}_{10,0}}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0}^2} - 1 \right] \right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \\ \beta_{\perp} = & \left(\frac{\mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{7,0} + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,1} \mathbb{A}_{10,0}}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0}^2} \right) n_e, \\ \beta_{\wedge} = & \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{10,0} - \mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{10,1}}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0}^2} \right] \Omega_e \tau_e \right) n_e, \\ \kappa_{\perp} = & \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \left[\mathbb{A}_{7,2} - \frac{\mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{7,1}^2}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \mathbb{A}_{10,0}^2 \Omega^2} + \frac{\mathbb{A}_{10,1} (\mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{10,1} - 2\mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{10,0})}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \mathbb{A}_{10,0}^2 \Omega^2} \Omega^2 \right] \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, \\ \kappa_{\wedge} = & \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \left[\mathbb{A}_{10,2} - \frac{\mathbb{A}_{10,0} \mathbb{A}_{10,1}^2}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \mathbb{A}_{10,0}^2 \Omega^2} + \frac{\mathbb{A}_{7,1} (\mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{10,0} - 2\mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{10,1})}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \mathbb{A}_{10,0}^2 \Omega^2} \Omega^2 \right] \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}. \end{aligned} \quad (18.12.14)$$

¹ С. И. Брагинский чередует знаки «+» и «-» перед «косыми» членами в разных формулах, чтобы сделать соответствующие коэффициенты положительными. В формулах (18.12.12) и (18.12.13) выбраны одинаковые знаки перед всеми слагаемыми одной группы, в частности перед $\alpha_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel}$, $\alpha_{\perp} \mathbf{u}_{\perp}$ и $\alpha_{\wedge} [\mathbf{h} \times \mathbf{u}]$. Однако при этом оказывается, что для электронов $\alpha_{\wedge} < 0$.

Здесь $\tau_e = 3\sqrt{\pi}/4\nu_T$, а функции $\mathbb{A}_{k,l} = \mathbb{A}_{k,l}(\Omega)$ вычисляются при $\Omega = 4\Omega_e\tau_e/3\sqrt{\pi}$. Коэффициенты α_{\parallel} , β_{\parallel} и κ_{\parallel} получаются соответственно из α_{\perp} , β_{\perp} и κ_{\perp} подстановкой $\Omega_e = 0$:

$$\alpha_{\parallel} = \left(\frac{3\pi}{32}\right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \quad \beta_{\parallel} = \left(\frac{3}{2}\right) n_e, \quad \kappa_{\parallel} = \left(\frac{128}{3\pi}\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}.$$

Они не зависят от величины магнитного поля. Для других транспортных коэффициентов в пределе слабозамагниченной плазмы, $|\Omega_e\tau_e| \ll 1$, из общих формул получаются следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \alpha_{\perp} &= \left(\frac{3\pi}{32}\right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, & \alpha_{\wedge} &= \left(-\left[\frac{315\pi}{512} - 1\right] |\Omega_e\tau_e|\right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \\ \beta_{\perp} &= \left(\frac{3}{2}\right) n_e, & \beta_{\wedge} &= \left(\frac{315}{32} |\Omega_e\tau_e|\right) n_e, \\ \kappa_{\perp} &= \left(\frac{128}{3\pi}\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, & \kappa_{\wedge} &= \left(\frac{1085}{2\pi} |\Omega_e\tau_e|\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}. \end{aligned}$$

В противоположном предельном случае, $|\Omega_e\tau_e| \gg 1$, имеем другие асимптотические выражения:

$$\begin{aligned} \alpha_{\perp} &= (1) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, & \alpha_{\wedge} &= \left(-\frac{\pi^{4/3}}{6^{1/3}} |\Omega_e\tau_e|^{-2/3}\right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \\ \beta_{\perp} &= \left(\frac{5\pi^{4/3}}{2^{4/3} 3^{1/3}} |\Omega_e\tau_e|^{-5/3}\right) n_e, & \beta_{\wedge} &= \left(\frac{3}{2} |\Omega_e\tau_e|^{-1}\right) n_e, \\ \kappa_{\perp} &= \left(\frac{13}{4} |\Omega_e\tau_e|^{-2}\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, & \kappa_{\wedge} &= \left(\frac{5}{2} |\Omega_e\tau_e|^{-1}\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}. \end{aligned}$$

Задача 18.13. Переайдём к вычислению второго слагаемого в формуле (18.12.1) из задачи 18.12 для поправки к функции распределения электронов. Она нужна для вычисления тензора вязких напряжений

$$\pi_{\alpha\beta} = \int m_e \left(w_{\alpha} w_{\beta} - \frac{1}{3} w^2 \delta_{\alpha\beta} \right) f_e d^3 w. \quad (18.13.1)$$

С помощью равенств (18.12.4) легко проверить, что изотропная часть функции распределения, f_m , как и первое слагаемое в (18.12.1), $A_{\mu} w_{\mu}/w$, даёт нулевой вклад в интеграл (18.13.1). Вычисляя второе слагаемое, $[w_{\mu} w_{\nu}/w^2 - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu}] B_{\mu\nu}$, полезно с самого начала учесть, что без ограничения общности тензор $B_{\mu\nu}$ можно считать симметричным, $B_{\mu\nu} = B_{\nu\mu}$, а его след равным нулю, $\delta_{\mu\nu} B_{\mu\nu} = 0$. Действительно, замена $B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\nu\mu}$ или $B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} - \frac{1}{3} B_{\gamma\gamma} \delta_{\mu\nu}$ не меняет δf , а $\delta_{\mu\nu} [B_{\mu\nu} - \frac{1}{3} B_{\gamma\gamma} \delta_{\mu\nu}] = B_{\mu\mu} - B_{\gamma\gamma} = 0$. Так как

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\frac{w_\alpha w_\beta}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \right] \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] \right\rangle = \\ & = \left\langle \frac{w_\alpha w_\beta}{w^2} \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] \right\rangle = \frac{1}{15} \left[\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} \right], \quad (18.13.2) \end{aligned}$$

имеем

$$\pi_{\alpha\beta} = \frac{2}{15} \int m_e w^2 B_{\alpha\beta} d^3w. \quad (18.13.3)$$

В плазме без магнитного поля тензор $B_{\mu\nu}$ пропорционален $W_{\mu\nu}$. Действительно, умножив уравнение (18.11.6) на $[w_\alpha w_\beta / w^2 - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}]$ и выполнив усреднение с помощью формулы (18.13.2), без труда находим, что

$$B_{\alpha\beta} = -\frac{m_e w^2}{6v_{ei} T_e} W_{\alpha\beta} f_m \quad (18.13.4)$$

при $\Omega_e = 0$. Следовательно,

$$\pi_{\alpha\beta} = -\eta W_{\alpha\beta}, \quad (18.13.5)$$

где

$$\eta = \frac{256}{45\pi} n_e T_e \tau_e. \quad (18.13.6)$$

При наличии магнитного поля задача усложняется, так как последнее слагаемое в правой части уравнения (18.11.6), содержащее оператор $[\mathbf{w} \times \Omega_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}$, «портит» структуру слагаемого $[w_\mu w_\nu / w^2 - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu}] B_{\mu\nu}$ в δf . Чтобы обойти это препятствие, разложим \mathbf{B} на сумму тензоров, которые данным оператором преобразуются по сравнительно простому правилу. Поскольку произвольный симметричный тензор второго ранга с нулевым следом в трёхмерном пространстве имеет 5 независимых элементов, его можно записать в виде суммы не более чем пяти других симметричных тензоров с нулевым рангом. Учитывая это, введём 5 проекций тензора \mathbf{W} на триаду ортогональных единичных векторов, таких что $\mathbf{a} = [\mathbf{b} \times \mathbf{h}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{h} \times \mathbf{a}]$, $\mathbf{h} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$, $|\mathbf{h}| = |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$. Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 &= \frac{1}{2}(\mathbf{aa} + \mathbf{bb})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{hh})(\mathbf{h} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{h}), \\ \mathbf{W}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{aa} - \mathbf{bb})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}), \\ \mathbf{W}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{ah} + \mathbf{ha})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{bh} + \mathbf{hb})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{b}), \\ \mathbf{W}_3 &= \frac{1}{2}(-\mathbf{aa} + \mathbf{bb})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{b}), \\ \mathbf{W}_4 &= \frac{1}{2}(-\mathbf{ah} - \mathbf{ha})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{bh} + \mathbf{hb})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Для справки приведём первую из этих формул в индексной записи:

$$W_{0\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_\alpha a_\beta + b_\alpha b_\beta)(a_\mu W_{\mu\nu} a_\nu + b_\mu W_{\mu\nu} b_\nu) + (h_\nu h_\nu)(h_\mu W_{\mu\nu} h_\nu).$$

В специальной системе координат, где $\mathbf{a} = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{b} = \{0, 1, 0\}$, $\mathbf{h} = \{0, 0, 1\}$, тензоры \mathbf{W}_p представлены формулами (18.31) на с. 64. Эти тензоры ортогональны друг другу в том смысле, что $\mathbf{W}_p : \mathbf{W}_q = 0$, т. е.

$$W_{p\alpha\beta} W_{q\alpha\beta} = 0, \quad (18.13.7)$$

если $p \neq q$. Для разложения тензора \mathbf{W} достаточно трёх первых тензоров \mathbf{W}_p , так как

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2,$$

но оператор $[\mathbf{w} \times \Omega_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}$ порождает остальные два тензора, так как

$$\begin{aligned} [\mathbf{w} \times \Omega_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{0\mu\nu} &= 0, \\ [\mathbf{w} \times \Omega_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{1\mu\nu} &= 2\Omega_e \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{3\mu\nu}, \\ [\mathbf{w} \times \Omega_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{2\mu\nu} &= \Omega_e \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{4\mu\nu}, \\ [\mathbf{w} \times \Omega_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{3\mu\nu} &= -2\Omega_e \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{1\mu\nu}, \\ [\mathbf{w} \times \Omega_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{4\mu\nu} &= -\Omega_e \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{2\mu\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что тензор \mathbf{B} можно искать в виде суммы пяти слагаемых:

$$\mathbf{B} = \gamma_0 \mathbf{W}_0 + \gamma_1 \mathbf{W}_1 + \gamma_2 \mathbf{W}_2 + \gamma_3 \mathbf{W}_3 + \gamma_4 \mathbf{W}_4. \quad (18.13.8)$$

Уравнения для коэффициентов γ_p получаем, умножив уравнение (18.11.6) на тензор $w_\alpha w_\beta / w^2 - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}$ и выполнив усреднение по направлениям вектора \mathbf{w} с помощью формул (18.13.2):

$$\begin{aligned} \frac{m_e w^2}{T_e} (\mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) f_m &= \\ = -3\nu_{ei}(\gamma_0 \mathbf{W}_0 + \gamma_1 \mathbf{W}_1 + \gamma_2 \mathbf{W}_2 + \gamma_3 \mathbf{W}_3 + \gamma_4 \mathbf{W}_4) - \\ - \Omega_e(2\gamma_1 \mathbf{W}_3 + \gamma_2 \mathbf{W}_4 - 2\gamma_3 \mathbf{W}_1 - \gamma_4 \mathbf{W}_2). \end{aligned}$$

Так как тензоры \mathbf{W}_q ортогональны друг другу, система уравнений для определения коэффициентов γ_p получается отсюда простым сравнением коэффициентов при одинаковых тензорах в правой и левой частях последнего уравнения. Действительно, умножая это уравнение последовательно на $W_{0\alpha\beta}$, $W_{1\alpha\beta}$ и т. д., с помощью свойства ортогональности (18.13.7) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 3\nu_{ei}\gamma_0 &= -\frac{m_e w^2}{2T_e} f_m, \\ 3\nu_{ei}\gamma_1 - 2\Omega_e\gamma_3 &= -\frac{m_e w^2}{2T_e} f_m, \end{aligned}$$

$$3\nu_{ei}\gamma_2 - \Omega_e\gamma_4 = -\frac{m_e w^2}{2T_e} f_m,$$

$$\begin{aligned} 3\nu_{ei}\gamma_3 + 2\Omega_e\gamma_1 &= 0, \\ 3\nu_{ei}\gamma_4 + \Omega_e\gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Из формул (18.13.3) и (18.13.8) следует, что тензор вязких напряжений в магнитном поле

$$\boldsymbol{\pi} = -\eta_0 \mathbf{W}_0 - \eta_1 \mathbf{W}_1 - \eta_2 \mathbf{W}_2 - \eta_3 \mathbf{W}_3 - \eta_4 \mathbf{W}_4 \quad (18.13.9)$$

зависит от пяти коэффициентов

$$\eta_p = -\frac{2}{15} \int m_e w^2 \gamma_p d^3w. \quad (18.13.10)$$

Вычисляя коэффициенты η_p , находим, что коэффициенты вязкости выражаются через ранее введённые функции $\mathbb{A}_{k,0}$:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{16}{135\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{9,0}(0) n_e T_e \tau_e, \\ \eta_1 &= \frac{16}{135\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{9,0} \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \Omega_e \tau_e \right) n_e T_e \tau_e, \\ \eta_2 &= \frac{16}{135\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{9,0} \left(\frac{4}{9\sqrt{\pi}} \Omega_e \tau_e \right) n_e T_e \tau_e, \\ \eta_3 &= \frac{128}{1215\pi} (-\Omega_e \tau_e) \mathbb{A}_{12,0} \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \Omega_e \tau_e \right) n_e T_e \tau_e, \\ \eta_4 &= \frac{64}{1215\pi} (-\Omega_e \tau_e) \mathbb{A}_{12,0} \left(\frac{4}{9\sqrt{\pi}} \Omega_e \tau_e \right) n_e T_e \tau_e. \end{aligned}$$

Коэффициент η_0 совпадает с коэффициентом вязкости η в плазме без магнитного поля, η_1 и η_2 стремятся к η в пределе $\Omega_e \tau_e \rightarrow 0$, а η_3 и η_4 обращаются в нуль в этом пределе. Полезно также заметить, что

$$\eta_1(\Omega_e) = \eta_2(2\Omega_e), \quad \eta_3(\Omega_e) = \eta_4(2\Omega_e),$$

поэтому достаточно исследовать зависимость от параметра $\Omega_e \tau_e$ только двух коэффициентов η_2 и η_4 . В пределе $\Omega_e \tau_e \rightarrow 0$ имеем простые формулы

$$\eta_2 = \left(\frac{256}{45\pi} \right) n_e T_e \tau_e, \quad \eta_4 = \left(\frac{154}{9\pi} |\Omega_e \tau_e| \right) n_e T_e \tau_e,$$

тогда как при $\Omega_e \tau_e \rightarrow \infty$

$$\eta_2 = \left(\frac{6}{5} |\Omega_e \tau_e|^{-2} \right) n_e T_e \tau_e, \quad \eta_4 = \left(|\Omega_e \tau_e|^{-1} \right) n_e T_e \tau_e.$$

Результаты численного расчёта коэффициентов вязкости для электронов в лоренцевой плазме суммированы в книге Р. Балеску [55], где предложены аппроксимационные формулы. Изложенное выше аналитическое решение получено в статье И. А. Котельникова [159].

Задача 18.14. Система кинетических коэффициентов С. И. Брагинского непоследовательна в том смысле, что в ней перемешаны гидродинамические потоки и термодинамические силы. Например, сила \mathbf{R} выражается через потоковую скорость \mathbf{u} и градиент температуры ∇T_e , который в термодинамике относят к силам. Как указал Р. Балеску [55], логичнее было бы выразить плотность электрического тока \mathbf{J} и поток тепла \mathbf{q} через термодинамические силы, такие как градиенты макроскопических величин и напряжённости полей. В его системе кинетических коэффициентов

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}^* - \boldsymbol{\beta}' \cdot \nabla T_e, \quad \mathbf{q}_e = T_e \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{x}'_e \cdot \nabla T_e,$$

где

$$\mathbf{E}^* \equiv \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}] - \frac{1}{e_e n_e} \nabla p_e,$$

тогда как в системе Брагинского

$$\mathbf{R} = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla T_e \quad \mathbf{q}_e = T_e \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{x}_e \cdot \nabla T_e.$$

Тензоры $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x}_e, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}', \mathbf{x}'_e$ имеют одинаковую структуру, например

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_\perp & -\alpha_\wedge & 0 \\ \alpha_\wedge & \alpha_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_\parallel \end{bmatrix}$$

в системе координат, где магнитное поле направлено вдоль оси z . В векторной записи

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{u} = \alpha_\parallel \mathbf{u}_\parallel + \alpha_\perp \mathbf{u}_\perp + \alpha_\wedge [\mathbf{h} \times \mathbf{u}],$$

причём

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}/B.$$

Не вдаваясь в дискуссию, какая система «логичнее», покажем, что коэффициенты Брагинского можно выразить через коэффициенты Балеску и наоборот. Для этого заметим, что

$$\mathbf{J} = e_e n_e \mathbf{u},$$

а поле \mathbf{E}^* можно выразить через силу \mathbf{R} с помощью уравнения движения электронов (16.326). Пренебрегая в этом уравнении инерцией электронов, то есть слагаемым $m_e n_e d\mathbf{u}_e/dt$ и вязким трением $\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e$, имеем соотношение

$$e_e n_e \mathbf{E}^* \approx -\mathbf{R} - \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] = \frac{1}{e_e n_e} \boldsymbol{\alpha}' \cdot \mathbf{J} + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla T_e, \quad (18.14.1)$$

где

$$\alpha' = \begin{bmatrix} \alpha_{\perp} & -\alpha_{\wedge} - m_e n_e \Omega_e & 0 \\ \alpha_{\wedge} + m_e n_e \Omega_e & \alpha_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\parallel} \end{bmatrix}.$$

Выражая отсюда \mathbf{J} и сравнивая результат с формулой Балеску $\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}^* - \boldsymbol{\beta}' \cdot \nabla T_e$, находим

$$\boldsymbol{\sigma} = e_e^2 n_e^2 \alpha'^{-1}, \quad \boldsymbol{\beta}' = e_e n_e \alpha'^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}.$$

Подставляя затем \mathbf{E}^* в формулу Балеску $\mathbf{q}_e = T_e \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{x}'_e \cdot \nabla T_e$ и сравнивая с аналогичной формулой Брагинского $\mathbf{q}_e = T_e \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{x}_e \cdot \nabla T_e$, получаем

$$\mathbf{x}'_e = \mathbf{x}_e + T_e \boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}'.$$

Матрицы α' и α различаются только в элементе $\alpha'_{\wedge} = \alpha_{\wedge} + m_e n_e \Omega_e$. Поскольку

$$\alpha' \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + m_e n_e \Omega_e [\mathbf{h} \times \mathbf{u}] = \alpha \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}],$$

величина $\mathbf{R}'_u = -\alpha' \cdot \mathbf{u}$ равна сумме силы трения $\mathbf{R}_u = -\alpha \cdot \mathbf{u}$ и силы Ампера $\frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}]$. Косая часть силы трения $\mathbf{R}_{u\wedge} = -\alpha_{\wedge} [\mathbf{h} \times \mathbf{u}]$ направлена параллельно силе Ампера. В плазме не существует эффективного способа раздельного измерения этих двух сил. Такая точка зрения родственна утверждению, что в диспергирующей среде определение как магнитного, так и электрического поля путём измерения силы, действующей на движущуюся заряженную частицу, в принципе невозможно по той причине, что невозможно отделить силу Лоренца от других сил, в частности от силы трения.² Вероятно, этим обстоятельством объясняется тот факт, что до настоящего времени не найден способ оценки коэффициента α_{\wedge} из качественных рассуждений, подобных изложенным в задаче 18.1. Величина α_{\wedge} по существу является вспомогательной — вторым членом разложения силы $\mathbf{R}'_{u\wedge}$ по величине \mathbf{B} . В частности, именно α'_{\wedge} , но не α_{\wedge} , входит в обобщённый закон Ома, который получается из уравнения (18.14.1), если его разрешить относительно плотности тока \mathbf{J} .

Задача 18.15. В лоренцевой плазме для кинетических коэффициентов Балеску получаются существенно более простые выражения, чем для коэффициентов Брагинского. Воспользовавшись решением задач 18.11–18.14, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp} &= \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{7,0} \right) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, & \sigma_{\wedge} &= \left(-\frac{32}{27\pi} \Omega_e \tau_e \mathbb{A}_{10,0} \right) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, \\ \beta'_{\perp} &= \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{7,1} \right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, & \beta'_{\wedge} &= \left(-\frac{32}{27\pi} \Omega_e \tau_e \mathbb{A}_{10,1} \right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, \end{aligned}$$

² Электрические и магнитное поля в среде можно измерить соответственно при помощи эффектов Штарка и Зеемана без измерения силы Лоренца.

$$\kappa'_{\perp} = \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{7,2} \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, \quad \kappa'_{\wedge} = \left(-\frac{32}{27\pi} \Omega_e \tau_e \mathbb{A}_{10,2} \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}. \quad (18.15.1)$$

В пределе $|\Omega_e \tau_e| \ll 1$

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp} &= \left(\frac{32}{3\pi} \right) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, & \sigma_{\wedge} &= \left(\frac{70}{\pi} |\Omega_e \tau_e| \right) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, \\ \beta'_{\perp} &= \left(\frac{16}{\pi} \right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, & \beta'_{\wedge} &= \left(\frac{210}{\pi} |\Omega_e \tau_e| \right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, \\ \kappa'_{\perp} &= \left(\frac{200}{3\pi} \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, & \kappa'_{\wedge} &= \left(\frac{1015}{\pi} |\Omega_e \tau_e| \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}. \end{aligned}$$

При $|\Omega_e \tau_e| \gg 1$

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp} &= (|\Omega_e \tau_e|^{-2}) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, & \sigma_{\wedge} &= (|\Omega_e \tau_e|^{-1}) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, \\ \beta'_{\perp} &= \left(-\frac{3}{2} |\Omega_e \tau_e|^{-2} \right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, & \beta'_{\wedge} &= \left(\frac{5\pi^{4/3}}{2^{4/3} 3^{1/3}} |\Omega_e \tau_e|^{-8/3} \right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, \\ \kappa'_{\perp} &= \left(\frac{13}{4} |\Omega_e \tau_e|^{-2} \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, & \kappa'_{\wedge} &= \left(\frac{5}{2} |\Omega_e \tau_e|^{-1} \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}. \end{aligned}$$

Простота выражений для кинетических коэффициентов Балеску наводит на мысль, что должен существовать столь же простой способ их вывода. Действительно, если в уравнениях (18.12.7) и (18.12.10) из задачи 18.12 произвести замену $\mathbf{R} = -e_e n_e \mathbf{E}^* + m_e n_e \Omega_e [\mathbf{h} \times \mathbf{u}]$, то слагаемые с $[\mathbf{h} \times \mathbf{u}]$ взаимно сократятся и с учётом тождеств (18.12.11) из той же задачи сразу получаются формулы (18.15.1).

Задача 18.16. Линеаризуем кинетическое уравнение (13.12), считая, что электрическое поле в плазме отсутствует, а функция распределения не зависит от времени. Опуская для краткости индексы, обозначающие сорт частиц, пишем

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_m + \Omega [\mathbf{v} \times \mathbf{h}] \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (18.16.1)$$

Здесь $\Omega = eB/mc$ обозначает циклотронную частоту, а $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ – единичный вектор в направлении магнитного поля. Предположим также, что параметры плазмы меняются только в направлении, перпендикулярном \mathbf{h} . Тогда решением этого уравнения является

$$\delta f = \frac{1}{\Omega} (\mathbf{v} \cdot [\mathbf{h} \times \nabla f_m]), \quad (18.16.2)$$

в чём легко убедиться прямой подстановкой. Заранее очевидно, что с его помощью можно вычислить только бездиссипативные кинетические коэффициенты, так как в отсутствие столкновений диссипация энергии отсутствует.

Для примера вычислим плотность электрического тока. Она определяется интегралом

$$\mathbf{J} = e \int \mathbf{v} \delta f \, d^3v.$$

Подставив сюда δf , пишем

$$\mathbf{J} = \frac{e}{\Omega} \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot [\mathbf{h} \times \nabla f_m]) \, d^3v.$$

То же выражение в покомпонентной записи

$$J_\alpha = \frac{mc}{B} \int v_\alpha \left(v_\beta \left[\epsilon_{\beta\mu\nu} h_\mu \frac{\partial f_m}{\partial x_\nu} \right] \right) d^3v$$

позволяет легко вычислить интеграл. Поскольку

$$\begin{aligned} \int v_\alpha v_\beta \epsilon_{\beta\mu\nu} h_\mu \frac{\partial f_m}{\partial x_\nu} d^3v &= \epsilon_{\beta\mu\nu} h_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \int v_\alpha v_\beta f_m d^3v = \\ &= \epsilon_{\beta\mu\nu} h_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \int \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} v^2 f_m d^3v = \epsilon_{\alpha\mu\nu} h_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{nT}{m}, \end{aligned}$$

заключаем, что

$$\mathbf{J} = \frac{c}{B} [\mathbf{h} \times \nabla p],$$

где $p = nT$ — парциальное давление компоненты плазмы (суммирование компонент даёт полное давление плазмы). Вычисленный ток перпендикулярен как магнитному полю, так и градиенту давления. По аналогии с «косым» потоком тепла его можно было бы назвать «косым» током, но у него есть общепринятое название — диамагнитный ток.

Чтобы найти бездиссипативные (или бесстолкновительные) коэффициенты вязкости, можно воспользоваться решением задачи 18.13, в которой вычислены коэффициенты вязкости для электронов в лоренцевой плазме. Переходя в этом решении к пределу $\tau_e \rightarrow \infty$, найдём тензор вязких напряжений $\boldsymbol{\pi}$, который не зависит от конкретного вида интеграла столкновений и одинаково пригоден как для электронов, так и для ионов. Искомый тензор $\boldsymbol{\pi}$ выражается через сумму тензоров \mathbf{W}_3 с коэффициентом $\eta_3 = -nT/2\Omega$ и \mathbf{W}_4 с коэффициентом $\eta_4 = -nT/\Omega$. В системе координат, где магнитное поле направлено по оси z ,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= -\eta_3 \mathbf{W}_3 - \eta_4 \mathbf{W}_3 = \\ &= \frac{nT}{4\Omega} \begin{pmatrix} -W_{xy} - W_{yx} & W_{xx} - W_{yy} & -2W_{yz} - 2W_{zy} \\ W_{xx} - W_{yy} & W_{xy} + W_{yx} & 2W_{xz} + 2W_{zx} \\ -2W_{yz} - 2W_{zy} & 2W_{xz} + 2W_{zx} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{nT}{2\Omega} \begin{pmatrix} -\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} & -2\frac{\partial u_z}{\partial z} - 2\frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} & 2\frac{\partial u_x}{\partial z} + 2\frac{\partial u_z}{\partial x} \\ -2\frac{\partial u_y}{\partial z} - 2\frac{\partial u_z}{\partial y} & 2\frac{\partial u_x}{\partial z} + 2\frac{\partial u_z}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Лекция 19

Задача 19.1. Введём массовую плотность

$$\rho = m_e n_e + m_i n_i \simeq m_i n_i$$

и потоковую скорость

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\rho} (m_e n_e \mathbf{u}_e + m_i n_i \mathbf{u}_i) \simeq \mathbf{u}_i.$$

Тогда уравнение непрерывности (16.32а) для ионов предстаёт в виде закона сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0.$$

Далее сложим уравнения движения (16.32б) для электронов и ионов, учтём, что $\mathbf{R}_{ei} = -\mathbf{R}_{ie}$ и $e_e n_e + e_i n_i = 0$, пренебрежём в суммарном уравнении инерцией и вязким трением электронов. В результате получим

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_i,$$

где $\mathbf{J} = e_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$ — плотность тока, $p = n_e T_e + n_i T_i$ — давление. При вычислении $\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_i$ вместо \mathbf{u}_i подставляют \mathbf{V} , а такой же член $\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e$ для электронов опускают, так как он обычно мал. Последнее уравнение в системе получим, сложив уравнения

$$n_e T_e \frac{d}{dt} \ln \frac{T_e^{3/2}}{n_e} = Q_{ei}, \quad n_i T_i \frac{d}{dt} \ln \frac{T_i^{3/2}}{n_i} = Q_{ie},$$

следующие из (16.32в), если пренебречь диссипацией энергии вследствие вязкости и теплопроводности; при необходимости ту и другую нетрудно учесть так же, как это сделано в уравнении движения. Пренебрегая также термосилой и учитывая, что согласно (16.31) и (18.10) имеет место равенство

$$Q_{ei} + Q_{ie} = -\mathbf{R} \cdot (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) = \frac{\alpha_{\parallel} J_{\parallel}^2}{e_e^2 n_e^2} + \frac{\alpha_{\perp} J_{\perp}^2}{e_e^2 n_e^2},$$

после несложных преобразований получаем искомое уравнение

$$p \frac{d}{dt} \ln \frac{p^{3/2}}{\rho^{5/2}} = \frac{\alpha_{\parallel} J_{\parallel}^2}{e_e^2 n_e^2} + \frac{\alpha_{\perp} J_{\perp}^2}{e_e^2 n_e^2}.$$

Его правая часть описывает джоулев нагрев. Для быстрых движений, когда скорость относительного движения $\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$ электронной и ионной компонент значительно меньше \mathbf{V} , джоулевым нагревом пренебрегают и используют уравнение

$$\frac{p}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \ln \frac{p}{\rho^{\gamma}} = 0$$

с показателем адиабаты $\gamma = \frac{5}{3}$.

Задача 19.2. Оценим электрическую силу $\rho_q \mathbf{E}$, опущенную в уравнении (19.2). Полагая, что $\mathbf{E} \sim VB/c$, $\rho_q \sim E/4\pi L$, где L – линейный масштаб изменения электрического поля, находим, что эта сила порядка $V^2 B^2 / 4\pi L c^2$. По сравнению со слагаемым $\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \sim \rho V^2 / L$, которое оставлено в этом уравнении в составе производной $\rho(d\mathbf{V}/dt)$, это слагаемое примерно в c_A^2/c^2 раз меньше, где $c_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ – альфвеновская скорость. Сравнивая электрическую силу с силой Ампера $(1/4\pi)[\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}] \sim B^2/4\pi L$, находим, что она заметно меньше, если $V \ll c$. Таким образом заключаем, что уравнения магнитной гидродинамики можно использовать для описания сравнительно медленных движений плазмы, таких что $V \ll c$ и $c_A \ll c$.

Задача 19.3. Квазинейтральность плазмы не значит, что в плазме отсутствует объёмный заряд ρ_q , предполагается лишь, что этот заряд очень мал по сравнению с величиной $e_i n_i \approx -e_e n_e$, так что разностью $Zn_i - n_e$ можно пренебречь по сравнению с n_e .

Приведём некоторые оценки. По порядку величины из уравнения (19.9) получаем $\rho_q \sim E/4\pi L$, где L – линейный масштаб изменения электрического поля. В статической, или медленно движущейся плазме, или в плазме без магнитного поля обычно $e_e n_e \mathbf{E} \sim \nabla p$, то есть $\mathbf{E} \sim T/eL$, откуда получается $\rho_q/e_e n_e \sim \lambda_D^2/L^2$, где $\lambda_D = (T/4\pi e^2 n_e)^{1/2}$ – дебаевская длина, которая мала по сравнению с характерными размерами плазмы (иначе ионизованный газ не называют плазмой).

В плазме, движущейся поперёк магнитного поля, может возникать также вихревое поле $\mathbf{E} \sim VB/c$. Пусть скорость плазмы определяется балансом её инерции и силы Ампера. Тогда $\omega \rho V \sim JB/c$, где ω – характерная частота процесса. Плотность электрического заряда будет в этом случае порядка $\rho_q \sim E/4\pi L \sim (c_A^2/c^2)J/\omega L$, где $c_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ – альфвеновская скорость. При этом относительная величина первого слагаемого в уравнении сохранения заряда (19.6) порядка $\omega \rho_q/(J/L) \sim c_A^2/c^2$, так что можно пользоваться уравнением $\text{div } \mathbf{J} = 0$, если $c_A \ll c$. Это условие считается выполненным в рамках магнитной гидродинамики. Например, при $n_i = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $m_i = 1.6 \times 10^{-24} \text{ г}$, $B = 10^4 \text{ Гс}$ получаем $c_A/c \sim 10^{-2}$.

Задача 19.5. Чтобы получить максимально простое представление магнитного поля, удовлетворяющего условию $\text{div } \mathbf{B} = 0$, выберем направление произвольной, вообще говоря, криволинейной координаты α^2 вдоль направления векторного потенциала \mathbf{A} и представим вектор \mathbf{A} в виде произведения некой скалярной функции α^1 на контравариантный базисный вектор $\nabla \alpha^2$, ассоциированный с этой координатой:

$$\mathbf{A} = \alpha^1 \nabla \alpha^2.$$

Поскольку ротор градиента тождественно равен нулю, магнитное поле $\mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}] = [\nabla \times (\alpha^1 \nabla \alpha^2)]$ можно записать в виде

$$\mathbf{B} = [\nabla \alpha^1 \times \nabla \alpha^2]. \quad (19.5.1)$$

Поскольку $\nabla \cdot [\nabla \times (\dots)] = 0$, очевидно, что дивергенция такого поля равна нулю для любого выбора скалярных функций α^1 и α^2 . Эти функции называют потенциалами (или координатами) Клебша (Alfred Clebsch).

Представление (19.5.1) заведомо справедливо локально для любого векторного потенциала \mathbf{A} , но может не иметь места во всём пространстве для магнитного поля произвольной топологии. Действительно, пусть представление (19.5.1) справедливо в окрестности некоторой точки с радиус-вектором \mathbf{x}_0 . Тогда, поскольку $(\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha^1) = (\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha^2) = 0$, силовая линия магнитного поля, проходящая через точку \mathbf{x}_0 , лежит на поверхностях $\alpha^1 = \text{const} = \alpha^1(\mathbf{x}_0)$, $\alpha^2 = \text{const} = \alpha^2(\mathbf{x}_0)$, т. е. служит пересечением этих поверхностей. Такое пересечение может быть либо замкнутой линией, либо линией, концы которой лежат на бесконечности.

Рассмотрим два примера. Выбирая в качестве одного набора поверхностей, скажем $\alpha^1 = \text{const}$, поверхности кругового цилиндра, а в качестве $\alpha^2 = \text{const}$ – набор плоскостей, ортогональных оси цилиндра, на их пересечении получаем систему круговых силовых линий, формируемых прямым током, текущим вдоль оси цилиндра. Во втором примере пересечение тороидальных поверхностей с секущими плоскостями, проходящими через ось тора, порождает силовые линии кругового тока.

Для описания магнитных полей с более сложной топологией представление (19.5.1) может быть неприменимо. Например, оно непригодно для описания магнитных полей, силовые линии которых бесконечны и плотно покрывают некие поверхности (например, поверхность тора) или эргодически заполняют объём. Общность представления (19.5.1) может быть расширена, если считать α^1 и α^2 многозначными функциями, однако в таком случае наглядность представления (19.5.1) теряется.

Тем не менее возможно простое математическое обобщение представления (19.5.1) для поля с любой топологией. Введём триаду криволинейных координат $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$, а также связанный с ней базис, образованный единичными векторами

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{[\nabla \alpha^2 \times \nabla \alpha^3]}{J}, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{[\nabla \alpha^3 \times \nabla \alpha^1]}{J}, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{[\nabla \alpha^1 \times \nabla \alpha^2]}{J},$$

где $J = (\nabla \alpha^1 \cdot [\nabla \alpha^2 \times \nabla \alpha^3])$ – якобиан преобразования к декартовым координатам. Данная триада невырождена при $J \neq 0$. Разложив вектор \mathbf{B} по этому базису в виде

$$\mathbf{B} = A^1 [\nabla \alpha^2 \times \nabla \alpha^3] + A^2 [\nabla \alpha^3 \times \nabla \alpha^1] + A^3 [\nabla \alpha^1 \times \nabla \alpha^2], \quad (19.5.2)$$

получим, что коэффициенты A^j как функции $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ обеспечивают выполнение уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial A^1}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial A^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial A^3}{\partial \alpha^3} = 0. \quad (19.5.3)$$

Коэффициенты A^j и соответствующие им компоненты магнитного поля заданы в пространстве однозначно. Представление (19.5.2) позволяет наглядно иллюстрировать возможные различия в топологии магнитного поля.

Задача 19.6. Подставив $\mathbf{B} = [\nabla \alpha^1 \times \nabla \alpha^2]$ в уравнение (19.27), получим

$$\nabla \frac{\partial \alpha^1}{\partial t} \times \nabla \alpha^2 + \nabla \alpha^1 \times \frac{\partial}{\partial t} \nabla \alpha^2 = \nabla \times [\mathbf{V} \times [\nabla \alpha^1 \times \nabla \alpha^2]].$$

Так как ротор градиента равен нулю, например $\nabla \times \nabla \alpha^1 = 0$, отсюда имеем

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\frac{\partial \alpha^1}{\partial t} \nabla \alpha^2 - \frac{\partial \alpha^2}{\partial t} \nabla \alpha^1 - (\mathbf{V} \cdot \nabla \alpha^2) \nabla \alpha^1 + (\mathbf{V} \cdot \nabla \alpha^1) \nabla \alpha^2 \right] &= \\ &= \nabla \times \left[\frac{d \alpha^1}{dt} \nabla \alpha^2 - \frac{d \alpha^2}{dt} \nabla \alpha^1 \right] = 0, \end{aligned}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)$. Таким образом,

$$\frac{d \alpha^1}{dt} \nabla \alpha^2 - \frac{d \alpha^2}{dt} \nabla \alpha^1 = \nabla \psi,$$

где ψ — произвольная функция координат и времени. Ввиду произвольности выбора ψ не существует однозначного описания движения силовых линий магнитного поля. В любой момент времени силовая линия определена однозначно, однако движение силовых линий во времени — это в известной степени дело интерпретации.

Если выбрать значение $\psi = 0$, то можно считать, что

$$\frac{d \alpha^1}{dt} = 0, \quad \frac{d \alpha^2}{dt} = 0.$$

При таком конкретном выборе ψ скалярные поля $\alpha^1(\mathbf{x}, t)$ и $\alpha^2(\mathbf{x}, t)$ движутся вместе с жидкостью. Отсюда следует, что линии, на которых α^1 и α^2 постоянны, а следовательно, и магнитные силовые линии должны двигаться вместе с жидкостью. Таким образом, силовые линии не могут разрываться или изменять топологию до тех пор, пока движение жидкости непрерывно в том смысле, что соседние элементы жидкости всегда остаются соседними. Так как эта топологическая инвариантность относится к силовым линиям магнитного поля, которые однозначны вне зависимости от выбора α^1 и α^2 , это заключение справедливо для любого выбора ψ .

Физическая интерпретация неоднозначности движения силовых линий также связана с тем, что в любой момент времени силовые линии магнитного поля можно провести однозначно. Однако нельзя однозначно привести в соответствие силовые линии в данный момент с силовыми линиями в любой другой момент времени. Можно выбрать какой-либо способ идентификации и на его основе сделать выводы о движении силовых линий, но можно с тем же успехом сделать это и для всех других способов идентификации.

Задача 19.7. В цилиндрической системе координат $\{r, \theta, z\}$ с осью z вдоль оси симметрии системы для описания магнитного поля $\mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}]$ достаточно только азимутальной компоненты векторного потенциала $\mathbf{A} = \{0, A_\theta(r, z), 0\}$. Простым дифференцированием легко проверить, что то же магнитное поле можно записать в виде векторного произведения

$$\mathbf{B} = [\nabla \Phi \times \nabla \theta] = \left\{ -\frac{\partial A_\theta}{\partial z}, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) \right\}$$

градиентов функции $\Phi(r, z) = r A_\theta(r, z)$ и азимутальной координаты θ . Следовательно, функции $\Phi(r, z)$ и θ можно рассматривать в качестве потенциалов Клебша. Функция

$$\Phi(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r B_z(r', z) 2\pi r dr$$

с точностью до множителя $1/2\pi$ имеет смысл магнитного потока через круг радиуса r в сечении $z = \text{const}$.

Выбор потенциалов Клебша неоднозначен. Например очевидно, что векторное произведение $[\nabla \Phi \times \nabla \theta]$ не изменится, если к $\Phi(r, z)$ прибавить произвольную функцию угла θ .

Задача 19.8. Используем обозначения из задачи 19.5. Пусть $A^1 = 0, A^2 \neq 0, A^3 \neq 0$ и магнитное поле записано в виде

$$\mathbf{B} = A^2 [\nabla \alpha^3 \times \nabla \alpha^1] + A^3 [\nabla \alpha^1 \times \nabla \alpha^2]. \quad (19.8.1)$$

Умножая (19.8.1) скалярно на $\nabla \alpha^1$, имеем

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha^1) = 0,$$

т. е. силовая линия лежит на поверхности $\alpha^1 = \text{const}$. Соотнести же эту силовую линию с поверхностями $\alpha^2 = \text{const}$ и $\alpha^3 = \text{const}$ никак не удается.

Магнитные конфигурации с силовыми линиями, которые целиком лежат на замкнутых поверхностях (их называют магнитными поверхностями) и покрывают их поверхность, действительно могут быть реализованы на практике. Они образуют систему вложенных магнитных поверхностей. На заре термоядерных исследований было доказано, что магнитные поля с топологией

торов, вложенных друг в друга, могут быть созданы токами определённой симметрии: аксиальной или винтовой. Например, можно совместить поля кругового тока и прямого тока. Прямой ток на оси такой системы создаст тороидальное магнитное поле, а круговой ток — полоидальное. В результате их суперпозиции кольцевые силовые линии кругового тока «размываются» в спирали, лежащие на тороидальных магнитных поверхностях, заполняя их иррациональным образом либо образуя замкнутые силовые линии.

Магнитное поле в токамаках представляют в виде

$$\mathbf{B} = [\nabla\Psi \times \nabla\phi] - q(\Psi)[\nabla\Psi \times \nabla\theta],$$

где Ψ — произвольная функция координат, выступающая как метка магнитной поверхности, ϕ — тороидальный угол, θ — полоидальный угол, а функцию $q(\Psi)$ называют коэффициентом запаса устойчивости; обозначения поясняет рисунок 23.1 на с. 127.

Задача 19.9. Поскольку течение жидкости не является непрерывным в том смысле, что первоначально близкие элементы жидкости перестают быть близкими, магнитное поле может изменить топологию.

Задача 19.10. При движении ионизованного газа сквозь магнитное поле Земли в ионосфере возникает электрическое поле.

Лекция 20

Задача 20.3. Скорость ведущего центра иона состоит из скорости электрического, градиентного, центробежного и поляризационного дрейфов:

$$\mathbf{v}_{\text{dri}} = c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2} + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega_i} \frac{[\mathbf{B} \times \nabla B]}{B^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega_i} \frac{[\mathbf{B} \times \boldsymbol{\kappa}]}{B} + \frac{c\mathbf{h}}{\Omega_i} \times \frac{d}{dt} \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2}.$$

Вкладом поляризационного дрейфа в скорость электронов можно пренебречь:

$$\mathbf{v}_{\text{dre}} = c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2} + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega_e} \frac{[\mathbf{B} \times \nabla B]}{B^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega_e} \frac{[\mathbf{B} \times \boldsymbol{\kappa}]}{B}.$$

В типичной ситуации, когда $m_i v_i^2 \sim T_i$, $m_e v_e^2 \sim T_e$, скорость электрического дрейфа $\mathbf{v}_E = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]/B^2$ больше всех других дрейфовых скоростей. В теории МГД именно она отождествляется с поперечной компонентой $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{v}_E$ потоковой скорости \mathbf{V} элемента плазмы.

Вследствие квазинейтральности при вычислении плотности электрического тока в плазме вклад электрического дрейфа ионов и электронов взаимно сокращается. Чтобы найти этот ток, нужно усреднить скорости других дрейфов по функции распределения частиц:

$$\mathbf{J}_{\text{dr}} = \int (e_i \mathbf{v}_{\text{dri}} f_i + e_e \mathbf{v}_{\text{dre}} f_e) d^3v.$$

В результате получаем

$$\mathbf{J}_{\text{dr}} = \frac{cp_{\perp}}{B} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{cp_{\parallel}}{B} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] + \frac{c\rho}{B} \left[\mathbf{h} \times \frac{dV_{\perp}}{dt} \right],$$

где

$$p_{\perp} = \int \left(\frac{1}{2} m_i v_{\perp}^2 f_i + \frac{1}{2} m_e v_{\perp}^2 f_e \right) d^3v, \quad p_{\parallel} = \int (m_i v_{\parallel}^2 f_i + m_e v_{\parallel}^2 f_e) d^3v.$$

К этому нужно прибавить ток намагничивания (диамагнитный ток)

$$\mathbf{J}_{\mu} = c \operatorname{rot} \left(-\frac{m_i v_{\perp}^2}{2B} f_i - \frac{m_e v_{\perp}^2}{2B} f_e \right) \mathbf{h} d^3v = -c \operatorname{rot} \left(\frac{p_{\perp}}{B} \mathbf{h} \right).$$

Далее учтём, что $\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}$, и добавим к сумме градиентного и центробежного токов

$$\frac{cp_{\perp}}{B} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{cp_{\parallel}}{B} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}]$$

слагаемое

$$\frac{cp_{\perp}}{B} \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}),$$

направленное вдоль магнитного поля. Как станет ясно позднее, оно сократит такое же слагаемое в диамагнитном токе и результирующий вектор будет перпендикулярен магнитному полю. Перегруппировав слагаемые, запишем сумму

$$\frac{cp_{\perp}}{B} \left[\mathbf{h} \times \left(\frac{\nabla B}{B} + (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \right) \right] + \frac{cp_{\perp}}{B} \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}) - \frac{c(p_{\perp} - p_{\parallel})}{B} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

Используя сначала векторное тождество

$$[\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] + \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}) = \operatorname{rot} \mathbf{h},$$

а затем

$$\left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \operatorname{rot} \mathbf{h} = B \operatorname{rot} \frac{\mathbf{h}}{B},$$

свернём слагаемые, пропорциональные cp_{\perp}/B :

$$cp_{\perp} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{h}}{B} - \frac{c(p_{\perp} - p_{\parallel})}{B} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

Затем прибавим диамагнитный ток

$$-c \operatorname{rot} \frac{p_{\perp} \mathbf{h}}{B} = -cp_{\perp} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{h}}{B} + \frac{c}{B} [\mathbf{h} \times \nabla p_{\perp}].$$

При этом часть слагаемых вновь сократится. Так как $(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = \boldsymbol{\kappa}$, в окончательном виде

$$\mathbf{J}_{\perp} = \frac{c}{B} [\mathbf{h} \times \nabla p_{\perp}] - \frac{c}{B} (p_{\perp} - p_{\parallel}) [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] + \frac{c\rho}{B} \left[\mathbf{h} \times \frac{dV_{\perp}}{dt} \right].$$

Умножив это выражение векторно на \mathbf{B}/c , получим компоненту уравнения (20.13), перпендикулярную магнитному полю.

Задача 20.4. $\frac{d}{dt} \int_U f(\mathbf{x}, t) d^3x = \int_U (\partial f / \partial t) d^3x + \oint_S f \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}.$

Задача 20.5. $\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\partial \mathbf{f} / \partial t) \cdot d\mathbf{S} + \oint_l [\mathbf{f} \times \mathbf{V}] \cdot d\mathbf{l}.$

Задача 20.6. Запишем уравнения (19.20a) и (19.20б) в координатном представлении, выразив $[\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}] = -[\mathbf{B} \times [\nabla \times \mathbf{B}]]$ через абсолютно антисимметричный тензор Леви-Чивиты ϵ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x_\beta} \rho V_\beta, \\ \rho \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} &= -\rho V_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} V_\alpha - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{4\pi} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\beta \epsilon_{\gamma\mu\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu}. \end{aligned}$$

Умножив первое уравнение на V_α и сложив со вторым уравнением, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\beta} \rho V_\alpha V_\beta - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{4\pi} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\mu\nu} B_\beta \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu},$$

Далее заметим, что

$$-\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_\beta} p \delta_{\alpha\beta},$$

и с помощью тождества

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\mu\nu} = \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}$$

и уравнения $\text{div } \mathbf{B} = \partial B_\beta / \partial x_\beta = 0$ преобразуем последнее слагаемое в правой части к виду

$$-\frac{1}{4\pi} \left(B_\beta \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - B_\beta \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{1}{2} B^2 \delta_{\alpha\beta} - B_\alpha B_\beta \right).$$

В результате получим искомое уравнение движения плазмы в консервативной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\rho V_\alpha V_\beta + \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{B_\alpha B_\beta}{4\pi} \right).$$

В его правой части стоит дивергенция суммы тензора потока импульса $P_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta + p \delta_{\alpha\beta}$ и тензора напряжений магнитного поля $T_{\alpha\beta} = (B^2/8\pi) \delta_{\alpha\beta} - B_\alpha B_\beta / 4\pi$.

Задача 20.7. Чтобы составить баланс энергии в рамках идеальной одножидкостной магнитной гидродинамики, запишем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{V})$$

и уравнение движения

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \nabla p + \frac{[\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}]}{4\pi}.$$

Умножив первое уравнение на $\frac{1}{2}V^2$, а второе — на \mathbf{V} и выполнив почленное сложение, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \left(\frac{\rho V^2}{2} \mathbf{V} \right) - \mathbf{V} \cdot \nabla p + \frac{\mathbf{V} \cdot [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}]}{4\pi}.$$

Добавив сюда уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (20.7.1)$$

умноженное на $\mathbf{B}/4\pi$, с помощью векторного тождества

$$\mathbf{V} \cdot [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] + \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = -\operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = -\operatorname{div}[\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]]$$

объединяя слагаемые с \mathbf{B} справа в одно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = -\operatorname{div} \left(\frac{\rho V^2}{2} \mathbf{V} + \frac{[\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]]}{4\pi} \right) - \mathbf{V} \cdot \nabla p. \quad (20.7.2)$$

Наконец, используем уравнение политропы

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = 0, \quad (20.7.3)$$

предварительно переписанное в виде

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\gamma-1} \mathbf{V} \cdot \nabla p + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \mathbf{V} \cdot \nabla \rho.$$

Исключив отсюда производную $\partial \rho / \partial t$ с помощью уравнения непрерывности, получим уравнение

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} p \operatorname{div} \mathbf{V} - \frac{1}{\gamma-1} \mathbf{V} \cdot \nabla p.$$

Добавив его к предыдущей сумме, свернём члены с p справа в одно слагаемое. В окончательном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = -\operatorname{div} \left(\frac{\rho V^2}{2} \mathbf{V} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \mathbf{V} + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]] \right). \quad (20.7.4)$$

Выражение в левой стороне можно интерпретировать как производную по времени плотности энергии плазмы. Она состоит из кинетической энергии $\rho V^2/2$, внутренней энергии плазмы $p/(\gamma - 1)$ и энергии магнитного поля $B^2/8\pi$. Соответственно, правая часть уравнения содержит поток энергии, который также состоит из трёх частей.

Как видно из приведённого вывода, в рамках идеальной МГД уравнение баланса энергии эквивалентно уравнению политропы (20.7.3). Если же учесть конечную проводимость плазмы, возможен её омический нагрев, т. е. обмен энергией между плазмой и магнитным полем. Как следует из решения задачи 19.1, в этом случае вместо (20.7.3) следует взять уравнение

$$\frac{p}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{J^2}{\sigma},$$

а также уточнить уравнение (20.7.1), добавив слагаемое, зависящее от σ :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] - \operatorname{rot} \frac{c\mathbf{J}}{\sigma}. \quad (20.7.5)$$

Повторив преобразования, приведшие к уравнению (20.7.4), нетрудно видеть, что к его правой части добавится слагаемое

$$\frac{J^2}{\sigma} - \frac{\mathbf{B}}{4\pi} \cdot \operatorname{rot} \frac{c\mathbf{J}}{\sigma} = \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{B}}{4\pi} \times \frac{c\mathbf{J}}{\sigma} \right].$$

Так как

$$-\frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})] + \left[\frac{\mathbf{B}}{4\pi} \times \frac{c\mathbf{J}}{\sigma} \right] = -\frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}],$$

в сумме с последним слагаемым в правой части уравнения (20.7.4) оно сворачивается в дивергенцию вектора Пойнтинга. В окончательном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = -\operatorname{div} \left(\frac{\rho V^2}{2} \mathbf{V} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \mathbf{V} + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \right) \quad (20.7.6)$$

уравнение баланса энергии пригодно как в идеальной магнитной гидродинамике, так и при учёте конечной проводимости плазмы. Таким образом, оно имеет более широкую область применимости, нежели уравнение политропы (20.7.3).

