

И. А. КОТЕЛЬНИКОВ

# ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

## ТОМ 1

# ОСНОВЫ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

Издание третье, исправленное и дополненное

*РЕКОМЕНДОВАНО*

*УМО по классическому университетскому образованию РФ  
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся  
по направлению «Физика» и по специальности «Физика»*



ЛАНЬ

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР •  
• 2021 •

УДК 533.9  
ББК 22.333я73

**К 73 Котельников И. А.** Лекции по физике плазмы. Том 1. Основы физики плазмы : учебное пособие для вузов / И. А. Котельников. — 3-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 400 с. : ил. — Текст : непосредственный.

**ISBN 978-5-8114-6958-1**

Книга содержит расширенное изложение курса «Основы физики плазмы» для студентов физического факультета Новосибирского государственного университета и рекомендована УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлению «Физика» и по специальности «Физика». Основное внимание уделяется движению частиц в электромагнитном поле и кинетике плазмы, включающей теорию кулоновских столкновений, тормозного и рекомбинационного излучений, а также ряда других элементарных процессов. Уровень изложения рассчитан на студентов, изучивших курсы электродинамики, молекулярной физики и знакомых с основами квантовой механики и статистической физики. Учебное пособие содержит около 200 задач с подробными решениями. Электронная версия содержит видеодемонстрации.

Для студентов, аспирантов, преподавателей вузов, инженеров и научных работников, специализирующихся в физике и технике плазмы.

УДК 533.9  
ББК 22.333я73

**Рецензент**

*Д. Д. РЮТОВ* — доктор физико-математических наук, академик РАН.

**Обложка**  
*П. И. ПОЛЯКОВА*

© Издательство «Лань», 2021  
© И. А. Котельников, 2021  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2021

# Предисловие

Книга «Основы физики плазмы» открывает двухтомное учебное пособие с общим заголовком «Лекции по физике плазмы». Первый том содержит расширенное изложение одноимённого курса, который студенты кафедры физики плазмы физического факультета Новосибирского государственного университета (НГУ) изучают в осенном семестре третьего года обучения. Лекции сопровождаются семинарскими занятиями, где студенты решают задачи, составляющие неотъемлемую часть курса, рассчитанного на 15 недель — по одной лекции и одному семинару в неделю. Уровень изложения рассчитан на студентов, освоивших курсы электродинамики, механики и молекулярной физики. Параллельно с физикой плазмы студенты изучают физику сплошных сред и квантовую механику, а статистическую физику осваивают позднее, поэтому книга содержит минимальные сведения из этих дисциплин.

Основное внимание в курсе уделяется движению заряженных частиц в электромагнитном поле и кинетике плазмы, включающей теорию кулоновских столкновений, тормозного и рекомбинационного излучения, некоторых атомных и радиационных процессов, а также термоядерных реакций. Завершает курс вывод кинетического уравнения с примерами его использования. Классическая теория процессов переноса, теория равновесия и гидродинамической устойчивости плазмы излагаются в курсе «Магнитная гидродинамика» в весеннем семестре третьего года обучения, а линейные и нелинейные волны в плазме изучаются в курсе «Коллективные явления в плазме» в осенном семестре четвёртого года. Курс «Магнитной гидродинамики» излагается во втором томе «Лекций по физике плазмы». У меня почти нет опыта преподавания «Коллективных явлений в плазме», поэтому я не планирую писать третий том. Надеюсь, кто-нибудь из моих коллег восполнит этот пробел.

Нынешняя структура трёх вводных теоретических курсов на кафедре физики плазмы НГУ сложилась после выхода второго издания моих «Лекций» в 2013 году [1]. Часть тех лекций была перенесена в заново воссозданный курс «Магнитной гидродинамики», а их место заняли клас-

нические задачи кинетики плазмы. Курс «Магнитной гидродинамики» был также значительно расширен и дополнен задачами. Работа заняла семь лет.

Основу первого издания «Лекций» составил конспект Г. В. Ступакова, изданный с моим участием в 1996 году [2]. При подготовке второго издания в 2013 году была предпринята попытка отойти от устоявшейся схемы изложения, не приспособленной для углублённого изучения предмета продвинутыми студентами. Результатом стала книга, мало напоминающая первое издание. Нынешнее издание я считаю третьим. Повторяя предисловие к изданию 2013 года, попробую объяснить мотивы, побудившие меня написать ещё один учебник по физике плазмы, несмотря на наличие многих новых и проверенных временем книг [3–21].

Темп обучения индивидуален. Не все студенты в равной степени способны утрамбовывать плотный поток информации в собственной голове синхронно с «пассами» лектора у грифельной доски. Однако история знает немало примеров, когда именно «тугодумы» делали выдающиеся открытия. Мне кажется, что в «оперативной» памяти задерживаются знания, интуитивно понятные или, напротив, парадоксальные, но поддающиеся наглядному объяснению, поэтому даже сложные явления поначалу надо излагать просто.

С другой стороны, такая наука, как физика плазмы, не должна предстать винегретом занимательных фактов. Чтобы дать студенту простор для размышлений, часть математических вычислений вынесена в задачи. Некоторые из предлагаемых задач очень просты. Они призваны заострить внимание на какой-то стороне обсуждаемого явления. Другие задачи в своё время были предметом научных дискуссий или требуют громоздких вычислений. Такие задачи неразумно «решать у доски» — они предназначены скорее аспирантам, нежели студентам. Часть задач добавлена для того, чтобы избежать ссылок на божественное откровение, которым овеяны некоторые утверждения, кочующие из книги в книгу. Так или иначе ученик должен сам пройти путь познания, однажды пройденный учителем. Решая конкретную задачу, проще осознать, что понято, а что осталось пустым звуком. Задачи попроще нужно решать самостоятельно, а сложные решения полезно разбирать с карандашом в руке, воспроизводя все промежуточные вычисления.

Стивен Вайнберг (Steven Weinberg) писал [22], что «физику нельзя представить себе как логически стройную систему. Скорее, в любой момент она увязывает как-то огромное число неупорядоченных идей. Ав-

тор книги по физике может навести порядок в этом хаосе, либо беспристрастно прослеживая всю его историю, либо следуя своим собственным идеям о том, что такое завершённая логическая структура физических законов. Оба способа приемлемы, важно только не перепутать физику с историей, а историю с физикой».

Я излагаю физику сообразно моим представлениям о её внутренней логике. Тем не менее мне было интересно восстанавливать историю физики плазмы. Насколько это было возможно, я старался отыскивать оригинальные статьи и свидетельства непосредственных участников событий, хотя и такая педантичность не страшует от ошибок.

Стараясь избегать ошибок иного рода, я пытался минимизировать количество иллюстраций, нарисованных свободным движением руки. Графики с результатами расчётов для правдоподобного набора параметров не раз помогали мне избавиться от нелепых заблуждений. Числовые данные по возможности также рассчитывались заново, особенно в тех случаях, когда литературные источники дают противоречивые сведения.

В электронной версии учебника часть иллюстраций в лекциях 4, 5 и 6 содержит видео-фрагменты. Для их просмотра необходим Adobe Acrobat или Adobe Reader версии 9, 10 или 11. Можно также использовать Foxit Reader.

## О нумерации формул и системе единиц

Формулы, рисунки и задачи нумеруются независимо в пределах каждой лекции. Для отсылок на такие вещи в пределах текущей лекции используется одинарная нумерация, но ссылку из другой лекции предваряет её номер. Например, (3.14) обозначает уравнение 14 в лекции 3; ссылка на ту же формулу из текста третьей лекции будет напечатана в виде (14). В решениях задач, которые вынесены в Приложение, используется тройная нумерация: например, (1.2.3) метит третью уравнение в решении второй задачи в первой лекции.

Косая дробная черта в математических формулах обозначает деление всего, что находится слева от неё, на всё, что справа. Иными словами,  $4\pi Lne^4/m^2v^4$  следует понимать как  $4\pi Lne^4/(m^2v^4)$  и никак иначе. Элемент объёма в трёхмерных интегралах записывается как  $d^3x = dx dy dz$ , тогда как  $dx$  обозначает дифференциально малый элемент контура интегрирования. Векторы обозначаются жирными курсивными буквами, а для тензора используется прямой шрифт без серифов, на-

пример  $\mathbf{p}$  — это вектор импульса, а  $\mathbf{P}$  — тензор давления. Точка по центру между двумя векторами отличает скалярное произведение  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$  от прямого (диадного) произведения  $\mathbf{v}\mathbf{E}$  двух векторов (или тензоров). Знак « $\times$ » обозначает векторное произведение. Обычно (но не всегда) скалярное произведение окружают круглые скобки, например  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$ , а векторное произведение — квадратные скобки, например  $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ . Под повторяющимися греческими индексами подразумевается суммирование от 1 до 3 или от  $x$  через  $y$  до  $z$ , например скалярное произведение  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$  можно также записать в виде  $v_\mu E_\mu = v_x E_x + v_y E_y + v_z E_z$ . Другие обозначения вводятся по мере надобности.

Всюду в книге используется абсолютная физическая система единиц СГС. В формулах СГС отсутствуют нефизические коэффициенты, необходимые в Международной системе единиц СИ, а электрическое и магнитное поля имеют одинаковую размерность в соответствии с их физическим смыслом.

### Благодарности

Эта книга отражает почти 50-летний опыт преподавания теоретических курсов на кафедре физики плазмы НГУ, которая с момента основания базируется в Институте ядерной физики СО РАН им. Г. И. Будкера. Структура курсов была заложена академиком [Д. Д. Рютовым](#). В разное время лекции читали А. С. Аракчеев, А. Д. Беклемишев, Б. Н. Брейзман, И. А. Котельников, С. В. Лебедев, К. В. Лотов, В. В. Приходько, А. Л. Санин, С. Л. Синицкий, Д. И. Сковородин, [Г. В. Ступаков](#), И. В. Тимофеев, Ю. А. Цидулко. На протяжении многих лет я также имел возможность обсуждать содержание курса с другими своими коллегами: Ю. И. Бельченко, А. В. Бурдаковым, Г. Е. Векштейном, В. И. Волосовым, А. А. Ивановым, А. И. Мильштейном, М. С. Чащиным, И. С. Черноштановым, А. П. Шкуриновым. Я ценю их советы и доброе отношение ко мне. Особо хочу отметить вклад [Геннадия Викторовича Ступакова](#), совместно с которым было подготовлено первое издание «Лекций», а также [Дмитрия Дмитриевича Рютова](#), который прочёл рукописи двух первых изданий, сделав замечания, заставившие меня хорошенъко подумать. Мне помог также конспект лекций [Бориса Нухимовича Брейзмана](#), которые я слушал, будучи студентом. Он стал своего рода репером, определившим уровень сложности лекционного материала.

Академгородок, Новосибирск

[i.a.kotelnikov@inp.nsk.su](mailto:i.a.kotelnikov@inp.nsk.su)

3 февраля 2021 г.

## Лекция 1

# Общие сведения о плазме

---

**Плазма как состояние вещества. Квазинейтральность.**

**Определение плазмы. Дебаевская экранировка.**

**Ленгмюровские колебания. Применения плазмы**

### §1.1. Плазма как состояние вещества

Известно, что по мере нагревания *твёрдое вещество* сначала превращается в *жидкость* в процессе *плавления*, а затем жидкость *испаряется*, превращаясь в *газ*. Менее известно, что будет происходить с газом при дальнейшем нагревании. Ясно, что с увеличением энергии хаотического движения молекул газа их столкновения друг с другом будут вызывать всё более разрушительные последствия для самих молекул. Сначала молекулы *диссоциируют* на составляющие их атомы, а затем и сами атомы *ионизуются*, то есть разбиваются на отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные ионы. Таким образом, при нагревании любого вещества оно в конце концов превращается в ионизованный газ.

От обычного газа электрически нейтральных атомов и молекул он отличается необычными свойствами, в связи с чем английский химик Уильям Крукс ([William Crookes](#)) назвал предмет своих исследований *четвёртым состоянием вещества*. Сэр Крукс экспериментировал с так называемыми катодными лучами, которые получал, пропуская электрический ток через стеклянные трубки с частично откаченным воздухом. После открытия электрона сэром Дж. Дж. Томсоном ([Joseph John Thomson](#), 1897) стало понятно, что катодные лучи представляют собой поток ускоренных электронов в слабоионизованном газе.

Сэр Крукс отчасти был мистиком. Он считается основателем спиритизма, так что сейчас лучше не углубляться в мотивы, которые побудили его выдвинуть гипотезу четвёртого состояния вещества. Исто-

рия сохранила точную дату — 22 августа 1879 года, когда в лекции «Излучающее вещество» сэр Крукс назвал катодные лучи четвёртым состоянием вещества [23]. В отечественной литературе характеристику плазмы как четвёртого агрегатного состояния вещества иногда приписывают [Д. А. Франк-Каменецкому](#) (см. [16], с. 13), который так назвал одну из своих книг [24]. Термин *плазма* применительно к ионизованному газу был введён американским физиком Ирвингом Ленгмюром ([Irving Langmuir](#)) почти на полвека позже.

В отличие от фазовых переходов первого рода, таких как *плавление* и *испарение*, *ионизация* газа не сопровождается пространственным разделением фаз. Степень ионизации

$$\zeta = \frac{n_i}{n_0}, \quad (1)$$

характеризуемая отношением плотности ионов  $n_i$  к начальной плотности нейтральных атомов  $n_0$ , увеличивается во всём объёме газа плавно по мере увеличения температуры. В пламени свечи имеется небольшое количество свободных электронов и ионов, но его едва ли можно считать настоящей плазмой, так же как и атмосферный воздух, где всегда имеется некоторое количество ионов и свободных электронов за счёт ионизации космическими лучами. Строгое определение состояния вещества, которое можно назвать плазмой, должно включать количественный критерий, когда ионизованный газ приобретает специфические свойства плазмы.

Чтобы найти этот критерий, нужно прежде всего понять, чем новое состояние вещества отличается от обычного газа. Главная особенность коллектива заряженных частиц, составляющих плазму, состоит в появлении нового типа взаимодействия частиц этого коллектива — через дальнодействующие электрические и магнитные поля. Именно благодаря дальнему действию электрических и магнитных сил газ заряженных частиц приобретает новые свойства, образуя нечто целое с электромагнитным полем. Это коллективное (говорят также — *самосогласованное*) поле, с одной стороны, создаётся заряженными частицами плазмы, а с другой — существенным образом влияет на их движение.

## §1.2. Квазинейтральность

Самосогласованное поле, если оно достаточно сильное, делает ионизованный газ квазинейтральным. *Квазинейтральностью* называют при-

ближённое равенство плотности электронов  $n_e$  и ионов  $n_i$ , так что веществом в целом электрически нейтрально. В более общем случае, когда атомы ионизованы многократно, в среднем  $Z$  раз каждый, квазинейтральность означает, что

$$n_e \approx Zn_i. \quad (2)$$

При достаточно большой плотности электронов и ионов даже малое пространственное разделение зарядов в ионизованном газе привело бы к возникновению очень сильных электрических полей, препятствующих разделению. Как следствие этого, при любых внешних полях «естественной» величины плотности электронов и ионов оказываются близкими друг к другу, а смесь электронов и ионов сохраняет квазинейтральность даже при весьма бурно протекающих в ней процессах.

Напротив, при малой плотности заряженных частиц квазинейтральность разрушится, даже если вначале приготовить электрически нейтральную смесь ионов и электронов. Вследствие хаотического теплового движения более лёгкие электроны быстро разлетятся, оставив позади более тяжёлые ионы, если электрическое притяжение разнозаряженных электронов и ионов недостаточно велико.

### §1.3. Определение плазмы

*Квазинейтральный газ заряженных частиц называют плазмой.* В наиболее распространённом случае плазма состоит из электронов и положительно заряженных ионов. В плазме могут присутствовать также нейтральные атомы. Если их доля значительна ( $n_i/n_0 \ll 1$ ), плазму называют слабоионизированной. Если доля нейтральных атомов пренебрежимо мала ( $n_i/n_0 \rightarrow 1$ ), то говорят о *полностью ионизированной* плазме. Существует также понятие *простой плазмы*, применяемое при построении теоретических моделей. Так называют плазму, состоящую из электронов и ионов, произведённых из атомов одного химического элемента, которые потеряли по одному атомарному электрону ( $Z = 1$ ). Плазму с многократно ионизованными ионами (потерявшими много электронов,  $Z \gg 1$ ) называют *лонгевской*.

Важно понимать, что квазинейтральность есть не изначальная характеристика плазмы, а всего лишь её свойство, вытекающее из главенствующей роли коллективного взаимодействия частиц через самосогласованное поле. При определённых условиях сгусток заряженных частиц

одного сорта (например, только электронов) может обладать свойствами, присущими квазинейтральной плазме. В этом контексте такой сгусток называют *заряженной плазмой*.

### §1.4. Генезис физики плазмы

В переводе с греческого языка слово *πλάσμα* означает лепную фигуру, пластичную массу наподобие воска [25]. Если кровь очистить от красных кровяных тел, останется прозрачная желтоватая жидкость, составляющая примерно 60% объёма крови. Этую жидкость чешский медик Ян Пуркине (Jan Purkině) назвал плазмой ещё до начала исследований ионизованного газа (около 1848 года).

В физику термин *плазма* ввёл американский учёный Ирвинг Ленгмюр (Irving Langmuir). Так Ленгмюр назвал ту часть тлеющего газового разряда, где плотности ионов и электронов велики, но по существу равны.

Сохранилось свидетельство Леви Тонкса (Levi Tonks) [27], что однажды Ленгмюр спросил его, как назвать электрически нейтральную часть газового разряда. Тонкс, по его собственному признанию, дал классический ответ: «Надо подумать, доктор Ленгмюр». На следующий день Ленгмюр «влетел» в лабораторию со словами: «Мы назовём это — плазма!» Более поздние исследователи, изучив этимологию слова «плазма», предположили, что Ленгмюр находился под впечатлением такого легко наблюдаемого свойства тлеющего разряда, как изменение его формы в соответствии с формой газоразрядной трубки, и выбрал подходящее греческое слово [28]. Однако Леви Тонкс вспоминал, что при первых словах Ленгмюра ему тут же представилась картина крови. Другой участник тех событий, Гарольд Мотт-Смит (Harold Mott-Smith), также припоминал [29], что Ленгмюр указывал на сходство между переносом красных и белых кровяных клеток плазмой крови и движением частиц в электрически нейтральной части разряда.

Непосредственные свидетели описываемых событий слегка расходятся относительно даты, когда Ленгмюр отыскал слово «плазма». Мотт-Смит указывает 1927 год, а Тонкс настаивает, что впервые это слово упоминается в рукописи статьи Ленгмюра «Осцилляции в ионизованных газах» [26], опубликованной в трудах Национальной академии наук в 1928 году. Версия Тонкса представляется нам более убедительной. Не вызывает сомнений, что Ленгмюр целенаправленно искал подходящее слово. Будучи очень плодовитым автором, он ежегодно публиковал мно-

---

## OSCILLATIONS IN IONIZED GASES

BY IRVING LANGMUIR

RESEARCH LABORATORY, GENERAL ELECTRIC CO., SCHENECTADY, N. Y.

Communicated June 21, 1928

In strongly ionized gases at low pressures, for example in the mercury arc, the free electrons have a Maxwellian velocity distribution corresponding to temperatures that may range from  $5000^{\circ}$  to  $60,000^{\circ}$ , although the mean free path of the electrons may be so great that ordinary collisions cannot bring about such a velocity distribution. Electrons accelerated from a hot cathode (primary electrons), which originally form a beam of cathode rays with uniform translational motion, rapidly acquire a random or temperature motion which must result from impulses delivered to the electrons in random directions.

In this laboratory we have been studying these phenomena<sup>1</sup> in detail during the last 4-5 years, but the mechanism underlying the Maxwellian distribution and its extremely short time of relaxation have not been understood. At an early date it occurred to me that electric oscillations of very high frequency and of short wave-length in the space within the tube might produce a scattering of the kind observed, but calculation showed that average field strengths of several hundred volts per centimeter would be necessary and this seemed an unreasonable assumption. Experiments capable of detecting oscillations of the electrodes with amplitudes greater than 0.2 volt failed to show such oscillations.

**Рис. 1.** Факсимиле первой страницы статьи [26] Ирвинга Ленгмюра в Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, где впервые дано определение плазмы и описаны её основные свойства.

жество статей. Едва ли рукописи подолгу лежали на его рабочем столе. Можно предположить, что именно в процессе работы над текстом упомянутой статьи Ленгмюр искал и нашёл слово «плазма». Как писал Мотт-Смит, все участники тех событий понимали, что честь открытия достанется не столько тому, кто его сделал, сколько тому, кто дал ему имя. «И свидетельством тому — весь континент», открытый Христофором Колумбом (Christóbal Colón), а названный в честь Америго Веспуччи (Amérigo Vespucci).<sup>1</sup> Поэтому днём рождения физики плазмы следует считать день 21 июня 1928 года, когда редакция журнала получила статью Ленгмюра [26].

Многие авторитетные издания относят рождение физики плазмы к 1923 году, когда Ленгмюр изобрёл зонд для измерения плотности и температуры ионизованного газа, начав систематическое исследование газового разряда. Однако потребовалось ещё несколько лет, чтобы обнаружить, а затем и объяснить такое фундаментальное проявление коллективных свойств плазмы, как потенциальные плазменные колебания, которые теперь, как и зонд, называют ленгмюровскими.

Мотт-Смит вспоминал, что долгое время им докучали медицинские журналы просьбами прислать оттиски статей. Физики и химики косо поглядывали на неуклюжее слово и не спешили заимствовать его, а инженеры воспринимали *Plasma* как торговую марку корпорации General Electric, где работал Ленгмюр. Прошло 20 лет, прежде чем термин «плазма» в применении к ионизированному газу стал общепринятым. Ленгмюр и его сотрудники экспериментировали со слабо ионизованной плазмой. Сейчас плазмой преимущественно называют полностью ионизованный газ.

В 1929 году увидели свет несколько статей Ленгмюра, из которых наиболее известна его работа с Тонксом, опубликованная в *Physical Review* [30] под тем же названием «Оscилляции в ионизованных газах». Там в завершённом виде изложена теория ленгмюровских колебаний. Слово *квазинейтральность* придумал Вальтер Шоттки (Walter Schottky) в 1924 году [31]. Тонкс и Ленгмюр впервые используют этот термин в своей второй статье 1929 года [32], отмечая, что Шоттки постулировал квазинейтральность, тогда как в их теории она получала естественное обоснование. В той же статье слово «плазма» впервые употребляется в заголовке.

---

<sup>1</sup> Дословная цитата из письма Мотта-Смита [29]: We struggled to find a name for it. For all members of the team realized that the credit for a discovery goes not to the man who makes it, but to the man who names it. Witness the name of our continent.

### §1.5. Дебаевское экранирование

Чтобы дать количественную формулировку понятию квазинейтральности, рассмотрим плазму, в единице объёма которой находится  $n_e$  электронов (каждый с зарядом  $-e$ ) и примерно столько же однозарядных ионов  $n_i$  (с зарядом  $+e$ ). Представим, что вследствие теплового движения частиц в области с размером  $l$  произошло разделение зарядов и самопроизвольно возникла разность плотности электронов и ионов  $\delta n = n_e - n_i$ . В результате появятся электрический заряд с плотностью  $\rho_q = en_i - en_e = -e\delta n$  и электрическое поле, потенциал  $\varphi$  которого определяется из уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho_q = 4\pi e \delta n. \quad (3)$$

Для грубой оценки можно принять  $\nabla^2 \varphi \sim \delta\varphi/l^2$ , где  $\delta\varphi$  — перепад потенциала на масштабе  $l$ . Тогда из уравнения (3) находим, что по порядку величины

$$\delta\varphi \sim 4\pi e \delta n l^2. \quad (4)$$

Величина  $e\delta\varphi$  не может существенно превышать среднюю кинетическую энергию частиц  $K$ , так как иначе возникающий потенциал воспрепятствует разделению зарядов. В свою очередь, величина  $K$  определяется температурой плазмы,  $K \sim kT$ , где  $k = 1,38 \times 10^{-16}$  эрг/град — постоянная Больцмана. В физике плазмы температуру  $T$  принято измерять в энергетических единицах, отождествляя её с энергией  $kT$ ; тогда  $k = 1$ . Опуская здесь и далее постоянную Больцмана  $k$ , ограничение на величину потенциала запишем в виде  $e\delta\varphi \lesssim T$ , что при учёте оценки (4) даёт

$$\frac{\delta n}{n} \lesssim \frac{T}{4\pi ne^2 l^2}.$$

Вводя обозначение

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi ne^2}}, \quad (5)$$

имеющее размерность длины, можем сказать, что выделенный элемент будет квазинейтральным, если его размер  $l$  велик по сравнению с  $\lambda_D$ , так как

$$\frac{\delta n}{n} \lesssim \frac{\lambda_D^2}{l^2}. \quad (6)$$

Параметр  $\lambda_D$  называют дебаевской длиной (или радиусом) по имени голландского химика Петера Дебая (Peter Debye). Понятие дебаевской длины было введено в его работе с Эрихом Хюккелем (Erich Hückel) в 1923 году, где были заложены основы теории электролитов [33].

Если линейный размер  $L$  всего сгустка заряженных частиц сравним с дебаевской длиной  $\lambda_D$ , то сгусток ионизованного газа не является квазинейтральным, поскольку  $\delta n \sim n$ . При  $L \gtrsim \lambda_D$  сгусток по существу представляет скопление отдельных заряженных частиц, которые не являются плазмой и могут свободно покидать сгусток, так что полное число частиц  $N = nL^3$  флюктуирует на такую же величину  $\delta N = \delta n L^3 \sim N$ .

Ионизованный газ квазинейтрален и, следовательно, является плазмой, если выполнено условие

$$L \gg \lambda_D. \quad (7)$$

Величина флюктуаций числа частиц  $\delta N$  в объёме с линейными размерами порядка  $L$  ограничена неравенством

$$\frac{\delta N}{N} \lesssim \frac{\lambda_D^2}{L^2}, \quad (8)$$

существенно более жёстким, нежели условие (6), которое ограничивает величину флюктуаций плотности в малых объёмчиках с размером  $l \ll L$ . На совсем малых расстояниях  $l \sim \lambda_D$  плотности электронов и ионов могут различаться существенно, так что  $\delta n \sim n$ . Такое случается вблизи электродов (катода и анода), между которыми зажигают газовый разряд. На поверхности электродов возникает дебаевский слой, величина которого обычно пропорциональна температуре плазмы; там  $e\delta\varphi \sim (5-8)T$ . Дебаевские слои экранируют электрическое поле электродов, препятствуя его проникновению вглубь плазмы.

Если электроды не изолированы и находятся под большим потенциалом  $U \gg T/e$ , вблизи поверхности электродов возникает ленгмюровский слой, где также нарушается квазинейтральность. Его толщина определяется законом «трёх вторых», открытого Чайлдом (C. D. Child, 1911 [34]) и Ленгмюром (I. Langmuir, 1913 [35]).

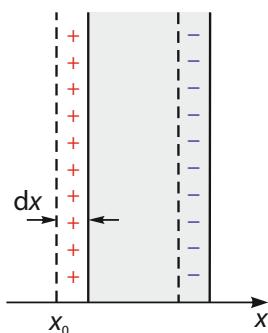
## §1.6. Ленгмюровские колебания

Дебаевская длина характеризует пространственный масштаб, на котором происходит разделение зарядов в плазме. Характерное время существования флюктуаций плотности в объёмчике с размером  $\lambda_D$  получается делением  $\lambda_D$  на тепловую скорость электронов  $v_{Te} \sim \sqrt{T/m_e}$ :

$$t \sim \frac{\lambda_D}{v_{Te}} \sim \sqrt{\frac{m_e}{4\pi ne^2}},$$

где  $m_e$  — масса электрона. За это время тепловое движение электронов «замажет» возникшую флуктуацию.

Если флуктуация плотности возникла в объёмчике с размером  $l$ , превышающем дебаевскую длину,  $l \gg \lambda_D$ , тепловое движение не успевает её замазать за время  $t \sim \sqrt{m_e/4\pi n e^2}$ . В этом случае возникают чисто *потенциальные колебания* с длиной волны  $\lambda = l$ , в которых магнитное поле отсутствует. Они сопровождаются периодическим изменением плотности электронов вокруг среднего значения, равного плотности ионов.



**Рис. 2.** Колебания слоя электронов

Действительно, выделим плоский слой электронов, как показано на рисунке 2, и для простоты пренебрежём тепловым разбросом скоростей (что допустимо, если  $\lambda \gg \lambda_D$ ). Ионы можно считать неподвижными, так как равное по величине электрическое поле вызывает несравненно меньшее смещение ионов из-за их большей массы. Если слой электронов сдвинулся вправо вдоль оси  $x$  перпендикулярно своей плоскости на расстояние  $dx = x - x_0$  от своего начального положения  $x_0$  (когда плотность электронов была однородна и равна плотности ионов  $n_i = n$ ), то слева от слоя возникнет избыток положительного заряда с величиной  $\sigma = en(x - x_0)$

на единицу площади слоя, так как при своём движении слой «обнажает» ионный остов позади. Напротив, справа создаётся избыточный отрицательный заряд  $-\sigma$ . В результате образуется подобие плоского конденсатора, заряженные обкладки которого формируют электрическое поле

$$E_x = 4\pi\sigma.$$

Оно тормозит электроны в слое, стремясь вернуть их в исходное положение. Приравнивая ускорение электрона в слое  $\ddot{x}$  (помноженное на массу  $m_e$ ) к возвращающей силе  $-eE_x$ , получим уравнение движения электрона

$$m_e \ddot{x} = -4\pi e^2 n (x - x_0). \quad (9)$$

Оно описывает колебательное движение с частотой

$$\omega_p = \sqrt{4\pi n e^2 / m_e} \quad (10)$$

около его исходного положения  $x_0$  (задача 4).

По свидетельству Ленгмюра [26], формула (10) была получена [Моттом-Смитом](#).<sup>2</sup> О существовании плазменных электронных колебаний догадывался Артур Диттер (Arthur Dittmer) [37]. Они были обнаружены Франсом Пеннингом (Frans Penning) в 1926 году [38, 39], но ни тот, ни другой не смогли понять природу этих колебаний. Теория потенциальных электронных колебаний, вполне современная по своему содержанию, была изложена в первой работе Тонкса и Ленгмюра 1929 года [30]. Там же описаны потенциальные ионные колебания, которые сейчас называют *ионно-звуковыми*. Ленгмюр и Тонкс также предсказали, что потенциальные электронные колебания сильно затухают, если длина волн сопоставима с дебаевской длиной, предвосхитив теорию затухания Ландау [40–42]. Вполне справедливо поэтому, что потенциальные электронные колебания называют *ленгмюровскими*, а их частоту  $\omega_p$  — *ленгмюровской частотой*. Теория ленгмюровских колебаний и затухания Ландау будет изложена в лекции 13.

### §1.7. Практические формулы

В практических вычислениях удобной единицей измерения температуры  $T$  является электронвольт:

$$1 \text{ эВ} = 1,6022 \times 10^{-12} \text{ эрг} = 11,604^\circ \text{ К.}$$

Плотность плазмы  $n$  обычно выражают в числе частиц того или иного сорта (электронов или ионов) на кубический сантиметр ( $\text{см}^{-3}$ ), длину  $l, L, \lambda$  — в сантиметрах (см), время  $t$  — в секундах (с), круговую частоту  $\omega$  — в радианах на секунду ( $\text{с}^{-1}$ ), а линейную частоту  $\nu = \omega/2\pi$  — в герцах (Гц). Для вычисления дебаевской длины и ленгмюровской частоты удобны «практические» формулы, где коэффициенты из мировых констант преобразованы в числа:

$$\begin{aligned}\omega_p &= 5,64 \times 10^4 n^{1/2}, \\ \lambda_D &= 7,43 \times 10^2 T^{1/2} / n^{1/2}.\end{aligned}$$

Подобные формулы собраны в справочнике [43].

---

<sup>2</sup> Некоторые авторы указывают, что ленгмюровскую частоту первым вычислил лорд Рэлей (Rayleigh) в статье [36], опубликованной в 1906 году. Он описал модель атома в виде положительно заряженного шара, внутри которого равномерно распределено множество электронов. Рэлей получил уравнение, эквивалентное (9), но применил его для анализа сферических колебаний облака электронов. Их частота близка к ленгмюровской, но не совпадает с ней.

## §1.8. Плазма в природе

Нередко можно слышать, что 99,9% вещества во Вселенной находится в состоянии плазмы [5, 16]. Вероятно, эта оценка сильно завышена, так как недавние исследования убедили астрофизиков в существовании «тёмной массы», природа которой в настоящее время не ясна [44]. Известно только, что она оказывает гравитационное воздействие на расширение Вселенной и движение далёких галактик. Однако звёзды, их атмосферы, газовые туманности и значительная часть межзвёздного газа действительно находится в ионизованном состоянии. В непосредственном окружении нашей планеты, за пределами земной атмосферы, космические аппараты сталкиваются с плазмой радиационных поясов и солнечного ветра.

Для полной ионизации вещества его температура, как можно предположить, должна приближаться к энергии ионизации отдельного атома, а последняя по порядку величины составляет 10 эВ, что соответствует температуре 100 000° К. Позднее мы узнаем, что чем меньше плотность вещества, тем ниже температура, требуемая для ионизации, но всё равно условия существования плазмы несовместимы с условиями развития биологической жизни. В повседневной жизни наши встречи с плазмой ограничиваются редкими природными явлениями, такими как вспышка молнии или полярное сияние, и некоторыми техническими устройствами наподобие неоновой рекламы или сварочной дуги.

Иногда плазму подразделяют на *низкотемпературную* ( $T < 10$  эВ) и *высокотемпературную* ( $T > 10$  эВ). Такое деление до некоторой степени условно. Оно всего лишь отражает тот факт, что в лабораторных условиях высокотемпературная водородная плазма полностью ионизована, тогда как в низкотемпературной плазме обычно велика доля нейтральных атомов. Однако межзвёздная плазма полностью ионизована уже при температуре 1 эВ. Для ориентировки в порядках величин в таблице 1 приведены типичные параметры плазмы, встречающейся в различных устройствах и природных объектах.

### Газовый разряд

Исследования Ленгмюра и Тонкса в 20-х годах XX века были стимулированы разработкой вакуумных электронных ламп, которые могли пропускать большие токи, а для этого лампы нужно наполнять ионизированным газом. Сейчас бы мы сказали, что Ленгмюр с сотрудниками ис-

**Таблица 1.** Типичные параметры лабораторной и космической плазмы

	$n, \text{ см}^{-3}$	$T, \text{ эВ}$
Солнечное ядро	$10^{26}$	$10^3$
Солнечная корона	$10^9$	$10^2$
Солнечный ветер	5	$10\text{--}50$
Ионосфера Земли	$10^2\text{--}10^6$	0,1
Газовая туманность	$10^3$	1
Межзвездный газ	1	1
Газовый разряд	$10^6\text{--}10^{14}$	1
Магнитный УТС	$10^{12}\text{--}10^{15}$	$10^3\text{--}10^4$
Инерциальный УТС	$10^{20}\text{--}10^{24}$	$10^2\text{--}10^3$

следовали низкотемпературную плазму в *газовом разряде* низкого давления. Когда к газовому промежутку прикладывается высокое напряжение, происходит пробой: газ частично ионизуется, и образовавшиеся электроны и ионы, двигаясь в направлении разнополярных электродов, создают разрядный ток. В экспериментах Ленгмюра был получен *тлеющий разряд* с температурой электронов  $T_e \approx 2 \text{ эВ}$  и плотностью  $10^8 \text{ см}^{-3} < n < 10^{12} \text{ см}^{-3}$ .

Газовый разряд можно наблюдать в лампах дневного света и грозовых разрядах, в ртутных выпрямителях и водородных тиатронах, электрических дугах и неоновых лампах (рис. 3). Газовый разряд составляет физический фундамент бурно развивающейся отрасли плазменной обработки материалов. Плазменные технологии используют для упрочнения поверхности металлов и нанесения покрытий на различные материалы. Имплантация ионов и плазменное травление поверхностей вытесняют химическое травление в микроэлектронной промышленности. Существуют маломощные электроракетные двигатели на основе магнитогидродинамических ускорителей плазмы и разрабатываются более мощные.

### Околоземное пространство

Развитие радиовещания в первой половине XX века привело к обнаружению земной ионосферы — слоя частично ионизованного газа в

**Рис. 3.** Тлеющий разряд в неоне. Квазинейтральная светящаяся часть разряда занимает всё доступное пространство трубки, заполненной частично ионизованным газом. Свечение газа вызывается излучением спектральных линий атомов неона при столкновении с электронами. Фото Pslawinski.



верхних слоях атмосферы, который отражает радиоволны. Существование ионосфера доказал Эдвард Эплтон ([Edward Appleton](#)) в 1925 году [[45](#)]. Она простирается по высоте от 60 км до 400 км и заполнена слабоионизованной плазмой, плотность которой изменяется с высотой от  $10^2\text{--}10^3 \text{ см}^{-3}$  до  $10^5\text{--}10^6 \text{ см}^{-3}$ . Температура ионосферной плазмы составляет всего [0,1 эВ](#).

Благодаря отражению от ионосферы стала возможной передача радиосигнала за видимый горизонт. Ионосфера не только отражает и частично поглощает радиоволны, но и искажает форму радиосигнала, так как в магнитном поле Земли волны с разной поляризацией распространяются в ионосфере с разной скоростью. В результате появляются помехи в виде запаздывающего или опережающего эха.

Следующей вехой в изучении околоземной плазмы стало открытие радиационных поясов Земли. На основе данных счётчика Гейгера, переданных первым американским космическим спутником Explorer, запущенным 31 января 1958 года, Джеймс Ван Аллен ([James van Allen](#)) обнаружил внутренний радиационный пояс [[46](#)].

На втором советском искусственном спутнике Земли было установлено два газоразрядных счётчика. С 3 по 9 ноября 1957 года были получены данные об интенсивности излучений над территорией СССР на высотах [225–700](#) км. Третий советский спутник, запущенный 15 мая 1958 года, обнаружил внешний радиационный пояс Земли [[47](#)]. За открытие радиационных поясов Земли в 1960 году руководителю программы геофизических измерений [С. Н. Вернову](#) была присуждена Ленинская премия, но мировая слава досталась Ван Аллену. Он первым понял, что



**Рис. 4.** Полярное сияние на Аляске 18 января 2005 года. Свечение создаётся потоками солнечных частиц, сталкивающихся с газами в атмосфере Земли. Фото Joshua Strang.

счётчик Гейгера зафиксировал тормозное излучение электронов в магнитном поле Земли, хотя поначалу решил, что «космос радиоактивен».

Сейчас установлено, что радиационные пояса состоят из заряженных частиц, захваченных магнитным полем Земли. Внутренний радиационный пояс на высоте примерно от 700 до 10 000 км преимущественно удерживает протоны с энергией до 100 МэВ и электроны с энергией до 100 кэВ. Внешний радиационный пояс на высоте от 13 000 до 65 000 км состоит преимущественно из электронов с энергией в 0,1–10 МэВ.