Задача 20.8. Запишем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = \nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$$

в координатном представлении, выразив векторные произведения через абсолютно антисимметричный тензор Леви-Чивиты ϵ :

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} [\epsilon_{\gamma\mu\nu} V_\mu B_\nu].$$

Поскольку

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\gamma\mu\nu} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu},$$

суммирование по индексам μ и ν сводится к их замене индексами α или β . В результате получаем

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} [V_\alpha B_\beta - V_\beta B_\alpha].$$

В векторной форме это уравнение записывают следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{V}).$$

Чтобы вычислить производную абсолютной величины магнитного поля

$$\frac{dB}{dt} = \mathbf{h} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{h} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right),$$

вернёмся к координатной записи уравнений. Так как $\partial B_\beta / \partial x_\beta = 0$ для любого магнитного поля,

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= h_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} [V_\alpha B_\beta - V_\beta B_\alpha] + V_\beta \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta} \right) = \\ &= h_\alpha \left(B_\beta \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} - B_\alpha \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\beta} \right) = B \left(h_\alpha h_\beta \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\beta} \right). \end{aligned}$$

В векторном представлении полученное выражение записывается при помощи двоеточия «::» — оператора свёртки по двум индексам:

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = (\mathbf{h}\mathbf{h} : \nabla \mathbf{V}) - (\nabla \cdot \mathbf{V}). \quad (20.8.1)$$

Задача 20.9. Воспользовавшись уравнением непрерывности (19.20a), чтобы исключить производную $d\rho/dt$ из уравнения (19.20b), приводим это уравнение к консервативной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^{\gamma-1}} = - \operatorname{div} \left(\frac{p}{\rho^{\gamma-1}} \mathbf{V} \right).$$

Аналогичным образом можно преобразовать к консервативной форме уравнения (20.14) и (20.15) адиабат Чу—Голдбергера—Лоу:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p_\perp}{B} = - \operatorname{div} \left(\frac{p_\perp}{B} \mathbf{V} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{p_\parallel B^2}{\rho^2} = - \operatorname{div} \left(\frac{p_\parallel B^2}{\rho^2} \mathbf{V} \right).$$

Задача 20.10. Повторив вывод уравнения (20.7.2) из задачи 20.7, заметим, что при переходе к случаю плазмы с анизотропным давлением в этом уравнении достаточно заменить градиент давления ∇p на дивергенцию тензора давления $\nabla \cdot \mathbf{P}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{\rho V^2}{2} \mathbf{V} + \frac{[\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]]}{4\pi} \right) - \mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}). \quad (20.10.1)$$

В плазме с анизотропным давлением

$$\mathbf{P} = p_{\perp} \mathbf{I} - (p_{\perp} - p_{\parallel}) \mathbf{h} \mathbf{h}, \quad (20.10.2)$$

а уравнение политропы $d(p/\rho^{\gamma})/dt = 0$ заменяют адиабаты Чу—Голдбергера—Лоу

$$\frac{d}{dt} \frac{p_{\perp}}{\rho B} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} = 0.$$

Умножив первое из этих уравнений на ρB , а второе — на $\rho^3/2B^2$ и сложив их, получим соотношение

$$\frac{d}{dt} \left(p_{\perp} + \frac{p_{\parallel}}{2} \right) - \left(p_{\perp} + \frac{3}{2} p_{\parallel} \right) \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - (p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = 0. \quad (20.10.3)$$

Производную плотности можно выразить через дивергенцию скорости при помощи уравнения непрерывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{V}). \quad (20.10.4)$$

Для производной магнитного поля используем уравнение (20.8.1) из задачи 20.8:

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = (\mathbf{h} \mathbf{h} : \nabla \mathbf{V}) - (\nabla \cdot \mathbf{V}). \quad (20.10.5)$$

Исключая теперь производные $d\rho/dt$ и dB/dt из соотношения (20.10.3) с помощью формул (20.10.4) и (20.10.5), получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(p_{\perp} + \frac{p_{\parallel}}{2} \right) + \left(p_{\perp} + \frac{3}{2} p_{\parallel} \right) (\nabla \cdot \mathbf{V}) - (p_{\perp} - p_{\parallel}) (\mathbf{h} \mathbf{h} : \nabla \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{V}) = 0.$$

Раскрывая субстанциональную производную по времени

$$\frac{d}{dt} (\dots) = \frac{\partial}{\partial t} (\dots) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) (\dots),$$

после перегруппировки слагаемых приводим это уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(p_{\perp} + \frac{p_{\parallel}}{2} \right) + \nabla \cdot \left[\left(p_{\perp} + \frac{p_{\parallel}}{2} \right) \mathbf{V} \right] + p_{\perp} (\nabla \cdot \mathbf{V}) - (p_{\perp} - p_{\parallel}) (\mathbf{h} \mathbf{h} : \nabla \mathbf{V}) = 0.$$

Его можно ещё упростить, заметив, что последние два слагаемых сворачиваются в одно с помощью определения тензора давления (20.10.2), поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(p_{\perp} + \frac{p_{\parallel}}{2} \right) = -\nabla \cdot \left[\left(p_{\perp} + \frac{p_{\parallel}}{2} \right) \mathbf{V} \right] - \mathbf{P} : \nabla \mathbf{V}. \quad (20.10.6)$$

Сложим теперь уравнения (20.10.1) и (20.10.6). Поскольку

$$\mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) + \mathbf{P} : \nabla \mathbf{V} = \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}),$$

как легко проверить, записав это тождество в координатном представлении:

$$V_{\alpha} \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + P_{\alpha\beta} \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (V_{\alpha} P_{\alpha\beta}),$$

все слагаемые в правой части суммарного уравнения сворачиваются в дивергенцию вектора:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi} + p_{\perp} + \frac{p_{\parallel}}{2} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{\rho V^2}{2} \mathbf{V} + \frac{[\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]]}{4\pi} + p_{\perp} + \frac{p_{\parallel}}{2} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \right). \quad (20.10.7)$$

Полученное уравнение уже записано в консервативной форме, но его преобразование можно продолжить, выразив результат через тензор напряжений магнитного поля

$$\mathbf{T} = \frac{B^2}{8\pi} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{4\pi},$$

его след

$$\text{Tr} \mathbf{T} = \frac{B^2}{8\pi}$$

и след тензора давления

$$\text{Tr} \mathbf{P} = P_{\alpha\alpha} = 2p_{\perp} + p_{\parallel}.$$

Итоговое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{P} + \text{Tr} \mathbf{T} \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{P} + \text{Tr} \mathbf{T} \right) \mathbf{V} + (\mathbf{P} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{V} \right] \quad (20.10.8)$$

позволяет интерпретировать величину

$$W = \frac{\rho V^2}{2} + \frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{P} + \text{Tr} \mathbf{T}$$

как энергию, заключённую в единице объёма плазмы. Согласно (20.18в) энергия выделенного объёма плазмы изменяется за счёт выноса при вытекании плазмы со скоростью \mathbf{V} через поверхность этого объёма и работы $\mathbf{V} \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{T})$ над вытекающей плазмой. Интересно, что тензор давления и тензор напряжений магнитного поля не вполне симметрично входят в выражение для W .

Задача 20.11. Попытаемся получить уравнения гидродинамики из бесстолкновительного кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (20.11.1)$$

вычисляя обычным способом моменты функции распределения f . Для этого удобно выделить среднюю скорость $\mathbf{u} = (1/n) \int \mathbf{v} f d^3w$, перейдя к новой переменной $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Дальнейшие вычисления удобно производить в координатной форме, переписав кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{e}{m} \left(E_\alpha + \frac{1}{c} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_\beta B_\gamma \right) \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} = 0, \quad (20.11.2)$$

где $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — совершенно антисимметричный тензор третьего ранга. Переход к новым переменным в пространстве скоростей сводится к заменам

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial u_\beta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w_\beta}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial w_\beta}, \quad \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \rightarrow \frac{\partial}{\partial w_\alpha}. \quad (20.11.3)$$

Используя также обозначения

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad F_\alpha = e E_\alpha + \frac{e}{c} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\beta B_\gamma, \quad (20.11.4)$$

кинетическое уравнение приводим к виду

$$\frac{df}{dt} - \frac{du_\beta}{dt} \frac{\partial f}{\partial w_\beta} + w_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} w_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\beta} + \frac{F_\alpha}{m} \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} + \frac{q}{m} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{w_\beta}{c} B_\gamma \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} = 0. \quad (20.11.5)$$

Умножив это уравнение на 1 и $m w_\mu$ и проинтегрировав по d^3w , получим соответственно уравнение непрерывности и уравнение движения

$$\frac{dn}{dt} + n \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (20.11.6)$$

$$mn \frac{du_\mu}{dt} = - \frac{\partial P_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha} + n F_\mu; \quad (20.11.7)$$

те же уравнения в векторной форме записываются в виде

$$\frac{dn}{dt} + n \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (20.11.8)$$

$$n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + n(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + en \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] \right). \quad (20.11.9)$$

Здесь $n = \int f d^3w$, \mathbf{P} — тензор давления с компонентами $P_{\mu\alpha} = m \int w_\mu w_\alpha f d^3w$. Чтобы выразить величины $P_{\mu\alpha}$ через гидродинамические переменные (плотность, скорость), можно попытаться получить уравнение для вторых моментов

функции распределения. Умножая уравнение (20.11.5) на $mw_\mu w_\nu$, и интегрируя по скоростям, находим

$$\frac{dP_{\mu\nu}}{dt} + \frac{\partial P_{\mu\nu\alpha}}{\partial x_\alpha} + P_{\mu\nu} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\alpha} P_{\nu\alpha} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\alpha} P_{\mu\alpha} = (\epsilon_{\mu\beta\gamma} P_{\nu\beta} + \epsilon_{\nu\beta\gamma} P_{\mu\beta}) \frac{qB_\gamma}{mc}. \quad (20.11.10)$$

Это уравнение может интерпретироваться как уравнение состояния. Замкнутой системы уравнений мы всё же не получили, ибо в уравнение (20.11.10) вошли третий моменты $P_{\mu\nu\alpha} = m \int w_\mu w_\nu w_\alpha f d^3w$, а в уравнение для третьих моментов войдут четвёртые и т. д. Для получения замкнутой системы уравнений необходимо знать функцию распределения f , которая в этой схеме остаётся неопределенной. Заметим здесь, что в противоположном случае, когда столкновения частиц играют определяющую роль, функция распределения находится однозначно. Чтобы избавиться от третьих моментов, обычно вводят предположения относительно симметрии функции распределения. При достаточно изотропной функции распределения (например, распределение скоростей, близкое максвелловскому) третий моменты могут оказаться малыми или даже точно равными нулю. Малыми являются также недиагональные компоненты тензора $P_{\mu\nu}$.

Действительно, пусть частота eB_γ/mc является большим параметром. Тогда каждое слагаемое в правой части уравнения (20.11.10) может быть велико, но сумма этих слагаемых так же мала, как и левая часть уравнения. В первом приближении эта сумма равна нулю. Общим решением уравнения

$$(\epsilon_{\mu\beta\gamma} P_{\nu\beta} + \epsilon_{\nu\beta\gamma} P_{\mu\beta}) \frac{qB_\gamma}{mc} = 0 \quad (20.11.11)$$

является тензор

$$P_{\mu\nu}^{(0)} = p_\perp (\delta_{\mu\nu} - h_\mu h_\nu) + p_\parallel h_\mu h_\nu, \quad (20.11.12)$$

где два скалярных коэффициента являются (пока ещё) произвольными функциями времени и координат.

Подставим $P_{\mu\nu}^{(0)}$ в левую часть уравнения (20.11.10) и обозначим результат подстановки через $LP_{\mu\nu}^{(0)}$. Тогда в следующем порядке разложения имеем уравнение

$$LP_{\mu\nu}^{(0)} = (\epsilon_{\mu\beta\gamma} P_{\nu\beta}^{(1)} + \epsilon_{\nu\beta\gamma} P_{\mu\beta}^{(1)}) \frac{qB_\gamma}{mc}, \quad (20.11.13)$$

где $P_{\mu\beta}^{(1)}$ — поправка первого порядка малости к тензору давления. Легко проверить, что свёртки правой части этого уравнения с тензорами $\delta_{\mu\nu}$ и $h_\mu h_\nu$ равны нулю. Поэтому для разрешимости уравнения относительно $P_{\mu\beta}^{(1)}$ необходимо, чтобы свёртки левой части уравнения с теми же тензорами также были равны нулю. Выполняя эти операции, пренебрегаем $P_{\mu\nu\alpha}$ и получаем уравнения

$$\frac{d}{dt} (2p_\perp + p_\parallel) + (2p_\perp + p_\parallel)(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2p_\perp(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2(p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}) = 0; \quad (20.11.14)$$

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} + p_{\parallel}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2p_{\parallel}(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}) = 0, \quad (20.11.15)$$

где введено обозначение

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}) = h_{\mu} h_{\alpha} \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_{\alpha}}. \quad (20.11.16)$$

Комбинации производных скорости $(\nabla \cdot \mathbf{u})$ и $(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u})$ удаётся связать со скоростью изменения плотности и напряжённости магнитного поля \mathbf{B} при помощи уравнений

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (20.11.17)$$

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (20.11.18)$$

Первое из них следует из уравнения непрерывности (20.11.8). Второе получено в задаче 20.8. В результате (20.11.15) приобретает вид

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} - \frac{3p_{\parallel}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{2p_{\parallel}}{B} \frac{dB}{dt} = 0,$$

откуда сразу следует (20.15). Теперь вычитая (20.11.15) из (20.11.14) и используя (20.11.17) и (20.11.18), находим уравнение

$$2 \frac{dp_{\perp}}{dt} - \frac{2p_{\perp}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{2p_{\perp}}{B} \frac{dB}{dt} = 0,$$

которое приводит к (20.14).

Задача 20.12. С помощью уточнённого закона Ома (18.26), дополненного уравнением $\mathbf{J} = (c/4\pi) \operatorname{rot} \mathbf{B}$, исключим из уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

электрическое поле, чтобы получить уравнение скин-эффекта в анизотропной среде:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \left[\frac{c^2 \varrho_{\parallel}}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{B})_{\parallel} + \frac{c^2 \varrho_{\perp}}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{B})_{\perp} + \frac{c^2 \varrho_{\wedge}}{4\pi} \mathbf{h} \times (\operatorname{rot} \mathbf{B})_{\perp} \right]. \quad (20.12.1)$$

В плоской геометрии, где внешнее магнитное поле направлено вдоль оси z , так что $\mathbf{h} = \hat{\mathbf{z}}$, а переменное магнитное поле $\mathbf{B} = B_y(x, t)\hat{\mathbf{y}}$ направлено по оси y и зависит от x , это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{c^2 \varrho_{\perp}}{4\pi} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right]. \quad (20.12.2)$$

Самым большим в правой части уравнения (20.12.1) формально является последнее слагаемое

$$-\operatorname{rot} \left[\frac{c^2 \varrho_\perp}{4\pi} \mathbf{h} \times (\operatorname{rot} \mathbf{B})_\perp \right] \approx -\frac{c}{4\pi e_e n_e} \operatorname{rot} [\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}],$$

связанное с эффектом Холла. Однако в плоской геометрии оно в точности обращается в нуль и поэтому не входит в уравнение (20.12.2). В цилиндрической геометрии, где $\mathbf{B} = B_\theta(r, z, t)\hat{\theta}$, из (20.12.1) получаем уравнение

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi e_e n_e r} \frac{\partial}{\partial z} B_\theta^2 + \frac{c^2 \varrho_\perp}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\theta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} B_\theta \right], \quad (20.12.3)$$

в котором первое слагаемое справа описывает укручивание фронта волны. Если пренебречь зависимостью B_θ от r , рассматривая проникновение магнитного поля в узкий коаксиальный канал, в котором ширина канала Δr мала по сравнению с его радиусом $r \approx R$, (20.12.3) приводится к уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} + \frac{c}{4\pi e_e n_e R} \frac{\partial B_\theta^2}{\partial z} - \frac{c^2 \varrho_\perp}{4\pi} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z^2} = 0, \quad (20.12.4)$$

которое хорошо изучено. В частности, оно имеет решение в виде стационарной ударной волны

$$B_\theta = \frac{B_0}{1 + \exp[(z - Ut)/\ell]} \quad (20.12.5)$$

с шириной фронта

$$\ell = \frac{ce_e n_e \varrho_\perp R}{B_0},$$

которая движется со скоростью

$$U = \frac{cB_0}{4\pi e_e n_e R},$$

где B_0 — величина магнитного поля на границе плазмы, которое включается в некоторый момент времени. Направление движения зависит от направления B_0 на границе плазмы. Пусть плазма занимает область $z > 0$. Если $B_0 < 0$, то $U > 0$ и волна бежит слева направо вглубь плазмы. Если же $B_0 > 0$, на границе устанавливается линейно спадающий вглубь плазмы профиль магнитного поля

$$B_\theta = \frac{B_0}{1 - z/\ell}. \quad (20.12.6)$$

Аналогичные решения возможны в плоской геометрии, рассмотренной выше, если допустить, что плазма неоднородна и $n_e = n_e(x)$.

Лекция 21

Задача 21.1. По определению момент инерции I системы N частиц равен

$$I = \sum_{k=1}^N m_k |\mathbf{x}_k|^2 = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2,$$

где m_k и \mathbf{x}_k представляют массу и радиус-вектор k -й частицы, а $r_k = |\mathbf{x}_k|$ обозначает расстояние этой частицы от начала системы отсчёта. Пусть скаляр G задан уравнением

$$G = \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{x}_k,$$

где $\mathbf{p}_k = m_k d\mathbf{x}_k/dt$ обозначает импульс k -й частицы. Нетрудно видеть, что величина G равна половине производной момента инерции по времени:

$$\frac{1}{2} \frac{dI}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} \cdot \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{x}_k = G.$$

В свою очередь, производную G по времени можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k \cdot \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} + \sum_{k=1}^N \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} \cdot \mathbf{x}_k = \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} \right)^2 + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{x}_k = 2T + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{x}_k, \end{aligned}$$

где $\mathbf{F}_k = d\mathbf{p}_k/dt$ есть сила, которая действует на частицу с номером k , а

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} \right)^2$$

обозначает полную кинетическую энергию системы.

В специальном случае, когда потенциальная энергия $U_{jk} = \alpha r_{jk}^n$ взаимодействия между двумя любыми частицами пропорциональна степени n расстояния $r_{jk} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|$ с постоянным коэффициентом α и показателем степени n , находим, что

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{x}_k = - \sum_{k=1}^N \sum_{j < k} \frac{dU_{jk}}{dr_{jk}} r_{jk} = - \sum_{k=1}^N \sum_{j < k} n U_{jk} = -n U,$$

где $U = \sum_{k=1}^N \sum_{j < k} U_{jk}$ — полная потенциальная энергия системы. Таким образом,

$$\frac{dG}{dt} = 2T - nU.$$

Теорема вириала гласит, что если в среднем за продолжительное время

$$\langle dG/dt \rangle = 0,$$

тогда

$$2\langle T \rangle = - \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{x}_k \rangle.$$

Есть несколько причин, по которым значение производной dG/dt при усреднении по большому интервалу времени должно приближаться к нулю. Чаще всего ссылаются на то, что в системе, параметры которой меняются в ограниченных пределах, средние значения производных действительно стремятся к нулю, как показывает следующая цепочка преобразований:

$$\langle dG/dt \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0.$$

Для систем со степенным потенциалом взаимодействия из теоремы вириала следует, что

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle U \rangle.$$

Для гравитирующих систем $n = -1$ и эта теорема приводит к равенству

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle,$$

которое находится в согласии с тем утверждением, что в таких системах $U < 0$, поскольку $\alpha < 0$. Таким образом, в применении к звёздам теорема вириала предсказывает существование равновесия и, кроме того, имеет другие применения. Например, она позволяет оценить энергию, которую должно унести излучение при гравитационном сжатии звезды на последних стадиях её эволюции.

Задача 21.2. Формулы (21.19) для вектора намагничивания $\mathbf{M} = -(p_\perp/B^2)\mathbf{B}$ и (21.20) для плотности диамагнитного тока $\mathbf{J}_\mu = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ верны в общем случае, если давление вычислять по релятивистской формуле $p_\perp = \sum_a n_a \langle m\gamma v_\perp^2/2 \rangle_a$.

Задача 21.3. Добавим к сумме дрейфового тока

$$\frac{cp_\perp}{B} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{cp_\parallel}{B} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}]$$

слагаемое

$$\frac{cp_\perp}{B} \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}),$$

направленное вдоль магнитного поля. Как станет ясно в итоге вычислений, оно сократит такое же слагаемое в диамагнитном токе, и результирующий вектор будет перпендикулярен магнитному полю. Перегруппировав слагаемые, запишем сумму

$$\frac{cp_{\perp}}{B} \left[\mathbf{h} \times \left(\frac{\nabla B}{B} + (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \right) \right] + \frac{cp_{\perp}}{B} \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}) - \frac{c(p_{\perp} - p_{\parallel})}{B} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

Используя сначала векторное тождество

$$[\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] + \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}) = \operatorname{rot} \mathbf{h},$$

а затем

$$\left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \operatorname{rot} \mathbf{h} = B \operatorname{rot} \frac{\mathbf{h}}{B},$$

свернём слагаемые, пропорциональные cp_{\perp}/B :

$$cp_{\perp} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{h}}{B} - \frac{c(p_{\perp} - p_{\parallel})}{B} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

Затем прибавим диамагнитный ток

$$-c \operatorname{rot} \frac{p_{\perp} \mathbf{h}}{B} = -cp_{\perp} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{h}}{B} + \frac{c}{B} [\mathbf{h} \times \nabla p_{\perp}].$$

При этом часть слагаемых вновь сократится. Так как $(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = \boldsymbol{\kappa}$, в окончательном виде

$$\mathbf{J}_{\perp} = \frac{c}{B} [\mathbf{h} \times \nabla p_{\perp}] - \frac{c}{B} (p_{\perp} - p_{\parallel}) [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}].$$

Задача 21.4. В магнитном поле с прямыми магнитными силовыми линиями $\boldsymbol{\kappa} = 0$ и

$$\mathbf{J}_{\perp} = \frac{c}{B} \frac{dp_{\perp}}{dr},$$

как следует из формулы (21.14). Дрейфовый ток вызван градиентом магнитного поля:

$$\mathbf{J}_{\text{др}} = \frac{cp_{\perp}}{B^2} \frac{dB}{dr}.$$

Диамагнитный ток вычисляем по формуле

$$\mathbf{J}_{\mu} = \frac{d}{dr} \frac{cp_{\perp}}{B},$$

которая следует из (21.20). С помощью уравнения поперечного равновесия

$$p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{B_{\text{vac}}^2}{8\pi} = \text{const}$$

находим

$$J_{\text{dr}}/J_{\perp} = -4\pi p_{\perp}/B^2, \quad J_{\mu}/J_{\perp} = 1 + 4\pi p_{\perp}/B^2.$$

Диамагнитный ток в плазме течёт в направлении, противоположном току в катушках, которые создают внешнее магнитное поле. Градиентный ток соправлен току в катушках и частично компенсирует диамагнитный ток. Если на некотором радиусе $p_{\perp} \rightarrow B_{\text{vac}}^2/8\pi$, то там $B \rightarrow 0$, а диамагнитный и градиентный токи почти полностью взаимно сокращаются.

Задача 21.7. Подставив $\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{h}$ в уравнение $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, получим цепочку равенств

$$\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{h}B) = B \text{rot } \mathbf{h} + \nabla B \times \mathbf{h} = 0.$$

Умножив результат векторно на \mathbf{h}/B , учтём, что $\mathbf{h} \times [\nabla B \times \mathbf{h}] = \nabla_{\perp} B$; поэтому

$$\mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{h} = -\frac{1}{B} \nabla_{\perp} B.$$

Левую сторону полученного равенства преобразуем с помощью векторных тождеств, приняв во внимание, что $\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = 1$:

$$\mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{h} \times [\nabla \times \mathbf{h}] = \nabla \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}}{2} - (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = -\kappa.$$

Таким образом, в вакуумном магнитном поле вектор кривизны выражается через градиент магнитного поля согласно

$$\kappa = \frac{1}{B} \nabla_{\perp} B.$$

В проекции на направление нормали $\mathbf{n} = \mathbf{\kappa}/\kappa$ это равенство означает, что

$$\kappa = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial n}.$$

Исключая с его помощью κ в уравнении (12a), получаем искомый результат:

$$\frac{\partial p_{\perp}}{\partial n} = \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B} \frac{\partial B}{\partial n}.$$

В пределе изотропной плазмы, когда $p_{\perp} = p_{\parallel} = p$, отсюда следует вывод, что $\partial p / \partial n = 0$, который кажется абсурдным, поскольку согласно (21.15) давление постоянно также вдоль силовой линии магнитного поля, т. е. $\partial p / \partial s = 0$. Таким образом, приближения $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ не достаточно для расчёта равновесной конфигурации плазмы.

Задача 21.8. В параксиальном пробкотроне поперечный размер плазмы a мал по сравнению с расстоянием L между магнитными пробками. Представим, что некоторая магнитная силовая линия задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(z)$. Тогда единичный вектор в направлении магнитного поля в цилиндрической системе координат приближённо равен $\mathbf{h} \approx \{\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}z, 0, 1\}$. Вектор кривизны вычисляем, следуя его определению:

$$\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \approx \{\mathrm{d}^2 \mathbf{r} / \mathrm{d}z^2, 0, 0\}.$$

По порядку величины $\mathrm{d}^2 \mathbf{r} / \mathrm{d}z^2 \sim a/L^2$, поэтому правую часть уравнения (12a) можно оценить как $(B^2/4\pi)a/L^2$, тогда как слева имеем два слагаемых порядка p/a и $(B^2/8\pi)/a$. Отсюда ясно, что каждое из них в отдельности существенно больше, чем правая сторона уравнения. Заменив её нулюм, приходим к выводу, что сумма $p_\perp + B^2/8\pi$ приблизительно постоянна по сечению плазмы плоскостью $z = \text{const}$.

Лекция 22

Задача 22.1. Если соленоид замкнуть в тор с большим радиусом кривизны, первоначально однородное магнитное поле соленоида станет неоднородным: в круглом торе оно убывает обратно пропорционально расстоянию R от большой оси (оси симметрии) тора. Это следует из того, что при осевой симметрии поле равно $B = 2I/cR$, где I — полный ток, протекающий через круг радиуса R . Этот ток постоянен, если только мы не пересекаем витков обмотки.

Так как магнитное поле ослабевает к наружному обводу тора, то плазма, будучи диамагнетиком, должна выталкиваться в радиальном направлении. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим плазменную трубку, образующие которой совпадают с силовыми линиями, и допустим, что давление плазмы p однородно по сечению трубы и значительно меньше давления магнитного поля $B^2/8\pi$. Тогда, как показано в §22.2, магнитное поле будет очень слабо изменяться при пересечении границы плазмы. При этом согласно (22.6) давление плазмы уравновешивается силой взаимодействия поверхностного тока I_s с магнитным полем B . Но в простой тороидальной геометрии в отсутствие продольного тока соотношению (22.6) удовлетворить нельзя. В самом деле, в силу сохранения заряда произведение поверхностного тока на длину силовой линии $I_s 2\pi R$ должно оставаться постоянным. Поэтому на внутреннем ободе плазменной трубы поверхностный ток I_s должен быть несколько больше, чем на внешнем. Но магнитное поле B также больше на внутреннем ободе. Следовательно, сила, действующая со стороны магнитного поля на плазменную трубку, должна давать равнодействующую, направленную наружу в сторону убывания магнитного поля.

Задача 22.2. Вычислим сначала вектор кривизны. Учитывая, что в винтовом пинче

$$\mathbf{B} = \{0, B_\theta(r), B_z(r)\},$$

запишем вектор касательной к магнитной линии

$$\mathbf{h} = \frac{B_\theta}{B} \hat{\theta} + \frac{B_z}{B} \hat{z},$$

обозначив через $\hat{\theta}$ и \hat{z} единичные векторы в направлении соответственно координат θ и z . Исходя из определения вектора кривизны

$$\kappa = (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}$$

и оператора векторного дифференцирования

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z},$$

имеем

$$\kappa = \left(\frac{B_\theta}{rB} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{B_z}{B} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{B_\theta}{B} \hat{\theta} + \frac{B_z}{B} \hat{z} \right) = \frac{1}{r} \frac{B_\theta^2}{B^2} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{B_\theta^2}{B^2} \hat{r},$$

так как ни одна величина не зависит от z , а от угла θ зависит только направление вектора $\hat{\theta}$, причём $\partial \hat{\theta} / \partial \theta = -\hat{r}$. Из полученного выражения

$$\kappa = -\frac{1}{r} \frac{B_\theta^2}{B^2} \hat{r}$$

следует, что вектор нормали к силовой линии можно направить по радиусу от оси пинча, т. е.

$$\mathbf{n} = \hat{r}.$$

Поэтому из уравнения равновесия анизотропной плазмы

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(p_\perp + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \left(p_\perp - p_\parallel + \frac{B^2}{4\pi} \right) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\kappa})$$

сразу получаем искомый результат:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p_\perp + \frac{B^2}{8\pi} \right) = -\frac{B_\theta^2}{rB^2} \left(p_\perp - p_\parallel + \frac{B^2}{4\pi} \right).$$

Задача 22.3. Предполагая, что интегрирование в

$$K = \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) d^3x$$

проводится по области с неподвижной (твёрдой) границей, имеем

$$\frac{dK}{dt} = \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3x.$$

Производные $\partial \mathbf{A} / \partial t$ и $\partial \mathbf{B} / \partial t$ выражаем через электрическое поле \mathbf{E} и электрический потенциал φ с помощью уравнений

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

В получившемся выражении

$$\frac{dK}{dt} = -c \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}) d^3x$$

последнее слагаемое преобразуем с помощью векторного тождества

$$\mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{A}] + \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

после чего первое слагаемое $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ удваивается, так как $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Далее замечаем, что $\nabla \varphi \cdot \mathbf{B} = \operatorname{div}(\varphi \mathbf{B})$ вследствие уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, а $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, так как в идеально проводящей плазме электрическое поле $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$ перпендикулярно магнитному. Получившийся интеграл

$$\frac{dK}{dt} = -c \int \operatorname{div}(\varphi \mathbf{B} + [\mathbf{E} \times \mathbf{A}]) d^3x$$

преобразуем к поверхностному с помощью теоремы Остроградского—Гаусса:

$$\frac{dK}{dt} = -c \oint (\varphi \mathbf{B} + [\mathbf{E} \times \mathbf{A}]) \cdot d\mathbf{S}.$$

Он равен нулю, если граница области интегрирования составлена из магнитных силовых линий. Действительно, первое слагаемое обращается в нуль, так как $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Второе слагаемое также равно нулю, так как

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{A}] \cdot d\mathbf{S} = [d\mathbf{S} \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c} [d\mathbf{S} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]] \cdot \mathbf{A},$$

а вектор $[\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$ на твёрдой непроницаемой границе параллелен $d\mathbf{S}$, поскольку там $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0$ и $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

Задача 22.4. В адиабатической ловушке с плоскими силовыми линиями магнитное поле описывается в цилиндрической системе координат $\{r, \theta, z\}$ векторным потенциалом вида

$$\mathbf{A} = \{0, A_\theta(r, z), 0\}.$$

Магнитное поле

$$\mathbf{B} = \{-\partial A_\theta / \partial z, 0, \partial A_\theta / \partial r + A_\theta / r\}$$

перпендикулярно векторному потенциальному, поэтому $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 0$ и магнитная спиральность (22.29) тождественна нулю.

В диффузном бессиловом пинче

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}/\lambda = (B_0/\lambda)\{0, J_1(\lambda r), J_0(\lambda r)\},$$

поэтому $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (B_0^2/\lambda)(J_0(\lambda r)^2 + J_1(\lambda r)^2) > 0$ и спиральность (22.29) выражается заведомо положительным числом.

Задача 22.5. Найдём минимум энергии магнитного поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int B^2 d^3x \quad (22.5.1)$$

при заданной магнитной спиральности

$$K = \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) d^3x. \quad (22.5.2)$$

Для этого составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int \{B^2 - \lambda \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}\} d^3x$$

с неопределенным множителем λ и вычислим её вариацию

$$\delta \mathcal{L} = \int \{(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) \cdot \delta \mathbf{B} - \lambda \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{A}\} d^3x.$$

Учитывая, что $\delta \mathbf{B} = \text{rot } \delta \mathbf{A}$, первое слагаемое в $\delta \mathcal{L}$ преобразуем с помощью векторного тождества

$$(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) \cdot \text{rot } \delta \mathbf{A} = -\text{div}[(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A}] + \delta \mathbf{A} \cdot \text{rot}(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}).$$

В полученном выражении слагаемое

$$-\int \text{div}[(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A}] d^3x$$

преобразуется к интегралу по поверхности, окружающей плазму, и при подходящем выборе граничных условий обращается в нуль. Оставшееся выражение

$$\delta \mathcal{L} = \int [\text{rot}(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) - \lambda \mathbf{B}] \cdot \delta \mathbf{A} d^3x$$

обращается в нуль при любой вариации $\delta \mathbf{A}$, если равно нулю выражение в фигурных скобках. Так как $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, приходим к уравнению

$$\text{rot } \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}. \quad (22.5.3)$$

В классе функций, зависящих только от радиуса r в цилиндрической системе координат, его решением является винтовое поле (22.28).

Задача 22.6. Произвольное магнитное поле $\mathbf{B}(x, y)$, которое не зависит от координаты z , в самом общем случае можно представить в виде

$$\mathbf{B}(x, y) = [\nabla \Psi(x, y) \times \hat{\mathbf{z}}] + B_z(x, y) \hat{\mathbf{z}}, \quad (22.6.1)$$

где функция $\Psi(x, y)$ называется полоидальным магнитным потоком, $B_z(x, y)$ — тороидальным магнитным полем, а $\hat{\mathbf{z}}$ обозначает единичный вектор в направлении координаты z . Нетрудно проверить, что представление (22.6.1) удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ при любых функциях $\Psi(x, y)$ и $B_z(x, y)$. Так как

$$B_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

уравнение $\Psi(x, y) = \text{const}$ определяет проекцию магнитных силовых линий на плоскость xy . Поскольку

$$[\nabla \times \mathbf{B}] = [\nabla B_z(x, y) \times \hat{\mathbf{z}}] - \hat{\mathbf{z}} \nabla^2 \Psi(x, y) \quad (22.6.2)$$

и мы ищем бессиловое магнитное поле, векторы (22.6.1) и (22.6.2) должны быть параллельны друг другу. То же утверждение верно в отношении векторов $\nabla \Psi(x, y)$ и $\nabla B_z(x, y)$. Это подразумевает, что $B_z(x, y) = F(\Psi)$. Более того, отношение полоидальных компонент уравнений (22.6.1) и (22.6.2), которое равно $dF/d\Psi$, должно быть равно отношению их тороидальных компонент, которое равно $-(\nabla^2 \Psi)/F$. Следовательно, мы имеем уравнение

$$\nabla^2 \Psi = -F \frac{dF}{d\Psi}, \quad (22.6.3)$$

которое является уравнением Грэда—Шафранова для бессилового равновесия плазмы. В общем случае это нелинейное уравнение, которое едва ли можно исследовать аналитически. Однако оно сильно упрощается в специальном случае так называемых линейных бессиловых полей, для которых $F(\Psi) = \lambda \Psi$ с $\lambda = \text{const}$. При таком выборе $F(\Psi)$ уравнение (22.6.3) упрощается до

$$\nabla^2 \Psi = -\lambda^2 \Psi. \quad (22.6.4)$$

Задача 22.7. Подставив $B_z(r) = B_0 J_0(\lambda r)$ и вычислив интеграл, получим

$$\int_0^a (B_z^2(a) - B_z^2(r))r dr = -\frac{a^2}{2} J_1^2(\lambda a) \leq 0,$$

что и требовалось доказать.

Задача 22.8. Количество энергии магнитного поля внутри заданного объёма V даёт интеграл

$$W = \int_V \frac{B^2}{8\pi} d^3x. \quad (22.8.1)$$

На первый взгляд, может показаться, что минимум энергии достигается, если $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ везде внутри этого объёма. Однако такое состояние не может быть достигнуто за счёт процесса магнитной релаксации, если магнитное поле снаружи не изменится. В самом деле, поскольку $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, нормальная компонента \mathbf{B} должна быть непрерывна на границе. Поэтому только магнитные поля с предписанным граничным условием

$$B_n|_S = B_n^{(\text{ext})} \quad (22.8.2)$$

допускаются для участия в процессе минимизации магнитной энергии в уравнении (22.8.1). Рассмотрим теперь потенциальное магнитное поле \mathbf{B}_p внутри объёма, которое удовлетворяет граничному условию (22.8.2). Представляя это поле в виде $\mathbf{B}_p = \nabla\phi$, из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B}_p = 0$ заключаем, что потенциал ϕ должен удовлетворять уравнению Лапласа. Таким образом, нужно решить уравнение

$$\nabla^2\phi = 0$$

с граничным условием

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_S = B_n^{(\text{ext})}.$$

Это хорошо известная в математике задача Неймана, которая всегда имеет единственное решение. Теперь любое иное магнитное поле можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{b}$$

с граничным условием

$$b_n|_S = 0.$$

Подставляя это выражение для \mathbf{B} в уравнение (22.8.1), получаем

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{B}_p^2 + b^2 + 2\mathbf{B}_p \cdot \mathbf{b}) d^3x. \quad (22.8.3)$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$, последний член здесь исчезает, так как

$$\int_V (\mathbf{B}_p \cdot \mathbf{b}) d^3x = \int_V (\nabla\phi \cdot \mathbf{b}) d^3x = \int_V \nabla \cdot (\phi\mathbf{b}) d^3x = \oint_S \phi b_n dS = 0.$$

Поэтому из (22.8.3) следует, что потенциальное магнитное поле соответствует состоянию с минимумом энергии. Любое отклонение \mathbf{b} от этого потенциального поля, связанное с протеканием электрических токов, вызывает увеличение энергии на величину

$$\Delta W = \int_V \frac{b^2}{8\pi} d^3x.$$

Лекция 23

Задача 23.1. В пределе $\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1$ магнитное поле можно приближённо считать вакуумным, так что

$$B_\phi = \frac{2I}{cR},$$

где I — сила тока, который протекает вдоль оси Z цилиндрической системы координат $\{R, \phi, Z\}$. Вычислив удельный объём такого магнитного поля

$$U = \oint \frac{ds}{B} = \frac{2\pi R}{B_\phi} = \frac{\pi c}{I} R^2,$$

найдём, что он зависит только от радиуса R . Поскольку в магнитном поле с замкнутыми силовыми линиями давление постоянно на поверхности $U = \text{const}$, заключаем, что оно постоянно на круглых цилиндрах $R = \text{const}$, которые не ограничены по координате Z . Следовательно, ограниченное в пространстве равновесие в поле прямого тока в пределе $\beta \ll 1$ невозможно.

Посмотрим, возможно ли такое равновесие, если параметр β не мал. Предположим, что искомое равновесие обладает аксиальной симметрией относительно поворота вокруг оси Z . Тогда из уравнений равновесия изотропной плазмы имеем

$$\nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{B^2}{4\pi} \boldsymbol{\kappa} = -\frac{B^2}{4\pi} \hat{\mathbf{e}}_R,$$

где $\hat{\mathbf{e}}_R$ — единичный вектор вдоль координаты R . Из Z -проекции этого уравнения

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0$$

следует, что

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = P(R)$$

зависит только от R . С учётом этого обстоятельства из радиальной проекции уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = -\frac{B^2}{4\pi R}$$

заключаем, что B также зависит только от R . Поскольку сумма $p + B^2/8\pi$ не зависит от Z , делаем вывод, что $p = P(R)$. Такое равновесие не ограничено по координате Z .

Задача 23.2. Силовые линии, которые замыкаются сами на себя, находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами, в то время как силовые линии, которые не замыкаются на себя (и эргодически заполняют поверхность), соответствуют иррациональным числам. Следовательно, фактически 100% силовых линий незамкнуты.

Задача 23.3. Условие постоянства скалярной функции $p(\mathbf{r})$ определяет поверхность в трёхмерном пространстве. Силовая линия магнитного поля лежит на поверхности постоянного давления $p = \text{const}$. Если бы силовая линия плотно заполняла ограниченный объём, давление было бы постоянно во всём этом объёме.

Задача 23.5. Докажем сначала равенство

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} \left[\mathbf{h} \times \nabla \frac{1}{B} \right] \cdot \nabla p = 0, \quad (23.5.1)$$

где интегрирование осуществляется вдоль магнитной силовой линии между точками s_1 и s_2 пересечения силовой линии с торцами. Оно следует из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div} \mathbf{J}_\parallel + \operatorname{div} \mathbf{J}_\perp = 0 \quad (23.5.2)$$

и поэтому называется *условием замыкания токов*. Так как

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_\parallel = \operatorname{div} \left(\frac{J_\parallel}{B} \mathbf{B} \right) = \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{J_\parallel}{B} \right) = B \frac{\partial}{\partial s} \frac{J_\parallel}{B},$$

из уравнения (23.5.2) можно выразить проекцию J_\parallel плотности тока на направление магнитного поля в любой точке силовой линии. Интегрируя уравнение (23.5.2) по координате s вдоль магнитной силовой линии с граничным условием $J_\parallel = 0$ на первом торце при $s = s_1$, получаем

$$J_\parallel(s) = -B(s) \int_{s_1}^s \frac{ds}{B} \operatorname{div} \mathbf{J}_\perp.$$

На другом торце при $s = s_2$ продольная плотность тока также должна исчезать, для чего необходимо выполнить условие

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} \operatorname{div} \mathbf{J}_\perp = 0. \quad (23.5.3)$$

Поперечный ток выражаем из уравнения равновесия изотропной плазмы:

$$\mathbf{J}_\perp = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B} \times \nabla p].$$

Так как $\operatorname{rot} \nabla p = 0$,

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_\perp = c \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) \cdot \nabla p.$$

Поскольку $(\mathbf{J} \cdot \nabla p) = 0$ и, следовательно, $(\operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \nabla p) = 0$, получаем равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_\perp = c \left[\mathbf{B} \times \nabla \frac{1}{B^2} \right] \cdot \nabla p = 2c \left[\mathbf{h} \times \nabla \frac{1}{B} \right] \cdot \nabla p.$$

Его подстановка в (23.5.3) завершает вывод уравнения (23.5.1).

Рассмотрим теперь две соседние поверхности $p = \text{const}$ и $p + \Delta p = \text{const}$ и введём координату ξ_1 по нормали к ним. Другую координату ξ_2 расположим в плоскости $p = \text{const}$ перпендикулярно магнитным силовым линиям. В результате получим систему криволинейных ортогональных координат (ξ_1, ξ_2, s) . Градиент давления ∇p имеет только одну отличную от нуля компоненту $\partial p / \partial \xi_1$, поэтому уравнение (23.5.1) приводится к виду

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{B} = 0.$$

Вычислим этот интеграл для тонкой плазменной трубки (образованной магнитными силовыми линиями) с прямоугольным сечением $\Delta \xi_1 \times \Delta \xi_2$. Вдоль такой трубы

$$\frac{\partial p}{\partial \xi_1} = \frac{\Delta p}{\Delta \xi_1}, \quad \frac{\partial B^{-1}}{\partial \xi_2} = \frac{\Delta B^{-1}}{\Delta \xi_2},$$

а $\Delta p = \text{const}$ и $\Delta \Phi = B \Delta \xi_1 \Delta \xi_2 = \text{const}$, поэтому

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{B} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} \frac{\Delta p}{\Delta \xi_1} \frac{\Delta B^{-1}}{\Delta \xi_2} = \frac{\Delta p}{\Delta \Phi} \int_{s_1}^{s_2} ds \Delta B^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{s_1}^{s_2} ds \Delta B^{-1} = 0.$$

Наконец, если торцевые поверхности ортогональны магнитным силовым линиям, то

$$\int_{s_1}^{s_2} ds \Delta B^{-1} = \Delta \int_{s_1}^{s_2} ds B^{-1},$$

где выражение справа означает разность значений интеграла

$$U = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B},$$

вычисленного для двух соседних магнитных силовых линий на поверхности $p = \text{const}$. Равенство $\Delta U = 0$ означает, что величина U постоянна на поверхности постоянного давления, что и требовалось доказать.

Задача 23.6. В анизотропной плазме

$$\mathbf{J}_\perp = \frac{c}{B} \{ [\mathbf{h} \times \nabla p_\perp] - (p_\perp - p_\parallel) [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] \}. \quad (23.6.1)$$

Преобразуем сначала второе слагаемое, исключив вектор кривизны $\boldsymbol{\kappa}$ с помощью векторного тождества

$$[\mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{h}] = \nabla \frac{h^2}{2} - (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = -(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = -\boldsymbol{\kappa}.$$

Тогда

$$[\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] = [\mathbf{h} \times [\operatorname{rot} \mathbf{h} \times \mathbf{h}]] = \operatorname{rot} \mathbf{h} - \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}).$$

Далее заметим, что

$$(\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}) = \left(\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{B} \right) = \left(\mathbf{h} \cdot \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}}{B} \right) = \frac{4\pi}{cB} J_\parallel,$$

так как

$$\left(\mathbf{h} \cdot \left[\nabla \frac{1}{B} \times \mathbf{B} \right] \right) = 0.$$

Следовательно,

$$[\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] = \operatorname{rot} \mathbf{h} - \frac{4\pi}{cB} J_\parallel.$$

Подставив это выражение в формулу (23.6.1), вычислим дивергенцию \mathbf{J}_\perp . Учитывая векторное тождество $\operatorname{rot} \nabla p_\perp = 0$, находим, что

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_\perp = c \nabla p_\perp \cdot \operatorname{rot} \frac{\mathbf{h}}{B} - c \operatorname{div} \left(\frac{p_\perp - p_\parallel}{B} \operatorname{rot} \mathbf{h} - \frac{4\pi}{c} \frac{p_\perp - p_\parallel}{B^2} J_\parallel \right).$$

Так как $\operatorname{div} \mathbf{J}_\perp = -\operatorname{div} \mathbf{J}_\parallel$, отсюда следует равенство

$$-\frac{1}{c} \operatorname{div} \left\{ \left(1 + 4\pi \frac{p_\perp - p_\parallel}{B^2} \right) J_\parallel \right\} = \nabla p_\perp \cdot \operatorname{rot} \frac{\mathbf{h}}{B} - \operatorname{div} \left\{ \frac{p_\perp - p_\parallel}{B} \operatorname{rot} \mathbf{h} \right\}. \quad (23.6.2)$$

Преобразуем его правую часть к более симметричному виду. Выполнив дифференцирование с учётом тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0$, получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} \cdot \left(\frac{\nabla p_\perp}{B} - \nabla \frac{p_\perp - p_\parallel}{B} \right) - \frac{\nabla p_\perp}{B^2} \cdot [\nabla B \times \mathbf{h}].$$

Далее воспользуемся доказанным выше тождеством

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] + \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h})$$

и перегруппируем слагаемые в круглых скобках:

$$([\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] + \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h})) \cdot \left(\frac{\nabla p_\perp}{B} + \frac{p_\perp - p_\parallel}{B^2} \nabla B \right) - \frac{\nabla p_\perp}{B^2} \cdot [\nabla B \times \mathbf{h}].$$

Вследствие уравнения продольного равновесия (21.12в)

$$\mathbf{h} \cdot \left(\frac{\nabla p_{\parallel}}{B} + \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \nabla B \right) = 0,$$

поэтому слагаемые, содержащие $(\mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{h})$, взаимно сокращаются. В оставшемся выражении

$$[\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \left(\frac{\nabla p_{\parallel}}{B} + \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \nabla B \right) - \frac{\nabla p_{\perp}}{B^2} \cdot [\nabla B \times \mathbf{h}]$$

все градиенты ∇B можно заменить на $\nabla_{\perp} B$, не меняя результат, а затем исключить с помощью уравнений поперечного равновесия (21.12а) и (21.12б):

$$\nabla_{\perp} B = -\frac{4\pi}{B} \nabla_{\perp} p_{\perp} + \frac{\boldsymbol{\kappa}}{B} (B^2 + 4\pi p_{\perp} - 4\pi p_{\parallel}).$$

В итоге уравнение (23.6.2) принимает вид

$$-\frac{1}{c} \text{div} \left\{ \left(1 + 4\pi \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \right) J_{\parallel} \right\} = [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla (p_{\perp} + p_{\parallel}).$$

Левую часть этого уравнения можно переписать в виде

$$-\frac{1}{c} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left\{ \left(1 + 4\pi \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \right) \frac{J_{\parallel}}{B} \right\} = -\frac{B}{c} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(1 + 4\pi \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \right) \frac{J_{\parallel}}{B} \right\},$$

так как $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Поделив затем всё равенство на B и выполнив интегрирование по s вдоль магнитной силовой линии между точками s_1 и s_2 за пределами плазмы, где $J_{\parallel} = 0$, получим *условие замыкания токов* для анизотропной плазмы

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla (p_{\perp} + p_{\parallel}) = 0. \quad (23.6.3)$$

Задача 23.7. В изотропной плазме, где $(\mathbf{B} \cdot \nabla p) = 0$, магнитной поверхностью является поверхность $p = \text{const}$. В цилиндрических координатах магнитное поле с винтовой симметрией описывается векторным потенциалом с компонентами

$$A_r = 0, \quad A_{\theta} = A_{\theta}(r, \theta - \alpha z), \quad A_z = A_z(r, \theta - \alpha z).$$

Вычислив компоненты магнитного поля

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial z}, \quad B_{\theta} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta},$$

нетрудно проверить, что $(\mathbf{B} \cdot \nabla \psi) = 0$, если

$$\psi = A_z(r, \theta - \alpha z) + \alpha r A_{\theta}(r, \theta - \alpha z).$$

Отсюда следует, что все магнитные силовые линии лежат на поверхности $\psi = \text{const}$, а давление постоянно на этой поверхности, если $p = p(\psi)$. В частном случае трансляционной симметрии $\alpha = 0$ и $\psi = A_z(r, \theta)$. Для осесимметричной конфигурации $\psi = rA_\theta(r, z)$.

Задача 23.8. Рассмотрим дрейф ведущего центра заряженной частицы в тороидальном магнитном поле с компонентами

$$B_R = 0, \quad B_\phi = B_0 R_0 / R, \quad B_Z = 0,$$

заданными в цилиндрических координатах $\{R, \phi, Z\}$ (см. рис. 23.1 на с. 127). Азимутальная компонента B_ϕ называется *тороидальным полем*; её часто обозначают как B_t . Тороидальное поле уменьшается с удалением от оси Z по закону $1/R$. В плоскости $Z = \text{const}$ магнитные силовые линии образуют окружности с центром на оси Z , которую называют *главной осью тора*. Тороидальное поле по форме совпадает с магнитным полем прямого проводника с током, расположенным на главной оси, однако вне тороидальной катушки оно равно нулю.

Скорость ведущего центра складывается из скорости движения вдоль силовой линии, скорости градиентного и центробежного дрейфов и задана уравнением

$$\mathbf{v} = v_\parallel \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{mc}{eB_\phi R} \left(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2} \right) \hat{\mathbf{e}}_Z,$$

где $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ и $\hat{\mathbf{e}}_Z$ обозначают единичные векторы в направлениях ϕ и Z соответственно. Частицы в таком простом торе быстро движутся в тороидальном направлении и медленно дрейфуют вдоль оси Z со скоростью

$$v_Z \approx \frac{mc}{eB_0 R_0} \left(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2} \right) \sim \frac{\rho}{R_0} v.$$

Это движение называют *тороидальным дрейфом*. Ионы и электроны дрейфуют в противоположных направлениях вдоль оси Z , из-за чего происходит разделение зарядов и плазма поляризуется (рис. 23.4). Возникающее при этом электрическое поле E_Z создаёт электрический дрейф, который выносит ионы и электроны вместе наружу по радиусу. Следовательно, тороидальное магнитное поле не может удержать плазму, если поляризационное разделение зарядов не нейтрализовано каким-либо способом.

Задача 23.9. Представим, что магнитные силовые линии в торе соединяют верхнюю и нижнюю половины тора, обвиваясь вокруг магнитной оси, как показано на рисунке 23.8 на с. 136. Тогда разделение зарядов может быть закорочено, так как заряженные частицы смогут свободно двигаться вдоль силовых линий. С этой целью в тороидальной плазме возбуждают ток вдоль большого обвода тора. Он создаёт *полоидальное магнитное поле* B_p вокруг центральной

силовой линии, которую называют *магнитной осью*. Радиус магнитной оси R_0 называют большим радиусом тора, а радиус a поперечного сечения плазмы — малым радиусом. Обозначим радиальную координату в поперечном сечении плазмы через r , а угол вокруг магнитной оси $R = R_0$ — через θ (см. рис. 23.1 на с. 127). Если магнитная силовая линия после обхода вокруг главной оси тора в направлении тороидального угла ϕ поворачивается в плоскости рисунка на угол ι в направлении полоидального угла θ вокруг магнитной оси, то справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\iota r}{2\pi R} = \frac{B_p}{B_t},$$

где $B_p = B_\theta$, $B_t = B_\phi$. Угол ι называется углом *вращательного преобразования* и определяется формулой

$$\frac{\iota}{2\pi} = \frac{R}{r} \frac{B_p}{B_t}.$$

Если частица вращается вокруг тора с большой скоростью $v_{||}$, то время обращения равно $T = 2\pi R_0/v_{||}$. При этом вследствие вращательного преобразования частица вращается вокруг магнитной оси с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\iota}{T} = \frac{v_{||}}{2\pi R_0}$$

и дрейфует в направлении Z со скоростью v_{dr} . Если ввести координату $x = R - R_0$, то траектория ведущего центра частицы определяется уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = -\omega z, \quad \frac{dZ}{dt} = \omega x + v_{dr},$$

решение которых есть

$$\left(x + \frac{v_{dr}}{\omega} \right)^2 + Z^2 = r^2.$$

Из-за вращательного преобразования траектория частицы (в проекции на полоидальное сечение $\phi = \text{const}$) становится замкнутым кругом, центр которого смещён от магнитной оси на расстояние

$$\Delta = -\frac{v_{dr}}{\omega} = -\frac{v_{\perp}^2 + 2v_{||}^2}{2(eB_0/mc)R_0} \Big/ \frac{v_{||}}{2\pi R_0} = -\frac{2\pi}{\iota} \frac{v_{\perp}^2 + 2v_{||}^2}{2v_{||}(eB_0/mc)}.$$

По порядку величины

$$|\Delta| \sim \frac{2\pi}{\iota} \rho,$$

где ρ — ларморовский радиус. Знак смещения зависит от знака скорости $v_{||}$ и знака заряда e . В пределе $v_{||} \rightarrow 0$ полученная формула будет неверна, так как частица будет заперта в локальном минимуме магнитного поля на внешнем обводе тора.