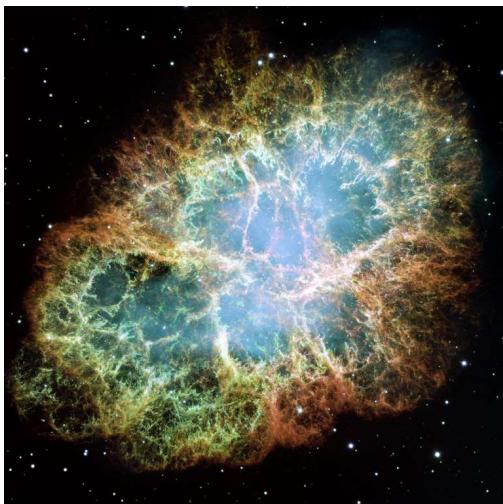
С поверхности Солнца непрерывно стекает поток плазмы, называемый *солнечным ветром*. На орбите Земли плотность частиц в солнечном ветре составляет  $5 \text{ см}^{-3}$ , температура ионов 10 эВ, температура электронов 50 эВ, скорость солнечного ветра 300 км/с. Земная магнитосфера защищает обитателей Земли от губительных воздействий солнечного ветра, деформируясь под его давлением. Время от времени на поверхности Солнца происходят вспышки. При каждой вспышке в космос выплескивается кратковременный сгусток заряженных частиц. Попадая в атмосферу Земли вблизи магнитных полюсов, эти частицы вызывают полярные сияния и магнитные бури, приводящие к нарушению длинноволновой радиосвязи (рис. 4).

### Астрофизика

Значительная часть видимой Вселенной состоит из плазмы (рис. 5), поэтому для лучшего понимания астрофизических явлений необходимо привлечь представления, позаимствованные из физики плазмы. Пионером в этой области был шведский физик Ханнес Альфвен (*Hannes Alfvén*). В 1940 году он написал систему уравнений магнитной гидродинамики [48, 49] и предсказал существование магнитогидродинами-

**Рис. 5.** Крабовидная туманность в созвездии Тельца на расстоянии  $6500 \pm 1600$  световых лет — один из самых уникальных и динамичных астрономических объектов, когда-либо наблюдавшихся человечеством. Туманность первым обнаружил Джон Бевис (John Bevis) в 1731 году. Её отождествляют с историческим взрывом сверхновой, описанным древними китайскими и арабскими астрономами в 1054 году.

Фото NASA.



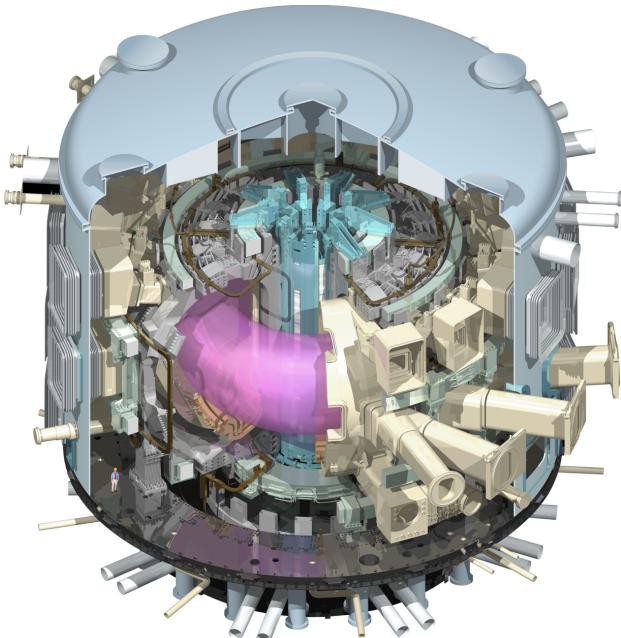
ческих волн [50]. Теория Альфвена, которую для краткости называют теорией МГД, выдержала проверку временем и сейчас широко используется как для объяснения астрофизических явлений, так и для лабораторных экспериментов по удержанию и нагреву плазмы.

Ядра и атмосферы звёзд настолько горячи, что находятся в плазменном состоянии, хотя плотность вещества в ядрах звёзд может превышать плотность твёрдых тел. Температура в центре Солнца равна 1,4 кэВ, а плотность — 160 г/см<sup>3</sup>. Солнечная корона, напротив, представляет собой разреженную плазму с плотностью порядка  $3 \times 10^8$  см<sup>-3</sup> и температурой до 200 эВ.

Межзвёздная среда содержит ионизованный водород с температурой 1 эВ и плотностью 1 см<sup>-3</sup>, который пронизан космическими лучами, т. е. потоком частиц и фотонов с очень большой энергией.

### Управляемый термоядерный синтез

Рождение физики высокотемпературной плазмы относят к началу 50-х годов XX века, когда была выдвинута идея создания термоядерного реактора на основе управления реакциями синтеза, аналогичными тем, которые питают энергией Солнце и другие звёзды, а также протекают при взрыве термоядерной (водородной) бомбы. Ещё до того как в США и СССР в 1952 и 1953 годах соответственно были проведены ис-



**Рис. 6.** Схема международного токамака ITER, который сооружается международным коллективом учёных и инженеров в исследовательском центре «Кадараш» (Cadarache) во Франции; предполагается, что на этом токамаке будут испытаны все системы промышленного термоядерного реактора, за исключением теплового генератора электричества; на первом уровне сооружения слева показана фигурка человека для сопоставления с размерами этой монструозной установки. Рисунок iter.org.

пытательные взрывы первых термоядерных бомб, в обстановке строгой секретности были начаты работы по управляемому термоядерному синтезу (сокращённо — УТС), прокладывающему дорогу к мирному применению ядерных реакций синтеза. В 1956 году они были рассекречены и вскоре опубликованы [51, 52]. Теоретическая физика плазмы как строгая математическая дисциплина возникла именно в эти годы. Неудивительно, что физика плазмы в представлении многих людей ассоциируется прежде всего с проблемой УТС, которая в определённом смысле не решена до сих пор.

В недрах звёзд ядерное топливо при температуре и плотности, необходимых для протекания реакций синтеза, удерживается гравитацион-

ным полем. В земных условиях с той же целью можно использовать магнитное поле. К настоящему времени установки для *магнитного удержания плазмы* достигли циклопических размеров, как показано на рисунке 6.

Создание мощных лазеров в 1960-х годах открыло новое направление *инерциального УТС*. Когда мощный лазерный пучок ударяет твёрдую мишень, происходит испарение (точнее – абляция) поверхностного слоя, в результате чего образуется плазменная оболочка. Условия, необходимые для термоядерного синтеза, достигаются за счёт чрезвычайно сильного обжатия мишени реактивной силой со стороны разлетающейся оболочки.

## Литература

Возможно, лучшее описание плазмы как четвёртого состояния вещества дано [Б. Б. Кадомцевым](#) в первом параграфе учебника «Коллективные явления в плазме» [11]. История рождения физики плазмы описана в статье [53]. Там приведены ссылки на ключевые работы [Ленгмюра](#), [Дебая](#), [Пеннинга](#), [Шоттки](#) и других основоположников физики плазмы.

## Задачи и вопросы

**Задача 1.** Является ли переход вещества из газообразного состояния в плазменное фазовым переходом первого рода?

**Задача 2.** Оцените дебаевскую длину  $\lambda_D$  для плазмы, состоящей из электронов и ионов с зарядом  $Z > 1$ .

[Решение](#) ⇒ 257

**Задача 3.** Найдите закон дисперсии ленгмюровских волн, выполнив линеаризацию уравнений гидродинамики, в которые добавлена электрическая сила, действующая на заряженные частицы.

[Решение](#) ⇒ 257

**Задача 4.** В момент времени  $t = 0$  электроны плазмы мгновенно приобрели скорость  $v_x = v_0 \cos(kx_0)$ , где  $x_0$  – начальная координата электрона. Считая ионы неподвижными, а начальное распределение электронов однородным с заданной плотностью  $n_0$ , описать движение электронов. Найдите условие «опрокидывания» ленгмюровской волны.

[Ответ](#) ⇒ 259

**Задача 5.** Докажите, что в ленгмюровских волнах вихревое магнитное поле равно нулю.

**Задача 6.** Верно ли, что термины «ленгмюровские колебания», «потенциальные электронные колебания» и «плазменные колебания» означают одно и то же?

[Ответ ⇒ 260](#)

**Задача 7.** Найдите частоту потенциальных поверхностных колебаний на границе плазмы с вакуумом.

[Ответ ⇒ 260](#)

**Задача 8.** Оцените равновесную плотность энергии электронных плазменных колебаний.

[Решение ⇒ 260](#)

**Задача 9.** Облако электронов, имеющее форму длинного однородного цилиндра, удерживается от разлёта магнитным полем, направленным вдоль оси цилиндра. Покажите, что под влиянием собственного электрического поля облако вращается вокруг своей оси. Найдите частоту вращения и предельную плотность, при которой магнитное поле способно воспрепятствовать разлёту электронов. Вычислите электрическое поле в системе отсчёта, вращающейся вместе с облаком.

[Решение ⇒ 261](#)

## Лекция 2

# Дебаевское экранирование

Экранирование пробного заряда. Энергия кулоновского взаимодействия в плазме. Плазменный параметр. Идеальная и неидеальная, классическая и вырожденная плазма

### §2.1. Экранирование пробного заряда

Плазма содержит свободные заряды и поэтому является проводником. Как любой проводник, она экранирует внешнее статическое электрическое поле. Это явление можно пояснить на примере двух электродов — двух шаров, соединённых с разноимёнными полюсами электрической батареи, как показано на рисунке 1. В непроводящей среде между шарами возникает электрическое поле. В плазме из-за кулоновского притяжения зарядов противоположного знака отрицательно заряженный шар почти мгновенно будет окружён облаком ионов, а положительно заряженный — облаком электронов, которые компенсируют заряд шариков и тем самым экранируют их поле. Так будет, если шары покрыты слоем изолятора, который не позволяет электронам и ионам

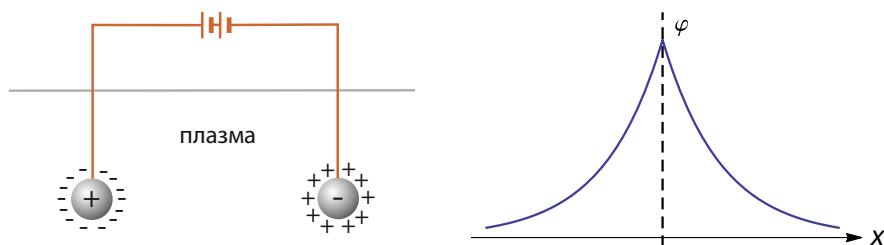


Рис. 1. Слева: дебаевское экранирование пробных зарядов в плазме. Справа: потенциал дебаевского слоя в плазме вблизи заряженной сетки.

плазмы рекомбинировать с зарядами шаров, или если ёмкость батареи достаточно велика, чтобы поддерживать постоянную разность потенциалов.

Заряженное облако покрывает шар тонким слоем, полностью экранируя его электрический заряд, так что вне шара (и облака) электрическое поле равно нулю. Тепловое движение размывает экранирующий слой, увеличивая его толщину. Внутри слоя квазинейтральность отсутствует, а электрическое поле заметно отлично от нуля.

Эффект электростатического экранирования был детально описан Петером Дебаем ([Peter Debye](#)) и Эрихом Хюккелем ([Erich Hückel](#)) в 1923 году на примере электролита, т. е. проводящей жидкости [[33](#)]. В наше время его чаще называют *дебаевским экранированием*, а экранирующий слой — *дебаевским слоем* — в честь авторов открытия. Им же принадлежит излагаемая ниже теория.

Представим, что в плазму помещён *пробный* (т. е. сторонний) точечный заряд  $q$ , и найдём распределение потенциала  $\varphi$  вблизи него. Учтём, что в потенциальном поле электроны и ионы плазмы распределены по закону Больцмана

$$n_s = n_{s0} \exp\left(-\frac{e_s \varphi}{T_s}\right), \quad (1)$$

где индекс  $s$  помечает сорт частиц (электроны, если  $s = e$ , либо ионы, если  $s = i$ ), а  $n_{s0}$  — плотность частиц соответствующего сорта вдали от пробного заряда, где  $\varphi = 0$  и плазма квазинейтральна, то есть

$$\sum_s e_s n_{s0} = e_e n_{e0} + e_i n_{i0} = 0. \quad (2)$$

Если предположить, что потенциальная энергия  $e_s \varphi$  мала по сравнению с температурой  $T_s$  любого сорта частиц плазмы,  $|e_s \varphi| \ll T_s$ , экспоненту в правой части уравнения (1) можно разложить в ряд Тейлора, ограничившись парой первых членов разложения:

$$\exp\left(-\frac{e_s \varphi}{T_s}\right) \approx 1 - \frac{e_s \varphi}{T_s}.$$

Тогда плотность электрических зарядов,

$$\rho_q = \sum_s e_s n_s \approx \sum_s e_s n_{s0} \times \left(1 - \frac{e_s \varphi}{T_s}\right) = - \sum_s \frac{e_s^2 n_{s0}}{T_s} \varphi,$$

будет пропорциональна  $\varphi$ , поскольку в силу квазинейтральности сумма первых членов разложения (не зависящая от  $\varphi$ ) обращается в нуль. Под-

ставив найденную плотность электрических зарядов в уравнение Пуасона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho_q,$$

приведём его к виду

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\varphi}{\lambda_D^2}, \quad (3)$$

где дебаевская длина  $\lambda_D$  вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_s \frac{4\pi e_s^2 n_s}{T_s}, \quad (4)$$

в которой  $n_{s0}$  для краткости заменено на  $n_s$ , так как далее различие между  $n_{s0}$  и  $n_s$  уже несущественно. Обозначение  $\lambda_D$ , определённое в предыдущей лекции формулой (1.5), фактически относилось только к одному сорту частиц плазмы. Из формулы (4) видно, что при вычислении «полной» длины электростатической экранировки складываются обратные квадраты парциальных дебаевских длин

$$\lambda_{Ds} = \sqrt{\frac{T_s}{4\pi e_s^2 n_s}}, \quad (5)$$

вычисленных отдельно для каждого сорта частиц, т. е.

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_s \frac{1}{\lambda_{Ds}^2}.$$

Так как  $\lambda_{Ds}$  не зависит от массы частиц, в простой плазме (где  $e_i = |e_e| = e$ ,  $n_e = n_i = n$ ) при одинаковой температуре ионов и электронов ( $T_i = T_e = T$ ) дебаевские длины электронов и ионов одинаковы, так что

$$\lambda_{Di} = \lambda_{De} = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 n}}, \quad \lambda_D = \frac{\lambda_{De}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{T}{8\pi e^2 n}}. \quad (6)$$

При большом различии парциальных величин  $\lambda_{Di}$  и  $\lambda_{De}$  дебаевская длина определяется частицами того сорта, для которого она меньше. Например, в лоренцевой плазме с многозарядными ионами ( $e_i = Ze$ ,  $n_e = Zn_i$ ,  $Z \gg 1$ ) приближённо  $\lambda_D \approx \lambda_{Di} = \lambda_{De}/\sqrt{Z}$ .

Найдём сферически симметричное решение  $\varphi = \varphi(r)$  уравнения (3). Опуская угловую часть оператора Лапласа  $\nabla^2$ , получаем уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\varphi}{\lambda_D^2}.$$

Его решение, обращающееся в нуль при  $r \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$\varphi = \frac{\mathbb{A}}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right).$$

Растущее решение вида  $(\mathbb{B}/r) \exp(+r/\lambda_D)$  также удовлетворяет уравнению, но в данном случае не имеет смысла. Константа  $\mathbb{A}$  определяется из того условия, что при  $r \rightarrow 0$  должен получиться кулоновский потенциал  $q/r$ . Значит,  $\mathbb{A} = q$ , поэтому окончательно имеем

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right). \quad (7)$$

Дебаевский потенциал (7) при больших  $r$  убывает значительно быстрее, чем кулоновский потенциал пробного заряда  $q/r$ . Он складывается из  $q/r$  и потенциала экранирующего облака зарядов плазмы

$$\varphi_p = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) - \frac{q}{r}. \quad (8)$$

## §2.2. Энергия кулоновского взаимодействия в плазме

В пределе  $r \rightarrow 0$  из (8) находим потенциал  $\varphi_p(0) = -q/\lambda_D$ , который создают частицы плазмы в точке, где находится пробный заряд. Умножая  $\varphi_p(0)$  на  $q$ , находим энергию взаимодействия пробного заряда  $q$  с плазмой

$$q\varphi_p(0) = -\frac{q^2}{\lambda_D}. \quad (9)$$

До сих пор речь шла о пробном заряде, помещённом в плазму извне. Однако всё сказанное выше верно и в отношении тех зарядов, из которых состоит сама плазма. Можно представить, что каждая заряженная частица плазмы окружена экранирующим облаком, а поле, которое она создаёт, с учётом экранировки экспоненциально убывает с расстоянием в соответствии с формулой (7).

Рассуждая таким образом, легко найти энергию взаимодействия зарядов плазмы друг с другом. В соответствии с формулой (9) для этого необходимо просуммировать квадраты всех зарядов и результат разделить на величину дебаевского радиуса. Однако при таком вычислении каждая пара зарядов была бы учтена дважды: один раз при умножении первого заряда на потенциал, который создаёт второй заряд в точке, где расположен первый заряд, а второй раз при умножении второго заряда

на потенциал первого заряда. Правильный ответ получается делением результата суммирования на 2. Таким образом, энергия  $w$  электростатического взаимодействия зарядов плазмы в расчёте на единицу объёма есть

$$w = -\frac{1}{2\lambda_D} \sum_s e_s^2 n_s. \quad (10)$$

Вследствие электрической нейтральности плазмы среднее значение энергии кулоновского взаимодействия её частиц обратилось бы в нуль, если бы они все были равномерно распределены в пространстве независимо друг от друга. Первые ненулевые поправки к внутренней энергии плазмы (по сравнению с идеальным газом) возникают при учёте корреляций между положениями различных частиц, как это видно из предъявленного вывода формулы (10). В этой связи величину (10) называют *корреляционной поправкой* к внутренней энергии плазмы [54, §78].

Далее для простоты ограничимся случаем простой изотермической плазмы с однократно ионизованными ионами одного сорта. Тогда формула (10) принимает совсем простой вид

$$w = -\frac{2ne^2}{2\lambda_D},$$

где  $n = n_e = n_i$  — плотность плазмы (имеющая смысл числа электрон-ионных пар в единице объёма),  $T = T_e = T_i$  — её температура, а  $\lambda_D = \sqrt{T/8\pi e^2 n}$ . Так как суммарная плотность частиц (ионов и электронов) в такой плазме равна  $2n$ , на одну частицу приходится энергия  $W = w/2n$ , т. е.

$$W = -\frac{e^2}{2\lambda_D}. \quad (11)$$

Полезно обратить внимание, что эта энергия не совпадает с грубой оценкой

$$W' \sim -e^2 n^{1/3}, \quad (12)$$

которую можно получить, считая, что энергия кулоновского взаимодействия частиц в плазме равна произведению зарядов пары соседних частиц  $e^2$ , делённой на среднее расстояние  $a \sim n^{-1/3}$  между ними.

Какая же формула верна? Ответ на этот вопрос зависит от величины плазменного параметра.

### §2.3. Плазменный параметр

Куб отношения дебаевской длины  $\lambda_D$  к среднему расстоянию  $a \sim n^{-1/3}$  между частицами плазмы называют *плазменным параметром*. Иногда уточняют, что имеется в виду полное число частиц (электронов и ионов) в сфере с радиусом Дебая:

$$N_D = \frac{8}{3} \pi \lambda_D^3 n. \quad (13)$$

Отсюда происходит другое название плазменного параметра — число частиц в дебаевской сфере.<sup>1</sup>

Сравнивая формулы (11) и (12), легко видеть, что

$$W \sim W'/N_D^{1/3}.$$

Если  $N_D \gg 1$ , то корреляционная энергия  $W$ , определяемая формулой (11), будет в  $N_D^{1/3}$  раз меньше, чем примитивная оценка  $W'$  по формуле (12), не учитывающая эффекта экранирования и поэтому не применимая в этом случае. Если же  $N_D \lesssim 1$ , то, напротив, верна оценка (12), поскольку плазма столь разрежена, что качественные представления об экранировании, использованные при выводе формулы (11) теряют смысла.

Параadoxальным образом из двух формул (11) и (12) верна та, которая даёт меньшее (по абсолютной величине) значение энергии кулоновского взаимодействия.

### §2.4. Идеальная и неидеальная плазмы

Плазменный параметр играет важную роль в теории плазмы, разделяя состояния с непохожими свойствами. Если корреляционную энергию (11) переписать в виде

$$W = -\frac{T}{6N_D},$$

станет ясно, что она мала по сравнению со средней кинетической энергией частиц плазмы

$$K = \frac{3}{2} T, \quad (14)$$

---

<sup>1</sup> Иногда используют *газовый параметр*  $e^2 n^{1/3}/T \sim N_D^{-2/3}$ , характеризующий отношение средней потенциальной энергии к средней кинетической энергии частицы [55, §27].

то есть

$$|W| \ll K, \quad (15)$$

при выполнении условия

$$N_D \gtrsim 1.$$

В этом случае говорят об *идеальной* плазме. Термодинамические свойства идеальной плазмы мало отличаются от свойств идеального газа (задача 8). Например, её внутренняя энергия вычисляется по формуле

$$U = 2n [K + W] = 3nT \left[ 1 - \frac{1}{9N_D} \right]. \quad (16)$$

Множитель  $2n$  здесь связан с тем, что электроны и ионы дают одинаковый вклад, а второе слагаемое в скобках, связанное с кулоновским взаимодействием частиц плазмы, мало; во многих задачах им можно вообще пренебречь. Для идеального газа  $U = \frac{3}{2}nT$ .

В обратном случае,

$$|W| \gtrsim K, \quad (17)$$

плазму называют *неидеальной*. В неидеальной плазме можно наблюдать образование периодических структур, напоминающих кристаллическую решётку.

## §2.5. Классическая и вырожденная плазмы

Предыдущее изложение базировалось на представлениях, выработанных классической, доквантовой физикой. Выясним условия, когда квантовые эффекты несущественны.

Согласно *принципу неопределённости*, имеется неустранимая погрешность (на языке квантовой механики — неопределённость) при одновременном измерении импульса  $p$  и соответствующей ему координаты  $x$ . Погрешности измерений  $\Delta p$  и  $\Delta x$  обусловлены волновой природой частицы и связаны соотношением *неопределённостей Гейзенберга* (Werner Heisenberg, 1927 [56])

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2},$$

где  $\hbar = 6,58 \times 10^{-16}$  эВ·с — редуцированная постоянная Планка (Max Planck, 1900 [57, 58]). Так как неопределённость импульса  $\Delta p$  не может

быть больше самого импульса  $p$ ,

$$\Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta p} \gtrsim \frac{\hbar}{p}.$$

Минимальная неопределенность в положении частицы  $\Delta x$  равна длине волны де Броиля ([Louis de Broglie, 1924 \[59\]](#)):

$$\lambda_B = \frac{\hbar}{p}.$$

Если  $\lambda_B$  мала по сравнению с межчастичным расстоянием  $a \sim n^{-1/3}$ , то из волн де Броиля можно составить пакет, размер которого будет мал по сравнению с  $a$  и который будет двигаться квазиклассически.

В классической физике этот пакет отождествляют с частицей. Для частицы с энергией  $\varepsilon$  и массой  $m$  её импульс равен  $p = \sqrt{2m\varepsilon}$ , поэтому при равной энергии длина волны де Броиля для электронов существенно больше, чем для более тяжёлых ионов. Следовательно, при понижении температуры  $T$  условие  $\lambda_B \ll n^{-1/3}$  сначала нарушается для электронов (с энергией  $\varepsilon \sim T$ ), а уж затем для ионов. По этой причине, говоря о квантовых эффектах в плазме, имеют в виду прежде всего электроны. Обозначим через

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_e \varepsilon}} \quad (18)$$

длину волны электрона (т. е. «длину волны де Броиля для электрона»). Тогда можно сказать, что плазма описывается классической физикой, если

$$\lambda_e \ll n^{-1/3} \quad (19)$$

при  $\varepsilon \sim T$ . С помощью формулы (18) это условие можно переписать в виде

$$T \gg \mathcal{E}_F, \quad (20)$$

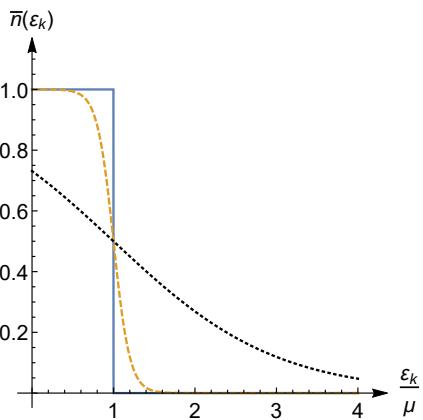
где величину

$$\mathcal{E}_F \sim \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m_e} \quad (21)$$

называют *энергией Ферми* (для электрона).

По определению, энергия Ферми ([Enrico Fermi, 1926 \[60\]](#)) равна энергии самого высшего квантового состояния, в котором может находиться *фермион* при абсолютном нуле температуры. К фермионам, в частности, принадлежат электроны и протоны. Так как энергия Ферми обратно пропорциональна массе, для ионов условие, аналогичное (20), фактически всегда выполняется, поэтому вплоть до экстремально низких

**Рис. 2.** Распределение Ферми–Дира-ка  $\bar{n}(\varepsilon_k) = 1/[\exp(\varepsilon_k/T - \mu/T) + 1]$  за-даёт среднее число частиц с полуце-льным спином в квантовом состоянии с энергией  $\varepsilon_k$ :  $T/\mu = 0$  (сплошная ли-ния),  $T/\mu = 0,1$  (штриховая линия) и  $T/\mu = 1$  (точки); химический потен-циал  $\mu$  определяется полным числом частиц  $N = \sum_k \bar{n}(\varepsilon_k)$  и равен энергии Ферми  $\mathcal{E}_F$  в пределе  $T \rightarrow 0$ , когда с вероятностью 1 заняты низшие состо-яния с  $\varepsilon \leq \mathcal{E}_F$ ; при  $\exp(-\mu/T) \gg 1$  полу-чаем распределение Больцмана  $\bar{n}(\varepsilon_k) = \exp(\mu/T - \varepsilon_k/T) \ll 1$ .



температур ионы описываются классической физикой. Для свободных электронов в металлах, где их плотность  $n_e \approx 10^{21}\text{--}10^{22} \text{ см}^{-3}$  очень вели-ка, энергия Ферми варьируется в пределах от 1 до 3 эВ, так что неравен-ство (20) нарушается при комнатных температурах.

В *вырожденной плазме*, характеризуемой условием

$$T \lesssim \mathcal{E}_F, \quad (22)$$

средняя кинетическая энергия электронов

$$K' = \frac{3}{5} \mathcal{E}_F \quad (23)$$

примерно равна энергии Ферми и не зависит от температуры, а функ-ция распределения существенно отличается от максвелловской, как по-казано на рисунке 2. Происхождение термина «вырожденная плазма» связано с тем, что при низкой температуре квантовые состояния элек-тронов вырождены по энергии, а именно: на каждом энергетическом уровне находятся по два электрона (задача 5).

Избегая подробного изложения квантовой теории (которая не яв-ляется предметом данного курса), можно было бы предположить, что разработанные выше представления о дебаевской экранировке в классиче-ской плазме сохраняют силу и в квантовом случае, если температуру  $T$  во всех формулах заменить на энергию Ферми (задача 7). Однако при  $T \ll \mathcal{E}_F$  полная дебаевская длина  $\lambda_D \approx \lambda_{Di}$  определяется меньшей по величине дебаевской длиной ионов  $\lambda_{Di} = \sqrt{T/4\pi e_i^2 n_i}$ . Как мы увидим в

следующем параграфе, в квантовой области  $N_D \ll 1$ , поэтому представления о дебаевской экранировке здесь не применимы, а понятие дебаевской длины не имеет большого смысла.

Новым эффектом в вырожденной плазме является обменное взаимодействие, не имеющее аналога в классической физике. Квантовая механика предсказывает, что даже при отсутствии непосредственного силового взаимодействия имеет место своеобразное (обменное) взаимодействие частиц, находящихся в одинаковом квантовом состоянии. Так, если частицы подчиняются статистике Ферми, то это влияние проявляется в том, что в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы;<sup>2</sup> аналогичное влияние, проявляющееся иным образом, имеет место и для частиц, подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна. В расчёте на одну частицу энергия обменного взаимодействия в квантовом пределе, т. е. при  $K' \gg K$ , приблизительно совпадает с величиной  $W' \sim -e^2 n^{1/3}$ ; см. (12). При  $K \gg K'$  нужно использовать другую оценку (задача 9):

$$W'' \sim -e^2 \lambda_e^2 n. \quad (24)$$

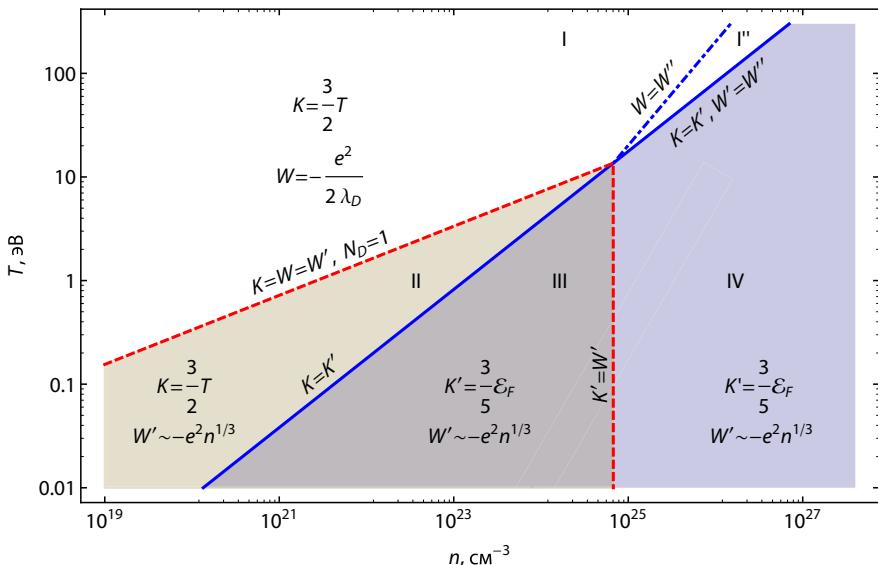
Она заменяет выражение для корреляционной энергии  $W$  в сверхплотной классической плазме (область  $\Pi''$  на рисунке 3 в следующем параграфе).

## §2.6. Классификация плазмы

В плоскости параметров  $n$  и  $T$  линии, соответствующие равенству энергий  $K, K', |W|, |W'|$  и  $|W''|$  попарно в различных сочетаниях, разделяют различные виды плазмы. Из пяти перечисленных величин можно составить десять независимых равенств. Однако некоторые из них, по существу, приводят к одинаковой зависимости  $T$  от  $n$ . А другие если и выполняются, то за пределами применимости соответствующих формул. В итоге остаются всего три значимых равенства:  $K = K'$ ,  $K = |W|$  и  $K' = |W'|$ . На рисунке 3 соответствующие им линии разделяют четыре области, отвечающие классической идеальной (I), классической неидеальной (II), вырожденной неидеальной (III) и вырожденной идеальной (IV) плазме. Ещё одно равенство,  $W = W''$ , выделяет внутри идеальной классической плазмы остров (I''), где энергия обменного взаимодействия  $W''$  больше (по абсолютной величине), чем корреляционная

---

<sup>2</sup> Говоря о квантовом состоянии, мы подразумеваем состояния, определённые значением всех квантовых чисел, в том числе направлением момента частицы.



**Рис. 3.** Классификация плазмы: I – классическая идеальная ( $K > |W|$ ), I'' – классическая идеальная ( $K > |W''|$ ), II – классическая неидеальная ( $K < |W'|$ ), III – вырожденная неидеальная ( $K' < |W'|$ ), IV – вырожденная идеальная ( $K' > |W'|$ ). На границе между классической и вырожденной плазмой (синяя линия)  $K = K'$  и  $T \propto n^{2/3}$ . На границе между идеальной и неидеальной плазмой (красная штриховая линия) в классической области  $K = W = W'$ ,  $N_D = 1$  и  $T \propto n^{1/3}$ , тогда как в квантовой области  $K' = W'$  и  $n = \text{const}$ . Внутри области I проходит граница (синяя штрих-пунктирная линия)  $W = W''$ ,  $T \propto n$ , где корреляционная поправка к энергии сравнивается с энергией обменного взаимодействия.

поправка  $W$  к энергии кулоновского взаимодействия.

Чтобы разобраться в переплетениях границ, удобно ввести обозначения для боровского радиуса атома водорода

$$a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,529 \times 10^{-8} \text{ см},$$

энергии его ионизации

$$J = \frac{e^2}{2a_B} = 13,6 \text{ эВ}$$

и характерной плотности твёрдого тела

$$n_B = \frac{1}{a_B^3} = 6,75 \times 10^{24} \text{ см}^{-3}.$$

Если теперь перейти к безразмерным переменным, в которых любая энергия измеряется в единицах  $J$ , а плотность — в единицах  $n_B$ , без вычислений будет ясно, что с точностью до несущественного числового множителя

$$K' \sim n^{2/3},$$

так как  $K' \sim \mathcal{E}_F \propto n^{2/3}$ . Аналогичным образом легко установить, что

$$W \sim n^{1/2}/T^{1/2}, \quad W' \sim n^{1/3}, \quad W'' \sim n/T,$$

а кроме того,

$$N_D \sim T^{3/2}/n^{1/2}.$$

Построение диаграммы на рисунке 3 удобно начать с определения границы между классической и вырожденной плазмами. Так как

$$K \sim T,$$

из условия  $K = K'$  на этой границе имеем

$$T \sim n^{2/3}. \quad (25)$$

Область применимости классических законов физики,  $T \gg n^{2/3}$ , на рисунке 3 лежит выше сплошной синей линии. В её пределах построим границу между идеальной и неидеальной плазмами. В принятых безразмерных обозначениях равенство  $K = |W|$  имеет вид

$$T \sim n^{1/3}. \quad (26)$$

Плазма неидеальна ниже штриховой красной линии, где  $N_D < 1$ .

При очень большой плотности плазмы энергия обменного взаимодействия  $W''$  может превысить корреляционную поправку  $W$ . Равенство  $W = W''$  достигается на штрих-пунктирной синей линии

$$T \sim n. \quad (27)$$

Ниже неё обменные эффекты важнее корреляционных, но нигде в классической области обменная энергия не превышает кинетическую. Действительно, равенство  $K = |W''|$  даёт линию  $T \sim n^{1/2}$  (не показана), а

она проходит либо в области вырожденной плазмы (при  $n > n_B$ ), либо там, где обменная энергия меньше корреляционной поправки (при  $n < n_B$ ).

Переходя к квантовой области,  $T \lesssim n^{2/3}$ , заметим, что на её границе (25) равны два выражения для энергии обменного взаимодействия,  $W' = W''$ , но формула для  $W''$  применима только в классическом пределе, поэтому во всей этой области часть энергии, обусловленная наличием в плазме заряженных частиц, вычисляется по формуле для  $W'$ . Граница идеальной и неидеальной вырожденной плазмы

$$n \sim 1 \quad (28)$$

определяется из равенства  $K' = |W'|$ . В размерных единицах она соответствует вертикальной красной штриховой линии  $n = n_B$ . Правее неё вырожденная плазма идеальна.

Интересно, что классическая плазма становится более идеальной при уменьшении плотности, тогда как в вырожденной плазме роль электростатического взаимодействия уменьшается при увеличении плотности.

Границы всех областей (25)–(28) пересекаются в общей точке  $T \sim 1$ ,  $n \sim 1$  (т. е.  $T = J$ ,  $n = n_B$ ), как показано на рисунке 3. Что происходит при удалении от этой точки в сторону очень больших или очень малых температур или плотностей? При малой температуре плазма превращается в нейтральный газ. При температуре  $T \sim m_e c^2 \approx 500$  кэВ ( $1$  кэВ =  $10^3$  эВ) начинают проявляться релятивистские эффекты. Релятивистская плазма плохо изучена, так как в близлежащей части Вселенной нет объектов с температурой в сотни кэВ, ведь даже в ядре Солнца  $T \sim 1$  кэВ. Чрезвычайно разрежённая плазма с плотностью  $n \sim 1 \text{ см}^{-3}$  имеется в межзвёздном пространстве. Считается, что она полностью ионизована даже при её сравнительно малой температуре  $T \sim 1$  эВ. Наконец, при сверхвысокой плотности, достижимой в ядрах массивных звёзд, вырожденная плазма становится релятивистской даже при невысокой температуре (задача 12). При чуть более высокой плотности начинается нейтронизация звёзд: электроны сливаются с протонами, образуя нейтроны (задача 13).

## Литература

Хорошим введением в теорию электростатического экранирования и термодинамику классической идеальной плазмы могут служить «Лек-

ции по физике плазмы» Д. А. Франк-Каменецкого [4, глава I, §2; глава II, §1–3]. В строгом виде термодинамика слабонеидеальной классической и вырожденной плазмы изложена в «Статической физике» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [61, §78, §80].

### Задачи и вопросы

**Задача 1.** Можно ли разлагать экспоненту в распределении Больцмана (1), как это сделано при выводе уравнения (3), учитывая, что его решение (7) обращается в бесконечность при  $r = 0$ ? Проверьте, что в идеальной плазме минимальное расстояние  $r_*$ , на котором разложение ещё допустимо, меньше, чем межчастичное расстояние  $n^{-1/3}$ .

Решение  $\Rightarrow 261$

**Задача 2.** Найдите распределение потенциала в дебаевском слое вблизи плоской заряженной сетки, помещённой в плазму и находящейся под заданным потенциалом  $eU \ll T$ . В противоположном пределе,  $eU > T$ , вблизи сетки образуется ленгмюровский слой. Оцените его ширину с помощью закона «трёх вторых».

Решение  $\Rightarrow 262$

**Задача 3.** Плотность ионов в плазме задана как функция координат и имеет вид ступеньки: она равна  $n_0$  при  $x < 0$  и  $n_0 + n_1$  при  $x > 0$ , причём  $n_1 \ll n_0$ . Найдите распределение потенциала и плотности электронов, если электронная температура равна  $T$ .

Ответ  $\Rightarrow 262$

**Задача 4.** Найдите условие идеальности лоренцевской плазмы, состоящей из электронов и многократно ионизованных ионов с большим зарядовым числом  $Z \gg 1$ .

Решение  $\Rightarrow 262$

**Задача 5.** Почему при абсолютном нуле температуры кинетическая энергия газа электронов не равна нулю?

Ответ  $\Rightarrow 262$

**Задача 6.** Вычислите энергию Ферми и среднюю кинетическую энергию электрона в вырожденном идеальном электронном газе с нулевой температурой.

Решение  $\Rightarrow 264$

**Задача 7.** Вычислите дебаевскую длину в вырожденном электронном газе с нулевой температурой.

Решение  $\Rightarrow 264$

**Задача 8.** Вычислите корреляционные поправки к свободной энергии и давлению идеальной классической плазмы.

Решение  $\Rightarrow 265$

**Задача 9.** Получите оценку (24) для энергии обменного взаимодействия в классической плазме. [Решение ⇒ 265](#)

**Задача 10.** К какому виду относится плазма в центре Солнца? В центре звезды «белый карлик»? [Ответ ⇒ 266](#)

**Задача 11.** Чему равна глубина проникновения статического электрического поля в плазму? В хорошо проводящий металл?

[Решение ⇒ 266](#)

**Задача 12.** При какой плотности вырожденная электронная плазма становится релятивистской? [Решение ⇒ 266](#)

**Задача 13.** При какой плотности происходит нейтронизация водородной плазмы, т. е. электроны  $e$  прилипают к протонам  $p$ , образуя нейтроны  $n$  и электронные нейтрино  $\nu_e$ ? Учтите, что реакция  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$  происходит с поглощением энергии  $Q = 0,78$  МэВ в каждом акте.

[Решение ⇒ 266](#)

## Лекция 3

# Ионизационное равновесие

---

**Уравнение Саха. Степень ионизации плазмы.  
Ограничность теории Саха**

Чем выше температура, тем больше в газе частиц, которые имеют кинетическую энергию, достаточную для ионизации нейтрального атома при столкновении с ним. В процессе ионизации с орбиты атома выбивается связанный электрон, который переходит в свободное состояние. Ясно, что доля ионизованных атомов зависит от температуры, но как?

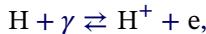
Универсальный ответ можно дать в том случае, когда ионизованный газ находится в состоянии *термодинамического равновесия*. На языке статистической физики ионизация и обратный ей процесс рекомбинации являются конкурирующими химическими реакциями. В состоянии термодинамического равновесия прямая и обратная химические реакции идут с равными скоростями, что соответствует минимуму *термодинамического потенциала*. Для отыскания равновесной степени ионизации можно было бы минимизировать термодинамический потенциал, но мы воспользуемся более наглядным, хотя и менее строгим подходом.

Для простоты рассмотрим ионизацию атомарного водорода, полагая, что при интересующих нас температурах молекулы водорода уже диссоциировали. В следующей записи



верхняя стрелка отвечает ионизации атома водорода H с образованием положительного иона  $\text{H}^+$  (т. е. протона) и электрона e, а нижняя стрелка — рекомбинации продуктов ионизации с восстановлением нейтрального атома. Строго говоря, как в прямой, так и в обратной реакции (1) необходим ещё как минимум один реагент, без которого невозможно одновременно обеспечить выполнение законов сохранения энергии и импульса (задача 1). Этим реагентом может быть фотон, как в реакции

фотоионизации (фоторекомбинации),



или электрон, как в реакции ударной ионизации (тройной рекомбинации),



или другая частица. Для определения равновесной степени ионизации сорт этой четвёртой частицы не имеет значения. Важно только, чтобы скорости прямой и обратной реакций в каждом канале ионизации/рекомбинации были равны (*принцип детального равновесия*). Скорости наиболее важных реакций будут вычислены в лекции 10.

### §3.1. Уравнение Саха

Пусть первоначально в объёме  $V$  имеется  $N_0$  атомов водорода. В результате однократной ионизации возникнет  $N_i$  ионов, столько же электронов  $N_e = N_i$  и останется  $N_a = N_0 - N_i$  атомов.

Выделим одно атомное ядро — в данном случае это протон. Если рядом с протоном находится связанный электрон, они образуют атом; в противном случае протон следует считать ионом. В термодинамическом равновесии с заданной температурой  $T$  вероятность обнаружить электрон в квантовом состоянии, которое характеризуется набором квантовых чисел  $k, s$  и энергией  $\varepsilon_k$ , убывает с увеличением энергии по экспоненциальному закону:

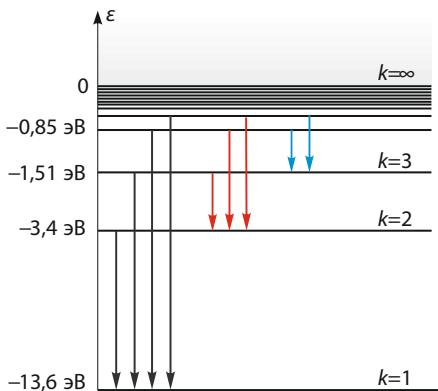
$$w_{ks} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right). \quad (2)$$

Нормировочная константа  $Z$  (её называют статистической суммой) определяется из условия, что суммарная вероятность обнаружить электрон (неважно, с какой энергией и в каком квантовом состоянии) равна единице:

$$\sum_k \sum_s w_{ks} = 1. \quad (3)$$

Отрицательным значениям энергии  $\varepsilon_k < 0$  в формуле (2) отвечают связанные состояния, а положительная энергия  $\varepsilon_k > 0$  соответствует свободному движению (рис. 1). Энергия связанных состояний составляет *дискретный спектр* и в атоме водорода определяется формулой (задача 2)

$$\varepsilon_k = -\frac{J}{k^2}, \quad (4a)$$



**Рис. 1.** Схема уровней энергии электрона в поле протона. Связанные состояния имеют отрицательную энергию; переходы между ними формируют излучение в дискретном спектре. Энергия свободного электрона положительна и фактически не квантуется, принимая любые значения. При захвате свободного электрона на основное состояние  $k = 1$  излучается гамма-квант с энергией  $\hbar\omega = \varepsilon + 13,6$  эВ, которая изменяется пропорционально энергии  $\varepsilon$  электрона.

где  $k = 1, 2, \dots$  принимает целые значения и называется главным квантовым числом. Величину  $J = m_e e^4 / 2\hbar^2 = 13,6$  эВ называют *энергией ионизации* (реже — потенциалом ионизации) атома водорода; со знаком минус она равна энергии основного атомарного уровня связанного электрона  $\varepsilon_1 = -J$ , которому соответствует  $k = 1$ . Полезно заметить, что в используемом приближении энергия не зависит от других квантовых чисел, которые в формулах (2) и (3) обозначены индексом  $s$ .

В свободном состоянии энергию удобно выразить через импульс электрона  $p$  на большом удалении от протона:

$$\varepsilon_k = \frac{p^2}{2m_e}. \quad (46)$$

Поскольку импульс электрона в макроскопических системах фактически не квантуется, составляя непрерывный набор возможных значений, свободному движению отвечает *непрерывный спектр* энергии.

Вычислим коэффициент  $Z$  в формуле (2). Разделяя в условии нормировки (3) состояния с положительной и отрицательной энергией, имеем

$$Z = \sum_{\varepsilon_k < 0} \sum_s \exp(-\varepsilon_k/T) + \sum_{\varepsilon_k > 0} \sum_s \exp(-\varepsilon_k/T). \quad (5)$$

В сумме по связанным состояниям электрона с  $\varepsilon_k < 0$  учтём только самый нижний уровень энергии в атоме,  $k = 1$ , полагая, что в связанном состоянии электрон с подавляющей вероятностью находится на основном уровне  $k = 1$  с энергией  $\varepsilon_1 = -J$ ; точность такого приближения

будет установлена в §3.3. Тогда

$$\sum_{\varepsilon_k < 0} \sum_s \exp(-\varepsilon_k/T) \approx \sum_s \exp(-\varepsilon_1/T) = g_a \exp(J/T),$$

где  $g_a = \sum_s$  — статистический вес атома, т. е. число различных квантовых состояний атома (характеризуемых индексом  $s$ ) с одинаковой энергией  $\varepsilon_1 = -J$ . Статистический вес (или статвес) как таковой выражает наличие внутренних степеней свободы у частицы или системы частиц, которые в рамках используемого приближения не изменяют энергию системы.<sup>1</sup> Например, электрон имеет собственный (внутренний) момент импульса, который никак не связан с движением электрона в пространстве и может быть равен половине приведённой постоянной Планка  $\hbar = h/2\pi$  со знаком «плюс» или «минус». При этом говорят, что у электрона есть спин, который направлен либо «вверх» ( $S_z = +\frac{1}{2}$ ), либо «вниз» ( $S_z = -\frac{1}{2}$ ). Учёт внутренних степеней свободы (т. е. спина) в первом приближении не меняет энергию уровней электрона в атоме. В этом случае говорят, что уровни энергии системы *вырождены*. При подсчёте вероятности найти электрон в состоянии с заданной энергией должны быть учтены все возможные квантовые состояния с этой энергией. Это обстоятельство учитывают, вводя статвес энергетического уровня, в данном случае статвес основного состояния атома  $g_a$ .

Статвес атома вычисляется как произведение статвеса ядра и статвеса электронной оболочки.<sup>2</sup> Статвес атомарного электрона в состоянии с орбитальным моментом  $\hbar L$  (где  $L$  — целое число) и спиновым моментом  $\hbar S$  (где  $S = \frac{1}{2}$ ) вычисляется по формуле  $g = (2S + 1)(2L + 1)$ , как следует из решения задачи 4. В основном состоянии  $L = 0$ , т. е.  $g = 2$ . Такой же статвес имеет ядро, а поэтому  $g_a = 2 \times 2 = 4$ .

Свободному электрону и свободному иону также приписывают статвес соответственно  $g_e$  и  $g_i$ . Энергия свободного электрона согласно (46) зависит только от его импульса, а каждому значению импульса у электрона со спином  $S = \frac{1}{2}$  соответствуют  $2S + 1 = 2$  квантовых состояния, т. е.  $g_e = 2$ . Такой же статвес имеет свободный протон,  $g_i = 2$ .

---

<sup>1</sup> Спин-орбитальное взаимодействие приводит к так называемому расщеплению энергетических уровней, вследствие чего энергии квантовых состояний с разным значением спина немного различаются. В тех случаях, когда это различие несущественно для рассматриваемого явления, вводят статвес, равный числу квантовых состояний, которым приписываются одинаковую энергию.

<sup>2</sup> Такое правило подразумевает, что квантовое состояние ядра совершенно не влияет на энергию электрона в атоме.

Поскольку состояния с  $\varepsilon_k > 0$  образуют непрерывный спектр, суммирование по положительным значениям энергии в (5) можно заменить интегрированием. Квантовая теория доказывает, что при переходе к квазиклассическому описанию каждому квантовому состоянию электрона с импульсом  $\mathbf{p}$  соответствует ячейка фазового пространства, объём которой  $d^3p d^3x$  равен  $(2\pi\hbar)^3$ . Иными словами, переход к интегрированию происходит по правилу

$$\sum_{\varepsilon_k > 0} \sum_s \exp(-\varepsilon_k/T) \Rightarrow g_{egi} \int \frac{d^3p d^3x}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e T}\right),$$

где множитель  $g_{egi}$  добавлен, дабы учесть наличие нескольких квантовых состояний, отвечающих одной и той же энергии  $\varepsilon_k = p^2/2m_e$  пары электрон-ион. Вычислив интеграл, получаем

$$\begin{aligned} g_{egi} \int \frac{d^3p d^3x}{(2\pi\hbar)^3} e^{-p^2/2m_e T} &= \frac{g_{egi}}{(2\pi\hbar)^3} \times \int d^3x \times \int_0^\infty 4\pi p^2 dp e^{-p^2/2m_e T} = \\ &= \frac{g_{egi}}{(2\pi\hbar)^3} \times V_e \times (2\pi m_e T)^{3/2} = \\ &= \frac{g_{egi} V_e}{(2\pi\hbar^2/m_e T)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Из интеграла по  $d^3x$  в последнее выражение вошёл объём  $V_e$ , доступный одному свободному электрону. Вообще говоря, каждый свободный электрон может находиться в любой точке объёма  $V$ , занятого плазмой. Однако при подсчёте вероятности обнаружения электрона рядом с заданным ядром не важно, какой именно из полного набора  $N_e$  свободных электронов есть тот самый электрон. Поэтому в качестве  $V_e$  нужно взять объём, равный отношению полного объёма плазмы к количеству свободных электронов,  $V_e = V/N_e = n_e^{-1}$ . Он выражается через плотность электронов  $n_e = N_e/V$ . Обозначая через

$$\lambda_{Te} = \sqrt{2\pi\hbar^2/m_e T}$$

длину волны электрона со скоростью порядка тепловой, запишем результат вычисления нормировочной константы в компактном виде:

$$\mathbb{Z} = g_a e^{J/T} + g_{egi}/\lambda_{Te}^3 n_e.$$

Вероятность  $w_a$  того, что рассматриваемый протон является ядром нейтрального атома (т. е. вблизи него находится электрон в связанном

состоянии), равна сумме вероятностей по состояниям с отрицательной энергией. Эта сумма фактически уже вычислена выше:

$$w_a = \frac{1}{Z} \sum_{\varepsilon_k < 0} \sum_s \exp(-\varepsilon_k/T) = \frac{g_a e^{J/T}}{g_a e^{J/T} + g_e g_i / \lambda_{Te}^3 n_e}.$$

Все остальные квантовые состояния соответствуют ионизованному атому. Их суммарная вероятность равна

$$w_i = 1 - w_a = \frac{g_e g_i / \lambda_{Te}^3 n_e}{g_a e^{J/T} + g_e g_i / \lambda_{Te}^3 n_e}.$$

Отношение двух вероятностей определяет отношение плотностей ионов и атомов в плазме:

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{w_i}{w_a} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{\lambda_{Te}^3 n_e}.$$

После умножения на  $n_e$  отсюда получается *уравнение Саха*

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{\lambda_{Te}^3} \quad (6)$$

(Meghnad Saha, 1920 [62]). Функция температуры

$$K(T) = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{\lambda_{Te}^3} \quad (7)$$

в правой части уравнения называется *константой равновесия*.

Уравнение Саха можно вывести методами статистической физики, минимизируя термодинамический потенциал. Этому посвящены задачи 12 и 13.

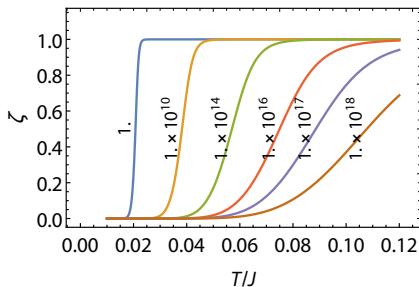
### §3.2. Степень ионизации плазмы

*Степень ионизации* плазмы характеризует отношение  $\zeta = n_i/n_0$ . Через  $\zeta$  нетрудно выразить плотности частиц всех сортов волях от суммарной плотности ядер (как в атомах, так и в ионах)  $n_0 = N_0/V$ :

$$n_e = n_i = \zeta n_0, \quad n_a = (1 - \zeta) n_0.$$

Уравнение Саха связывает степень ионизации  $\zeta$  с  $n_0$  и  $T$ . Вводя обозначение

$$G(T) = \frac{g_i g_e / g_a}{\lambda_{Te}^3 n_0},$$



**Рис. 2.** Степень ионизации термодинамически равновесной водородной плазмы при различных значениях плотности, которые указаны на рисунке в единицах  $\text{см}^{-3}$ .

его удобно переписать в виде

$$\frac{\zeta^2}{1 - \zeta} = G(T) e^{-J/T}. \quad (8)$$

Зависимость  $\zeta(T)$  при разных значениях  $n_0$  изображена на рисунке 2. При малых температурах  $\zeta$  стремится к нулю, при больших — к единице. Условно приняв значение  $\zeta = \frac{1}{2}$  за точку перехода в ионизованное состояние, из (8) получим уравнение

$$T_* = J / \ln[2G(T_*)] \quad (9)$$

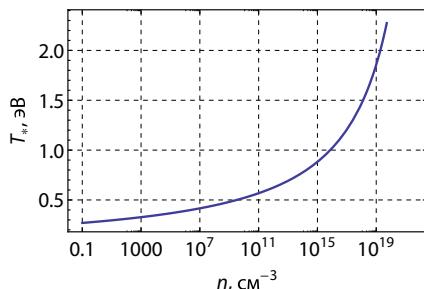
для определения температуры перехода  $T_*$ .

На первый взгляд, температура ионизации  $T_*$  по порядку величины должна равняться энергии ионизации  $J$ , поскольку тогда средняя кинетическая энергия свободного электрона как раз достаточна для однократной ионизации атома из основного энергетического состояния. На самом же деле, за исключением предела сверхвысоких плотностей, температура перехода значительно ниже,  $T_* \ll J$ , так как перед экспонентой в правой части уравнения (8) стоит множитель  $G(T) = g_{ie}/g_a \lambda_{Te}^3 n_0 \sim (T/\epsilon_F)^{3/2}$ , который в классической плазме, где  $T \gg \epsilon_F \sim \hbar^2 n_0^{2/3} / 2m_e$ , имеет очень большую величину. Например,  $G = 1.5 \times 10^8$  в плазме с плотностью  $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и температурой  $T = J = 13.6 \text{ эВ}$ . При этом доля ионизованных частиц  $\zeta$  уже очень близка к единице:

$$1 - \zeta = 1.8 \times 10^{-8}.$$

Точное решение уравнения (9) приведено на графике 3. При указанной выше плотности  $T_* = 0.065J = 0.88 \text{ эВ}$ .

Огромная величина  $G(T)$  обусловлена тем фактом, что свободному электрону доступен практически весь объём плазмы в отличие от свя-



**Рис. 3.** Температура перехода в ионизованное состояние атомарного водорода в зависимости от плотности газа.

занного электрона, который привязан к ядру атома. Поэтому вероятность обнаружить электрон в свободном состоянии существенно больше, чем можно было бы ожидать, сравнивая экспоненциально убывающие с ростом энергии вероятности (2) квантовых состояний. Можно также сказать, что в непрерывном спектре велика плотность квантовых состояний, а  $G(T)$  есть эффективный статистический вес состояния с заданной энергией в непрерывном спектре.

Если велико значение не только  $G(T_*)$ , но и  $\ln G(T_*)$ , под знаком логарифма в (9) с приемлемой точностью можно заменить  $T_*$  на  $J$ , получив в результате оценку

$$T_* \approx J / \ln G(J).$$

В разрежённом газе переход в ионизованное состояние происходит в сравнительно узком диапазоне температур шириной

$$\Delta T_* \approx T_*^2 / J \approx J / \ln^2 G(J).$$

Это хорошо видно из рисунка 2.

### §3.3. Ограничность теории Сахá

Обсудим теперь, насколько большую ошибку мы сделали, исключив из суммы по связанным состояниям возбуждённые уровни атома водорода. Поскольку заметная ионизация происходит при  $T \sim T_* \ll J$ , вероятность перехода электрона в первое возбуждённое ( $k = 2, \varepsilon_2 = -\frac{1}{4}J$ ) состояние из основного состояния ( $k = 1, \varepsilon_1 = -J$ ) очень мала, так как пропорциональна

$$w_2/w_1 = \exp[-\varepsilon_2/T] / \exp[-\varepsilon_1/T] = \exp\left[-\frac{3}{4}J/T\right].$$

Другими словами, электрон «предпочитает» перейти в непрерывный спектр, вместо того чтобы «осесть» на следующий уровень. Причина такого поведения заключается в том, что количество уровней в непрерывном спектре очень велико, и хотя вероятность находиться на каждом из них относительно мала, суммарная вероятность попасть на какой-то уровень непрерывного спектра оказывается значительной уже при  $T \ll J$ .

Более пристальный анализ показывает, что отброшенная часть ряда по возбуждённым атомарным уровням расходится, так как статвес высших возбуждённых уровней стремится к бесконечности (задача 4). Однако эта расходимость носит формальный характер, так как высшие возбуждённые уровни существуют только в идеализированной задаче об энергетических уровнях изолированного атома. Воздействие соседних атомов, а также электрического поля заряженных частиц приводит к исчезновению этих уровней (задача 5).

Применимость уравнения Саха к расчёту ионизационного состояния газа может быть ограничена по причинам, более фундаментальным, нежели величина членов, отброшенных при её выводе. Уравнение Саха неприменимо, если плазма не является замкнутой системой, например если из неё свободно выходит излучение, которое сопровождает процесс рекомбинации. В этом случае степень ионизации находят, сравнивая скорости реакций ионизации и рекомбинации. Анализу этих реакций посвящена лекция 10. В задаче 8 приведён ещё один пример, когда уравнение Саха заведомо неправильно предсказывает степень ионизации в центре Солнца.

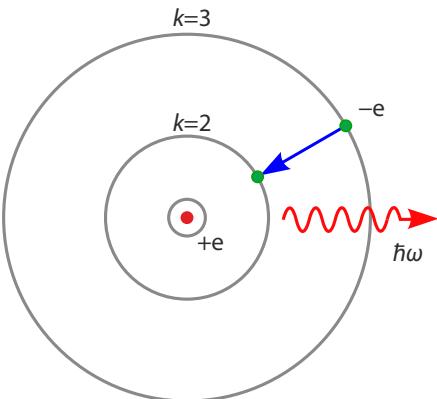
## Литература

В «Лекциях по физике плазмы» Д. А. Франк-Каменецкого [4, глава 2, §4–9] дано наиболее детальное и вместе с тем менее всего формализованное изложение теории Саха в учебной литературе. Вывод уравнения Саха методами статистической физики имеется в курсе «Теоретической физики» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [54, §104], там же указан способ вычисления статического веса атома и иона.

## Задачи и вопросы

**Задача 1.** Объясните, почему при столкновении иона и электрона рекомбинация с образованием нейтрального атома невозможна без уча-

**Рис. 4.** Планетарная модель Бора атома водорода. Электрон вращается вокруг ядра по круговой орбите. Переход с одной орбиты на другую сопровождается излучением или поглощением кванта электромагнитной энергии  $\hbar\omega$ . Радиусы орбит пропорциональны квадрату главного квантового числа  $k$ . Изображённый переход  $3 \rightarrow 2$  излучает фотон с длиной волны 656 нм в первую линию серии Бальмера.



стия ещё одной частицы или фотона.

Решение  $\Rightarrow$  267

**Задача 2.** Найдите энергию связанных электронов в атоме водорода, используя планетарную (Боровскую) модель атома.

**Решение.** Энергия электрона, движущегося по круговой орбите вокруг протона, состоит из кинетической энергии и энергии кулоновского взаимодействия с протоном:

$$\varepsilon = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{r}.$$

Равновесный радиус орбиты определяется из равенства центробежной силы и силы кулоновского притяжения электрона к положительно заряженному протону:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}.$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия  $-e^2/r$  по абсолютной величине в 2 раза превышает кинетическую энергию  $m_e v^2/2$ , а полная энергия электрона отрицательна:

$$\varepsilon = -\frac{m_e v^2}{2} = -\frac{e^2}{2r}.$$

Согласно постулату Нильса Бора (Niels Bohr, 1913 [63]), электрон в атоме водорода может находиться только на стационарных орбитах (рис. 4), которым соответствуют значения орбитального момента  $m_e vr$ , кратные кванту действия — приведённой постоянной Планка  $\hbar = h/2\pi$ , т. е.

$$m_e vr = \hbar k,$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$  — главное квантовое число. Подставляя это соотношение в уравнения баланса сил, находим радиус орбиты

$$r_k = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} k^2,$$

скорость

$$v_k = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{c}{k}$$

электрона, а затем и энергию соответствующего уровня

$$\varepsilon_k = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{k^2}.$$

Правило квантования орбитального момента по Бору означает, что на радиусе орбиты  $r$  укладывается целое число длин де Бройля  $\lambda_e = \hbar/m_e v$ , но это стало ясно только после открытия волнового дуализма электрона Луи де Бройлем ([Louis de Broglie, 1924 \[59\]](#)).

Радиус орбиты первого (основного) уровня

$$a_B = r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0,5 \times 10^{-8} \text{ см}$$

называют *боровским радиусом*. Радиусы орбит возбуждённых состояний с  $k > 1$  увеличивается пропорционально квадрату их номера  $k$ ,  $r_k = a_B k^2$ .

Минимальная энергия, которую необходимо передать атомарному электрону на низшем энергетическом уровне, чтобы ионизовать атом, равна (со знаком минус) энергии основного состояния:

$$J = -\varepsilon_1 = \frac{e^2}{2a_B} = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ эВ.}$$

Энергия более высоких (возбуждённых) атомарных уровней  $\varepsilon_k = -J/k^2$  с увеличением их номера  $k$  ступенчато к нулевой величине. Соответственно, для ионизации возбуждённого атома требуется меньшая энергия.

Отношение  $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$  скорости электрона на основном уровне к скорости света известно в квантовой физике под названием *постоянной тонкой структуры*. Соответственно, на основном энергетическом уровне скорость электрона примерно в 137 раз меньше скорости света, а на более высоких уровнях она уменьшается пропорционально  $k^{-1}$ ,  $v_k = \alpha c/k$ . Через постоянную тонкой структуры удобно также выразить энергию ионизации,  $J = \frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2$ , а для боровского радиуса легко запомнить простое выражение  $a_B = e^2/2J$ .

**Задача 3.** Обобщите решение предыдущей задачи на случай водородоподобного иона с зарядом ядра  $Ze$  и одним связанным электроном.

[Решение](#)  $\Rightarrow 267$

**Задача 4.** Пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием, найдите статвес атома водорода для энергетического уровня с главным квантовым числом  $k$ .

[Решение](#)  $\Rightarrow 267$

**Задача 5.** Статвес атома на  $k$ -ом энергетическом уровне равен  $2k^2$ , поэтому сумма ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \exp(-\varepsilon_k/T)$ , представляющая вероятность электрону находиться в связанном состоянии, формально расходится. Означает ли это, что пренебрежение вкладом уровней с  $k \rightarrow \infty$  при выводе формулы Саха ошибочно?

Ответ  $\Rightarrow 268$

**Задача 6.** Почему при фиксированной температуре степень ионизации тем выше, чем меньше плотность?

Решение  $\Rightarrow 268$

**Задача 7.** Используя данные из таблицы 1.1, оценить степень ионизации межзвёздного газа.

Решение  $\Rightarrow 269$

**Задача 8.** Вычислите долю нейтральных атомов в центре Солнца, где  $T = 1,6 \times 10^7$  К, а массовая плотность равна  $\rho = 160$  г/см<sup>3</sup>. По данным спектральных измерений, Солнце на 90% состоит из водорода (по числу атомов), на 10% – из гелия, остальные элементы составляют менее 0,1%. Энергия ионизации водорода  $J_H = 13,595$  эВ, гелия  $J_{He} = 24,580$  эВ.

Ответ  $\Rightarrow 269$

**Задача 9.** Водород с плотностью  $n = 10^{17}$  см<sup>-3</sup> нагрет до температуры 0,3 эВ. Чтобы увеличить проводимость плазмы, в неё добавляют калий. Какова должна быть доля примесных атомов, чтобы число свободных электронов увеличилось в 2 раза? Энергия ионизации калия равна  $J_K = 4,339$  эВ, а его основное состояние двукратно вырождено.

Решение  $\Rightarrow 269$

**Задача 10.** Неионизованный одноатомный газ с начальной плотностью  $n$  и температурой  $T$  сжимают без отвода или подвода тепла. Оцените температуру  $T_*$  перехода в ионизованное состояние.

Решение  $\Rightarrow 269$

**Задача 11.** Получите уравнение ионизационной адиабаты, связывающее плотность и температуру ионизованного газа при сжатии газа без подвода тепла.

Решение  $\Rightarrow 270$

**Задача 12.** Вычислите термодинамические функции идеального газа.

Решение  $\Rightarrow 271$

**Задача 13.** Используя результат предыдущей задачи, вывести уравнение Саха, вычислив минимум термодинамического потенциала.

Решение  $\Rightarrow 273$

## Лекция 4

# Движение заряженных частиц

---

**Дрейфовое приближение. Движение в однородном магнитном поле. Электрический дрейф. Ведущий центр ларморовской орбиты. Дрейф под действием малой силы. Гравитационный дрейф. Дрейф в неоднородном электрическом поле**

Современная физика плазмы строится на фундаменте кинетической теории. В свою очередь, кинетическая теория начинается с анализа движения отдельной заряженной частицы в электромагнитном поле. Приступая к такому анализу, будем считать известной зависимость электрического и магнитного полей от координат и времени. Отыскание этой зависимости является предметом магнитной гидродинамики, которой посвящена вторая часть курса лекций.

### §4.1. Дрейфовое приближение

В лабораторных условиях для удержания плазмы в замкнутом объёме обычно используют магнитное поле. Оно обеспечивает *термоизоляцию плазмы*, препятствуя контакту со стенками лабораторных установок, который иначе мгновенно бы остужал плазму, превращая её в нейтральный газ. В отличие от статического электрического поля, магнитное поле сравнительно легко проникает в плазму (задача 1), искривляя траектории движения заряженных частиц. Магнитное поле имеет ся также в звёздах и межзвёздном пространстве.

В общем случае неоднородного (в пространстве) и переменного (во времени) поля движение частиц чрезвычайно запутано. Найти точное решение уравнений движения удаётся только в исключительных случаях, например когда поле обладает какой-либо пространственной симметрией. Но есть и хорошие новости. Во многих практических важных

приложениях (например, при достаточно хорошей термоизоляции лабораторной плазмы) магнитное поле можно считать почти однородным и почти постоянным. «Почти» здесь означает, что радиус лармировской окружности  $\rho$  заряженной частицы в магнитном поле мал по сравнению с пространственным масштабом изменения электрического и магнитного полей  $\ell$ ,

$$\rho \ll \ell, \quad (1)$$

а период циклотронного вращения  $2\pi/\Omega$  мал по сравнению с характерным временем изменения полей  $\tau$ ,

$$2\pi/\Omega \ll \tau. \quad (2)$$

Параметры  $\rho$  и  $\Omega$  будут определены в следующем параграфе. Здесь же достаточно сказать, что выполнение условий (1) и (2) позволяет разложить движение частицы на быстрое *циклотронное вращение* и медленное движение воображаемого центра лармировской окружности, которое называют *магнитным дрейфом*. Скорость дрейфа удаётся вычислить в общем случае произвольной геометрии магнитного поля. Последовательный вывод уравнений дрейфового движения весьма громоздок, поэтому мы ограничимся менее строгим, но не менее поучительным эвристическим обсуждением. Однако и такое «укороченное» повествование займёт две лекции.

## §4.2. Движение в однородном магнитном поле

Для начала напомним основные сведения о движении заряженной частицы в постоянном и однородном поле. Это будет нулевой порядок дрейфового разложения.

В магнитном поле  $\mathbf{B}$  на заряженную частицу действует сила Лоренца (Hendrik Lorentz, 1892 [64])

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (3)$$

Она перпендикулярна как направлению магнитного поля, так и скорости частицы  $\mathbf{v}$ . Из уравнений движения,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (4a)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (4b)$$

частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$  следует, что энергия частицы сохраняется.<sup>1</sup> Действительно, после умножения уравнения (46) скалярно на  $m\mathbf{v}$ , его правая часть обращается в нуль, поскольку  $\mathbf{v} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0$ , а слева имеем  $m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d(mv^2/2)$ , поэтому

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = 0.$$

Аналогичным образом доказывается, что в постоянном однородном магнитном поле сохраняется проекция скорости  $v_{\parallel}$  на направление  $\mathbf{B}$ . Умножив обе части уравнения (46) скалярно на  $\mathbf{B}$ , справа вновь получим нуль, так как  $\mathbf{B} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0$ . В левой части вектор  $\mathbf{B}$  можно внести под знак дифференцирования, так как он не изменяется вдоль траектории движения частицы:  $(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{v}) = d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})$ . Затем надо учесть, что  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) = Bv_{\parallel}$ , и вновь вынести постоянную величину  $B$  за знак дифференцирования:  $d(Bv_{\parallel}) = B dv_{\parallel}$ . В результате получаем

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0.$$

Из постоянства модуля полной скорости частицы  $\mathbf{v}$  и её проекции  $v_{\parallel}$  на направление магнитного поля следует, что сохраняющейся величиной также является абсолютное значение перпендикулярной скорости

$$v_{\perp} = \sqrt{v^2 - v_{\parallel}^2}.$$

Подчеркнём, что  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  будут постоянными только в однородном и постоянном магнитном поле, иначе приведённые выше рассуждения с вносом и выносом  $\mathbf{B}$  за знак дифференцирования не проходят.

Чтобы упростить обозначения, перепишем уравнение (46) в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}], \quad (5)$$

где вектор

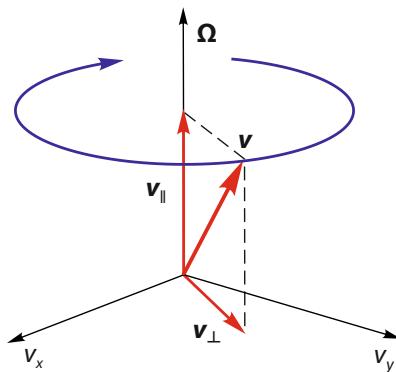
$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e\mathbf{B}}{mc}$$

коллинеарен  $\mathbf{B}$ , а по величине совпадает с циклотронной частотой

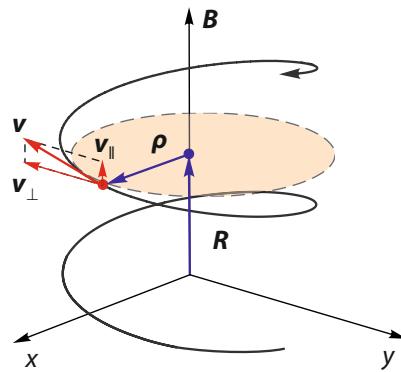
$$\Omega = \frac{eB}{mc}.$$

---

<sup>1</sup> В этой лекции для краткости мы опускаем индексы  $s = e, i$ , обозначающие принадлежность  $e, m$  и других подобных величин тому или иному сорту частиц. В частности, следует отличать обозначение  $e$ , имеющее здесь смысл заряда  $e_s$  частиц сорта  $s$  с учётом знака заряда, от элементарного заряда  $e$  в других лекциях, который всегда положителен.



**Рис. 1.** Направление вращения вектора скорости заряженной частицы в магнитном поле составляет левый винт с направлением вектора  $\Omega = e\mathbf{B}/mc$ , определённого с учётом знака заряда  $e$ .



**Рис. 2.** Орбита частицы в однородном магнитном поле образует спираль. Пунктиром показана лармировская окружность. В её центре находится воображаемый ведущий центр частицы.

Условимся здесь и далее, что знак  $\Omega$  совпадает со знаком электрического заряда  $e$ , а  $B = |\mathbf{B}|$  обозначает абсолютную величину магнитного поля; для положительно определённой циклотронной частоты будем использовать обозначение

$$\omega_c = |\Omega|.$$

Так как  $v = \text{const}$ , ясно, что уравнение (5) описывает вращение вектора  $v$ , а так как неизменна проекция скорости  $v_{\parallel}$  на вектор  $\Omega$ , очевидно, что вектор  $v$  вращается вокруг направления  $\Omega$ . Угловая частота вращения равна  $\Omega$ , причём направление вращения составляет **левый винт**<sup>2</sup> с направлением вектора  $\Omega$ , как показано на рисунке 1.

В однородном постоянном магнитном поле траекторию движения заряженной частицы нетрудно вычислить в явном виде. Направляя ось  $z$  по вектору  $\mathbf{B}$ , имеем

$$\dot{v}_x = -\Omega v_y, \quad (6a)$$

<sup>2</sup> Правило левого винта определяется так: если взять предмет в левую руку и вращать его в направлении, куда указывают четыре пальца, то оттопыренный большой палец покажет направление вектора  $\Omega$ . Аналогичным образом формулируется правило правого винта (правило буравчика) для правой руки.

$$\dot{v}_y = -\Omega v_x, \quad (6b)$$

$$\dot{v}_z = 0. \quad (6v)$$

Последнее уравнение (6в) подтверждает, что скорость частицы  $v_z = v_{\parallel}$  вдоль направления магнитного поля постоянна.

Чтобы решить уравнения (6а) и (6б), сложим их, предварительно умножив второе уравнение на мнимую единицу  $i$ :

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\Omega(v_x + iv_y).$$

Полученное дифференциальное уравнение легко интегрируется, связывая комплексный вектор  $(v_x + iv_y)$  с его значением  $(v_x + iv_y)_0$  в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$(v_x + iv_y) = (v_x + iv_y)_0 \exp(-i\Omega t). \quad (7)$$

Выполнив ещё одно интегрирование по времени, найдём координаты частицы:

$$(x + iy) = (X + iY) + \frac{(v_x + iv_y)_0}{-i\Omega} \exp(-i\Omega t). \quad (8)$$

Смысл констант  $X$  и  $Y$  станет ясен позже. Вводя начальную фазу вращения  $\psi_0$  (вещественную) и поперечную скорость  $v_{\perp}$  (также вещественную) посредством  $(v_x + iv_y)_0 = v_{\perp} \exp(i\psi_0)$ , а затем отделяя вещественную и мнимую части в уравнениях (7), (8), получим

$$v_x = v_{\perp} \cos(\psi_0 - \Omega t), \quad x = X - \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin(\psi_0 - \Omega t), \quad (9a)$$

$$v_y = v_{\perp} \sin(\psi_0 - \Omega t), \quad y = Y + \frac{v_{\perp}}{\Omega} \cos(\psi_0 - \Omega t). \quad (9b)$$

Эти формулы описывают *циклотронное вращение* по окружности с ларморовским радиусом

$$\rho = \frac{v_{\perp}}{\Omega}$$

вокруг точки  $(X, Y)$  в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{B}$ . На это вращение накладывается движение с постоянной скоростью  $v_{\parallel}$  вдоль направления вектора  $\mathbf{B}$ :

$$v_z = v_{\parallel}, \quad z = z_0 + v_{\parallel}t. \quad (9b)$$

Таким образом, в постоянном однородном магнитном поле заряженная частица движется по спирали, как показано на рисунке 2.

Воображаемый центр спиральной траектории в произвольный момент времени находится в точке с радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \{X, Y, z_0 + v_{\parallel} t\}$$

и перемещается по прямой, совпадающей с магнитной силовой линией.<sup>3</sup> В теории магнитных дрейфов этот центр называют *ведущим* или *лармировским центром*. С помощью рисунка 2 нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \quad (10)$$

где

$$\boldsymbol{\rho} = -\frac{1}{\Omega} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}] \quad (11)$$

суть вектор лармировского радиуса, проведённый из ведущего центра к частице, а

$$\mathbf{h} = \mathbf{B}/B \quad (12)$$

обозначает единичный вектор вдоль направления магнитного поля.

Концепция ведущего центра даёт ключ к анализу движения заряженной частицы в электромагнитном поле, слабо неоднородном в пространстве и медленно меняющемся во времени. Можно ожидать, что при достаточно слабой неоднородности и достаточно медленном изменении поля траектория движения приближённо остаётся спиралью, а ведущий центр движется почти вдоль магнитной силовой линии. Если при этом отвлечься от быстрого циклотронного вращения частицы вокруг ведущего центра, то для описания её движения достаточно проследить лишь за движением ведущего центра.