Задача 23.10. Обозначим длину магнитной силовой линии s , а точку пересечения силовой линии с плоскостью (R, Z) цилиндрической системы координат $\{R, \phi, Z\}$ будем характеризовать полярными координатами (r, θ) вокруг магнитной оси, как показано на рисунке 23.1 на с. 127. Для простоты будем считать, что аспектное отношение велико, так что $r \ll R_0$. В случае $B_p \ll B_t$ величина магнитного поля приближённо равна

$$B \approx B_t = B_0 \frac{R_0}{R} = \frac{B_0}{1 + (r/R_0) \cos \theta} \approx B_0 \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta\right).$$

Так как

$$r\theta = \frac{B_p}{B_0} s,$$

имеем $\theta = ks$ (где $k = B_p/rB_0$) и

$$B = B_0 \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos(ks)\right).$$

Отсюда видно, что магнитное поле на силовой линии изменяется от минимального значения $B_{\min} = B_0(1 - r/R_0)$ на внешнем обводе тора (при $\theta = 0$) до максимального значения $B_{\max} = B_0(1 + r/R_0)$ на внутреннем обводе тора (при $\theta = \pi$), поэтому пробочное отношение равно $B_{\max}/B_{\min} \approx 1 + 2r/R_0$. Частица с малой продольной скоростью заперта вблизи внешнего обвода из-за отражения от магнитных пробок примерно так же, как она была бы заперта в пробкотроне (§6.4), если

$$\frac{v_\perp^2}{v^2} > \frac{B_{\min}}{B_{\max}} \approx 1 - \frac{2r}{R_0}.$$

У таких (запертых) частиц мала продольная скорость:

$$\frac{v_\parallel^2}{v^2} = \frac{v^2 - v_\perp^2}{v^2} < \frac{2r}{R_0}.$$

При $v_\parallel^2 \ll v_\perp^2$ радиальная компонента скорости тороидального дрейфа v_{dr} запертой частицы определяется выражением

$$\frac{dr}{dt} = v_{\text{dr}} \sin \theta = \frac{mc}{eB_0} \frac{v_\perp^2}{2R_0} \sin \theta.$$

Продольное движение ведущего центра подчиняется уравнению (§6.4)

$$\frac{dv_\parallel}{dt} = -\frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial s} = -\frac{\mu}{m} \frac{r}{R_0} kB_0 \sin(ks) = -\frac{v_\perp^2}{2R_0} \frac{B_p}{B_0} \sin \theta.$$

Комбинируя это и предыдущее уравнения, получаем

$$\frac{d}{dt} \left(r + \frac{mc}{eB_p} v_\parallel \right) = 0.$$

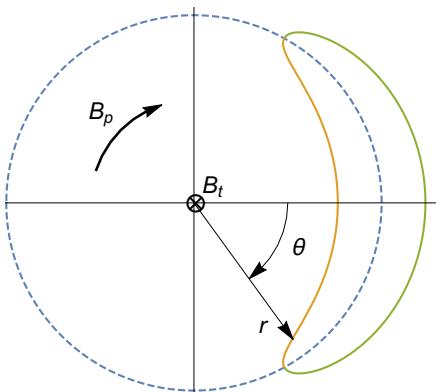


Рис. 23.10.1. Банановая траектория запертой частицы в тороидальном магнитном поле с вращательным преобразованием. Показана проекция трёхмерной траектории на меридиональное сечение тора. Частица заперта вблизи минимума магнитного поля на внешнем обводе тора.

Следовательно,

$$r = r_0 - \frac{mc}{eB_p} v_{\parallel},$$

где $r = r_0$ обозначает радиальную координату точки отражения частицы от магнитной пробки. В точке отражения v_{\parallel} и второе слагаемое в последней формуле меняют знак. Поэтому «вперёд» и «назад» частица движется с разными r , а найденная траектория имеет форму банана. В этой связи запертые частицы также иногда называют банановыми (рис. 23.10.1). Ширина банановой траектории оценивается следующим образом:

$$\Delta = \frac{mc}{eB_p} v_{\parallel} = \frac{mc}{eB_0 B_p} \frac{B_0}{v} v \sim \rho \frac{B_0}{B_p} \left(\frac{r}{R_0} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{2\pi}{\iota} \right) \left(\frac{R_0}{r} \right)^{1/2} \rho.$$

Здесь $\rho = v/(eB_0/mc)$ обозначает лармировский радиус запертой частицы, а также учтено, что

$$\frac{v_{\parallel}}{v} \sim \left(\frac{r}{R_0} \right)^{1/2}, \quad \frac{B_p}{B_0} = \frac{\iota r}{2\pi R_0},$$

где ι – угол вращательного преобразования.

Задача 23.11. Используем простейшую модель тороидальной плазмы, в которой контуры постоянного давления представляют собой набор вложенных приблизительно концентрических окружностей: $p = p(r)$. Геометрия показана на рисунке 23.1 на с. 127. В прямом цилиндре магнитное поле, действующее на плазму, имеет вид $\mathbf{B} = B_\theta(r) \hat{\mathbf{e}}_\theta + B_z(r) \hat{\mathbf{e}}_z$. В торе поле должно быть модифицировано, чтобы включить тороидальные эффекты. Уже было показано, что тороидальное поле изменяется как $1/R$ из-за тороидальности. Следовательно, хорошее приближение для тороидального поля, которое сочетает в себе баланс радиального давления и характеристики баланса тороидальной силы, можно записать в виде $B_\phi \approx B_\phi(r)(R_0/R)$.

Аналогичное масштабирование предполагается для полоидального магнитного поля, поскольку оно также уменьшается с большим радиусом: $B_\theta \approx B_\theta(r)(R_0/R)$. Фактическая форма полоидального поля в торе значительно сложнее (например, она включает в себя компоненту B_r по малому радиусу тора, а также дипольную диамагнитную компоненту). Однако предложенная выше простая форма отражает существенную физику и приводит лишь к небольшой ошибке в конечном результате. Полное полоидальное поле также должно содержать дополнительный вклад, представляющий приложенное вертикальное поле $\mathbf{B}_v = B_v \hat{\mathbf{e}}_Z = \text{const}$, которое требуется для удержания плазмы в тороидальном силовом балансе.

Подводя итог, можно предположить, что упрощённые формы давления и магнитных полей таковы:

$$\begin{aligned} p &= p(r), \\ \mathbf{B} &= \frac{R_0}{R} B_\phi(r) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{R_0}{R} B_\theta(r) \hat{\mathbf{e}}_\theta + B_v \hat{\mathbf{e}}_Z. \end{aligned} \quad (23.11.1)$$

Цилиндрические координаты $\{R, \phi, Z\}$ связаны с квазитороидальными координатами $\{r, \theta, \phi\}$ соотношениями

$$R = R_0 + r \cos(\theta), \quad Z = r \sin(\theta). \quad (23.11.2)$$

В системе координат $\{R, \phi, Z\}$ единичные орты в формуле для магнитного поля имеют компоненты

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \{\cos(\theta), 0, \sin(\theta)\}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \{-\sin(\theta), 0, \cos(\theta)\}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = \{0, 1, 0\}. \quad (23.11.3)$$

Чтобы найти плотность тока из уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (23.11.4)$$

нужно записать компоненты магнитного поля (23.11.1) в цилиндрической системе координат $\{R, \phi, Z\}$ и затем воспользоваться известными формулами для ротора вектора:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{B})_R &= \frac{1}{R} \frac{\partial B_Z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial Z}, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{B})_\phi &= \frac{\partial B_R}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial R}, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{B})_Z &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} (RB_\phi) - \frac{1}{E} \frac{\partial B_R}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Умножив результат скалярно на каждый из ортов (23.11.3), затем нетрудно вычислить компоненты тока в координатах $\{r, \theta, \phi\}$:

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \frac{R_0}{R} \frac{\partial B_\phi}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_0}{R} r B_\theta \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (23.11.5)$$

Менее трудоёмкий способ состоит в том, чтобы использовать формулу

$$(\operatorname{rot} \mathbf{B})_i = \frac{h_i \epsilon_{ijk}}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_j} (h_k B_k)$$

для ротора вектора в ортогональной системе координат; в этой формуле ϵ_{ijk} обозначает символ Леви-Чивиты, а $h_1 = h_r = 1$, $h_2 = h_\phi = R$, $h_3 = h_\theta = r$ — коэффициенты Ламэ. Завершая вычисления, запишем проекцию силы Ампера на направление большого радиуса тора:

$$\frac{1}{c} \hat{\mathbf{e}}_R \cdot [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] = -\cos(\theta) \left[\frac{R_0^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\phi^2}{8\pi} \right) + \frac{R_0}{R} \frac{B_\theta}{4\pi r} \left(\frac{R_0}{R} r B_\theta \right) \right] - \frac{B_v}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_0}{R} r B_\theta \right). \quad (23.11.6)$$

Задача 23.12. Искомая сила выражается интегралом

$$\hat{\mathbf{e}}_R \cdot \left[\frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \right] d^3r.$$

С учётом (23.11.6) подынтегральное выражение содержит 4 члена. Соответственно, можно выделить 4 силы. Последовательно вычислим каждую из них.

Шинная сила возникает из градиента давления и определена как

$$f_p = - \int (\hat{\mathbf{e}}_R \cdot \nabla p) d^3r = -2\pi \int \left(\frac{\partial p}{\partial r} \cos(\theta) \right) R r dr d\theta,$$

где было использовано соотношение $d^3r = 2\pi R r dr d\theta$ для осесимметричного тора. Напомним, что $R = R_0 + r \cos(\theta)$, и обратим внимание, что член с R_0 исчезает при интегрировании по θ . Оставшийся член может быть легко проинтегрирован, давая желаемое выражение для силы:

$$f_p = -2\pi^2 \int_0^a r^2 \frac{\partial p}{\partial r} dr = 2\pi^2 a^2 \bar{p},$$

где черта сверху означает среднее по сечению плазмы. Так как $f_p > 0$, сила направлена в сторону от большой оси тора.

Вклад тороидального поля даёт интеграл

$$f_t = -\frac{R_0^2}{4} \int \left(\frac{\partial B_\phi^2}{\partial r} \right) \frac{\cos(\theta)}{R} r dr d\theta.$$

Интеграл может быть легко оценён для тора с большим аспектным соотношением, что подразумевает $r/R_0 \ll 1$ и поэтому

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{R_0} \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos(\theta) \right).$$

Интегрирование приводит к выражению, которое можно записать в виде

$$f_t = \frac{\pi}{4} \int_0^a r^2 \frac{\partial B_\phi^2}{\partial r} dr = 2\pi^2 a^2 \left(\frac{B_\phi^2(a)}{8\pi} - \frac{\overline{B_\phi^2}}{8\pi} \right).$$

Здесь $B_\phi(a)$ — приложенное тороидальное магнитное поле при $R = R_0$, когда плазмы нет. Сила направлена наружу вдоль R (то есть положительна), когда тороидальное поле является диамагнитным, $B_\phi^2(a) > \overline{B_\phi^2}$, и направлена внутрь, когда оно парамагнитно.

Вклад полоидального поля даёт интеграл

$$f_p = -\frac{R_0}{2} \int B_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_0}{R} r B_\theta \right) \cos(\theta) dr d\theta.$$

Вновь используя приближение $r \ll R_0$, получаем

$$\begin{aligned} f_p &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty B_\theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_\theta) dr = \frac{\pi}{4} \left(r^2 B_\theta^2 \Big|_\infty + 2 \int_0^\infty r B_\theta^2 dr \right) = \\ &= \frac{\pi a^2}{4} \left(B_\theta^2(a) + \frac{2}{a^2} \int_0^\infty r B_\theta^2 dr \right), \end{aligned}$$

где было использовано соотношение $r B_\theta \Big|_\infty = 2I/c = a B_\theta(a)$ для тока, ограниченного областью $r < a$. Интеграл по r несколько сложен. Причина в том, что хотя предполагается, что плотность тороидального тока обращается в нуль при $r = a$, все ещё существует вакуумное полоидальное магнитное поле, которое пропорционально I/r при $r > a$. Это приводит к логарифмической расходимости в интеграле при $r \rightarrow \infty$. На практике интеграл конечен, потому что магнитная энергия, запасённая в вакуумной области, окружающей круглую петлю провода, конечна. Следовательно, для получения правильного выражения не нужно вычислять предел $r \rightarrow \infty$, а вместо этого взять предел $r \rightarrow R_0$, соответствующий центру провода. Однако в этом режиме приближение большого аспектного отношения нарушается. Точные вычисления весьма сложны и приводят к такому результату [10, §11.7.7]:

$$f_p = 2\pi^2 a^2 (l_i + l_e + 1) \frac{B_\theta^2(a)}{8\pi},$$

где $l_i \leq \frac{1}{2}$ — внутренняя часть удельной (в расчёте на единицу длины) индуктивности плазменного шнура, $l_e = 2 \ln(R_0/a) - 4$ — внешняя часть удельной индуктивности.

Наконец, *вклад вертикального поля* даёт интеграл

$$f_v = -\frac{R_0 B_v}{2} \int R \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r B_\theta}{R} \right) dr d\theta.$$

В главном порядке разложения по малому параметру r/R_0 получаем

$$f_v = -\pi R_0 B_v (r B_\theta) \Big|_{r \rightarrow \infty} = -2\pi R_0 B_v I/c,$$

так как $B_\theta = 2I/cr$ при $r \rightarrow \infty$.

В равновесии сумма всех четырёх сил должна быть равна нулю. Из этого условия можно найти величину вертикального магнитного поля B_v , необходимую для удержания плазменного шнура:

$$\frac{B_v}{B_\theta(a)} = \frac{a}{4R_0} \left[\frac{8\pi\bar{p}}{B_\theta^2(a)} + \frac{B_\phi^2(a) - \bar{B}_\phi^2}{B_\theta^2(a)} + l_i + l_e + 2 \right]. \quad (23.12.1)$$

В дополнение к физической интуиции, представленной уравнением (23.12.1), эта относительно простая формула, впервые полученная [В. Д. Шафрановым](#), дала очень полезные рекомендации по проектированию схем ранних экспериментов с токамаком. С тех пор были разработаны сложные числовые коды, которые включают в себя эффекты конечной тороидальности и некруглых сечений. Эти коды служат основой для разработки современных экспериментов.

Лекция 24

Задача 24.1. Получим уравнение (22.1), которое описывает равновесие в пинче, предельным переходом из уравнения Грэда—Шафранова

$$\frac{dp}{d\psi} = -\frac{1}{4\pi R^2} \Delta^* \psi - \frac{2\pi}{c^2 R^2} \frac{di_p^2}{d\psi} \quad (24.1.1)$$

при стремлении большого радиуса R к бесконечности. Обратившись к рисунку 23.1, нетрудно видеть, что сегмент тора, опирающийся на небольшой азимутальный угол $\Delta\phi$, можно рассматривать как участок пинча длиной $\Delta z = R\Delta\phi$, если пренебречь искривлением оси сегмента, которое мало в пределе $R \rightarrow \infty$. Первым делом выразим координаты $\{R, \phi, Z\}$ цилиндрической системы с осью Z вдоль большой оси тора через координаты цилиндрической системы $\{r, \theta, z\}$, связанной с пинчем:

$$R = R_0 + r \cos \theta, \quad Z = -r \sin \theta.$$

Делая подстановку $\nabla\phi = (1/R_0)\nabla z$, перепишем формулу (24.13) в виде

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_0} [\nabla\psi \times \nabla z] + \frac{4\pi i_p}{cR_0} \nabla z. \quad (24.1.2)$$

Поскольку в пинче полоидальный магнитный поток ψ зависит только от r , отсюда следует, что

$$B_r = 0, \quad B_\theta = -\frac{1}{R_0} \frac{d\psi}{dr}, \quad B_z = \frac{4\pi i_p}{cR_0}. \quad (24.1.3)$$

Уравнение (24.1.1) домножим на $d\psi/dr$ и заметим, что

$$\frac{d\psi}{dr} \frac{dp}{d\psi} = \frac{dp}{dr}, \quad \frac{d\psi}{dr} \frac{di_p^2}{d\psi} = \frac{di_p^2}{dr}.$$

Кроме того, нужно учесть, что при $R_0 \rightarrow \infty$

$$\Delta^* \psi = R^2 \operatorname{div} \left(\frac{1}{R^2} \nabla \psi \right) = \operatorname{div} \nabla \psi = \nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr}.$$

Наконец, заменив R на R_0 в коэффициентах слагаемых в правой части уравнения (24.1.1), приводим его к виду

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{4\pi R_0^2} \frac{d\psi}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr} - \frac{2\pi}{c^2 R_0^2} \frac{di_p^2}{dr}.$$

Выражая теперь производную $d\psi/dr$ и ток i_p через компоненты магнитного поля B_θ и B_z , получаем искомое уравнение

$$\frac{dp}{dr} + \frac{d}{dr} \frac{B_z^2}{8\pi} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \frac{r^2 B_\theta^2}{8\pi},$$

которое совпадает с (22.1).

Задача 24.3. По определению, шир

$$S = \frac{d \ln(q)}{d \ln(r)} = \frac{r}{q} \frac{dq}{dr}$$

выражается через логарифмическую производную запаса устойчивости q . Из формулы (24.26) следует, что ширина магнитного острова Δr_{mn} обратно пропорциональна квадратному корню из ширы. С другой стороны, расстояние между островами $|r_{mn} - r_{m'n'}|$ обратно пропорционально шире. Поэтому при заданной амплитуде возмущения радиального поля большой шир более благоприятен для перекрытия островов. Считается, что перекрытие островов усиливает процессы переноса поперёк магнитного поля.

Задача 24.4. Да, да.

Задача 24.5. Ищем решение уравнения (24.18) как сумму $\psi = \psi_0 + \psi_1$ частного решения

$$\psi_0 = \frac{A}{8} (R^2 - R_0^2)^2 + \frac{C}{2} Z^2$$

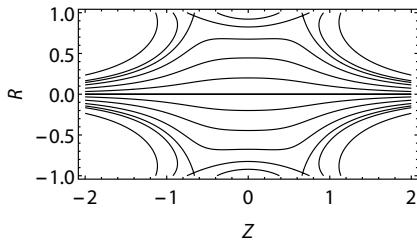


Рис. 24.5.1. Пример решения уравнения (24.18), которое моделирует пробкотрон.

неоднородного уравнения $\Delta^* \psi = AR^2 + C$ и решения однородного уравнения $\Delta^* \psi = 0$. Отталкиваясь от примеров, рассмотренных в §24.3, решение однородного уравнения запишем в виде полинома шестого порядка

$$\psi_1 = \frac{1}{2}B_0R^2 + D\left[\frac{1}{2}R^2Z^2 - \frac{1}{8}(R^2 - R_0^2)^2\right] + E[R^6 - 12R^4Z^2 + 8R^2Z^4],$$

зависящего от трёх параметров: B_0 , D и E . Пример такого решения показан на рисунке 24.5.1 при $A = 1$, $C = 0$, $R_0 = 0$, $B_0 = 1$, $D = 1$, $E = 1/8$. Нетрудно проверить, что при условии $C = 0$ параметр B_0 имеет смысл минимального магнитного поля в центре ловушки при $R = Z = 0$.

Задача 24.6.

$$L = \int \left[\frac{1}{8\pi} \left(\frac{\nabla \psi}{R} \right)^2 - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi i_p}{cR} \right)^2 - p(\psi) \right] R \, dR \, dZ.$$

Задача 24.7. Рассмотрим поперечное сечение плазменного шнура, как показано на рисунке 24.1. Если в прямом шнуре (т. е. в пинче) магнитные поверхности в поперечном сечении представляли собой систему концентрических окружностей, то в торе, как мы увидим, эти окружности будут смещены от магнитной оси тора и несколько деформированы. В линейном по a/R_0 приближении искажением окружностей можно пренебречь, так что тороидальность скрывается лишь в смещении окружностей. Это смещение обозначим через $\Delta(r)$, где r — малый радиус магнитной поверхности. Будем считать, что величина Δ определена таким образом, что на магнитной оси (то есть окружности радиуса R_0) она равна нулю.

Наряду с r введём ещё азимут θ и продольную координату z — длину вдоль магнитной оси. Теперь это будут уже не цилиндрические координаты, а криволинейные координаты на торе (см. рис. 23.1), которые только в пределе $R_0 \rightarrow \infty$ переходят в цилиндрические. Цилиндрические координаты $\{r, \theta, z\}$ связаны с координатами тора $\{R, \phi, Z\}$ уравнениями

$$R = R_0 + r \cos \theta, \quad Z = -r \sin \theta, \quad z = R_0 \phi. \quad (24.7.1)$$

Смещение Δ магнитной поверхности по большому радиусу зависит от давления плазмы и с ростом давления увеличивается. Чтобы найти Δ , нужно учесть, что в тороидальной геометрии компоненты магнитного поля не постоянны, а слабо зависят от θ . Обозначим эти компоненты через $B_p = B_\theta$ и $B_t = B_z$. Компонента B_p в тороидальной геометрии называется полоидальной, а тороидальная компонента B_t является аналогом продольного поля B_z в геометрии прямого пинча.

Чтобы вычислить деформацию магнитных поверхностей в токамаке, обратимся к уравнению Грэда—Шафранова (24.15), которое воспроизведём здесь для удобства:

$$\Delta^* \psi = -4\pi R^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{8\pi^2}{c^2} \frac{di_p^2}{d\psi}. \quad (24.7.2)$$

Напомним, что полоидальный магнитный поток ψ считается функцией координат R и Z , а оператор $\Delta^* \psi$ определён как

$$\Delta^* \psi = R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2}. \quad (24.7.3)$$

Давление p и полоидальный ток i_p нужно рассматривать как заданные функции переменной ψ . Введём обозначения

$$A = -4\pi \frac{dp}{d\psi}, \quad C = -\frac{8\pi^2}{c^2} \frac{di_p^2}{d\psi} \quad (24.7.4)$$

и перепишем уравнение (24.7.3) в виде

$$\Delta^* \psi = AR^2 + C. \quad (24.7.5)$$

Затем преобразуем оператор

$$\Delta^* \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) \psi - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}$$

к цилиндрической системе координат, связанной с малым сечением тора. Для этого заметим, что

$$\Delta^* \psi = \nabla^2 \psi - \frac{1}{R} \hat{\mathbf{e}}_R \cdot \nabla \psi,$$

где

$$\nabla^2 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2},$$

а $\hat{\mathbf{e}}_R$ — единичный вектор в направлении оси R . Так как

$$\hat{\mathbf{e}}_R \cdot \nabla \psi = \hat{\mathbf{e}}_R \cdot \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

получаем

$$\Delta^* \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R_0 + r \cos \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right). \quad (24.7.6)$$

Теперь воспользуемся малостью a/R_0 . В нулевом порядке комбинирование уравнений (24.7.5) и (24.7.6) даёт

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2} = AR_0^2 + C. \quad (24.7.7)$$

Отсюда для случая, когда ψ_0 не зависит от θ , можно получить уравнение (22.16) равновесия в пинче. Для этого нужно проинтегрировать уравнение (24.7.7) по r от 0 до a с весом $r^2 d\psi_0/dr$.

Допустим, мы нашли ψ_0 . Учтём тогда слабую тороидальность как малую поправку $\psi_1(r, \theta)$:

$$\psi = \psi_0(r) + \psi_1(r, \theta). \quad (24.7.8)$$

Для неё из (24.7.5) получаем уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R_0} \left(\cos \theta \frac{d\psi_0}{dr} \right) = A(\psi_0) 2R_0 r \cos \theta + \frac{dA}{d\psi_0} \psi_1 R_0^2 + \frac{dC}{d\psi_0} \psi_1.$$

Отыскивая его решение в виде

$$\psi_1 = \eta(r) \cos \theta, \quad (24.7.9)$$

для функции $\eta(r)$ приходим к уравнению

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \eta - \left[\frac{dA}{d\psi_0} R_0^2 + \frac{dC}{d\psi_0} \right] \eta = \frac{1}{R_0} \frac{d\psi_0}{dr} + 2A(\psi_0) R_0 r, \quad (24.7.10)$$

где мы учли легко проверяемое тождество

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\eta}{dr} - \frac{\eta}{r^2} = \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \eta.$$

Если удастся вычислить η , то можно будет найти уравнение магнитной поверхности

$$\psi = \psi_0(r) + \eta(r) \cos \theta = \text{const.}$$

Подставляя сюда

$$r = r_0 + r_1(r_0, \theta), \quad (24.7.11)$$

где поправка r_1 считается малой, приближённо имеем уравнение

$$\psi_0(r_0) + \frac{d\psi_0}{dr_0} r_1(r_0, \theta) + \eta(r_0) \cos \theta = \text{const} = \psi_0(r_0),$$

откуда следует, что

$$r_1(r_0, \theta) = \Delta(r_0) \cos \theta, \quad \Delta(r_0) = -\frac{\eta(r_0)}{d\psi_0/dr_0}. \quad (24.7.12)$$

Такое решение означает, что магнитная поверхность остаётся почти круглой, но смещается относительно магнитной оси на расстояние $\Delta(r_0)$, которое зависит от среднего радиуса магнитной поверхности.

Рассмотрим конкретный пример равновесия в торе. Будем считать, что в нулевом приближении плотность тороидального тока однородна внутри шнура плазмы, т. е.

$$J_t = \text{const}, \quad (24.7.13)$$

а распределение давления по малому радиусу тора описывается параболой:

$$p = p_0 \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right]. \quad (24.7.14)$$

При этом тороидальный ток через круг радиуса r внутри шнура также имеет параболический профиль

$$I_t = \pi r^2 J_t,$$

а полоидальное магнитное поле линейно зависит от малого радиуса:

$$B_p = \frac{2I_t}{cr} = \frac{2\pi J_t}{c} r. \quad (24.7.15)$$

Выразим его через величину полоидального магнитного поля на границе шнура при $r = a$:

$$B_p(r) = B_p(a) \frac{r}{a}. \quad (24.7.16)$$

С другой стороны, полоидальное магнитное поле связано с полоидальным магнитным потоком уравнением

$$\mathbf{B}_p = [\nabla \psi \times \nabla \phi],$$

откуда в нулевом приближении находим, что

$$B_p = -\frac{1}{R} \frac{d\psi_0}{dr}. \quad (24.7.17)$$

Комбинируя формулы (24.7.16) и (24.7.17), выражаем функцию $\psi_0(r)$ через $B_p(a)$:

$$\psi_0 = \psi_{00} - R_0 B_p(a) \frac{r^2}{2a}.$$

Опуская несущественную для дальнейшего константу ψ_{00} , перепишем этот результат в виде

$$\psi_0 = \alpha r^2, \quad (24.7.18)$$

где

$$\alpha = -B_p(a) \frac{R_0}{2a}. \quad (24.7.19)$$

Теперь с помощью (24.7.14) можно восстановить зависимость давления от полоидального магнитного потока:

$$p = p_0 \left[1 - \frac{\psi}{\alpha a^2} \right]. \quad (24.7.20)$$

Отсюда следует, что коэффициент A является константой:

$$A = -4\pi \frac{dp}{d\psi} = 4\pi \frac{p_0}{\alpha a^2} = \text{const.} \quad (24.7.21)$$

Обратившись теперь к уравнению (24.7.7), замечаем, что его левая часть равна 4α , поэтому

$$4\alpha = 4\pi \frac{p_0}{\alpha a^2} R_0^2 + C.$$

Отсюда можно найти коэффициент C . Как и коэффициент A , он оказывается константой, причём точное значение этой константы для дальнейшего не имеет значения, поскольку в уравнение (24.7.10) входит только производная $dC/d\psi_0$, которая для константы C равна нулю. Поскольку производная $dA/d\psi_0$ также равна нулю, второе слагаемое в левой части уравнения (24.7.10) обращается в нуль и мы приходим к уравнению

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r\eta = \frac{1}{R_0} \frac{d\psi_0}{dr} + 2A(\psi_0) R_0 r = \left[\frac{2\alpha}{R_0} + \frac{8\pi p_0 R_0}{\alpha a^2} \right] r. \quad (24.7.22)$$

Общее решение этого уравнения

$$\eta = \frac{1}{8} \left[\frac{2\alpha}{R_0} + \frac{8\pi p_0 R_0}{\alpha a^2} \right] r^3 + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (24.7.23)$$

зависит от двух констант C_1 и C_2 . Константу C_2 нужно считать равной нулю, чтобы исключить нереалистичный случай $\eta \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Выбор константы C_1 , как будет ясно из дальнейшего, задаёт величину смещения магнитной оси относительно начала координат $r = 0$. Выбор начала координат в некоторых пределах произволен и определяется соображениями удобства (см. ниже). Выберем C_1 так, чтобы при $r = a$ имело место равенство $\eta = 0$. Тогда внутри плазменного шнуря

$$\eta = \frac{1}{8} \left[\frac{2\alpha}{R_0} + \frac{8\pi p_0 R_0}{\alpha a^2} \right] (r^3 - a^2 r).$$

Вводя обозначение

$$\bar{\beta} = \frac{8\pi \bar{p}}{B_p^2(a)},$$

где

$$\bar{p} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p_0 [1 - r^2/a^2] 2\pi r dr = \frac{p_0}{2}$$

есть среднее по сечению плазменного шнуря давление плазмы, полученный результат можно представить в запоминающейся форме:

$$\eta(r) = -\frac{\alpha r}{R_0} (a^2 - r^2) \left(\bar{\beta} + \frac{1}{4} \right). \quad (24.7.24)$$

Подставляя этот результат в формулу (24.7.12) и учитывая (24.7.18), находим смещение центра магнитной поверхности с малым радиусом r относительно центра пограничной поверхности с малым радиусом $r = a$:

$$\Delta(r) = -\frac{\eta}{d\psi_0/dr} = \frac{a^2 - r^2}{2R_0} \left(\bar{\beta} + \frac{1}{4} \right). \quad (24.7.25)$$

Величину $\Delta(r)$ называют смещением Шафранова. Тот факт, что $\Delta > 0$, означает, что магнитная ось $r = 0$ смещена в сторону от главной оси тора относительно поверхности плазменного шнуря $r = a$, как показано на рисунке 24.1.

Чтобы найти смещение поверхности плазменного шнуря относительно проводящих стенок вакуумной камеры, нужно «сшить» найденное решение с решением однородного уравнения Грэда—Шафранова

$$\Delta^* \psi = 0 \quad (24.7.26)$$

в вакуумном зазоре между плазменным шнуром и проводящими стенками вакуумной камеры. Здесь, как и внутри шнуря, решение можно искать в виде

$$\psi = \tilde{\psi}_0(r) + \tilde{\eta}(r) \cos \theta,$$

но с другими функциями $\tilde{\psi}_0(r)$ и $\tilde{\eta}(r)$. Уравнения для этих функций получаем из уравнений (24.7.7) и (24.7.10) при подстановке $A = 0$, $C = 0$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\tilde{\psi}_0}{dr} = 0, \quad (24.7.27)$$

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \tilde{\eta} = \frac{1}{R_0} \frac{d\tilde{\psi}_0}{dr}. \quad (24.7.28)$$

На границе плазменного шнуря должны быть непрерывны сама функция ψ и её производная $\partial\psi/\partial n$ по направлению нормали к границе. Выше мы выбрали константу интегрирования C_1 в выражении (24.7.23) так, чтобы в полярной системе координат $\{r, \theta\}$ поверхность плазменного шнуря была окружностью $r = a = \text{const}$. Поэтому граничные условия на поверхности плазмы эквивалентны требованию, чтобы равенства

$$\psi_0 + \eta \cos \theta = \tilde{\psi}_0 + \tilde{\eta} \cos \theta,$$

$$\frac{d}{dr} [\psi_0 + \eta \cos \theta] = \frac{d}{dr} [\tilde{\psi}_0 + \tilde{\eta} \cos \theta]$$

были выполнены при $r = a$ и всех углах θ . Поскольку $\eta = 0$ при $r = a$, первое условие означает, что

$$\tilde{\psi}_0 = \alpha a^2, \quad (24.7.29)$$

$$\tilde{\eta} = 0 \quad (24.7.30)$$

при $r = a$. Второе условие приводит к уравнениям

$$\frac{d\tilde{\psi}_0}{dr} \Big|_{r=a} = 2\alpha a, \quad (24.7.31)$$

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{2a^2\alpha}{R_0} \left(\bar{\beta} + \frac{1}{4} \right). \quad (24.7.32)$$

Решение уравнения (24.7.27), совместимое с граничными условиями (24.7.29) и (24.7.31), имеет вид

$$\tilde{\psi}_0 = \alpha a^2 [1 + 2 \ln(r/a)]. \quad (24.7.33)$$

Подставляя это выражение в уравнение (24.7.28), находим его решение

$$\tilde{\eta} = -\frac{\alpha a^2}{rR_0} \left[\left(\bar{\beta} - \frac{1}{4} \right) (a^2 - r^2) - r^2 \ln(r/a) \right], \quad (24.7.34)$$

удовлетворяющее условиям (24.7.30) и (24.7.32).

Наконец, предположим, что сечение идеально проводящей вакуумной камеры в выбранной системе координат описывается уравнением

$$r = b + \Delta b \cos \theta. \quad (24.7.35)$$

Оно соответствует кругу радиуса $r = b$, центр которого смещён на расстояние Δb от точки $r = 0$ в сторону от оси тора (если $\Delta b > 0$). Если считать, что магнитное поле не проникает в стенки камеры, нужно признать, что оно тангенциальность поверхности стенки, а поэтому поверхность с малым радиусом (24.7.35) является магнитной поверхностью, где

$$\tilde{\psi}_0(r) + \tilde{\eta}(r) \cos \theta = \text{const}. \quad (24.7.36)$$

Подставляя (24.7.35) в (24.7.36), разложим $\tilde{\psi}(r)$ по малой величине смещения Δb :

$$\frac{d\tilde{\psi}_0(b)}{db} \Delta b \cos \theta + \tilde{\eta}(b) \cos \theta = 0.$$

Отсюда находим искомое смещение:

$$\Delta b = -\frac{b^2}{2R_0} \left[\left(\bar{\beta} - 1/4 \right) \left(1 - a^2/b^2 \right) + \ln(b/a) \right]. \quad (24.7.37)$$

В предельном случае $b = a$, когда плазменный шнур касается стенок камеры, $\Delta b = 0$. Смещение магнитной оси относительно стенок вакуумной камеры вычисляется как разность $\Delta(0)$ и Δb :

$$\Delta(0) - \Delta b = \frac{2a^2 + b^2 \left(4\bar{\beta} - 1 \right) + 4b^2 \ln(b/a)}{8R_0}. \quad (24.7.38)$$

Оно положительно при любом отношении b/a и любой величине $\bar{\beta}$, поэтому магнитная ось всегда смещена к внешнему обводу тора.

Лекция 25

Задача 25.2. Исследовав начальное поле скоростей, предположим, что возбуждается альфвеновская волна. Легко проверить, что вектор смещений вида

$$\xi = \frac{1}{2c_A} \{-y, x, 0\} \int_{z-c_A t}^{z+c_A t} \omega(z') dz'$$

удовлетворяет уравнениям (25.11) и (25.12), характеризующим альфвеновскую волну, начальному условию $\xi = 0$ и создаёт поле скоростей $\mathbf{V} = \partial\xi/\partial t$, совпадающее с заданным в условиях задачи при $t = 0$. Вычислив $\delta\mathbf{B} = \text{rot}[\xi \times \mathbf{B}]$, находим возмущение магнитного поля в произвольный момент времени $t > 0$:

$$\delta\mathbf{B} = \frac{B}{2c_A} \{-y, x, 0\} [\omega(z + c_A t) - \omega(z - c_A t)].$$

Таким образом, начальное возмущение создаёт две альфвеновские волны, бегущие вдоль магнитного поля в противоположные стороны. Профиль вдоль z каждой волны совпадает с профилем начального возмущения скорости и не меняется со временем.

Задача 25.3. Энергия альфвеновской волны W складывается из двух равных частей: кинетической энергии плазмы $\rho(\delta\mathbf{V})^2/2$ и энергии магнитного поля волны $(\delta\mathbf{B})^2/8\pi$. Равенство двух видов энергии можно проверить следующим образом. Из уравнений (25.7) и (25.11) следует, что в альфвеновской волне

$$\delta\mathbf{B} = B \partial\xi_\perp / \partial z.$$

С другой стороны,

$$\delta\mathbf{V} = \partial\xi / \partial t = \partial\xi_\perp / \partial t.$$

Для плоской волны $\partial\xi/\partial t = \pm c_A \partial\xi_\perp / \partial z$. Отсюда следует, что

$$\delta\mathbf{B}/B = \pm \delta\mathbf{V}/c_A$$

и далее

$$(\delta\mathbf{B})^2/8\pi = (B \delta\mathbf{V}/c_A)^2/8\pi = \rho(\delta\mathbf{V})^2/2,$$

так как $c_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$. Складывая энергию кинетического движения и энергию магнитного поля, следует учесть, что дополнительный множитель $\frac{1}{2}$ даёт ещё усреднение по периоду волны, если условиться, что $\delta\mathbf{V}$ и $\delta\mathbf{B}$ обозначают амплитуды возмущений соответственно скорости и магнитного поля, поэтому

$$W = \frac{1}{2} \rho (\delta\mathbf{V})^2 = \frac{1}{8\pi} (\delta\mathbf{B})^2.$$

Поток энергии

$$\mathbf{S} = \pm \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi\rho}} W$$

в альфвеновской волне направлен вдоль магнитного поля и соответствует переносу энергии волны с групповой скоростью, которая равна альфвеновской скорости c_A .

Задача 25.4. Повторим для удобства систему уравнений (19.17) резистивной МГД:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (25.4.1a)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma p \operatorname{div} \mathbf{V} + \frac{\gamma-1}{\sigma} J^2, \quad (25.4.1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (25.4.1c)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}]. \quad (25.4.1d)$$

Если в равновесном состоянии плазма неподвижна, тогда нужно считать, что $\mathbf{V} = 0$, как и все производные по времени: $d\rho/dt = 0$, $d\mathbf{V}/dt = 0$, $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, $dp/dt = 0$. При этом из уравнений (25.4.1c) и (25.4.1d) следует, что $\nabla^2 \mathbf{B} = 0$, $J = 0$, то есть магнитное поле однородно, а равновесный ток в ней отсутствует. Согласно уравнению (25.4.1d) в однородном магнитном поле однородно также давление плазмы p , но тогда однородной должна быть также плотность плазмы ρ . Линеаризуя уравнения (25.4.1) с учётом этих фактов, получим систему линейных уравнений

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = -\rho \operatorname{div}(\delta\mathbf{V}), \quad (25.4.2a)$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = -\gamma p \operatorname{div} \delta\mathbf{V}, \quad (25.4.2b)$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\delta\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \delta\mathbf{B}, \quad (25.4.2c)$$

$$\rho \frac{\partial \delta\mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla \delta p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \delta\mathbf{B} \times \mathbf{B}], \quad (25.4.2d)$$

которая отличается от (25.2) тем, что в уравнении (25.4.2c) добавлено второе слагаемое (с коэффициентом проводимости); резистивное слагаемое в уравнении (25.4.2b) выпало, поскольку оно квадратично по малому возмущению плотности тока δJ . Повторяя далее вычисления, выполненные в §25.1, с самого начала примем во внимание, что в альфвеновских колебаниях

$$\xi_{\parallel} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_{\perp} = 0. \quad (25.4.3)$$

Тогда $\delta p = 0$, $\delta \rho = 0$, а вместо (25.7) получим уравнение

$$\frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} = B \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t \partial z} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \delta \mathbf{B}, \quad (25.4.4)$$

которое нужно решать совместно с уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \delta \mathbf{B} \times \mathbf{B}]. \quad (25.4.5)$$

В случае плоской волны, такой что ξ_{\perp} и $\delta \mathbf{B}$ пропорциональны $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, отсюда приходим к системе уравнений

$$\left(-i\omega + \frac{k^2 c^2}{4\pi\sigma} \right) \delta \mathbf{B} = \omega k_{\parallel} B \xi_{\perp}, \quad (25.4.6)$$

$$-\omega^2 \rho \xi_{\perp} = \frac{1}{4\pi} [[i\mathbf{k} \times \delta \mathbf{B}] \times \mathbf{B}]. \quad (25.4.7)$$

Согласно первому из уравнений возмущение магнитного поля $\delta \mathbf{B}$ параллельно ξ_{\perp} и, следовательно, перпендикулярно \mathbf{B} . С учётом этого обстоятельства второе уравнение упрощается и принимает вид

$$-\omega^2 \rho \xi_{\perp} = i \frac{k_{\parallel} B}{4\pi} \delta \mathbf{B}. \quad (25.4.8)$$

Исключая из уравнений (25.4.6) и (25.4.8) либо ξ_{\perp} , либо $\delta \mathbf{B}$, получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 + i\omega \frac{k^2 c^2}{4\pi\sigma} = k_{\parallel}^2 c_A^2. \quad (25.4.9)$$

Оно имеет два решения

$$\omega_{\pm} = -i \frac{k^2 c^2}{8\pi\sigma} \pm \sqrt{k_{\parallel}^2 c_A^2 + \left(\frac{k^2 c^2}{8\pi\sigma} \right)^2}. \quad (25.4.10)$$

Оба они описывают затухающие волны с декрементом $\Gamma = -\text{Im } \omega = k^2 c^2 / 8\pi\sigma$.

Задача 25.5. $\mathbf{k}_{\perp} = 0$, $c_s = c_A$, вектор смещения ξ может иметь любое направление.

Задача 25.6. Первым о взрыве узнает наблюдатель на том направлении, где максимальна групповая скорость. Из рисунка 25.3в,г на с. 171 видно, что при любом соотношении скоростей c_s и c_A максимальную групповую скорость имеет быстрая магнитозвуковая волна, которая распространяется под углом 90° к направлению магнитного поля, её групповая скорость равна $v_g = \sqrt{c_s^2 + c_A^2}$. Групповая скорость волны в направлении 0° равна $\max(c_s, c_A)$. Чтобы вычислить групповую скорость в направлении 45° , нужно найти такое направление волнового вектора, при котором продольная и перпендикулярная магнитному полю проекции групповой скорости одинаковы. При произвольном отношении c_s/c_A это удаётся сделать только численно.

Задача 25.7. Для смещений вида

$$\xi = \xi(x) \hat{x}$$

из формул (25.4) и (25.7) находим возмущения плотности и магнитного поля

$$\delta\rho = -\rho \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad \delta B = -B \frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

Отсюда $\delta\rho/\rho = \delta B/B$. Используя далее уравнение адиабаты Чу—Голдбергера—Лоу

$$\delta \left(\frac{p_\perp}{\rho B} \right) = 0$$

(см. §20.3), находим возмущение поперечного давления плазмы

$$\delta p_\perp = 2p_\perp \frac{\delta B}{B}.$$

Возмущение магнитного давления $p_m = B^2/8\pi$ также выражаем через возмущение магнитного поля:

$$\delta p_m = 2p_m \frac{\delta B}{B}.$$

Подставляя эти величины в уравнение для смещения плазмы

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} (\delta p_\perp + \delta p_m),$$

а также используя обозначения $c_s = \sqrt{2p_\perp/\rho}$ и $c_A = \sqrt{2p_m/\rho} = B/\sqrt{4\pi\rho}$, получаем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (c_s^2 + c_A^2) \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2}. \quad (25.7.1)$$

Это уравнение нужно дополнить граничными условиями на поверхности плазменного слоя при $x = \pm a/2$. Одно граничное условие — непрерывность нормальной проекции магнитного поля — выполняется автоматически, так как и снаружи, и внутри плазмы она равна нулю. Тангенциальная проекция магнитного поля терпит разрыв на границе плазмы, так как по поверхности плазмы течёт ток, уравновешивающий разность давлений внутри (in) и снаружи (out), но суммарное давление плазмы и магнитного поля непрерывно:

$$(p_\perp + p_m)_{in} = (p_m)_{out}.$$

Соответствующее граничное условие для возмущений магнитного поля проще всего получить, приравнивая возмущение давлений:

$$\left[2(p_\perp + p_m) \frac{\delta B}{B} \right]_{in} = \left[2p_m \frac{\delta B}{B} \right]_{out}.$$

Будем считать, что вне плазмы $\delta B_{\text{out}} = 0$. Это верно, если внешнее магнитное поле создаётся катушками достаточно большого размера по сравнению с толщиной слоя плазмы a . Тогда внутри плазмы на её границе из последнего равенства следует, что $\delta B_{\text{in}} = 0$, т. е.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (25.7.2)$$

при $x = \pm a/2$. Решение уравнения (25.7.1) с граничным условием (25.7.2) имеет вид

$$\xi = \xi_0 \cos(kx) \cos(\omega t), \quad (25.7.3)$$

причём

$$k = 2\pi n/a, \quad \omega = k\sqrt{c_s^2 + c_A^2}, \quad (25.7.4)$$

где n — целое число. Найденное решение соответствует быстрой магнитозвуковой волне.

Задача 25.8. $\pi a^2 \rho v^2 > F$.

Задача 25.9. Так как анизотропия плазмы заметно усложняет и без того непростые уравнения магнитной гидродинамики, применим упрощённый подход и получим уравнение, описывающее альфвеновскую волну, используя качественные представления о свойствах такой волны, установленные в §25.2.

Представим, что в однородной плазме, которая находится в однородном магнитном поле, возникает смещение $\xi_x(z, t)$ плазмы поперёк магнитных силовых линий. Вследствие вмороженности силовые линии искривляются. Натяжение искривлённого магнитного поля создаёт силу, которая стремится вернуть плазму в исходное состояние, в результате чего возникают периодические колебания, если плазма изотропна. В анизотропной плазме та же сила, наоборот, может отдалять плазму от исходного состояния.

Рассмотрим малый элемент тонкой плазменной трубки, который имеет форму сегмента окружности радиуса R и опирается на угол α , как показано на рисунке 25.9.1. Пусть трубка имеет сечение с площадью S . Сила, действующая на торец трубки, равна $(p_{\parallel} - p_m)S$, где $p_m = B^2/8\pi$. Поскольку противоположные торцы трубы наклонены по отношению друг к другу под углом α , геометрическая сумма сил

$$F_{\parallel} = (p_{\parallel} - p_m)S\alpha,$$

действующих на эти торцы, направлена вдоль радиуса кривизны сегмента.

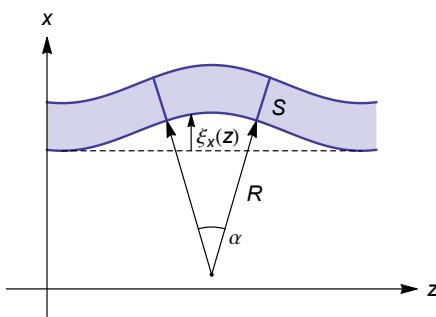


Рис. 25.9.1. Шланговая неустойчивость альфеновских колебаний в плазме с анизотропным давлением p_{\perp} , p_{\parallel} . Сумма сил, действующих на выделенный сегмент трубы плазмы с сечением S , который опирается на малый угол $\alpha \ll 1$, направлена вдоль оси x и равна $(p_{\parallel} - p_{\perp} - 2p_m)S\alpha$; радиус кривизны R связан со смещением силовой трубы $\xi_x(z)$ уравнением $1/R = -d^2\xi_x/dz^2$.

На боковую поверхность трубы действует давление $p_{\perp} + p_m$. Оно создаёт силу, которая также направлена по радиусу. Чтобы вычислить эту силу, заметим, что в среде с изотропным давлением сила, действующая на любой замкнутый объём, равна нулю. Поскольку на торцы трубы в такой воображаемой среде действует сила $(p_{\perp} + p_m)S\alpha$, заключаем, что на боковую поверхность трубы действует равная ей сила

$$F_{\perp} = -(p_{\perp} + p_m)S\alpha,$$

направленная в противоположную сторону. Таким образом, на выделенную трубку действует сила

$$F_{\parallel} + F_{\perp} = (p_{\parallel} - p_{\perp} - 2p_m)S\alpha.$$

Она вызывает ускорение $\partial^2\xi_x/\partial t^2$ элемента трубы с массой $\rho SR\alpha$. Приравнивая ускорение к силе, делённой на массу, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2\xi_x}{\partial t^2} = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp} - 2p_m}{\rho R}.$$

Далее надо учесть, что

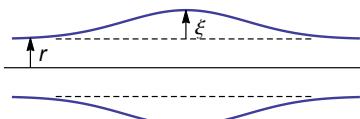
$$\frac{1}{R} \approx -\frac{\partial^2\xi_x}{\partial z^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2\xi_{\perp}}{\partial t^2} = \frac{2p_m + p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho} \frac{\partial^2\xi_{\perp}}{\partial z^2}, \quad (25.9.1)$$

где ξ_{\perp} — вектор смещения, перпендикулярный начальному магнитному полю, направленному вдоль оси z . При $p_{\parallel} = p_{\perp} = p$ полученное уравнение переходит в уравнение (25.12) альфеновских колебаний в изотропной плазме. Как показано в §25.5, при значительной анизотропии давления альфеновские колебания могут стать неустойчивыми (шланговая неустойчивость).

Рис. 25.10.1. Зеркальная неустойчивость плазмы с анизотропным давлением. При $p_{\perp} \gg p_{\parallel}$ случайное малое вздутие трубки плазмы, $\xi \ll \lambda$, может нарастать по экспоненциальному закону.



Задача 25.10. Зеркальная (диамагнитная) неустойчивость возникает в анизотропной плазме, если поперечное давление значительно больше продольного.

Предположим, что в однородной плазме возникла область разрежения магнитных силовых линий, как показано на рисунке 25.10.1. В образовавшийся мелкий пробкотрон будет втянута дополнительная порция плазмы. Её поперечное давление p_{\perp} увеличится, но магнитное давление $p_m = B^2/8\pi$ уменьшится вследствие диамагнетизма плазмы. Неустойчивость возникает, если суммарное изменение поперечного давления плазмы и магнитного поля будет положительно при уменьшении магнитного поля B , т. е.

$$\delta(p_{\perp} + p_m)/\delta B < 0.$$

Тогда втягивание каждой новой порции плазмы будет приводить к углублению пробкотрона, что провоцирует захват следующей порции.

Учтём, что вблизи порога неустойчивость развивается медленно, или, как говорят, квазистатически. Предположим также, что амплитуда расширения трубки плазмы ξ мала по сравнению с его длиной, т. е. $\xi \ll \lambda$; тогда можно считать, что возмущение давления плазмы в некоторой точке зависит от величины возмущения магнитного поля в той же точке, т. е. связь между δp_{\perp} , δp_{\parallel} и δB локальна. Найдём

$$\delta(p_{\perp} + p_m) = \delta p_{\perp} + \frac{B \delta B}{4\pi},$$

используя уравнение продольного равновесия анизотропной плазмы

$$\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial s} + \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B} \frac{\partial B}{\partial s} = 0 \quad (25.10.1)$$

и адиабат Чу—Голдбергера—Лоу

$$\frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} = \text{const}, \quad \frac{p_{\perp}}{\rho B} = \text{const}.$$

Исключая плотность плазмы ρ , имеем

$$\frac{p_{\parallel} B^5}{p_{\perp}^3} = \text{const}. \quad (25.10.2)$$

Исключая δp_{\parallel} из линеаризованных уравнений

$$\begin{aligned}\delta p_{\parallel} + \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B} \delta B &= 0, \\ \frac{\delta p_{\parallel}}{p_{\parallel}} + 5 \frac{\delta B}{B} - 3 \frac{\delta p_{\perp}}{p_{\perp}} &= 0,\end{aligned}$$

находим возмущение суммарного давления

$$\delta(p_{\perp} + p_m) = \left[\frac{p_{\perp}}{3} \left(6 - \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} \right) + \frac{B^2}{4\pi} \right] \frac{\delta B}{B}.$$

В соответствии со сказанным выше система будет неустойчива, если

$$\left[\frac{p_{\perp}}{3} \left(6 - \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} \right) + \frac{B^2}{4\pi} \right] < 0.$$

Отсюда получаем критерий зеркальной неустойчивости:

$$\frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} > 6 + \frac{6}{\beta_{\perp}}, \quad (25.10.3)$$

где $\beta_{\perp,\parallel} = 8\pi p_{\perp,\parallel}/B^2$. В такой форме он был получен Л. И. Рудаковым и Р. З. Сагдеевым [101]. Однако кинетическая теория предсказывает существенно более низкий порог развития зеркальной неустойчивости:

$$\frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} > 1 + \frac{1}{\beta_{\perp}} \quad (25.10.4)$$

(задача 25.11). Он был рассчитан в работах А. А. Веденова с Р. З. Сагдеевым [103] и Х. Фюрта [104]. Заметное расхождение критериев (25.10.3) и (25.10.4) свидетельствует об ограниченности теории Чу—Голдбергера—Лоу. Существуют и другие примеры, когда эта теория приводит к сомнительным выводам.