### §4.3. Электрический дрейф

В общем случае ведущий центр, двигаясь преимущественно вдоль магнитной силовой линии, медленно смещается поперёк магнитного

---

<sup>3</sup> Магнитные силовые линии не являются линиями действия силы в точном смысле этого слова, однако неправильный по своей сути термин увековечен трудами многих поколений физиков. В технических науках используется термин «линии магнитной индукции».

поля. Этот эффект проще всего понять, если к предыдущему рассмотрению добавить постоянное и однородное электрическое поле  $\mathbf{E} = \text{const}$ . Из уравнений движения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (13a)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}] \quad (13b)$$

теперь следует, что кинетическая энергия частицы  $\frac{1}{2}mv^2$  не сохраняется, так как, умножив скалярно уравнение (13б) на  $m\mathbf{v}$ , на этот раз получим

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}).$$

Вообще говоря, не сохраняется и продольная проекция скорости  $v_{||}$  (см. ниже), но полная энергия частицы  $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 - e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})$ , разумеется, остаётся интегралом движения.

В рассматриваемом случае, когда и магнитное, и электрическое поля не зависят ни от координат, ни от времени, решение задачи (13) легко свести к рассмотренному в §4.2 движению заряженной частицы в однородном магнитном поле. Для этого достаточно перейти в систему отсчёта, движущуюся со скоростью

$$\mathbf{v}_E = c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2}. \quad (14)$$

Величины, относящиеся к этой, движущейся, системе отсчёта, поначалу будем помечать штрихом «'», чтобы отличить их от аналогичных величин в исходной системе отсчёта; позднее мы изменим это соглашение. Выполнив в уравнениях (13) формальную замену переменных

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_E, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_E t, \quad (15)$$

получим

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}', \quad (16a)$$

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_{||} + [\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega}], \quad (16b)$$

где  $\mathbf{E}_{||} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\perp}$  — проекция электрического поля на направление вектора  $\mathbf{B}$ , а  $\mathbf{E}_{\perp} = [\mathbf{B} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})]/B^2$  — проекция на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{B}$ ; с помощью векторной формулы  $[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  легко проверить, что  $\mathbf{E}_{||} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}/B^2$ .

Если теперь расписать векторное уравнение (16б) в проекциях на оси декартовой системы координат, то по сравнению с уравнениями (6) изменится только проекция на направление магнитного поля (ось  $z'$ ):

$$\dot{v}'_x = \Omega v'_y, \quad (17\text{а})$$

$$\dot{v}'_y = -\Omega v'_x, \quad (17\text{б})$$

$$\dot{v}'_z = \frac{e}{m} E_{\parallel}. \quad (17\text{в})$$

Первые два уравнения (17) описывают движение со скоростью

$$v'_{\perp} = \sqrt{v'_x^2 + v'_y^2} = \text{const} \quad (18)$$

по окружности постоянного радиуса

$$\rho' = \frac{v'_{\perp}}{\Omega} = \text{const}, \quad (19)$$

замкнутой в плоскости  $(x', y')$ ; их решение получается из формул (9) при помощи очевидных переобозначений (т. е. посредством добавления штрихов). Последнее из уравнений (17) описывает равноускоренное движение вдоль поля  $\mathbf{B}$ :

$$v'_z = v_{\parallel 0} + \frac{e}{m} E_{\parallel} t, \quad z' = z'_0 + v_{\parallel 0} t + \frac{e}{2m} E_{\parallel} t^2. \quad (20)$$

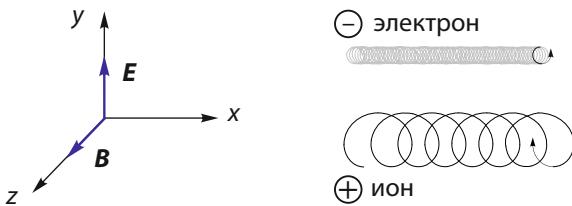
Это ускорение «разматывает» лармировскую окружность в спираль с постепенно увеличивающимся шагом. Её центр движется вдоль силовой линии. Такова картина движения в движущейся системе отсчёта.

В исходной системе отсчёта центр спирали смещается со скоростью  $\mathbf{v}_E = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] / B^2$ . Эта скорость перпендикулярна магнитному полю, поэтому в исходной системе отсчёта ведущий центр смещается попрёк магнитной силовой линии при том, что в движущейся системе отсчёта он движется строго вдоль такой линии.<sup>4</sup> Медленное движение ведущего центра попрёк магнитного поля называют *дрейфом*, а поскольку в данном случае дрейф вызван электрическим полем, его называют *электрическим дрейфом*.

В соответствии с формулой (14) скорость электрического дрейфа  $\mathbf{v}_E$  перпендикулярна как направлению магнитного поля  $\mathbf{B}$ , так и направлению электрического поля  $\mathbf{E}$ . Существенно, что она не зависит ни от заряда  $e$ , ни от массы частицы  $m$ , ни от скорости лармировского вращения  $v_{\perp}$ .

---

<sup>4</sup> Это лишний раз показывает условность понятия магнитной силовой линии.



**Рис. 3.** Дрейф частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях. Траектория отрицательного заряда рассчитана для частицы с массой в 10 раз меньше массы положительного заряда. При одинаковой энергии и фактическом соотношении масс ионов и электронов радиус лармировской спирали электронов был бы неразличим в выбранном масштабе. Так как скорость электрического дрейфа одинакова для электронов и ионов, в квазинейтральной плазме он не создаёт электрический ток.

Этот факт можно пояснить с помощью рисунка 3. Посмотрим вначале на траекторию положительно заряженного иона в нижней правой части рисунка. В исходной системе отсчёта на левой половине лармировской окружности ион приобретает энергию от электрического поля, следовательно, увеличивается скорость  $v_{\perp}$ , а вместе с ней и лармировский радиус  $\rho = v_{\perp}/\Omega$ . На правом полуобороте ион теряет энергию, а  $\rho$  уменьшается. Следовательно, верхнюю часть орбиты ион проходит в среднем с большим радиусом, нежели нижнюю. Эта разница в величине  $\rho$  и вызывает дрейф в направлении  $[E \times B]$ . Отрицательно заряженный электрон вращается в противоположном направлении, но и энергию от поля он получает при движении в направлении, противоположном движению иона. Следовательно, ион и электрон дрейфуют в одном направлении. При одинаковой скорости более лёгкие частицы имеют меньший радиус орбиты и поэтому испытывают меньшее смещение за один оборот. Однако у лёгких частиц выше частота вращения, и два эффекта в точности компенсируют друг друга, так что скорость электрического дрейфа не зависит от сорта частиц.

Если  $E > B$ , скорость электрического дрейфа, вычисленная по формуле (14), формально превышает скорость света. Однако это всего лишь означает, что при околосветовых скоростях нужно использовать релятивистские уравнения движения (задача 2). Формула (14) верна, если электрическое поле мало по сравнению с магнитным, т. е.

$$E/B \ll 1. \quad (21)$$

Существует поучительная интерпретация электрического дрейфа, которая позволяет сравнительно легко вычислить его скорость при произвольной величине  $E/B$ . Напомним, что в результате преобразования (15) из уравнений движения (13) исчезла часть электрического поля  $\mathbf{E}_\perp$ , перпендикулярная магнитному полю. Тот факт, что уравнения (16) содержат только  $\mathbf{E}_\parallel$ , означает, что в выбранной указанным выше способом движущейся системе отсчёта  $\mathbf{E}'_\perp = \mathbf{0}$  и электрическое поле коллинеарно магнитному, причём  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel$ . С помощью преобразования Лоренца (Hendrik Lorentz, 1904 [65]) можно показать (задача 3), что при произвольном отношении  $E/B$  скорость такой системы отсчёта будет равна

$$\mathbf{w} = c \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varpi^2}}{2\varpi^2} \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2 + E^2}, \quad (22)$$

где  $\varpi = |[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] / (B^2 + E^2)| < \frac{1}{2}$ . При  $\varpi \ll 1$  и  $E^2 \ll B^2$  она совпадает с  $\mathbf{v}_E$  и, таким образом, является релятивистским аналогом скорости электрического дрейфа.

Особого рассмотрения заслуживает случай  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$ , когда электрическое поле перпендикулярно магнитному. Так как скалярное произведение  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$  наряду с разностью  $B^2 - E^2$  является релятивистским инвариантом (см., например, [66]), поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  будут взаимно перпендикулярны в любой системе отсчёта. В этом случае формула (22) упрощается. Если  $E < B$ , то  $\mathbf{w} = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] / B^2$  даёт скорость системы отсчёта, где  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ , а частица движется по лармировской спирали. Иными словами, формула (14) является точной даже в релятивистском пределе. Если же  $E > B$ , то  $\mathbf{w} = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] / E^2$  есть скорость системы отсчёта, где  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , а частица неограниченно ускоряется электрическим полем.

Вернёмся к нерелятивистскому случаю, который характеризуется условием (21), и уточним понятие ведущего центра лармировской орбиты. Так как ведущий центр — воображаемый, а не реальный объект, в научной литературе встречаются разные определения векторов  $\mathbf{R}$  и  $\rho$ . В исходной системе отсчёта эти векторы определены уравнениями (10) и (11). Если же привязать лармировский радиус к скорости частицы  $\mathbf{v}'$  в движущейся системе отсчёта, получим

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \rho', \quad (23)$$

где

$$\rho' = -\frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}' \times \mathbf{h}]. \quad (24)$$

Так как  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_E$ , нетрудно видеть, что

$$\rho = \rho' - \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}_E \times \mathbf{h}], \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}' + \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}_E \times \mathbf{h}]. \quad (25)$$

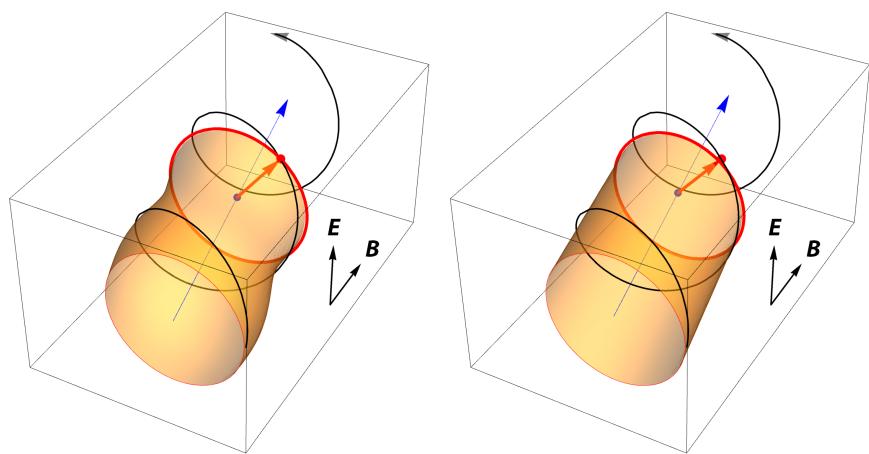
Выбор любого из выражений (10) и (23) сопряжён с выбором нулевого приближения теории дрейфов. Формальную теорию дрейфов строят методом возмущений. Вначале выбирают нулевое приближение, т. е. геометрию полей, для которых уравнения движения можно точно проинтегрировать. Затем слабую зависимость полей от координат и времени учитывают как малое возмущение.

Пара уравнений (10) и (11) соответствует выбору постоянного однородного магнитного поля ( $\mathbf{B} = \text{const}$ ) в качестве нулевого приближения теории дрейфов. В этом случае электрический дрейф возникает в первом порядке теории, как и магнитные дрейфы, которые будут рассмотрены в следующей лекции. Такой способ построения теории может быть удобен, если электрическое поле сравнительно мало, так что  $v_E \ll v'_\perp$ . Поясняя механизм возникновения электрического дрейфа с помощью рисунка 3, мы подразумевали именно этот способ.

Пара уравнений (23) и (24) означает, что электрический дрейф возникает уже в нулевом порядке теории. Такой выбор нулевого приближения ( $\mathbf{B} = \text{const}$ ,  $\mathbf{E} = \text{const}$ ) вполне пригоден для описания дрейфового движения частиц даже при наличии сильного электрического поля, когда  $v_E \gg v'_\perp$ . Далее мы в основном будем следовать этому выбору. В частности, при вычислении скорости магнитных дрейфов в следующей лекции будем исходить из картины движения в системе отсчёта ведущего центра, что как раз соответствует уравнениям (23) и (24).

Рисунок 4 поясняет сказанное. Так как  $\rho = \rho' - [\mathbf{v}_E \times \mathbf{h}] / \Omega$ , векторы  $\rho$  и  $\rho'$  различаются на константу  $[\mathbf{v}_E \times \mathbf{h}] / \Omega$ . Однако длина  $\rho = |\rho|$  вектора  $\rho$  осциллирует с циклотронной частотой  $\Omega$  в отличие от вектора  $\rho'$ , длина которого  $\rho' = |\rho'|$  согласно (19) неизменна. Различие между  $\rho'$  и  $\rho$  имеет своим следствием перемену качественной картины явления. В исходной системе отсчёта (слева на рис. 4) мгновенная ларморовская окружность радиуса  $\rho$  с центром в точке  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \rho$  при перемещении ведущего центра описывает поверхность гофрированного цилиндра, тогда как окружность радиуса  $\rho'$  с центром в точке  $\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \rho' = \mathbf{R} - [\mathbf{v}_E \times \mathbf{h}] / \Omega$  замечает прямой цилиндр (справа на рис. 4).

Если электрическое поле в плазме столь мало, что  $v_E \ll v'_\perp$ , длины  $\rho$  и  $\rho'$  почти совпадают. Если же  $v_E \gg v'_\perp$ , интерпретация величины  $\rho$  как ларморовского радиуса теряет смысл (в отличие от  $\rho'$ ), так как тогда



**Рис. 4.** (видео) В скрещенных электрическом и магнитном полях, каждое из которых постоянно во времени и однородно в пространстве, заряженная частица (красная точка) движется по лармировской спирали, а ведущий центр (синяя точка) равномерно смещается в направлении вектора  $[E \times B]$ . На рисунке слева использовано определение ведущего центра (10), «естественнное» для исходной системы отсчёта, а на рисунке справа — определение (24), «естественное» для системы отсчёта, которая движется со скоростью электрического дрейфа. Слева длина лармировского радиуса  $\rho$  осциллирует с циклотронной частотой, так что лармировская окружность описывает гофрированную поверхность. Справа лармировский радиус  $\rho'$  имеет постоянную длину, а лармировская окружность заменяет прямой цилиндр.

вектор  $\rho \approx -[v_E \times h]/\Omega$  не вращается, а траектория движения частицы в исходной системе отсчёта из спирали превращается в циклоиду. В этой связи далее будет принято определение радиус-вектора ведущего центра посредством формул (23) и (24), но штрих у величины  $\rho'$  для краткости будет снят, если не сказано иное.

#### §4.4. Дрейф под действием малой силы

Заменив в уравнении движения (13б) электрическую силу  $eE$  на формальное обозначение  $F$ , найдём, что скорость дрейфа ведущего центра,

вызванного силой иного происхождения, в самом общем случае равна

$$\mathbf{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\mathbf{F} \times \mathbf{B}]}{B^2}. \quad (26)$$

Эту формулу вывел шведский учёный Ханнес Альфвен ([Hannes Alfvén, 1940 \[48\]](#)). Ввиду её значимости покажем, как она получается путём усреднения точного уравнения движения

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

по периоду циклотронного вращения вдоль траектории частицы.

Если сила  $\mathbf{F}$  ориентирована строго перпендикулярно  $\mathbf{B}$ , то ускорение  $d\mathbf{v}/dt$  в левой части уравнения в результате усреднения заменяется нулюм. Усреднение правой части приводит к замене  $\mathbf{v}$  на среднюю скорость  $\mathbf{v}_F$ , а локальная сила  $\mathbf{F}$  в точке, где находится частица, заменяется на среднее значение  $\langle \mathbf{F} \rangle$  по траектории движения:

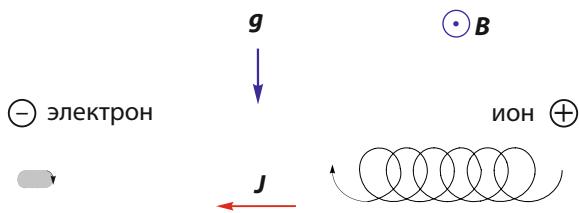
$$0 = \langle \mathbf{F} \rangle + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_F \times \mathbf{B}].$$

После векторного умножения на  $\mathbf{B}$  отсюда получается формула (26) с тем уточнением, что  $\mathbf{F}$  в ней на самом деле обозначает среднюю за период циклотронного вращения силу  $\langle \mathbf{F} \rangle_{\perp}$ , действующую на частицу в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Проекция силы  $\mathbf{F}_{\parallel}$ , которая действует вдоль направления магнитного поля, даёт нулевой вклад в скорость дрейфа, вычисляемую по формуле (26), поэтому индекс  $\perp$  у величины  $\langle \mathbf{F} \rangle_{\perp}$  в ней обычно опускают. Однако эта проекция вызывает постоянное продольное ускорение, приводя к изменению скорости движения  $v_{\parallel}$  вдоль магнитной силовой линии, как при наличии продольного электрического поля  $E_{\parallel}$ .

В практически важном случае, когда сила  $\mathbf{F}$  мала по сравнению с силой Лоренца  $(e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ , нетривиальную задачу усреднения  $\mathbf{F}$  по истинной траектории движения можно приблизённо заменить усреднением по невозмущённой траектории, по которой частица двигалась бы в однородном магнитном поле при  $\mathbf{F} = 0$ . Это наблюдение даёт простой рецепт вычисления скорости дрейфа, который в дальнейшем будет неоднократно использован. Он состоит в том, что значения любых величин, зависящих от координат, например  $\mathbf{B}$ , нужно вычислять в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ , где находится ведущий центр частицы.

Действительно, если разложить  $\mathbf{B}(\mathbf{R} + \rho)$  в ряд Тейлора по малому отношению  $\rho/\ell$  вблизи ведущего центра:

$$\mathbf{B}(\mathbf{R} + \rho) = \mathbf{B}(\mathbf{R}) + (\rho \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \dots,$$



**Рис. 5.** В поле силы тяжести электроны и ионы дрейфуют в противоположные стороны, создавая электрический ток  $\mathbf{J}$  в направлении вектора  $[\mathbf{g} \times \mathbf{B}]$ . Ток электронов мал по сравнению с током ионов.

линейные члены разложения, пропорциональные компонентам вектора  $\rho$ , при усреднении по циклотронному вращению обращаются в нуль. Следующие же члены разложения (обозначенные выше многоточием) в первом порядке теории дрейфов можно просто отбросить. Тогда

$$\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{B}(\mathbf{R}).$$

Это же правило усреднения применимо к электрическому полю  $\mathbf{E}$  и вообще к любой функции координат частицы. Впрочем, иногда нужно действовать более аккуратно. Погрешительный пример, когда усреднение нужно делать с точностью до членов порядка  $\rho^2$ , описан в §4.6.

### §4.5. Гравитационный дрейф

В качестве первого применения формулы (26) рассмотрим движение в поле силы тяжести  $mg$ . Соответствующий дрейф можно назвать гравитационным:

$$\mathbf{v}_g = \frac{mc}{e} \frac{[\mathbf{g} \times \mathbf{B}]}{B^2}. \quad (27)$$

Гравитационный дрейф похож на дрейф в электрическом поле тем, что его направление перпендикулярно как приложенной силе, так и направлению магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Однако скорость гравитационного дрейфа  $\mathbf{v}_g$  меняет направление в зависимости от знака заряда частицы.

Своим происхождением гравитационный дрейф (рис. 5), как и электрический, обязан изменению ларморовского радиуса вдоль траектории движения частицы из-за того, что частица попеременно отдаёт и

получает энергию от гравитационного поля. Но теперь силы, действующие на электроны и ионы, направлены в одну сторону, поэтому дрейфуют эти частицы в противоположных направлениях, поскольку вращаются в разные стороны.

Величина скорости дрейфа  $v_g$ , вызванного обычной силой тяжести, в большинстве случаев пренебрежимо мала. Гравитационный дрейф заставляет упоминания лишь в связи с тем, что в теории с его помощью моделируют более сложные явления, вводя фиктивную силу тяжести такой величины, чтобы скорость гравитационного дрейфа была примерно равна скорости дрейфа в неоднородном магнитном поле.

#### §4.6. Дрейф в неоднородном электрическом поле

Постепенно усложняя задачу, посмотрим теперь, к чему приводит учёт неоднородности электрического поля. Пусть магнитное поле по-прежнему однородно и постоянно, а электрическое лишь незначительно изменяется на длине порядка радиуса ларморовской орбиты. Как показано в §4.3, однородное электрическое поле, перпендикулярное магнитному полю, создаёт электрический дрейф со скоростью

$$\mathbf{v}_E = c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2}. \quad (28)$$

При небольшой неоднородности  $\mathbf{E}$  нужно усреднить по невозмущённой ларморовской окружности, вычислив интеграл

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2\pi} \oint d\psi \mathbf{E}(\mathbf{R} + \rho(\psi)),$$

где  $\psi$  обозначает фазу ларморовского вращения.

Чтобы выполнить усреднение, введём локальную систему координат с началом в ведущем центре частицы  $\mathbf{R}$ , ориентированной так, что вектор  $\rho$  лежит в плоскости  $xy$ , и разложим  $\mathbf{E}(\mathbf{R} + \rho)$  в ряд Тейлора по степеням  $\rho_x, \rho_y$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R} + \rho) &= \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \rho_x \frac{\partial}{\partial X} \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \rho_y \frac{\partial}{\partial Y} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho_x^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{1}{2} \rho_y^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \rho_x \rho_y \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \dots \end{aligned}$$

Далее учтём, что  $\langle \rho_x \rangle = \langle \rho_y \rangle = 0$ , поэтому первые неисчезающие поправки к  $\mathbf{E}(\mathbf{R})$  возникают во втором порядке разложения. Поскольку

$\langle \rho_x^2 \rangle = \langle \rho_y^2 \rangle = \rho^2/2$ , а  $\langle \rho_x \rho_y \rangle = 0$ , получаем

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{1}{4}\rho^2 \nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}(\mathbf{R}), \quad (29)$$

где

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}.$$

Подставляя выражение (29) в формулу (28) вместо  $\mathbf{E}$ , находим скорость электрического дрейфа в неоднородном электрическом поле

$$\mathbf{v}_E = \frac{c}{B^2} \left[ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{4}\rho^2 \nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} \right) \times \mathbf{B} \right]. \quad (30)$$

В слабонеоднородном поле второе слагаемое в круглых скобках значительно меньше первого, но в отличие от него имеет разную величину для ионов и электронов. Сколь бы ни было мало это слагаемое, благодаря ему скорость дрейфа различна для электронов и ионов. Следовательно, электрический дрейф в неоднородном электрическом поле создаёт электрический ток, который приводит к разделению зарядов. Это явление известно как *эффект конечного ларморовского радиуса* (эффект КЛР), который существенным образом влияет на устойчивость плазмы.

## Литература

Изложение теории дрейфов на элементарном уровне имеется в «Лекциях по физике плазмы» Д. А. Франк-Каменецкого [4].

Точные решения уравнений движения заряженных частиц в электромагнитном поле можно найти в учебнике Д. А. Франк-Каменецкого [4] и Б. А. Трубникова «Теория плазмы» [14], а также в статьях Д. В. Сивухина [67] и А. И. Морозова [68] в двух первых выпусках сборника «Вопросы теории плазмы».

## Задачи и вопросы

**Задача 1.** Считая, что проводимость плазмы равна проводимости лучших проводников, оцените время проникновения магнитного поля в столб плазмы с радиусом 1 метр. Решение  $\Rightarrow 274$

**Задача 2.** Найдите траекторию движения релятивистской частицы во взаимно перпендикулярных однородных постоянных электрическом и магнитном полях. Решение  $\Rightarrow 274$

**Задача 3.** Найдите скорость движения системы отсчёта, где магнитное и электрическое поля параллельны. [Решение ⇒275](#)

**Задача 4.** При каких условиях скорость электрического дрейфа мала по сравнению с тепловой скоростью частиц плазмы? Для оценки предположите, что плазма имеет форму цилиндра с радиусом  $a$  и заряжена до потенциала порядка температуры плазмы,  $e\varphi \sim T$ . [Ответ ⇒276](#)

**Задача 5.** Найдите скорость электрического дрейфа в поле электростатической волны, не предполагая, что ларморовский радиус частицы  $\rho$  мал по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . [Ответ ⇒276](#)

**Задача 6.** Найдите скорость дрейфа заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле и однородном, медленно меняющемся электрическом поле, выполнив приближённое интегрирование уравнений движения. [Решение ⇒277](#)

**Задача 7.** Найдите магнитное поле системы коаксиальных круглых катушек по заданному полю  $B_0(z)$  на оси системы и форму силовых линий. [Решение ⇒278](#)

**Задача 8.** Найдите скалярный потенциал магнитного поля с прямой осью. [Решение ⇒279](#)

**Задача 9.** Найдите уравнение силовой линии в квадрупольном магнитном поле. [Решение ⇒280](#)

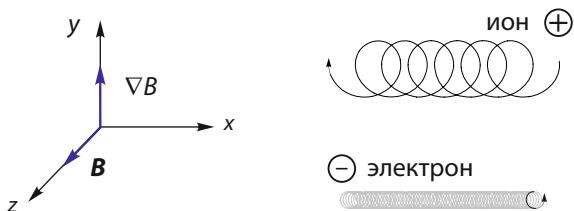
**Задача 10.** Запишите квадрупольное магнитное поле в потоковых координатах. [Решение ⇒280](#)

## Лекция 5

# Магнитные дрейфы

**Градиентный и центробежный дрейфы. Поляризационный дрейф. Скорость движения ведущего центра**

Продолжая анализ движения заряженных частиц в электромагнитном поле, обратимся теперь к реальной ситуации, когда магнитное поле слабо неоднородно и медленно меняется во времени. Как уже отмечено в §4.1, малость параметров  $\rho/\ell$  и  $2\pi/\Omega t$  позволяет выделить медленное дрейфовое движение частицы на фоне быстрого циклотронного вращения и вычислить скорость дрейфового движения. Ввиду всей той же малости различных виды дрейфов, вызванные разными видами неоднородности или нестационарности магнитного и электрического полей, можно анализировать по отдельности, полагая, что суммарный эффект подчиняется приближённому принципу суперпозиции.



**Рис. 1.** Градиентный дрейф частиц в неоднородном магнитном поле. Электроны и ионы дрейфуют в противоположные стороны, создавая электрический ток в направлении вектора  $[B \times \nabla B]$ ; при заданной энергии частиц величина тока не зависит от их массы.

## §5.1. Градиентный дрейф

Пусть электрическое поле отсутствует, магнитное поле постоянно во времени, но неоднородно, причём его направление всюду одинаково, а меняется лишь напряжённость  $B$  из-за наличия слабого градиента  $\nabla B$ , перпендикулярного направлению  $B$ , как показано на рисунке 1. При этом возникает *градиентный дрейф*.

Используя качественные представления, развитые в §4.3 для объяснения электрического дрейфа, можно заранее предвидеть, как будут двигаться в таком поле заряженные частицы. Из-за уменьшения поля  $B$  в нижней части орбиты частица проходит её по окружности большего радиуса, чем верхнюю часть траектории. В итоге на каждом лармировском обороте возникает некомпенсированное смещение вдоль оси  $x$ . Оно создаёт дрейф в этом направлении, перпендикулярном как  $B$ , так и  $\nabla B$ . Очевидно, что величина скорости дрейфа должна быть пропорциональна  $v_\perp$  и  $\rho/\ell$ . Таким образом, по порядку величины скорость дрейфа равна  $v_\perp \rho |\nabla B|/B$ , так как  $\ell \sim B/|\nabla B|$ .

Для аккуратного вычисления скорости градиентного дрейфа усредним силу Лоренца  $\mathbf{F} = (e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$  по периоду вращения частицы. В однородном магнитном поле среднее значение  $\langle \mathbf{F} \rangle$  силы  $\mathbf{F}$  было бы в точности равно нулю, поскольку, оставаясь постоянным по величине, вектор  $\mathbf{F}$  вращается вместе с частицей. Вычислим поправку к  $\langle \mathbf{F} \rangle$ , пропорциональную градиенту магнитного поля, выполнив усреднение по невозмущённой орбите частицы в слабо неоднородном магнитном поле  $\mathbf{B} = B(y)\hat{z}$ . Она описывается уравнениями (4.9), в которых для краткости приравняем нулю начальную фазу  $\psi_0$ , что эквивалентно простому сдвигу начала отсчёта времени:

$$\begin{aligned} v_x &= v_\perp \cos(\Omega t), & x &= X + \rho \sin(\Omega t), \\ v_y &= -v_\perp \sin(\Omega t), & y &= Y + \rho \cos(\Omega t). \end{aligned}$$

Разложив  $B(y)$  в ряд Тейлора до линейного по  $\rho$  слагаемого включительно,

$$B(y) \approx B(Y) + (y - Y) \frac{\partial}{\partial Y} B(Y),$$

получим

$$F_x = \frac{e}{c} v_y B(y) \approx -\frac{e}{c} v_\perp \sin(\Omega t) \left[ B(Y) + \rho \cos(\Omega t) \frac{\partial B}{\partial Y} \right],$$

$$F_y = -\frac{e}{c} v_x B(y) \approx -\frac{e}{c} v_{\perp} \cos(\Omega t) \left[ B(Y) + \rho \cos(\Omega t) \frac{\partial B}{\partial Y} \right].$$

Среднее значение  $F_x$  равно нулю. При усреднении  $F_y$  по периоду вращения первый член в правой части последнего уравнения даёт нуль, а среднее от  $\cos^2(\Omega t)$  равно  $\frac{1}{2}$ , так что

$$\langle F_y \rangle = -\frac{e}{2c} v_{\perp} \rho \frac{\partial B}{\partial Y}.$$

Похожее выражение получилось бы для  $\langle F_x \rangle$  при наличии градиента  $B$  вдоль оси  $x$ . Следовательно,

$$\langle F \rangle_{\perp} = -\frac{e}{2c} v_{\perp} \rho \nabla_{\perp} B = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \nabla_{\perp} B. \quad (1)$$

Подставляя эту силу в формулу (4.26) для скорости дрейфа в поле малой силы,

$$\mathbf{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\langle F \rangle \times \mathbf{B}]}{B^2} = \frac{c}{e} \frac{[\langle F \rangle_{\perp} \times \mathbf{B}]}{B^2},$$

получим скорость градиентного дрейфа

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right]. \quad (2)$$

Она перпендикулярна как направлению  $\mathbf{B}$ , так и направлению  $\nabla B$ . Здесь и далее все величины, зависящие от координат, вычисляются в точке ведущего центра, а  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$  вновь обозначает единичный вектор в направлении магнитного поля. По-видимому, первым формулу (2) получил Х. Альфвен (Hannes Alfvén) в 1940 году [48].

Так как знак циклотронной частоты  $\Omega = eB/mc$  определяется знаком заряда, электроны и ионы в неоднородном магнитном поле дрейфуют в противоположных направлениях. Поскольку при заданной энергии частицы  $\epsilon_{\perp} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2$  отношение

$$\frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} = \frac{\epsilon_{\perp}/m}{eB/mc}$$

не зависит от её массы  $m$ , скорости дрейфа электрона и иона равны по абсолютной величине, если равны их энергии.

## §5.2. Центробежный дрейф

Учтём теперь, что линии магнитного поля могут быть изогнуты и что магнитное и электрическое поля могут изменяться во времени. Все эти эффекты можно учесть единым способом, если перейти в систему отсчёта, *сопутствующую* ведущему центру. В *нулевом порядке* дрейфовой теории она движется относительно неподвижной системы отсчёта со скоростью

$$\mathbf{u} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \mathbf{v}_E. \quad (3)$$

В системе отсчёта, движущейся ускоренно, на частицу действует сила инерции

$$\mathbf{F} = -m \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (4)$$

которая, в соответствии с формулой Альфвена (4.26), инициирует дрейфовое движение поперёк направления магнитного поля со скоростью

$$\mathbf{v}_{in} = \left[ \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right]. \quad (5)$$

Эта скорость мала по сравнению с  $\mathbf{u}$  и представляет собой поправку к скорости дрейфа в *первом порядке* дрейфовой теории. Таким образом, в исходной системе отсчёта скорость ведущего центра будет равна

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{u} + \left[ \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right]. \quad (6)$$

Вычисляя производную  $d\mathbf{u}/dt$ , нужно учесть, что изменение вектора  $\mathbf{u}$  может быть связано как с его явной зависимостью от времени, так и с перемещением ведущего центра со скоростью  $\mathbf{u}$ . Рассматривая  $\mathbf{u}$  как сложную функцию времени  $\mathbf{u}(t, \mathbf{r}(t))$ , находим, что

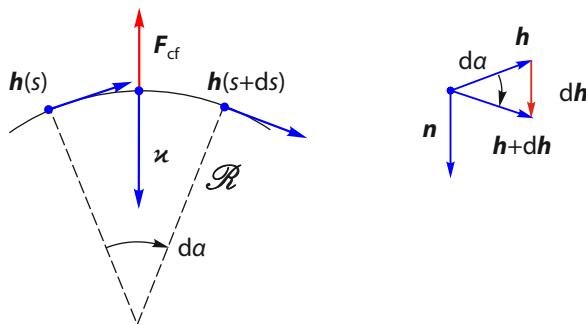
$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Соответственно,  $\mathbf{v}_{in}$  будет содержать два слагаемых. Первое связывают со скоростью *поляризационного дрейфа*:

$$\mathbf{v}_{pol} = \left[ \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right]. \quad (7)$$

Второе слагаемое отвечает за *центробежный дрейф*:

$$\mathbf{v}_{cf} = \left[ \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right]. \quad (8)$$



**Рис. 2.** На заряженную частицу, двигающуюся вдоль искривлённой магнитной силовой линии, действует центробежная сила  $\mathbf{F}_{\text{cf}}$ . Она направлена против вектора кривизны  $\boldsymbol{\kappa} = \partial \mathbf{h} / \partial s$ , где  $\mathbf{h}$  — вектор, касательный силовой линии в каждой её точке, а  $s$  — координата вдоль силовой линии, отмеряющая её длину. Справа показан результат параллельного переноса векторов  $\mathbf{h} = \mathbf{h}(s)$  и  $\mathbf{h} + d\mathbf{h} = \mathbf{h}(s+ds)$  в одну точку.

Сосредоточимся на анализе этого слагаемого, отложив детальный анализ поляризационного дрейфа до следующего параграфа.

Подставляя  $\mathbf{u} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \mathbf{v}_E$  в формулу (8), в её правой части получаем выражение из четырёх слагаемых:

$$\left[ \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times ((v_{\parallel} \mathbf{h} \cdot \nabla) v_{\parallel} \mathbf{h} + (\mathbf{v}_E \cdot \nabla) v_{\parallel} \mathbf{h} + (v_{\parallel} \mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{v}_E + (\mathbf{v}_E \cdot \nabla) \mathbf{v}_E) \right].$$

Оно заметно упрощается в том случае, когда скорость электрического дрейфа мала по сравнению со скоростью частицы,  $v_E \ll v$ . Для этого как минимум необходимо, чтобы  $E/B \ll v/c$ . Электрическое поле в плазме обычно мало, поэтому, как правило, последнее условие выполнено для частиц с тепловыми скоростями. Тогда из четырёх слагаемых можно оставить только первое. Оно также упрощается, так дифференцирование сомножителя  $v_{\parallel}$  даёт нуль ввиду тождества  $[\mathbf{h} \times \mathbf{h}] = 0$ . В результате получаем формулу

$$\mathbf{v}_{\text{cf}} = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}], \quad (9)$$

где введено обозначение

$$\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \quad (10)$$

для вектора кривизны магнитной силовой линии.

Векторный оператор  $(\mathbf{h} \cdot \nabla)$  имеет смысл производной по направлению единичного вектора  $\mathbf{h}$ . Её принято обозначать как частную производную по координате  $s$  вдоль силовой линии магнитного поля, то есть  $(\mathbf{h} \cdot \nabla) = \partial/\partial s$ .<sup>1</sup> Таким образом, вектор кривизны есть производная единичного вектора  $\mathbf{h}$  вдоль себя самого:

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s}. \quad (11)$$

Как следует из построения на рисунке 2,

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} = \frac{\mathbf{n}}{\mathcal{R}}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали, перпендикулярный  $\mathbf{h}$ , а радиус кривизны магнитной силовой линии  $\mathcal{R} = 1/(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\kappa})$  выражается через вектор кривизны.<sup>2</sup>

Действительно, рассмотрим элемент окружности радиуса  $\mathcal{R}$ , опирающийся на малый угол  $d\alpha$ . Изменение  $d\mathbf{h}$  перпендикулярно  $\mathbf{h}$ , поскольку  $|\mathbf{h}| = |\mathbf{h} + d\mathbf{h}| = 1$ ,  $|\mathbf{h} + d\mathbf{h}| = \sqrt{(\mathbf{h} + d\mathbf{h})^2} \approx 1 + (\mathbf{h} \cdot d\mathbf{h})$  и, следовательно,  $(\mathbf{h} \cdot d\mathbf{h}) = 0$ . С той же точностью  $|d\mathbf{h}| \approx |\mathbf{h}| d\alpha = d\alpha$ , а длина элемента окружности равна  $ds = \mathcal{R} d\alpha$ , т. е.  $|\partial \mathbf{h}/\partial s| = |1/\mathcal{R}|$ .

С учётом векторных соотношений (10)–(12) формулу для скорости центробежного дрейфа можно записать в виде

$$\mathbf{v}_{cf} = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega \mathcal{R}} [\mathbf{h} \times \mathbf{n}]. \quad (13)$$

Отсюда видно, что центробежный дрейф направлен по вектору бинормали  $\mathbf{b} = [\mathbf{h} \times \mathbf{n}]$ . Как и градиентный дрейф, он зависит от знака заряда частицы. При одинаковой энергии продольного движения  $\epsilon_{\parallel} = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$  абсолютная величина скорости центробежного дрейфа одинакова для лёгких частиц (электронов) и тяжёлых частиц (ионов), но разноимённо заряженные частицы дрейфуют в противоположные стороны, как и в случае градиентного дрейфа.

Своим происхождением центробежный дрейф обязан одноимённой силе

$$\mathbf{F}_{cf} = -\frac{mv_{\parallel}^2}{\mathcal{R}} \mathbf{n}. \quad (14)$$

<sup>1</sup> Такое обозначение подразумевает, что другие две криволинейные координаты остаются постоянными на силовой линии.

<sup>2</sup> Выбор вектора нормали неоднозначен: при смене направления вектора нормали на противоположное,  $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ , радиус кривизны  $\mathcal{R}$  также меняет знак.

В свою очередь, центробежная сила есть частный случай силы инерции (4). Соответственно, скорость  $\mathbf{v}_{\text{in}}$ , определяемую формулой (5), можно было бы назвать скоростью *инерционного дрейфа*. Однако это название не является общепринятым, равно как и использование терминов «поляризационный дрейф» и «центробежный дрейф» применительно к формулам (7) и (8). Только упрощённую формулу (9) без сомнения относят со скоростью центробежного дрейфа и такую же упрощённую формулу (16) из следующего параграфа – со скоростью поляризационного дрейфа.

### §5.3. Поляризационный дрейф

Обратившись к общей формуле (7) для скорости поляризационного дрейфа, подставим в её правую часть скорость движения ведущего центра (3) в нулевом приближении:

$$\mathbf{v}_{\text{pol}} = \left[ \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{\partial v_{\parallel} \mathbf{h}}{\partial t} \right] + \left[ \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} \right]. \quad (15)$$

Так как  $[\mathbf{h} \times \mathbf{h}] = 0$ , первое слагаемое в последнем выражении не изменится, если из-под знака дифференцирования вынести произвольный скалярный множитель. Вынося  $v_{\parallel}/B$  и вспоминая, что  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ , а  $\partial \mathbf{B}/\partial t = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$ , имеем

$$\left[ \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{\partial v_{\parallel} \mathbf{h}}{\partial t} \right] = \left[ \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{v_{\parallel}}{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = -\frac{v_{\parallel} c}{\Omega B} [\mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}].$$

Отсюда видно, что это слагаемое мало, если электрическое поле близко к потенциальному, которое характеризуется уравнением  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ . Но даже если электрическое поле является вихревым, это слагаемое мало, если топология магнитного поля не меняется, т. е.  $\mathbf{h} \times (\partial \mathbf{h} / \partial t) = 0$ . Так или иначе, при рассмотрении поляризационного дрейфа первым слагаемым в формуле (15) обычно пренебрегают по сравнению со вторым.

При вычислении производной во втором слагаемом

$$\frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2}$$

можно дифференцировать только электрическое поле  $\mathbf{E}$ , так как дифференцирование магнитного поля даст члены, квадратичные по малому

отношению  $E/B$ . В результате получаем упрощённую формулу для скорости поляризационного дрейфа:

$$\mathbf{v}_{\text{pol}} = \frac{c}{\Omega B} \left[ \mathbf{h} \times \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{h} \right] \right] = \frac{c}{\Omega B} \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t}. \quad (16)$$

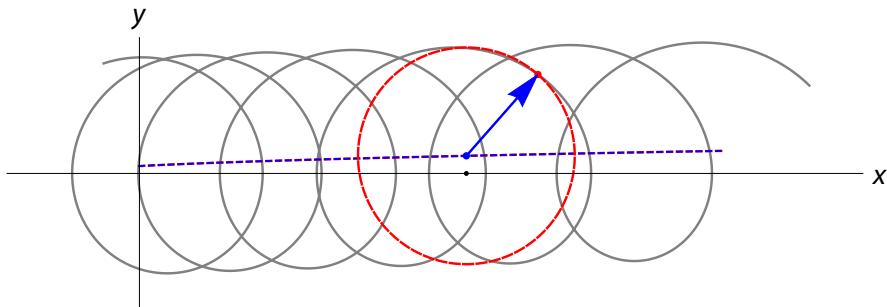
В медленно меняющемся поле скорость поляризационного дрейфа значительно меньше скорости электрического дрейфа,  $v_{\text{pol}} \ll v_E$ , но в отличие от него зависит от массы и заряда частицы (через частоту  $\Omega = eB/mc$ ). Поэтому в переменном электрическом поле электроны и ионы дрейфуют с немного разной скоростью. В результате плазма поляризуется.

Поляризация твёрдых или жидких диэлектриков вызывается изменением ориентации или величины атомных диполей. В плазме диполем можно считать пару частиц, состоящую из иона и электрона с приблизительно общим ведущим центром. Величина такого диполя меняется при изменении расстояния между ведущими центрами составляющих его частиц. В отличие от диэлектриков, в плазме нельзя создать постоянную поляризацию, так как плазма является проводником и поляризационные заряды за конечное время релаксируют. Однако в переменном электрическом поле  $\mathbf{E}$  возникает переменный поляризационный ток, преимущественно вызванный инерцией ионов, который вызывает реальную поляризацию плазмы.

На рисунке 3 показан пример расчёта траектории движения иона в однородном постоянном магнитном поле  $B_z = B$  и однородном линейно растущем во времени электрическом поле  $E_y = E_0 \times (1 + t/\tau)$ . Уравнения движения в этом случае допускают точное решение в аналитическом виде, которое нетрудно получить с помощью компьютерных систем символьных вычислений, таких как *Wolfram Mathematica* (см. также задачу 6). Однако ответ оказывается чрезмерно громоздким, поэтому приведём только выражение для скорости ведущего центра частицы:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left\{ c \frac{E_0}{B} (1 + t/\tau), \frac{c}{\Omega\tau} \frac{E_0}{B}, v_\parallel \right\}.$$

Напомним, что радиус-вектор  $\mathbf{R}$  ведущего центра определяется формулой (23) через параметры, характеризующие движение частицы в сопутствующей системе отсчёта, но указывающий на это штрих в обозначениях мы опускаем. В соответствии с приведённой выше формулой, ведущий центр движется со скоростью электрического дрейфа  $cE/B$  вдоль оси  $x$  и со скоростью поляризационного дрейфа  $c(\partial E/\partial t)/\Omega B$  в направлении оси  $y$ .



**Рис. 3.** (видео) Электрический и поляризационный дрейфы: магнитное поле  $B_z$  перпендикулярно плоскости рисунка, электрическое поле направлено вдоль оси  $y$  и увеличивается по закону  $E_y = (1 + t/\tau) E_0$ . Ведущие центры иона (синий кружок) и электрона (чёрная точка на оси  $x$ ) дрейфуют с одинаковой скоростью  $v_E = cE_y/B_z$  вдоль оси  $x$ , но с разной скоростью вдоль оси  $y$ . Лармировский радиус электрона при одинаковой энергии электрона и иона неразличим в масштабе рисунка. Так как среднее (за циклотронный период) значение вектора лармировского радиуса обращается в нуль,  $\langle \rho \rangle = 0$ , среднее значение радиус-вектора иона равно радиус-вектору ведущего центра:  $\langle \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{R} \rangle + \langle \rho \rangle = \mathbf{R}$ .

## §5.4. Скорость движения ведущего центра

Скорость движения ведущего центра есть сумма скоростей всех рассмотренных дрейфов:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{VB} + \mathbf{v}_{cf} + \mathbf{v}_{pol}. \quad (17)$$

Здесь  $v_{\parallel}$  обозначает скорость движения ведущего центра вдоль силовой линии. Скорость электрического дрейфа  $\mathbf{v}_E$  вычисляется по формуле (14) или (30) в зависимости от требуемой точности. Скорость градиентного дрейфа  $\mathbf{v}_{VB}$  определяется по формуле (2). Скорость центробежного дрейфа  $\mathbf{v}_{cf}$  обычно рассчитывают по более простой формуле (9) вместо более общей (8), а скорость поляризационного дрейфа  $\mathbf{v}_{pol}$  – по формуле (16) вместо более сложной (7), которую имеет смысл использовать только при наличии достаточно сильного электрического поля.

Общее выражение заметно упрощается в практически важном случае, когда и магнитное, и электрическое поля стационарны (не зависят

от времени). Тогда формула (17) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}], \quad (18)$$

чаще всего приводимый в учебниках по физике плазмы.

Искривленное магнитное поле почти всегда оказывается неоднородным, поэтому к центробежному дрейфу (последнее слагаемое в последней формуле) всегда примешивается градиентный дрейф (предпоследнее слагаемое). По крайней мере, именно так обстоит дело в случае, когда магнитное поле потенциально, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0.$$

В лабораторных условиях, где стационарное магнитное поле создаётся с помощью магнитных катушек, оно заведомо потенциально в той части экспериментальных установок, которая не занята самими катушками и плазмой, т. е. в вакууме. В связи с этим *потенциальное* магнитное поле иногда называют *вакуумным*. Токи, текущие в плазме, часто слишком малы по сравнению с током магнитных катушек, поэтому даже внутри плазмы магнитное поле часто можно считать вакуумным. В таком поле направления центробежного и градиентного дрейфов совпадают.

Чтобы доказать это утверждение, используем равенство

$$[\mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{h}] = -\boldsymbol{\kappa},$$

следующее из векторного тождества

$$[\mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{h}] = \frac{1}{2} \nabla h^2 - (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}$$

при дополнительном условии  $\nabla h^2 = 0$  (так как  $h = |\mathbf{h}| = 1$ ) и определения вектора кривизны (10) магнитной силовой линии. Замечаем также, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{1}{B} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \left[ \nabla \frac{1}{B} \times \mathbf{B} \right] = - \left[ \frac{\nabla B}{B} \times \mathbf{h} \right],$$

поэтому

$$\boldsymbol{\kappa} = -[\mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{h}] = \left[ \mathbf{h} \times \left[ \frac{\nabla B}{B} \times \mathbf{h} \right] \right] = \frac{\nabla B}{B} - \mathbf{h} \left( \mathbf{h} \cdot \frac{\nabla B}{B} \right).$$

Следовательно,

$$[\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] = \left[ \mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right].$$

В итоге градиентный и центробежный дрейфы объединяются в единый блок:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} + \mathbf{v}_{\text{cf}} = \frac{2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right]. \quad (19)$$

Вероятно, первым эту формулу получил Г. И. Будкер в работе 1951 года, которая была рассекречена в 1958 году [69]. Формула Будкера часто используется при расчёте траекторий движения заряженных частиц в установках для магнитного удержания плазмы.

## Литература

На элементарном уровне теория дрейфов изложена в «Лекциях по физике плазмы» Д. А. Франк-Каменецкого [4]. Скорости дрейфов вычислены в третьей главе.

В «Физике плазмы для физиков» Л. А. Арцимовича, Р. З. Сагдеева без применения векторных формул рассмотрены некоторые виды дрейфовых движений (§2.1), а также исследованы траектории движения частиц в термоядерных установках типа пробкотрон и токамак (§2.2).

Элементарный вывод скорости градиентного и центробежного дрейфов в релятивистском случае можно найти в §12.4 «Классической электродинамики» Дж. Джексона (John Jackson) [70].

Последовательный вывод полной системы дрейфовых уравнений двумя разными способами изложен Д. В. Сивухиным [67] и А. И. Морозовым, Л. С. Соловьёвым [68] в двух первых выпусках «Вопросов теории плазмы». Там же на качественном уровне обсуждается происхождение дрейфов. Ещё два метода вывода дрейфовых уравнений движения приведены в монографии Т. Нортропа (Theodore Northrop) «Адиабатическая теория движения заряженных частиц» [71].

## Задачи и вопросы

**Задача 1.** Найдите скорость градиентного и центробежного дрейфов релятивистской частицы.

Решение  $\Rightarrow$  281

**Задача 2.** Исследуйте движение заряженной частицы в поле прямого тока и сравните с дрейфовым приближением.

**Задача 3.** За какое время протон с энергией 5 кэВ совершил полный оборот вокруг Земли, если он стартует из экваториальной плоскости, его скорость вдоль магнитного поля равна нулю, а расстояние до центра Земли составляет 20 000 км? Считайте, что магнитное поле создается диполем с величиной  $7,8 \times 10^{19}$  Гс×м<sup>3</sup>, который расположен в центре Земли.

[Ответ](#) ⇒ 281

**Задача 4.** Найдите силу, действующую на заряженную частицу в системе отсчета ведущего центра.

[Решение](#) ⇒ 281

**Задача 5.** Для заданной траектории частицы  $\mathbf{r}(t)$  найдите направляющий вектор мгновенной оси вращения  $\omega$  (вектор Дарбу), полагая, что направление касательной к траектории движения во вращающейся системе отсчета неизменно.

[Решение](#) ⇒ 283

**Задача 6.** Вычислите радиусы кривизны и кручения траектории движения заряженной частиц в однородном магнитном поле.

[Ответ](#) ⇒ 283

**Задача 7.** Вычислите скорость дрейфа в статическом магнитном поле, усреднив уравнения движения заряженной частицы.

[Решение](#) ⇒ 283

## Лекция 6

# Адиабатические инварианты

---

**Магнитный момент. Первый адиабатический инвариант.**

**Система уравнений ведущего центра.**

**Траектории частиц в пробкотроне.**

**Иерархия адиабатических инвариантов**

### §6.1. Магнитный момент

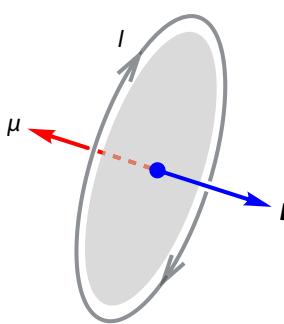
Виток с током обладает магнитным дипольным моментом

$$\mu = \frac{SI}{c} N,$$

где  $N$  – единичный вектор нормали к плоскости витка, составляющий правый винт с направлением тока в витке  $I$ , как показано на рисунке 1. В системе отсчёта, сопутствующей ведущему центру ларморовской орбиты, траектория частицы в магнитном поле замкнута и образует токовый виток. Ток равен заряду частицы  $e$ , делённому на период циклотронного вращения, т. е.

$$I = \frac{e\Omega}{2\pi},$$

где  $\Omega = eB/mc$  обозначает циклотронную частоту. Направление тока одинаково для положительно и отрицательно заряженных частиц, что учтено в приведённой формуле, где  $\Omega$  меняет знак при смене знака заряда  $e$ . Вспоминая, что направление циклотронного вращения составляет левый винт с вектором  $\Omega = eB/mc$ , нетрудно сообразить, что направление тока также составляет левый винт, но с направлением магнитного поля  $B$ . Следовательно, правый винт направление тока образует с вектором  $N = -h = -B/B$ . Площадь витка  $S = \pi\rho^2$  выражается через ларморовский радиус  $\rho = v_\perp/\Omega$  (в сопутствующей системе отсчёта). Собирая



**Рис. 1.** Лармировская окружность образует замкнутый виток с током в системе отсчёта ведущего центра. Такой виток обладает магнитным моментом  $\mu$ , который направлен по нормали к плоскости витка в сторону, противоположную магнитному полю  $B$ . Поток магнитного поля  $\Phi$  через такой виток приближённо сохраняется, являясь адиабатическим инвариантом. В нерелятивистском приближении этот инвариант с точностью до коэффициента, составленного из мировых констант, равен модулю магнитного момента  $\mu$  в системе отсчёта ведущего центра.

все множители, находим, что в системе отсчёта ведущего центра

$$\mu = -\mu \mathbf{h}, \quad (1)$$

где

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} \quad (2)$$

обозначает длину вектора магнитного момента  $\mu$ . Именно её, а не вектор  $\mu$ , чаще всего называют орбитальным магнитным моментом заряженной частицы в магнитном поле.

Чтобы учесть релятивистские эффекты,  $\mu$  нужно умножить на релятивистский фактор  $\gamma$ , так что «правильный» магнитный момент равен

$$\mu_\gamma = \gamma \mu \quad (3)$$

(задача 1). Учёт релятивистских эффектов в лабораторной плазме, как правило, избыточен, но он поможет нам уточнить физический смысл первого адиабатического инварианта.

## §6.2. Первый адиабатический инвариант

Поток магнитного поля

$$\Phi = \pi \rho^2 B \quad (4)$$

через площадь лармировской окружности в сопутствующей системе отсчёта ведущего центра является адиабатическим инвариантом, т. е. при-

ближённо сохраняется при медленных изменениях магнитного и электрического полей, вызванных как явной зависимостью полей от времени, так и перемещением частицы в неоднородных полях.

Постоянство  $\Phi$  следует из закона электромагнитной индукции Фарадея и закона Ома для замкнутой электрической цепи. В соответствии с законом Фарадея (Michael Faraday, 1831 [72]), изменение магнитного потока  $d\Phi/dt$  через замкнутый контур создаёт электродвижущую силу

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

С другой стороны, по закону Ома (Georg Ohm, 1827 [73]) она равна произведению тока  $I$  в контуре на его сопротивление  $R$ :

$$\mathcal{E} = RI.$$

Сопротивление контура, образованного идеальным проводником, равно нулю, а вместе с ним равно нулю и изменение магнитного потока. Движение заряженной частицы по замкнутой лармировской окружности под действием одной только силы Лоренца означает отсутствие какого-либо электрического сопротивления, поэтому магнитный поток через лармировскую окружность есть сохраняющаяся величина и

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Для формального доказательства инвариантности  $\Phi$  воспользуемся общей теоремой механики об адиабатических инвариантах [74, §49]. В данном случае её применение избыточно, но она будет незаменима при поиске других инвариантов.

Адиабатическими инвариантами вообще являются интегралы

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad (5)$$

взятые по периоду изменения *циклической* координаты  $q_i$ , которой в невозмущённой системе соответствует периодическое движение. Упомянутая теорема утверждает, что величина  $J_i$  будет приближённым интегралом движения при наличии малых возмущений, если  $p_i$  есть импульс, канонически сопряжённый циклической координате  $q_i$ .

Невозмущённую систему в данном случае образуют однородное постоянное магнитное поле  $B$  и однородное постоянное электрическое поле  $E$ , а периодическим (циклическим) является движение заряженной

частицы в системе отсчёта ведущего центра, двигающейся со скоростью  $\mathbf{u} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \mathbf{v}_E$  относительно исходной системы отсчёта. Следовательно, адиабатическим инвариантом является интеграл<sup>1</sup>

$$J_{\perp} = \frac{1}{2\pi} \oint (\mathbf{P}_{\perp} \cdot d\mathbf{r}_{\perp}), \quad (6)$$

взятый по периоду движения в системе отсчёта ведущего центра частицы, где частица вращается в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Подставляя

$$\mathbf{P}_{\perp} = m\mathbf{v}_{\perp} + \frac{e}{c}\mathbf{A}_{\perp}$$

в правую сторону уравнения (6) и учитывая, что  $(\mathbf{A}_{\perp} \cdot d\mathbf{r}_{\perp}) = (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_{\perp})$ , имеем

$$J_{\perp} = \frac{1}{2\pi} \oint m(\mathbf{v}_{\perp} \cdot d\mathbf{r}_{\perp}) + \frac{e}{2\pi c} \oint (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_{\perp}),$$

где  $\mathbf{A}$  обозначает векторный потенциал. В первом интеграле учтём, что скорость  $\mathbf{v}_{\perp}$  параллельна  $d\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} dt$ , а ко второму интегралу применим теорему Стокса, обозначив через  $d\mathbf{S}$  элемент поверхности, охватываемой контуром интегрирования:

$$J_{\perp} = \frac{1}{2\pi} \int mv_{\perp}^2 dt + \frac{e}{2\pi c} \int (\text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}).$$

В первом интеграле подынтегральное выражение постоянно, поэтому он равен произведению  $mv_{\perp}^2$  на период движения  $2\pi/|\Omega|$ ; в итоге первое слагаемое будет равно  $mv_{\perp}^2/|\Omega|$ . Во втором интеграле вектор  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$  также нужно считать постоянным, поскольку в невозмущённой системе магнитное поле однородно. Направление  $d\mathbf{S}$  в теореме Стокса составляет правый винт с направлением обхода контура, которое в данном случае совпадает с направлением ларморовского вращения, а направление вращения образует левый винт с направлением  $\Omega$ , то есть правый винт с направлением  $-\Omega$ . Следовательно,  $(e/2\pi c)\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -(m/2\pi)|\Omega| dS$ . Так как полная площадь равна  $S = \pi\rho^2 = \pi v_{\perp}^2/|\Omega|^2$ , второй интеграл составит половину первого, имея противоположный знак, а поэтому

$$J_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2|\Omega|} = \frac{|e|}{2\pi c} \Phi. \quad (7)$$

---

<sup>1</sup> В лекции 4 величины, относящиеся к системе отсчёта ведущего центра, отмечались штрихом, но здесь мы штрих опускаем.

Заметим, что

$$J_x = \frac{1}{2\pi} \oint P_x \, dx, \quad J_y = \frac{1}{2\pi} \oint P_y \, dy$$

также являются адиабатическими инвариантами, однако они не несут новой информации, так как  $J_x = J_y = \frac{1}{2} J_{\perp}$ .

Факту инвариантности  $\Phi$  можно дать ещё одну интерпретацию. Подставляя  $\rho = mc v_{\perp}/eB$  в формулу (4), находим, что с точностью до коэффициента, составленного из мировых констант, магнитный поток пропорционален магнитному моменту  $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ :

$$\Phi = \frac{2\pi m c^2}{e^2} \mu.$$

Таким образом, магнитный момент также можно было бы назвать адиабатическим инвариантом. Однако это утверждение верно лишь в нерелятивистском приближении. В релятивистской теории  $\rho = \gamma m c v_{\perp}/(eB)$  и адиабатическим инвариантом является произведение  $\gamma^2 \mu$ , тогда как релятивистский магнитный момент  $\mu_{\gamma} = \gamma \mu$  не является инвариантом.

Инвариантность  $J_{\perp}$  и  $\Phi = \pi \rho^2 B$  даже в релятивистском случае нетрудно доказать без ссылок на теоремы механики, выполнив усреднение уравнений движения заряженной частицы в медленно меняющемся магнитном поле (задача 4). Наконец, если подставить релятивистские выражения  $\rho = cp_{\perp}/eB$  и  $p_{\perp} = \gamma m v_{\perp}$  для ларморовского радиуса и импульса в формулу (4), нетрудно заметить, что комбинация  $p_{\perp}^2/B$  также является адиабатическим инвариантом.

Суммируя всё сказанное, заключаем, что величины

$$\Phi, \quad \gamma^2 \mu, \quad p_{\perp}^2/B$$

являются адиабатическими инвариантами. Строго говоря, ни магнитный момент  $\mu$ , ни его релятивистский аналог  $\mu_{\gamma} = \gamma \mu$  не являются адиабатическими инвариантами. При переходе из одной системы отсчёта в другую магнитный дипольный момент преобразуется в электрический дипольный момент (задача 6), тогда как инвариант, по определению, не может зависеть от выбора системы отсчёта. И когда всё-таки говорят, что магнитный момент является адиабатическим инвариантом, то фактически подразумевают значение  $\mu$  в системе отсчёта ведущего центра в нерелятивистском пределе. Следуя сложившейся традиции, так мы и будем делать далее. Что же касается перехода между системами отсчёта,

то нужно преобразовывать величины  $p_\perp$  и  $B$ , через которые выражен адиабатический инвариант, считая константой величину инварианта  $p_\perp^2/B$ , в которой  $p_\perp$  и  $B$  есть значения поперечного импульса и магнитного поля в системе отсчёта, сопутствующей ведущему центру; напомним, что в предыдущей лекции величины, относящиеся к этой системе отсчёта, были помечены штрихом.

### §6.3. Система уравнений ведущего центра

В нерелятивистском приближении ведущий центр движется со скоростью

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{u} + \frac{1}{\Omega} \left[ \mathbf{h} \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \right] + \frac{v_\perp^2}{2\Omega} \left[ \mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right], \quad (8)$$

где  $\mathbf{u} = v_\parallel \mathbf{h} + \mathbf{v}_E$ . Помимо этого уравнения замкнутая система уравнений должна содержать ещё рецепт вычисления  $v_\perp$  и  $v_\parallel$ .

Уравнение для поперечной скорости  $v_\perp$  в сопутствующей системе отсчёта фактически уже получено в §6.2. В дрейфовом приближении при нерелятивистских скоростях  $\mu = mv_\perp^2/2B$  является интегралом движения, т. е.

$$\frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (9)$$

Отсюда следует, что  $v_\perp$  однозначно выражается через величину магнитного поля:

$$v_\perp = \sqrt{2\mu B/m}. \quad (10)$$

Продольную скорость  $v_\parallel$  проще всего найти из уравнения для кинетической энергии частицы

$$\frac{dK}{dt} = e \left( \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) + \mu \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (11)$$

Поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в уравнениях (10) и (11) относятся к точке, где находится ведущий центр частицы в данный момент времени, а кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2 \quad (12)$$

складывается из энергии ведущего центра  $\frac{1}{2}m(v_\parallel^2 + v_E^2)$  и энергии лармировского вращения  $\frac{1}{2}mv_\perp^2$ . Уравнение (11) можно вывести путём усреднения  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$  по лармировской орбите (задача 5). Однако результат усреднения почти очевиден, поэтому ограничимся краткими пояснениями.

Первое слагаемое в правой части (11) описывает работу электрического поля над ведущим центром частицы. Второе слагаемое отвечает работе вихревого электрического поля по замкнутой ларморовской окружности. При изменении  $\mathbf{B}$  ларморовские окружности адиабатически сжимаются или расширяются, соответственно этому уменьшается или увеличивается поперечная энергия частицы  $\frac{1}{2}mv_{\perp}^2$ .

Уравнение (11) можно переписать в ином виде, выделив из кинетической энергии (12) последнее слагаемое  $\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 = \mu B$ . Так как

$$\frac{d}{dt}\mu B = \mu \frac{\partial B}{\partial t} + \mu \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \cdot \nabla B \right),$$

уравнение (11) эквивалентно

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_{\parallel}^2 + mv_E^2}{2} = (e\mathbf{E} - \mu \nabla B) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}.$$

В стационарном поле электрический ( $\varphi$ ) и магнитный ( $\mathbf{A}$ ) потенциалы можно выбрать так, что они не будут зависеть от времени. Тогда  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , а правая часть последнего уравнения преобразуется в полную производную по времени  $d(-e\varphi - \mu B)/dt$ . Следовательно, полная энергия частицы

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_E^2 + \mu B + e\varphi \quad (13)$$

сохраняется, т. е.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \quad (14)$$

Второе слагаемое  $\frac{1}{2}mv_E^2$  в правой части (13) часто мало по сравнению с тремя другими. Если принять для оценки, что  $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 \sim \mu B \sim e\varphi \sim T$ ,  $E \sim \varphi/a$ , где  $T$  — температура облака плазмы,  $a$  — его минимальный размер, то это слагаемое оказывается примерно в  $a^2/\rho^2$  раз меньше других. Обычно им пренебрегают, так как  $a \gg \rho$ .

## §6.4. Адиабатические ловушки с магнитными пробками

В неоднородном магнитном поле на магнитный дипольный момент действует сила [70, формула (5.69)]

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}).$$

Так как  $\mu = -\mu \mathbf{h}$ ,  $(\mathbf{h} \cdot \mathbf{B}) = B$ , а  $\mu = \text{const}$ , она равна

$$\mathbf{F} = -\mu \nabla B. \quad (15)$$

Если подставить её в формулу Альфвена (§4.4),

$$\mathbf{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\mathbf{F} \times \mathbf{B}]}{B^2},$$

для скорости магнитного дрейфа под действием произвольной силы  $\mathbf{F}$ , получится уже известная формула (5.2) скорости градиентного дрейфа

$$\mathbf{v}_{VB} = \frac{v_1^2}{2\Omega} \left[ \mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right].$$

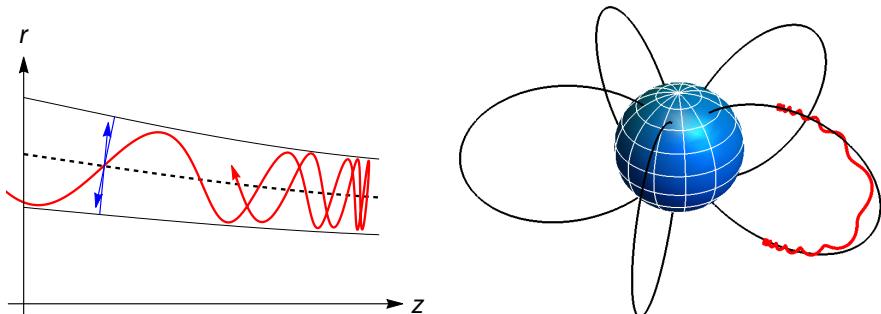
Это обстоятельство было отмечено Альфвеном (Hannes Alfvén) в той же статье [48], где он впервые вычислил скорость градиентного дрейфа.

Он же (и там же) объяснил, что продольная составляющая этой силы

$$F_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}, \quad (16)$$

которая не влияет на скорость дрейфа, тормозит частицу при движении в направлении более сильного поля, как показано на рисунке 2. Появление магнитной силы, действующей на ведущий центр частицы в направлении магнитного поля, может показаться удивительным, так как сила Лоренца  $\mathbf{F} = (e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$  перпендикулярна  $\mathbf{B}$ . Удивление проходит, если рассмотреть силы, возникающие при движении частицы в неоднородном магнитном поле. На малом участке пути движение частицы, очевидно, можно рассматривать как перемещение ларморовской окружности вдоль силовой линии. Если силовые линии параллельны друг другу, то в каждой точке окружности сила Лоренца направлена строго по радиусу к центру окружности и не может изменить продольную компоненту скорости. В нарастающем поле, где силовые линии сходятся, появляется проекция силы, перпендикулярная плоскости ларморовской окружности. Эта проекция стремиться вытолкнуть частицу из области более сильного поля.

Альфвен применял свою теорию к анализу движения заряженных частиц в дипольном магнитном поле Земли (рис. 3). Он предположил, что частицы должны отражаться от областей сильного магнитного поля вблизи магнитных полюсов. На этом же эффекте основан предложенный в 1954 году Г. И. Будкером [75] и практически одновременно

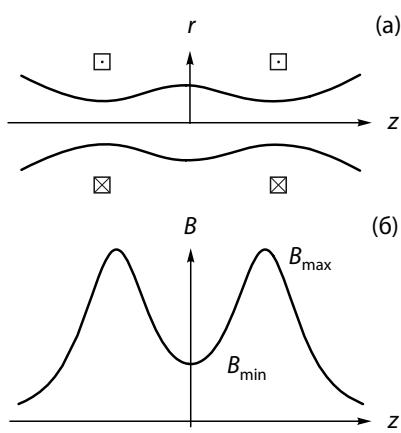


**Рис. 2.** Отражение заряженной частицы от магнитной пробки. Сила Лоренца перпендикулярна скорости частицы в каждой точке её траектории (красная кривая), но в неоднородном магнитном поле имеет проекцию на траекторию движения ведущего центра (штриховая линия): векторная сумма пары сил Лоренца на противоположных краях ларморовской окружности (две синие стрелки) направлена в сторону от области сгущения силовых линий в сильном поле.

**Рис. 3.** Типичная траектория заряженной частицы, захваченной в магнитное поле Земли (толстая красная кривая). Частица вращается вокруг магнитной силовой линии (тонкие линии), попеременно отражаясь от северного и южного магнитного полюсов. Магнитная ось наклонена под углом  $11,5^\circ$  к оси вращения Земли, а магнитные полюса перемещаются по эллиптическим траекториям на поверхности Земли со скоростью 10 км в год.

с ним Р. Постом (Richard Post) [76, 77] способ удержания плазмы в *адиабатической ловушке с «магнитными пробками»*. Простейший вариант такой ловушки называют *пробкотроном*. Название связано с тем, что магнитные линии сгущаются в области сильного поля, формируя что-то вроде горлышка бутылки, как показано на рисунке 4(а). Магнитное поле вблизи такого горлышка выполняет роль пробки, отражая большую часть частиц, в связи с чем в зарубежной литературе магнитные пробки называют магнитными зеркалами (англ. *magnetic mirrors*). К настоящему времени предложено множество модификаций пробкотрона Будке-ра – Поста. Все эти модификации объединяют единым термином *линейные или открытые ловушки для магнитного удержания плазмы*. Адиабатическая ловушка является частной реализацией открытой ловушки; другой, в определённом смысле – противоположной, реализацией является *газодинамическая ловушка* [78].

Рассмотрим, как движется заряженная частица в адиабатической ло-



**Рис. 4.** Схема адиабатической ловушки Будкера—Поста. Заряженные частицы удерживаются магнитным полем от разлёта поперёк силовых линий. Разлёту плазмы вдоль магнитного поля препятствуют магнитные пробки — области сильного магнитного поля, где силовые линии сгущаются. Форма силовых линий (на верхнем рисунке) напоминает бутылку с двумя горльшками и может быть найдена из условия сохранения магнитного потока через сечение бутылки  $\pi r^2 B(z) = \text{const}$ , где  $B(z)$  — поле на оси ловушки (на нижнем рисунке).

вушке. В простом пробкотроне магнитное поле создаётся двумя кольцевыми катушками с током. Оно имеет минимум между катушками и на каждой силовой линии максимально вблизи плоскости катушек. На рисунке 4(б) изображён профиль магнитного поля на оси; примерно такова же зависимость  $B(s)$  на силовых линиях, близких к оси.

Сначала исследуем движение ведущего центра частицы в нулевом приближении по параметру  $\rho/\ell$ , т. е. пренебрежём дрейфом. В этом приближении ведущий центр всё время движется вдоль одной и той же силовой линии. Если радиус катушек  $b$  порядка расстояния  $L$  между ними, то характерный масштаб изменения магнитного поля в этой задаче  $\ell \sim L \sim b$ . В пределе  $\rho/\ell \rightarrow 0$  и при отсутствии электрического поля имеем

$$\dot{\mathbf{R}} = v_{\parallel} \mathbf{h}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = \text{const}, \quad \mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} = \text{const}.$$

У частицы, стартующей из минимума поля, по мере продвижения в пробку увеличивается поперечная скорость

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{2}{m} \mu B},$$

перпендикулярная направлению магнитного поля, а продольная скорость

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2}{m} (\varepsilon - \mu B)},$$

параллельная магнитному полю, уменьшается, пока не обратится в нуль в *точке остановки*, где

$$B = B_* = \varepsilon/\mu.$$

Затем частица начнёт двигаться обратно, «отразившись» от точки остановки. Полная скорость  $v = \sqrt{v_\perp^2 + v_\parallel^2}$  всё это время остаётся постоянной вследствие сохранения энергии  $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$ .

Если ввести угол  $\theta_0$ , такой что в точке минимума магнитного поля  $B = B_{\min}$  перпендикулярная и параллельная магнитному полю проекции скорости определяются формулами

$$v_{\perp 0} = v \sin \theta_0, \quad v_{\parallel 0} = v \cos \theta_0,$$

то можно записать

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \frac{mv_{\perp 0}^2}{2B_{\min}} = \frac{mv^2}{2B_{\min}} \sin^2 \theta_0.$$

Следовательно, в точке остановки

$$B_* = B_{\min} / \sin^2 \theta_0.$$

Параметр  $\theta_0$  называют *питч-углом*.<sup>2</sup> Если  $B_*$  формально больше, чем максимальное магнитное поле  $B_{\max}$  на данной магнитной линии, частица беспрепятственно вылетает из ловушки. В ловушке могут удерживаться только частицы с достаточно большим питч-углом, таким что  $B_* < B_{\max}$ , т. е.

$$\sin^2 \theta_0 > B_{\min} / B_{\max}. \quad (17)$$

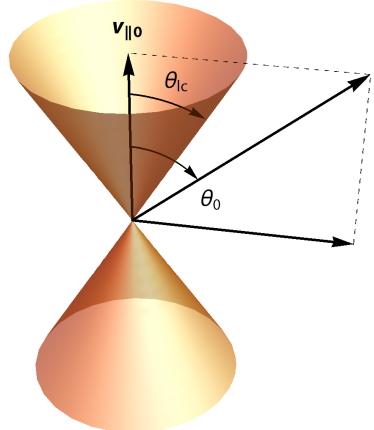
*Пробочное отношение*  $B_{\max}/B_{\min}$  является ключевым параметром пробкотрона, так как именно оно характеризует область удержания заряженных частиц в пространстве скоростей. Соответствующее ему значение питч-угла  $\theta_{lc}$  определяется из равенства

$$\sin^2 \theta_{lc} = B_{\min} / B_{\max}.$$

Условие,  $\theta_0 > \theta_{lc}$ , эквивалентное неравенству (17), выделяет в пространстве скоростей область удержания заряженной частицы. Противоположное условие  $\theta_0 < \theta_{lc}$  определяет *конус потерь* (loss cone). Он действительно имеет форму конуса, как показано на рисунке 5. Если заряженная

---

<sup>2</sup> Название происходит от английского слова *pitch*, которое имеет много значений, из них наиболее близкое по смыслу — наклон. Таким образом, питч-угол — это угол наклона направления скорости частицы к направлению магнитного поля.



**Рис. 5.** Конус потерь в пространстве скоростей. В ловушке с магнитными пробками удерживаются частицы с питч-углом  $\theta_0 = \arcsin(v_{\perp 0}/v)$  больше угла конуса потерь  $\theta_{lc} = \arcsin \sqrt{B_{min}/B_{max}}$ . Частицы, попавшие в конус потерь, вылетают из ловушки.

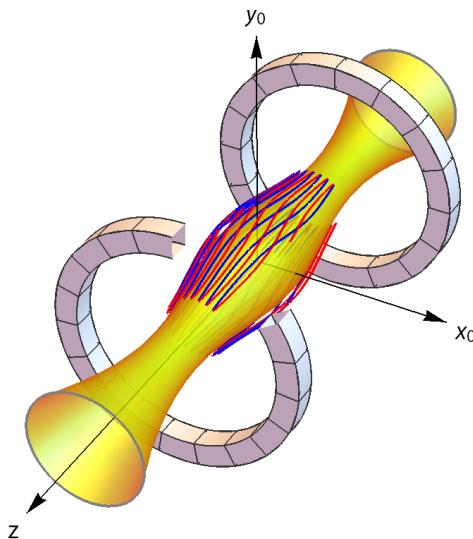
частица каким-либо образом попадает в конус потерь, она быстро теряется из ловушки, тем самым оправдывая его название. Соответственно,  $\theta_{lc}$  называют углом конуса потерь.

Взаимные столкновения частиц приводят к изменению их питч-угла. Частицы, первоначально находившиеся вне конуса потерь, в результате столкновений всё-таки туда попадают и уходят из пробкотрона. Из-за меньшей массы и, соответственно, большей скорости, электроны чаще испытывают столкновения и быстрее попадают в конус потерь, чем более тяжёлые ионы. В итоге плазма в адиабатических ловушках приобретает положительный потенциал  $\varphi \sim T_e/e$ , который препятствует уходу электронов, уравнивая скорость потерь электронов и ионов. Этот потенциал называют амбиполярным. Он служит инструментом поддержания квазинейтральности плазмы. Положительный амбиполярный потенциал изменяет форму конуса потерь, сужая его для электронов и расширяя для ионов (задача 7).