Задача 25.11. Запишем кинетическое уравнение в дрейфовом приближении, считая, что функция распределения $f = f(\mu, v_{\parallel}, s, t)$ выражена в зависимости от магнитного момента μ , продольной скорости v_{\parallel} , координаты вдоль магнитной силовой линии s и времени t :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = 0.$$

На пороге неустойчивости $\partial f / \partial t = 0$, поэтому оно имеет решение

$$\delta f = \frac{\mu \delta B}{mv_{\parallel}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} = \mu \delta B \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}}.$$

Отсюда можно вычислить давление плазмы

$$p_{\perp} = \frac{2\pi}{m} \int dv_{\parallel} B d\mu \mu B f$$

и его возмущение при изменении магнитного поля

$$\delta p_{\perp} = \frac{2\pi}{m} B^2 \int dv_{\parallel} d\mu \mu \delta f + \frac{2\delta B}{B} p_{\perp}.$$

Неустойчивость развивается, если

$$\delta(p_{\perp} + B^2/8\pi)/\delta B < 0.$$

Отсюда получается критерий зеркальной неустойчивости в форме А. А. Веденова [102]:

$$p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{\pi B^3}{m} \int dv_{\parallel} d\mu \mu^2 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\parallel}} < 0. \quad (25.11.1)$$

Для плазмы с бимаксвелловским распределением по скоростям он приводится к виду

$$\frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} > 1 + \frac{1}{\beta_{\perp}}.$$

Лекция 26

Задача 26.1. Пусть S_0 есть равновесная граница между плазмой и вакуумом. Для общности предположим, что на границе плазмы имеется поверхностный ток, и поэтому при переходе через неё давление плазмы и магнитное поле меняются скачком. В равновесии такая граница является магнитной поверхностью. Поэтому нормальная компонента магнитного поля на S_0 равна нулю. Вследствие вмороженности магнитного поля на смещённой границе плазмы нормальная компонента магнитного поля также должна быть равна нулю. Поэтому для магнитного поля $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{0i} + \delta\mathbf{B}_i$ со стороны плазмы имеем граничное условие

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_i) = 0. \quad (26.1.1)$$

Вследствие уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ нормальная компонента магнитного поля непрерывна на границе плазмы, т. е. $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_i) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_e)$, поэтому для магнитного поля $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_{0e} + \delta\mathbf{B}_e$ со стороны вакуума верно такое же условие

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_e) = 0. \quad (26.1.2)$$

Формулы (26.1.1) и (26.1.2) выражают первое граничное условие; оно является более жёстким, нежели условие непрерывности нормальной проекции магнитного поля.

Кроме того, на смещённой границе плазмы должно выполняться условие баланса давлений

$$p_0 + \delta p + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{B}_{0i} + \delta\mathbf{B}_i)^2 = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{B}_{0e} + \delta\mathbf{B}_e)^2, \quad (26.1.3)$$

в котором все величины берутся на смещённой границе в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi_n \mathbf{n}_0$, где \mathbf{x}_0 — точка на поверхности S_0 , \mathbf{n}_0 — нормаль к S_0 в этой точке, а $\xi_n = (\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\xi})$. На невозмущённой границе выражение (26.1.3) переходит в равенство

$$p_0 + \frac{B_{0i}^2}{8\pi} = \frac{B_{0e}^2}{8\pi}. \quad (26.1.4)$$

Все величины на смещённой границе S связаны с величинами на равновесной поверхности S_0 соотношением вида

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \xi_n \frac{\partial}{\partial n} f(\mathbf{x}_0),$$

где $\partial/\partial n = (\mathbf{n}_0 \cdot \nabla)$ обозначает производную по направлению нормали к невозмущённой границе. Однако для малых возмущений δp , $\delta\mathbf{B}_i$, $\delta\mathbf{B}_e$, которые уже содержат смещение $\boldsymbol{\xi}$, вторым слагаемым в этом соотношении в линейном приближении следует пренебречь. Например, разлагая равновесное давление на смещённой границе относительно его значения на равновесной границе, получаем

$$p_0(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}_0) + \xi_n \frac{\partial}{\partial n} p_0(\mathbf{x}_0).$$

Кроме того,

$$(\mathbf{B}_{0i} + \delta\mathbf{B}_i)^2 \approx B_{0i}^2 + \xi_n \frac{\partial}{\partial n} B_{0i}^2 + 2(\delta\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{B}_{0i}),$$

где в правой части все величины уже приведены к невозмущённой поверхности плазмы. Такое же соотношение имеет место для $(\mathbf{B}_{0e} + \delta\mathbf{B}_e)^2$, и в линейном приближении из (26.1.3) получаем условие

$$\delta p + \frac{(\mathbf{B}_{0i} \cdot \delta\mathbf{B}_i)}{4\pi} + \xi_n \frac{\partial}{\partial n} \left(p_0 + \frac{B_{0i}^2}{8\pi} \right) = \frac{(\mathbf{B}_{0e} \cdot \delta\mathbf{B}_e)}{4\pi} + \xi_n \frac{\partial}{\partial n} \frac{B_{0e}^2}{8\pi}, \quad (26.1.5)$$

в котором значения всех величин отнесены к произвольной точке \mathbf{x}_0 равновесной границы S_0 . Возмущение давления δp на невозмущённой границе находим с помощью уравнения (26.3):

$$\delta p = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}.$$

Градиент давления перпендикулярен равновесной границе плазмы, поскольку она является магнитной поверхностью, поэтому $\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 = \xi_n \partial p_0 / \partial n$. Следовательно, второе граничное условие (26.1.5) также можно записать в виде

$$-\gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \frac{(\mathbf{B}_{0i} \cdot \delta\mathbf{B}_i)}{4\pi} + \frac{\xi_n}{8\pi} \frac{\partial B_{0i}^2}{\partial n} = \frac{(\mathbf{B}_{0e} \cdot \delta\mathbf{B}_e)}{4\pi} + \frac{\xi_n}{8\pi} \frac{\partial B_{0e}^2}{\partial n}. \quad (26.1.6)$$

Вернёмся теперь к первому граничному условию (26.1.1). Оно является следствием идеальной проводимости плазмы, т. е. вморможности магнитных силовых линий. При бесконечной проводимости тождественно равно нулю электрическое поле $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{V} \times \mathbf{B}_i]$ в системе отсчёта, связанной с проводящей жидкостью:

$$\mathbf{E}_t + (1/c)[\mathbf{V} \times \mathbf{B}_i]_t = 0. \quad (26.1.7)$$

Поскольку $\mathbf{E} = \delta \mathbf{E}$, $\mathbf{V} = \partial \xi / \partial t$ и оба слагаемых здесь являются малыми величинами первого порядка, это условие можно считать выполненным на невозмущённой границе и записать в виде

$$\mathbf{E}_t = -\frac{1}{c} \frac{\partial \xi_n}{\partial t} [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{B}_{0i}].$$

Учитывая, что нормальная компонента магнитного поля выражается только через тангенциальные компоненты электрического поля согласно уравнению Максвелла $\partial \mathbf{B} / \partial t = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$, то же условие можно представить в виде

$$(\mathbf{n}_0 \cdot \delta \mathbf{B}_i) = (\mathbf{n}_0 \cdot \operatorname{rot}[\xi_n \mathbf{n}_0 \times \mathbf{B}_{0i}]). \quad (26.1.8)$$

Граничное условие (26.1.2) с внешней стороны границы приводится к такой же форме:

$$(\mathbf{n}_0 \cdot \delta \mathbf{B}_e) = (\mathbf{n}_0 \cdot \operatorname{rot}[\xi_n \mathbf{n}_0 \times \mathbf{B}_{0e}]). \quad (26.1.9)$$

Действительно, в силу непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля \mathbf{E}'_t снаружи от плазмы на её поверхности она также будет равна нулю. Заменяя в формуле (26.1.7) индекс i на индекс e и повторяя рассуждения, приведшие к условию (26.1.8), в итоге получим условие (26.1.9).

Задача 26.2. Из трёх компонентов магнитного поля только два являются независимыми, так как должно соблюдаться уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Следовательно, 8 уравнений (26.1) эквивалентны системе семи уравнений. Кроме того, две величины $\delta \rho$ и δp выражаются через одну и ту же функцию ξ .

Задача 26.3. Запишем уравнения для собственных функций ξ_k и ξ_l , которые соответствуют собственным значениям ω_k^2 и ω_l^2 :

$$-\omega_k^2 \rho_0 \xi_k = \mathbf{F}(\xi_k), \quad -\omega_l^2 \rho_0 \xi_l = \mathbf{F}(\xi_l).$$

Умножим скалярно первое уравнение на ξ_l , второе — на ξ_k и выполним интегрирование по пространству. Вычитая затем второе уравнение из первого и используя самосопряжённость оператора $\mathbf{F}[\xi]$, получим

$$(\omega_l^2 - \omega_k^2) \int \rho_0 \xi_k \cdot \xi_l d^3x = \int \rho_0 (\xi_l \cdot \mathbf{F}[\xi_k] - \xi_k \cdot \mathbf{F}[\xi_l]) d^3x = 0.$$

Отсюда следует, что невырожденные колебания с дискретными частотами ортогональны. Иными словами, для двух собственных функций имеет место равенство

$$\int \rho_0 \xi_k \cdot \xi_l d^3x = 0,$$

если $\omega_l^2 \neq \omega_k^2$. В случае вырождения, когда две (или более) собственные функции соответствуют одному и тому же собственному значению, можно составить такие линейные комбинации этих функций, которые будут взаимно ортогональны и ортогональны собственным функциям для других собственных значений. При подходящей нормировке собственные функции можно ортогонализовать, т. е. добиться выполнения равенства

$$\int \rho_0 \xi_k \cdot \xi_l d^3x = \delta_{mn}.$$

Говорят, что такие собственные функции ортогональны с весом ρ_0 .

Задача 26.4. В неоднородной плазме могут существовать колебания с непрерывным спектром. Простейший пример дают альфеновские колебания в тетапинче. Если альфеновская скорость зависит от радиальной координаты r , то при фиксированном значении продольного волнового числа k_\parallel (которое при конечной длине пинча квантуется и поэтому принимает дискретные значения) частота альфеновских колебаний $\omega = k_\parallel V_A(r)$ пробегает непрерывный ряд значений, который соответствует непрерывному набору значений альфеновской скорости между её минимальным и максимальным значениями.

Задача 26.5. Энергетический принцип даёт необходимое и достаточное условие устойчивости плазмы: в рамках идеальной магнитной гидродинамики равновесное состояние устойчиво тогда и только тогда, когда $W > 0$ для всех возмущений ξ , которые удовлетворяют граничным условиям.

Доказательство достаточности элементарно. Так как $K + W = \text{const}$, а кинетическая энергия возмущения K по определению положительна, она не может нарастать неограниченно, если $W > 0$. Иными словами, плазма заведомо устойчива, если $W > 0$ для всех допустимых ξ .

Труднее доказать необходимость условия $W > 0$, поскольку априори нельзя исключить, что существует какая-то особая функция ξ , для которой $W < 0$, но она не является собственной функцией. Тогда плазма может быть устойчива, несмотря на то, что $W < 0$ для такой функции. Необходимость условия $W > 0$ означает, что если найдена функция, для которой $W < 0$, то плазма неустойчива.

Предположим сначала, что оператор $F[\xi]$ допускает только дискретный набор собственных функций ξ_k , каждая из которых удовлетворяет уравнению

$$-\omega_k^2 \rho \xi_k = F[\xi_k],$$

и эти функции составляют полный набор. В этом случае любую пробную функцию $\xi(\mathbf{r})$, удовлетворяющую граничным условиям, можно представить в виде суперпозиции собственных функций:

$$\xi(\mathbf{r}) = \sum a_k \xi_k(\mathbf{r}).$$

Собственные функции ξ_k взаимно ортогональны. Если они нормированы с весовой функцией ρ , т. е.

$$\int \rho (\xi_k^* \cdot \xi_l) = \delta_{kl},$$

то потенциальную энергию W можно записать как

$$W(\xi^*, \xi) = \frac{1}{2} \sum |a_k|^2 \omega_k^2.$$

Таким образом, если может быть найдена функция $\xi(\mathbf{r})$, для которой $W < 0$, то по крайней мере одно собственное значение отрицательно, $\omega_k^2 < 0$, что равносильно неустойчивости. Напротив, если $W > 0$ для всех $\xi(\mathbf{r})$, тогда каждое собственное значение $\omega_k^2 \geq 0$ и любое возмущение устойчиво.

К сожалению, приведённое доказательство, впервые предложенное в статье И. Б. Бернштейна с соавторами [109], не подходит для общего случая из-за существования непрерывного спектра.

Элегантное доказательство энергетического принципа, которое приведено ниже, предложено в статье Г. Лаваля, С. Мерье и Р. Пеллата [107]. Оно не использует предположение о существовании полного набора дискретных собственных функций и оперирует с функциями времени.

Рассмотрим функцию

$$H(t) = K \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + W(\xi, \xi) = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - \xi \cdot F[\xi] \right],$$

где $\xi = \xi(\mathbf{r}, t)$. Используя свойство самосопряжённости оператора F , находим, что

$$\frac{dH}{dt} = \int d^3x \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \left[\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - F[\xi] \right] = 0.$$

Следовательно, $H(t) = H_0 = \text{const}$, что означает сохранение энергии.

Чтобы доказать достаточность энергетического принципа, допустим, что $W > 0$ для всех допустимых $\xi(\mathbf{r}, t)$. Сохранение энергии подразумевает, что

$$W = H_0 - K.$$

Следовательно, неограниченный рост кинетической энергии K (например, экспоненциальная неустойчивость) привёл бы к нарушению сохранения энергии; неравенство $W > 0$ для всех допустимых ξ достаточно для устойчивости.

Чтобы доказать необходимость энергетического принципа, допустим, что существует возмущение $\eta(\mathbf{r})$, такое что $W(\eta, \eta) < 0$. Рассмотрим смещение $\xi(\mathbf{r}, t)$, которое удовлетворяет начальным условиям

$$\xi(\mathbf{r}, 0) = \eta(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(\mathbf{r}, 0) = 0.$$

Сохранение энергии подразумевает, что

$$H_0 = (W + K)_{t=0} = W(\eta, \eta) < 0.$$

Вычислим производную d^2I/dt^2 функции

$$I(t) = K(\xi, \xi) = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\xi)^2.$$

Простые вычисления показывают, что

$$\frac{d^2I}{dt^2} = 2 \left[K \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) - W(\xi, \xi) \right] = \int d^3x \left[\rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \xi \cdot \mathbf{F}[\xi] \right].$$

Подстановка $W(\xi, \xi) = H_0 - K(\partial \xi / \partial t, \partial \xi / \partial t)$ приводит к результату

$$\frac{d^2I}{dt^2} = 2 \left[2K \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) - H_0 \right] > -2H_0 > 0,$$

который подразумевает, что I неограниченно растёт при $t \rightarrow \infty$ как минимум пропорционально t^2 . Следовательно, ξ растёт как минимум пропорционально t , т. е. указанное решение описывает неустойчивое возмущение. Таким образом, неравенство $W > 0$ для всех допустимых пробных функций является необходимым условием устойчивости. Это утверждение завершает доказательство необходимости энергетического принципа.

Задача 26.6. Разложим вектор смещения на части, параллельные и перпендикулярные невозмущённому магнитному полю:

$$\xi = \xi_{\parallel} \mathbf{h} + \xi_{\perp}, \quad \xi_{\parallel} = \xi \cdot \mathbf{h}, \quad \xi_{\perp} = [\mathbf{h} \times [\xi \times \mathbf{h}]], \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}/B.$$

Как сказано в §26.5, отдельного доказательства требует только тот факт, что следующее выражение

$$\xi^* \cdot \left\{ \nabla(\xi \cdot \nabla p) + \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \delta \mathbf{B}] \right\}$$

не зависит от ξ_{\parallel} . Так как $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ и $\delta \mathbf{B} = \text{rot}[\xi_{\perp} \times \mathbf{B}]$, сумма в фигурных скобках не содержит ξ_{\parallel} , поэтому достаточно доказать, что она не имеет проекции на \mathbf{B} — тогда ξ^* выпадет также из множителя ξ^* . Умножив первое слагаемое на \mathbf{B} , получаем

$$\mathbf{B} \cdot \nabla(\xi_{\perp} \cdot \nabla p) = \nabla \cdot [(\xi_{\perp} \cdot \nabla p) \mathbf{B}],$$

так как $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Преобразуя скалярное произведение \mathbf{B} со вторым слагаемым, используем уравнение равновесия $\nabla p = (1/c) [\mathbf{J} \times \mathbf{B}]$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{B}}{c} \cdot [\mathbf{J} \times \delta\mathbf{B}] &= -\delta\mathbf{B} \cdot \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] = -\delta\mathbf{B} \cdot \nabla p = -[\nabla \times [\xi_{\perp} \times \mathbf{B}]] \cdot \nabla p = \\ &= -\nabla \cdot [[\xi_{\perp} \times \mathbf{B}] \times \nabla p] = -\nabla \cdot [(\xi_{\perp} \cdot \nabla p)\mathbf{B}].\end{aligned}$$

Поскольку два скалярных произведения различаются только знаком, они сокращаются, что и требовалось доказать.

Задача 26.7. Перепишем формулу (26.22), заменив ξ^* произвольным вектором смещения η и приняв во внимание примечание к этой формуле в тексте лекции относительно учёта продольной части смещения $\xi_{||}$:

$$\begin{aligned}W &= -\frac{1}{2} \int \eta \cdot \mathbf{F}[\xi] d^3x = -\frac{1}{2} \int \eta_{\perp} \cdot \nabla (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) d^3x - \frac{1}{2} \int \eta \cdot \nabla (\gamma p \operatorname{div} \xi) d^3x - \\ &- \frac{1}{8\pi} \int \eta_{\perp} \cdot [[\nabla \times \mathbf{B}] \times \delta\mathbf{B}(\xi_{\perp})] d^3x - \frac{1}{8\pi} \int \eta_{\perp} \cdot [[\nabla \times \delta\mathbf{B}(\xi_{\perp})] \times \mathbf{B}] d^3x, \quad (26.7.1)\end{aligned}$$

где принято обозначение $\delta\mathbf{B}(\xi_{\perp}) = \nabla \times [\xi_{\perp} \times \mathbf{B}]$.

Выполним интегрирование по частям сначала в первом слагаемом, заменяя в промежуточных выкладках многоточием выражение в круглых скобках и опуская индекс \perp :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \int \eta_{\perp} \cdot \nabla (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) d^3x &= \\ &= -\frac{1}{2} \int \eta_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\dots) d^3x = -\frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} [\eta_{\alpha} (\dots)] d^3x + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \eta_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} (\dots) d^3x = \\ &= -\frac{1}{2} \int (\dots) \eta_{\alpha} dS_{\alpha} + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \eta_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} (\dots) d^3x = \\ &= -\frac{1}{2} \int (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) (\eta_{\perp} \cdot d\mathbf{S}) + \frac{1}{2} \int \operatorname{div} \eta_{\perp} (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) d^3x. \quad (26.7.2)\end{aligned}$$

Интегрирование второго слагаемого выполняется аналогично:

$$-\frac{1}{2} \int \eta \cdot \nabla (\gamma p \operatorname{div} \xi) d^3x = -\frac{1}{2} \int \gamma p \operatorname{div} \xi (\eta \cdot d\mathbf{S}) + \frac{1}{2} \int \gamma p \operatorname{div} \eta \operatorname{div} \xi d^3x. \quad (26.7.3)$$

Так как граница плазмы составлена из магнитных силовых линий, элемент поверхности $d\mathbf{S}$ перпендикулярен \mathbf{B} , поэтому $\eta \cdot d\mathbf{S} = \eta_{\perp} \cdot d\mathbf{S}$.

Третье слагаемое в (26.7.2) оставим без изменений и перейдём к четвёртому:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8\pi} \int \eta_{\perp} \cdot [[\nabla \times \delta \mathbf{B}(\xi_{\perp})] \times \mathbf{B}] d^3x = \\
= -\frac{1}{8\pi} \int \eta_{\alpha} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\epsilon_{\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta B_{\nu} \right) B_{\gamma} d^3x = \\
= -\frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\eta_{\alpha} \delta B_{\nu} B_{\gamma}) d^3x + \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\beta\mu\nu} \delta B_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\eta_{\alpha} B_{\gamma}) d^3x = \\
= -\frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\beta\mu\nu} (\eta_{\alpha} \delta B_{\nu} B_{\gamma}) dS_{\mu} + \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\beta\mu\nu} \delta B_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\eta_{\alpha} B_{\gamma}) d^3x. \quad (26.7.4)
\end{aligned}$$

В полученном выражении изменим порядок индексов в символах Леви-Чивиты. Так как $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\epsilon_{\beta\alpha\gamma}$ и $\epsilon_{\beta\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu\beta}$, имеет место равенство $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta\mu\nu} = \epsilon_{\nu\mu\beta}\epsilon_{\beta\alpha\gamma}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8\pi} \int \eta \cdot [[\nabla \times \delta \mathbf{B}(\xi_{\perp})] \times \mathbf{B}] d^3x = \\
= -\frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\nu\mu\beta} \epsilon_{\beta\alpha\gamma} (\eta_{\alpha} \delta B_{\nu} B_{\gamma}) dS_{\mu} + \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\nu\mu\beta} \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \delta B_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\eta_{\alpha} B_{\gamma}) d^3x.
\end{aligned}$$

Применив тождество $\epsilon_{\nu\mu\beta}\epsilon_{\beta\alpha\gamma} = \delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\gamma} - \delta_{\nu\gamma}\delta_{\mu\alpha}$ в первом слагаемом, получим

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\nu\mu\beta} \epsilon_{\beta\alpha\gamma} (\eta_{\alpha} \delta B_{\nu} B_{\gamma}) dS_{\mu} = \\
= -\frac{1}{8\pi} \int (\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\gamma} - \delta_{\nu\gamma}\delta_{\mu\alpha}) \eta_{\alpha} \delta B_{\nu} B_{\gamma} dS_{\mu} = -\frac{1}{8\pi} \int [\eta_{\nu} \delta B_{\nu} B_{\mu} - \eta_{\mu} \delta B_{\nu} B_{\nu}] dS_{\mu} = \\
= -\frac{1}{8\pi} \int [(\eta_{\perp} \cdot \delta \mathbf{B})(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) - (\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})(\eta_{\perp} \cdot d\mathbf{S})] = \frac{1}{8\pi} \int (\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})(\eta_{\perp} \cdot d\mathbf{S}), \quad (26.7.5)
\end{aligned}$$

поскольку на границе плазмы $(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = 0$. Во втором слагаемом нужно суметь распознать результат выполненных преобразований:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\nu\mu\beta} \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \delta B_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\eta_{\alpha} B_{\gamma}) d^3x = \\
= \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\nu\mu\beta} \delta B_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\epsilon_{\beta\alpha\gamma} \eta_{\alpha} B_{\gamma}) d^3x = \frac{1}{8\pi} \int \delta B_{\nu} \epsilon_{\nu\mu\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} [\eta \times \mathbf{B}]_{\beta} d^3x = \\
= \frac{1}{8\pi} \int \delta B_{\nu} [\nabla \times [\eta_{\perp} \times \mathbf{B}]]_{\nu} d^3x = \frac{1}{8\pi} \int \delta \mathbf{B}(\xi_{\perp}) \cdot \delta \mathbf{B}(\eta_{\perp}) d^3x. \quad (26.7.6)
\end{aligned}$$

Суммируя интегралы по объёму плазмы из формул (26.7.2), (26.7.3) и (26.7.6), добавив к сумме третье слагаемое из (26.7.1), которое мы не интегрировали по частям, получим искомое выражение для вклада объёма плазмы в потенциальную энергию возмущений:

$$W_F = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{\delta \mathbf{B}(\xi_\perp) \cdot \delta \mathbf{B}(\eta_\perp)}{4\pi} + \gamma p \operatorname{div} \xi \operatorname{div} \eta + (\xi_\perp \cdot \nabla p) \operatorname{div} \eta_\perp - \frac{\eta_\perp}{4\pi} \cdot [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \delta \mathbf{B}(\xi_\perp)] \right\} d^3x. \quad (26.7.7)$$

Подставив сюда $\eta = \xi^*$ и заметив, что $\eta_\perp \cdot [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \delta \mathbf{B}(\xi_\perp)] = -\operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot [\eta_\perp \times \delta \mathbf{B}(\xi_\perp)]$, получим формулу (26.23). Суммирование слагаемых, которые содержат интегрирование по поверхности плазмы, даёт

$$W_{SV} = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}(\xi_\perp) - \gamma p \operatorname{div} \xi - \xi_\perp \cdot \nabla p \right] (\eta \cdot dS), \quad (26.7.8)$$

причём последние два слагаемых в сумме равны δp в согласии с формулой (26.24).

Задача 26.8. Получим формулу (26.23) для W_F в рамках идеальной МГД, причём в качестве исходного пункта вычислений выберем выражение

$$F_\alpha = -\frac{\partial \delta U_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta},$$

для силы \mathbf{F} в дивергентном виде, где

$$\delta U_{\alpha\beta} = \left(\delta p + \frac{B_\gamma \delta B_\gamma}{4\pi} \right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{\delta B_\alpha B_\beta + B_\alpha \delta B_\beta}{4\pi}$$

есть возмущение суммы тензоров давления плазмы и напряжений магнитного поля

$$U_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} = \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{B_\alpha B_\beta}{4\pi}.$$

Поставив F_α в формулу

$$W_F = -\frac{1}{2} \int \xi_\alpha^* F_\alpha d^3x$$

для потенциальной энергии и выполнив интегрирование по частям, получим

$$W_F = \frac{1}{2} \int \xi_\alpha^* \frac{\partial}{\partial x_\beta} \delta U_{\alpha\beta} d^3x = \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\xi_\alpha^* \delta U_{\alpha\beta}) d^3x - \frac{1}{2} \int \frac{\partial \xi_\alpha^*}{\partial x_\beta} \delta U_{\alpha\beta} d^3x.$$

Для простоты предположим, что плазму окружает жёсткая идеально проводящая стенка. На такой стенке обращаются в нуль нормальная компонента вектора смещения, а также нормальные компоненты магнитного поля и его возмущения, т. е. $(\mathbf{n} \cdot \xi^*) = 0$, $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{B}) = 0$, где \mathbf{n} — вектор нормали к стенке. Тогда первое слагаемое преобразуется к поверхностному интегралу и обращается в нуль:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\xi_\alpha^* \delta U_{\alpha\beta}) d^3x &= \frac{1}{2} \int (\xi_\alpha^* \delta U_{\alpha\beta}) n_\beta dS = \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \left(\delta p + \frac{B_\gamma \delta B_\gamma}{4\pi} \right) \xi_\beta^* - \frac{\delta B_\alpha B_\beta + B_\alpha \delta B_\beta}{4\pi} \xi_\alpha^* \right\} n_\beta dS = 0. \end{aligned}$$

В оставшемся выражении

$$W_F = -\frac{1}{2} \int \frac{\partial \xi_\alpha^*}{\partial x_\beta} \delta U_{\alpha\beta} d^3x = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\partial \xi_\alpha^*}{\partial x_\beta} \frac{\delta B_\alpha B_\beta + B_\alpha \delta B_\beta}{4\pi} - \frac{\partial \xi_\beta^*}{\partial x_\beta} \left(\delta p + \frac{B_\gamma \delta B_\gamma}{4\pi} \right) \right\} d^3x \quad (26.8.1)$$

сначала заменим слагаемое $B_\gamma \delta B_\gamma / 4\pi$ в круглых скобках на $B_\alpha \delta B_\alpha / 4\pi$ (это допустимо, так как повторяющиеся индексы можно переименовывать любым удобным способом), а затем преобразуем слагаемые, содержащие δB_α :

$$\frac{\partial \xi_\alpha^*}{\partial x_\beta} \frac{\delta B_\alpha B_\beta}{4\pi} - \frac{\partial \xi_\beta^*}{\partial x_\beta} \frac{B_\alpha \delta B_\alpha}{4\pi} = \frac{\delta B_\alpha}{4\pi} \left(\frac{\partial \xi_\alpha^*}{\partial x_\beta} B_\beta - \frac{\partial \xi_\beta^*}{\partial x_\beta} B_\alpha \right).$$

Далее заметим, что

$$\frac{\partial \xi_\alpha^*}{\partial x_\beta} B_\beta = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \xi_\alpha^* B_\beta,$$

так как $\partial B_\beta / \partial x_\beta = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Затем в круглых скобках вычтем и прибавим $\partial(B_\alpha \xi_\beta^*) / \partial x_\beta$. В полученном выражении

$$\frac{\delta B_\alpha}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} \xi_\alpha^* B_\beta - \frac{\partial}{\partial x_\beta} B_\alpha \xi_\beta^* + \frac{\partial}{\partial x_\beta} B_\alpha \xi_\beta^* - \frac{\partial \xi_\beta^*}{\partial x_\beta} B_\alpha \right)$$

первая пара слагаемых в скобках образует $(\operatorname{rot}[\xi^* \times \mathbf{B}])_\alpha = \delta B_\alpha^*$, а вторая сворачивается в $\xi_\beta^* \partial B_\alpha / \partial x_\beta$. В результате находим, что

$$\frac{\delta B_\alpha}{4\pi} \left(\frac{\partial \xi_\alpha^*}{\partial x_\beta} B_\beta - \frac{\partial \xi_\beta^*}{\partial x_\beta} B_\alpha \right) = \frac{|\delta B|^2}{4\pi} + \frac{\delta B_\alpha}{4\pi} \xi_\beta^* \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad (26.8.2)$$

так как $\delta B_\alpha \delta B_\alpha^* = |\delta B|^2$. Обратимся к другим слагаемым

$$\frac{\partial \xi_\alpha^*}{\partial x_\beta} \frac{B_\alpha \delta B_\beta}{4\pi} - \frac{\partial \xi_\beta^*}{\partial x_\beta} \delta p$$

в фигурных скобках в (26.8.1). Здесь выполним подстановку $\delta p = -\gamma p \operatorname{div} \xi - \xi \cdot \nabla p$ и переставим индексы в первом слагаемом:

$$\frac{\partial \xi_\beta^*}{\partial x_\alpha} \frac{B_\beta \delta B_\alpha}{4\pi} + \frac{\partial \xi_\beta^*}{\partial x_\beta} (\gamma p \operatorname{div} \xi + \xi \cdot \nabla p). \quad (26.8.3)$$

Собирая теперь выражения (26.8.2) и (26.8.3), получим

$$W_F = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{|\delta B|^2}{4\pi} + \gamma p |\operatorname{div} \xi|^2 + (\xi \cdot \nabla p) \operatorname{div} \xi^* + \frac{\delta B_\alpha}{4\pi} \left(\xi_\beta^* \frac{\partial B_\alpha}{\partial \xi_\beta^*} + B_\beta \frac{\partial \xi_\beta^*}{\partial x_\alpha} \right) \right\} d^3x.$$

Выражение в круглых скобках преобразуется с помощью легко проверяемого тождества

$$\left(\xi_\beta^* \frac{\partial B_\alpha}{\partial \xi_\beta^*} + B_\beta \frac{\partial \xi_\beta^*}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\xi^* \cdot \mathbf{B}) - [\xi^* \times \operatorname{rot} \mathbf{B}]_\alpha.$$

Первое слагаемое в его правой части при подстановке в интеграл даёт нуль, так как

$$\int \frac{\delta B_\alpha}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\xi^* \cdot \mathbf{B}) d^3x = \int \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{\delta B_\alpha}{4\pi} (\xi^* \cdot \mathbf{B}) \right] d^3x = \int \frac{\delta B_\alpha n_\alpha}{4\pi} (\xi^* \cdot \mathbf{B}) dS = 0.$$

В итоге получаем искомый результат

$$W_F = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{|\delta B|^2}{4\pi} + \gamma p |\operatorname{div} \xi|^2 + (\xi \cdot \nabla p) \operatorname{div} \xi^* - \frac{1}{4\pi} (\delta \mathbf{B} \cdot [\xi^* \times \operatorname{rot} \mathbf{B}]) \right\} d^3x, \quad (26.8.4)$$

где $\delta \mathbf{B} = \operatorname{rot}[\xi \times \mathbf{B}]$.

Задача 26.9. В интеграле (26.24) по свободной поверхности плазмы

$$W_{SV} = \frac{1}{2} \int \left(\delta p + \frac{\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{4\pi} \right) \eta_\perp \cdot d\mathbf{S}, \quad (26.9.1)$$

который для удобства воспроизведён выше, исключим δp , использовав доказанное в задаче 26.1 граничное условие

$$\delta p + \frac{(\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B})}{4\pi} + \xi_n \frac{\partial}{\partial n} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{(\mathbf{B}_e \cdot \delta \mathbf{B}_e)}{4\pi} + \xi_n \frac{\partial}{\partial n} \frac{B_e^2}{8\pi}, \quad (26.9.2)$$

в котором значения всех величин отнесены к произвольной точке равновесной границы, а индекс e метит магнитное поле \mathbf{B}_e и его возмущение $\delta \mathbf{B}_e$ со стороны вакуумного зазора. Результат преобразований представим в виде суммы интегралов $W_{SV} = W_S + W_V$, определив их следующим образом:

$$W_S = \frac{1}{2} \int \left[\xi_n \frac{\partial}{\partial n} \frac{B_e^2}{8\pi} - \xi_n \frac{\partial}{\partial n} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \right] \eta_\perp \cdot d\mathbf{S}, \quad (26.9.3)$$

$$W_V = \frac{1}{2} \int \frac{(\mathbf{B}_e \cdot \delta \mathbf{B}_e)}{4\pi} \eta_\perp \cdot d\mathbf{S}. \quad (26.9.4)$$

Учитывая, что элемент поверхности, по которой производится интегрирование, направлен по нормали и $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, первый интеграл можно представить в виде

$$W_S = \frac{1}{2} \int \xi_n \eta_n \left[\left[\frac{\partial}{\partial n} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \right] \right] dS, \quad (26.9.5)$$

где $\llbracket A \rrbracket = A_e - A$ обозначает значение функции A_e на поверхности интегрирования со стороны вакуумного зазора минус её значение A внутри плазмы. Нетрудно видеть, что выражение (26.9.5) фактически совпадает с формулой (26.27) в §26.5.

Докажем теперь, что интеграл (26.9.4) равен энергии магнитного поля в вакуумном зазоре

$$W_V(\eta, \xi) = \frac{1}{8\pi} \int \delta\mathbf{B}_e(\eta) \cdot \delta\mathbf{B}_e(\xi) d^3x, \quad (26.9.6)$$

где интегрирование выполняется по объёму зазора, а индекс e указывает на принадлежность отмеченного им параметра к этому зазору. Доказательство включает несколько шагов, причём проще пройти путь доказательства в обратном направлении, считая отправной точкой обобщённое определение энергии вакуумного магнитного поля (26.9.6).

Магнитные поля выразим через векторные потенциалы согласно

$$\delta\mathbf{B}_e(\eta) = [\nabla \times \delta\mathbf{A}_e(\eta)], \quad \delta\mathbf{B}_e(\xi) = [\nabla \times \delta\mathbf{A}_e(\xi)].$$

Потенциалы удобно калибровать так, чтобы скалярные электрические потенциалы были тождественно равны нулю: $\delta\varphi_e(\xi) = \delta\varphi_e(\eta) = 0$. Тогда электрические поля также выражаются только через векторные потенциалы:

$$\mathbf{E}_e(\eta) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta\mathbf{A}_e(\eta), \quad \mathbf{E}_e(\xi) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta\mathbf{A}_e(\xi).$$

Интеграл (26.9.6) по объёму вакуумного зазора преобразуем в поверхностный интеграл, используя теорему Остроградского—Гаусса. Применив векторное равенство

$$[\nabla \times \delta\mathbf{A}_e(\eta)] \cdot [\nabla \times \delta\mathbf{A}_e(\xi)] = \nabla \cdot [\delta\mathbf{A}_e(\eta) \times [\nabla \times \delta\mathbf{A}_e(\xi)]],$$

которое подразумевает, что $[\nabla \times [\nabla \times \delta\mathbf{A}_e(\xi)]] = 0$ для вакуумного магнитного поля, получим

$$\begin{aligned} W_V(\eta, \xi) &= \frac{1}{8\pi} \int \nabla \cdot [\delta\mathbf{A}_e(\eta) \times [\nabla \times \delta\mathbf{A}_e(\xi)]] d^3x = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{n}_e \cdot [\delta\mathbf{A}_e(\eta) \times \delta\mathbf{B}_e(\xi)] dS = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{n} \times \delta\mathbf{A}_e(\eta)] \cdot \delta\mathbf{B}_e(\xi) dS. \end{aligned} \quad (26.9.7)$$

Знак «минус» перед последним интегралом связан с тем, что вектор нормали $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_e$ к поверхности направлен из плазмы внутрь объёма интегрирования. Вклад от внешней идеально проводящей стенки равен нулю, поскольку исчезновение нормальной составляющей магнитного поля эквивалентно исчезновению тангенциальной составляющей электрического поля. Другими словами, граничное условие $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{A}_e(\eta) = 0$ на идеально проводящей поверхности эквивалентно $[\mathbf{n} \times \delta \mathbf{A}_e(\eta)] = 0$.

На следующем шаге нужно связать поверхностное значение $\delta \mathbf{A}_e(\eta)$ со смещением плазмы $\boldsymbol{\eta}$. Представим, что граница плазмы движется со скоростью $\delta \mathbf{V} = \partial \boldsymbol{\eta} / \partial t$, а \mathbf{E} есть электрическое поле в неподвижной системе отсчёта. Тогда в системе отсчёта, которая движется вместе с границей, электрическое поле будет равно $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + (1/c)[\delta \mathbf{V} \times \mathbf{B}]$. В плазме $\mathbf{E} = -(1/c)[\delta \mathbf{V} \times \mathbf{B}]$ в соответствии с законом Ома, поэтому $\mathbf{E}^* = 0$, то есть электрическое поле исчезает в движущейся системе отсчёта на плазменной стороне границы. Непрерывность тангенциальной компоненты электрического поля на границе подразумевает, что тангенциальная компонента также исчезает и на вакуумной стороне границы, т. е. $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e^*] = 0$. Так как в соответствии с нерелятивистским законом преобразования полей $\mathbf{E}_e^* = \mathbf{E}_e + (1/c)[\delta \mathbf{V} \times \mathbf{B}_e]$, имеет место следующее равенство:

$$c [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e] = -\delta \mathbf{V} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_e) + \mathbf{B}_e (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{V}).$$

Но на границе плазмы $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_e) = 0$. Подставляя сюда $\mathbf{E}_e = -(1/c) \partial \delta \mathbf{A}_e / \partial t$ и $\delta \mathbf{V} = \partial \boldsymbol{\eta} / \partial t$, получаем

$$[\mathbf{n} \times \delta \mathbf{A}_e(\eta)] = -(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta}) \mathbf{B}_e. \quad (26.9.8)$$

Подстановка этого выражения в интеграл (26.9.7) даёт результат

$$W_V(\boldsymbol{\eta}, \xi) = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta}) (\mathbf{B}_e \cdot \delta \mathbf{B}_e(\xi)) dS, \quad (26.9.9)$$

который совпадает с (26.9.4) и завершает доказательство того факта, что две формы (26.9.4) и (26.9.6) потенциальной энергии возмущения вакуумного магнитного поля эквивалентны.

Задача 26.10. Преобразуем разность градиентов суммарного давления плазмы и магнитного поля

$$\left[\left[\nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \right] \right] = \nabla_{\perp} \left(p_v + \frac{B_v^2}{8\pi} \right) - \nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right)$$

на внешней и внутренней сторонах границы плазмы; индекс v метит величины с внешней стороны, где $p_v = 0$. С учётом уравнений равновесия плазмы

$$\nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{B^2}{4\pi} \boldsymbol{\kappa}, \quad \nabla_{\perp} \left(p_v + \frac{B_v^2}{8\pi} \right) = \frac{B_v^2}{4\pi} \boldsymbol{\kappa}_v$$

получаем равенство

$$\left[\left[\nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \right] \right] = \frac{B_v^2}{4\pi} \boldsymbol{\kappa}_v - \frac{B^2}{4\pi} \boldsymbol{\kappa},$$

правую сторону которого преобразуем с помощью граничного условия

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = p_v + \frac{B_v^2}{8\pi}.$$

После цепочки преобразований получаем

$$\begin{aligned} \left[\left[\nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \right] \right] &= \left(\frac{B_v^2}{8\pi} \boldsymbol{\kappa}_v - \frac{B^2}{8\pi} \boldsymbol{\kappa} \right) + \frac{B_v^2}{8\pi} \boldsymbol{\kappa}_v - \frac{B^2}{8\pi} \boldsymbol{\kappa} = \\ &= \left(\frac{B_v^2}{8\pi} \boldsymbol{\kappa}_v - \frac{B^2}{8\pi} \boldsymbol{\kappa} \right) + \left(p + \frac{B^2}{8\pi} - p_v \right) \boldsymbol{\kappa}_v - \left(p_v + \frac{B_v^2}{8\pi} - p \right) \boldsymbol{\kappa} = \\ &= (p - p_v)(\boldsymbol{\kappa}_v + \boldsymbol{\kappa}) + \left(\frac{B^2}{8\pi} + \frac{B_v^2}{8\pi} \right) (\boldsymbol{\kappa}_v - \boldsymbol{\kappa}). \end{aligned}$$

В результате формула (26.27) принимает вид

$$W_S = \frac{1}{2} \int |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 \left[(p - p_v)(\boldsymbol{\kappa}_v + \boldsymbol{\kappa}) + \left(\frac{B^2}{8\pi} + \frac{B_v^2}{8\pi} \right) (\boldsymbol{\kappa}_v - \boldsymbol{\kappa}) \right] \cdot d\mathbf{S}.$$

В частном случае, когда на границе отсутствует поверхностный ток в направлении магнитного поля и $p_v = 0$, имеем $\boldsymbol{\kappa}_v = \boldsymbol{\kappa}$ и, следовательно,

$$W_S = \frac{1}{2} \int |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 2p \boldsymbol{\kappa} \cdot d\mathbf{S}. \quad (26.10.1)$$

Задача 26.11. Ввиду простоты способа, каким ξ_{\parallel} входит в выражение W , оказывается возможным минимизировать относительно ξ_{\parallel} потенциальную энергию МГД возмущения сразу для всех возможных равновесных конфигураций плазмы. Полученная в результате форма W будет функцией только $\boldsymbol{\xi}_{\perp}$; таким образом, число независимых переменных сократится с трёх до двух.

Условие минимизации W получается путём подстановки $\xi_{\parallel} \rightarrow \xi_{\parallel} + \delta\xi_{\parallel}$ в уравнение (26.23) с последующим приравниванием нулю соответствующей вариации. Поскольку ξ_{\parallel} входит только в слагаемое $\gamma p |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2$, находим

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \gamma p \left\{ (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}^*) \nabla \cdot \left(\frac{\delta \xi_{\parallel}}{B} \mathbf{B} \right) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \nabla \cdot \left(\frac{\delta \xi_{\parallel}^*}{B} \mathbf{B} \right) \right\} d^3x, \quad (26.11.1)$$

где δW есть вариация W относительно ξ_{\parallel} . Теперь интегрирование по частям даёт

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\delta \xi_{\parallel}}{B} (\mathbf{B} \cdot \nabla) (\gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}^*) + \frac{\delta \xi_{\parallel}^*}{B} (\mathbf{B} \cdot \nabla) (\gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \right\} d^3x. \quad (26.11.2)$$

Вклад пределов интегрирования при интегрировании по частям исчезает, так как $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ на поверхности плазмы. Если приравнять нулю вариацию δW для произвольной вариации $\delta \xi_{\parallel}$ и учесть тот факт, что $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$, получится следующее общее условие минимизации:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) = 0. \quad (26.11.3)$$

Для большинства систем удержания плазмы оператор $\mathbf{B} \cdot \nabla$ несингулярен, поэтому условие (26.11.3) подразумевает, что

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0. \quad (26.11.4)$$

Иными словами, наиболее неустойчивые возмущения (в смысле достижения минимума W) являются нескжимаемыми.

В определённом смысле этот вывод очевиден из уравнения (26.23), так как единственный член, содержащий ξ_{\parallel} , положителен. Его наименьшее значение есть нуль, и он получается при $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$. Однако физический смысл имеют компоненты вектора $\boldsymbol{\xi}$, а не величина $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}$. Поэтому чтобы обеспечить выполнение равенства $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$, нужно иметь возможность выбрать ξ_{\parallel} так, что

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\xi_{\parallel}}{B} \right) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp}. \quad (26.11.5)$$

Как это было с уравнениями (26.11.3) и (26.11.4), физически приемлемое решение для ξ_{\parallel} возможно, только если оператор $\mathbf{B} \cdot \nabla$ несингулярен, как в большинстве случаев, представляющих практический интерес. Впрочем, даже если $\mathbf{B} \cdot \nabla$ исчезает на изолированных магнитных поверхностях, можно сконструировать решение ξ_{\parallel} , которое ограничено вблизи этих поверхностей, но даёт исчезающее малый вклад в энергию сжатия плазмы.

Приведём пример, когда из условия (26.11.3) не следует равенство (26.11.4). Рассмотрим конфигурацию магнитного поля с замкнутыми силовыми линиями. В этом случае оператор $\mathbf{B} \cdot \nabla$ не обязательно сингулярен, но имеется условие периодичности, согласно которому $\xi_{\parallel}(s) = \xi_{\parallel}(s + L)$ на каждой магнитной силовой линии, так как линии замкнуты; s есть текущая координата вдоль силовой линии, а L — её полная длина. В этом случае необходимо добавить однородное решение к решению (26.11.4) так, чтобы

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = F(p), \quad (26.11.6)$$

где F — произвольная функция давления p , которое удовлетворяет однородному уравнению $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$. Решение уравнения (26.11.6) относительно ξ_{\parallel} даёт

$$\frac{\xi_{\parallel}}{B} = - \int_0^s \frac{ds}{B} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + F(p) \int_0^s \frac{ds}{B}.$$

Заметим, что $F(p)$ можно вынести из-под знака интеграла, так как давление p постоянно вдоль силовой линии. Условия периодичности требуют, чтобы

функция $F(p)$ была выбрана следующим образом:

$$F(p) = \oint \frac{ds}{B} \nabla \cdot \xi_{\perp} / \oint \frac{ds}{B} \equiv \langle \nabla \cdot \xi_{\perp} \rangle.$$

Итоговый вывод состоит в том, что в системах с замкнутыми силовыми линиями минимальное значение слагаемого, отвечающего за вклад сжимаемости плазмы, не может быть сделано равным нулю: оно имеет значение

$$\int \gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 d^3x = \int \gamma p |\langle \nabla \cdot \xi_{\perp} \rangle|^2 d^3x.$$

Задача 26.14. Для доказательства самосопряжённости оператора $\mathbf{F}[\xi]$ нужно проверить, что

$$\int \eta \cdot \mathbf{F}[\xi] d^3x = \int \xi \cdot \mathbf{F}[\eta] d^3x \quad (26.14.1)$$

для любых функций ξ и η , которые удовлетворяют граничным условиям

$$\mathbf{n} \cdot \xi = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \eta = 0$$

на поверхности плазмы (для простоты ограничимся случаем, когда плазма контактирует с твёрдой стенкой). Используя определение (26.6) оператора $\mathbf{F}[\xi]$, подынтегральное выражение можно записать в виде

$$\eta \cdot \mathbf{F}[\xi] = \eta \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} [\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{Q} + \frac{1}{4\pi} [\nabla \times \mathbf{Q}] \times \mathbf{B} + \nabla(\xi \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \xi) \right\}, \quad (26.14.2)$$

где $\mathbf{Q} = \nabla \times [\xi \times \mathbf{B}]$. Если теперь выполнить интегрирование по частям в последнем слагаемом, под знаком интеграла останется следующее выражение:

$$\eta \cdot \mathbf{F}[\xi] \mapsto \eta \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} [\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{Q} + \frac{1}{4\pi} [\nabla \times \mathbf{Q}] \times \mathbf{B} + \nabla(\xi \cdot \nabla p) \right\} - \gamma p (\nabla \cdot \xi)(\nabla \cdot \eta). \quad (26.14.3)$$

Преобразуем его, выделив компоненты функций, перпендикулярные и параллельные невозмущённому магнитному полю:

$$\xi = \xi_{\perp} + \xi_{\parallel} \mathbf{h}, \quad \eta = \eta_{\perp} + \eta_{\parallel} \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}/B. \quad (26.14.4)$$

Покажем, что только последнее слагаемое в формуле (26.14.3) зависит от ξ_{\parallel} и η_{\parallel} . Действительно, легко видеть, что ξ_{\parallel} выпадает из определения вектора $\mathbf{Q} = \nabla \times [\xi \times \mathbf{B}]$, так как $[\xi \times \mathbf{B}] = [\xi_{\perp} \times \mathbf{B}]$. Кроме того, $\xi \cdot \nabla p = \xi_{\perp} \cdot \nabla p$, так как $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$. Следовательно, выражение в фигурных скобках в (26.14.3) не содержит ξ_{\parallel} . Осталось убедиться, что и η_{\parallel} выпадает из скалярного произведения η на сумму слагаемых в фигурных скобках. Для этого умножим скалярно

эти слагаемые на \mathbf{B} . При этом второе слагаемое очевидным образом даёт нуль. Преобразовав первое слагаемое с учётом уравнений

$$[\nabla \times \mathbf{B}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad \nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}],$$

получим выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot [[\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{Q}] &= -\frac{1}{c} \mathbf{Q} \cdot [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] = -\mathbf{Q} \cdot \nabla p = -[\nabla \times [\xi \times \mathbf{B}]] \cdot \nabla p = \\ &= \nabla \cdot [\nabla p \times [\xi \times \mathbf{B}]] = -\nabla \cdot [(\xi \cdot \nabla p) \mathbf{B}], \end{aligned}$$

которое сокращается с третьим слагаемым

$$\mathbf{B} \cdot \nabla (\xi \cdot \nabla p) = \nabla \cdot [(\xi \cdot \nabla p) \mathbf{B}].$$

Поэтому

$$\eta \cdot \mathbf{F}[\xi] \mapsto G(\xi_\perp, \eta_\perp) - \gamma p (\nabla \cdot \xi) (\nabla \cdot \eta), \quad (26.14.5)$$

где функция

$$G(\xi_\perp, \eta_\perp) = \eta_\perp \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} [\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{Q} + \frac{1}{4\pi} [\nabla \times \mathbf{Q}] \times \mathbf{B} + \nabla (\xi_\perp \cdot \nabla p) \right\} \quad (26.14.6)$$

зависит только от перпендикулярных компонент ξ_\perp и η_\perp . Последнее слагаемое в (26.14.5) инвариантно относительно перестановки ξ и η . Для доказательства свойства самосопряжённости (26.14.1) необходимо удостовериться, что функция $G(\xi_\perp, \eta_\perp)$ также не меняется при перестановке её аргументов.