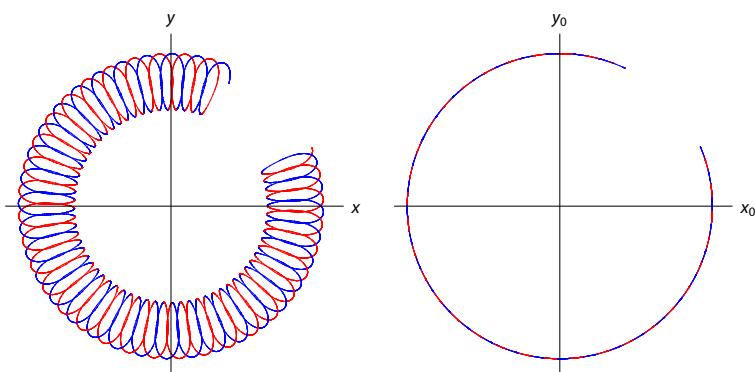
## §6.5. Второй адиабатический инвариант

Сделаем теперь следующий шаг по параметру  $\rho/\ell$  и учтём дрейф частицы в неоднородном магнитном поле, а также примем во внимание установленный выше факт наличия электрического поля в плазме, удерживаемой в адиабатической ловушке:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}].$$



**Рис. 6.** В простом аксиально-симметричном пробкотроне заряженная частица дрейфует по азимуту. Фрагмент катушки на переднем плане удалён, чтобы показать траекторию частицы. Траектория, доходящая до магнитных пробок, описывает петлю наподобие восьмёрки, в среднем смещаясь в ту сторону, куда дрейфует частица, запертая вблизи экватора.



**Рис. 7. (видео)** Проекция дрейфовой траектории, изображённой на рисунке 6, на экваториальную плоскость пробкотрона. Слева — ортогональная проекция, справа — проекция по магнитным линиям. Дрейфовые оболочки образуют систему вложенных непересекающихся поверхностей вращения (не показано).

В пробкотроне, создаваемом коаксиальными катушками, силовая линия плоская, а скорость дрейфа  $\mathbf{v}_{\text{dr}} = d\mathbf{R}/dt$  направлена по азимуту. Частица медленно дрейфует в азимутальном направлении, быстро осциллируя между магнитными пробками. Траектория ведущего центра покрывает *дрейфовую оболочку*, которая в осесимметричном пробкотроне представляет собой поверхность вращения, образованную вращением силовой линии вокруг оси пробкотрона, как показано на рисунке 6. Направление дрейфа изменяется на противоположное при смене знака кривизны, поэтому траектория ведущего центра частицы, у которой точка остановки находится вблизи магнитной пробки, описывает петлю наподобие восьмёрки, в среднем смещаясь в ту же сторону, что и траектория частицы, локализованной вблизи экватора ловушки. За время пролёта между точками остановки частица смещается по азимуту на малый угол, как показано на рисунке 7, поэтому её траектория плотно устилает поверхность дрейфовой оболочки.

Чтобы найти форму дрейфовой оболочки в более сложной геометрии, не обязательно решать дрейфовые уравнения движения. При определённых условиях дрейфовая оболочка однозначно характеризуется постоянными значениями энергии  $\epsilon$ , магнитного момента  $\mu$  и так называемого продольного адиабатического инварианта  $J_{\parallel}$ .

В нулевом приближении по параметру  $\rho/\ell$ , когда дрейфовым движением полностью пренебрегают, частица движется по одной и той же силовой линии постоянного во времени магнитного поля между точками остановки, причём это движение строго периодично. Таким образом, невозмущённым является движение строго вдоль силовой линии по координате  $s$ , а канонически сопряжённым импульсом — проекция обобщённого импульса  $P_{\parallel} = mv_{\parallel} + (e/c)A_{\parallel}$  на направление силовой линии в каждой её точке. Интеграл по периоду этого движения

$$J_{\parallel} = \frac{1}{2\pi} \oint P_{\parallel} ds = \frac{1}{2\pi} \oint mv_{\parallel} ds + \frac{1}{2\pi} \oint \frac{e}{c} A_{\parallel} ds$$

является адиабатическим инвариантом для частицы с заданной энергией  $\epsilon$  и магнитным моментом  $\mu$ . Второй интеграл в правой части обращается в нуль при интегрировании по замкнутой траектории (в отличие от первого, где  $v_{\parallel}$  меняет знак одновременно со сменой знака  $ds$ ). Поэтому окончательно имеем

$$J_{\parallel} = \frac{1}{\pi} \int \sqrt{2m(\epsilon - e\varphi - \mu B - \frac{1}{2}mv_E^2)} ds, \quad (18)$$

где интегрирование идёт по силовой линии между точками отражения частицы, в которых  $\varepsilon = e\varphi + \mu B + mv_E^2/2$ . Величину  $J_{\parallel}$  называют *продольным адиабатическим инвариантом*. Он приближённо сохраняется при появлении небольшого возмущения, которое нарушает строгую периодичность движения.

В качестве такого возмущения можно рассматривать дрейф частиц, который приводит к медленному смещению частицы на соседние силовые линии магнитного поля. «Медленность» означает, что характерное время изменения  $\tau_{\text{dr}}$  магнитного или электрического поля, вызванного переходом частицы на другие силовые линии, велико по сравнению с периодом продольных колебаний:

$$\tau_{\text{dr}} \gg \ell/v. \quad (19)$$

Для выполнения этого условия в адиабатических ловушках требуется, чтобы ларморовский радиус ионов был значительно меньше поперечного размера плазмы (задача 9).

Чтобы отследить процесс перехода частицы с одной силовой линии на другую, прежде всего их нужно как-то пометить. В качестве маркера силовой линии обычно используют её координаты пересечения с какой-то заранее выбранной поверхностью. Выбор такой поверхности определяется только соображениями удобства. Часто выбирают экваториальную плоскость, которая рассекает магнитную ловушку примерно пополам. Пусть  $x_0, y_0$  — координаты пересечения силовой линии с такой поверхностью. Тогда можно записать, что

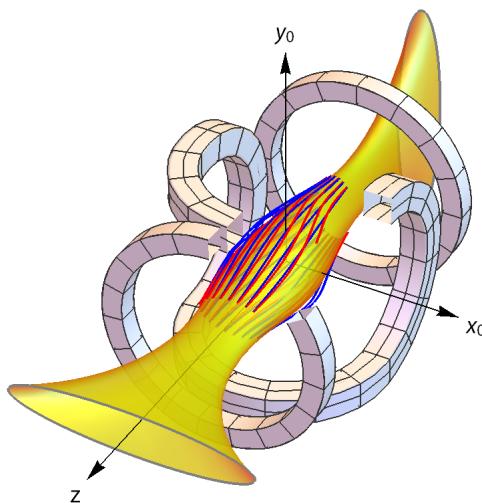
$$\varphi = \varphi(x_0, y_0, s), \quad B = B(x_0, y_0, s).$$

При этом продольный адиабатический инвариант оказывается функцией параметров  $\varepsilon, \mu, x_0, y_0$ :

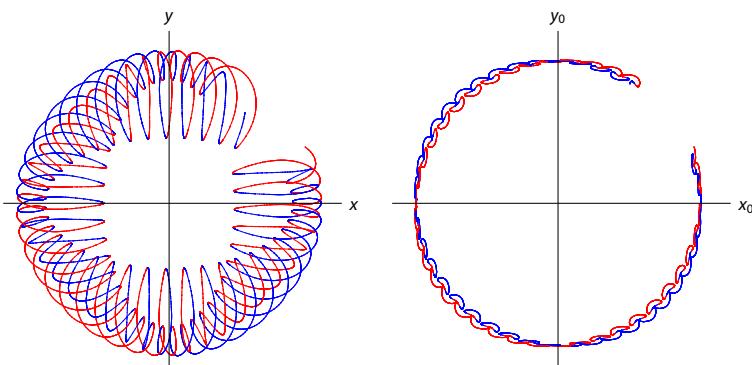
$$J_{\parallel} = J_{\parallel}(\varepsilon, \mu, x_0, y_0),$$

а уравнение  $J_{\parallel} = \text{const}$  даёт зависимость  $y_0$  от  $x_0$  для частицы с заданными  $\varepsilon$  и  $\mu$ , т. е. линию пересечения дрейфовой оболочки с выбранной плоскостью  $(x_0, y_0)$ . Дрейфовая поверхность составляется из силовых линий, выпущенных из всех точек этой линии пересечения.

В аксиально-симметричном пробкотроне дрейфовая поверхность является поверхностью вращения (рисунки 6 и 7). Для частиц с разными значениями  $\varepsilon$  и  $\mu$  поверхности совпадают, если, конечно, одинаков радиус поверхности  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ .



**Рис. 8.** Дрейф заряженной частицы в квадрупольной адиабатической ловушке. Квадрупольное поле создаётся катушкой типа «baseball», размещённой между круглыми катушками. Фрагменты катушек удалены, чтобы показать траекторию частицы. Поверхность, составленная из магнитных линий, выпущенных из окружности в экваториальной плоскости ловушки, вблизи магнитных пробок приобретает форму «рыбьих хвостов».



**Рис. 9. (видео)** Проекция дрейфовой траектории, изображённой на рисунке 8, на экваториальную плоскость ловушки. Слева – ортогональная проекция, справа – проекция по магнитным линиям. Поверхности  $J_{\parallel} = \text{const}$  для разных  $\epsilon$  и  $\mu$  образуют систему взаимно пересекающихся поверхностей (не показано).

В ловушке с квадрупольным магнитным полем дрейфовая поверхность имеет более сложную форму (рисунки 8 и 9). Сравнив рисунок 9, где показана проекция дрейфовых траекторий на экваториальную плоскость (и особенно его правую часть, где построена проекция вдоль магнитных линий) с аналогичным рисунком 7 для аксиально-симметричного пробкотрона, нетрудно заметить, что в квадрупольной ловушке эта проекция имеет конечную ширину, тогда как в случае аксиально-симметричного пробкотрона она равна нулю. Этот эффект называется расщеплением дрейфовой оболочки. Поверхность  $J_{\parallel} = \text{const}$  располагается где-то внутри такой расщеплённой оболочки. Читателю предлагается самому объяснить причину расщепления и оценить толщину дрейфовой оболочки (задача 18).

## §6.6. Третий адиабатический инвариант

Наконец, расскажем о *третьем адиабатическом инварианте*  $\Phi_{\text{dr}}$ . Представим, что в предыдущей задаче  $\varphi$  и  $\mathbf{B}$  медленно меняются, при чём характерное время изменений значительно больше времени  $e/v_{\text{dr}}$ , за которое частица обходит дрейфовую оболочку. При этом сохраняется магнитный поток через сечение дрейфовой оболочки:

$$\Phi_{\text{dr}} = \int_{S_{\text{dr}}} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}). \quad (20)$$

С формальной точки зрения  $\Phi_{\text{dr}}$  есть функция энергии частицы  $\varepsilon$ , её магнитного момента  $\mu$  и «номера» дрейфовой оболочки, которым служит величина продольного адиабатического инварианта. При медленном изменении электрического и магнитного полей адиабатические инварианты  $\mu$ ,  $J_{\parallel}$  и  $\Phi_{\text{dr}}$  сохраняются, а энергия частицы меняется. Зависимость энергии от времени  $\varepsilon(t)$  можно найти из совместного решения уравнений  $J_{\parallel} = \text{const}$  и  $\Phi_{\text{dr}} = \text{const}$  при заданном начальном значении  $\mu$ .

Второй и третий адиабатические инварианты первоначально были введены в монографии Х. Альфвена и К.-Г. Фельтхаммара [79, 80] «Космическая электродинамика» для описания движения заряженных частиц в магнитном поле Земли.

## Литература

Краткое изложение теории адиабатических инвариантов дано в книге [Л. А. Арцимовича и Р. З. Сагдеева «Физика плазмы для физиков» \[7\]](#) (§2.3), где также обсуждается точность сохранения адиабатических инвариантов.

[А. И. Морозов и Л. С. Соловьёв](#) изложили строгую теорию адиабатических инвариантов в своей статье [\[68\]](#) в сборнике «Вопросы теории плазмы»; они также указали критерий абсолютного удержания в аксиально-симметричном пробкотроне.

[Д. Д. Рютов и Г. В. Ступаков](#) описали способ отыскания дрейфовых оболочек в линейной адиабатической ловушке с квадрупольным магнитным полем [\[81\]](#).

В монографии [Т. Нортропа \(Theodore Northrop\)](#) [\[71\]](#) высказана гипотеза, что дрейфовое разложение скорее является асимптотическим, нежели сходящимся рядом, причём магнитный момент сохраняется во всех порядках асимптотического разложения. Неасимптотические эффекты, приводящие к нарушению адиабатической инвариантности магнитного момента, на простых моделях магнитных ловушек изучены [Б. В. Чириковым](#) [\[82\]](#). [И. А. Котельников](#) доказал, что малозаметная гофировка магнитного поля, связанная с дискретной структурой магнитной системы, существенно усиливает эти эффекты [\[83\]](#).

Эксперименты по проверке принципа адиабатического удержания выполнили С. Н. Родионов [\[84\]](#), Г. Гибсон и Е. Лауэр [\[85\]](#). Отдельный параграф этой теме посвящён в книге С. Ю. Лукьянова [\[6, §27\]](#).

Различные типы открытых (адиабатических) ловушек для удержания плазмы описаны в обзорных статьях [Д. Д. Рютова](#) [\[86\]](#) и Р. Поста ([Richard Post](#)) [\[87\]](#).

## Задачи и вопросы

**Задача 1.** Вычислите магнитный момент заряженной релятивистской частицы в магнитном поле. [Решение](#)  $\Rightarrow$  286

**Задача 2.** Покажите, что при ускорении заряженной релятивистской частицы электрическим полем, параллельным магнитному, магнитный поток через ларморовскую окружность не меняется, в отличие от магнитного момента. [Решение](#)  $\Rightarrow$  287

**Задача 3.** Используя теорему об адиабатических инвариантах, докажите, что отношение  $p_1^2/B$  является адиабатическим инвариантом не только в нерелятивистском пределе.

**Задача 4.** Докажите, что отношение  $p_1^2/B$  является адиабатическим инвариантом, выполнив усреднение уравнений движения частицы в системе отсчёта ведущего центра.

[Решение ⇒287](#)

**Задача 5.** Выведите уравнение (11) для темпа изменения кинетической энергии частицы в дрейфовом приближении, выполнив усреднение уравнения движения частицы в системе отсчёта ведущего центра.

[Решение ⇒288](#)

**Задача 6.** Запишите преобразования Лоренца для дипольных моментов при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую. Противоречит ли адиабатическая инвариантность магнитного момента преобразованию Лоренца?

[Решение ⇒289](#)

**Задача 7.** Найдите форму конуса потерь при наличии амбиполярного потенциала. Для простоты предположите, что потенциал плазмы  $\varphi$  почти всюду равен  $\varphi_0 > 0$  и лишь непосредственно вблизи магнитных пробок скачком обращается в нуль. Отдельно рассмотрите удержание электронов и положительно заряженных ионов.

[Решение ⇒290](#)

**Задача 8.** Найдите область абсолютного удержания в аксиально-симметричном пробкотроне.

[Решение ⇒290](#)

**Задача 9.** Выясните условия сохранения продольного адиабатического инварианта в адиабатических ловушках для удержания плазмы.

[Решение ⇒292](#)

**Задача 10.** В «катушке Гельмгольца» расстояние между витками с током равно их радиусу. Вычислите пробочное отношение на оси.

[Решение ⇒292](#)

**Задача 11.** В пробочное магнитное поле захвачен пучок заряженных частиц с одинаковым питч-углом. Пучок отражается в точке, где  $B = B_*$ , а его плотность в минимуме поля  $B_{\min}$  равна  $n_0$ . Найдите распределение плотности пучка вдоль силовой линии, определив её зависимость от величины магнитного поля  $B$  при  $B_{\min} < B < B_*$ .

[Ответ ⇒293](#)

**Задача 12.** Заряженная частица дрейфует в поле магнитного диполя. Величина диполя адиабатически медленно увеличивается в 2 раза. Во сколько раз изменится энергия частицы? [Решение](#)  $\Rightarrow 293$

**Задача 13.** Во сколько раз изменится энергия заряженной частицы с начальным питч-углом  $\theta_0 = 90^\circ$ , если магнитное поле в пробкотроне очень медленно увеличить в 2 раза?

**Задача 14.** Заряженная частица удерживается в пробкотроне в области минимального магнитного поля, где приближённо  $B(z) = B_{\min}(1 + z^2/L^2)$ . Магнитное поле в пробкотроне очень медленно увеличивается без изменения его геометрии. Во сколько раз изменится энергия частицы с заданным начальным питч-углом  $\theta_0$  при увеличении поля в  $n$  раз.

[Ответ](#)  $\Rightarrow 294$

**Задача 15.** (Механизм Ферми ускорения космических лучей.) Протон захвачен в ловушку с пробочным отношением 5. В начальный момент энергия протона равна 1 кэВ, а питч-угол в минимуме магнитного поля составляет  $45^\circ$ . Магнитные пробки сближаются со скоростью 10 км/с. До какой энергии разгонится протон, прежде чем покинет ловушку?

[Ответ](#)  $\Rightarrow 294$

**Задача 16.** Оцените точность сохранения магнитного момента заряженной частицы в магнитной адиабатической ловушке. [Решение](#)  $\Rightarrow 294$

**Задача 17.** Оцените время уменьшения магнитного момента заряженной частицы из-за циклотронного излучения в магнитном поле. Что происходит быстрее: уход частицы из пробкотрона вследствие неадиабатических эффектов или из-за циклотронного излучения?

**Задача 18.** Исследуйте форму дрейфовых траекторий в квадрупольной адиабатической ловушке. [Указание](#)  $\Rightarrow 295$

## Лекция 7

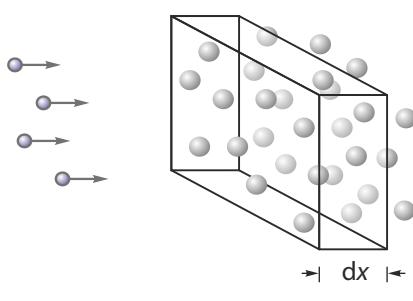
# Кулоновское рассеяние

---

**Сечение процесса. Длина свободного пробега. Частота столкновений. Дифференциальное и транспортное сечение. Рассеяние на неподвижном центре. Кулоновский логарифм. Приближение далёких пролётов**

При столкновении пары частиц в простейшем случае происходит *рассеяние*, которое сопровождается передачей энергии и импульса от одной частицы к другой. В более сложном варианте изменяется также состояние или состав сталкивающихся частиц: например, атомы становятся ионами и появляются свободные электроны; могут также испускаться и поглощаться фотоны. В столкновениях ионов больших энергий происходят реакции деления и синтеза ядер. Наконец, одновременно могут сталкиваться три или большее число частиц.

Все столкновения можно условно разделить на *упругие и неупругие*. Первые отличаются от вторых тем, что суммарная кинетическая энергия сталкивающихся частиц не изменяется. В рамках классической физики представление об упругих столкновениях заряженных частиц следовало бы считать идеализацией реальных явлений, так как любая заряженная частица, испытывающая ускорение, обязана излучать, теряя энергию. Квантовая теория вносит существенные поправки в классическую картину мира, предсказывая, что излучение имеет вероятностный характер и что только малая доля столкновений сопровождается излучением фотона, который способен унести заметную долю кинетической энергии. Этим оправдывается традиционный подход, когда изучение процессов, сопровождающих столкновения частиц, начинают с *кулоновского рассеяния*. Так принято называть упругие столкновения при пролёте одной заряженной частицы мимо другой.



**Рис. 1.** Пучок частиц ударяет атомы мишени, занимающей полупространство  $x > 0$ . Предположим, что, попадая в атом, частица «прилипает» к нему. Тогда плотность частиц пучка  $n_b$  убывает в  $e = 2,718 \dots$  раз на длине свободного пробега  $\lambda = 1/\sigma n_a$ , если  $n_a$  — это число атомов в единице объёма мишени, а  $\sigma$  — площадь видимого сечения атома. В модели твёрдых шариков с радиусом  $a$  она равна  $\pi a^2$ .

### §7.1. Параметры столкновений

Различные явления, случающиеся в столкновениях частиц, характеризуют *сечением процесса*. Поясним это понятие на примере абсолютно неупругого поглощения пучка частиц при падении на мишень, как показано на рисунке 1. Пусть поток частиц с плотностью  $n_b$ , летящих с одинаковой скоростью  $v$ , падает на полупространство  $x > 0$ , занятое веществом из очень массивных частиц (назовём их атомами) с плотностью  $n_a$  штук в единице объёма. Пусть  $dn_b$  есть изменение плотности пучка за счёт выбытия частиц, которые «прилипают» к атомам на дифференциально малом расстоянии  $dx$ . Ясно, что это число пропорционально  $n_a$ ,  $n_b$  и  $dx$ . Следовательно,

$$dn_b = -\sigma n_a n_b dx, \quad (1)$$

где константа пропорциональности  $\sigma$  имеет размерность площади и называется *сечением процесса*. Знак минус отвечает убыли частиц пучка.

В воображаемом процессе «прилипания»  $\sigma$  можно интерпретировать как площадь кружка вокруг каждого атома мишени, при попадании в который частица пучка прилипает. Тогда  $\sigma n_a dx$  есть доля геометрического сечения мишени, перекрытая атомами в слое толщины  $dx$ , перпендикулярном направлению движения пучка. Она равна доле частиц  $(-dn_b)/n_b$ , удалённых из пучка, что и отражает уравнение (1). Его решение

$$n_b = n_{b0} \exp(-x/\lambda)$$

описывает экспоненциальное убывание частиц в пучке, причём рассто-

жение

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n_a}, \quad (2)$$

на котором плотность пучка убывает в  $e = 2,718 \dots$  раз, называется *длиной свободного пробега*. Это понятие было введено Рудольфом Клаузисом (Rudolf Clausius) в 1858 году [88]. Среднее время между столкновениями

$$\tau = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{n_a \sigma v} \quad (3)$$

называют *временем свободного пробега*. Обратная величина

$$\nu = \frac{1}{\tau} = n_a \sigma v \quad (4)$$

называется *частотой столкновений*.

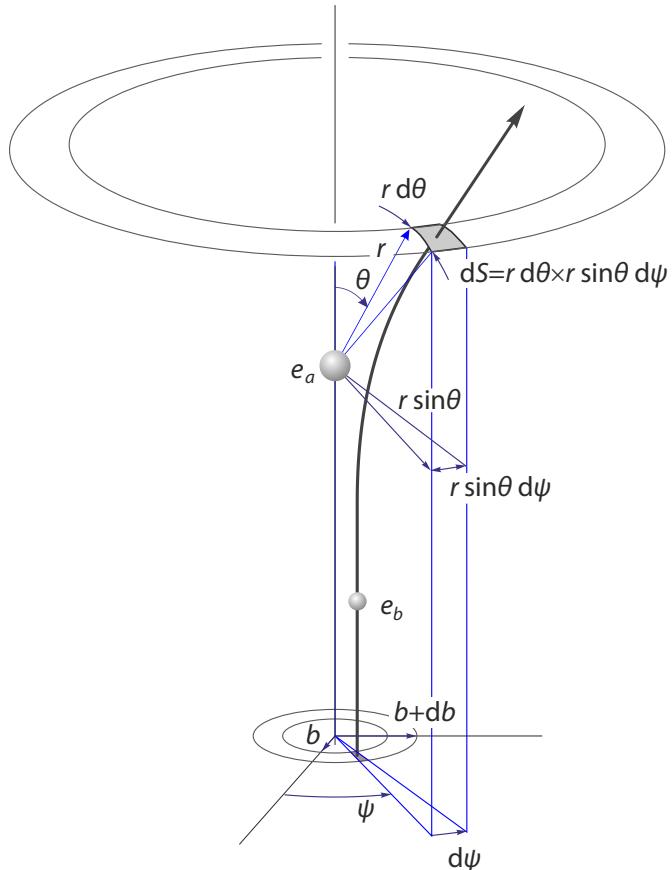
В столкновениях одного и того же набора частиц могут происходить разные явления. Например, электрон может упруго рассеяться на ионе, но возможна также излучательная рекомбинация, когда электрон захватывается на атомарную орбиту, а излишek энергии и импульса уносит фотон. Каждому из возможных процессов сопоставляют своё сечение, а наиболее вероятный процесс имеет сечение наибольшей величины.

## §7.2. Дифференциальное сечение рассеяния

Пусть поток частиц с зарядом  $e_b$ , скоростью  $v$  и плотностью  $n_b$  налетает на неподвижный кулоновский центр с зарядом  $e_a$ . Таким центром можно считать заряженную частицу с массой, значительно превышающей массу налетающей частицы, — тогда ускорением тяжёлой частицы можно пренебречь по сравнению с ускорением лёгкой частицы. Позднее мы избавимся от этого допущения, равно как и от предположения об одинаковой величине скорости налетающих частиц.

Пусть  $b$  обозначает *прицельный параметр* налетающей частицы (не путать с индексом в обозначениях вида  $e_b$  и  $n_b$ ), то есть кратчайшее расстояние между траекторией частицы на достаточно большом удалении от рассеивающего центра и параллельной ей осевой линией, проходящей через рассеивающий центр (рис. 2). Выделим в налетающем потоке пучок частиц, пролетающих через небольшой сегмент в виде сектора тонкого колечка с внутренним радиусом  $b$  и внешним радиусом  $b + db$ , опирающегося на азимутальный угол  $d\psi$ . Через площадь этого сегмента

$$d\sigma = db \times b d\psi \quad (5)$$



**Рис. 2.** Дифференциальное сечение рассеяния на неподвижном кулоновском центре. Частицы налетающего потока, пересекающие площадку  $d\sigma = db \times b d\psi$ , после рассеяния разлетаются в телесном угле  $d\Omega = dS/r^2 = d\theta \times \sin\theta d\psi$ .

в единицу времени пролетает  $n_b v d\sigma$  частиц. Каждая частица отклоняется на угол  $\theta$ , зависящий от прицельного расстояния  $b$  в соответствии с формулой Резерфорда (Ernest Rutherford, 1911 [89])

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{e_a e_b}{mv^2 b} = \frac{b_*}{b}, \quad (6)$$

где параметр

$$b_* = \frac{e_a e_b}{mv^2} \quad (7)$$

называют *кулоновским радиусом*. Прицельный параметр  $b = b_*$  отвечает рассеянию на  $90^\circ$ .

Сообразно вариации прицельного параметра  $db$  траектории рассеянных частиц расходятся в интервале углов<sup>1</sup>

$$d\theta = \left| \frac{db}{b} \right| db,$$

а поперечные размеры пучка траекторий непрерывно увеличиваются по мере удаления от рассеивающего центра. На расстоянии  $r$  от рассеивающего центра площадь выделенного сегмента пучка будет равна  $dS = r d\theta \times r \sin \theta d\psi$ . Однако величина телесного угла

$$d\Omega = dS/r^2 = \sin \theta d\theta d\psi, \quad (8)$$

опирающегося на эту площадь, остаётся неизменной. Отношение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (9)$$

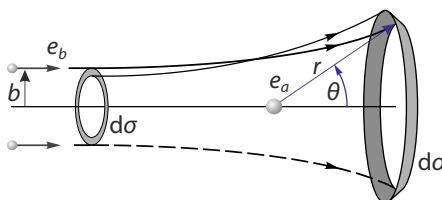
оказывается удобной характеристикой процесса рассеяния и называется *дифференциальным сечением кулоновского рассеяния*. Продифференцировав обе стороны формулы (6), находим производную  $db/d\theta$ , а затем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(b_*/2)^2}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{e_a^2 e_b^2}{4m^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}. \quad (10)$$

Дифференциальное сечение характеризует вероятность рассеяния в заданный интервал углов, так что дифференциал  $d\sigma = (d\sigma/d\Omega) d\Omega$  имеет смысл сечения рассеяния в телесный угол  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\psi$  около направления, заданного углами  $\theta$  и  $\psi$ . Полное сечение рассеяния  $\sigma$  получается интегрированием  $d\sigma$  по всему телесному углу, однако в теории кулоновских столкновений более ясный смысл имеет не полное, а транспортное сечение.

---

<sup>1</sup> Знак модуля  $| \dots |$  введён для того, чтобы величина  $d\theta$  была положительной.



**Рис. 3.** Траектория частицы с зарядом  $e_b$  при рассеянии на неподвижном кулоновском центре с зарядом  $e_a$ . Разница между импульсом частицы после и до рассеяния передаётся рассеивающему центру. Часть переданного импульса  $\Delta p_{\perp} = mv \sin \theta$ , перпендикулярная скорости налетающего потока, компенсируется частицей, которая налетает на том же прицельном расстоянии  $b$  с противоположной стороны рассеивающего центра (её траектория показана штрихами).

### §7-3. Транспортное сечение

Вычислим силу, действующую на рассеивающий центр со стороны потока частиц. Так как рассеивающий центр неподвижен, кинетическая энергия налетающей частицы  $\frac{1}{2}mv^2$  вдалеке от него до и после рассеяния одинакова.<sup>2</sup> Следовательно, абсолютная величина импульса  $mv$  до и после столкновения также одинакова. Однако каждая частица, которая отклоняется на угол  $\theta$ , передаёт рассеивающему центру часть импульса в направлении своего первоначального движения

$$\Delta p_{\parallel} = mv(1 - \cos \theta).$$

Часть переданного импульса  $\Delta p_{\perp} = mv \sin \theta$ , перпендикулярная скорости налетающего потока, компенсируется вкладом других частиц, как поясняет рисунок 3, поэтому искомая сила  $\mathbf{F}$  направлена вдоль скорости налетающего потока частиц. Она равна импульсу, переданному рассеивающему центру в единицу времени. Так как в единицу времени площадку с сечением  $d\sigma$  пересекают  $n_b v d\sigma$  частиц, имеем

$$\mathbf{F} = \int \Delta p_{\parallel} n_b v d\sigma.$$

Переходя от интегрирования по площади сечения налетающего потока  $d\sigma$  к интегрированию по телесному углу в направлении движения рассе-

<sup>2</sup> В процессе рассеяния сохраняется полная энергия  $\varepsilon = mv^2/2 + e_a e_b/r$ . При  $r \rightarrow \infty$  потенциальная энергия  $e_a e_b/r$  стремится к нулю, поэтому до и после столкновения с рассеивающим центром  $mv^2/2 = \varepsilon$ .

янных частиц путём замены  $d\sigma = (d\sigma/d\theta)d\theta$ , получаем окончательное выражение для силы, действующей на рассеивающий центр:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{v} n_b v \sigma_t, \quad (11)$$

где

$$\sigma_t = \int (1 - \cos \theta) \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta \quad (12)$$

обозначает *транспортное сечение*. Оно имеет смысл площади сечения незаряженного шарика, на который со стороны потока частиц действует такая же сила, как и на кулоновский центр, при условии, что шарик поглощает все частицы.

## §7.4. Кулоновский логарифм

Продолжая вычисления, подставим формулу Резерфорда (10) в интеграл (12) и распишем элемент телесного угла  $d\Omega$  с помощью формулы (8). Интегрирование по азимутальному углу  $\psi$  даёт множитель  $2\pi$ . В оставшемся интеграле

$$\sigma_t = 2\pi (b_*/2)^2 \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin^4(\theta/2)} \sin \theta d\theta$$

используем тригонометрические тождества  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$  и  $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ , а затем перейдём к интегрированию по переменной  $\sin(\theta/2)$ , заметив, что  $\cos(\theta/2) d\theta = 2 d \sin(\theta/2)$ :

$$\sigma_t = 4\pi b_*^2 \int_0^1 \frac{d \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

Получившийся интеграл логарифмически расходится на нижнем пределе, т. е. при малых значениях угла рассеяния  $\theta$ . Предваряя дальнейшее разбиение по существу дела, заменим нуль в нижнем пределе на неопределённый пока параметр  $\sin(\theta_{\min}/2) \approx \theta_{\min}/2 \ll 1$ :

$$\sigma_t \approx 4\pi b_*^2 \int_{\theta_{\min}/2}^1 \frac{d \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = 4\pi b_*^2 \ln \frac{2}{\theta_{\min}}. \quad (13)$$

Возникшая бесконечность сигнализирует, что какие-то явные или неявные предположения, сделанные нами, некорректны. Поскольку малым углам рассеяния  $\theta$ , согласно формуле Резерфорда (6), соответствуют большие значения прицельного параметра,

$$b \approx 2b_*/\theta,$$

очевидно, что расходимость не возникла бы, будь потенциал взаимодействия налетающего заряда с рассеивающим центром более короткодействующим, убывая при удалении от рассеивающего центра быстрее, чем по закону  $1/r$ . Тут самое время вспомнить, что в плазме потенциал кулоновского центра (как и вообще потенциал любого точечного заряда) экранируется на расстояниях, больших дебаевской длины  $\lambda_D$ , где поле спадает экспоненциально (лекция 2). Из-за этого прицельные расстояния  $b$ , существенно большие  $\lambda_D$ , на самом деле дают вовсе не бесконечный, а пренебрежимо малый вклад в транспортное сечение. Выбрав в качестве нижнего предела в интеграле (13) величину  $\theta_{\min} = 2b_*/\lambda_D$ , получим

$$\sigma_t = 4\pi\Lambda b_*^2, \quad (14)$$

где параметр

$$\Lambda = \ln \frac{\lambda_D}{b_*} \quad (15)$$

называют *кулоновским логарифмом*. Окончательные формулы получаются после подстановки выражения (7) для кулоновского радиуса. В частности,

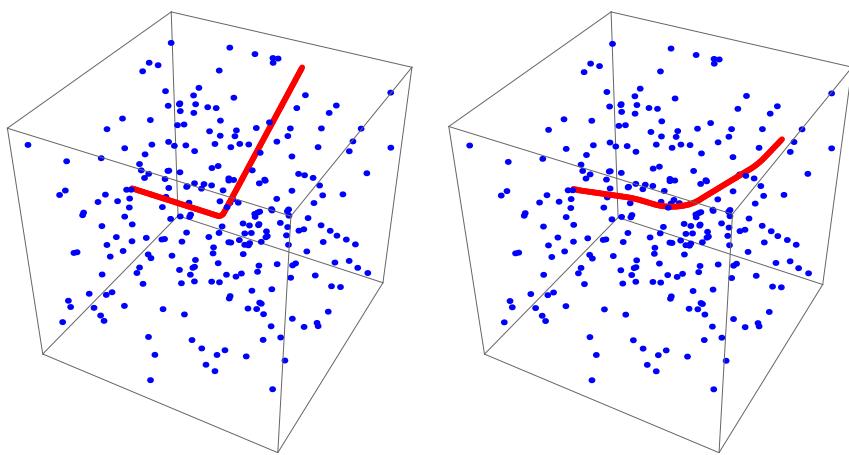
$$\sigma_t = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda}{m^2 v^4}. \quad (16)$$

Транспортное сечение убывает обратно пропорционально квадрату энергии  $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$  налетающих частиц (если пренебречь зависимостью  $\Lambda$  от  $\varepsilon$ ) и, что существенно, не зависит от массы (при заданной энергии). В практической формуле

$$\sigma_t \simeq \frac{10^{-12}}{\varepsilon^2}$$

энергия  $\varepsilon$  измеряется в электронвольтах (эВ), транспортное сечение  $\sigma_t$  — в квадратных сантиметрах ( $\text{см}^2$ ), а также принято, что  $\Lambda = 15$  и заряды частиц  $e_a$  и  $e_b$  равны элементарному заряду  $e$ . Для сравнения укажем, что сечение процессов с участием нейтральных атомов  $\sigma_{\text{at}} \sim 10^{-16} \text{ см}^2$  заметно меньше транспортного сечения кулоновских столкновений заряженных частиц,  $\sigma_{\text{at}} < \sigma_t$ , вплоть до энергии  $\varepsilon \sim 10^2$  эВ, заметно превышающей энергию ионизации. Таким образом, кулоновские столкновения играют важную роль даже в слабо ионизованной плазме. В той же области температур, где  $\sigma_{\text{at}} > \sigma_t$ , плазма полностью ионизована (лекция 3).

Кулоновский логарифм де-факто был вычислен Ленгмюром в его первой статье [26] по физике плазмы, но сам термин вошёл в обиход



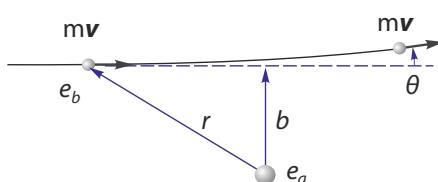
**Рис. 4.** Налетающая частица может рассеяться на значительный угол  $\theta \sim \pi/2$  либо в одном столкновении (рисунок слева), либо испытав многократные отклонения на малый угол (рисунок справа). Из-за дальнодействия кулоновской силы эффект многократного рассеяния на малые углы в далёких столкновениях накапливается примерно в  $\Lambda$  раз быстрее, чем в близких столкновениях с рассеянием на большой угол в одном акте.

с начала 1950-х годов.<sup>3</sup> В идеальной плазме, которая характеризуется большой величиной плазменного параметра  $N_D = (8\pi/3) n\lambda_D^3$ , отношение  $\lambda_D/b_* = 6N_D$  (для частиц с тепловыми скоростями  $b_* = e^2/2T$ ) также очень велико, и под знаком логарифма в формуле (15) его точное значение не очень существенно, что вполне оправдывает процедуру «обрезания» интеграла (13) на нижнем пределе (задача 2).

## §7.5. Приближение далёких пролётов

Налетающая частица может рассеяться на значительный угол  $\theta \sim \pi/2$  либо в одном столкновении, либо испытав многократные отклонения на малый угол, как показано на рисунке 4. Отмеченная выше необходимость транспортного сечения при малых углах рассеяния показывает, что второй процесс явно доминирует. Чтобы рассеяться на боль-

<sup>3</sup> Например, он встречается в работах С. И. Брагинского, Г. И. Будкера и В. И. Когана, которые были выполнены в 1951 году, но опубликованы позднее, после рассекречивания исследований по управляемому термоядерному синтезу в СССР [90].



**Рис. 5.** В приближении далёких пролётов реальная траектория заменяется прямой линией, вдоль которой налетающая частица летит с постоянной скоростью. Расстояние от рассеивающего центра до частицы вычисляется по формуле  $r = \sqrt{b^2 + v^2 t^2}$ , где момент времени  $t = 0$  соответствует максимальному сближению частицы с рассеивающим центром.

шой угол в одном столкновении, частицы должны сблизиться на расстояние порядка  $b_*$ . Напротив, рассеяние на малый угол происходит при пролётах частиц на большом расстоянии  $b \gg b_*$  относительно друг друга. Такие далёкие столкновения происходят столь часто, что в идеальной плазме каждая частица в каждый момент времени фактически находится в «процессе столкновения» с множеством других частиц. Из-за дальнодействия кулоновской силы эффект многократного рассеяния на малые углы в далёких столкновениях накапливается примерно в  $\Lambda$  раз быстрее, чем случаются близкие столкновения с рассеянием на большой угол в одном акте (задача 3). Угол рассеяния при далёких пролётах легко вычислить, не прибегая к точной формуле Резерфорда (6). Метод вычисления столь поучителен, что заслуживает отдельного изложения.