Приступая к преобразованию функции (26.14.6), проинтегрируем по частям последнее слагаемое, а первые два слагаемых перепишем с помощью стандартных векторных тождеств

$$G(\xi_\perp, \eta_\perp) = \frac{1}{4\pi} \eta_\perp \cdot \{ \mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{Q} - \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}) \} - (\xi_\perp \cdot \nabla p) (\nabla \cdot \eta_\perp); \quad (26.14.7)$$

здесь подразумевается, что

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{B} \equiv (\mathbf{Q} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{Q}$$

и т. д. В дальнейших преобразованиях используем тождество

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = B^2 \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} + \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \nabla B^2)/2,$$

откуда следует, что

$$\eta_\perp \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}) = B^2 (\eta_\perp \cdot \boldsymbol{\kappa}),$$

где $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} \equiv (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}$ обозначает вектор кривизны. Кроме того, учтём, что уравнение $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ делает возможным преобразование типа

$$\mathbf{B} \cdot \nabla (\eta_\perp \cdot \mathbf{Q}) = \nabla \cdot \{ (\eta_\perp \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{B} \},$$

причём дивергенция выражения в фигурных скобках может быть отброшена, поскольку при интегрировании она даст нуль. Заметим также, что

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \eta_{\perp}) \equiv \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \eta_{\perp} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mathbf{B} \cdot \eta_{\perp}) - \eta_{\perp} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = -B^2(\eta_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa})$$

и аналогично $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp}) = -B^2(\xi_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa})$. Кроме того,

$$\mathbf{Q} = \nabla \times [\xi_{\perp} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \xi_{\perp} - (\xi_{\perp} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\nabla \cdot \xi_{\perp}) \mathbf{B}.$$

Три слагаемых члена в фигурных скобках в (26.14.7) раскладываются следующим образом (полные дивергенции отбрасываются без дополнительных пояснений):

$$\begin{aligned} \eta_{\perp} \cdot (Q \cdot \nabla \mathbf{B}) &= \eta_{\perp} \cdot ((\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp} - \xi_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{B} - (\nabla \cdot \xi_{\perp}) \mathbf{B}) \cdot \nabla \mathbf{B}) = \\ &= \eta_{\perp} \cdot ((\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp}) \cdot \nabla \mathbf{B} - (\xi_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{B}) \cdot \nabla \mathbf{B} - B^2(\eta_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa})(\nabla \cdot \xi_{\perp})); \\ \eta_{\perp} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla Q) &= \mathbf{B} \cdot \nabla(\eta_{\perp} \cdot Q) - Q \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \eta_{\perp}) = \\ &= \nabla \cdot \{(\eta_{\perp} \cdot Q) \mathbf{B}\} - (\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp} - \xi_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{B} - (\nabla \cdot \xi_{\perp}) \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \eta_{\perp}) \mapsto \\ &\mapsto -(\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \eta_{\perp}) + (\xi_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \eta_{\perp}) - B^2(\eta_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa})(\nabla \cdot \xi_{\perp}); \\ -\eta_{\perp} \cdot \nabla(\mathbf{B} \cdot Q) &= -\nabla \cdot \{(\mathbf{B} \cdot Q) \eta_{\perp}\} + (\mathbf{B} \cdot Q)(\nabla \cdot \eta_{\perp}) \mapsto \\ &\mapsto (\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp} - \xi_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{B} - (\nabla \cdot \xi_{\perp}) \mathbf{B}))(\nabla \cdot \eta_{\perp}) = \\ &= (-B^2(\xi_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa}) - \xi_{\perp} \cdot \nabla B^2/2 - (\nabla \cdot \xi_{\perp}) B^2)(\nabla \cdot \eta_{\perp}). \end{aligned}$$

Собирая эти слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} \eta \cdot \mathbf{F}[\xi] \mapsto &- \gamma p (\nabla \cdot \xi) (\nabla \cdot \eta) - \frac{B^2}{4\pi} (\nabla \cdot \xi_{\perp}) (\nabla \cdot \eta_{\perp}) - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \eta_{\perp}) - \\ &- \left[\xi_{\perp} \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{B^2}{4\pi} \xi_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right] (\nabla \cdot \eta_{\perp}) - 2 \frac{B^2}{4\pi} (\eta_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa}) (\nabla \cdot \xi_{\perp}) + \\ &+ R, \end{aligned}$$

где

$$4\pi R = \eta_{\perp} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp}) \cdot \nabla \mathbf{B} - (\xi_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{B}) \cdot \nabla \mathbf{B}] + (\xi_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{B}) (\mathbf{B} \cdot \nabla \eta_{\perp}).$$

Выражение во второй строке упрощается с помощью ещё одной формы уравнения равновесия плазмы

$$\nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{B^2}{4\pi} \boldsymbol{\kappa},$$

так что

$$\begin{aligned} \eta \cdot \mathbf{F}[\xi] \mapsto &- \gamma p (\nabla \cdot \xi) (\nabla \cdot \eta) - \frac{B^2}{4\pi} (\nabla \cdot \xi_{\perp}) (\nabla \cdot \eta_{\perp}) - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \eta_{\perp}) - \\ &- 2 \frac{B^2}{4\pi} (\xi_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa}) (\nabla \cdot \eta_{\perp}) - 2 \frac{B^2}{4\pi} (\eta_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa}) (\nabla \cdot \xi_{\perp}) + \end{aligned}$$

$$+ R.$$

Величина R может быть преобразована при помощи двух легко проверяемых тождеств

$$\nabla \cdot \{[\eta_{\perp} \cdot (\xi_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{B})] \mathbf{B}\} = (\mathbf{B} \cdot \nabla \eta_{\perp}) \cdot (\xi_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{B}) + \eta_{\perp} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp}) \cdot \nabla \mathbf{B} + \eta_{\perp} \cdot (\mathbf{B} \xi_{\perp} : \nabla \nabla) \mathbf{B},$$

$$-\eta_{\perp} \cdot (\xi_{\perp} \cdot \nabla) (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}) = -\eta_{\perp} \cdot (\xi_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{B}) \cdot \nabla \mathbf{B} - \eta_{\perp} \cdot (\mathbf{B} \xi_{\perp} : \nabla \nabla) \mathbf{B},$$

причём оператор « $:$ » понимается в том смысле, что $\mathbf{a} \mathbf{b} : \nabla \nabla = a_{\alpha} b_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}}$. Сумма этих тождеств с левой стороны от знака равенства содержит два слагаемых, одно из которых является полной дивергенцией и поэтому даёт нуль при интегрировании. Последние слагаемые в правой стороне (содержащие оператор « $:$ ») взаимно сокращаются. Оставшиеся три слагаемых в сумме дают R . Следовательно,

$$R \mapsto -\frac{1}{4\pi} \eta_{\perp} \cdot (\xi_{\perp} \cdot \nabla) (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}) = -(\eta_{\perp} \xi_{\perp} : \nabla \nabla) \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right),$$

поскольку равновесное давление удовлетворяет уравнению

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}.$$

Финальный результат

$$\begin{aligned} \int \eta \cdot \mathbf{F}[\xi] d^3x = & - \int d^3x \left[\gamma p (\nabla \cdot \xi) (\nabla \cdot \eta) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_{\perp}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \eta_{\perp}) + \right. \\ & + \frac{B^2}{4\pi} (\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2\xi_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa}) (\nabla \cdot \eta_{\perp} + 2\eta_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa}) - \\ & \left. - \frac{B^2}{4\pi} (2\xi_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa}) (2\eta_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa}) + (\eta_{\perp} \xi_{\perp} : \nabla \nabla) \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \right] \quad (26.14.8) \end{aligned}$$

симметричен относительно перестановки ξ и η , что делает очевидным самосопряжённость оператора $\mathbf{F}[\xi]$. Приведённое доказательство впервые опубликовано в Приложении А к монографии [8].

Задача 26.15. Вариационный принцип позволяет сформулировать приближённый метод вычисления собственных частот и собственных функций. Энергетический принцип позволяет установить только факт устойчивости или неустойчивости системы.

Задача 26.16. Представим, что необходимо найти решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dx} \left(f \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda - g)y = 0 \quad (26.16.1)$$

на интервале $0 < x < 1$ с граничными условиями

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (26.16.2)$$

на концах интервала. Предполагается, что $f(x)$ и $g(x)$ — две известные функции, а λ — собственное значение, которое предстоит найти. Уравнения (26.16.1) и (26.16.2) дают пример формулировки дифференциальной задачи на собственные значения. С помощью простого интегрирования по частям легко проверить, что оператор

$$F[y] = \frac{d}{dx} \left(f \frac{dy}{dx} \right) - g y$$

является самосопряжённым на указанном интервале с указанными граничными условиями для любых функций f и g . В специальных случаях, когда эти функции достаточно просты, задача удаётся решить в аналитическом виде. Однако в общем случае приходится прибегать к помощи численных методов, чтобы найти λ .

При использовании вариационного принципа уравнение (26.16.1) может быть преобразовано к интегральному соотношению, которое в точности эквивалентно исходной задаче. Одним из преимуществ вариационной формулировки задачи является возможность подстановки в интеграл пробных функций вместо точного решения для того, чтобы оценить собственное значение. Если вариационный принцип сформулирован правильно, то найденное таким способом собственное значение является даже более точным, нежели сама пробная функция.

Чтобы составить вариационный принцип, умножим уравнение (26.16.1) на y и проинтегрируем по области $0 \leq x \leq 1$. Простой расчёт даёт

$$\lambda = \frac{\int (f y'^2 + g y^2) dx}{\int y^2 dx}. \quad (26.16.3)$$

В этом интеграле и далее подразумеваются пределы интегрирования от $x = 0$ до $x = 1$. Покажем, что уравнение (26.16.3) в точности эквивалентно уравнению (26.16.1) в том смысле, что при подстановке в формулу (26.16.3) любой допустимой пробной функции $y(x)$ результирующее значение λ будет иметь экстремум только для тех пробных функций, которые совпадают с собственными функциями. Допустимой пробной функцией является любая произвольная функция, которая ограничена и удовлетворяет граничным условиям, а экстремумом может быть максимум, минимум или седловая точка собственного значения λ .

Чтобы доказать это, предположим, что при подстановке пробной функции $y_0(x)$ в уравнение (26.16.3) получается значение λ_0 параметра λ . Возьмём другую пробную функцию $y(x) = y_0(x) + \delta y(x)$, которая отличается от первой небольшой добавкой $\delta y(x)$, такой что $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$. Для неё получается

другое значение $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$, причём

$$\delta\lambda = \frac{\int [f(y_0 + \delta y)^2 + g(y_0 + \delta y)^2] dx}{\int (y_0 + \delta y)^2 dx} - \frac{\int (fy_0'^2 + gy_0^2) dx}{\int y_0^2 dx}.$$

Для достаточно малых величин δy отсюда имеем

$$\delta\lambda = \frac{2 \int [\delta y' f y'_0 + \delta y y_0 (g - \lambda_0)] dx}{\int y_0^2 dx}.$$

Интегрирование по частям в первом слагаемом в числителе даёт

$$\delta\lambda = - \frac{2 \int \delta y [(f y'_0)' + (\lambda_0 - g) y_0] dx}{\int y_0^2 dx}.$$

Чтобы значение λ_0 соответствовало экстремуму, должно быть $\delta\lambda = 0$ для произвольной вариации $\delta y(x)$. Это случается, только если имеет место соотношение

$$(f y'_0)' + (\lambda_0 - g) y_0 = 0,$$

которое эквивалентно исходному уравнению.

Таким образом, соотношение (26.16.3) служит вариационным принципом для собственного значения λ . Тот факт, что $\delta\lambda = 0$, когда $y(x)$ совпадает с истинной собственной функцией, подразумевает, что оценка для λ , которая получается при подстановке пробной функции в (26.16.3), более точна, чем сама пробная функция. Это утверждение станет понятнее, если вариации приписать порядок ϵ . При подстановке $y = y_0 + \delta y$ в уравнение (26.16.3) получаем

$$\lambda = \lambda_0 + \mathcal{O}[\epsilon^2], \quad (26.16.4)$$

так как слагаемые с δy все сокращаются. Уравнение (26.16.4) означает, что λ отличается от λ_0 на поправку порядка ϵ^2 , что на один порядок более точно, чем сама пробная функция.

Вариационный принцип есть эквивалентная интегральная формулировка исходной дифференциальной задачи на собственные значения. Он может использоваться двумя способами. Во-первых, если может быть найдена функция $y_0(x)$, которая доставляет экстремум λ среди всех допустимых функций $y(x)$, тогда $y_0(x)$ и соответствующее значение λ_0 есть не что иное, как истинные собственная функция и собственное значение задачи. Во-вторых, если может быть найдена функция $y_0(x)$, которая доставляет экстремум λ среди специального, намеренно упрощённого класса пробных функций, тогда $y_0(x)$ есть лучшая аппроксимация истинной собственной функции в этом классе. Если ошибка в пробной функции имеет порядок $\epsilon \ll 1$, тогда отклонение λ от истинного собственного значения имеет порядок ϵ^2 .

Задача 26.17. В самом простом варианте неустойчивость Рэлея – Тейлора развивается на фоне равновесия двух слоев жидкости в однородном поле тяжести, когда более плотный слой расположен над менее плотным. Из повседневного опыта известно, что такое равновесие на практике невозможно, но можно представить, что какой-то искусный экспериментатор сумел-таки создать столь необычную систему, ведь формально уравнения гидродинамики допускают такое равновесие. Однако оно неустойчиво. Стоит чуть-чуть тряхнуть подобную систему – и тяжёлый слой опустится вниз.

В более сложном варианте неустойчивость Рэлея – Тейлора возникает в системе, где роль верхней тяжёлой жидкости играет плазма, а нижнюю лёгкую жидкость заменяет «невесомое» магнитное поле, параллельное границе раздела двух сред. В этом случае говорят также о неустойчивости Крускала – Шварцишильда. Магнитное поле специального вида, которое обладает широм, может стабилизировать неустойчивость границы плазмы. При наличии шира направление магнитного поля меняется при движении в некотором направлении поперёк силовых линий. Для создания шира необходим ток, текущий вдоль магнитного поля.

Первое исследование равновесия вещества с неоднородным распределением плотности в гравитационном поле было выполнено в 1883 году английским физиком Дж. Рэлеем ([Lord Rayleigh \[160\]](#)), а неустойчивость равновесия неоднородной среды, возникающая при её ускорении, была изучена в 1950 году английским физиком Дж. Тейлором ([Geoffrey Taylor \[161\]](#)).

Применим изложенные в лекции методы исследования устойчивости к анализу поведения плазмы в гравитационном поле. В лабораторных условиях земная сила тяжести столь мала, что её влиянием на устойчивость плазмы практически всегда можно пренебречь. Однако некоторые другие эффекты, которые делают плазму неустойчивой, можно смоделировать при помощи искусственной силы тяжести. Кроме того, пример плазмы в поле силы тяжести позволяет сравнительно просто продемонстрировать в действии вариационный метод расчёта собственных колебаний (задача 26.20).

Приступая к расчёту, обратимся к системе уравнений (19.20), повторив её с небольшими изменениями:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0, \quad (26.17.1a)$$

$$\frac{dp}{dt} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (26.17.1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (26.17.1v)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \rho g. \quad (26.17.1\Gamma)$$

Изменениям подвергнуто уравнение Эйлера (19.20б), в котором сделана подстановка

$$\frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] = -\nabla \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

чтобы выделить градиент магнитного давления $\nabla B^2/8\pi$, и добавлена сила тяжести ρg . Говорят, что плазма *стратифицирована*, если её равновесные параметры меняются в пространстве из-за силы тяжести. Исследуем устойчивость стратифицированного равновесия с широм магнитного поля. Направим ось x вертикально вверх против силы тяжести g , так что

$$\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{x}}, \quad (26.17.2)$$

где $\hat{\mathbf{x}}$ – единичный вектор вдоль оси x . Пусть в равновесии все величины зависят только от x , а магнитное поле перпендикулярно силе тяжести. Наличие шира означает, что направление магнитного поля, вообще говоря, различно на разной высоте x , т. е.

$$\mathbf{B} = B_y(x) \hat{\mathbf{y}} + B_z(x) \hat{\mathbf{z}}. \quad (26.17.3)$$

Шир создаётся током

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} + \frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{\mathbf{z}},$$

который имеет проекцию на направление \mathbf{B} . В состоянии равновесия с $\mathbf{V} = 0$ и не зависящими от времени ρ , p , \mathbf{B} все уравнения (26.17.1) обращаются в тождества, кроме x -компоненты уравнения Эйлера:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \rho g. \quad (26.17.4)$$

Она связывает равновесную плотность плазмы $\rho = \rho(x)$ с суммарным давлением плазмы и магнитного поля

$$P = p + \frac{B^2}{8\pi}, \quad (26.17.5)$$

где $B^2 = B_y^2 + B_z^2$.

Чтобы исследовать устойчивость такого равновесия относительно малых возмущений, линеаризуем уравнения (26.17.1), не делая вначале никаких предположений относительно вида возмущений. Для этого выполним замену $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$, $p \rightarrow p + \delta p$, $\mathbf{V} \rightarrow \delta\mathbf{V}$, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + \delta\mathbf{B}$ и оставим только линейные слагаемые; для краткости здесь мы не пишем индекс 0 у равновесных величин. Слагаемые нулевого порядка, которые не содержат малых величин $\delta\mathbf{V}$, $\delta\mathbf{B}$ и т. д., представляют равновесное решение и поэтому автоматически сокращаются. В линеаризованных уравнениях произведём замену

$$\delta\mathbf{V} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (26.17.6)$$

чтобы вновь, как в параграфе §26.2, избавиться от производных по времени во всех уравнениях, кроме уравнения Эйлера. Вводя также обозначение

$$\delta P = \delta p + (\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{B})/4\pi, \quad (26.17.7)$$

получаем

$$\delta\rho = -\xi \cdot \nabla\rho - \rho \operatorname{div} \xi, \quad (26.17.8a)$$

$$\delta p = -\xi \cdot \nabla p - \gamma p \operatorname{div} \xi, \quad (26.17.8b)$$

$$\delta\mathbf{B} = \operatorname{rot}[\xi \times \mathbf{B}], \quad (26.17.8c)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla \delta P + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \delta \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi} (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \delta \rho g. \quad (26.17.8d)$$

Выражение (26.17.8b) для $\delta\mathbf{B}$ преобразуем с помощью векторного тождества

$$\operatorname{rot}[\xi \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \xi - \mathbf{B} \operatorname{div} \xi + \xi \operatorname{div} \mathbf{B} - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

в котором $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

Дальнейшие вычисления заметно упрощаются в приближении несжимаемой жидкости. Оно хорошо выполняется для сравнительно медленных движений, у которых характерная частота заметно меньше частоты альфвеновских и магнитозвуковых колебаний (задача 22). В этом приближении вид допустимых возмущений ограничивается условием

$$\operatorname{div} \xi = 0. \quad (26.17.9)$$

Тогда

$$\delta\rho = -\xi \cdot \nabla\rho, \quad \delta p = -\xi \cdot \nabla p, \quad \delta\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \xi - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (26.17.10)$$

Как мы увидим, условие несжимаемости (26.17.9) позволяет исключить давление из уравнения Эйлера, поэтому выражение для δp далее нам не понадобится.

Поскольку свойства плазмы и магнитного поля одинаковы в каждой точке плоскости yz , решение системы линеаризованных уравнений можно искать в виде

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(x) \exp(iky - i\omega t), \quad (26.17.11)$$

направив ось y вдоль волнового вектора $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{y}}$ в этой плоскости. Подстановка (26.17.11) и

$$\delta\rho = -\xi_x \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \delta\mathbf{B} = ikB_y \xi - \xi_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \quad (26.17.12)$$

в уравнение (26.17.8g) приводит его к виду

$$-\omega^2 \rho \xi = -\nabla \delta P - \frac{1}{4\pi} k^2 B_y^2 \xi - \xi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} g. \quad (26.17.13)$$

Чтобы исключить δP , возьмём z -компоненту ротора последнего уравнения, т. е. из

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(-\omega^2 \rho + \frac{k^2 B_y^2}{4\pi} \right) \xi_y \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \delta P}{\partial y}$$

почленно вычтем

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(-\omega^2 \rho + \frac{k^2 B_y^2}{4\pi} \right) \xi_x \right] = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \delta P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \xi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} g$$

и учтём, что $\partial/\partial y = ik$. Из полученного уравнения исключим ξ_y с помощью соотношения

$$ik\xi_y = -\frac{\partial \xi_x}{\partial x}, \quad (26.17.14)$$

которое следует из (26.17.9). В результате получаем одно уравнение второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\omega^2 \rho - \frac{k^2 B_y^2}{4\pi} \right) \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right] = k^2 \left(\omega^2 \rho - \frac{k^2 B_y^2}{4\pi} + g \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \xi_x. \quad (26.17.15)$$

Чтобы найти решение этого уравнения, его необходимо дополнить граничными условиями. Например, можно считать, что слой плазмы толщиной $2h$ ограничен твёрдыми стенками; тогда на стенах $\xi_x = 0$ при $x = \pm h$. Вместе с граничными условиями уравнение (26.17.15) составляет задачу на собственные значения. Оказывается, что для каждого заданного волнового числа k существует бесконечное число решений, соответствующих различным значениям частоты ω . Набор всех возможных комплексных значений ω называется спектром задачи на собственные значения. Для некоторых особых профилей плотности и давления плазмы спектр удаётся отыскать в аналитическом виде. Примером является ступенчатый профиль, в котором равновесные параметры плазмы однородны в области $x > 0$ и в области $x < 0$, а при $x = 0$ скачком изменяются (задача 18).

Задача 26.18. Пусть плазма занимает пространство между двумя твёрдыми горизонтальными стенками, которые расположены в плоскостях $x = \pm h$. Поместим равновесные параметры плазмы в верхнем слое $0 < x < h$ индексом «+», а в нижнем слое $-h < x < 0$ индексом «-». Поскольку в каждом из слоёв плотность ρ_{\pm} и магнитное поле $\mathbf{B}_{\pm} = B_{y\pm}\hat{\mathbf{y}} + B_{z\pm}\hat{\mathbf{z}}$ не зависят от координат, уравнение (26.17.15) существенно упрощается, принимая вид

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} = k^2 \xi_x.$$

Его решение, которое обращается в нуль при $x = \pm h$ и непрерывно при $x = 0$, есть

$$\xi_x = \operatorname{sh}(kh - k|x|).$$

Ещё одно граничное условие при $x = 0$ получим, выполнив интегрирование непосредственно в уравнении (26.17.15) по тонкому слою от $x = 0-$ до $x = 0+$, окружающему границу раздела:

$$\left[\left(\omega^2 \rho - \frac{k^2 B_y^2}{4\pi} \right) \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right]_-^+ = k^2 g \rho \xi_x \Big|_-^+.$$

Из него находим квадрат частоты

$$\omega^2 = -kg \frac{(\rho_+ - \rho_-)}{(\rho_+ + \rho_-)} \operatorname{th}(kh) + \frac{k^2}{4\pi} \frac{(B_{y+}^2 + B_{y-}^2)}{(\rho_+ + \rho_-)}. \quad (26.18.1)$$

Возмущения с $\omega^2 < 0$ неустойчивы. Так как $k^2 B_y^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2$, наиболее неустойчивы возмущения с таким направлением вектора \mathbf{k} , для которого сумма $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_+)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_-)^2$ минимальна. Пусть ось y выбрана именно вдоль такого направления, и, следовательно, формула (26.18.1) описывает самые неустойчивые возмущения. Из неё следует, что магнитный шир стабилизирует коротковолновые возмущения с большим k . Однако при конечной толщине слоя h магнитный шир может стабилизировать возмущения с любой длиной волны. Условие полной стабилизации получаем, потребовав, чтобы $\omega^2 > 0$ в пределе $k \rightarrow 0$, т. е.

$$\min[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_+)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_-)^2]/k^2 > 4\pi(\rho_+ - \rho_-)gh.$$

Из уравнения (26.18.1) нетрудно найти закон дисперсии гравитационных волн на поверхности жидкости. При $\mathbf{B} = 0$, $\rho_+ = 0$ и $h \rightarrow \infty$ получаем

$$\omega^2 = kg. \quad (26.18.2)$$

Задача 26.19. В среде без магнитного поля уравнение (26.17.15) из задачи 26.17 упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\omega^2 \rho \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right) = k^2 \left(\omega^2 \rho + g \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \xi_x.$$

При подстановке $\rho = \rho_0 \exp(x/h)$ экспоненциальный множитель сокращается и получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\omega^2 h \xi''_x(x) + \omega^2 \xi'_x(x) - k^2(g + h\omega^2) \xi_x(x) = 0.$$

Его решение с граничными условиями $\xi_x(0) = \xi_x(L) = 0$ имеет вид

$$\xi_x(x) = \xi_{x0} \sin(\pi n/L) \exp(-x/2L)$$

и существует, если

$$\omega^2 = -\frac{4ghk^2 L^2}{4h^2 k^2 L^2 + 4\pi^2 h^2 n^2 + L^2}.$$

В случае $h > 0$ квадрат частоты ω^2 меньше нуля, что соответствует неустойчивости. Наибольший инкремент имеют возмущения с $n = 1$, $k \rightarrow \infty$.

Задача 26.20. Рассмотрим задачу с граничными условиями

$$\xi_x = 0 \quad \text{или} \quad \partial \xi_x / \partial x = 0 \quad (26.20.1)$$

на верхней и нижней границах области. Умножим уравнение (26.17.15) на ξ_x и проинтегрируем по x . Интеграл в левой стороне проинтегрируем по частям; внешнетривиальный член при этом обратится в нуль вследствие граничных условий. Из полученного уравнения выразим частоту:

$$\omega^2 = - \frac{\int \left\{ g \frac{\partial \rho}{\partial x} k^2 \xi_x^2 - \frac{k^2 B_y^2}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right)^2 + k^2 \xi_x^2 \right] \right\} dx}{\int \rho \left[(\partial \xi_x / \partial x)^2 + k^2 \xi_x^2 \right] dx}. \quad (26.20.2)$$

Вариационный принцип гласит, что любая функция ξ_x , для которой квадрат частоты (26.20.2) является экстремумом, будет собственной функцией задачи на собственные значения.

Первым следствием вариационного принципа (26.20.2) является вещественность квадрата частоты. Так как только вещественные пробные функции имеют реальный смысл,³ правая сторона (26.20.2), очевидно, вещественна.

Положительные значения квадрата частоты ω^2 , полученные для выбранной пробной функции, соответствуют устойчивым периодическим колебаниям с вещественной частотой $\omega = \pm |\omega|$. Отрицательные значения $\omega^2 < 0$ отвечают апериодическим колебаниям с чисто мнимыми частотами $\omega = \pm i|\omega|$, одно из которых неустойчиво и нарастает по экспоненциальному закону $\exp(|\omega|t)$, а другое экспоненциально затухает пропорционально $\exp(-|\omega|t)$. Тот факт, что решениями являются оба значения $\omega = +i|\omega|$ и $\omega = -i|\omega|$, показывает, что неустойчивость сохраняется при обращении времени.

Исследуем сначала случай, когда волновой вектор перпендикулярен магнитному полю, т. е. $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0$, или магнитного поля вообще нет. Легко показать, что неустойчивость существует тогда и только тогда, когда на некотором интервале $\partial \rho / \partial x > 0$. Для того чтобы продемонстрировать это с помощью вариационного принципа (26.20.2), выберем для ξ_x такую пробную функцию, которая равна нулю везде, за исключением интервала, где $\partial \rho / \partial x > 0$. Для любой такой пробной функции $\omega^2 < 0$. Инкремент неустойчивости непосредственно связан с обратной величиной характерного масштаба градиента $L = \rho / (\partial \rho / \partial x)$. Наиболее неустойчивы коротковолновые возмущения, которые в пределе $k \rightarrow \infty$ стремятся к конечной точке сгущения

$$\omega_\infty^2 = - \max \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{g}{\rho} \right). \quad (26.20.3)$$

³ Можно построить вариационный принцип для комплексных функций ξ_x , умножив (26.17.15) на комплексно-сопряженную функцию ξ_x^* и повторив процедуру выведения. Тогда в аналог (26.20.2) войдут вещественные модули комплексных величин $|\xi_x|^2$ и $|\partial \xi_x / \partial x|^2$.

Если $g\partial\rho/\partial x$ везде отрицательно, то все пробные функции приводят к положительным значениям ω^2 , указывая на отсутствие неустойчивых колебаний.

При наличии магнитного поля из вариационного принципа (26.20.2) следует, что возмущения, волновой вектор которых направлен перпендикулярно магнитному полю, вообще не чувствуют влияния поля. В то же время возмущения с волновым вектором, параллельным полю, имеют тенденцию к стабилизации, причём в первую очередь стабилизируются наиболее коротковолновые возмущения с $k \rightarrow \infty$. Если волновой вектор перпендикулярен магнитному полю, т. е. $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0$, то неустойчивые возмущения вытянуты вдоль магнитных силовых линий и силовые линии можно переставить без изменения магнитной энергии. Если же волновой вектор параллелен магнитному полю, возмущения изгибают силовые линии поля и увеличивают натяжение магнитного поля. Чем короче длина волны, тем больше изгибаются силовые линии.

Для произвольного волнового вектора \mathbf{k} магнитный шир стремится локализовать неустойчивость на том уровне, где $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0$. Только в непосредственной близости от этого уровня силовые линии могут быть переставлены без сильного искривления. Соответственно, шир стабилизирует прежде всего крупномасштабные возмущения.

Задача 26.21. Постановка задачи об устойчивости плазмы с введением гипотетической силы тяжести g может оказаться полезной при изучении весьма сложных геометрий. Например, в реальном равновесии плазмы в магнитном поле роль эффективной силы тяжести может играть любая перпендикулярная к магнитному полю сила, направление которой не зависит от знака заряда. Такой силой может быть центробежная сила, связанная с движением частиц вдоль искривлённой силовой линии. При этом следует взять $g \sim \langle v_{\parallel}^2 \rangle / R$, где R — радиус кривизны силовой линии, а $\langle v_{\parallel}^2 \rangle$ — средний квадрат скорости продольного движения ионов. Аналогичный эффект создаёт диамагнитная сила, которая приводит к градиентному дрейфу (§6.4), так что суммарно

$$g \sim (1/R)\langle v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2 \rangle \sim (1/R)(p_{\parallel} + p_{\perp}^2)/\rho. \quad (26.21.1)$$

Отсюда видно, что выпуклая граница плазмы должна быть неустойчива с инкрементом

$$\Gamma \sim \sqrt{\frac{g}{a}} \sim \frac{v_{Ti}}{\sqrt{aR}}, \quad (26.21.2)$$

который получается после подстановки (26.21.2) в (26.20.3); здесь a — характерный радиус плазмы, v_{Ti} — тепловая скорость ионов. Соответствующая неустойчивость называется желобковой. Подробнее она будет рассмотрена в лекции 28.

Задача 26.22. Пренебрегая широм, будем считать, что равновесное магнитное поле $\mathbf{B} = B(x)\hat{\mathbf{z}}$ направлено вдоль оси z и зависит только от вертикальной координаты x , как и другие равновесные параметры плазмы ρ и p , которые удовлетворяют уравнению (26.17.4). С помощью формулы

$$\delta\mathbf{B} = \text{rot}[\xi \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\xi - (\xi \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div } \xi \quad (26.22.1)$$

можно убедиться, что возмущение магнитного поля $\delta\mathbf{B} = \delta B_z \hat{\mathbf{z}}$ также будет направлено вдоль оси z , если смещение ξ не зависит от координаты z . Рассмотрим именно такие возмущения, полагая, что

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(x) \exp(iky - i\omega t), \quad (26.22.2)$$

и запишем систему линеаризованных уравнений, воспользовавшись результатами задачи 11:

$$\delta\rho = -\xi_x \frac{\partial\rho}{\partial x} - \rho \text{div } \xi, \quad (26.22.3)$$

$$\delta p = -\xi_x \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma p \text{div } \xi, \quad (26.22.4)$$

$$\delta B_z = -\xi_x \frac{\partial B_z}{\partial x} - B \text{div } \xi, \quad (26.22.5)$$

$$-\omega^2 \rho \xi = -\nabla \delta P + \delta \rho g. \quad (26.22.6)$$

Умножив уравнение (26.22.5) на $B/4\pi$ и сложив с уравнением (26.22.4), найдём возмущение суммарного давления плазмы и магнитного поля:

$$\delta P = \delta p + B \delta B_z / 4\pi = \rho g \xi_x - (c_s^2 + c_A^2) \rho \text{div } \xi; \quad (26.22.7)$$

здесь произведена замена $\partial P / \partial x = -\rho g$ согласно (26.17.4) и введены обозначения $c_s^2 = \gamma p / \rho$ и $c_A^2 = B^2 / 4\pi \rho$ для скорости звука и альфеновской скорости. Исключим далее δP и $\delta \rho$ из уравнения (26.22.6) и распишем его x и y компоненты:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho \xi_x &= -\frac{\partial}{\partial x} [\rho g \xi_x - (c_s^2 + c_A^2) \rho \text{div } \xi] + \left[\xi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \text{div } \xi \right] g, \\ -\omega^2 \rho \xi_y &= -ik [\rho g \xi_x - (c_s^2 + c_A^2) \rho \text{div } \xi]. \end{aligned}$$

Так как

$$\text{div } \xi = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + ik \xi_y,$$

отсюда получаем два уравнения на две неизвестные функции ξ_x и ξ_y :

$$-\omega^2 \rho \xi_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[(c_s^2 + c_A^2) \rho \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + (c_s^2 + c_A^2) \rho ik \xi_y \right] + ik \rho g \xi_y,$$

$$[k^2(c_s^2 + c_A^2) - \omega^2]\rho\xi_y = -ik\left[\rho g\xi_x - (c_s^2 + c_A^2)\rho\frac{\partial\xi_x}{\partial x}\right].$$

Исключая ξ_y в первом уравнении с помощью второго, получаем одно уравнение на ξ_x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\omega^2(c_s^2 + c_A^2)\rho}{k^2(c_s^2 + c_A^2) - \omega^2}\frac{\partial\xi_x}{\partial x}\right] = \left[\omega^2\rho + \frac{\partial}{\partial x}\frac{k^2(c_s^2 + c_A^2)\rho g}{k^2(c_s^2 + c_A^2) - \omega^2} + \frac{k^2\rho g^2}{k^2(c_s^2 + c_A^2) - \omega^2}\right]\xi_x. \quad (26.22.8)$$

В пределе $\omega^2 \ll k^2(c_s^2 + c_A^2)$ оно упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\omega^2\rho\frac{\partial\xi_x}{\partial x}\right] = k^2\left[\omega^2\rho + g\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\rho g^2}{(c_s^2 + c_A^2)}\right]\xi_x, \quad (26.22.9)$$

который, за исключением последнего слагаемого в правой части, совпадает с уравнением (26.17.15) при $B_y = 0$. Так как уравнение (26.17.15) получено в приближении несжимаемой жидкости, можно сказать, что это приближение подходит для сравнительно медленных и коротковолновых возмущений, таких что $\omega^2 \ll k^2(c_s^2 + c_A^2)$. Последнее слагаемое в правой части (26.22.8) описывает эффект, который теряется в приближении несжимаемой жидкости. Составив вариационный принцип для уравнения (26.22.9), нетрудно убедиться, что благодаря этому слагаемому даже однородная среда, где $\partial\rho/\partial x = 0$, будет неустойчива, а устойчивость гарантирует только условие

$$g\frac{\partial\rho}{\partial x} < -\frac{\rho g^2}{(c_s^2 + c_A^2)}$$

во всём интервале допустимых значений x .

Лекция 27

Задача 27.1. Рассмотрим пинч с радиусом $r = a$ и выберем цилиндрическую систему координат $\{r, \theta, z\}$ с осью z вдоль оси пинча. В соответствии с условием задачи предположим, что пинч скринирован, т. е. весь продольный ток I течёт в тонком поверхностном слое плазмы и направлен вдоль оси системы. При этом давление p , а также продольные поля B_i внутри и B_z вне пинча не зависят от r в отличие от азимутального поля $B_\theta = 2I/cr$. В равновесии на границе пинча при $r = a$ имеет место баланс давлений плазмы и магнитного поля:

$$p + \frac{B_i^2}{8\pi} = \frac{B_\theta^2(a) + B_z^2}{8\pi}. \quad (27.1.1)$$

Наложим на это равновесие малое возмущение. Пусть элемент плазмы из точки с радиус-вектором \mathbf{r} сместился в точку $\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}(r, t)$. В силу цилиндрической симметрии смещение можно выбрать в виде

$$\boldsymbol{\xi}(r, t) = \xi(r)e^{im\theta+ikz-i\omega t}.$$

Чтобы составить уравнение для $\xi(r)$, запишем линеаризованную систему уравнений идеальной МГД, пометив индексом 0 равновесные величины:

$$\delta\rho = -\xi \cdot \nabla\rho_0 - \rho_0 \operatorname{div}\xi, \quad (27.1.2a)$$

$$\delta p = -\xi \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \operatorname{div}\xi, \quad (27.1.2b)$$

$$\delta\mathbf{B} = \operatorname{rot}[\xi \times \mathbf{B}_0], \quad (27.1.2c)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla \left(\delta p + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \delta\mathbf{B}}{4\pi} \right) + \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{B}}{4\pi} + \frac{(\delta\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}_0}{4\pi}. \quad (27.1.2d)$$

Малые возмущения плотности $\delta\rho$, давления δp и магнитного поля $\delta\mathbf{B}$, будучи пропорциональными смещению ξ , очевидно, имеют такую же зависимость от θ , z и t , как и ξ , например

$$\delta p(r, t) = \delta p(r) e^{im\theta + ikz - i\omega t}.$$

В первых двух уравнениях системы (27.1.2) опустим слагаемые в правой части, содержащие градиенты плотности и давления $\nabla\rho_0$ и ∇p_0 , считая однородной плазму внутри пинча; равно нулю также последнее слагаемое в последнем уравнении. Далее заметим, что из проекции

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_z = ik\delta p$$

последнего уравнения на ось z следует, что вблизи порога устойчивости, когда $\omega^2 \rightarrow 0$, возмущение давления δp оказывается малой величиной порядка $\mathcal{O}(\omega^2)$. При этом из уравнений (27.1.2b) и (27.1.2a) следует, что малыми величинами того же порядка оказывается также $\operatorname{div}\xi$ и $\delta\rho$. Учтём это обстоятельство, подставляя

$$\operatorname{div}\xi = 0, \quad \delta\rho = 0, \quad \delta p = 0$$

в те уравнения, где есть величины, которые не обращаются в нуль при $\omega^2 \rightarrow 0$. Можно сказать, что задача об устойчивости пинча эквивалентна задаче об устойчивости несжимаемой жидкости. К этому выводу можно также прийти, анализируя выражение для потенциальной энергии плазмы (26.23). Если ограничиться случаем $k \neq 0$, то соответствующим выбором ξ_z можно добиться обращения в нуль $\operatorname{div}\xi$, а следовательно, и второго слагаемого в подынтегральном выражении для потенциальной энергии плазмы.

Упростим выражение для возмущения магнитного поля. Используя известную формулу векторного анализа и равенства $\operatorname{div}\mathbf{B}_0 = 0$, $\operatorname{div}\xi = 0$, находим

$$\delta\mathbf{B} = \operatorname{rot}[\xi \times \mathbf{B}_0] = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\xi - (\xi \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 + \xi \operatorname{div}\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0 \operatorname{div}\xi = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\xi.$$

Следовательно,

$$\delta\mathbf{B} = ikB_i\xi. \quad (27.1.3)$$

Подставляя это выражение в (27.1.2г), приводим уравнение малых колебаний к виду

$$\left(-\omega^2 \rho_0 + \frac{k^2 B_i^2}{4\pi}\right) \xi = -\nabla \delta P, \quad (27.1.4)$$

где $\delta P = \delta p + (\mathbf{B}_i \cdot \delta \mathbf{B})/4\pi \approx ik\xi_z B_i^2/4\pi$. Поскольку $\operatorname{div} \xi = 0$, отсюда следует, что δP подчиняется уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \delta P = 0.$$

При этом радиальная часть $\delta P(r)$ функции $\delta P(\mathbf{r}, t) = \delta P(r) e^{im\theta+ikz-i\omega t}$ подчиняется уравнению Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\delta P}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right) \delta P = 0.$$

Его решение

$$\delta P(r) = \delta P(a) I_m(kr)/I_m(ka), \quad (27.1.5)$$

регулярное при $r = 0$, выражается через модифицированную функцию Бесселя I_m первого рода порядка m . Константу $\delta P(a)$ с помощью радиальной проекции уравнения (27.1.4) можно выразить через смещение ξ_r на границе, а именно:

$$\delta P(a) = \left(\omega^2 \rho_0 - \frac{k^2 B_i^2}{4\pi}\right) \frac{I_m(ka)}{k I'_m(ka)} \xi_r(a). \quad (27.1.6)$$

Вне плазмы ξ не имеет смысла. Там $\operatorname{rot} \delta \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{div} \delta \mathbf{B} = 0$, поэтому магнитное поле потенциально и

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \Psi, \quad (27.1.7)$$

причём потенциал $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(r) e^{im\theta+ikz-i\omega t}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Psi = 0,$$

а его радиальная часть $\Psi(r)$ — уравнению Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\Psi}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right) \Psi = 0.$$

Его решение

$$\Psi(r) = \Psi(a) K_m(kr)/K_m(ka),$$

ограниченное при $r \rightarrow \infty$, выражается через модифицированную функцию Бесселя второго рода $K_m(kr)$ (функцию Макдональда).

Чтобы сшить решения внутри и вне пинча, используем граничные условия на смещённой границе при $r = a + \xi_r$. Во-первых, запишем условие баланса давлений плазмы и магнитного поля на смещённой границе пинча, обозначив двойными квадратными скобками разность по сторонам границы:

$$\llbracket p + B^2/8\pi \rrbracket = 0. \quad (27.1.8)$$

Линеаризуя его с учётом того, что в равновесии имеет место равенство (27.1.1), получаем

$$\delta \left(p + \frac{B_i^2}{8\pi} \right) + \xi_r \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{B_i^2}{8\pi} \right) = \delta \left(\frac{B_z^2 + B_\theta^2}{8\pi} \right) + \xi_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_z^2 + B_\theta^2}{8\pi} \right).$$

В первом слагаемом в левой части нетрудно распознать $\delta P(a)$, второе слагаемое слева равно нулю вследствие однородности плазмы и магнитного поля внутри пинча. Однако похожее слагаемое в правой части даёт $-\xi_r B_\theta^2/4\pi a$, так как $B_\theta^2 \propto \propto r^{-2}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta P(a) &= \frac{B_z \delta B_z + B_\theta \delta B_\theta}{4\pi} - \frac{B_\theta^2}{4\pi a} \xi_r(a) = \\ &= \frac{i}{4\pi} \left(kB_z + \frac{m}{a} B_\theta(a) \right) \Psi(a) - \frac{B_\theta^2(a)}{4\pi a} \xi_r(a). \end{aligned} \quad (27.1.9)$$

Во-вторых, учтём, что вследствие вмороженности смещённая граница плазмы остаётся магнитной поверхностью и, следовательно, магнитное поле в любой её точке направлено по касательной, т. е.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{n}_0 \cdot \delta \mathbf{B} + \delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (27.1.10)$$

по отдельности с каждой стороны границы. Записав уравнение граничной поверхности пинча в виде

$$G = r - a - \xi_r = 0,$$

вектор единичной нормали $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta \mathbf{n}$ к ней нетрудно найти по формулам

$$\mathbf{n} = \nabla G / |\nabla G|, \quad \mathbf{n}_0 = \{1, 0, 0\}, \quad \delta \mathbf{n} = \{0, -im/a, -ik\} \xi_r. \quad (27.1.11)$$

С помощью формул (27.1.3) и (27.1.11) легко проверить, что условие (27.1.10) со стороны плазмы обращается в тождество (чего и следовало ожидать). С внешней же стороны границы оно приводит к уравнению

$$i \left(kB_z + \frac{m}{a} B_\theta(a) \right) \xi_r(a) = \frac{k K_m'(ka)}{K_m(ka)} \Psi(a). \quad (27.1.12)$$

Исключая с его помощью $\Psi(a)$ в уравнении (27.1.9), получаем

$$\delta P(a) = -\frac{1}{4\pi} \left(kB_z + \frac{m}{a} B_\theta(a) \right)^2 \frac{K_m(ka)}{k K_m'(ka)} \xi_r(a) - \frac{B_\theta^2(a)}{4\pi a} \xi_r(a). \quad (27.1.13)$$

Далее из условия разрешимости пары уравнений (27.1.6) и (27.1.13) относительно $\delta P(a)$ и $\xi_r(a)$ получаем дисперсионное уравнение

$$4\pi\rho_0\omega^2 = k^2B_i^2 - \left(kB_z + \frac{m}{a}B_\theta(a)\right)^2 \frac{I_m'(ka)}{I_m(ka)} \frac{K_m(ka)}{K_m'(ka)} - \frac{kB_\theta^2(a)}{a} \frac{I_m'(ka)}{I_m(ka)}. \quad (27.1.14)$$

Оно представляет формальное решение задачи. В его правой части первый член является результатом натяжений магнитных силовых линий внутри пинча. Второе слагаемое, также положительное ввиду $K_m / K_m' < 0$, возникает вследствие натяжения силовых линий вне пинча. Оно пропорционально квадрату компоненты волнового вектора вдоль внешнего магнитного поля и исчезает при $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = kB_z + (m/a)B_\theta(a) = 0$, когда возмущение оказывается постоянным вдоль силовых линий внешнего поля. Как показано в §27.4 с помощью наглядных рассуждений, при таких возмущениях магнитное поле снаружи шнура неискажается и поэтому не может стабилизировать границу. Однако для этих возмущений первый член отличен от нуля, что является результатом наличия ширины (перекрещенности) силовых линий. Наконец, последний член в уравнении (27.1.14) отрицателен; именно он и может привести к неустойчивости. Если проследить за его происхождением, то можно установить, что он происходит из второго слагаемого в соотношении (27.1.9), т. е. в конечном счёте является результатом убывания азимутального магнитного поля при удалении от границы шнура.

Задача 27.2. Возмущениям типа перетяжки соответствует $m = 0$. Если $B_z = 0$, то уравнение (27.1.14) из задачи 27.1 принимает вид

$$\omega^2 = \frac{k^2 B_i^2}{4\pi\rho_0} \left\{ 1 - \frac{B_\theta^2}{B_i^2} \frac{I_0'(ka)}{ka I_0(ka)} \right\}. \quad (27.2.1)$$

Максимальное значение $I_0'(ka)/ka I_0(ka)$ равно $1/2$ и достигается при $ka \rightarrow 0$. Поэтому пинч будет стабилизирован по отношению к перетяжкам $m = 0$ с любой длиной волны $\lambda = 2\pi/k$, если

$$B_i^2 > B_\theta^2/2.$$

Из качественных соображений это условие получено в §27.2.

Внешнее продольное поле B_z также оказывает стабилизирующее влияние на перетяжки. Однако для длинноволновых возмущений с $ka \ll 1$ его эффект мал. Для таких возмущений

$$I_0(ka) \approx 1 + \frac{(ka)^2}{4}, \quad \frac{I_0'}{I_0} \approx \frac{ka}{2}, \quad K_0(ka) \approx \ln \frac{1}{ka}, \quad \frac{K_0'}{K_0} \approx \frac{1}{ka \ln(ka)}$$

и, следовательно,

$$\omega^2 = \frac{k^2 B_i^2}{4\pi\rho_0} \left\{ 1 - \frac{B_\theta^2}{2B_i^2} + \frac{B_z^2}{B_i^2} \frac{k^2 a^2}{2} \ln \frac{1}{ka} \right\}. \quad (27.2.2)$$

Стабилизирующий эффект внутреннего продольного поля B_i объясняется следующим образом. Если плазма пытается просунуть «язык» между силовыми линиями внешнего поля B_θ , то силовая линия внутри плазмы растягивается и натяжение внутреннего поля стремится вернуть «язык» назад. Так проявляется стабилизирующий эффект шира.

Задача 27.3. Возмущениям типа змейки соответствует $m = 1$. В отличие от петяжек, даже очень сильное внутреннее поле B_i не может полностью стабилизировать такие возмущения. Действительно, при $B_z = 0$ и $m = 1$ уравнение (27.1.14) из задачи 27.1 принимает вид

$$\omega^2 = \frac{k^2 B_i^2}{4\pi\rho_0} - \frac{k B_\theta^2}{4\pi\rho_0 a} \frac{I'_1(ka)}{I_1(ka)} \left[1 + \frac{K_1(ka)}{ka K'_1(ka)} \right].$$

В пределе длинных волн, $ka \rightarrow 0$, это выражение принимает вид

$$\omega^2 = \frac{k^2 B_i^2}{4\pi\rho_0} \left\{ 1 - \frac{B_\theta^2}{B_i^2} \ln \frac{1,12292}{ka} \right\}$$

и оказывается отрицательным (а возмущение неустойчивым) даже при максимальном внутреннем поле $B_i = B_\theta$, которое допускается условием равновесия (27.1.1) при $p = 0$.

Задача 27.4. Рассмотрим возмущения с $m \geq 1$ при $B_z \neq 0$. Добавление небольшого продольного поля B_z снаружи от столба плазмы только ухудшает его устойчивость, поскольку при этом второе (заведомо положительное) слагаемое в дисперсионном уравнении (27.1.14) в задаче 27.1 может стать меньше. Поэтому сразу рассмотрим предельный случай, когда $B_z \gg B_\theta$. При этом к неустойчивости могут привести только длинноволновые возмущения с $ka \ll 1$. Для таких возмущений

$$\frac{I'_m}{I_m} = \frac{|m|}{ka}, \quad \frac{K'_m}{K_m} = -\frac{|m|}{ka},$$

и дисперсионное уравнение заметно упрощается:

$$\omega^2 = \frac{k^2 B_i^2}{4\pi\rho_0} + \frac{1}{4\pi\rho_0} \left(kB_z + \frac{m}{a} B_\theta \right)^2 - \frac{|m|}{4\pi\rho_0 a^2} B_\theta^2. \quad (27.4.1)$$

Исследуя его правую часть, находим, что она минимальна при

$$k(B_z^2 + B_i^2) + (m/a)B_z B_\theta = 0$$

и при этом равна

$$\omega_{\min}^2 = \frac{B_\theta^2}{4\pi\rho_0} \left[\frac{m^2 B_i^2}{B_z^2 + B_i^2} - |m| \right]. \quad (27.4.2)$$

Если $B_i = B_z$, то неустойчивы ($\omega_{\min}^2 < 0$) только возмущения с $|m| = 1$, а по отношению к возмущениям с $|m| \geq 2$ пинч устойчив. Если же $B_i < B_z$, неустойчивыми могут стать колебания с большими m .

Мы видим, таким образом, что бесконечно длинный шнур неустойчив по отношению к извиванию с $|m| = 1$ при сколь угодно большом отношении B_z/B_θ . Однако всякий реальный пинч имеет конечную длину, скажем L , и поэтому k не может быть меньше $2\pi/L$.

Рассмотрим случай $B_i = B_z$, который естественным образом получается из уравнения (27.1.1) при $p \ll B_z^2/8\pi$ и $B_\theta^2(a)/8\pi \ll B_z^2/8\pi$. Тогда из (27.4.1) при $m = \pm 1$ получаем

$$\omega^2 = \frac{kB_z}{2\pi\rho_0} \left(kB_z \pm \frac{1}{a} B_\theta \right). \quad (27.4.3)$$

Как видно из последнего выражения, квадрат частоты ω^2 положителен при $|k| > B_\theta/aB_z$ и, следовательно, пинч конечной длины L устойчив относительно винтовых возмущений, если

$$\frac{B_\theta}{B_z} < \frac{2\pi a}{L}. \quad (27.4.4)$$

Это условие, полученное независимо В. Д. Шафрановым [114] и М. Крускалом (M. Kruskal) [115], является необходимым для устойчивости столба плазмы в сильном продольном поле. Оно означает, что шаг силовой линии должен быть больше L .

В токамаке $L = 2\pi R$, где R – большой радиус тора, и условие (27.4.4) принимает вид

$$q(a) = \frac{aB_t}{RB_p} > 1,$$

где B_p – полоидальное, а B_t – тороидальное магнитное поле, а величину q называют коэффициентом запаса устойчивости (англ. kink safety factor).

Задача 27.5. Пусть проводящий кожух имеет форму цилиндра радиуса b и его ось совпадает с осью пинча. На кожухе нормальная компонента поля должна равняться нулю, т. е.

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=b} = 0.$$

Если учесть это условие, то во втором слагаемом правой части дисперсионного уравнения (27.1.14) из решения задачи 27.1 отношение $K_m(ka)/K'_m(ka)$ нужно заменить на

$$\frac{K_m(ka) I'_m(kb) - I_m(ka) K'_m(kb)}{K'_m(ka) I'_m(kb) - I'_m(ka) K'_m(kb)}.$$

Подставив в полученное дисперсионное уравнение $m = 1$ и $B_z = 0$, как в задаче 27.3, из условия $\omega^2 = 0$ можно найти отношение $f = B_i^2/B_\theta^2(a)$, соответствующее границе устойчивости. Оно зависит от двух безразмерных параметров ka и kb , однако удобнее исследовать зависимость f от другой пары параметров: ka и b/a .

Построив графики зависимости f от параметра ka при нескольких значениях $b/a > 1$, можно удостовериться, что f имеет максимум f_{\max} при $ka \sim 1$, и этот максимум тем больше, чем больше отношение b/a . Следовательно, если фактическое отношение $B_i^2/B_\theta^2(a)$ превышает $f_{\max}(b/a)$ при заданном значении b/a , возмущения с любыми значениями k будут устойчивы при данном b/a . Однако равновесие пинча невозможно при $B_i^2/B_\theta^2(a) > 1$. Таким образом, потребовав, чтобы $f_{\max}(b/a) = 1$, можно найти максимальное значение b/a , при котором проводящая цилиндрическая стенка радиуса b стабилизирует все возможные возмущения с азимутальным числом $m = 1$. Расчёты показывают, что такой пинч с вмороженным продольным полем может быть устойчив, если $b/a < 4,98363$.

Задача 27.6. В θ -пинче в состоянии равновесия давление $p(r)$ и магнитное поле $B_z(r)$ связаны уравнением

$$p(r) + \frac{B_z^2}{8\pi} = \text{const.} \quad (27.6.1)$$

Поскольку равновесие симметрично относительно поворота на произвольный угол θ вокруг его оси и смещения на произвольное расстояние z вдоль оси, произвольное смещение ξ может быть разложено в двойной ряд Фурье, члены которого имеют вид

$$\xi(r, \theta, z) = \xi(r) e^{i(m\theta + kz)}, \quad (27.6.2)$$

где m и k — азимутальное и аксиальное волновые числа.