При  $\theta \ll 1$  можно считать, что частица движется по прямой траектории с постоянной скоростью  $v$ , как показано на рисунке 5. Тогда расстояние от частицы до рассеивающего центра можно вычислить по формуле  $r = (b^2 + v^2 t^2)^{1/2}$  (где время  $t$  отсчитывается от момента наибольшего сближения с центром), а изменение импульса частицы можно найти, интегрируя по времени перпендикулярную к траектории проекцию кулоновской силы  $F_\perp = (e_a e_b / r^2)(b/r)$ :

$$\Delta p_\perp = \int_{-\infty}^{\infty} F_\perp dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_a e_b b}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{2 e_a e_b}{v b}.$$

Интеграл от продольной компоненты силы в этом приближении равен нулю. Угол рассеяния  $\theta$  равен отношению  $\Delta p_\perp$  к полному импульсу частицы  $mv$ :

$$\theta \approx \frac{2 e_a e_b}{v b} / mv = \frac{2 b_*}{b}. \quad (17)$$

Этот результат совпадает с формулой Резерфорда (6) в пределе  $\theta \ll 1$ .

Использование приближённого выражения (17) вместо точной формулы Резерфорда приводит к дополнительной расходимости на верхнем пределе интегрирования в формуле (13) для транспортного сечения, поскольку приближённая формула (17) неприменима при  $\theta \gtrsim 1$ . Действительно, заменяя в (13)  $\sin(\theta/2)$  на  $\theta/2$ , получаем

$$\sigma_t = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2}{m^2 v^4} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Логарифмически расходящийся интеграл «обрезают» как на нижнем, так и на верхнем пределах, записывая кулоновский логарифм в виде

$$\Lambda = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\theta} = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}, \quad (18)$$

где  $b_{\min} \approx b_*$ ,  $b_{\max} \approx \lambda_B$ , а также учтено, что  $d\theta/\theta = -db/b$ .

Если длина волны де Броиля  $\lambda_B = \hbar/mv$  больше, чем кулоновский радиус  $b_* = e^2/mv^2$ , то в качестве  $b_{\min}$  нужно взять именно её,  $b_{\min} \approx \lambda_B$ , так как, согласно постулатам квантовой физики, прицельное расстояние невозможно зафиксировать с точностью, превышающей  $\lambda_B$ . Если заряды  $e_a$  и  $e_b$  по абсолютной величине равны элементарному заряду  $e$ , условие  $\lambda_B > b_*$  эквивалентно неравенству

$$v > ac,$$

где  $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$  — постоянная тонкой структуры, а  $c$  — скорость света. Для сравнения полезно указать, что скорость электрона в основном состоянии атома водорода равна  $ac$ . Соответственно,  $b_{\min} \approx \lambda_B$ , если энергия налетающего электрона больше, чем энергия ионизации атома водорода,  $J = \alpha^2 m_e c^2 / 2 = 13,6$  эВ.

В практических вычислениях кулоновский логарифм почти всегда оценивают по температуре плазмы, игнорируя тот факт, что вообще-то в аргумент логарифма входит относительная скорость сталкивающихся частиц. Для совсем грубых оценок берут  $\Lambda = 15$ .

Наконец укажем, что магнитное поле практически не влияет на кулоновское рассеяние, если ларморовский радиус больше дебаевской длины,  $\rho > \lambda_D$ , т. е.

$$\frac{B^2}{8\pi} < nmc^2.$$

Это типичная ситуация для лабораторных экспериментов с квазинейтральной плазмой. Однако в заряженной плазме имеет место как раз обратное неравенство (задача 1.9). При  $\rho < \lambda_D$  необходимо принять во внимание ларморовское искривление траектории налетающей частицы вблизи рассеивающего центра, но учёт этого эффекта сказывается только на величине кулоновского логарифма (задача 5). Величина кулоновского логарифма также меняется в высокочастотном поле, если частота волны  $\omega$ , распространяющейся в плазме, существенно превышает ленгмюровскую частоту  $\omega_p$  (задача 6).

## Литература

Кулоновские столкновения частиц в плазме и связанные с ними эффекты на уровне простых оценок описаны в учебнике Л. А. Арцимовича и Р. З. Сагдеева «Физика плазмы для физиков» [7, §1.4] и в монографии Ю. П. Райзера «Физика газового разряда» [9, гл.2].

В монографии М. Либермана (Michael Lieberman) и А. Лихтенberга (Allan Lichtenberg) [91, глава 3] помимо кулоновского рассеяния рассматривается также поляризационное взаимодействие заряженных частиц с нейтральными атомами.

Теория кулоновских столкновений в сильном магнитном поле изложена в §60 «Физической кинетики» Е. М. Лифшица и Л. П. Питаевского [55].

## Задачи и вопросы

**Задача 1.** Электрон, имеющий на бесконечности скорость  $v$ , налетает на другой электрон, первоначально неподвижный. Какую энергию приобретёт второй электрон после столкновения? Прицельный параметр равен  $b$ . Ответ  $\Rightarrow 295$

**Задача 2.** Оцените кулоновский логарифм в лабораторной плазме с типичными параметрами. Проверьте, что уточнение аргумента логарифма лишь незначительно меняет величину логарифма. Решение  $\Rightarrow 295$

**Задача 3.** Вычислите вклад в транспортное сечение близких столкновений с рассеянием на угол  $\theta > \pi/2$ . Решение  $\Rightarrow 295$

**Задача 4.** Найдите транспортное сечение рассеяния ультрарелятивистского электрона на неподвижном кулоновском центре. [Ответ](#) ⇒ 295

**Задача 5.** Как магнитное поле влияет на кулоновское рассеяние? Определите кулоновский логарифм в сильном магнитном поле.

[Решение](#) ⇒ 295

**Задача 6.** Как кулоновские столкновения влияют на поглощение высокочастотных волн в плазме?

[Решение](#) ⇒ 296

**Задача 7.** Оцените длину свободного пробега электронов с энергией 1 МэВ в плазме с плотностью  $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Можно ли нагреть плазму релятивистским пучком в лабораторной установке за счёт кулоновских столкновений?

**Задача 8.** Полупространство  $x > 0$  занято однородной плазмой, которая удерживается магнитным полем. В плазму по нормали к её границе влетает быстрый нейтральный атом и сразу же ионизуется. Найдите координату  $x$  иона после его полного торможения, если вначале ларморовский радиус иона был равен  $\rho_0$ .

[Решение](#) ⇒ 296

**Задача 9.** Найдите потенциал взаимодействия медленного иона с нейтральным атомом (поляризационное взаимодействие).

[Решение](#) ⇒ 298

**Задача 10.** Используя результат предыдущей задачи, найдите сечение захвата при поляризационном рассеянии. [Решение](#) ⇒ 299

**Задача 11.** Оцените транспортное сечение поляризационного рассеяния.

[Ответ](#) ⇒ 299

**Задача 12.** В борновском приближении вычислите сечение рассеяния для кулоновского взаимодействия с дебаевским экранированием.

[Решение](#) ⇒ 300

## Лекция 8

# Пárные столкновения

**Кулоновские столкновения в плазме. Торможение пробной частицы. Убегание электронов. Остыивание пробной частицы. Иерархия времён столкновений**

### §8.1. Кулоновские столкновения в плазме

Избавимся от предположения, что рассеивающий центр неподвижен, и рассмотрим движение пары заряженных частиц в общем кулоновском поле. Не делая заранее каких-либо предположений о составе взаимодействующих частиц, будем помечать величины, относящиеся к первой и второй частицам, соответственно индексами  $a$  и  $b$ . Сложив уравнение движения первой частицы

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = e_a e_b \frac{\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} \quad (1a)$$

с таким же уравнением для второй частицы

$$m_b \ddot{\mathbf{r}}_b = e_a e_b \frac{\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3}, \quad (1b)$$

получаем нуль в правой части:

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a + m_b \ddot{\mathbf{r}}_b = 0.$$

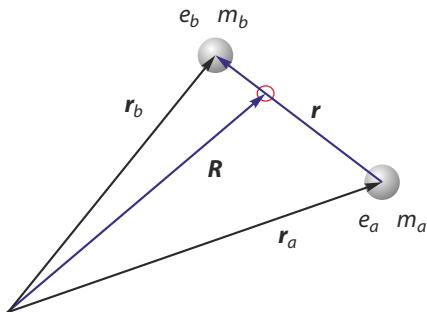
Следовательно, центр масс двух частиц с радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{m_a \mathbf{r}_a + m_b \mathbf{r}_b}{m_a + m_b}$$

движется с постоянной скоростью

$$\mathbf{V} = \frac{m_a \dot{\mathbf{r}}_a + m_b \dot{\mathbf{r}}_b}{m_a + m_b},$$

**Рис. 1.** Радиус-вектор  $\mathbf{R}$  системы центра масс и радиус-вектор воображаемой приведённой частицы  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a$  для двух заряженных частиц. Так как  $m_b \ddot{\mathbf{r}}_b = -m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = m_{ab} \ddot{\mathbf{r}}$ , где  $m_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$ , движение реальных частиц  $a$  и  $b$  можно найти, решив задачу о рассеянии приведённой частицы на кулоновском центре, который расположен в точке центра масс.



поскольку  $\dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{R}} = 0$ . Условимся, что  $\dot{\mathbf{r}}_a$  и  $\dot{\mathbf{r}}_b$  здесь и далее обозначают мгновенные скорости частиц  $a$  и  $b$ , а  $\mathbf{v}_a$  и  $\mathbf{v}_b$  — их величины перед столкновением, поэтому можно также записать, что

$$\mathbf{V} = \frac{m_a \mathbf{v}_a + m_b \mathbf{v}_b}{m_a + m_b}.$$

Если ввести ещё одно обозначение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a$$

для радиус-вектора частицы  $b$  относительно частицы  $a$  (рис. 1), радиус-вектор каждой частицы можно записать в виде

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R} - \frac{m_b}{m_a + m_b} \mathbf{r}, \quad (2a)$$

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{R} + \frac{m_a}{m_a + m_b} \mathbf{r}. \quad (2b)$$

Так как  $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ , после подстановки выражений (2) оба уравнения (1) приводятся к одинаковому виду

$$m_{ab} \ddot{\mathbf{r}} = e_a e_b \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (3)$$

где

$$m_{ab} = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} = m_{ba}$$

обозначает приведённую массу. Воображаемую частицу с приведённой массой назовём приведённой частицей. Её положение задано вектором

$\mathbf{r}$  в системе отсчёта центра масс, а скорость в любой момент времени равна скорости движения частицы  $b$  относительно частицы  $a$ :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_b - \dot{\mathbf{r}}_a.$$

Для начальной скорости приведённой частицы введём обозначение

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a.$$

Так как

$$m_b \ddot{\mathbf{r}}_b = -m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = m_{ab} \ddot{\mathbf{r}},$$

сила  $e_a e_b \mathbf{r}/r^3$ , действующая на приведённую частицу, с точностью до знака равна силе, действующей на реальные частицы с массами  $m_a$  и  $m_b$ . Всё это означает, что движение реальных частиц  $a$  и  $b$  можно найти, решив задачу о рассеянии приведённой частицы на кулоновском центре, который расположен в точке центра масс.

Отсюда ясно, что если в формуле (7.10) для дифференциального сечения рассеяния на неподвижном кулоновском центре массу  $m$  и скорость  $v$  налетающей частицы заменить соответственно на массу приведённой частицы  $m_{ab}$  и относительную скорость сталкивающихся частиц  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a$ , то будет найдено дифференциальное сечение рассеяния в системе центра масс:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e_a^2 e_b^2}{4m_{ab}^2 u^4} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (4)$$

В дальнейшем нам не придётся пересчитывать сечение рассеяния в лабораторную систему координат, поскольку вычисления удобнее делать именно в системе центра масс.

## §8.2. Торможение пробной частицы

В §7.3 была вычислена сила (7.11), действующая на бесконечно тяжёлый рассеивающий центр со стороны потока частиц с массой  $m$ , плотностью  $n_b$ , налетающих со скоростью  $v$ . Она равна

$$\mathbf{F} = m v n_b v \sigma_t,$$

где  $\sigma_t = 4\pi \Lambda e_a^2 e_b^2 / m^2 v^4$ . Переходя к рассеянию реальных частиц, скорость налетающей частицы  $v$  теперь нужно считать разность  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a$

скоростей сталкивающихся частиц на бесконечно большом удалении друг от друга, а в качестве  $m$  взять массу приведённой частицы  $m_{ab}$ . Полезно заметить, что абсолютная величина относительной скорости  $u = |\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a|$  до и после рассеяния одинакова, так как рассеяние приведённой частицы является абсолютно упругим. Таким образом, транспортное сечение теперь равно

$$\sigma_{ab} = \frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2 e_b^2}{m_{ab}^2 |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|^4} = \sigma_{ba}, \quad (5)$$

где  $\Lambda_{ab} = \Lambda_{ba}$  обозначает кулоновский логарифм, вычисленный по параметрам приведённой частицы. После всех замен находим силу

$$\mathbf{F}_{ab} = -\frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2 e_b^2 n_b}{m_{ab}|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|^2} \frac{\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b}{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|}, \quad (6)$$

действующую на частицу  $a$  в потоке частиц сорта  $b$ . Для вычисления силы  $\mathbf{F}_{ba}$ , действующей на частицу  $b$  в потоке частиц сорта  $a$ , в формуле (6) нужно переставить местами индексы  $a$  и  $b$ :

$$\mathbf{F}_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2 e_a^2 n_a}{m_{ba}|\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a|^2} \frac{\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a}{|\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a|}. \quad (7)$$

Интересно, что силы  $\mathbf{F}_{ab}$  и  $\mathbf{F}_{ba}$ , вообще говоря, не удовлетворяют третьему закону Ньютона:

$$\mathbf{F}_{ab} \neq -\mathbf{F}_{ba}.$$

Но удивляться тут нечему, так как эти силы хотя и действуют каждая на одну частицу, но создаются каждой множеством частиц. А вот суммарная сила, действующая на единицу объёма, равна нулю:

$$n_a \mathbf{F}_{ab} + n_b \mathbf{F}_{ba} = 0.$$

Учтём теперь, что в реальной плазме скорости отдельных частиц различны вследствие теплового разброса. Выделим какую-то одну — *пробную* — частицу с зарядом  $e_b$  и скоростью  $\mathbf{v}_b = \mathbf{v}$ . Можно думать, что эта пробная частица не принадлежит собственно плазме, а влетает в неё в составе пучка частиц столь малой плотности, что пучок не влияет на распределение частиц плазмы по скоростям. В таком контексте частицы плазмы называют *полевыми*, подразумевая, что их распределение по скоростям задано и неизменно.

Выберем группу полевых частиц, скорость которых находится в интервале  $d^3v'$  вблизи  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_a$ . Число таких частиц равно

$$dn_a = f_a(\mathbf{v}') d^3v',$$

где  $f_a(\mathbf{v}')$  обозначает функцию распределения, нормированную так, что

$$n_a = \int f_a(\mathbf{v}') d^3v'.$$

Выбранная группа частиц действует на пробную частицу с силой  $d\mathbf{F}_{ba}$ , которая получается из выражения (7) путём замены  $n_a$  на  $dn_a$ . Чтобы найти полную силу, действующую на пробную частицу, нужно проинтегрировать  $d\mathbf{F}_{ba}$  по скорости полевых частиц:

$$\mathbf{F}_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}} \int \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f_a(\mathbf{v}') d^3v'. \quad (8)$$

Сумма сил по всем сортам полевых частиц даёт скорость изменения направленного импульса  $\mathbf{p}_b = m_b \mathbf{v}$  пробной частицы:

$$\frac{d\mathbf{p}_b}{dt} = \sum_a \mathbf{F}_{ba}. \quad (9)$$

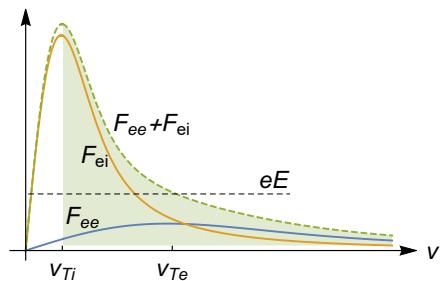
Если  $f_a(\mathbf{v}')$  — изотропная функция, т. е.  $f_a(\mathbf{v}') = f_a(v')$ , для вычисления интеграла (8) можно воспользоваться аналогией с известной задачей электростатики. Действительно, присмотревшись, в этом интеграле можно распознать электрическое поле сферически симметричного распределения зарядов с объёмной плотностью  $f_a(v')$  в точке с радиус-вектором  $\mathbf{v}$ . На расстоянии  $v$  от центра распределения это поле равно заряду внутри сферы радиуса  $v$ , умноженному на  $v/v^3$ . Следовательно,

$$\mathbf{F}_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}} \frac{\mathbf{v}}{v^3} \int_0^v f_a(v') 4\pi v'^2 dv'. \quad (10)$$

«Заряд», внешний по отношению к сфере радиуса  $v$ , поле не создаёт. Формулу (10) можно переписать в виде

$$\mathbf{F}_{ba} = -\nu_{ba}^{(p)} \mathbf{p}_b, \quad (11)$$

**Рис. 2.** Силы торможения  $F_{ee}$  и  $F_{ei}$  пробного электрона на полевых электронах и ионах в зависимости от скорости электрона  $v$ . Сумма сил  $F_{ee} + F_{ei}$  при увеличении  $v$  убывает на заштрихованной стороне графика. Равновесная скорость пробного электрона во внешнем электрическом поле соответствует решению уравнения  $F_{ee} + F_{ei} = eE$ . Решение неустойчиво в заштрихованной области, где  $v > v_{Ti}$ .



где

$$\nu_{ba}^{(p)} = \frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}m_bv^3} \int_0^v f_a(v') 4\pi v'^2 dv' \quad (12)$$

имеет смысл частоты столкновений, которая характеризует потерю направленного импульса  $\mathbf{p}_b = m_b\mathbf{v}$  пробной частицы; это подчёркивает индекс  $(p)$  в обозначении частоты. Так как функция распределения  $f_a$  неотрицательна при любом значении  $v'$ , частота столкновений  $\nu_{ba}^{(p)}$  положительна, так что сила  $\mathbf{F}_{ba}$  направлена против импульса пробной частицы  $\mathbf{p}_b$ . В связи с этим её можно назвать силой торможения или силой трения.

### §8.3. Убегание электронов

Вычисление силы торможения (10) можно продолжить, выбрав, к примеру, максвелловскую функцию распределения полевых частиц (задача 2). График силы трения пробного электрона в плазме с максвелловскими электронами и ионами показан на рисунке 2, причём сплошная линия изображает силу трения  $F_{ee}$  со стороны электронов плазмы и силу трения  $F_{ei}$  со стороны ионов плазмы, а штриховая линия — их сумму. Каждая из сил  $F_{ee}$  и  $F_{ei}$  имеет максимум

$$\max(F_{ba}) = \frac{5,38\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2n_a}{m_{ba}v_{Ta}^2} \quad (13)$$

при скорости  $v = 0,97v_{Ta}$ , примерно равной тепловой скорости соответствующего сорта полевых частиц  $v_{Ta} = \sqrt{2T_a/m_a}$ . При малой скорости

пробной частицы сила торможения увеличивается пропорционально скорости  $v$ . При большой скорости сила торможения убывает пропорционально  $1/v^2$ .

При одинаковой температуре ионов и электронов максимум силы  $F_{ei}$  приблизительно в  $Zm_i/2m_e$  раз выше максимума силы  $F_{ee}$ , поэтому на рисунке 2 график  $F_{ei}$  показан в уменьшенном масштабе (который соответствует  $m_i/m_e = 16$ ). К тому же максимум  $F_{ei}$  смещён в сторону скоростей, малых по сравнению с  $v_{Te}$ , поэтому сумма сил  $F_{ee} + F_{ei}$  оказывается убывающей функцией скорости пробной частицы при  $v > v_{Ti}$ . Это делает невозможным устойчивое движение пробной частицы при больших скоростях под действием ускоряющего электрического поля.

Если в плазме имеется внешнее электрическое поле  $E$ , равновесная скорость пробной частицы определяется балансом силы ускорения и суммарной силы торможения. Решению уравнения

$$F_{ee} + F_{ei} = eE \quad (14)$$

на рисунке 2 соответствуют точки пересечения штриховой кривой  $F_{ee} + F_{ei}$  со штриховой линией  $eE$ . Как видно из рисунка, при не слишком большой величине электрического поля имеются два решения. Однако на заштрихованной стороне рисунка, где сумма сил торможения убывает, решение неустойчиво. Действительно, при спонтанном увеличении скорости ускоряющая сила  $eE$  превысит силу трения  $F_{ee} + F_{ei}$ , скорость ещё более возрастёт, сила трения ещё уменьшится, ускорение ещё более возрастёт и так далее.

Этот факт имеет своим следствием эффект убегающих электронов (runaway electrons). Так называют электроны с достаточно большой начальной скоростью, которые переходят в режим неограниченного ускорения, если в плазме создать достаточно сильное электрическое поле. Чем больше начальная скорость электрона, тем меньше электрическое поле, при котором электрон «убегает». Вторым следствием является существование предельного электрического поля, которое может быть создано в плазме без того, чтобы основная доля электронов плазмы дружно перешла в режим неограниченного ускорения, который называют «просвистом».

Оценим скорость, при превышении которой электроны переходят в режим неограниченного ускорения при заданной величине электрического поля  $E$ . Для этого рассмотрим движение пробного электрона с начальной скоростью  $v \gg v_{Ti}$ , считая для простоты, что  $Z \gg 1$ . В этом случае сила  $F_{ei}$  превышает  $F_{ee}$  во всем интервале скоростей, так что тормо-

жением пробного электрона на электронах плазмы можно пренебречь. При  $v \gg v_{Ti}$  выражение для  $F_{ei}$  упрощается, так как интеграл в формуле (10) приблизительно будет равен  $n_i$  для ионов. Принимая также, что  $e_i = Ze$ ,  $e_e = -e$ ,  $n_i = n_e/Z$ ,  $m_{ei} = m_e m_i / (m_e + m_i) \approx m_e$ , находим силу трения, действующую на пробный электрон, и частоту столкновений:

$$F_{ei} \approx -\frac{4\pi\Lambda_{ei}Ze^4n_e}{m_e v^2},$$

$$\nu_{ei} \approx \frac{4\pi\Lambda_{ei}Ze^4n_e}{m_e^2 v^3}.$$

Двигаясь со скоростью  $v$  в электрическом поле  $E$ , за время свободного пробега  $1/\nu_{ei}(v)$  пробный электрон приобретёт упорядоченную скорость

$$u \approx \frac{eE}{m_e \nu_{ei}(v)} \approx \frac{m_e v^3 E}{4\pi\Lambda_{ei}Ze^3 n_e}.$$

Эта скорость сравняется с  $v$  при  $v \approx v_{Dr}$ , где

$$v_{Dr} = \left( \frac{4\pi\Lambda_{ei}Ze^3 n_e}{m_e E} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Если же  $v > v_{Dr}$ , время пробега определяется скоростью  $u$ . Импульс, приобретаемый электроном за время пробега, будет в этом случае приблизительно равен

$$p_e \sim \frac{eE}{\nu_{ei}(u)} \sim \frac{m_e^2 u^3 E}{4\pi\Lambda_{ei}Ze^3 n_e} \sim m_e u \left( \frac{u}{v_{Dr}} \right)^2.$$

Импульс же, отдаваемый электроном при столкновении в конце пробега, составит приблизительно  $m_e u$  и будет меньше. Отсюда снова следует, что электроны со скоростями  $v > v_{Dr}$  будут неограниченно ускоряться. При условии  $v_{Dr} \gg v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$  явление убегания электронов будет наблюдаться в «хвосте» максвелловского распределения; электрическое поле должно для этого удовлетворять условию

$$E \ll \frac{2\pi\Lambda_{ei}Ze^3 n_e}{T}. \quad (16)$$

Предельное электрическое поле в правой стороне этого неравенства называют *полем Драйсера* (Harry Dreicer, 1959 [92, 93]). Поле Драйсера можно записать в виде

$$E_{Dr} = \frac{eZ}{2\lambda_D^2} \Lambda_{ei}, \quad (17)$$

где  $\lambda_D = \sqrt{T_e/4\pi e^2 n_e}$  — дебаевская длина электронов. Если  $E \sim E_{Dr}$ , в режим неограниченного ускорения переходит примерно половина электронов плазмы. На рисунке 2 линия  $eE$  проведена на уровне, который примерно соответствует полю Драйсера.

Вычислив эту силу, нетрудно найти электрическую проводимость плазмы (задача 7).

### §8.4. Остыивание пробной частицы

Всё было бы просто, будь пробная частица настоящей частицей. На самом деле она представляет собой статистический ансамбль, проще говоря, пучок частиц, которые влетают в плазму. В процессе рассеяния частицы пучка приобретают разные скорости, поэтому энергия пробной частицы  $\varepsilon_b$  не равна  $p_b^2/2m_b$ . Пробная частица сохранит какую-то долю своей начальной энергии, даже если полностью потеряет направленный импульс  $\mathbf{p}_b$ .

Торможение пробной частицы означает уменьшение среднего импульса

$$\mathbf{p}_b = \langle \mathbf{p} \rangle$$

в направлении первоначального движения частиц пучка. Остыивание пробной частицы означает уменьшение средней энергии

$$\varepsilon_b = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m_b}.$$

Вследствие кулоновского рассеяния частицы пучка отклоняются в случайном направлении от прямолинейной траектории, приобретая импульс  $\delta \mathbf{p}_\perp$ , перпендикулярный этому направлению, а также некоторый разброс импульсов  $\delta \mathbf{p}_\parallel$  в направлении движения. Обозначая через  $\delta \mathbf{p} = \delta \mathbf{p}_\perp + \delta \mathbf{p}_\parallel$  отклонение импульса отдельной частицы от среднего импульса  $\mathbf{p}_b$ , нужно признать, что

$$\langle \delta \mathbf{p} \rangle = 0.$$

Однако  $\langle (\delta \mathbf{p})^2 \rangle > 0$ , поэтому энергия пробной частицы оказывается больше энергии её направленного движения  $p_b^2/2m_b$ . Действительно,

$$\varepsilon_b = \frac{\langle (\mathbf{p}_b + \delta \mathbf{p})^2 \rangle}{2m_b} = \frac{p_b^2 + 2(\mathbf{p}_b \cdot \langle \delta \mathbf{p} \rangle) + \langle \delta \mathbf{p}^2 \rangle}{2m_b} = \frac{p_b^2}{2m_b} + \frac{\langle \delta \mathbf{p}^2 \rangle}{2m_b} > \frac{p_b^2}{2m_b}.$$

Чтобы подсчитать темп потерь энергии, вспомним, что энергия налетающей частицы сохраняется при рассеянии на неподвижном кулоновском центре. Это означает, что абсолютная величина скорости приведённой частицы  $|\dot{\mathbf{r}}|$  до и после акта рассеяния одинакова. Поскольку в системе центра масс мгновенная скорость частицы  $\mathbf{b}$  связана со скоростью приведённой частицы соотношением

$$\dot{\mathbf{r}}_b = \frac{m_a \dot{\mathbf{r}}}{m_a + m_b},$$

то абсолютная величина скорости частицы  $\mathbf{b}$  (как и частицы  $a$ ) до и после столкновения также одинакова. Следовательно, в этой системе отсчёта обмен энергией между сталкивающимися частицами не происходит.

Система центра инерции движется со скоростью

$$\mathbf{V} = \frac{m_a \mathbf{v}_a + m_b \mathbf{v}_b}{m_a + m_b} = \mathbf{v}_b - \frac{m_{ab}}{m_b} \mathbf{u}$$

относительно лабораторной. Возвращаясь в лабораторную систему, следует заключить, что сила  $\mathbf{F}_{ba}$  в единицу времени совершают работу

$$A_{ba} = \mathbf{F}_{ba} \cdot \mathbf{V} = -\frac{4\pi \Lambda_{ba} e_b^2 e_a^2 n_a}{m_{ba}} \frac{\mathbf{u}}{u^3} \cdot \left( \mathbf{v}_b - \frac{m_{ba}}{m_b} \mathbf{u} \right).$$

Заменяя плотность полевых частиц  $n_a$  интегралом по их функции распределения, как это было сделано в §8.2, и переобозначая  $\mathbf{v}_b$  на  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_a$  на  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{u}$  на  $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ , получаем

$$A_{ba} = -\frac{4\pi \Lambda_{ba} e_b^2 e_a^2}{m_{ba}} \left[ \mathbf{v} \cdot \int \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f_a(\mathbf{v}') d^3 v' - \frac{m_{ba}}{m_b} \int \frac{f_a(\mathbf{v}') d^3 v'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \right]. \quad (18)$$

Вычисленная работа идёт на увеличение энергии пробной частицы  $\varepsilon_b = \frac{1}{2} m_b \mathbf{v}^2$ . Иными словами,

$$\frac{d\varepsilon_b}{dt} = \sum_a A_{ba}. \quad (19)$$

По аналогии с частотой трения  $\nu_{ba}^{(p)}$  можно определить частоту

$$\nu_{ba}^{(\varepsilon)} = -A_{ba}/\varepsilon_b, \quad (20)$$

которая характеризует темп потери энергии пробной частицы, формально выделив в  $A_{ba} = -\nu_{ba}^{(\varepsilon)} \epsilon_b$  энергию пробной частицы. Как показывает прямое вычисление величины  $A_{ba}$  для максвелловской функции распределения полевых частицы в задаче 3, в отличие от  $\nu_{ba}^{(p)}$  частота  $\nu_{ba}^{(\varepsilon)}$  может быть отрицательной. Последнее означает, что пробная частица, замедляясь, может приобретать энергию от плазмы!

Такое было бы невозможно, будь пробная частица обычной частицей, движение которой подчиняется законам обычной динамики. Действительно, если  $\varepsilon = p^2/2m$ , а импульс  $p$  уменьшается, то должна уменьшаться и энергия  $\varepsilon$ . Однако, как сказано выше, «пробная частица» представляет собой ансамбль частиц. Когда говорят об импульсе или энергии пробной частицы, то подразумевают средний импульс или среднюю энергию частиц пучка. Точно так же сила, действующая на пробную частицу, есть средняя сила, действующая на частицы ансамбля.

Доказав, что  $\varepsilon_b > p_b^2/2m_b$ , для вычисления  $\nu_{ba}^{(\varepsilon)}$  мы всё-таки подставим  $\varepsilon_b = p_b^2/2m_b$  в формулу (20). Равенство  $\varepsilon_b = p_b^2/2m_b = m_b v^2/2$  за-ведомо верно в начальный момент, когда разброс по скоростям в пучке пробных частиц ещё невелик. Тогда

$$\nu_{ba}^{(\varepsilon)} = \frac{8\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}m_bv^2} \left[ \mathbf{v} \cdot \int \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f_a(\mathbf{v}') d^3v' - \frac{m_{ba}}{m_b} \int \frac{f_a(\mathbf{v}') d^3v'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \right]. \quad (21)$$

В пределе бесконечно тяжёлых неподвижных рассеивающих центров, когда формально  $m_a \rightarrow \infty$ , а функция распределения выражается через  $\delta$ -функцию Дирака, величина  $A_{ba}$  обращается в нуль, как можно убедиться при помощи подстановки  $f_a(\mathbf{v}') = n_a \delta(\mathbf{v}')$  в формулу (21). При этом пробная частица тормозится (поскольку  $\nu_{ba}^{(p)} \neq 0$ ), не теряя энергию. В реальной плазме, конечно же, нет частиц с бесконечно большой массой, однако обмен энергией между частицами с существенно различными массами подавлен. И этот факт даёт ключ к пониманию сценария эволюции произвольного (возможно, приготовленного искусственно) состояния плазмы к состоянию термодинамического равновесия.

## §8.5. Иерархия времён столкновений

Принципиальное отличие электрон-электронных столкновений от рассеяния электронов на ионах состоит в том, что в столкновениях с электронами плазмы электроны пучка теряют энергию так же быстро,

как они теряют импульс в направлении первоначального движения, тогда как в столкновениях с ионами они преимущественно рассеиваются, почти не теряя энергию.

Вообще же анализ эволюции — говорят также: *релаксации* — начального состояния плазмы нужно начинать с выяснения того, какие столкновительные процессы идут быстрее, а какие — медленнее. Для этого нужно сравнить частоты столкновений  $\nu_{ba}^{(p)}$  и  $\nu_{ba}^{(\varepsilon)}$  для всех сочетаний сортов частиц, присутствующих в плазме.

Оценим эти частоты, не прибегая к точным формулам.

Во-первых, учтём, что большая часть и электронов, и ионов движется со скоростью порядка тепловой и что при равной температуре  $T$  тепловая скорость электронов  $v_{Te} = \sqrt{2T/m_e}$  значительно больше тепловой скорости ионов  $v_{Ti} = \sqrt{2T/m_i}$ , а именно:

$$v_{Ti} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} v_{Te}.$$

В столкновениях частиц одного сорта (электронов с электронами, ионов с ионами) относительная скорость, очевидно, будет порядка тепловой для этого сорта, а в столкновениях электронов с ионами — порядка тепловой скорости электронов, так как  $v_{Te} \gg v_{Ti}$ .

Во-вторых, примем во внимание, что вследствие квазинейтральности плазмы

$$n_i = \frac{1}{Z} n_e,$$

если ионы в среднем потеряли по  $Z$  электронов. В этом случае

$$e_i^2 = Z^2 e_e^2$$

и поэтому

$$\sigma_{ii} \sim Z^4 \sigma_{ee}, \quad \sigma_{ei} = \sigma_{ie} \sim Z^2 \sigma_{ee},$$

где

$$\sigma_{ee} \sim \frac{4\pi \Lambda_{ee} e_e^4}{T^2}$$

есть транспортное сечение для столкновений электронов с энергией порядка тепловой.

В-третьих, следует учесть, что при столкновении лёгкой частицы (электрона) с тяжёлой частицей (ионом) в среднем передаётся только малая доля энергии порядка  $m_e/m_i$ , а тяжёлая частица передаёт лёгкой

только малую долю своего импульса также порядка  $m_e/m_i$ , тогда как лёгкая частица способна передать тяжёлой весь свой импульс за одно столкновение. В столкновениях одинаковых частиц доля переданного за одно столкновение импульса или энергии порядка единицы. (Эти утверждения легко проверить на модели столкновений лёгких и тяжёлых шаров.)

Наконец, нужно припомнить, что частоту столкновений (без учёта переданной доли импульса или энергии) можно вычислить по формуле (7.4). Если переданная доля порядка единицы, то эта частота и есть характеристика данного процесса. Если же она мала, вычисленную частоту нужно умножить на эту долю, чтобы учесть, что время передачи всего импульса или всей энергии будет больше.

Суммируя сказанное, находим частоты, которые характеризуют процессы передачи импульса, т. е. торможения и выравнивания средних (потоковых) скоростей частиц разных сортов:

$$\nu_{ee}^{(p)} \sim n_e \sigma_{ee} v_{Te} \quad \equiv \nu_{ee}, \quad (22a)$$

$$\nu_{ii}^{(p)} \sim n_i \sigma_{ii} v_{Ti} \sim \frac{1}{Z} Z^4 \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \nu_{ee}, \quad (22b)$$

$$\nu_{ei}^{(p)} \sim n_i \sigma_{ei} v_{Te} \sim \frac{1}{Z} Z^2 \nu_{ee}, \quad (22b)$$

$$\nu_{ie}^{(p)} \sim \frac{m_e}{m_i} n_e \sigma_{ie} v_{Te} \sim \frac{m_e}{m_i} Z^2 \nu_{ee}. \quad (22\Gamma)$$

Процессы обмена энергией, такие как термализация (установление максвелловского распределения) и выравнивание температур электронов и ионов, характеризует другой набор частот столкновений:

$$\nu_{ee}^{(\varepsilon)} \sim n_e \sigma_{ee} v_{Te} \approx \nu_{ee}, \quad (23a)$$

$$\nu_{ii}^{(\varepsilon)} \sim n_i \sigma_{ii} v_{Ti} \sim \frac{1}{Z} Z^4 \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \nu_{ee}, \quad (23b)$$

$$\nu_{ei}^{(\varepsilon)} \sim \frac{m_e}{m_i} n_i \sigma_{ei} v_{Te} \sim \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{Z} Z^2 \nu_{ee}, \quad (23b)$$

$$\nu_{ie}^{(\varepsilon)} \sim \frac{m_e}{m_i} n_e \sigma_{ie} v_{Te} \sim \frac{m_e}{m_i} Z^2 \nu_{ee}. \quad (23\Gamma)$$

Важно подчеркнуть, что обмен энергией и обмен импульсом в столкновениях идентичных частиц происходит одинаково быстро, так как

$$\nu_{ee}^{(p)} \sim \nu_{ee}^{(\varepsilon)}, \quad \nu_{ii}^{(p)} \sim \nu_{ii}^{(\varepsilon)}.$$

Из формул (22) и (23) находим следующие пропорции между частотами столкновений:

$$\nu_{ee}^{(p)} : \nu_{ii}^{(p)} : \nu_{ei}^{(p)} : \nu_{ie}^{(p)} = 1 : \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} Z^3 : Z : \frac{m_e}{m_i} Z^2, \quad (24)$$

$$\nu_{ee}^{(\varepsilon)} : \nu_{ii}^{(\varepsilon)} : \nu_{ei}^{(\varepsilon)} : \nu_{ie}^{(\varepsilon)} = 1 : \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} Z^3 : \frac{m_e}{m_i} Z : \frac{m_e}{m_i} Z^2. \quad (25)$$

Отсюда следует, например, что при инжекции пучка быстрых электронов в плазму с многозарядными ионами самым быстрым процессом является упругое угловое рассеяние электронов пучка на ионах плазмы. Действительно, если  $Z \gg 1$ , то процессы торможения и остывания электронов пучка на электронах плазмы, которые характеризуются соответственно частотами  $\nu_{ee}^{(p)}$  и  $\nu_{ee}^{(\varepsilon)}$ , идут в  $Z$  раз медленнее, чем торможение на ионах с частотой  $\nu_{ei}^{(p)}$ . Поэтому в результате столкновений с ионами плазмы пучок быстрых электронов тормозится, но почти не теряет энергию. При этом средний направленный импульс электронов пучка  $\mathbf{p}_e$  уменьшается, а пучок приобретает угловой разброс. Примеры более аккуратных вычислений с помощью формул (12) и (21) содержат задачи 4 и 5.

Укажем также на факт, который может показаться парадоксальным, если вспомнить, что обмен энергией между частицами, значительно различающимися по массе, затруднён. Оказывается, что в термоядерном реакторе альфа-частицы (то есть ядра гелия), являющиеся продуктами термоядерной реакции, передают свою энергию преимущественно электронам плазмы (задача 6). Поэтому в термоядерном реакторе температура электронов может быть выше температуры ионов.