Чтобы выяснить, устойчив ли θ -пинч, произведём минимизацию потенциальной энергии (26.23), предварительно выделив в первом слагаемом вклад по перечной и продольной частей возмущения магнитного поля $\delta\mathbf{B} = \delta\mathbf{B}_\perp + \delta\mathbf{B}_\parallel$:

$$W_P = \frac{1}{2} \int_{V_p} \left\{ \frac{|\delta\mathbf{B}_\perp|^2}{4\pi} + \frac{|\delta\mathbf{B}_\parallel|^2}{4\pi} + \gamma p |\operatorname{div} \xi|^2 + (\xi_\perp \cdot \nabla p) \operatorname{div} \xi_\perp^* - \frac{1}{4\pi} (\delta\mathbf{B} \cdot [\xi_\perp^* \times \operatorname{rot} \mathbf{B}]) \right\} d^3x. \quad (27.6.3)$$

Прежде всего вычислим входящие в подынтегральное выражение величины, обозначив для краткости штрихом производную по r :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{B}_\perp &= ikB_z\xi_\perp = ikB_z(\xi_r \hat{\mathbf{e}}_r + \xi_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta), \\ \delta\mathbf{B}_\parallel &= -\left(\xi_r B'_z + B_z \frac{1}{r}(r\xi_r)' + \frac{im}{r}\xi_\theta\right) \hat{\mathbf{e}}_z, \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \xi = \frac{1}{r}(r\xi_r)' + \frac{im}{r}\xi_\theta + ik\xi_z.$$

Подставляя эти выражения в подынтегральное выражение (27.6.3), прежде всего заметим, что с учётом уравнения равновесия (27.6.1) в сумме второго, четвёртого и пятого слагаемых взаимно сокращаются все члены, содержащие B'_z , p' и ξ_z :

$$\frac{|\delta B_{||}|^2}{4\pi} + (\xi_\perp \cdot \nabla p) \operatorname{div} \xi_\perp - \frac{1}{4\pi} (\delta \mathbf{B} \cdot [\xi_\perp^* \times \operatorname{rot} \mathbf{B}]) = \frac{B_z^2}{4\pi} \left| \frac{1}{r}(r\xi_r)' + \frac{im}{r}\xi_\theta \right|^2.$$

Таким образом, в подынтегральном выражении остаются 3 члена, каждый из которых заведомо не отрицателен. Ясно поэтому, что $W_P > 0$ при любых смещениях ξ и, следовательно, θ -пинч устойчив.

Задача 27.7. В цилиндрических координатах $\{r, \theta, z\}$ равновесное магнитное поле Z -пинча имеет только θ -компоненту, зависит только от r и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{B_\theta}{4\pi r} \frac{d}{dr}(rB_\theta).$$

Функцию $B_\theta(r)$ можно найти, если проинтегрировать это уравнение, считая известной радиальную зависимость равновесного давления p . Ток в плазме протекает в направлении оси z , его можно вычислить по формуле

$$J_z = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB_\theta).$$

Поскольку равновесная конфигурация симметрична относительно поворота вокруг оси z на любой угол, произвольное возмущение можно разложить в ряд Фурье по координате θ . Поскольку любое возмущение должно совмещаться само с собой при повороте на угол 2π , ряд Фурье может содержать только гармоники вида

$$\xi(r, \theta, z) = \xi(r, z) e^{im\theta}$$

при целом m или же вещественные комбинации таких гармоник, которые пропорциональны $\cos(m\theta)$ и $\sin(m\theta)$. Например:

$$\xi_r = \xi_r(r, z) \cos(m\theta), \quad \xi_\theta = \xi_\theta(r, z) \sin(m\theta), \quad \xi_z = \xi_z(r, z) \cos(m\theta).$$

Далее будем считать, что возмущение ξ представлено в виде ряда вещественных функций, и исследуем устойчивость возмущений с заданным азимутальным числом m .

Повторим для удобства формулу (26.23) для потенциальной энергии плазмы, явно приняв во внимание вещественность компонентов вектора ξ . Кроме того, опустим индекс \perp у вектора ξ , что не меняет величину интеграла (см. задачу 26.6):

$$W_P = \frac{1}{2} \int_{V_P} \left\{ \frac{(\delta B)^2}{4\pi} + \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 + (\xi \cdot \nabla p) \operatorname{div} \xi - \frac{1}{4\pi} (\delta \mathbf{B} \cdot [\xi \times \operatorname{rot} \mathbf{B}]) \right\} d^3x.$$

Предположим для простоты, что плазма граничит с твёрдой проводящей стенкой; тогда W_P будет единственной отличной от нуля частью потенциальной энергии системы (§26.5). Вычислив входящие в W_P комбинации

$$\nabla \cdot \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z},$$

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \times [\xi \times \mathbf{B}_0] = B_\theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_r - \left(\frac{1}{B_\theta} \frac{\partial}{\partial r} (B_\theta \xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_z \right],$$

$$\xi \times [\nabla \times \mathbf{B}_0] = (\xi_\theta \hat{\mathbf{e}}_r - \xi_r \hat{\mathbf{e}}_\theta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) = -\frac{4\pi}{B_\theta} \frac{dp}{dr} (\xi_\theta \hat{\mathbf{e}}_r - \xi_r \hat{\mathbf{e}}_\theta),$$

получим

$$W_P = \frac{1}{2} \int_{V_P} d^3x \left\{ \gamma p (\nabla \cdot \xi)^2 + \frac{dp}{dr} \xi_r (\nabla \cdot \xi) + \right. \\ \left. + \frac{B_\theta^2}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{B_\theta} \frac{\partial}{\partial r} (B_\theta \xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{dp}{dr} \left[\frac{\xi_\theta}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} + \xi_r \left(\frac{1}{B_\theta} \frac{\partial}{\partial r} (B_\theta \xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right) \right] \right\}. \quad (27.7.1)$$

Рассмотрим вначале аксиально-симметричные возмущения. В этом случае азимутальное число m и все производные по θ равны нулю. Кроме того,

$$\left(\frac{1}{B_\theta} \frac{\partial}{\partial r} (B_\theta \xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right) = \nabla \cdot \xi + \frac{\xi_r r}{B_\theta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{B_\theta}{r} = \nabla \cdot \xi + \frac{\xi_r}{r} \left(\frac{d \ln B_\theta}{d \ln r} - 1 \right),$$

поэтому подынтегральное выражение в (27.7.1) представляет собой квадратичную форму по переменным $\nabla \cdot \xi$ и ξ_r/r , а именно:

$$W_P = \int_{V_P} d^3x \frac{B_\theta^2}{8\pi} \left[a_{11} (\nabla \cdot \xi)^2 + 2a_{12} \frac{\xi_r}{r} \nabla \cdot \xi + a_{22} \frac{\xi_r^2}{r^2} \right], \quad (27.7.2)$$

где

$$a_{11} = 1 + \frac{\gamma \beta}{2},$$

$$a_{12} = \frac{d \ln B_\theta}{d \ln r} + \frac{\beta}{2} \frac{d \ln p}{d \ln r} - 1 = -2,$$

$$a_{22} = \left(\frac{d \ln B_\theta}{d \ln r} - 1 \right) a_{12} = 4 + \beta \frac{d \ln p}{d \ln r},$$

причём $\beta = 8\pi p / B_\theta^2$. Переменные $\nabla \cdot \xi$ и ξ_r/r независимы, поскольку независимы ξ_r и ξ_z . Квадратичная форма от нескольких переменных является положительно-определенной, если все главные миноры матрицы положительны. Указанный критерий в применении к подынтегральному выражению в (27.7.2) требует, чтобы одновременно были выполнены неравенства

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Условие $a_{11} > 0$, очевидно, выполнено всегда, поскольку $\beta > 0$ и $\gamma > 0$. Условие $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ приводит к неравенству

$$\frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{r}{p} \frac{dp}{dr} > -\frac{4\gamma}{2 + \beta\gamma}, \quad (27.7.3)$$

которое было получено Б. Б. Кадомцевым [17]. Если оно выполнено, то выполнено и условие $a_{22} > 0$.

В Z -пинче давление убывает по направлению к периферии столба плазмы. Условие (27.7.3) означает, что давление не должно убывать слишком быстро. На большом расстоянии от оси столба $\beta \ll 1$. Там для устойчивости необходимо, чтобы

$$\frac{dp}{p} > -2\gamma \frac{dr}{r}.$$

Предельный профиль давления получаем, приравняв правую и левую стороны этого неравенства:

$$p \propto r^{-2\gamma}.$$

Однако найденный степенной профиль давления не позволяет подавить поток тепла из плазмы на стенку, так как давление плазмы на стенке не равно нулю. Таким образом, приходится признать, что Z -пинч с ограниченным по радиусу профилем давления неустойчив относительно возмущений с $m = 0$, которые приводят к пинчеванию столба плазмы.

Рассмотрим теперь возмущения, зависящие от азимутального угла θ . При этом в подынтегральном выражении (27.7.1) появятся множители $\cos^2(m\theta)$ и $\sin^2(m\theta)$, которые при усреднении дают $1/2$. Легко видеть, что компонента смещения вдоль магнитного поля ξ_θ входит только в первое слагаемое подынтегрального выражения, поскольку во втором и последнем слагаемых (которые пропорциональны dp/dr) она сокращается после усреднения по θ . Поэтому при $m \neq 0$ всегда можно так подобрать ξ_θ , чтобы $\nabla \cdot \xi = 0$. Поскольку первое слагаемое заведомо неотрицательно, потенциальная энергия минимальна именно для возмущений с $\nabla \cdot \xi = 0$.

Нетрудно проверить, что для таких возмущений потенциальная энергия W_P отличается от выражения, которое мы анализировали в случае $m = 0$, только тем, что в подынтегральном выражении слагаемое $\gamma p (\nabla \cdot \xi)^2$ будет отсутствовать, но зато появится новое слагаемое

$$\frac{B_\theta^2}{4\pi} \frac{m^2}{r^2} (\xi_r^2 + \xi_z^2).$$

Таким образом,

$$W_P = \frac{1}{2} \int_{V_P} d^3x \left\{ \frac{B_\theta^2}{4\pi} \frac{m^2}{r^2} (\xi_r^2 + \xi_z^2) + \frac{dp}{dr} \xi_r (\nabla \cdot \xi_\perp) + \right.$$

$$+ \frac{B_\theta^2}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{B_\theta} \frac{\partial}{\partial r} (B_\theta \xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{B_\theta}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) \left[\xi_r \left(\frac{1}{B_\theta} \frac{\partial}{\partial r} (B_\theta \xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right) \right], \quad (27.7.4)$$

где

$$\nabla \cdot \xi_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}.$$

В силу трансляционной симметрии по z зависимость возмущений от z можно выбрать в виде $\cos(kz)$, и тогда в $(\nabla \cdot \xi_{\perp})$ компонента ξ_z будет входить в произведении с k . Поэтому если k устремить к бесконечности, оставляя $k\xi_z$ неизменным, то слагаемое $(B_\theta^2/4\pi)(m^2/r^2)\xi_z^2$ исчезнет и мы снова получим квадратичную форму только от двух переменных: ξ_r и $(\nabla \cdot \xi_{\perp})$. Отсюда опять нетрудно получить условие устойчивости. Оно имеет следующий вид [17]:

$$\frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{r}{p} \frac{dp}{dr} > -\frac{m^2}{\beta}. \quad (27.7.5)$$

Поскольку $\gamma > 1$, то возмущения с $m \geq 2$ не приводят к неустойчивости, если выполнено условие (27.7.3). Однако при $m = 1$ условие (27.7.5) оказывается более жёстким в сравнении с условием (27.7.3) во внутренней части пинча, где $\beta > 2/3\gamma$.

Задача 27.8. Согласно условию конвективной устойчивости (§28.2), плазма, помещённая в магнитное поле с замкнутыми силовыми линиями, устойчива, если

$$\frac{dp}{dU} > -\gamma \frac{p}{U},$$

где

$$U = \oint \frac{ds}{B}$$

обозначает удельный объём магнитного поля (§23.2). В Z -пинче силовые линии представляют собой окружности. На силовой линии радиуса r магнитное поле $B(r) = B_\theta(r)$ постоянно по величине, поэтому

$$U(r) = \frac{2\pi r}{B(r)}.$$

Перепишем критерий конвективной устойчивости в виде

$$\frac{dp}{p} > -\gamma \frac{dU}{U}$$

и учтём, что

$$\frac{dU}{U} = 2 \frac{dr}{r} - \frac{d(rB)}{rB}.$$

Затем введём обозначение $\beta = 8\pi p/B^2$ и с помощью уравнения равновесия

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{B}{4\pi r} \frac{d}{dr} rB = -\frac{B^2}{4\pi r B} \frac{d(rB)}{dr}$$

исключим отношение

$$\frac{d(rB)}{rB} = -\frac{\beta}{2} \frac{dp}{p}$$

из выражения для dU/U . Исключая затем и это отношение, получим

$$\frac{dp}{p} > -\gamma \left(2 \frac{dr}{r} + \frac{\beta}{2} \frac{dp}{p} \right).$$

Полученное неравенство эквивалентно условию

$$\frac{d \ln p}{d \ln r} > -\frac{4\gamma}{2 + \gamma\beta},$$

которое было результатом анализа устойчивости Z -пинча с помощью энергетического принципа в задаче 27.7.

Задача 27.9. Рассмотрим, как происходит развитие неустойчивости $m = 1$ для тонкого шнура с током, помещённого в продольное магнитное поле B_z . При возмущениях с $m = 1$ шнур изгибаётся в спираль, которую описывает вектор смещения

$$\xi = \{\xi_\perp \cos(kz - \theta), \xi_\perp \sin(kz - \theta), 0\}.$$

При этом из-за того, что ток течёт вдоль шнура, наряду с проекцией тока на направление магнитного поля

$$I_z = \frac{2\pi/k}{\sqrt{(2\pi/k)^2 + (2\pi\xi_\perp)^2}} I \approx I$$

появляется азимутальная составляющая тока

$$I_\theta = \frac{2\pi\xi_\perp}{\sqrt{(2\pi/k)^2 + (2\pi\xi_\perp)^2}} I \approx k\xi_\perp I.$$

Она создаёт радиальную силу Лоренца

$$F_r = \frac{1}{c} I_\theta B_z = \frac{1}{c} I B_z k \xi_\perp,$$

которая приводит к нарастанию возмущений. Величина азимутального тока зависит как от радиального смещения, так и от шага спирали по z . Уравнение баланса радиальных сил имеет вид

$$\pi a^2 \rho \ddot{\xi}_\perp = \frac{1}{c} I B_z k \xi_\perp,$$

где a — радиус шнура, ρ — масса единицы объёма. Отыскивая решение в виде

$$\xi_{\perp} \propto \exp(\Gamma t),$$

находим инкремент неустойчивости

$$\Gamma = \sqrt{\frac{IB_z k}{\pi a^2 c \rho}}.$$

Вводя обозначения

$$B_{\theta} = \frac{2I}{ca}, \quad c_A = \frac{B_z}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

его можно представить в виде

$$\Gamma = \frac{c_A}{a} \sqrt{2 \frac{B_{\theta}}{B_z} ka}.$$

Таким образом, характерное время развития винтовой неустойчивости определяется альфвеновским временем в отличие от желобковой неустойчивости, где определяющим является время, соответствующее скорости звука.

Задача 27.10. Исследование устойчивости винтового пинча с помощью энергетического принципа требует весьма громоздких алгебраических преобразований. Их удобно делать с помощью компьютерных программ, таких как *Mathematica* компании Wolfram [162].

В винтовом пинче невозмущённое магнитное поле

$$\mathbf{B} = \{0, B_{\theta}(r), B_z(r)\} \quad (27.10.1)$$

в цилиндрической системе координат $\{r, \theta, z\}$ имеет 2 компоненты, которые зависят только от расстояния r от оси пинча. Они связаны с равновесным давлением $p(r)$ уравнением

$$p' + \frac{B_{\theta}B'_{\theta} + B_zB'_z}{4\pi} + \frac{B_{\theta}^2}{4\pi r} = 0, \quad (27.10.2)$$

где штрих обозначает дифференцирование по r .

Записывая вектор смещения в цилиндрической системе координат

$$\boldsymbol{\xi} = \{\xi_r(r), \xi_{\theta}(r), \xi_z(r)\} e^{+i(m\theta+kz)} \quad (27.10.3)$$

с учётом симметрии задачи, без ограничения общности можно считать, что функция $\xi_r(r)$ вещественна, а функции $\xi_{\theta}(r)$ и $\xi_z(r)$ мнимые. Тогда комплексно-сопряжённый вектор смещения можно выразить через те же функции следующим образом:

$$\boldsymbol{\xi}^* = \{\xi_r(r), -\xi_{\theta}(r), -\xi_z(r)\} e^{-i(m\theta+kz)}. \quad (27.10.4)$$

В подынтегральное выражение для потенциальной энергии (26.23) вектор смещения входит в произведении с комплексно-сопряжёнными величинами, потому множители $e^{\pm i(m\theta+kz)}$ взаимно сокращаются. Опуская промежуточные вычисления, отметим, что полученное в итоге подынтегральное выражение в (26.23) не содержит производные ξ'_θ и ξ'_z . Поэтому минимизация потенциальной энергии по переменным ξ_θ и ξ_z производится алгебраически. Приравняв нуль производные подынтегрального выражения по ξ_θ и ξ_z , получим систему двух линейных уравнений, которые имеет следующее решение:

$$\begin{aligned}\xi_\theta &= i \frac{mkr(r\xi_r)'B_z + (2k^2r^2\xi_r + m^2(r\xi_r)')B_\theta}{(m^2 + k^2r^2)(krB_z + mB_\theta)}, \\ \xi_z &= i \frac{k^2r^2(r\xi_r)'B_z + krm(-2\xi_r + (r\xi_r)')B_\theta}{(m^2 + k^2r^2)(krB_z + mB_\theta)}.\end{aligned}\quad (27.10.5)$$

После подстановки этих выражений в (26.23) под знаком интеграла обращается в нуль второе слагаемое $\gamma p |\operatorname{div} \xi|^2$. Это означает, что наиболее неустойчивыми являются несжимающие возмущения, которые не меняют объём любого элемента плазмы. Оставшиеся слагаемые пропорциональны ξ_r^2 , $\xi_r'^2$ и $\xi_r \xi_r'$. В слагаемом, которое содержит $\xi_r \xi_r' = (\xi_r^2/2)'$, можно выполнить интегрирования по частям по переменной r и объединить его со слагаемым, пропорциональным ξ_r^2 . С учётом уравнения равновесия потенциальную энергию в итоге можно представить в следующей форме:

$$W_P = \pi L \int_0^b [f \xi_r'^2 + g \xi_r^2] dr, \quad (27.10.6)$$

где L — длина пинча, b — радиус проводящей камеры,

$$f = \frac{r}{4\pi} \frac{(krB_z + mB_\theta)^2}{k^2r^2 + m^2}, \quad (27.10.7)$$

$$g = \frac{2k^2r^2p'(r)}{k^2r^2 + m^2} + \frac{(k^2r^2 + m^2 - 1)(krB_z + mB_\theta)^2}{4\pi r(k^2r^2 + m^2)} + \frac{2k^2r^2(k^2r^2B_z^2 - m^2B_\theta^2)}{4\pi r(k^2r^2 + m^2)^2}. \quad (27.10.8)$$

Функция $f(r)$ положительна, тогда как $g(r)$ может иметь любой знак. Следовательно, оба члена в подынтегральном выражении конкурируют, и дальнейшие упрощения, как это было в случае θ -пинча и Z -пинча, невозможны. Минимизация интеграла (27.10.6) по ξ_r приводит к уравнению Эйлера—Лагранжа

$$(f \xi_r)' - g \xi_r = 0 \quad (27.10.9)$$

с граничными условиями: $\xi_r(0)$ конечно и $\xi_r(b) = 0$. Таким образом, задача об устойчивости диффузного винтового пинча сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка.

Уравнение (27.10.9) кажется очень сложным, тем не менее оно несравненно проще, чем то уравнение, к которому приводит метод малых колебаний [8, р. 294]. Существует несколько общих утверждений, доказанных для винтового пинча в результате анализа уравнения (27.10.9). В частности, удается сформулировать условие устойчивости локализованных конвективных возмущений, известное как критерий Сайдема [116].

Задача 27.11. Критерий Сайдема получается в предположении, что $\xi_r(r)$ есть пикообразная функция радиуса r , которая отлична от нуля только вблизи некоторого радиуса. Поскольку такая функция принадлежит узкому классу пробных функций, критерий Сайдема есть необходимое, но недостаточное условие устойчивости. Мотивацией для анализа локализованных возмущений является то наблюдение, что если функция $F(r) = krB_z(r) + mB_\theta(r)$ равна нулю на некотором радиусе $r = r_0$, то обращаются в нуль все члены в $f(r)$ и $g(r)$, кроме того слагаемого в $g(r)$, которое содержит $p'(r)$. Это слагаемое почти всегда отрицательно. Поэтому возмущения, локализованные вблизи $r = r_0$, вероятно, могут быть неустойчивы.

Равенство $F = 0$ означает, что шаг винта силовой линии в точности совпадает с шагом возмущения, т. е. возмущение постоянно вдоль силовой линии. Такие резонансные возмущения являются конвективными: они минимизируют возмущение магнитного поля вблизи резонансной поверхности $r = r_0$ при перемещении трубы плазмы.

Важно понимать, что локализованное возмущение не обязательно неустойчиво при $p' < 0$. Если равновесное магнитное поле имеет шир, то при удалении от резонансной поверхности, где $F = 0$, функция $F \approx F'(r_0)(r - r_0)$ будет мала, но отлична от нуля. Несмотря на малость F , слагаемое $f \xi_r'^2$ в уравнении (27.10.6) из решения задачи 27.10 будет не мало, поскольку производная ξ_r' для локализованного возмущения велика. Но это слагаемое вносит стабилизирующий вклад.

Приступая к анализу устойчивости по отношению к локализованным возмущениям, устремим m и k в бесконечность, оставляя конечным их отношение. Тогда f и все слагаемые в выражении (27.10.8) из задачи 27.10, за исключением второго, останутся конечными. Второе слагаемое положительно и стремится к бесконечности при $m \rightarrow \infty$. Поэтому при $m \gg 1$ неустойчивость может возникнуть только в том случае, если это слагаемое окажется очень малым, т. е. вблизи точки $r = r_0$, где $krB_z + mB_\theta = 0$. Введём величину

$$\mu = B_\theta/rB_z,$$

характеризующую шаг силовой линии, и пусть $x = r - r_0$ есть расстояние от точки r_0 . Будем считать x малым, тогда f и g можно разложить по x в ряд и ограничиться первыми членами. Учитывая, что $krB_z + mB_\theta = mrB_z\mu'x$, получаем

$$f = \frac{r^3 B_z^4}{4\pi B^2} \mu'^2 x^2, \quad g = \frac{2B_\theta^2}{B^2} p' + \frac{m^2 r B_z^2}{4\pi} \mu'^2 x^2.$$

Следовательно, уравнение Эйлера—Лагранжа (27.10.9) из задачи 27.10 принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\xi_r}{dx} \right) + q\xi_r = x^2 \xi_r x^2, \quad (27.11.1)$$

где

$$q = -\frac{8\pi\mu^2 p'}{r\mu'^2 B_z^2}, \quad x^2 = \frac{m^2 B^2}{r^2 B_z^2}.$$

При $x \ll 1/\kappa \sim r/m$ правой частью в уравнении (27.11.1) можно пренебречь, и в этой области решение имеет вид суммы степенных функций

$$\xi_r = c_1 x^{\nu_1} + c_2 x^{\nu_2}, \quad (27.11.2)$$

где $\nu_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{1/4 - q}$. Поскольку по крайней мере одно из двух слагаемых в (27.11.2) сингулярно при $x = 0$, это решение нельзя так просто использовать в качестве пробной функции. Однако можно «подправить» это решение вблизи $x = 0$, построив регулярную пробную функцию.

Если $q < 1/4$, то показатель степени $\nu_{1,2}$ является вещественным и рассматриваемое решение не имеет нулей. Наоборот, при $q > 1/4$ показатели степени $\nu_{1,2}$ комплексны и решение можно представить в виде

$$\xi_r = |x|^{-1/2} [c_1 \sin(\sqrt{q - 1/4} \ln |x|) + c_2 \cos(\sqrt{q - 1/4} \ln |x|)]. \quad (27.11.3)$$

Это решение имеет бесконечно много нулей в окрестности точки $x = 0$, где оно бесконечно быстро осциллирует с нарастающей амплитудой, которая пропорциональна $1/|x|^{1/2}$. Строго говоря, коэффициенты $c_{1,2}$ в формулах (27.11.2) и (27.11.3) различны при $x < 0$ и $x > 0$. Благодаря осциллирующему характеру решения (27.11.3) можно сконструировать локализованную вблизи $x = 0$ регулярную функцию ξ_r . Пусть такая функция равна константе ξ_0 при $|x| < x_1$, равна нулю при $|x| > x_2 > x_1$ и непрерывно сшивается с осциллирующим решением (27.11.3) при $x = \pm x_1$ и $x = \pm x_2$.

Вклад области $|x| > x_2$ в интеграл (27.10.6) равен нулю, поскольку здесь $\xi_r \equiv 0$. Равен нулю также интеграл по области $x_1 < |x| < x_2$. В этом нетрудно убедиться, умножив уравнение (27.11.1) (с отброшенной правой частью, которая содержит малый множитель x^2) на ξ_r и выполнив интегрирование по указанной области:

$$\int_{x_1}^{x_2} (x^2 \xi_r'^2 - q \xi_r^2) dx = x^2 \xi_r \xi_r' \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} ((x^2 \xi_r')' + q \xi_r) \xi_r dx = 0.$$

Весь вклад в интеграл потенциальной энергии приходит из области $|x| < x_1$, где $\xi_r = \xi_0 = \text{const}$:

$$\int_{-x_1}^{x_1} (x^2 \xi_r'^2 - q \xi_r^2) dx = -2x_1 q \xi_0^2.$$

По нашему предположению, $q > 1/4$. Поэтому $W_P < 0$ и система неустойчива.

При $q < 1/4$ решение (27.11.2) уравнения Эйлера—Лагранжа не осциллирует, и поэтому невозможно построить регулярную пробную функцию. Таким образом, винтовой пинч локально устойчив только при $q < 1/4$, или, в размерных обозначениях, при

$$-8\pi r \frac{dp}{dr} < \frac{B_z^2}{4} \left(\frac{d\ln \mu}{d\ln r} \right)^2. \quad (27.11.4)$$

Это условие конвективной устойчивости винтового пинча впервые было получено Б. Сайдемом [116].

Из условия (27.11.4) следует, что при $\mu = \text{const}$ всякое спадающее по радиусу распределение давления является неустойчивым. В частности, неустойчив пинч с однородным продольным током при $B_z = \text{const}$.

Если $\mu = \text{const}$, то шаг силовой линии $l = 2\pi/\mu$ не зависит от радиуса, и поэтому две силовые линии, находящиеся на некотором расстоянии одна от другой по радиусу, могут быть взаимно переставлены без существенного исказжения магнитного поля. Таким образом, в этом случае конвективная неустойчивость ничем не запрещена. Но если μ меняется с r , то свободная перестановка трубок уже невозможна. Перестановка силовых трубок в этом случае будет сильно исказять магнитное поле. Таким образом, перекрещенность силовых линий приводит к стабилизирующему эффекту.

Лекция 28

Задача 28.1. Опуская в общем выражении (26.23) для потенциальной энергии слагаемые, которые явно зависят от возмущения магнитного поля $\delta\mathbf{B}$, запишем W_P для желобковых возмущений:

$$W_P = \frac{1}{2} \int \left\{ \gamma p (\nabla \cdot \xi)^2 + (\nabla \cdot \xi_\perp) (\xi_\perp \cdot \nabla p) \right\} d^3x. \quad (28.1.1)$$

Здесь явно учтено, что только второе слагаемое в (26.23) (оно же первое слагаемое в (28.1.1)) зависит от продольной части смещения ξ_\parallel . В пределе плазмы низкого давления магнитное поле потенциально, поэтому его можно записать через градиент скалярной функции:

$$\mathbf{B} = \nabla\psi. \quad (28.1.2)$$

С другой стороны, ввиду того, что

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (28.1.3)$$

то же поле можно выразить через потенциалы Клебша α и β , которые постоянны вдоль каждой силовой линии:

$$\mathbf{B} = [\nabla\alpha \times \nabla\beta]. \quad (28.1.4)$$

Дальнейшие вычисления заметно упрощаются, если перейти к криволинейным координатам

$$x^i = (\alpha, \beta, \psi). \quad (28.1.5)$$

В этих координатах ковариантные компоненты вектора магнитного поля определяются из уравнения (28.1.2):

$$B_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \{0, 0, 1\}, \quad (28.1.6)$$

а контравариантные – из уравнения (28.1.4):

$$B^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} \frac{\partial \beta}{\partial x^k} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{\sqrt{g}} \right\}. \quad (28.1.7)$$

Здесь ϵ^{ijk}/\sqrt{g} – единичный тензор Леви-Чивиты, $g = \det g_{ij}$ – определитель метрического тензора $g_{ik} = (\partial r / \partial x^i) \cdot (\partial r / \partial x^k)$. Составив уравнения $B_i = g_{ik} B^k$, находим, что

$$g_{13} = g_{23} = 0, \quad g_{33} = \sqrt{g}. \quad (28.1.8)$$

Кроме того,

$$|\mathbf{B}|^2 = B_i B^i = \frac{1}{\sqrt{g}}. \quad (28.1.9)$$

В желобковых возмущениях

$$\xi = \xi_{\parallel} \mathbf{h} + \xi_{\perp}, \quad \xi_{\perp} = \frac{1}{B^2} [\mathbf{B} \times \nabla \chi], \quad (28.1.10)$$

причём $\mathbf{h} \cdot \nabla \chi = 0$. В выбранных координатах

$$\xi_{\parallel}^i = \xi_{\parallel} \frac{B^i}{B} = \{0, 0, \xi_{\parallel} B\}, \quad \xi_{\perp}^i = \frac{1}{B^2} \frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} B_j \frac{\partial \chi}{\partial x^k} = \epsilon^{i3k} \frac{\partial \chi}{\partial x^k}. \quad (28.1.11)$$

Так как p и χ постоянны вдоль силовой линии, эти функции не зависят от x^3 , т. е. $p = p(x^1, x^2)$, $\chi = \chi(x^1, x^2)$. Поскольку

$$(\xi_{\perp} \cdot \nabla p) = \epsilon^{i3k} \frac{\partial \chi}{\partial x^k} \frac{\partial p}{\partial x^i}, \quad (28.1.12)$$

скалярное произведение $(\xi_{\perp} \cdot \nabla p)$ также не зависит от x^3 . Учитывая этот факт, преобразуем последнее слагаемое в интеграле (28.1.1), перейдя с помощью замены

$$d^3x = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (28.1.13)$$

к интегрированию по криволинейным координатам:

$$\int (\nabla \cdot \xi_{\perp}) (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) d^3x = \int \left[\int \sqrt{g} (\nabla \cdot \xi_{\perp}) dx^3 \right] (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) dx^1 dx^2.$$

Преобразуем отдельно выражение в квадратных скобках – интеграл по силовой линии. Так как

$$\nabla \cdot \xi_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \xi_{\perp}^i) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \epsilon^{i3k} \frac{\partial \chi}{\partial x^k} \right) = \frac{\epsilon^{i3k}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \chi}{\partial x^k} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i}, \quad (28.1.14)$$

имеем

$$\int \sqrt{g} (\nabla \cdot \xi_{\perp}) dx^3 = \int \sqrt{g} \frac{\epsilon^{i3k}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \chi}{\partial x^k} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} dx^3 = \epsilon^{i3k} \frac{\partial \chi}{\partial x^k} \int \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} dx^3.$$

Поскольку в этом выражении индекс i может принимать только значения 1 или 2 (из-за наличия множителя ϵ^{i3k} , который равен нулю в иных случаях), операцию дифференцирования $\partial/\partial x^i$ можно вынести из-под знака интеграла. Заметив также, что $\epsilon^{i3k} \partial \chi / \partial x^k = \xi_{\perp}^i$, получаем

$$\int \sqrt{g} (\nabla \cdot \xi_{\perp}) dx^3 = \xi_{\perp}^i \frac{\partial U}{\partial x^i} = (\xi_{\perp} \cdot \nabla U), \quad (28.1.15)$$

где

$$U = \int \sqrt{g} dx^3 = \int \frac{dx^3}{B^2}.$$

Так как $\sqrt{g} = 1/B^2$, а dx^3 связан с элементом длины силовой линии ds соотношением

$$ds = \sqrt{g_{33}} dx^3 = \frac{dx^3}{B},$$

введённая выше функция U совпадает с удельным объёмом магнитного поля

$$U = \int \frac{ds}{B} \quad (28.1.16)$$

(см. §23.2). Таким образом,

$$W_P = \frac{1}{2} \left\{ \gamma p \left[\int \sqrt{g} (\nabla \cdot \xi)^2 dx^3 \right] + (\xi_{\perp} \cdot \nabla U) (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) \right\} dx^1 dx^2. \quad (28.1.17)$$

Здесь только первое, заведомо положительное, слагаемое зависит от ξ_{\parallel} . Наиболее неустойчивы такие возмущения, для которых это слагаемое минимально. Подходящим выбором ξ_{\parallel} минимизируем интеграл в квадратных скобках, приняв во внимание, что

$$(\nabla \cdot \xi) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{g} \xi_{\parallel}^i + \nabla \cdot \xi_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\xi_{\parallel}}{B} + \nabla \cdot \xi_{\perp}. \quad (28.1.18)$$

Вычислив вариацию этого интеграла при подстановке $\xi_{\parallel} \rightarrow \xi_{\parallel} + \delta \xi_{\parallel}$ и выполнив затем интегрирование по частям, получим

$$\delta \int \sqrt{g} (\nabla \cdot \xi)^2 dx^3 = 2 \int \sqrt{g} (\nabla \cdot \xi) \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\delta \xi_{\parallel}}{B} \right) dx^3 = -2 \int \frac{\delta \xi_{\parallel}}{B} \frac{\partial}{\partial x^3} (\nabla \cdot \xi) dx^3.$$

Отсюда следует, что минимум интеграла достигается при

$$\frac{\partial}{\partial x^3}(\nabla \cdot \xi) = 0,$$

т. е.

$$(\nabla \cdot \xi) = f(\xi^1, \xi^2). \quad (28.1.19)$$

Подставляя сюда выражение (28.1.18), приходим к уравнению для определения продольной части смещения:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\xi_{\parallel}}{B} + \nabla \cdot \xi_{\perp} = f(\xi^1, \xi^2). \quad (28.1.20)$$

Однако нас интересует не столько величина ξ_{\parallel} , сколько интеграл в квадратных скобках в (28.1.17), куда она входит, т. е. фактически только функция $f(x^1, x^2)$. Чтобы найти её, умножим последнее уравнение на \sqrt{g} и проинтегрируем по координате x^3 вдоль замкнутой силовой линии. При этом слагаемое с ξ_{\parallel} выпадет и мы получим

$$\int \sqrt{g} (\nabla \cdot \xi_{\perp}) dx^3 = f \int \sqrt{g} dx^3.$$

Интеграл в правой стороне этого уравнения равен U . В левой же стороне после подстановки (28.1.14) множитель $e^{i3k} \partial \chi / \partial x^k = \xi_{\perp}^i$ можно вновь вынести из-под знака интеграла, вслед за тем можно вынести и оператор дифференцирования $\partial / \partial x^i$. В итоге слева возникает $\xi_{\perp}^i \partial U / \partial x^i = (\xi_{\perp} \cdot \nabla U)$, так что

$$(\nabla \cdot \xi) = f = (\xi_{\perp} \cdot \nabla U)/U.$$

Следовательно,

$$\left[\int \sqrt{g} (\nabla \cdot \xi)^2 dx^3 \right] = \int \sqrt{g} \left(\frac{\xi_{\perp} \cdot \nabla U}{U} \right)^2 dx^3 = \left(\frac{\xi_{\perp} \cdot \nabla U}{U} \right)^2 \int \sqrt{g} dx^3 = \frac{(\xi_{\perp} \cdot \nabla U)^2}{U}.$$

Подставляя это выражение в (28.1.17) и учитывая, что в равновесии $p = p(U)$ и $\nabla p = (dp/dU)\nabla U$, окончательно имеем

$$W_P = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\gamma p}{U} + \frac{dp}{dU} \right) (\xi_{\perp} \cdot \nabla U)^2 dx^1 dx^2, \quad (28.1.21)$$

причём $dx^1 dx^2 = d\Phi$, где Φ обозначает магнитный поток. Система устойчива, если

$$\frac{dp}{dU} > -\frac{\gamma p}{U}. \quad (28.1.22)$$

В таком виде условие устойчивости желобковых возмущений в плазме низкого давления было получено (более сложным способом) Б. Б. Кадомцевым в 1957 году [83].

Задача 28.2. Поскольку объём силовой трубы, в которую захвачен магнитный поток $\Delta\Phi$, равен

$$V = \Delta\Phi U,$$

при том что $U = \oint ds/B$ и $\Delta\Phi = \text{const}$, работу сил давления по перемещению этой трубы можно записать следующим образом:

$$\Delta W = \int (p_e - p_i) dV = \Delta\Phi \int (p_e - p_i) dU, \quad (28.2.1)$$

где p_i — давление внутри трубы, а p_e — давление окружающей плазмы. Давление внутри трубы изменяется по адиабатическому закону. Если $p_0 = p(U_0)$ — начальное давление в трубе, равное давлению окружающей плазмы в равновесном состоянии, и $V_0 = \Delta\Phi U_0$ — начальный объём трубы, то при перемещении в новое положение с новым объёмом $V = \Delta\Phi U$ давление внутри выделенной трубы будет равно

$$p_i(U) = p_0(V/V_0)^{-\gamma} = p_0(1 + (U - U_0)/U_0)^{-\gamma} \approx p_0(1 - \gamma(U - U_0)/U_0). \quad (28.2.2)$$

Давление окружающей плазмы при этом будет определяться равновесным распределением $p = p(U)$. Поэтому

$$p_e(U) = p_0 + \frac{dp}{dU}(U - U_0). \quad (28.2.3)$$

Подставляя (28.2.2) и (28.2.3) в (28.2.1) и опуская индекс 0 везде, кроме разности $U - U_0$, получаем

$$\Delta W = \Delta\Phi \int_{U_0}^U \left[\frac{dp}{dU} + \frac{\gamma p}{U} \right] (U - U_0) dU = \frac{\Delta\Phi}{2} \left[\frac{dp}{dU} + \frac{\gamma p}{U} \right] (U - U_0)^2.$$

Для желобковых смещений величина

$$U - U_0 = \xi_\perp \cdot \nabla U$$

постоянна вдоль силовых линий, поэтому можно считать, что она зависит от криволинейных координат x^1, x^2 , которые маркируют силовые линии. Их можно выбрать так, что $\mathbf{B} = [\nabla x^1 \times \nabla x^2]$, тогда $\Delta\Phi = dx^1 dx^2$. Полная энергия возмущения определяется суммированием по всем трубкам плазмы, т. е. интегрированием по координатам x^1 и x^2 :

$$W_P = \frac{1}{2} \int \left[\frac{dp}{dU} + \frac{\gamma p}{U} \right] (\xi_\perp \cdot \nabla U)^2 dx^1 dx^2.$$

Этот результат совпадает с полученным в задаче 28.1.

Задача 28.3. В соответствии с решением задачи 28.1 потенциальная энергия желобкового возмущения вычисляется по формуле

$$\Delta W = \frac{\Delta\Phi}{2} \left[\frac{dp}{dU} + \frac{\gamma p}{U} \right] (U - U_0)^2 \approx \frac{\Delta\Phi}{2} \frac{dp}{dU} (U - U_0)^2,$$

причём слагаемым $\gamma p/U$ во многих случаях можно пренебречь по сравнению с dp/dU . Это утверждение, в частности, верно для адиабатической ловушки, в которой поперечный размер плазмы a значительно меньше её длины L . Для определённости ограничимся анализом именно такой ловушки в так называемом параксиальном приближении, полагая, что силовые линии, на которых удерживается плазма, проходят вблизи прямой оси ловушки, а магнитное поле обладает осевой симметрией относительно оси z цилиндрической системы координат $\{r, \theta, z\}$.

Для желобковых возмущений величина смещения ξ_{\perp} поперёк магнитного поля такова, что величина

$$U - U_0 = \xi_{\perp} \cdot \nabla U$$

постоянна вдоль силовой линии. В параксиальной ловушке уравнение силовой линии

$$r = r_0 \sqrt{B_0/B}$$

получается из условия постоянства магнитного потока

$$\Phi = \pi r B^2 = \pi r_0^2 B_0$$

через сечение магнитной поверхности, которую характеризуют константы r_0 и B_0 . Поскольку функции p , U и Φ постоянны на магнитной поверхности, две из них можно выразить через третью. Например, можно считать, что $p = p(\Phi)$, $U = U(\Phi)$, но далее будем предполагать, что все три функции выражены через r_0 , т. е. $p = p(r_0)$, $U = U(r_0)$, $\Phi = \Phi(r_0)$.

Поскольку желобковое смещение переводит одну силовую линию магнитного поля в другую силовую линию, ясно, что радиальная компонента вектора смещения определяется по формуле

$$\xi = \xi_0 \sqrt{B_0/B}.$$

Будем считать, что другие компоненты вектора смещения значительно меньше. Можно показать, что такие желобковые возмущения наименее устойчивы. Для таких возмущений

$$U - U_0 = \xi_0 U', \quad \frac{dp}{dU} = p'/U',$$

где штрих обозначает дифференцирование по r_0 . Следовательно,

$$\Delta W = \frac{\Delta\Phi}{2} U' p' \xi_0^2,$$

причём

$$U' = 2\pi r_0 B_0 \frac{dU}{d\Phi} = -2r_0 B_0 \int \frac{\chi ds}{rB^2} = -2\sqrt{B_0} \int \frac{\chi ds}{B^{3/2}}.$$

В неустойчивой системе $U' > 0$, $p' < 0$, $\Delta W < 0$.

Найдём теперь приращение кинетической энергии

$$K = \int \frac{1}{2} \rho \dot{\xi}^2 \frac{\Delta\Phi}{B} ds.$$

Полагая, что

$$\xi_0 \propto e^{\Gamma t},$$

в параксиальном приближении находим

$$K = \frac{\Delta\Phi}{2} \rho \Gamma^2 \xi_0^2 B_0 \int \frac{ds}{B^2}.$$

Так как $\Delta W + K = 0$ для возмущения, нарастающего с очень малой начальной амплитуды, находим

$$\Gamma^2 = -\frac{U' p'}{\rho B_0 \int ds/B^2} = \frac{2p'}{\rho \sqrt{B_0}} \int \frac{\chi ds}{B^{3/2}} \Bigg/ \int \frac{ds}{B^2}.$$

В этом выражении величину

$$\bar{\chi} = \frac{1}{\sqrt{B_0}} \int \frac{\chi ds}{B^{3/2}} \Bigg/ \int \frac{ds}{B^2}$$

можно интерпретировать как среднее значение кривизны. Для оценки по порядку величины примем, что

$$p' \sim -\frac{p}{a}, \quad \bar{\chi} \sim -\frac{a}{L^2}.$$

Тогда

$$\Gamma \sim c_s/L,$$

где $c_s \sim \sqrt{p/\rho} \sim v_{Ti}$ — скорость ионного звука. Иными словами, время нарастания желобкового возмущения по порядку величины равно времени пролёта теплового иона между магнитными пробками в адиабатической ловушке, однако в результате неустойчивости плазма вылетает не в пробки, а на боковые стенки вакуумной камеры.

Задача 28.4. Рассмотрим отдельную магнитную силовую трубку в открытой ловушке (рис. 28.1 на с. 212). В большей части этой трубки силовые линии магнитного поля согнуты наружу, а магнитное поле убывает наружу. Вследствие этого на трубку действует выталкивающая сила в радиальном направлении

$F = n(T_i + T_e)/R$, где R – средний радиус кривизны силовых линий данной трубки. Под действием этой силы трубка с плотной плазмой должна выбрасываться в радиальном направлении с ускорением $\mathbf{g} = (T_i + T_e)/m_i R$. В открытой ловушке радиус плазмы a обычно мал по сравнению с расстоянием L между магнитными пробками. В этих условиях $1/R = \kappa \sim a/L^2$ и, следовательно,

$$g \sim \frac{T_i + T_e}{m_i} \frac{a}{L^2} \sim \frac{c_s^2 a}{L^2}, \quad (28.4.1)$$

где $c_s \sim \sqrt{(T_i + T_e)/m_i}$ – скорость звука. Отсюда следует, что за время порядка $\tau = \sqrt{a/g}$ столб плазмы сместится на расстояние порядка своего радиуса. Оценивая инкремент неустойчивости как $\Gamma \sim 1/\tau = \sqrt{g/a}$, находим, что

$$\Gamma \sim \frac{c_s}{L}. \quad (28.4.2)$$

Таким образом, желобковая неустойчивость разваливает равновесное состояние плазмы за время одного пролёта иона между магнитными пробками.

С другой стороны, отдельная частица может удерживаться в адиабатической ловушке бесконечно долго. Поэтому можно ожидать, что при уменьшении плотности процесс выталкивания плазмы должен замедляться. В самом деле, рассмотрим движение выделенной трубы с точки зрения двухжидкостной магнитной гидродинамики. При этом можно рассуждать следующим образом. На каждую из компонент плазмы в радиальном направлении действует сила $n T_a / R$ ($a = e, i$). Под действием этой силы частицы начинают дрейфовать в азимутальном направлении, причём ионы и электроны дрейфуют в разные стороны. Вследствие этого происходит поляризация зарядов в трубке, как показано на рисунке 28.1. Под действием появившегося азимутального электрического поля начинается совместный дрейф частиц по радиусу, который и приводит к выбросу трубы с плазмой.

Введём локальную систему координат с осью x в радиальном, осью y в азимутальном направлении, осью z вдоль магнитного поля и запишем линеаризованные уравнения движения компонент плазмы с учётом того, что электрическое поле имеет только y -компоненту. Предположим также, что давление плазмы пренебрежимо мало, а все малые величины пропорциональны $\exp(-i\omega t + ik_y y)$, причём инерциий электронов полностью и инерцией ионов в направлении оси y можно пренебречь. Тогда уравнения движения принимают вид

$$-i\omega m_i \delta V_x = \frac{e}{c} \delta V_{iy} B + \frac{\delta n}{n} \frac{T_i}{R}, \quad (28.4.3)$$

$$0 = -\frac{e}{c} \delta V_{ey} B + \frac{\delta n}{n} \frac{T_e}{R}, \quad (28.4.4)$$

$$0 = -\frac{e}{c} \delta V_x B + e \delta E_y. \quad (28.4.5)$$

Здесь учтено, что в радиальном направлении плазменная трубка движется как целое, т. е. уравнение (28.4.5) справедливо как для ионной, так и для электронной компонент плазмы, и $\delta V_{ix} = \delta V_{ex} = \delta V_x$. Электрическое поле E_y можно выразить через y -компоненту плотности тока $\delta J_y = en(\delta V_{iy} - \delta V_{ey})$. Действительно, исключая плотность электрических зарядов ρ_q из уравнений

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho_q, \quad \operatorname{div} J + \frac{\partial \rho_q}{\partial t} = 0,$$

получаем уравнение

$$-i\omega \delta E_y = -4\pi \delta J_y,$$

из которого следует, что

$$-i\omega \delta E_y = -4\pi en(\delta V_{iy} - \delta V_{ey}). \quad (28.4.6)$$

Такой результат имеет наглядное толкование и соответствует приближению плоского конденсатора. В таком конденсаторе электрическое поле связано с зарядом обкладок σ на единицу поверхности уравнением $E = -4\pi\sigma$, а заряд обкладок $\sigma = en(\xi_{iy} - \xi_{ey})$ выражается через азимутальные смещения ξ_{iy} , ξ_{ey} ионов и электронов. Так как $-i\omega\xi_{iy} = \delta V_{iy}$, $-i\omega\xi_{ey} = \delta V_{ey}$, для электрического поля вновь получаем формулу (28.4.6). Наконец, возмущение плотности δn связано с возмущением скорости $\delta V = \{\delta V_x, \delta V_y, 0\}$ уравнением непрерывности

$$-i\omega \delta n + n \operatorname{div} \delta V + \delta V \cdot \nabla n = 0.$$

Обычно самыми неустойчивыми оказываются возмущения, в которых $\operatorname{div} \delta V = 0$. Для таких возмущений уравнение непрерывности упрощается и принимает вид

$$-i\omega \delta n + \delta V_x \frac{dn}{dx} = 0. \quad (28.4.7)$$

Комбинируя уравнения (28.4.3)–(28.4.7), получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \frac{g}{a} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pi}^2 + \Omega_i^2}, \quad (28.4.8)$$

где $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi e^2 n / m_i}$ — плазменная ионная, а $\Omega_i = eB/m_i c$ — ионная циклотронная частота; $g = (T_i + T_e)/m_i R$ — эффективная сила тяжести; $a^{-1} = -d\ln n/dx$ — величина, обратная градиентному размеру плазмы. Отсюда видно, что в плотной плазме (при $\omega_{pi} > \Omega_i$) возникает неустойчивость с инкрементом

$$\Gamma = -i\omega = \sqrt{g/a},$$

если градиент плотности $dn/dx \equiv -n/a < 0$ направлен против силы тяжести, причём величина инкремента совпадает с оценкой (28.4.2). В разреженной плазме (при $\omega_{pi} < \Omega_i$) величина инкремента уменьшается пропорционально квадратному корню из плотности плазмы и процесс выталкивания плазменной трубки из ловушки замедляется.

Задача 28.5. Квадрат инкремента желобковой неустойчивости в открытой ловушке пропорционален интегралу Розенблюта—Лонгмайра

$$\int \frac{\kappa ds}{rB^2} = \int \frac{dz}{B^{3/2}} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{B^{1/2}},$$

который вычисляется между точками экстремумов магнитного поля. Составляя его вариацию при варьировании магнитного поля $B(z)$ на произвольную функцию $\delta B(z)$, получим

$$\delta \int \frac{\kappa ds}{rB^2} = \delta \int \frac{dz}{B^{3/2}} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{B^{1/2}} = \int \left[-\frac{3\delta B}{2B^{5/2}} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{B^{1/2}} - \frac{1}{B^{3/2}} \frac{d^2}{dz^2} \frac{\delta B}{2B^{3/2}} \right] dz.$$

После интегрирования по частям во втором слагаемом при фиксированном значении δB на концах интервала интегрирования получаем интеграл

$$\delta \int \frac{\kappa ds}{rB^2} = \int dz \left[-\frac{3}{B} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{B^{1/2}} - \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{B^{3/2}} \right] \frac{\delta B}{2B^{3/2}},$$

который может быть равен нулю при любой вариации δB , если равна нулю сумма в квадратных скобках. После упрощения равенство нулю этой суммы приводит к уравнению

$$B(z) B''(z) = 2(B'(z))^2.$$

Решая его с граничными условиями $B(0) = B_{\min}$, $B(L) = B_{\max}$, находим профиль магнитного поля

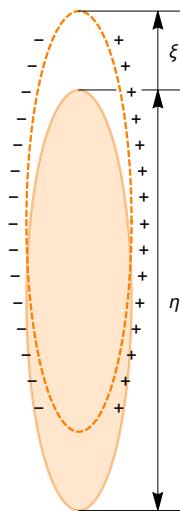
$$B(z) = \frac{B_{\min}L}{L - z - (B_{\max}/B_{\min})z},$$

который доставляет экстремум интегралу Розенблюта—Лонгмайра и, следовательно, обеспечивает минимизацию инкремента неустойчивости.

Задача 28.6. Получим критерий устойчивости желобковых возмущений в анизотропной плазме, которая удерживается в аксиально-симметричном пробкотроне. Будем считать, что магнитное поле с достаточной точностью можно описать в параксиальном приближении, которое предполагает, что плазма занимает приосевую область пробкотрона, где магнитные силовые линии идут почти параллельно оси. Говорят также, что параксиальное приближение верно, если поперечные размеры столба плазмы значительно меньше расстояния между магнитными пробками.

Известно, что наиболее неустойчивы желобковые возмущения, по форме напоминающие тонкое лезвие ножа, вытянутого вдоль магнитных силовых линий. Если такой желобок всплынет в направлении градиента давления, его тонкое лезвие раздвигает соседние участки плазмы, почти не возмущая магнитное поле. В таком случае желобковое возмущение может стать неустойчивым даже в плазме с малым давлением. Действительно, на работу по искажению магнитного поля желобок должен был бы потратить большую энергию,

Рис. 28.6.1. К выводу критерия Розенблюта–Лонгмайра для анизотропной плазмы. Магнитная силовая трубка — желобок в виде тонкого лезвия ножа высотой η — смещается на малое расстояние ξ , раздвигая соседние силовые линии. Из-за разнонаправленного дрейфа электронов и ионов в неоднородном магнитном поле на противоположных сторонах желобка скапливаются поляризационные заряды противоположных знаков, которые в исходном положении желобка компенсировались поляризационными зарядами соседних участков плазмы. Возникшее электрическое поле создаёт электрический дрейф в направлении градиента давления плазмы. В зависимости от знака средней кривизны силовых линий магнитного поля электрический дрейф либо возвращает желобок в равновесное состояние (и такое состояние устойчиво), либо удаляет от него (и такое состояние неустойчиво).



источником которой могла быть только внутренняя энергия плазмы. Возмущение, которое не искажает магнитное поле, имеет больше шансов стать неустойчивым.

Пусть высота лезвия желобка равна η , как показано на рисунке 28.6.1, и пусть желобок сместился в плоскости лезвия на малое расстояние ξ . Из-за дрейфа в неоднородном магнитном поле на противоположных сторонах желобка скапливаются поляризационные заряды противоположных знаков. В исходном расположении желобка прибыль этих зарядов компенсируется убылью поляризационных зарядов от соседних участков плазмы. Возникшее при смещении желобка электрическое поле индуцирует электрический дрейф параллельно градиенту давления плазмы. В зависимости от знака средней кривизны силовых линий магнитного поля электрический дрейф либо возвращает желобок в равновесное состояние, либо удаляет от него. В первом случае равновесное состояние устойчиво, а во втором — неустойчиво. Предполагая, что давление плазмы мало по сравнению с давлением магнитного поля, суммарную скорость градиентного и центробежного дрейфов можно представить в виде

$$v_{dr} = \frac{mc}{2eB} \chi (v_\perp^2 + 2v_\parallel^2) \quad (28.6.1)$$

(см. формулу (5.19) в §5.4). Усреднив эту скорость по распределению частиц плазмы с учётом определения компонентов давления плазмы

$$\sum mn\langle v_\perp^2/2 \rangle = p_\perp, \quad \sum mn\langle v_\parallel^2 \rangle = p_\parallel,$$

где суммирование идёт по сортам частиц, нетрудно связать величину дрейфо-

вого тока с кривизной магнитных линий и давлением:

$$J_{\text{dr}} = en \langle v_{\text{dr}} \rangle = \frac{c}{B} \kappa (p_{\perp} + p_{\parallel}). \quad (28.6.2)$$

Электрический заряд на боковых стенках желобка возникает вследствие изменения тока $\delta J_{\text{dr}} = \xi \partial J_{\text{dr}} / \partial n$ при смещении на малое расстояние ξ в направлении вектора кривизны $\kappa = \kappa n$ (т. е. параллельно нормали n к силовой линии), поэтому

$$q = \int \xi \frac{\partial J_{\text{dr}}}{\partial n} \eta \, ds, \quad (28.6.3)$$

где $\partial / \partial n$ обозначает производную по нормали, $\eta \, ds$ есть элемент площади боковой поверхности желобка, а ds — элемент длины силовой линии. Так как в парамесиальном приближении $\Phi = \pi Br^2 = \pi B_0 r_0^2 = \text{const}$, радиус силовой линии связан с величиной магнитного поля на оси пробкотрона $B(z)$ соотношением

$$r = r_0 \sqrt{\frac{B_0}{B}}, \quad (28.6.4)$$

где r_0 и B_0 обозначают радиус силовой линии и величину магнитного поля в некоторой наперёд выбранной плоскости $z = 0$ (обычно в качестве такой плоскости выбирают экваториальную плоскость пробкотрона). Желобок повторяет форму силовой линии, поэтому высота желобка η и смещение ξ изменяются по аналогичному закону:

$$\xi = \xi_0 \sqrt{\frac{B_0}{B}}, \quad \eta = \eta_0 \sqrt{\frac{B_0}{B}}. \quad (28.6.5)$$

Так как $\delta\Phi = 2\pi r \delta n B$, производную по нормали можно выразить через производную по магнитному потоку:

$$\frac{\partial J_{\text{dr}}}{\partial n} = \frac{\partial J_{\text{dr}}}{\partial \Phi} 2\pi r B. \quad (28.6.6)$$

Комбинируя формулы (28.6.3)–(28.6.6), получаем

$$q = 2\pi c \eta_0 \xi_0 B_0 \int \frac{r}{B} \kappa \frac{\partial(p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial \Phi} \, ds = 2\pi c \eta_0 \xi_0 B_0^2 r_0^2 \int \frac{\kappa}{r B^2} \frac{\partial(p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial \Phi} \, ds. \quad (28.6.7)$$

Знак заряда q определяет знак электрического поля и, следовательно, направление электрического дрейфа желобка. Устойчивость относительно возмущений желобкового типа имеет место, если

$$\int \frac{\kappa}{r B^2} \frac{\partial(p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial \Phi} \, ds < 0. \quad (28.6.8)$$

Для плазмы с резкой границей это условие эквивалентно неравенству

$$\int \frac{p_{\parallel} + p_{\perp}}{r B^2} \kappa \, ds > 0. \quad (28.6.9)$$

Приведённый вывод критерия Розенблота—Лонгмайра принадлежит Д. Д. Рютову. Другой, более строгий вывод имеется в статье его авторов [118].

Задача 28.7. Покажем на простом примере, что результаты работы [133] содержатся в точных гидродинамических уравнениях движения плазмы. Исследуем устойчивость неоднородной плазмы в магнитном поле $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$ и перпендикулярном ему поле силы тяжести $\mathbf{g} = \{-g, 0, 0\}$ относительно желобковых возмущений, которые не искривляют силовые линии магнитного поля, считая движение двумерным в плоскости xy , перпендикулярной \mathbf{B} . Предположим, что давление плазмы $p = nT$ мало в сравнении с магнитным давлением $B^2/8\pi$, и запишем линеаризованные уравнения для малых возмущений δn , δp , $\delta \mathbf{B}$, пропорциональных малой скорости $\delta \mathbf{V} = \mathbf{V} = \{V_x, V_y, 0\}$:

$$-i\omega \delta n + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = 0, \quad (28.7.1)$$

$$-i\omega m_i n \mathbf{V} = -\nabla \left(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}}{4\pi} \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{\pi} + \delta m_i n \mathbf{g}. \quad (28.7.2)$$

Малость давления плазмы позволяет считать движение в желобковых возмущениях несжимаемым и записать уравнение состояния плазмы в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (28.7.3)$$

При этом компоненты скорости можно выразить через одну функцию $\psi(x, y)$:

$$V_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad V_z = 0. \quad (28.7.4)$$

Согласно представлению (18.29) в §18.7 тензор вязких напряжений состоит из пяти частей и зависит от пяти коэффициентов:

$$\boldsymbol{\pi} = -\eta_0 \mathbf{W}_0 - \eta_1 \mathbf{W}_1 - \eta_2 \mathbf{W}_2 - \eta_3 \mathbf{W}_3 - \eta_4 \mathbf{W}_4. \quad (28.7.5)$$

Обратившись к формулам (18.31) на с. 64, легко установить, что для движений со скоростью $\mathbf{V} = \{V_x(x, y), V_y(x, y), 0\}$ тензоры \mathbf{W}_2 и \mathbf{W}_4 тождественно равны нулю. Кроме того, учтём, что в замагниченной плазме, то есть в случае $\Omega_i \tau_i \gg 1$, по порядку величины $\eta_0 \sim n T_i \tau_i$, $\eta_1 \sim \eta_2 \sim \eta_0 / (\Omega_i \tau_i)^2$, $\eta_3 \sim \eta_4 \sim \eta_0 / \Omega_i \tau_i$. Отбросив в (28.7.5) нулевые тензоры и слагаемые с самыми маленькими коэффициентами η_1 и η_2 , оставим в тензоре вязкости только два члена:

$$\boldsymbol{\pi} = -\frac{\eta_0}{2} \begin{bmatrix} W_{xx} + W_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & W_{xx} + W_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 2W_{zz} \end{bmatrix} - \frac{\eta_3}{2} \begin{bmatrix} -W_{xy} - W_{yx} & W_{xx} - W_{yy} & 0 \\ W_{xx} - W_{yy} & W_{xy} + W_{yx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (28.7.6)$$

где

$$W_{ik} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

Из двух уравнений (28.7.2) исключим давление $\delta p + (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}/4\pi)$ и получим одно уравнение для скорости:

$$\begin{aligned} -i\omega m_i \left(\frac{\partial}{\partial x} nV_y - \frac{\partial}{\partial y} nV_x \right) &= \\ = -\eta_3 \nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{V} - 2\eta'_3 \nabla^2 V_x - \eta''_3 \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + i \frac{m_i g}{\omega} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div}(n\mathbf{V}). \end{aligned} \quad (28.7.7)$$

В этом уравнении штрих обозначает производную по x , а компоненты тензора \mathbf{W}_0 выпали. Выражая теперь компоненты скорости через функцию ψ с помощью (28.7.4), получим одно уравнение второго порядка для одной функции:

$$\omega^2 \left[n \nabla^2 \psi + n' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + 2i\omega \left[\frac{\eta'_3}{m_i} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi + \frac{\eta''_3}{m_i} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + n' g \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (28.7.8)$$

Уравнение ещё больше упрощается для коротковолновых возмущений, таких что $\partial/\partial y = ik \gg \partial/\partial x$. В этом случае можно отбросить слагаемые, которые содержат η''_3 , пренебречь величиной $n' \partial \psi / \partial x$ по сравнению с $n \nabla^2 \psi$ в коэффициенте при ω^2 и подставить $\nabla^2 \psi \approx \partial^2 \psi / \partial x \partial y = -k^2 \psi$. В результате получится алгебраическое уравнение, в котором все слагаемые содержат функцию $\psi(x, y)$, но не её производные. Сокращение ψ даёт дисперсионное уравнение

$$\omega^2 + 2\omega_* \omega + \omega_g^2 = 0, \quad (28.7.9)$$

где введены обозначения $\omega_* = k(nT_i)' / 2nm_i\Omega_i$, $\omega_g^2 = (n'/n)g$ и учтено, что $\eta_3 = -nT_i/2\Omega_i$ (см. задачу 18.16). Решением уравнения (28.7.9) являются две частоты

$$\omega_{1,2} = \omega_* \pm \sqrt{\omega_*^2 - \omega_g^2}. \quad (28.7.10)$$

Если $\omega_g^2 > \omega_*^2$, частоты комплексны и одна из них имеет положительную мнимую часть, что соответствует неустойчивости желобковых колебаний. Если же $\omega_*^2 > \omega_g^2$, то обе частоты вещественны, что соответствует устойчивости. Оценивая n'/n как $1/a$ (где a — радиус плазмы), k как m/a (где m — азимутальное волновое число), g как $T_i/m_i R$ (где R — радиус кривизны) и R как L^2/a (где L — длина плазмы), условие устойчивости $\omega_*^2 > \omega_g^2$ можно привести к неравенству

$$\frac{a}{L} < m \frac{\rho_i}{a}, \quad (28.7.11)$$

которое совпадает с (28.21).

Лекция 29

Задача 29.1. При $\bar{\beta} = \bar{\beta}_{\text{crit}}$ решение уравнения (29.14) удовлетворяет нулевым граничным условиям при $z = \pm L$. Умножив это уравнение на функцию $\alpha(z)$,

являющуюся его решением, и выполнив интегрирование по частям, получим

$$\int_{-L}^L dz \left\{ \alpha'' - 2\bar{\beta}q^3q''\alpha \right\} \alpha = \alpha\alpha' \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \int dz \left\{ (\alpha')^2 + 2\bar{\beta}\alpha^2q^3q'' \right\}.$$

Левая часть этого равенства равна нулю, так как функция $\alpha(z)$ является решением уравнения. В правой части первое (внешинтегральное) слагаемое равно нулю, так как $\alpha(\pm L) = 0$. Следовательно, равно нулю и второе слагаемое в правой части. Вместе с ним равна нулю и энергия (29.10).

Задача 29.3. Ступенчатый профиль давления можно рассматривать как предел близкого к ступеньке трапециевидного распределения с малой, но конечной шириной граничного слоя $\Delta\Phi$. Результат вычисления энергии возмущения (29.10) зависит от соотношения $\Delta\Phi$ и размера желобка $\delta\Phi$ по переменной Φ . Повторяя формулу (29.12), запишем

$$W_F = \left(\frac{1}{8\pi} \iint d\theta d\Phi \xi_0^2 B_0 \right) \left(\int dz \left\{ (\alpha')^2 + 2\bar{\beta}\alpha^2q^3q'' \right\} \right), \quad (29.3.1)$$

где

$$\bar{\beta} = \iint d\theta d\Phi \xi_0^2 \beta(\Phi) / \iint d\theta d\Phi \xi_0^2, \quad (29.3.2)$$

$$\beta(\Phi) = -\frac{8\pi\Phi}{B_0^2} \frac{dp}{d\Phi} = \beta_0 \frac{\Phi}{p_0} \left| \frac{dp}{d\Phi} \right|, \quad \beta_0 = \frac{8\pi p_0}{B_0^2}. \quad (29.3.3)$$

Предельное значение $\bar{\beta}_{\text{crit}}$ параметра $\bar{\beta}$ определяется из решения задачи Штурма—Лиувилля, как описано в параграфе §29.3, а фактическая величина параметра β , которую нужно сравнивать с предельным значением, зависит от размеров возмущения.

Если размер желобка мал по сравнению с шириной границы, $\delta\Phi \ll \Delta\Phi$, локальный параметр (29.3.3) в интеграле (29.3.2) можно считать неизменным на размере желобка, так что $\bar{\beta} \approx \beta(\Phi_*)$, где Φ_* — значение Φ на силовой линии, вблизи которой локализовано возмущение. Для определённости примем, что давление плазмы равно p_0 при $\Phi < \Phi_a$ и линейно уменьшается до нуля в пограничном слое шириной $\Delta\Phi$. Локальное значение

$$\beta(\Phi_*) \approx \frac{8\pi p_0}{B_0^2} \frac{\Phi_a}{\Delta\Phi} \quad (29.3.4)$$

в пограничном слое на силовой линии, где локализовано возмущение, при малой ширине границы велико и может легко превысить критическое значение. Следовательно, мелкомасштабные возмущения будут неустойчивы, даже если давление плазмы существенно меньше давления магнитного поля, т. е. $\beta_0 \ll 1$. Однако мелкомасштабные колебания вряд ли могут нанести большой ущерб

равновесной конфигурации плазмы. Более опасны крупномасштабные возмущения. Если $\delta\Phi \gg \Delta\Phi$, выполняя интегрирование по Φ в формуле (29.3.2), можно считать, что

$$\beta(\Phi) = \frac{8\pi p_0}{B_0^2} \Phi_a \delta(\Phi - \Phi_a). \quad (29.3.5)$$

Подстановка (29.3.5) в (29.3.2) приводит к оценке

$$\bar{\beta} \approx \frac{8\pi p_0}{B_0^2} \frac{\Phi_a}{\delta\Phi}. \quad (29.3.6)$$

Из неё видно, что $\bar{\beta}$ уменьшается с увеличением масштаба возмущения, поэтому самые крупномасштабные возмущения при заданном значении β_0 , не превышающем предельное значение β_{crit} , могут быть устойчивы, тогда как мелкомасштабные возмущения будут неустойчивы. Таким образом, результатом развития баллонной неустойчивости будет установление «гладкого» радиального профиля давления.

Задача 29.4. В параксиальном приближении потенциальная энергия баллонных возмущений найдена в статье У. Ньюкомба [149]. Для аксиально-симметричной открытой ловушки с анизотропной плазмой Ньюкомб приводит следующее выражение:

$$W_F = \frac{1}{2} \iiint d\theta d\Phi dz \left[-\frac{2x}{rB^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \Phi} X^2 + \frac{Q}{B} \left(\frac{1}{r^2 B^2} X'^2 + r^2 Y'^2 \right) \right].$$

Здесь штрих обозначает частную производную по z при фиксированной величине Φ ,

$$\begin{aligned} r^2 &= 2 \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{B(\Phi, z)}, & B^2 + 8\pi p_\perp &= B_{\text{vac}}^2(z), & Q &= B^2 + 4\pi(p_\perp - p_\parallel), \\ \bar{p} &= \frac{p_\perp + p_\parallel}{2}, & X &= \xi \cdot \nabla \Phi, & Y &= \xi \cdot \nabla \theta, & x &= r'', \end{aligned}$$

а также предполагается, что все функции (кроме $B_{\text{vac}}(z)$) зависят от Φ и z .

Лекция 30

Задача 30.1. Введём локальную систему координат с осью x в радиальном, осью y в азимутальном направлении, осью z вдоль магнитного поля и запишем линеаризованные уравнения движения компонент плазмы с учётом того, что все малые величины пропорциональны $\exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$. Предположим также, что давление плазмы пренебрежимо мало, инерцией электронов

можно пренебречь полностью, как и инерцией ионов в направлении оси y . Тогда уравнения движения в проекциях на оси x и y принимают такой же вид, как в задаче 28.4:

$$-i\omega m_i \delta V_x = \frac{e}{c} \delta V_{iy} B + \frac{\delta n}{n} \frac{T_i}{R}, \quad (30.1.1)$$

$$0 = -\frac{e}{c} \delta V_{ey} B + \frac{\delta n}{n} \frac{T_e}{R}, \quad (30.1.2)$$

$$0 = -\frac{e}{c} \delta V_x B + e \delta E_y. \quad (30.1.3)$$

Здесь учтено, что в радиальном направлении плазменная трубка движется как целое, т. е. уравнение (30.1.3) справедливо как для ионной, так и для электронной компонент плазмы, и $\delta V_{ix} = \delta V_{ex} = \delta V_x$. Учтём также, что электрическое поле потенциально и имеет компоненты

$$\delta E_y = -ik_y \delta \varphi, \quad \delta E_z = -ik_z \delta \varphi, \quad (30.1.4)$$

где $\delta \varphi$ есть возмущение потенциала. Запишем также возмущение плотности тока

$$\delta J_y = en(\delta V_{iy} - \delta V_{iy}), \quad \delta J_z = \sigma \delta E_z, \quad (30.1.5)$$

обозначив через $\sigma = \omega_{pe}^2 \tau_{ei} / 4\pi$ электрическую проводимость плазмы вдоль магнитного поля. Исключая затем плотность электрических зарядов ρ_q из уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_q, \quad \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_q}{\partial t} = 0,$$

получаем соотношение

$$-i\omega \operatorname{div} \delta \mathbf{E} = -4\pi \operatorname{div} \delta \mathbf{J}, \quad (30.1.6)$$

из которого следует, что

$$-i\omega (ik_y \delta J_y + ik_z \delta J_z) = -4\pi (ik_y \delta E_y + ik_z \delta E_z). \quad (30.1.7)$$

Возмущение плотности δn связано с возмущением скорости $\delta \mathbf{V} = \{\delta V_x, \delta V_y, \delta V_y\}$ уравнением непрерывности

$$-i\omega \delta n + n \operatorname{div} \delta \mathbf{V} + \delta \mathbf{V} \cdot \nabla n = 0.$$

Обычно самыми неустойчивыми оказываются возмущения, в которых $\operatorname{div} \delta \mathbf{V} = 0$. Для таких возмущений уравнение непрерывности упрощается и принимает вид

$$-i\omega \delta n + \delta V_x \frac{dn}{dx} = 0. \quad (30.1.8)$$

Комбинируя уравнения (30.1.1)–(30.1.7), теперь можно получить дисперсионное уравнение. Для этого в уравнении (30.1.7) нужно исключить δJ_y и δJ_z с

помощью уравнений (30.1.5). В получившемся уравнении следует исключить δV_{iy} и δV_{ey} с помощью уравнений (30.1.1) и (30.1.2), затем исключить δn с помощью уравнения (30.1.8) и δV_x с помощью уравнения (30.1.3). Получившееся уравнение будет содержать только δE_y и δE_z , которые надлежит выразить через $\delta\varphi$ с помощью уравнения (30.1.4). После сокращения общего множителя $\delta\varphi$ получается искомое уравнение, которое можно привести к виду

$$\omega^2 + \frac{k_y^2}{k_y^2 + k_z^2} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} (\omega^2 + \omega_g^2 + i\omega\omega_s) = 0, \quad (30.1.9)$$

если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \omega_g^2 &= \frac{g}{a}, & g &= \frac{T_i + T_e}{m_i R}, & \frac{1}{a} &= -\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}, \\ \omega_s &= \frac{k_z^2}{k_y^2} \omega_{ci} \omega_{ce} \tau_{ei}, & \omega_{ci} &= \frac{eB}{m_i c}, & \omega_{ce} &= \frac{eB}{m_e c}, & \omega_{pi}^2 &= \frac{4\pi e^2 n}{m_i c^2}. \end{aligned}$$

В пределе $k_z \rightarrow 0$, когда возмущение сильно вытянуто вдоль силовых линий и частота ω_s , пропорциональная времени электрон-ионных столкновений τ_{ei} , стремится к нулю, уравнение (30.1.9) переходит в дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \frac{g}{a} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pi}^2 + \omega_{ci}^2} \quad (30.1.10)$$

гравитационных колебаний в разреженной плазме, которое было получено в задаче 28.4. В пределе плотной плазмы (при $\omega_{pi} > \omega_{ci}$) также упрощается и принимает вид

$$\omega^2 + \omega_g^2 + i\omega\omega_s = 0. \quad (30.1.11)$$

Если $\omega_s \ll \omega_g$, оно описывает гравитационную неустойчивость с инкрементом

$$\Gamma = -i\omega = \omega_g = \sqrt{g/a}$$

при условии, что градиент плотности $dn/dx \equiv -n/a < 0$ направлен против силы тяжести. Если же $\omega_s \ll \omega_g$ (то есть продольное волновое число возмущения k_z достаточно велико), неустойчивость замедляется и

$$\Gamma = -i\omega = \frac{\omega_g^2}{\omega_s}.$$

Таким образом, быстрее всего нарастают неустойчивые возмущения, сильно вытянутые вдоль магнитных силовых линий. При заданной величине k_z увеличение проводимости плазмы увеличивает ω_s и замедляет неустойчивость.

Заметим, что дисперсионное уравнение (30.1.11) в пределе плотной плазмы можно получить более простым способом, заменив (30.1.5) уравнением $\operatorname{div} \delta J = 0$, которое является составной частью модели одножидкостной магнитной гидродинамики (сравните с уравнением (19.11) в параграфе §19.1).

Задача 30.2. По условию задачи первоначально магнитное поле

$$\mathbf{B}_0 = (B_{y0}/a) \hat{\mathbf{y}} + B_{z0} \hat{\mathbf{z}} \quad (30.2.1)$$

в промежутке между проводящими плоскостями $x = \pm a$ было однородно в направлении оси z и линейно изменялось в направлении оси z от $-B_{y0}$ до $+B_{y0}$. После деформации проводящих границ их форма описывается уравнениями

$$x = \pm(a + \delta_0 \cos kx). \quad (30.2.2)$$

Новое равновесие с точностью до поправок, линейных по малому параметру δ_0/a , можно найти из линеаризованной версии уравнения равновесия

$$\frac{1}{c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] = \nabla p. \quad (30.2.3)$$

Так как $\text{rot } \nabla p = 0$, ротор левой части уравнения (30.2.3) также должен быть равен нулю:

$$\text{rot}[\mathbf{J} \times \mathbf{B}] = 0. \quad (30.2.4)$$

Магнитное поле удобно выразить через функцию магнитного потока ψ так, что

$$\mathbf{B} = [\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \psi] + B_{z0} \hat{\mathbf{z}}. \quad (30.2.5)$$

С учётом формы границ функцию потока будем искать в виде

$$\psi(x, y) = \frac{B_{y0}}{2a} x^2 + \delta\psi(x) \cos ky, \quad (30.2.6)$$

где функция $\delta\psi(x)$ пропорциональна амплитуде δ_0 деформации границы. Простые вычисления показывают, что

$$\mathbf{B} = \{k \delta\psi(x) \sin ky, B_{y0}x/a + \delta\psi'(x) \cos ky, B_{z0}\}, \quad (30.2.7)$$

$$(4\pi/c)\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{B} = \{0, 0, B_{y0}a + (k^2 \delta\psi(x) - \delta\psi''(x)) \cos ky\}. \quad (30.2.8)$$

Подстановка этих выражений в уравнение (30.2.4) приводит к уравнению

$$k^2 \delta\psi(x) - \delta\psi''(x) = 0, \quad (30.2.9)$$

в котором отброшены слагаемые, квадратичные по $\delta\psi$.

С учётом симметрии задачи нужно искать чётное решение уравнения (30.2.9), $\delta\psi(-x) = \delta\psi(x)$, поэтому достаточно рассмотреть только правую половину зазора, $0 < x < x_+$. Границное условие на правой границе этого интервала получается из условия $\psi = \text{const}$ при $x = x_+$:

$$\delta\psi(a) = -\delta_0 B_{y0}. \quad (30.2.10)$$

На левой границе интервала величина $\delta\psi(0)$, вообще говоря, может быть любой. Общее решение уравнения (30.2.9) при $x > 0$ имеет вид

$$\delta\psi(x) = C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx, \quad x > 0. \quad (30.2.11a)$$

Требование симметрии решения означает, что константа C_1 одинакова справа и слева от плоскости $x = 0$, тогда как константа C_2 меняет знак:

$$\delta\psi(x) = C_1 \operatorname{ch} kx - C_2 \operatorname{sh} kx, \quad x < 0. \quad (30.2.11b)$$

Далее сосредоточимся на анализе решений для области $x > 0$. Существуют два принципиально разных решения. Первое решение описывает деформированное равновесие с сохранением той же топологии магнитного поля, что и в исходном равновесии. Оно получается при выполнении граничного условия $\delta\psi(0) = 0$ в плоскости симметрии $x = 0$, что соответствует константе $C_1 = 0$:

$$\delta\psi(x) = -B_{y0}\delta_0 \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} ka}. \quad (30.2.12)$$

Тогда y -компоненты магнитного поля

$$B_y = \frac{\partial\psi}{\partial x} = B_{y0} \frac{x}{a} - B_{y0}k\delta_0 \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{sh} ka} \cos ky \quad (30.2.13)$$

испытывает скачок

$$[B_y] = B_y(0+) - B_y(0-) = -2B_{y0} \frac{k\delta_0}{\sin ka} \cos ky \quad (30.2.14)$$

в плоскости $x = 0$, где возникает токовый слой. Это решение описывает равновесие плазмы до того, как токовый слой будет разрушен тиеринг-неустойчивостью. Первое равновесие иллюстрирует рисунок 30.1а на с. 238.

Второе решение описывает равновесие после релаксации токового слоя. Оно получается при выборе константы $C_2 = 0$:

$$\delta\psi(x) = -B_{y0}\delta_0 \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} ka}. \quad (30.2.15)$$

Тогда токовый слой не возникает, так как

$$B_y = \frac{\partial\psi}{\partial x} = B_{y0} \frac{x}{a} - B_{y0}k\delta_0 \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{sh} ka} \cos ky \quad (30.2.16)$$

и магнитное поле непрерывно при $x = 0$. Однако в этом случае величина $\delta\psi(0)$ отлична от нуля, что соответствует изменению топологии магнитного поля по сравнению с равновесием до деформации границ слоя плазмы. Это решение описывает образование магнитных островов с шириной $4(a\delta_0/\operatorname{ch} ka)^{1/2}$. Второе равновесие иллюстрирует рисунок 30.1б.

Вычислим ещё пространственное распределение давления плазмы. Подставляя

$$p(x, y) = p_0 - \frac{B_{z0}^2}{8\pi} - \frac{B_{y0}^2}{8\pi} \frac{x^2}{a^2} + \delta p(x) \cos ky \quad (30.2.17)$$

в уравнение (30.2.3) и используя уравнение (30.2.9), находим

$$\delta p(x) = -\frac{B_{y0} \delta\psi(x)}{4\pi a}. \quad (30.2.18)$$

Важно отметить, что давление постоянно на деформированной границе плазмы $x = x_+ = a + \delta_0 \cos ky$ и равно давлению на плоской границе:

$$p(x_+, y) = p_0 - \frac{B_{z0}^2}{8\pi} - \frac{B_{y0}^2}{8\pi} - \frac{\delta_0 B_{y0}^2 + B_{y0} \delta\psi(a)}{4\pi a} \cos ky = p_0 - \frac{B_{z0}^2}{8\pi} - \frac{B_{y0}^2}{8\pi}. \quad (30.2.19)$$

Параметр p_0 имеет смысл давления в плоскости симметрии $x = 0$.

Задача 30.3. Исследуем энергетику магнитного пересоединения в модели Тейлора, рассмотренной в задаче 3. Следуя статье [163], сравним суммарные магнитные энергии следующих трёх равновесий: начальное поле (30.2.1), идеальное МГД-состояние с токовым слоем с соответствующим возмущением функции потока (30.2.12) и релаксированное равновесие с магнитными островами, описываемое функцией (30.2.15). Что касается магнитной энергии исходного поля, результат тривиален: в расчёте на единицу площади в плоскости yz он равен

$$W_0 = \frac{B_{y0}^2}{8\pi} \frac{2a}{3} + \frac{B_{z0}^2}{8\pi} 2a. \quad (30.3.1)$$

В случае деформированных равновесий соответствующую энергию можно также записать в виде интеграла $W = \int_{-a}^{+a} \langle B^2 / 8\pi \rangle dx$, где $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по координате y . Однако вычислить энергию таким способом не так просто. Дело в том, что изменение магнитной энергии для деформированных равновесий имеет порядок $(\delta_0/a)^2$. Следовательно, такой прямой расчёт потребует знания поправок второго порядка к исходному магнитному полю. Эту громоздкую задачу можно обойти, если действовать в духе энергетического принципа (см. §26.4). Представим, что деформация границы (30.2.2) вызвана некоторой внешней силой, которая медленно увеличивается, так что амплитуда возмущения $\delta(t)$ медленно нарастает от нуля до конечного значения, равного δ_0 . В ходе такой квазистатической деформации внешняя сила должна быть уравновешена внутренним магнитным давлением на граничной поверхности. Следовательно, искомое изменение внутренней магнитной энергии равно работе внешней силы, обеспечивающей деформацию границы:

$$\Delta W = -2 \int_0^{\delta_0} \left\langle \frac{B^2(x_+, y)}{8\pi} \cos ky \right\rangle d\delta. \quad (30.3.2)$$

Здесь множитель 2 учитывает вторую границу $x = x_-$. Как видно из (30.3.2), при такой деформации достаточно знать возмущение магнитного потока $\delta\psi$, уже вычисленное в линейном приближении (см. (30.2.12) и (30.2.15)), где амплитуда δ_0 заменяется на $\delta(t)$. Следует пояснить, что работа против сил давления плазмы p оказывается равной нулю, так как давление плазмы на деформированной границе постоянно (см. решение задачи 30.2). Этот факт станет очевиден, если вспомнить, что давление изотропной плазмы постоянно вдоль

магнитной силовой линии, а магнитное поле направлено всюду по касательной к поверхности идеального проводника.

Таким образом, приходим к следующей процедуре. Деформированное магнитное поле вычисляем по формуле (30.2.7). Тогда магнитное давление на деформированной границе в требуемом линейном приближении принимает вид

$$\frac{B^2(x_+, y)}{8\pi} = \frac{B_{z0}^2}{8\pi} + \frac{B_{y0}^2}{8\pi} + \frac{B_{y0}}{4\pi} \left[\delta\psi'(a) - \frac{\delta\psi(a)}{a} \right] \cos ky. \quad (30.3.3)$$

Очевидно, только последний член в (30.3.3) даёт ненулевой вклад в (30.3.2). После подстановки в (30.3.3) функции (30.2.12) вычисление интеграла (30.3.2) даёт следующий результат для энергии магнитного поля деформированного равновесия до стадии релаксации:

$$W_1 = W_0 + \frac{B_{y0}^2}{8\pi} \frac{\delta_0^2}{a} [-1 + ka \operatorname{cth} ka]. \quad (30.3.4)$$

Подстановка функции (30.2.15) даёт энергию магнитного поля после завершения процесса магнитного пересоединения:

$$W_2 = W_0 + \frac{B_{y0}^2}{8\pi} \frac{\delta_0^2}{a} [-1 + ka \operatorname{th} ka]. \quad (30.3.5)$$

Следовательно, энергия, выделяемая в процессе принудительного магнитного пересоединения, равна

$$W_2 - W_1 = \frac{B_{y0}^2}{4\pi} \frac{k\delta_0^2}{\operatorname{sh} 2ka} > 0. \quad (30.3.6)$$

Как видно из (30.3.4), такое внешнее возмущение немногого увеличивает общую магнитную энергию системы ($W_1 > W_0$). Однако согласно (30.3.6) энергия, выделяемая при последующем магнитном пересоединении, превышает дополнительную магнитную энергию $W_1 - W_0$, подаваемую извне, потому что при $ka < 1,20$ конечное состояние имеет меньшую магнитную энергию, чем начальное поле, $W_2 < W_0$. В случае $ka > 1,20$ конечная энергия превышает начальную, $W_2 > W_0$, но и тогда $W_2 < W_1$. Поэтому вынужденное пересоединение можно рассматривать как механизм внутренней магнитной релаксации.

Задача 30.4. Повторим для удобства уравнение (30.13):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(B_y^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta B_x}{B_y} \right) = k^2 B_y \delta B_x. \quad (30.4.1)$$

Как сказано в §30.4, оно имеет два решения и при $x \rightarrow 0$ — либо $\delta B_x \propto x$, либо $\delta B_x = \text{const}$. Однако можно видеть, что первое решение нужно исключить из числа решений, которые хорошо ведут себя при $x \rightarrow \infty$. Если отношение

$\delta B_x/B_y$ конечно при $x \rightarrow 0$, допустимо умножить уравнение (30.4.1) на $\delta B_x^*/B_y$ и проинтегрировать от $x = -\infty$ до $x = 0$. Если затем проинтегрировать первое слагаемое по частям, заметив, что $B_y = 0$ при $x = 0$, получим

$$\delta B_x^* B_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta B_x}{B_y} \right) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 B_y^2 \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta B_x}{B_y} \right) \right|^2 dx - \int_{-\infty}^0 k^2 |\delta B_x|^2 = 0. \quad (30.4.2)$$

Поскольку мы ищем локализованное решение, в котором $\delta B_x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ (в противном случае бы была бы бесконечная магнитная энергия $|\delta B_x|^2$), первый член в левой части равен нулю в пределе $x \rightarrow -\infty$. Тогда нельзя допустить, чтобы $\delta B_x \propto x$ при $x \rightarrow 0$, так как тогда первый член в левой части исчезал бы также и в пределе $x \rightarrow 0$, а оставшееся выражение было бы заведомо отрицательным, хотя вся левая часть должна быть нулём.

Таким образом, локализованные решения уравнения (30.4.1) таковы, что δB_x приближается к некоторой ненулевой константе при $x \rightarrow 0$ слева и справа. Однако такие решения не допускаются в рамках идеальной МГД, поскольку невозможно «склеить» решение слева с решением справа. Иными словами, уравнение (30.11) неприменимо точно в точке $x = 0$, поскольку это уравнение предполагает, что δB_x равно нулю там, где $B_y = 0$. Однако такое решение допустимо в резистивном случае, когда уравнение (30.10) заменяет уравнение (30.11) в окрестности точки $x = 0$.

Задача 30.5. Повторим для удобства уравнения (30.19) и (30.20):

$$i\Gamma \delta B_{x0} + kB'_y x \delta V_x = \frac{ic^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 \delta B_x}{\partial x^2}, \quad (30.5.1)$$

$$\Gamma\rho \frac{c^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \delta V_x}{\partial x^2} = kB'_y x (i\Gamma \delta B_{x0} + kB'_y x \delta V_x). \quad (30.5.2)$$

Чтобы найти решение уравнения (30.5.2), введём безразмерные переменные X и U , определив их как

$$\begin{aligned} X &= x/\delta, & \delta &= (\Gamma\rho c^2/\sigma)^{1/4}/(kB'_y)^{1/2}, \\ U &= (\Gamma\rho c^2/\sigma)^{1/4} (kB'_{y0})^{1/2} \delta V_x / i\Gamma \delta B_{x0}. \end{aligned} \quad (30.5.3)$$

В этих обозначениях уравнение (30.5.2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = (1 + XU)X. \quad (30.5.4)$$

Его решение $U(X)$ будет нечётной функцией X , которая в пределе $X \rightarrow \pm\infty$ ведёт себя как $U \rightarrow -X^{-1}$ при условии, что $\partial^2 U / \partial X^2$ убывает в этом пределе ещё быстрее. Явное решение удаётся записать в интегральной форме, а именно

$$U(X) = -\frac{X}{2} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{X^2}{2} \cos \theta\right) \sin^{1/2} \theta d\theta. \quad (30.5.5)$$

Тот факт, что это искомое решение, можно проверить путём прямой подстановки в уравнение (30.5.4), предварительно дважды выполнив дифференцирование уравнения (30.5.5):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{X}{2} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{X^2}{2} \cos \theta\right) \sin^{1/2} \theta (3 \cos \theta - X^2 \cos^2 \theta) d\theta. \quad (30.5.6)$$

Комбинируя уравнения (30.5.5) и (30.5.6), получим результат

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - X^2 U &= \frac{X}{2} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{X^2}{2} \cos \theta\right) \sin^{1/2} \theta (3 \cos \theta + X^2 \sin^2 \theta) d\theta = \\ &= X \int_0^{\pi/2} \frac{d}{d\theta} \left[\sin^{3/2} \theta \exp\left(-\frac{X^2}{2} \cos \theta\right) \right] d\theta = \\ &= X, \end{aligned}$$

который подтверждает, что формула (30.5.5) действительно даёт решение уравнения (30.5.4). В пределе $X \rightarrow \pm\infty$ доминирующий вклад в интеграл (30.5.5) возникает от значений θ вблизи $\pi/2$. Заменив переменную интегрирования θ на $\varphi = \pi/2 - \theta$, можно вычислить асимптотику интеграла путём аппроксимации подынтегрального выражения $\exp(-X^2 \cos \theta/2)$ функцией $\exp(-X^2 \varphi/2)$, после чего легко проверить, что интеграл (30.5.5) имеет правильную асимптотику $U \rightarrow -X^{-1}$. Наконец, укажем, что интеграл (30.5.5) удаётся выразить через специальные функции, так что

$$U(X) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \frac{X}{\sqrt[4]{X^2}} \left(I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{X^2}{2}\right) - L_{\frac{1}{4}}\left(\frac{X^2}{2}\right) \right), \quad (30.5.7)$$

где $I_{1/4}$ и $L_{1/4}$ обозначают соответственно модифицированную функцию Бесселя и модифицированную функцию Струве, а $\Gamma(3/4) = 1,23$ есть значение гамма-функции (не путать с инкрементом неустойчивости Γ).

Целью анализа резистивного слоя в конечном итоге является уточнение граничного условия (30.18), которое используется для сшивки решений слева и справа от резистивного слоя. В §30.4 показано, что решение вне резистивного слоя полностью определено, когда вычислен скачок производной $\delta B_x / \delta x$ при $x = 0$. Величину этого скачка легко найти путём интегрирования уравнения (30.5.1) по толщине резистивного слоя:

$$\left[\left[\frac{\partial B_x}{\partial x} \right] \right]_{x=0} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \int (i\Gamma \delta B_{x0} + kB'_y x \delta V_x) dx. \quad (30.5.8)$$

Переходя в правой части этой формулы к безразмерным переменным X и U и замечая, что пределы интегрирования в уравнении (30.5.8) можно считать бесконечными в масштабе ширины резистивного слоя, т. е. в масштабе переменной X , получим

$$\frac{1}{\delta B_{x0}} \left[\left[\frac{\partial B_x}{\partial x} \right] \right]_{x=0} = \frac{4\pi\Gamma^{5/4}\rho^{1/4}}{(c^2/\sigma)^{3/4}(kB'_y)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + XU) dX. \quad (30.5.9)$$

Интеграл в правой части уравнения (30.5.9) удаётся вычислить, комбинируя формулы (30.5.4) и (30.5.6) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + XU) dX &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} dX = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_0^{\pi/2} d\theta \exp\left(-\frac{1}{2}X^2 \cos \theta\right) \sin^{1/2} \theta (3 \cos \theta - X^2 \cos^2 \theta) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dX \exp\left(-\frac{1}{2}X^2 \cos \theta\right) \sin^{1/2} \theta (3 \cos \theta - X^2 \cos^2 \theta) = \\
 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^{1/2} \theta (3 \cos^{1/2} \theta - \cos^{1/2} \theta) = \\
 &= (2\pi)^{1/2} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^{1/2} \theta \cos^{1/2} \theta = \sqrt{2} \Gamma^2(3/4) \approx 2,12. \quad (30.5.10)
 \end{aligned}$$

Приравнивая левую часть уравнения (30.5.9) к величине Δ' , которая была введена в параграфе §30.4, получаем уравнение, из которого находим инкремент тириング-неустойчивости Γ , а именно

$$\Gamma = 0,547 \Delta'^{4/5} (c^2/\sigma)^{3/5} (kB_y')^{2/5} / \rho^{1/5} (4\pi)^{4/5}. \quad (30.5.11)$$

Параметр Δ' должен быть вычислен по свойствам решения вне резистивного слоя, как сказано в §30.4. Вычисленный инкремент тириング-неустойчивости можно записать в более наглядной форме:

$$\Gamma = 0,547 (\Delta' a)^{4/5} (ka)^{2/5} / \tau_A^{2/5} \tau_R^{3/5}, \quad (30.5.12)$$

где $\tau_R = 4\pi\sigma a^4/c^2$ — характерное время диффузии магнитного поля через нейтральный слой, $\tau_A = a/c_A$ — характерный период альфвеновских колебаний, $c_A = B_y' a / \sqrt{4\pi\rho}$ — альфвеновская скорость на границе нейтрального слоя.

Предметный указатель

А

адиабаты

Чу—Голдбергера—Лоу, 85, 90,
91, 93, 99, 173

анизотропия, 25, 85

в магнитном поле, 48

функции распределения, 26

Б

бета, 115, 118, 198

локальная, 115

полоидальная, 119, 204

предельная, 227, 233, 236

тороидальная, 204

В

вариационный принцип, см.

принцип вариационный

вектор, 4, 11, 252

аксиальный, 50

бинормали, 103, 104

волновой, 160, 165, 166

единичный, 27, 49, 86, 87

касательный, 103, 104

кривизны, 89, 103

намагниченности, 107

нормали, 103, 104, 180, 181

Пойнтинга, 94

потока тепла, 18

потока энергии, 12

скорости, 18

смещения, 162, 166, 180, 181

комплексный, 180

величина поверхностная, 137,
138, 141

ветер солнечный, 173

вихрь Хилла, 147

вмороженность магнитного
 поля, 77, 80, 82, 97, 160

возмущение, 161

баллонное, 228

винтовое, 203, 204

желобковое, 205, 209, 210, 227

магнитного поля, 178

неустойчивое, 184

перестановочное, 205

случайное, 177

волна

альфеновская, 164–166, 174

звуковая, 166

ионно-звуковая, 168

магнитозвуковая

быстрая, 169, 175

медленная, 169, 175

малой амплитуды, 160

ударная, 99, 173, 174

время свободного пробега, 36,
56

вспышки на Солнце, 250

выравнивание

скоростей, 7, 26

температур, 8, 9, 26, 32

- вязкость, 8, 42–44, 48, 63
бесстолкновительная, 66, 271
- Г**
- газ
 идеальный, 71
 ионизованный, 115
гидродинамика магнитная, 6,
 см. также МГД
анизотропной плазмы, 71
двухжидкостная, 7, 20, 24, 70
идеальная, 71, 75, 76, 85, 96,
 124, 125, 161, 177, 180, 184,
 238, 246
многожидкостная, 7
одножидкостная, 7, 70, 73
резистивная, 71, 75, 242, 246
холловская, 71, 85, 96, 97
- градиент
 давления, 27, 96, 102, 209
 плотности, 53
 температуры, 17, 26, 27, 36
- граница
 плазмы свободная, 114, 192
 равновесная, 181
 смешённая, 181, 191
 устойчивости, 184
- Д**
- давление, 71, 85, 96, 102, 114,
 115, 121, 130, 135, 138, 139,
 161, 176, 181, 215
анизотропное, 88
магнитного поля, 87, 96, 114,
 115, 128, 129
относительное, 114, 227
парциальное, 12, 17
поперечное, 89, 91, 108, 128
пределочное, 199
продольное, 89, 91, 108
- движение
 несжимаемое, 164
 электронов относительно
 ионов, 26
декремент затухания, 173
деформация виртуальная, 179
диаграмма
 полярная, 170–172
 групповая, 171
 фазовая, 170
 Фридрихса, 171
диамагнетизм плазмы, 109, 128
диамагнетик, 107
дивергенция тензора, 16
дивертор, 154
дисперсия, 166
 частотная, 170
диссипация, 75
диффузия, 8, 48, 56, 121
 амбиполярная, 53, 55
 бомовская, 58
 магнитного поля, 77
диэлектрик, 61
длина
 пинча, 120
 свободного пробега, 36, 48, 50,
 65, 88
- дрейф
 градиентный, 108
 магнитный, 50
 тороидальный, 317
 центробежный, 108
электрический, 55, 76, 108,
 212, 213
- Ж**
- жидкость проводящая, 6, 174
- З**
- задача

- линейная, 182
на собственные значения,
 182, 184, 188–190
Тейлора, 250
Штурма—Лиувилля, 192, 232,
 234, 401
- закон
 Больцмана, 60
 Видемана—Франца, 47
дисперсии, 160, 167
Ома, 60, 62, 74, 97
 обобщённый, 22, 59, 60, 74,
 96
сохранения, 13
 импульса, 13
 числа частиц, 13
 энергии, 13, 17, 20, 185
Фурье, 31
запас устойчивости, 138, 150
заряд
 объёмный, 72, 73
 поляризационный, 62
звук магнитный, 166–170
зет-пинч, см. пинч
змейки, 195, 199
значение собственное, 232
- И**
излучение
 тормозное, 45
 циклотронное, 45
изотропия, 252
импульс, 9
инвариант адиабатический, 91
инверсия координат, 49
индукция магнитного поля, 108
инкремент
 желобковой неустойчивости,
 193, 217–219
- неустойчивости, 173
тиринг-неустойчивости, 249
интеграл
 движения, 124
столкновений, 6, 13, 25
- К**
катушка
 вертикального поля, 127
тороидального поля, 127, 128
квазинейтральность, 9, 55, 56,
 72
кварц, 115
кинетическое уравнение, см.
 уравнение кинетическое
колебания
 альфвеновские, 245
 высокочастотные, 177
 желобковые, 217
 коротковолновые, 177
 линейные, 161, 184
 неустойчивые, 183
 релаксационные, 249
 собственные, 160, 161, 183
 устойчивые, 183
компоненты
 вектора, 15
 нормальная, 180, 181
 плазмы, 11
 тангенциальная, 180
 тензора, 11, 12, 43
континuum колебаний, 245
контуры
 жидкий, 79
 замкнутый, 79
 на магнитной поверхности,
 135, 137
обхода, 137
полоидальный, 137

- тороидальный, 137
- конус потерь, 103
- конфигурация
- бессиловая, 121–124
 - многомерная, 121
 - равновесная, 100, 102, 111, 131, 146, 148, 153, 176
 - с минимумом B , 220
 - с обращённым полем, 141, 147, 158
 - тороидальная, 116
- корона Солнца, 240
- коэффициент
- вязкости, 43, 65, 66
 - диффузии, 55, 56
 - Бома, 58
 - запаса устойчивости, 120, 203
 - магнитной вязкости, 239
 - магнитной диффузии, 78, 239
 - поперечного переноса, 58
 - проводимости, 74
 - температуропроводности, 35
 - теплопроводности, 31, 34, 50, 52
 - термоэлектрической
 - проводимости, 52 - удельного сопротивления, 59
 - электрической проводимости, 40, 62
 - электрической
 - резистивности, 52
- коэффициенты
- кинетические, 24–26, 49
 - Балеску, 69
 - Брагинского, 69
 - переноса, 48
 - транспортные, 24
 - кривизна, 128
 - силовой линии, 110, 128, 178,
- 192, 213, 215, 227
- критерий
- Кадомцева, см. условие конвективной устойчивости
 - конвективной устойчивости, см. условие конвективной устойчивости
- Крускала–Шафранова, 203
- Розенблюта–Лонгмайра, 209, 213, 214, 216, 218, 226, 397, 399
- Сайдема, 204–206
- устойчивости змейки, 202
- устойчивости перетяжки, 197, 198
- Л**
- линеаризация, 182
- линия
- магнитная силовая, 48, 82, 89, 95, 102–104, 107, 114, 119, 120, 123, 131, 134–136, 144, 150–154, 163, 202, 203, 205, 209, 214, 221, 227
 - toka, 102, 110, 137, 144, 213
- ловушка
- адиабатическая, 116, 126
 - открытая, 116, 125, 126, 133, 138, 141, 209, 213, 235
- М**
- максвеллизация, 7
- МГД, 6
- МГД-волна, 70, 160, 174, 192
- МГД-инвариант, 82, 124
- МГД-неустойчивость, 176, 178
- МГД-устойчивость, 109
- метод
- малых колебаний, 178–182

спектральный, 178
 моделирование численное, 85
 момент магнитный, 107
 моменты
 кинетического уравнения, 7,
 13, 14, 17, 25
 функции распределения, 11,
 24, 25

Н

напряжённость
 магнитного поля, 108
 электрического поля, 42
 натяжение
 магнитного поля, 87
 силовой линии, 107, 165, 200,
 201
 неоднородность, 26, 178
 давления, 178
 магнитного поля, 89, 178
 плазмы, 77
 плотности, 26, 178
 скорости, 26
 температуры, 26, 178
 неустойчивость
 гидромагнитная, 177
 гравитационная, 237
 диамагнитная, 173
 диссилативная, 238
 желобковая, 209, 210, 271
 зеркальная, 173, 175, 178
 кинетическая, 177
 Крускала—Шварцшильда,
 362
 перестановочная, 209
 потенциальная, 178, 210
 пучковая, 177
 разрыва, 239
 резистивная, 238, 239

резистивно-гравитационная,
 237
 Рэлея—Тейлора, 191, 193, 242,
 362
 шланговая, 173, 175, 178
 электромагнитная, 178
 электростатическая, 178

О

обвод тора, 128
 большой, 134–136
 малый, 134–136
 объём удельный магнитного
 поля, 132, 226
 оператор, 121, 144, 180, 183
 вещественный, 180, 183
 дифференцирования, 35, 180,
 307
 линейный, 180, 183
 самосопряжённый, 182–186,
 188, 192
 эрмитовый, 182
 описание
 гидродинамическое, 6, 85, 88
 кинетическое, 6, 25
 ортогональность собственных
 функций, 184, 191
 остров магнитный, 141, 149–154,
 240, 242, 249
 ось
 вещественная, 182
 главная, 317
 магнитная, 135, 149, 318
 пинча, 112
 тора, 127, 128, 136, 137, 141,
 142
 отношение
 спектрное, 204
 обратное, 128

- П
пакет волновой, 171
палки Иоффе, 221
парамагнетизм плазмы, 119,
 123
пересоединение
 магнитное, 240
 магнитных силовых линий,
 155, 237, 239, 241, 242
перетяжки, 195–198
пинч, 111, 112
 бессиловой, 125
 винтовой, 112, 118–121, 125
 диффузный, 112, 122–125, 141,
 158, 194, 195, 199
 зет, 112, 113, 116–119, 196, 197
 парамагнитный, 119, 125
 с обращённым полем, 123
 скинированный, 112, 194, 195,
 199, 207
 тета, 110, 112–116
пинчевание, 242
пинч-эффект, 112, 116
пирекс, 115
плазма, 176
 анизотропная, 85, 89, 90, 93,
 94, 98, 99, 103, 140, 172,
 175, 178, 213
 бесстолкновительная, 83, 88
 высокотемпературная, 181
 замагниченная, 48, 59, 96
 заряженная, 10
 изотропная, 11, 77, 102, 114,
 128, 130, 135, 152, 175, 187,
 192
 как диамагнетик, 107, 114,
 119, 128
 как диэлектрик, 61
 как парамагнетик, 119
космическая, 70
лоренцева, 27, 38, 41, 52, 65
неизотропная, 12
полностью ионизованная, 26
простая, 7
с низким давлением, 114
с резкой границей, 193, 219
с холодными электронами, 96
слабоионизованная, 57
стратифицированная, 193
электронная, 10
плотность, 10, 35, 71, 91, 161, 176
зарядов, 108
компоненты плазмы, 10
массовая, 129, 285
toka, 9, 59, 72–74, 102, 108, 111,
 121, 137, 143, 148
электрического заряда, 72
электрического тока, 72
энергии, 93
поверхность
 контура, 137
магнитная, 102, 134–138, 140,
 142, 149, 181, 215
 рациональная, 135, 136, 151,
 158, 209
постоянного давления, 102,
 110
разрыва, 94, 96, 181
показатель политропы, 77, 91
поле гравитационное, 100
поле магнитное, 48, 53, 58, 59,
 61, 63–65, 70, 85–88, 93, 96,
 102, 114, 118, 127, 160, 161,
 163, 181, 213
бессильное, 122, 124, 125
в токамаке, 141–144
вакуумное, 88, 110, 234
вмороженное, 160

- квадрупольное, 221
 корональное, 240
 неоднородное, 209
 полоидальное, 133, 134, 142,
 241, 317
 потенциальное, 125, 218
 с замкнутыми силовыми
 линиями, 381
 тороидальное, 127, 128, 134,
 140, 241, 317
 поле электрическое, 27, 36,
 59–61, 63, 74, 76, 108, 178,
 180, 210
 вихревое, 73
 потенциальное, 73
 холловское, 60, 62, 96, 97
 поляризация, 160
 потенциал электрический, 178
 потенциалы Клебша, 83, 287,
 289, 387
 поток
 вещества, 42
 диффузионный, 55, 56
 импульса, 42, 64, 65, 93
 магнитного поля, 91, 93, 242
 магнитный, 78, 80, 120, 123,
 135, 137, 215
 полоидальный, 137, 138,
 142, 143
 редуцированный, 142
 тороидальный, 137, 138
 массы, 93
 тепла, 24, 33, 51
 ионный, 42
 электронный, 41, 42, 52
 термодинамический, 42
 энергии, 93, 94
 преобразование
 вращательное, 140
 Лоренца, 74
 приближение
 изотермической плазмы, 77
 несжимаемой жидкости, 77
 параксиальное, 216, 229
 принцип
 вариационный, 159, 188–193,
 232
 энергетический, 178, 184–186,
 192, 228, 231
 пробка магнитная, 116, 213
 пробкотрон, 103, 110, 126, 159,
 193, 216, 217, 229
 проводимость, 40, *см. также*
 электропроводность
 удельная, 41
 произведение
 векторное, 5, 162
 прямое, 5, 11, 92
 скалярное, 4, 11
 производная
 лагранжева, 14, 72, 161
 субстанциональная, 14, 16, 72,
 93, 161
 проницаемость
 диэлектрическая, 61
 процессы
 диссипативные, 75
 переноса, 8, 9, 24–26
 классические, 49
 неоклассические, 49
 турбулентные, 49
 псевдотензор, 50
P
 равновесие, 114
 анизотропной плазмы,
 103–108
 бессиловое, 121, 125, 240

- в пинче, 111
в пробкотроне, 159
в токамаке, 126, 137
релаксированное, 154
в торе, 102
глобальное, 10
двумерное, 126, 141
изотропной плазмы, 101–103,
124
механическое, 176
неустойчивое, 176
одномерное, 111
термодинамическое, 8
локальное, 8, 10, 25
полное, 8, 9, 24
- радиус
кривизны, 128, 214, 215
ларморовский, 50, 56, 65
спирали, 120
тора, 142
большой, 127–129
малый, 127, 128
- разрыв плазменного шнура, 197
разряд, 123
ранг тензора, 11
рассеяние электронов на ионах,
7
- реактор термоядерный, 88
релаксация, 7, 125
- С**
самосопряжённость, 182–186,
188, 192
сепаратриса, 249
сечение, 137
магнитной поверхности, 137,
147
меридиональное, 127
плазмы, 128
- полоидальное, 135, 137, 138
тора
большое, 137
малое, 137
тороидальное, 135, 137
транспортное, 36
- сила
Ампера, 6, 9, 70, 73, 74, 100,
102, 114, 163
Брагинского, 15, 17, 39, 45, 46,
51, 61, 69
вязкости, 17, 44, 64, 65
давления, 17
Лоренца, 17, 52, 60, 282, 382
термодинамическая, 42
трения, 17, 37–40, 51, 54, 259
косая, 54
электрическая, 73
- символ Кронекера, 11, 49, 92
синтез термоядерный
управляемый, 115
- система
единиц, 5
изолированная, 101
координат, 161
магнитного удержания, 103
незамкнутая, 8
отсчёта, 74
сопутствующая, 76
с двумя степенями свободы,
91
с одной степенью свободы, 91
уравнений, см. уравнения
- скин-слой, 78
скин-эффект, 68
нелинейный, 99
скорость, 9
альфеновская, 61, 163, 165,
166

- групповая, 165, 171
 - дрейфа, 98, 108
 - градиентного, 108
 - центробежного, 108
 - электрического, 76, 108
 - звука, 77, 116, 129
 - компоненты плазмы, 10, 11
 - массовая, 59
 - потоковая, 9, 10, 38, 42, 71, 285
 - света, 73
 - средняя, 9
 - тепловая, 9, 36, 116
 - фазовая, 170, 175
 - след тензора, 43
 - слой
 - нейтральный, 238–241, 249
 - резистивный, 246–250
 - токовый, 238–240, 246
 - смещение
 - плазмы, 162, 179
 - продольное, 192
 - Шафранова, 146
 - соотношение Беннета, 117
 - сопротивление плазмы, 242
 - состояние
 - неустойчивое, 184
 - равновесное, 161, 183
 - стационарное, 9, 161
 - устойчивое, 184
 - спектр
 - дискретный, 182, 191
 - МГД-колебаний, 182–184
 - непрерывный, 182
 - спираль, 119, 120, 135, 136, 139, 203
 - спиральность магнитная, 123–125, 158
 - срыв в токамаках, 240
 - стабилизация
 - минимумом *B*, 220
 - обратными связями, 224
 - торцами, 223
 - эффектом КЛР, 225
 - столкновения
 - кулоновские, 7, 8, 20, 26, 56
 - частиц одного сорта, 56
 - электрон-электронные, 8
 - суммирование по
 - повторяющимся индексам, 5
 - суперпозиция
 - колебаний, 164, 182
 - линейная, 160
 - сферомак, 141
- Т**
- температура, 9, 10
 - ионов, 8
 - компоненты плазмы, 10, 11
 - электронов, 8
 - тензор, 11
 - второго ранга, 50, 252
 - вязких напряжений, 12, 17, 24, 43, 63, 65
 - давления, 11, 16, 89, 93, 94, 98, 110, 192
 - единичный, 12, 92, 252
 - инвариантный, 11, 49
 - истинный, 50
 - коэффициентов теплопроводности, 49, 50
 - Леви-Чивиты, 49
 - напряжений магнитного поля, 85, 86, 93, 94, 192
 - натяжений магнитного поля, 86
 - потока импульса, 12, 93
 - скорости сдвигов, 44, 63

- теорема
вириала, 100, 101, 110
Остроградского—Гаусса, 13,
15, 79, 87, 93, 308, 352
Стокса, 127
- теория
Балеску, 42
Брагинского, 25, 26, 42
волн в плазме, 160
двух адиабатических
инвариантов, 85
колебаний струны, 164
множеств, 135
теплопроводность, 8, 26–32, 48,
121
косая, 50, 51
поперечная, 50
продольная, 50
электронная, 77
- термоизоляция, 181
- термосила, 17, 36, 37, 37, 42, 46,
51, 52, 96
- тета-пинч, см. пинч
- тиринг-неустойчивость, 153,
237, 240, 241, 249
- ток, 41
азимутальный, 112
в плазме, 59
диамагнитный, 98, 107–110
дрейфовый, 98, 108, 110
индукции, 70
ларморовский, 108, 109
намагничивания, 107, 108
поверхностный, 114, 116, 131,
181
полоидальный, 127, 128, 138,
142, 143
редуцированный, 144
поляризационный, 98, 108
- проводимости, 108
продольный, 112
разряда, 123
смещения, 73
тороидальный, 127, 133, 137
электрический, 51, 61–63
- tokamak, 126, 127, 133, 135, 137,
139, 141, 142, 203, 209, 241,
249
сферический, 141
- топология
магнитного поля, 82, 123
силовых линий, 83, 134, 239
- тор, 116, 126, 127, 132
гофрированный, 132, 133, 209
- торможение электронов на
ионах, 27
- трение, 56
- трубка
газоразрядная, 115, 118
плазменная, 104–106, 130, 132,
209–211, 213, 217, 226,
228–230, 314, 337, 339, 385
- турбулентность, 58, 123, 124
- у
- угол
вращательного
преобразования, 318
тороидальный, 141
- удержание вихревое, 224
- уравнение
альфеновских колебаний,
164, 175
баллонных колебаний, 228
Бесселя, 372
волновое, 167
Грэда—Шафранова, 141,
144–146, 148, 149, 158, 159,
310

- движения, 16, 36, 53, 73, 85
 анизотропной плазмы, 89
 консервативная форма, 98
 дисперсионное, 160, 165, 169,
 170, 174, 207
 диффузии, 35, 55, 77
 кинетическое, 6, 10, 13, 25, 27,
 110
 бесстолкновительное, 91
 Лапласа, 372
 линеаризованное, 162
 линейное, 182
 магнитной силовой линии,
 120
 малых колебаний, 161–163,
 193
 непрерывности, 13, 14, 16, 18,
 19, 55, 72, 92
 переноса тепла, 17, 20, 34, 92
 переноса энергии, 93, 94, 98,
 99
 равновесия, 103, 111, 124, 145
 состояния, 71, 77, 92
 сохранения электрического
 заряда, 72
 теплопроводности, 34
 Фоккера–Планка, 6
 Фурье, 32–36
 Эйлера, 70, 72, 73
- уравнения
 линеаризованные, 179
 магнитной гидродинамики,
 160
 двухжидкостной, 20, 22, 73,
 86
 идеальной, 76, 77, 161, 183
 консервативная форма, 85,
 92, 94
 одножидкостной, 71, 74
- резистивной, 75, 98, 174
 Максвелла, 21, 73
 переноса, 24
 Чу–Голдбергера–Лоу, 91
 условие
 граничное, 85, 94–96, 145, 180,
 191
 линейное, 182
 замыкания токов, 138, 140,
 313, 316
 квазинейтральности, 73
 конвективной устойчивости,
 207, 209–213, 381
 устойчивости
 достаточное, 192
 необходимое, 192
 устойчивость, 176, 183
 малых возмущений, 179
 плазмы, 184
 UTC, 115
- Ф**
 фаза вращения, 89
 флуктуация, 177
 формула Стокса, 80
 функция
 базисная, 190, 234
 Бесселя, 121–123, 372, 410
 Макдональда, 372
 распределения, 7, 9, 10, 25, 98
 бимаксвелловская, 89, 98
 Максвелла, 9, 10, 28, 54
 собственная, 182, 184, 189, 232
 вещественная, 184
 Струве, 410
- Х**
 ХМГД, 97

Ч

частота
круговая, 160
ленгмюровская, 41
собственная, 182–184
столкновений, 27, 39, 48
эффективная, 58
циклонная, 48, 51
ЧГЛ, 91
число зарядовое, 7

Ш

шаг спирали, 119, 120, 136, 203
шафранian, 144
шир магнитного поля, 120, 193,
209, 362, 374

Э

электрическая проводимость,
см. электропроводность
электродинамика плазмы, 108
электропроводность, 40, 96, 238
удельная, 41
элемент
контура интегрирования, 4
объёма, 4, 71
поверхности, 79, 87
силовой линии, 120

энергетический принцип, см.
принцип энергетический

энергия
баллонных колебаний, 232
возмущения, 185–188, 192
желобковых колебаний, 226
кинетическая, 61
магнитного поля, 94, 124, 228,
242

электрического поля, 61
энтропия, 23, 34, 51, 77

эффект
анизотропии, 82
баллонный, 127
вмороженности магнитного
поля, 66, 78
Зеебека, 27
Зеемана, 282
КЛР, 67, 225, 271
Нернста, 264
пинчевания тока, 112
Томсона, 45
Холла, 60, 62, 82, 85, 97
шинный, 126–130
Штарка, 282

Я

яма магнитная, 212, 220

Именной указатель

А

Альфвен, 6, 7, 70,
71, 81, 164
Аракчеев, 5

Б

Балеску, 42, 46, 67,
69, 281
Бейтман, 82, 97,
191, 236

Беклемишев, 5, 225
Бельченко, 5
Беннет, 117
Бернштейн, 186,
188, 191, 236,
345

Бискамп, 250

Бойд, 82

Больцман, 60

Бом, 58

Брагинский, 22, 25,
26, 41, 42, 46,
49, 51, 52, 54,
62, 67, 69, 82,
186, 276

Брейzman, 5

Будкер, 126, 127

Бурдаков, 5

В

Векштейн, 5, 250

Вессон, 139, 158

Волков, 97, 174

Волосов, 5

Вольтер, 124

Г

Голдстон, 250
Грэд, 141, 145, 146,
148, 149, 158,
159, 310

Д

Данжи, 240

З

Зеебек, 27
Зееман, 282

И

Иванов, 5
Ильгисонис, 82,
124

Иоффе, 220–222

К

Кадомцев, 82, 97,
109, 124, 132,
139, 155, 158,
174, 186, 191,
206, 207, 209,
210, 212, 213,
226, 250, 380,
390

Калсруд, 22, 67, 97,

186

Каулинг, 24

Киллин, 240

Клебш, 287

Котельников, 5,
281

Кролл, 174, 225

Крускал, 186, 376

Л

Лаваль, 345

Ландау, 6, 24, 174

Лебедев, 5

Лифшиц, 174

Лонгмайр, 209, 213,
214, 216, 218,
226, 396, 397,
399

Лотов, 5

Лундквист, 186

Люст, 186

М

Максвелл, 86

Марум, 112

Мерсье, 345

Мильштейн, 5

Михайловский,
226

- Н**
Ньюкомб, 236, 402
- О**
Онзагер, 52
- П**
Пеллат, 345
Пойнтинг, 94
Пост, 126
Приходько, 5
- Р**
Резерфорд, 250
Рожанский, 46
Розенблют, 209,
 213, 214, 216,
 218, 225, 226,
 240, 396, 397,
 399
Ростокер, 225
Рубин, 145
Рудаков, 173
Рютов, 2, 5, 127,
 207, 399
- С**
Сагдеев, 173
Сайдем, 204, 206
- Сандерсон, 82
Санин, 5
Серфон, 148
Синицкий, 5
Соловьев, 146, 148,
 158
Спитцер, 24, 41
Стокс, 127
Ступаков, 5
- Т**
Тейлор, 123
Тёрнер, 97
Тимофеев, 5
Тонкс, 112
Трайвелпис, 174
- Ф**
Франк-Каменецкий,
 81
Фридберг, 22, 67,
 82, 98, 109,
 124, 139, 148,
 158, 191, 207,
 236
Фридрихс, 171
Фримен, 186
Фурье, 35
Фюрт, 240
- Х**
Хайн, 186
Хайнс, 25, 67
Хинтон, 22, 67
Холл, 61, 85
Хэрм, 41
- Ц**
Цидулко, 5
- Ч**
Чащин, 5
Чен, 174
Чепмен, 24, 25
Черноштанов, 5
- Ш**
Шафранов, 101,
 141, 145–149,
 158, 159, 310,
 324, 376
Шкуринов, 5
Шлюттер, 186
Шнак, 191
Штарк, 282
- Э**
Энског, 24, 25
Эпперлейн, 25, 67

Список литературы

- [1] Котельников И. А. Лекции по физике плазмы. 2-е изд. М. : Бином — Лаборатория знаний, 2013. 372 с. ISBN: [978-5-9963-1158-3](#).
- [2] Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М. : Изд-во иностр. лит., 1959. 132 с.
- [3] Ши-и Бай. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М. : Мир, 1964. 302 с.
- [4] Jeffrey A. Magnetohydrodynamic. NY : Interscience Publishers Inc., John Wiley and Sons, Inc., 1966. 262 p. ISBN: [0123825504](#).
- [5] Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М. : Мир, 1967. 320 с.
- [6] Бейтман Г. МГД-неустойчивости / под ред. Шафранова В. Д. М. : Энергоиздат, 1982. 198 с.
- [7] Половин Р. В., Демуцкий В. П. Основы магнитной гидродинамики. М. : Энергоатомиздат, 1987. 207 с.
- [8] Freidberg J. P. Ideal Magnetohydrodynamics. NY ; L : Plenum Press, 1987. 489 p. ISBN: [9780306425127](#).
- [9] Goedbloed J. P., Poedts S. Principles of Magnetohydrodynamics. Cambridge : Cambridge University Press, 2004. 634 p. ISBN: [0 521 62347 2](#).
- [10] Freidberg J. P. Plasma Physics and Fusion Energy. Cambridge University Press, 2007. 671 p. ISBN: [9780521851077](#).
- [11] Schnack D. D. Lectures in Magnetohydrodynamics. Springer, 2009. 340 p. ISBN: [3642006876](#).
- [12] Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. 2-е изд. М. : Логос, 2011. 328 с. ISBN: [978-5-94010-556-5](#).
- [13] Freidberg J. P. Ideal MHD. Revised ed. Cambridge, United Kingdom : Cambridge University Press, 2014. 722 p. ISBN: [978-1-107-00625-6](#).
- [14] Альфвен Х. Космическая электродинамика. М. : Изд-во иностр. лит., 1952. 290 с.
- [15] Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории

- плазмы / под ред. Леоновича М. А. М. : Атомиздат, 1963. Т. 1. С. 183–272.
- [16] Шафранов В. Д. Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / под ред. Леоновича М. А. М. : Атомиздат, 1963. Т. 2. С. 92–131.
- [17] Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы / под ред. Леоновича М. А. М. : Атомиздат, 1963. Т. 2. С. 132–176.
- [18] Волков Т. Ф. Гидродинамическое описание сильноразреженной плазмы // Вопросы теории плазмы / под ред. Леоновича М. А. М. : Атомиздат, 1964. Т. 4. С. 3–19.
- [19] Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. Замкнутые магнитные конфигурации для удержания плазмы // Вопросы теории плазмы / под ред. Леоновича М. А. М. : Атомиздат, 1967. Т. 5. С. 3–208.
- [20] Альфвен Х., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика: Основные принципы. 2-е изд. М. : Мир, 1967. 260 с.
- [21] Соловьев Л. С. Гидромагнитная устойчивость замкнутых плазменных конфигураций // Вопросы теории плазмы / под ред. Леоновича М. А. М. : Атомиздат, 1972. Т. 5. С. 210–290.
- [22] Морозов А. И., Соловьев Л. С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / под ред. Леоновича М. А. М. : Атомиздат, 1974. Т. 8. С. 3–87.
- [23] Михайловский А. Б. Нейстабильности плазмы в магнитных ловушках. М. : Атомиздат, 1978. 298 с.
- [24] Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. М. : Ленанд, 2018. 320 с. ISBN: [978-5-9710-5018-6](#).
- [25] Калсруд Р. Магнитогидродинамическое описание плазмы // Основы физики плазмы / под ред. Розенблюта Р. З. Сагдеева и М. М. : Энергоатомиздат, 1983. Т. 1. С. 122–151.
- [26] Бернштейн А. Вариационный принцип для задач устойчивости в идеальной магнитогидродинамике // Основы физики плазмы / под ред. Галеева А. А., Судана Р. М. : Энергоатомиздат, 1983. Т. 1. С. 365–392.
- [27] Кингсеп А. С., Чукбар К. В., Яньков В. В. Электронная магнитная гидродинамика // Вопросы теории плазмы / под ред. Кадомцева Б. Б. М. : Энергоатомиздат, 1987. Т. 16. С. 209–250.
- [28] Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. 2-е изд. М. : Наука, 1988. 303 с. ISBN: [5-02-014199-0](#).

- [29] Goldston Robert J., Rutherford Paul H. Introduction to Plasma Physics. Bristol : IOP Publishing Ltd., 1995. 493 p. ISBN: 0-7503-0325-5.
- [30] Boyd T., Sanderson J. The Physics of Plasmas. Cambridge, 2003. 546 p. ISBN: 978-0-511-07733-3.
- [31] Stacey W. M. Fusion Plasma Physics. John Wiley & Sons, 2005. 561 p. ISBN: 3527405860.
- [32] Прист Э., Форбс Т. Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения. М. : Физматлит, 2005. 592 с. ISBN: 5-9221-0502-7.
- [33] Морозов А. И. Введение в плазмодинамику. М. : Физматлит, 2006. 576 с. ISBN: 5-9221-0681-3.
- [34] Рожанский В. А. Теория плазмы. СПб. : Лань, 2012. 320 с. ISBN: 978-5-8114-1233-4.
- [35] Vekstein Grigory. Physics of Continuous Media: Problems and Solutions in Electromagnetism, Fluid Mechanics and MHD. 2nd ed. CRC Press, 2013. 252 p. ISBN: 978-1-4665-1763-9.
- [36] Ильгисонис В. И. Классические задачи физики горячей плазмы. М. : Издат. дом МЭИ, 2015. 326 с. ISBN: 978-5-383-01011-2.
- [37] O'Neil T. M. Nonneutral Plasmas Have Exceptional Confinement Properties // Comments Plasma Phys. Contr. Fusion. 1980. Vol. 5, no. 5. P. 213–217.
- [38] Malmberg J. H., Driscoll C. F. Long-Time Containment of a Pure Electron Plasma // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 44. P. 654–657. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.44.654>.
- [39] Gauss C. F. Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata // Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores. 1813. Vol. 2. P. 355–378.
- [40] Ostrogradsky M. V. Note sur les intégrales définies // Mém. de l'Acad. des sci. de St.-Petersbourg. VI Ser. 1831. Vol. 1. P. 129–133.
- [41] Хинтон Ф. Явление переноса в столкновительной плазме // Основы физики плазмы / под ред. Розенблюта Р. З. Сагдеева и М. М. : Энергоатомиздат, 1983. Т. 1. С. 152–200.
- [42] Chapman S. On the law of distribution of molecular velocities, and on the theory viscosity and thermal conduction, in a non-uniform simple monoatomic gas // Philos. Trans. R. Soc. London. 1916. Vol. 216. P. 279–348.
- [43] Enskog D. Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen : diss. Ph. D. ; Uppsala University. Uppsala, 1917. 160 S.

- [44] Chapman S., Cowling T. G. The Mathematical Theory of NonUniform Gases. Cambridge : Cambridge University Press, 1939. 404 p.
- [45] Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М. : Изд-во иностр. лит., 1960. 511 с.
- [46] Cowling T. G. The Electrical Conductivity of an Ionized Gas in a Magnetic Field, with Applications to the Solar Atmosphere and the Ionosphere // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1945. Vol. 183. P. 453–479.
- [47] Landau L. D. Die kinetische gleichung für den fall Coulombscher vechselwirkung // Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion. 1936. Vol. 10, no. 1. P. 154–164.
- [48] Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 203–209.
- [49] Spitzer L., Härm R. Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas // Phys. Rev. 1953. Vol. 89. P. 977–981. Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.89.977>.
- [50] Брагинский С. И. Явление переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 459.
- [51] Брагинский С. И. О поведении полностью ионизованной плазмы в сильном магнитном поле // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 645.
- [52] Epperlein E. M. The accuracy of Braginskii's transport coefficients for a Lorentz plasma // Phys. Fluids. 1984. Vol. 17. P. 1823–1827.
- [53] Epperlein E. M., Haines M. G. Plasma transport coefficients in a magnetic field by direct numerical solution of the Fokker-Planck equation // Phys. Fluids. 1986. Vol. 29. P. 1029–1041.
- [54] Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. 2-е изд. М. : Изд-во иностр. лит., 1965. 212 с.
- [55] Balescu R. Transport Processes in Plasmas. Classical transport theory. Elsevier Science, 1988. Vol. 1. 331 p. ISBN: [0-444-87091-1](https://doi.org/10.1016/B978-0-444-87091-1.00001-1).
- [56] Thomson William. On a mechanical theory of thermoelectric currents // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1851. P. 91–98.
- [57] Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I // Phys. Rev. 1931. Vol. 37, no. 4. P. 405–426.
- [58] Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. II // Phys. Rev. 1931. Vol. 38, no. 12. P. 2265–2279.
- [59] O'Neil T. M., Driscoll C. F. Transport to thermal equilibrium of a pure electron plasma // Phys. Fluids. 1979. Vol. 22, no. 2. P. 266–277. Access mode: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.862577>.
- [60] Bohm D. Minimum ionic kinetic energy for a stable sheath // The Characteristic of Electrical Discharges in Magnetic Fields / ed. by Guthrie A.,

- Wakerling R. K. NY : McGraw-Hill Book Company, Inc., 1949. Vol. 5 of National Nuclear Energy Series. P. 197.
- [61] Spitzer Lyman Jr. Particle Diffusion across a Magnetic Field // *Phys. Fluids*. 1960. Vol. 3. P. 659–661.
- [62] Hall E. On a New Action of the Magnet on Electric Currents // *American Journal of Mathematics*. 1879. Vol. 2. P. 287–292.
- [63] Alfven H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves // *Nature*. 1942. Vol. 150. P. 405–406.
- [64] Stokes G. Mathematical and Physical Papers. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1905. Vol. 5. P. 320.
- [65] Alfvén H. On the Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves // *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik*. 1943. Vol. 29, no. 2. P. 1–7.
- [66] Alfvén H., Fälthammar C.-G. Cosmical Electrodynamics: Fundamental Principles. Oxford : Clarendon Press, 1963. 228 p.
- [67] Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. 2-е изд. М. : Атомиздат, 1968. 286 с.
- [68] Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E. The Boltzmann Equation and the One-Fluid Hydromagnetic Equations in the Absence of Particle Collisions // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1956. Vol. 236. P. 112–118.
- [69] Turner L. Hall Effects on Magnetic Relaxation // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1986. Vol. 14, no. 6. P. 849–857.
- [70] Clausius R. XVI. On a mechanical theorem applicable to heat // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1870. Vol. 40, no. 265. P. 122–127. Access mode: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14786447008640370>.
- [71] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособие в 10 т. 2-е изд. М. : Наука, 1982. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. 485 с.
- [72] Proceedings of the Fourth International Conference on Dense Z pinches / ed. by Pereira N. R., Davis J., Pulsifer P. E. Vancouver : American Institute Physics. 1997. Vol. 409 of AIP Conf. Proc. P. ii.
- [73] Pollock J. A., Barracough S. H. Note on a hollow lightning conductor crushed by the discharge // *Proc. Roy. Soc. New South Wales*. 1905. Vol. 39. P. 131.
- [74] Northrup E. F. Some Newly Observed Manifestations of Forces in the Interior of an Electric Conductor // *Phys. Rev. (Ser. I)*. 1907. Vol. 24. P. 474–497. Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevSeriesI.24.474>.

- [75] Tonks L. Theory and Phenomena of High Current Densities in Low Pressure Arcs // *Transactions of The Electrochemical Society*. 1937. Vol. 72, no. 1. P. 167–182. Access mode: <http://jes.ecsdl.org/content/72/1/167.abstract>.
- [76] Арцимович Л. А. О состоянии исследований по управляемым термоядерным реакциям // *Успехи физических наук*. 1962. Т. 76, № 1. С. 11–20. Режим доступа: <http://ufn.ru/ru/articles/1962/1/b/>.
- [77] Котельников И. А. Основы физики плазмы. 3-е изд. СПб. : Лань, 2021. Т. 1 из Лекции по физике плазмы. 395 с. ISBN: 978-5-8114-6958-1.
- [78] Bennett W. H. Magnetically self-focussing streams // *Phys. Rev.* 1934. Vol. 45, no. 12. P. 890.
- [79] Ryutov D. D., Derzon M. S., Matzen M. K. The physics of fast Z pinches // *Rev. Mod. Phys.* 2000. Vol. 72. P. 167–223. Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.72.167>.
- [80] Taylor J. B. Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields // *Phys. Rev. Lett.* 1974. Vol. 33. P. 1139–1141. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.33.1139>.
- [81] Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1958. Vol. 44, no. 6. P. 489–491.
- [82] Рютов Д. Д. Термояд — область, открытая для новых идей // Энергия — импульс. 1993. № 10(51). С. 3–5. Режим доступа: http://www.inp.nsk.su/news/journal/1993_10.pdf (дата обращения: 30.03.2016).
- [83] Кадомцев Б. Б. О гидродинамике плазмы низкого давления // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М. : Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 16–23. Работа выполнена в 1957 г.
- [84] Confinement of a toroidal theta-pinch plasma in a periodic caulked-cusp field / Uchida T., Sato K., Mohri A., and Akiyama R. // Proc. of Madison Conf. on Plasma Physics and CTR / IAEA. 1971. Vol. 3. P. 169–177.
- [85] Kadomtsev B. B. Tokamak plasma: a complex physical system. Bristol and Philadelphia : Inst. of Physics Publishing Inc., 1992. ISBN: 978-0750302340.
- [86] Wesson J., Campbell D. J. Tokamaks. 4th ed. Oxford University Press, 2011. 811 p. ISBN: 0-19-8509227.
- [87] Шафранов В. Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1957. Т. 33, № 3. С. 710–722.

- [88] Grad H., Rubin H. Hydromagnetic Equilibria and Force-Free Fields // Proceedings of the Second United Nations Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy / United Nations. Geneva, Switzerland. 1958. Vol. 31. P. 190–197.
- [89] Шафранов В. Д. Равновесие тороидального плазменного шнуря в магнитном поле // Атомная энергия. 1962. Т. 13, № 6. С. 521–529. Режим доступа: elib.biblioatom.ru/text/atomnaya-energiya_t13-6_1962/0000.
- [90] Соловьев Л. С. К теории гидромагнитной устойчивости тороидальных плазменных конфигураций // ЖЭТФ. 1968. Т. 53, № 2. С. 626–643.
- [91] Kolb A. C., Dobbie C. B., Griem H. R. Field Mixing and Associated Neutron Production in a Plasma // *Phys. Rev. Lett.* 1959. Vol. 3. P. 5–7. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.3.5>.
- [92] Cerfon Antoine J., Freidberg Jeffrey P. “One size fits all” analytic solutions to the Grad-Shafranov equation // *Physics of Plasmas (1994-present)*. 2010. Vol. 17. P. 032502. Access mode: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/17/3/10.1063/1.3328818>.
- [93] Stix T. H. Magnetic Braiding in a Toroidal Plasma // *Phys. Rev. Lett.* 1973. Vol. 30. P. 833–835. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.833>.
- [94] Regime of Improved Confinement and High Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak / Wagner F., Becker G., Behringer K., Campbell D., Eberhagen A., Engelhardt W., Fussmann G., Gehre O., Gernhardt J., Gierke G. V., Haas G., Huang M., Karger F., Keilhacker M., Klüber O., Kornherr M., Lackner K., Lisi-tano G., Lister G. G., Mayer H. M., Meisel D., Müller E. R., Murmann H., Niedermeyer H., Poschenrieder W., Rapp H., Röhr H., Schneider F., Siller G., Speth E., Stäbler A., Steuer K. H., Venus G., Vollmer O., and Yü Z. // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49. P. 1408–1412. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1408>.
- [95] Natural current profiles in Tokamaks : Preprint : IPP 6/258 / Max-Planck-Institut für Plasmaphysik ; executor: Biskamp D. Garching : 1986. 8 p. Access mode: <http://pubman.mpdl.mpg.de/pubman/item/escidoc:2131947:1/component/escidoc:2131946/IPP-6-258.pdf>.
- [96] Кадомцев Б. Б. Самоорганизация плазмы токамака // Известия вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 1032–1040.
- [97] Hsu J. Y., Chu M. S. The tokamak equilibrium profile // *The Physics*

- of Fluids. 1987. Vol. 30, no. 4. P. 1221–1224. Access mode: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.866273>.
- [98] Tuszewski M. Field reversed configurations // Nuclear Fusion. 1988. Vol. 28, no. 11. P. 2033. Access mode: <http://stacks.iop.org/0029-5515/28/i=11/a=008>.
- [99] Сивухин В. Д. О конической рефракции магнитозвуковых волн. // Магнитная гидродинамика. 1966. № 1. С. 35–42.
- [100] Tsiklauria D. On the conical refraction of hydromagnetic waves in plasma with anisotropic thermal pressure // Physics of Plasmas. 1996. Vol. 3, no. 3. P. 800–803. Access mode: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/3/3/10.1063/1.871780> (online; accessed: 12.01.2014).
- [101] Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. О квазигидродинамическом описании разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / под ред. Леонтovichа М. А. М. : АН СССР, 1958. Т. 3. С. 268–277. Работа выполнена в 1957 г.
- [102] Веденов А. А., Сагдеев Р. З. О некоторых свойствах плазмы с анизотропным распределением скоростей ионов в магнитном поле // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / под ред. Леонтovichа М. А. М. : АН СССР, 1958. Т. 3. С. 278–284.
- [103] Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Устойчивость плазмы // УФН. 1961. Т. 73, № 4. С. 701–766.
- [104] Furth H. R. Prevalent Instability of Nonthermal Plasmas // Phys. Fluids. 1963. Vol. 6, no. 1. P. 48–57.
- [105] Чен Ф. Введение в физику плазмы. М. : Мир, 1987. 398 с. ISBN: 978-5-458-37276-3.
- [106] Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы / под ред. Дыхне А. М. М. : Мир, 1975. 527 с. ISBN: 978-5-7262-0877-0.
- [107] Laval G., Mercier C., Pellat R. Necessity of the energy principles for magnetostatic stability // Nuclear Fusion. 1965. Vol. 5, no. 2. P. 156. Access mode: <http://stacks.iop.org/0029-5515/5/i=2/a=007>.
- [108] Spies G. O. Stability criteria and the maximum growth rate in magnetohydrodynamics // Physics of Fluids. 1974. Vol. 17, no. 11. P. 2019–2024. Access mode: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof1/17/11/10.1063/1.1694660>.
- [109] An Energy Principle for Hydromagnetic Stability Problems / Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., and Kulsrud R. M. // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1958. Vol. 244. P. 17. Access mode: [http:](http://)

- //rspa.royalsocietypublishing.org/content/244/1236/17.short (online; accessed: 06.10.2013).
- [110] Lundquist S. On the Stability of Magneto-Hydrostatic Fields // *Phys. Rev.* 1951. Vol. 83. P. 307–311. Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.83.307>.
 - [111] Брагинский С. И., Кадомцев Б. Б. Стабилизация плазмы с помощью охраняющих проводников // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / под ред. Леонтовича М. А. М. : Изд-во Академии наук СССР, 1958. Т. 3. С. 300–326.
 - [112] Hain K., Lust R., Schlüter A. Zur Stabilität eines Plasmas // *Zeitschrift für Naturforschung A*. 1957. Bd. 12, nu. 10. S. 833–841. online; abgerufen: <http://www.degruyter.com/view/j/zna.1957.12.issue-10/zna-1957-1011/zna-1957-1011.xml>.
 - [113] Хайн К., Люст Р., Шлютер А. Об устойчивости плазмы // Управляемые термоядерные реакции. М. : Атомиздат, 1960. С. 165.
 - [114] Шафранов В. Д. Об устойчивости плазменного шнуря при наличии продольного магнитного поля и проводящего кожуха // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М. : Изд-во АН СССР, 1958. Т. 2. С. 130–143. Работа выполнена в 1953 г.
 - [115] Kruskal M, Tuck J. L. The instability of a pinched fluid with a longitudinal magnetic field // Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences. 1958. Vol. 245, no. 1241. P. 222–237. Access mode: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/245/1241/222.abstract>.
 - [116] Suydam B. R. Stability of a Linear Pinch // Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva : United Nations. 1958. Vol. 31. P. 157–159.
 - [117] Ryutov D. D., Cohen R. H., Pearlstein L. D. Stability of a finite-length screw pinch revisited // *Physics of Plasmas*. 2004. Vol. 11, no. 10. P. 4740–4752. Access mode: <https://doi.org/10.1063/1.1781624>.
 - [118] Rosenbluth M. N., Longmire C. L. Stability of plasmas confined by magnetic fields // *Annals of Physics*. 1957. Vol. 1, no. 2. P. 120–140. Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491657900556>.
 - [119] Об уходе плазмы из ловушки с магнитным пробками / Иоффе М. С., Соболев Р. И., Тельковский В. Г. и Юшманов Е. Я. // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 40–48.
 - [120] Иоффе М. С., Юшманов Е. Е. Экспериментальное исследование

- неустойчивости плазмы в ловушке с магнитными пробками // Ядерный синтез. Дополнение, часть 1. 1962. С. 177–182.
- [121] Готт Ю. В., Иоффе М. С., Тельковский В. Г. Некоторые новые результаты по удержанию плазмы в магнитной ловушке // Ядерный синтез. Дополнение 1962, ч. 3. 1961. С. 1045.
- [122] Исследование удержания плазмы в ловушке с магнитными пробками / Иоффе М. С., Соболев Р. И., Тельковский В. Г. и Юшманов Е. Е. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 1602–1611.
- [123] Modification of the macroscopic stability of a tandem mirror by partial line-tying / Molvik A. W., Breun R. A., Golovato S. N., Hershkowitz Noah, McVey B., Post R. S., Smatlak D., and Yujiri L. // *The Physics of Fluids*. 1984. Vol. 27, no. 11. P. 2711–2722. Access mode: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.864575>.
- [124] Stable operation of an effectively axisymmetric neutral beam driven tandem mirror / Molvik A. W., Barter J. D., Buchenauer D. A., Casper T. A., Correll D. L., Dimonte G., Falabella S., Foote J. H., and Pincosy P. A. // *Nuclear Fusion*. 1990. Vol. 30, no. 5. P. 815–830. Access mode: <https://doi.org/10.1088/0029-5515/30/5/002>.
- [125] Kunkel W. B., Guillory J. U. Interchange stabilization by incomplete line-tying // Proceeding of the Seventh Conference on the Phenomena in Ionized Gases / ed. by Perovic B., Tasic D. ; Belgrade, 1965. Gradevinska Knjiga, Belgrade, Yugoslavia. 1966. P. 702.
- [126] Magneto-hydrodynamically stable axisymmetric mirrors / Ryutov D. D., Berk H. L., Cohen B. I., Molvik A. W., and Simonen T. C. // *Physics of Plasmas*. 2011. Vol. 18, no. 9. P. 092301. Access mode: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/18/9/10.1063/1.3624763>.
- [127] Арсенин В. В., Чуянов В. А. Подавление неустойчивостей плазмы методом обратных связей // *Успехи физических наук*. 1977. Т. 123, № 9. С. 83–129. Режим доступа: <http://ufn.ru/ru/articles/1977/9/d/>.
- [128] Active feedback stabilization of the flute instability in a mirror machine using field-aligned coils / Lifshitz A., Beéry I., Fisher A., Ron A., and Fruchtman A. // *Nuclear Fusion*. 2012. Vol. 52, no. 12. P. 123008. Access mode: <https://doi.org/10.1088/0029-5515/52/12/123008>.
- [129] Experiments with Controllable Application of Radial Electric Fields in GDT Central Cell / Bagryansky P. A., Lizunov A. A., Zuev A. A., Kolesnikov E. Yu., and Solomachin A. L. // *Fusion Science and Technology*. 2003. Vol. 43, no. 1T. P. 152–156. Access mode: <https://doi.org/10.13182/FST03-A11963583>.

- [130] Bagryansky P. A., Beklemishev A. D., Soldatkina E. I. Influence of Radial Electric Field on High-Beta Plasma Confinement in the Gas Dynamic Trap // *Fusion Science and Technology*. 2007. Vol. 51, no. 2T. P. 340–342. Access mode: <https://doi.org/10.13182/FST07-A1395>.
- [131] Beklemishev A. D. Shear-flow Effects in Open Traps // *AIP Conference Proceedings*. 2008. Vol. 1069, no. 1. P. 3–14. Access mode: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.3033729>.
- [132] Vortex Confinement of Plasmas in Symmetric Mirror Traps / Beklemishev A. D., Bagryansky P. A., Chaschin M. S., and Soldatkina E. I. // *Fusion Science and Technology*. 2010. Vol. 57, no. 4. P. 351–360. Access mode: <https://doi.org/10.13182/FST10-A9497>.
- [133] Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N. Finite Larmor radius stabilization of “weakly” unstable confined plasmas // *Nuclear Fusion*. 1962. Vol. Suppl., Part 1. P. 143–150. Access mode: <http://www-naeweb.iaea.org/napc/physics/FEC/1961.pdf>.
- [134] Roberts K. V., Taylor J. B. Magnetohydrodynamic Equations for Finite Larmor Radius // *Phys. Rev. Lett.* 1962. Vol. 8. P. 197–198. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.8.197>.
- [135] Рудаков Л. И. Влияние вязкости плазмы в магнитном поле на устойчивость плазмы // *Nuclear Fusion*. 1962. Т. 2, № 1-2. С. 107–108. Режим доступа: <https://doi.org/10.1088/0029-5515/2/1-2/016>.
- [136] Бушкова О. А., Мирнов В. В. Влияние конфигурации магнитного поля на МГД устойчивость газодинамической ловушки // Вопросы атомной науки и техники, сер. Термоядерный синтез. 1986. № 2. С. 19–24.
- [137] Kotelnikov Igor, Zeng Qiusun. On the stability of small-scale ballooning modes in mirror traps [Electronic resource online]. 2020. arXiv : physics.plasm-ph/2011.14555.
- [138] Results of Recent Experiments on GDT Device After Upgrade of Heating Neutral Beams / Ivanov A. A., Beklemishev A. D., Kruglyakov E. P., Bagryansky P. A., Lizunov A. A., Maximov V. V., Murakhtin S. V., and Prikhodko V. V. // *Fusion Science and Technology*. 2010. Vol. 57, no. 4. P. 320–325. Access mode: <https://doi.org/10.13182/FST10-A9493>.
- [139] Stabilization of an axisymmetric mirror cell and trapped particle modes / Berk H. L., Horton C. W. Jr., Rosenbluth M. N., Wong H. V., Kesner J., Lane B., Jr. T. M. Antonsen, Tsang K. T., Lee X. S., Hafizi B., Byers J. A., Cohen R. H., Hammer J. H., Nevins W. M., Kaiser T. B., Llestrostro L., Pearlstein L. D., Smith G. R., Ramachandran R., and Tang W. M. // *Plasma physics and controlled nuclear fusion research*

- 1984 / IAEA. Vienna (Austria) : Nuclear Fusion, Suppl. 1985. Vol. 2. P. 321–335. Access mode: http://www-naweb.iaea.org/napc/physics/FEC/STIPUB670_VOL2.pdf.
- [140] Stabilization of an axisymmetric tandem mirror cell by a hot plasma component / Berk H. L., Rosenbluth M. N., Wong H. Vernon, and Antonsen T. M. // *The Physics of Fluids*. 1984. Vol. 27, no. 11. P. 2705–2710. Access mode: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.864574>.
- [141] D’Ippolito D. A., Myra J. R. Stability of mirrors with inverted pressure profiles // *The Physics of Fluids*. 1984. Vol. 27, no. 9. P. 2256–2263. <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.864880>.
- [142] Kaiser T. B., Pearlstein L. D. Finite Larmor radius and wall effects on the $M=1$ ballooning mode at arbitrary beta in axisymmetric tandem mirrors // *The Physics of Fluids*. 1985. Vol. 28, no. 3. P. 1003–1005. Access mode: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.865092>.
- [143] Kesner J. Axisymmetric, wall-stabilized tandem mirrors // *Nuclear Fusion*. 1985. Vol. 25, no. 3. P. 275–282. Access mode: <https://doi.org/10.1088/0029-5515/25/3/004>.
- [144] Li Xing-Zhong, Kesner J., Lane B. Conducting-wall and pressure profile effect on MHD stabilization of axisymmetric mirror // *Nuclear Fusion*. 1985. Vol. 25, no. 8. P. 907–917. Access mode: <https://doi.org/10.1088/0029-5515/25/8/004>.
- [145] Li Xing Zhong, Kesner J., Lane B. MHD stabilization of a high beta mirror plasma partially enclosed by a conducting wall // *Nuclear Fusion*. 1987. Vol. 27, no. 1. P. 101–107. Access mode: <https://doi.org/10.1088/0029-5515/27/1/008>.
- [146] Li Zing-Zhong, Kesner J., LoDestro L. L. Wall stabilized high beta mirror plasma in a rippled magnetic field // *Nuclear Fusion*. 1987. Vol. 27, no. 8. P. 1259–1266. Access mode: <https://doi.org/10.1088/0029-5515/27/8/007>.
- [147] LoDestro L. L. The rigid ballooning mode in finite-beta axisymmetric plasmas with diffuse pressure profiles // *The Physics of Fluids*. 1986. Vol. 29, no. 7. P. 2329–2332. <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.865572>.
- [148] Arsenin V. V., Kuyanov A. Yu. Stabilization of $m = 1$ MHD modes in axisymmetric mirror devices with $\beta \sim 1$ plasma // *Plasma Physics Reports*. 1996. Vol. 22, no. 8. P. 638–642.
- [149] Newcomb W. A. Equilibrium and stability of collisionless systems in the paraxial limit // *J. Plasma Physics*. 1981. Vol. 26, no. 3. P. 529–584.

- [150] Parker E. N. Topological dissipation and the small-scale fields in turbulent gases // *The Astrophysical Journal*. 1972. Vol. 174. P. 499.
- [151] Furth H. P., Killeen J., Rosenbluth M. N. Finite-Resistivity Instabilities of a Sheet Pinch // *Physics of Fluids*. 1963. Vol. 6, no. 4. P. 459–484. Access mode: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof1/6/4/10.1063/1.1706761>.
- [152] Dungey J. W. LXXVI. Conditions for the occurrence of electrical discharges in astrophysical systems // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1953. Vol. 44, no. 354. P. 725–738. Access mode: <https://doi.org/10.1080/14786440708521050>.
- [153] Biskamp D. Magnetic reconnection in plasmas // *Astrophysics and Space Science*. 1997. Vol. 242. P. 165–207. Access mode: <https://doi.org/10.1007/BF00645113> (online; accessed: 2020/08/10).
- [154] Vekstein G. Forced magnetic reconnection // *Journal of Plasma Physics*. 2017. Vol. 83, no. 5. P. 205830501.
- [155] Кадомцев Б. Б. Перезамыкание магнитных силовых линий // *УФН*. 1987. Т. 151, № 1. С. 3–30. Режим доступа: <http://ufn.ru/ru/articles/1987/1/a/> (дата обращения: 05.01.2013).
- [156] Schottky W. Diffusionstheorie der positiven Säule // *Phys. Zeits.* 1924. Vol. 25, no. 23. P. 635.
- [157] Einstein A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen // *Annalen der Physik*. 1905. Bd. 322, nu. 8. S. 549–560.
- [158] Geissler K. H. Classical and Anomalous Diffusion of an Afterglow Plasma // *Phys. Rev.* 1968. Vol. 171, no. 1. P. 179–180.
- [159] Kotelnikov I. A. Braginskii and Balescu kinetic coefficients for electrons in Lorentzian plasma // *Plasma Physics Reports*. 2012. Vol. 38, no. 8. P. 608–619. Original Russian Text © I. A. Kotelnikov, 2012, published in *Fizika Plazmy*, 2012, Vol. 38, No. 8, pp. 665–676. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1134/S1063780X12080156>.
- [160] Strutt J. W. Lord Rayleigh. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // *Proceedings of the London mathematical society*. 1883. Vol. 14. P. 170–177. Access mode: <https://www.irphe.univ-mrs.fr/~clanet/otherpaperfile/articles/Rayleigh/rayleigh1883.pdf> (online; accessed: 24.01.2013).
- [161] Taylor G. The Instability of Liquid Surfaces when Accelerated in a Direction Perpendicular to their Planes. I // *Proceeding of*

- the Royal Society A. 1950. Vol. 201, no. 1065. P. 192–196.
Access mode: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/201/1065/192> (online; accessed: 2014-01-12).
- [162] Wolfram.com. Wolfram Mathematica. 2016. Access mode: <http://Wolfram.com>.
- [163] Vekstein G., Bian N. H. Hall assisted forced magnetic reconnection // *Physics of Plasmas*. 2006. Vol. 13, no. 12. P. 122105. <https://doi.org/10.1063/1.2398933>.

Оглавление

3 | Предисловие

6 | Лекция 16
Плазма как сплошная среда

- §16.1 Динамика установления равновесия 7
- §16.2 Моменты функции распределения 10
- §16.3 Моменты кинетического уравнения 13
- §16.4 Уравнение непрерывности 13
- §16.5 Уравнение движения 14
- §16.6 Уравнение переноса тепла 17
- §16.7 Двухжидкостная магнитная гидродинамика 20
- Литература 22
- Задачи и вопросы 22

24 | Лекция 17
Процессы переноса

- §17.1 Кинетические коэффициенты 25
- §17.2 Теплопроводность плазмы 26
- §17.3 Уравнение Фурье 32
- §17.4 Термосила 36
- §17.5 Сила трения 37
- §17.6 Электропроводность плазмы 40
- §17.7 *Электронный поток тепла 41
- §17.8 *Вязкость плазмы 42
- §17.9 *Выделение тепла 44
- Литература 46
- Задачи и вопросы 46

48

Лекция 18

Процессы переноса в магнитном поле

- §18.1 Кинетические коэффициенты в магнитном поле 49
- §18.2 Амбиполярная диффузия 53
- §18.3 Бомовская диффузия 58
- §18.4 Обобщённый закон Ома 59
- §18.5 Эффект Холла 60
- §18.6 Переменный ток в плазме 62
- §18.7 *Вязкость плазмы в магнитном поле 63
- Литература 67
- Задачи и вопросы 67

70

Лекция 19

Одножидкостная магнитная гидродинамика

- §19.1 Теория Альфвена 71
- §19.2 Резистивная магнитная гидродинамика 75
- §19.3 Идеальная магнитная гидродинамика 75
- §19.4 Вмороженность и диффузия магнитного поля 77
- Литература 82
- Задачи и вопросы 83

85

Лекция 20

Гидродинамика анизотропной плазмы

- §20.1 Тензор напряжений магнитного поля 85
- §20.2 Анизотропное давление 88
- §20.3 Адиабаты Чу—Голдбергера—Лоу 90
- §20.4 Консервативная форма МГД-уравнений 92
- §20.5 Границные условия на поверхности разрыва 94
- §20.6 *Холловская магнитная гидродинамика 96
- Литература 97
- Задачи и вопросы 98

100

Лекция 21

Равновесие плазмы

- §21.1 Теорема вириала 100
- §21.2 Равновесие изотропной плазмы 101

- §21.3 Равновесие анизотропной плазмы *103*
- §21.4 Плазма как диамагнетик *107*
 - Литература *109*
 - Задачи и вопросы *110*

111

Лекция 22
Пинчи

- §22.1 Равновесие в пинче *111*
- §22.2 Тета-пинч *112*
- §22.3 Зет-пинч *116*
- §22.4 Винтовой пинч *118*
- §22.5 Бессиловые конфигурации *121*
 - Литература *124*
 - Задачи и вопросы *124*

126

Лекция 23
Токамаки

- §23.1 Шинный эффект *126*
- §23.2 Удельный объём магнитного поля *130*
- §23.3 Тороидальный ток *133*
- §23.4 Магнитные поверхности *134*
 - Литература *139*
 - Задачи и вопросы *139*

141

Лекция 24
Двумерные равновесия

- §24.1 Магнитное поле в токамаке *141*
- §24.2 Уравнение Грэда—Шафранова *144*
- §24.3 Решение Соловьёва *146*
- §24.4 Магнитные острова *149*
- §24.5 *Релаксированное равновесие в токамаке *154*
 - Литература *158*
 - Задачи и вопросы *158*

160

Лекция 25
МГД-волны

- §25.1 Уравнение малых колебаний *161*
- §25.2 Альфвеновские волны *164*
- §25.3 Магнитный звук *166*

- §25.4 *Полярные диаграммы [170](#)
- §25.5 МГД-волны в анизотропной плазме [172](#)
 - Литература [174](#)
 - Задачи и вопросы [174](#)

176

Лекция 26 Гидромагнитная устойчивость плазмы

- §26.1 Неустойчивости плазмы [176](#)
- §26.2 Метод малых колебаний [179](#)
- §26.3 Свойства спектра МГД-колебаний [182](#)
- §26.4 Энергетический принцип [184](#)
- §26.5 Потенциальная энергия возмущений [186](#)
- §26.6 *Вариационный принцип [188](#)
 - Литература [191](#)
 - Задачи и вопросы [191](#)

194

Лекция 27 Неустойчивости пинчей

- §27.1 Скинированный пинч [195](#)
- §27.2 Перетяжки [196](#)
- §27.3 Змейки [199](#)
- §27.4 Винтовые возмущения [202](#)
- §27.5 *Критерий Сайдема [204](#)
 - Литература [206](#)
 - Задачи и вопросы [207](#)

209

Лекция 28 Желобковая неустойчивость

- §28.1 Желобковые возмущения [209](#)
- §28.2 Условие конвективной устойчивости Кадомцева [210](#)
- §28.3 Критерий Розенблюта—Лонгмайра [213](#)
- §28.4 Инкремент желобковой неустойчивости [217](#)
- §28.5 Методы стабилизации желобковой неустойчивости [219](#)
 - Литература [225](#)
 - Задачи и вопросы [226](#)

227

Лекция 29
Баллонная неустойчивость

- §29.1 Баллонные возмущения [227](#)
- §29.2 Уравнение баллонных колебаний [228](#)
- §29.3 Предельная бета [232](#)
- §29.4 Методы стабилизации баллонной неустойчивости [235](#)
- Литература [236](#)
- Задачи и вопросы [236](#)

237

Лекция 30
Магнитное пересоединение и тириング-неустойчивость

- §30.1 Пересоединение магнитных силовых линий [238](#)
- §30.2 Тириング-неустойчивость [241](#)
- §30.3 Основные уравнения [242](#)
- §30.4 Решение вне резистивного слоя [244](#)
- §30.5 Резистивный слой [247](#)
- Литература [250](#)
- Задачи и вопросы [250](#)

252

Приложение Б
Ответы к задачам

- Лекция 16 [252](#)
- Лекция 17 [258](#)
- Лекция 18 [263](#)
- Лекция 19 [285](#)
- Лекция 20 [290](#)
- Лекция 21 [302](#)
- Лекция 22 [306](#)
- Лекция 23 [312](#)
- Лекция 24 [324](#)
- Лекция 25 [333](#)
- Лекция 26 [341](#)
- Лекция 27 [370](#)
- Лекция 28 [387](#)
- Лекция 29 [400](#)
- Лекция 30 [402](#)

412 | Предметный указатель

424 | Именной указатель

426 | Список литературы

Игорь Александрович КОТЕЛЬНИКОВ
ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ
ТОМ 2
МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА
Учебное пособие

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *Н. И. Осмоловская*
Ответственный редактор *Н. А. Кривилёва*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Выпускающий *Е. А. Романова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб
Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д.1, лит. А.
Тел.: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 30.12.20.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 $\frac{1}{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 36,40. Тираж 30 экз.
Заказ № 032-21.
Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские технологии»
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.