Наконец покажем, как можно вычислить средний квадрат угла отклонения электронов пучка от первоначального направления, пользуясь теми сведениями, которые изложены в лекции. Предположим, что  $Z \gg 1$ . Тогда столкновениями электронов пучка с электронами плазмы можно пренебречь, как следует из сравнения частот  $\nu_{ee}^{(p)}$  и  $\nu_{ei}^{(p)}$ . При этом рассеяние электронов на ионах будет почти упругим, без изменения их энергии, поскольку частоты  $\nu_{ee}^{(\varepsilon)}$  и  $\nu_{ei}^{(\varepsilon)}$  будут меньше, чем  $\nu_{ei}^{(p)}$ . В результате рассеяния средний импульс электронов пучка  $\mathbf{p}_e$  будет уменьшаться в соответствии с уравнением

$$\frac{d\mathbf{p}_e}{dt} = \mathbf{F}_{ei} = -\nu_{ei}^{(p)} \mathbf{p}_e. \quad (26)$$

Это уменьшение связано с тем, что в результате столкновений электроны начинают двигаться под углом к исходному направлению движения

пучка при сохранении абсолютной величины импульса. Так как при рассеянии на малый угол  $\theta$  продольный импульс отдельного электрона изменяется на величину  $\Delta p_e = p_e(\cos \theta - 1) \approx -p_e \theta^2/2$ , то уменьшению продольного импульса, описываемому уравнением (26), соответствует нарастание среднего квадрата угла:

$$\frac{d}{dt} \langle \theta^2 \rangle = 2\nu_{ei}^{(p)}, \quad (27)$$

где усреднение, обозначенное угловыми скобками, выполняется по всем электронам пучка. Выражение (27) справедливо до тех пор, пока среднеквадратичный угол рассеяния мал, т. е.  $\langle \theta^2 \rangle^{1/2} \ll 1$ . Отметим также, что использованное нами предположение  $Z \gg 1$  не принципиально. От него нетрудно отказаться, обобщив предъявленное решение на случай плазмы произвольного состава (задача 8).

## Литература

Наиболее последовательно теория кулоновских столкновений изложена в обзорах Б. А. Трубникова [94, §1–7] и Д. В. Сивухина [95, §1–13], и более кратко — в «Теории плазмы» Б. А. Трубникова [14, §31, 32].

## Задачи и вопросы

**Задача 1.** Верно ли для пробной частицы равенство  $d\varepsilon = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}$ , связывающее приращение импульса и энергии частицы?

**Задача 2.** Вычислите силу трения для пробной частицы в плазме с максвелловским распределением по скоростям. Решение  $\Rightarrow 301$

**Задача 3.** Вычислите скорость изменения энергии пробной частицы в плазме с максвелловским распределением по скоростям. Решение  $\Rightarrow 301$

**Задача 4.** На примере пучков быстрых электронов и ионов в плазме сравните частоты столкновений  $\nu_{ee}^{(p)}$ ,  $\nu_{ei}^{(p)}$ ,  $\nu_{ie}^{(p)}$  и  $\nu_{ii}^{(p)}$ . Решение  $\Rightarrow 301$

**Задача 5.** На примере пучков быстрых электронов и ионов в плазме сравните частоты столкновений  $\nu_{ee}^{(\varepsilon)}$ ,  $\nu_{ei}^{(\varepsilon)}$ ,  $\nu_{ie}^{(\varepsilon)}$  и  $\nu_{ii}^{(\varepsilon)}$ . Решение  $\Rightarrow 303$

**Задача 6.** В термоядерном реакторе, работающем на смесидейтерия и трития, образуются заряженные  $\alpha$ -частицы (ядра гелия-4) с энергией в 300 раз больше температуры смеси. В реакторе с магнитным удержанием  $\alpha$ -частицы остаются в плазме и отдают ей свою энергию. Какой процесс будет определять энергетический баланс реактора: торможение  $\alpha$ -частиц на ионах плазмы или торможение на электронах плазмы? Сравните время выравнивания температуры ионов и электронов со временем торможения  $\alpha$ -частиц.

[Решение](#)  $\Rightarrow$  303

**Задача 7.** Используя результат задачи 2, вычислите электрическую проводимость плазмы, предполагая, что ионы неподвижны, а распределение электронов описывается изотропной функцией Максвелла в системе отсчёта, которая движется относительно ионов со скоростью  $\mathbf{u} = \mathbf{J}/e_e n_e$ .

[Решение](#)  $\Rightarrow$  304

**Задача 8.** Найдите угловой разброс пучка частиц после прохождения тонкого слоя плазмы.

[Решение](#)  $\Rightarrow$  305

## Лекция 9

# Излучение плазмы

---

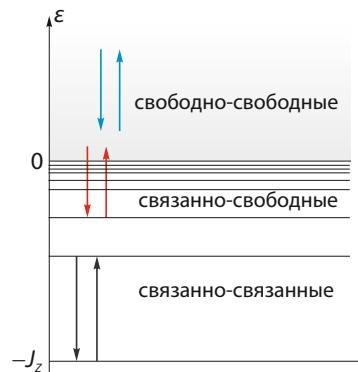
**Типы радиационных переходов. Непрерывный и линейчатый спектры. Тормозное излучение. Рекомбинационное излучение. Длина пробега излучения. Излучение спектральных линий. Циклотронное излучение**

Излучение является одним из основных каналов потерь энергии из плазмы, существенным образом воздействуя на её энергетический баланс. Свойство плазмы излучать электромагнитные волны в различных диапазонах частот используется как в бытовых осветительных приборах, так и при спектроскопических измерениях разнообразных объектов, от искры в научной лаборатории до далёкой галактики в расширяющейся Вселенной.

Спектр излучения слабоионизованной плазмы является *линейчатым*: в нём доминируют дискретные линии излучения молекул, атомов и не полностью ионизованных «остатков» тяжёлых атомов (ядра которых содержат больше одного протона). По мере увеличения температуры плазмы степень ионизации увеличивается, а интенсивность линейчатого излучения ослабевает. Полностью ионизованная плазма излучает в *непрерывном спектре*.

Мы рассмотрим два основных типа излучения с непрерывным спектром: тормозное и рекомбинационное, а затем — циклотронное излучение. В области низких частот циклотронное излучение характеризуется линейчатым спектром, который переходит в сплошной спектр в области высоких частот; в достаточно плотной плазме циклотронное излучение в плазме же и поглощается, не выходя наружу.

**Рис. 1.** Схема энергетических уровней и излучательных переходов электрона в поле положительного иона. Свободно-свободные переходы с понижением энергии электрона сопровождаются тормозным излучением, с повышением энергии — тормозным поглощением. Переход из свободного состояния в связанное вызывает рекомбинационное излучение. Переход из связанного состояния в свободное происходит при фотоионизации атома. Переходы между связанными состояниями дают линии излучения и поглощения в дискретном спектре.



### §9.1. Типы радиационных переходов

Фотоны — так называют кванты электромагнитного поля — рождаются и исчезают при радиационных (излучательных) переходах между различными энергетическими состояниями заряженных частиц вещества, поэтому процессы излучения и поглощения удобнее всего классифицировать, перебирая возможные варианты переходов.

Рассмотрим систему, состоящую из электрона и положительного иона — «атомарного остатка». На рисунке 1 изображена типичная схема энергетических уровней электрона. Энергия отсчитывается от границы непрерывного спектра, разделяющей свободные состояния (с положительной энергией) и связанные состояния (с отрицательной энергией). Дискретные уровни связанных состояний к границе сгущаются. Самый нижний уровень соответствует основному состоянию атома. Электроны с положительной энергией свободно перемещаются в пространстве, не будучи привязаны к конкретному атому. Энергия свободных электронов в макроскопических системах фактически не квантуется и поэтому может принимать любые положительные значения. Стрелками на рисунке показаны возможные типы переходов: свободно-свободные, связанно-свободные, связанно-связанные. Переходы сверху вниз сопровождаются излучением кванта энергии  $\hbar\omega$ , равной разности между энергиями верхнего и нижнего уровней; переходы снизу вверх происходят при поглощении кванта.

Свободно-свободные переходы представляют собой *тормозное излучение*.

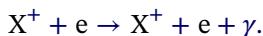
чение при кулоновских столкновениях электронов с ионами и обратные процессы *тормозного поглощения*. Связанно-свободные переходы — это процессы *фотоионизации* и *фоторекомбинации*, в которых происходит освобождение и связывание электронов. Свободно-свободные и связанно-свободные переходы дают *непрерывный спектр*, или *континуум*, поскольку либо начальное, либо конечное, либо оба этих состояния электрона лежат в непрерывном энергетическом спектре.

Связанно-связанные переходы электрона между дискретными уровнями в атоме приводят к излучению и поглощению в *спектральных линиях*. Совокупность спектральных линий образует *линейчатый спектр*. Разновидностью линейчатого спектра является *полосатый спектр* молекул. Насыщенность такого спектра линиями, которые внутри отдельной полосы располагаются очень тесно, обусловлена сложностью системы энергетических уровней молекулы: каждому электронному уровню соответствует множество колебательных и вращательных уровней молекул, поэтому возможно много вариантов переходов между ними.

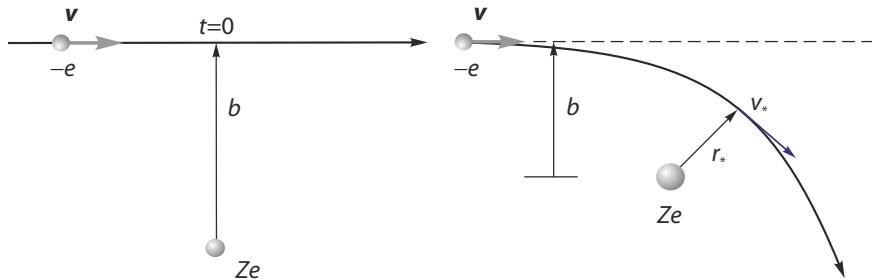
## §9.2. Тормозное излучение

*Тормозное излучение* возникает при неупругом рассеянии заряженных частиц. Напомним, что рассеянием называется столкновение, в результате которого число и состав взаимодействующих частиц не изменяются.

Оценим мощность излучения при столкновении электрона с тяжёлым ядром — ионом, имеющим заряд  $e_i = Ze$ . Этот процесс описывается *химическим уравнением*



В таких уравнениях  $e$  обозначает электрон как частицу (а не его электрический заряд),  $\gamma$  — фотон как частицу (а не релятивистский фактор),  $X^+$  (с плюсом в верхнем индексе) — положительно заряженный ион. Из-за огромной разницы в массе излучение иона ничтожно мало по сравнению с излучением электрона, а так как тепловая скорость электронов по той же причине значительно больше скорости ионов, последние можно считать неподвижными при рассмотрении столкновений с электронами. Что касается излучения при электрон-электронных столкновениях, то оно мало, так как дипольное излучение в таких столкновениях отсутствует (задача 1).



**Рис. 2.** При  $b \gg 2Ze^2/m_e v^2$  (далёкие пролёты) траектория электрона лишь незначительно отклоняется от прямой линии. Скорость электрона приблизительно постоянна как по величине, так и по направлению.

**Рис. 3.** При  $b \lesssim 2Ze^2/m_e v^2$  (близкие пролёты) траектория электрона сильно искривляется, однако результат вычисления мощности излучения от учёта искривления траектории изменяется незначительно.

Для простоты предположим, что искривлением траектории электрона можно пренебречь (рис. 2), так как он пролетает на большом удалении от иона, таком, что его начальная кинетическая энергия

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m_e v^2$$

велика по сравнению с энергией кулоновского взаимодействия  $Ze^2/r$  даже при максимальном сближении с ионом. Двигаясь почти по прямой линии, электрон приближается к иону на расстояние  $r$ , примерно равное прицельному параметру  $b$ . Следовательно, приближение далёких пролётов верно, если

$$b \gg Ze^2/m_e v^2. \quad (1)$$

В таком случае ускорение электрона равно

$$a = \frac{Ze^2/m_e}{b^2 + v^2 t^2}.$$

Смысл используемых обозначений разъяснён в §7.5. Энергия, излучаемая электроном в единицу времени, вычисляется по формуле Лармора (Joseph Larmor, 1897 [96])

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} \quad (2)$$

для интенсивности дипольного излучения. Соответственно, полная энергия излучения будет равна

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I dt = \frac{\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v b^3}. \quad (3)$$

Однородный поток электронов с плотностью  $n_e$ , налетающих на ион со скоростью  $v$ , в единицу времени излучает энергию

$$\int \mathcal{E} n_e v 2\pi b db.$$

Умножение этой величины на плотность ионов  $n_i$  даёт *удельную мощность*, т. е. энергию, которую излучает единица объёма плазмы в единицу времени:

$$P = \frac{2\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3} \int_{b_{\min}}^{\infty} \frac{db}{b^2}. \quad (4)$$

Интеграл в формуле (4) расходится на нижнем пределе, если выбрать  $b_{\min} = 0$ . Расходимость сигнализирует о том, что принятая модель расчёта имеет ограниченную применимость. В самом деле, энергия  $\mathcal{E}$ , вычисленная с помощью формулы (3), стремится к бесконечности при  $b \rightarrow 0$ , тогда как электрон заведомо не может излучить энергию, которая была бы больше его кинетической энергии  $m_e v^2 / 2$ .<sup>1</sup>

На первый взгляд может показаться, что причиной расходимости является приближение далёких пролётов, заменяющее реальную траекторию электрона прямой линией. Однако ещё более сильная расходимость возникает, если учесть искривление его траектории (задача 2). Истинную причину возникших трудностей вскрывает квантовая теория. Она доказывает, что *квазиклассическая* (т. е. почти классическая) картина движения электрона верна, если

$$m_e v b \gg \hbar,$$

т. е. момент импульса свободного электрона (относительно иона)  $m_e v b$  значительно больше кванта действия  $\hbar$ , поэтому проделанный расчёт имеет смысл, если

$$b \gg \lambda_e,$$

---

<sup>1</sup> Это утверждение относится к случаю, когда в конечном состоянии электрон остаётся свободным. Как указано в следующем параграфе, электрон может дополнительно излучить энергию, равную энергии ионизации, если он переходит в связанное состояние.

где  $\lambda_e = \hbar/m_e v$  обозначает длину волны электрона. Указанное условие эквивалентно ограничению

$$l \gg 1 \quad (5)$$

на орбитальное квантовое число

$$l = b/\lambda_e.$$

С другой стороны, условие применимости приближения далёких пролётов (1) равносильно неравенству

$$l \gg Ze^2/\hbar v, \quad (6)$$

причём выражение в правой части называется *параметром Зоммерфельда* (*Arnold Sommerfeld*). Поэтому область применимости *квазиклассического приближения* (5) целиком умещается в области далёких пролётов (6) при условии, что параметр Зоммерфельда мал, т. е.

$$Ze^2/\hbar v \ll 1. \quad (7)$$

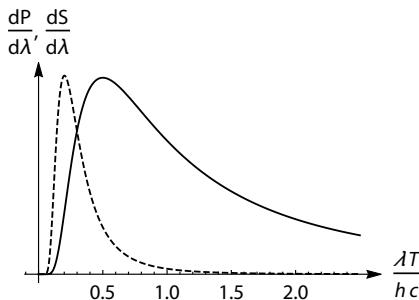
В таком случае правильный, по порядку величины, результат можно получить, «обрезав» интегрирование в формуле (4) на нижнем пределе значением прицельного параметра  $b_{\min} \sim \lambda_e$  порядка длины волны электрона:

$$P_{\text{т.и}} \sim \frac{2\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3 \lambda_e}. \quad (8)$$

Индекс «т.и» в обозначении мощности излучения  $P_{\text{т.и}}$  происходит от слов *тормозное излучение*; используется также немецкое слово *bremsstrahlung*, которое означает вообще любое излучение, сопряжённое с ускорением заряженной частицы. Само явление тормозного излучения было осознано как побочный результат бума, последовавшего за открытием Вильгельмом Рентгеном (*Wilhelm Röntgen*) рентгеновских лучей в 1895 году [97]. Открытие тормозного излучения также приписывают *Николе Тесле*, который в период между 1888 и 1897 годами экспериментировал с устройствами, похожими на рентгеновскую трубку.

В квантовой теории рассеяния условие (7) характеризует *борновское приближение*. Ему можно придать более ясный смысл, если выразить параметр Зоммерфельда через отношение энергии ионизации  $J_Z$  к энергии электрона  $\epsilon = \frac{1}{2} m_e v^2$ . Вспоминая, что

$$J_Z = J Z^2 = \frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 Z^2,$$



**Рис. 4.** Спектральная мощность  $dP/d\lambda$  тормозного излучения оптически тонкой плазмы (сплошная линия, задача 4) и спектр излучения  $dS/d\lambda$  абсолютно чёрного тела (штриховая линия, задача 10) в шкале длин волн. Графики нормированы на максимальное значение спектральной мощности.

где  $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$  обозначает постоянную тонкой структуры, легко проверить равенство

$$Ze^2/\hbar v = \sqrt{J_Z/\varepsilon}.$$

Следовательно, условие  $Ze^2/\hbar v \ll 1$  эквивалентно требованию, чтобы энергия налетающего электрона была больше энергии ионизации  $J_Z$  многозарядного иона:

$$\varepsilon \gg J_Z. \quad (9)$$

Частоту излучения можно оценить с помощью следующих рассуждений. Пролетая на расстоянии  $b$  от иона, электрон излучает импульс с длительностью  $\tau \sim b/v$ . Характерная круговая частота излучения  $\omega$  связана с  $1/\tau$  соотношением неопределённости  $\omega\tau \sim 1$ , следовательно,

$$\omega \sim v/b.$$

Подставляя  $b = l\lambda_e = l\hbar/m_e v$ , приходим к выводу, что энергия фотона  $\hbar\omega$ , испущенного электроном с орбитальным числом  $l$ , приблизительно в  $l$  раз меньше кинетической энергии электрона:

$$\hbar\omega \sim \varepsilon/l. \quad (10)$$

Поскольку  $\varepsilon$  — это максимальная энергия, которую может унести излучённый фотон (при условии, что электрон остаётся свободным), ещё раз заключаем, что интегрирование в формуле (4) по прицельным параметрам  $b < \lambda_e$  было бы лишено смысла. Точная теория предсказывает, что в плазме с максвелловским распределением электронов по скоростям максимум спектра излучения соответствует фотонам с энергией  $2T_e$  (задача 4 и рисунок 4).

Число фотонов, испущенных электроном при пролёте на расстоянии  $b$  от иона, найдём, поделив излучённую им энергию  $\mathcal{E}$  на энергию

фотона  $\hbar\omega$ . Для этого сначала перепишем формулу (3), выделив в явном виде орбитальное квантовое число  $l = m_e v b / \hbar$  и постоянную тонкой структуры  $\alpha = e^2 / \hbar c \approx 1/137$ :

$$\mathcal{E} = \frac{2\pi}{3} \frac{\alpha^3 Z^2}{l^3} \varepsilon. \quad (11)$$

Результат деления

$$w_l = \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega} \sim \frac{2\pi}{3} \frac{\alpha^3 Z^2}{l^2} \quad (12)$$

лучше назвать *вероятностью излучения*, так как  $w_l \ll 1$ . Например, в водородной плазме с  $Z = 1$  фотон с энергией  $\hbar\omega \sim \varepsilon$  излучается не чаще, чем в одном-двух столкновениях из миллиона. Даже в плазме, состоящей из самых тяжёлых ядер, имеющихся в природе, вероятность излучения не превышает одного процента.<sup>2</sup> Малость вероятности  $w_l$  означает, что квантовая (истинная) картина тормозного излучения существенно отличается от интуитивно ожидаемой: при столкновении с ионом электрон лишь в редких случаях испускает «жёсткий» фотон с «предписанной» энергией  $\hbar\omega \sim \varepsilon/l$ , а не сонм фотонов.

Тем не менее ожидания вовсе не безосновательны, так как полное число фотонов, испущенных потоком электронов в единицу времени на неэкранированном ядре, бесконечно.

В самом деле, действуя по общему рецепту, указанному в §7.2, определим дифференциальное сечение тормозного излучения как произведение вероятности испускания фотона  $w_l$  при заданном значении прицельного параметра  $b = \lambda_e l$  на площадь кольца  $2\pi b db = 2\pi \lambda_e^2 l dl$ , соответствующего этому значению:

$$d\sigma = 2\pi w_l b db. \quad (13)$$

Подставляя сюда  $w_l$  из формулы (12), получаем выражение

$$d\sigma \sim \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{dl}{l}, \quad (14)$$

в котором параметр  $l$  можно рассматривать как непрерывную величину и заменить впоследствии суммирование по целочисленным значениям  $l$  на интегрирование. Число фотонов, испущенных потоком электронов  $n_e v$  на  $n_i$  ядрах в единицу времени,

$$N = n_i \int n_e v d\sigma = n_i n_e v \int d\sigma \propto \int \frac{dl}{l}, \quad (15)$$

---

<sup>2</sup> Максимальный заряд ядра  $Z = 118$  среди известных в настоящее время химических элементов имеет Оганесён  $^{118}\text{Og}$ .

логарифмически расходится как при  $l \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow 0$ ), так и при  $l \rightarrow \infty$  ( $b \rightarrow \infty$ ). Как мы уже знаем, расходимость на нижнем пределе  $l \rightarrow 0$  устраняется путём обрезания интеграла на минимальном значении орбитального момента  $l = 1$ , которое соответствует прицельному  $b = \lambda_e$ . Что же касается расходимости на верхнем пределе  $l \rightarrow \infty$ , то в плазме она устраняется обрезанием на максимальном значении  $l \sim \lambda_D/\lambda_e$ , пропорциональном длине Дебая  $\lambda_D$ . Однако при торможении потока электронов на неэкранированном ядре эта расходимость принципиально неустранимая и в квантовой электродинамике известна как инфракрасная катастрофа [61, §98]. В связи с этим, полное сечение тормозного излучения, если его определить как интеграл  $\int d\sigma$ , не нашло применения.

Напомним, что полное сечение кулоновского рассеяния также не имеет ясного смысла и вместо него в физике плазмы используют транспортное сечение (см. §7.3). Поступим аналогичным образом и введём сечение тормозного излучения, выразив через него удельную мощность тормозного излучения  $P$ . Она имеет смысл мощности излучения из единицы объёма плазмы, которую можно измерить в реальном эксперименте. Поскольку каждый фотон уносит энергию  $\hbar\omega$ , чтобы вычислить  $P$ , достаточно добавить множитель  $\hbar\omega$  в подынтегральное выражение (15):

$$P = n_i \int \hbar\omega n_e v d\sigma \sim n_i \epsilon n_e v \int \frac{d\sigma}{l}. \quad (16)$$

Полученный интеграл,

$$\sigma_{\text{т.и}} = \int \frac{d\sigma}{l} \sim \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \int_1^\infty \frac{dl}{l^2}, \quad (17)$$

сходится на верхнем пределе, а на нижнем его вновь следует «обрезать» на значении  $l = 1$ . Раскрывая все множители в подынтегральном выражении, получаем

$$\sigma_{\text{т.и}} \sim \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 = \frac{4\pi^2}{3} \frac{J_Z}{\epsilon} \alpha^3 a_B^2, \quad (18)$$

где  $a_B = \hbar^2/m_e e^2$  — боровский радиус,  $J_Z = m_e e^4 Z^2 / 2\hbar^2$  — энергия ионизации основного уровня водородоподобного атома (т. е. полностью ионизованного атома с зарядом  $Ze$ ). Сравнивая

$$P_{\text{т.и}} = \epsilon n_i n_e v \sigma_{\text{т.и}} \quad (19)$$

с формулой (8), легко проверить, что результаты совпадают с точностью до числового множителя 2.

Сходимость на верхнем пределе интеграла  $\sigma_{\text{т.и}} = \int d\sigma/l$  в отличие от расходимости интеграла  $\int d\sigma$  означает, что «мягкие» фотоны (с энергией  $\hbar\omega \ll \epsilon$ ) дают пренебрежимо малый вклад в энергетический баланс излучения, хотя их число бесконечно. По порядку величины сечение тормозного излучения (18) равно произведению вероятности  $w_1$  испускания жёсткого фотона электроном с орбитальным моментом  $l = 1$  на видимую площадь сечения  $\pi\lambda_e^2$  области формирования излучения. Отсюда следует, что основной вклад в мощность излучения вносят столкновения электронов с ионами при малых значениях орбитального момента.

Выполнив в формуле (8) усреднение по распределению электронов (что с точностью до числового коэффициента соответствует замене скорости  $v$  на тепловую скорость  $v_{Te} \sim \sqrt{T_e/m_e}$ ), можно оценить удельную мощность тормозного излучения из плазмы с заданной температурой электронов:

$$P_{\text{т.и}} \sim \frac{Z^2 e^6 n_e n_i T_e^{1/2}}{m_e^{3/2} c^3 \hbar}. \quad (20)$$

Это выражение можно преобразовать к форме, удобной для оценок по порядку величины, выделив параметры  $\alpha = e^2/\hbar c$ ,  $a_B = \hbar^2/m_e e^2$  и  $J_Z = m_e e^4 Z^2 / 2\hbar^2$ :

$$P_{\text{т.и}} \sim \alpha^4 a_B^2 Z J_Z \sqrt{T_e/J_Z} n_e n_i. \quad (21)$$

Более аккуратный расчёт добавляет к этой оценке довольно большой численный коэффициент (задача 5). В практической формуле

$$P_{\text{т.и}} = 1,54 \times 10^{-32} Z^2 n_e n_i \sqrt{T_e} [\text{Вт}/\text{см}^3] \quad (22)$$

плотности  $n_e$  и  $n_i$  измеряются в единицах  $\text{см}^{-3}$ , а температура  $T_e$  — в электронвольтах.

Интересно, что оценка вероятности излучения (12), в отличие от формул (10) и (11), верна и в том случае, когда борновское приближение (9) неприменимо и следует учитывать искривление траектории электрона (задача 2). Формулы (8), (18) и (21) также приблизительно верны как в борновском, так и в «антиборновском» приближении. Практическая формула (22) получена для случая  $T_e \gg J_Z$ , но с точностью до численного коэффициента она верна и при  $T_e \lesssim J_Z$ ; впрочем, в последнем случае мощность тормозного излучения будет меньше мощности рекомбинационного излучения, как показано в следующем параграфе.

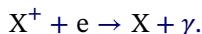
Тормозное излучение может быть использовано для диагностики плазмы, а именно для измерения температуры и плотности. Температу-

ра электронов определяется из анализа формы спектра (рис. 4), а плотность плазмы — по измеренной мощности излучения.

### §9.3. Рекомбинационное излучение

*Рекомбинационное излучение* возникает в процессе фотозахвата (фоторекомбинации), в результате которого при столкновении электрона с ионом образуется нейтральный атом или же зарядовое число  $Z$  многозарядного иона понижается.

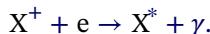
Процесс фоторекомбинации с захватом электрона на основной (первый) уровень атома описывают химическим уравнением



При таком захвате излучённый фотон должен унести всю начальную энергию электрона плюс энергию, равную энергии ионизации:

$$\hbar\omega_1 = \varepsilon + J_Z.$$

Возможен также фотозахват с образованием возбуждённого атома, который для отличия от атома в основном состоянии принято отмечать звёздочкой в верхнем индексе:



При захвате на атомарный уровень с квантовым числом  $k > 1$  происходит излучение фотона с меньшей энергией,

$$\hbar\omega_k = \varepsilon + J_Z/k^2,$$

но затем испускается ещё один фотон (или ещё несколько фотонов) при переходе электрона на основной уровень.

Чтобы оценить мощность рекомбинационного излучения, укажем, что в антиборновском приближении, при

$$\varepsilon \ll J_Z, \quad (23)$$

сечение фоторекомбинации примерно равно сечению тормозного излучения, формально вычисленному по формуле (18) в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Квантовая теория в антиборновском приближении даёт следующее выражение для сечения фоторекомбинации в основное состояние ( $k = 1$ ) водородоподобного атома (задача 7):

$$\sigma_{\text{ф.п.}}^{(1)} = \frac{2^8 \pi^2}{3 e^4} \frac{J_Z}{\varepsilon} \alpha^3 a_B^2. \quad (24)$$

Разница между формулой (24) и оценкой (18) составляет всего 15%. Для фотозахвата в возбужденные состояния ( $k > 1$ ) имеется формула Х. Крамерса

$$\sigma_{\text{ф.п.}}^{(k)} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \frac{J_Z}{\varepsilon} \frac{J_Z/k^3}{J_Z/k^2 + \varepsilon} \alpha^3 a_B^2 \quad (25)$$

(Hendrik Kramers, 1923 [98]). Она выведена в предположении  $k \gg 1$  (задача 6), но даже при  $k = 1$  превышает точный результат (24) всего на 25%.

Далее нужно подправить формулу (19), заменив  $\sigma_{\text{т.и.}}$  на  $\sigma_{\text{ф.п.}}^{(k)}$ ,  $\varepsilon$  на  $\hbar\omega_k = \varepsilon + J_Z/k^2$  и выполнив суммирование по  $k$ :

$$P_{\text{ф.п.}} = \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon + J_Z/k^2) n_e v n_i \sigma_{\text{ф.п.}}^{(k)}. \quad (26)$$

Так как  $\sigma_{\text{ф.п.}} \sim \sigma_{\text{т.и.}}$  при  $\varepsilon \sim T_e \ll J_Z$ , финальную оценку мощности рекомбинационного излучения для случая  $T_e \ll J_Z$  проще всего получить, умножив (21) на  $J_Z/T_e$ :

$$P_{\text{ф.п.}} \sim \alpha^4 c a_B^2 Z J_Z \sqrt{J_Z/T_e} n_e n_i. \quad (27)$$

Точный расчёт добавляет к этой формуле довольно большой коэффициент порядка 20 [99]. Практическая формула с правильным численным коэффициентом имеет вид

$$P_{\text{ф.п.}} = 4,1 \times 10^{-31} \frac{Z^4 n_e n_i}{\sqrt{T_e}} [\text{Вт}/\text{см}^3], \quad (28)$$

где температура  $T_e$  измеряется в электронвольтах, а плотности электронов и ионов в единицах на кубический сантиметр (задача 8).

Вследствие сильной зависимости от  $Z$  рекомбинационное излучение значительно возрастает при загрязнении плазмы тяжёлыми ионами. Оно преобладает над тормозным в низкотемпературной плазме, где  $T_e < J_Z$ . В этом случае при расчёте мощности излучения траекторию электронов уже нельзя считать прямолинейной, как это сделано при выводе формулы (20) для мощности тормозного излучения. Однако её по-прежнему можно использовать по крайней мере в качестве оценки по порядку величины (задача 2). Что касается формулы (28) для мощности рекомбинационного излучения, то она получена именно для случая  $T_e < J_Z$ .

В противоположном случае,  $T_e \gg J_Z$ , нужно принять во внимание, что сечение фоторекомбинации быстро убывает с ростом энергии электрона. Квантовая теория предсказывает (задача 7), что

$$\sigma_{\text{ф.р.}}^{(k)} = \frac{2^7 \pi}{3} \left( \frac{J_Z}{\epsilon} \right)^{5/2} \frac{\alpha^3 a_B^2}{k^3}, \quad (29)$$

если  $\epsilon \gg J_Z$ .<sup>3</sup> Так как  $\hbar\omega_k = \epsilon + J_Z/k^2$ , энергия, уносимая фотоном в пределе  $T_e \gg J_Z$ , увеличивается пропорционально  $\epsilon$ , поэтому произведение  $\hbar\omega_k \sigma_{\text{ф.р.}}^{(k)} v$  пропорционально  $1/\epsilon$ . Усреднение по функции распределения электронов в первом приближении приводит к замене  $\epsilon \rightarrow T_e$ , поэтому мощность рекомбинационного излучения будет пропорциональна  $1/T_e$ . Известна точная асимптотика

$$P_{\text{ф.р.}} = \frac{256}{3} \pi \zeta(3) \alpha^4 c a_B^2 Z J_Z (J_Z/T_e) n_e n_i, \quad (30)$$

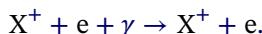
где  $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-x}$  – дзета-функция Римана. С её помощью можно получить практическую формулу

$$P_{\text{ф.р.}} = 2,3 \times 10^{-29} \frac{Z^5 n_e n_i}{T_e} [\text{Вт}/\text{см}^3]. \quad (31)$$

Сравнив её с формулой (22), нетрудно проверить, что при  $T_e \gg J_Z$  мощность рекомбинационного излучения мала по сравнению с мощностью тормозного излучения.

#### §9.4. Длина пробега излучения

Прежде чем отождествлять вычисленную мощность излучения из единицы объёма плазмы с потерями энергии, надо убедиться, что излучённые фотоны покидают плазму, а не поглощаются в ней недалеко от места излучения. Процесс *тормозного поглощения* является обратным по отношению к тормозному излучению. Фотон сталкивается со свободным электроном, когда тот находится вблизи иона и поглощается электроном:



Процесс  $e + \gamma \rightarrow e$  запрещён законами сохранения энергии и импульса.

---

<sup>3</sup> Формулы Х. Крамерса в этом случае дают неправильную зависимость сечения от энергии электрона. Этот факт игнорируется в некоторых книгах, см., например, [2, 8, 9, 43, 100].

Вычислим расстояние, которое пробегает электромагнитная волна, прежде чем поглотиться в плазме. Пусть  $E_\omega$  — амплитуда электрического поля волны с частотой  $\omega$ . В поле такой волны электроны осциллируют со скоростью

$$v_\omega = \frac{eE_\omega}{m_e\omega}.$$

В расчёте на единицу объёма плазмы ей соответствует «осцилляторная» энергия

$$n_e \frac{m_e v_\omega^2}{2} = \frac{n_e e^2 E_\omega^2}{2m_e \omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{E_\omega^2}{8\pi}, \quad (32)$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m_e}$  — ленгмюровская частота. За счёт столкновений с ионами направленное движение электронов изотропизуется, а энергия (32) превращается в тепло, причём скорость диссипации энергии пропорциональна удвоенной частоте электрон-ионных столкновений  $2\nu_{ei}$  (удвоенной потому, что квадрат скорости  $v_\omega$  убывает в 2 раза быстрее, чем сама скорость). Так как электромагнитные волны с частотой ниже  $\omega_p$  не могут распространяться в плазме без магнитного поля,<sup>4</sup> будем считать, что  $\omega \gg \omega_p$ . Тогда поток энергии в волне равен  $c E_\omega^2 / 8\pi$ . Выбирая ось  $x$  в направлении распространения волны, составим уравнение баланса энергии

$$\frac{d}{dx} c \frac{E_\omega^2}{8\pi} = -2\nu_{ei} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{E_\omega^2}{8\pi}.$$

Его решением является экспоненциально убывающая функция

$$\frac{E_\omega^2}{8\pi} = \frac{E_{\omega 0}^2}{8\pi} e^{-2x/\ell},$$

где

$$\ell = \frac{c}{\nu_{ei}} \frac{\omega^2}{\omega_p^2}$$

есть искомая длина пробега излучения. Выражая частоту столкновений через сечение,

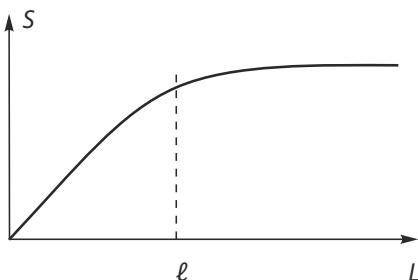
$$\nu_{ei} = n_i \sigma_t v,$$

следует учесть, что формула (7.16) для транспортного сечения,

$$\sigma_t = 4\pi \Lambda Z^2 e^4 / m_e^2 v^4,$$

---

<sup>4</sup> Этот факт доказывается в курсе «Коллективные волны в плазме».



**Рис. 5.** Мощность излучения с единицы поверхности излучающего тела при заданной температуре и плотности плазмы увеличивается пропорционально линейным размерам тела  $L$ , пока они меньше длины пробега излучения  $\ell$ . При  $L > \ell$  поток излучения определяется законом Стефана–Больцмана.

относится к случаю далёких пролётов, когда прицельный параметр  $b$  порядка дебаевского радиуса  $\lambda_D$ . При далёких пролётах излучаются или поглощаются электромагнитные волны с частотой порядка  $v/\lambda_D \sim v_{Te}/\lambda_D \sim \omega_p \ll \omega$ . Фотоны с энергией  $\hbar\omega \sim 2T_e \gg \hbar\omega_p$  поглощаются при близких пролётах. Соответствующее сечение примерно в  $\Lambda$  раз меньше (задачи 7.3 и 7.6). Полагая, что  $v \sim v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$  и  $\hbar\omega \sim T_e$ , получаем

$$\ell \sim \frac{cm_e^{3/2} T_e^{7/2}}{\sqrt{2\pi^2 n_e n_i Z^2 e^6 \hbar^2}}. \quad (33)$$

Точные вычисления дают

$$\ell = 2,5 \times 10^{37} \frac{T_e^{7/2}}{n_e n_i Z^2} [\text{см}], \quad (34)$$

где температура  $T_e$  измеряется в электронвольтах, а плотности электронов и ионов  $n_e$  и  $n_i$  – в единицах  $\text{см}^{-3}$ . Длина пробега излучения даже в сравнительно плотной и холодной плазме очень велика. Например, для водородной плазмы с  $T_e = 10 \text{ эВ}$ ,  $n_e = n_i = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  имеем  $\ell = 8 \times 10^5 \text{ км}$ . Таким образом, лабораторная плазма обычно прозрачна для тормозного излучения. Непрозрачны ядра звёзд.

Пусть  $L$  – характерный линейный размер излучающего тела, например его радиус. Обозначим через  $S$  мощность излучения, отнесённую к единице поверхности, и установим зависимость  $S$  от  $L$ . При  $L \ll \ell$  мощность  $S$  пропорциональна размеру тела  $L$ :

$$S \sim \frac{PL^3}{L^2} \sim PL.$$

При  $L \gg \ell$  излучение выходит только из поверхностного слоя толщины порядка  $\ell$ :

$$S \sim \frac{PL^2 \ell}{L^2} \sim P\ell.$$

Подставив сюда мощность тормозного излучения, получим

$$S \sim \frac{T^4}{c^2 \hbar^3}.$$

С точностью до численного коэффициента этот результат совпадает с законом Стефана—Больцмана ([Jožef Stefan](#), 1879 [[101](#)]; [Ludwig Boltzmann](#), 1884 [[102](#)]), согласно которому плотность потока энергии излучения абсолютно чёрного тела равна

$$S = \frac{\pi^2}{60} \frac{T^4}{c^2 \hbar^3} \quad (35)$$

(задача 10).

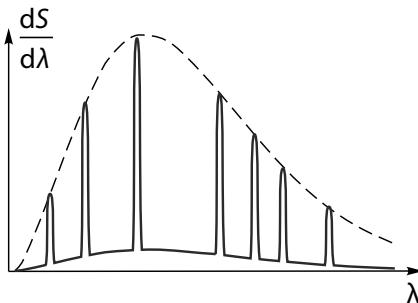
*Абсолютно чёрное тело* — физическая абстракция, применяемая в термодинамике. Абсолютно чёрным называют тело, поглощающее всё падающее на него электромагнитное излучение во всех диапазонах и ничего не отражающее. Несмотря на название, абсолютно чёрное тело само может испускать электромагнитное излучение любой частоты и визуально иметь цвет, но это излучение сначала «переваривается» внутри тела, поэтому находится с ним в тепловом равновесии. Спектр излучения абсолютно чёрного тела определяется только его температурой. Как видно из рисунка 5, равновесное излучение всегда имеет большую мощность, чем неравновесное. Среди тел Солнечной системы свойствами абсолютно чёрного тела в наибольшей степени обладает Солнце. Термин «абсолютно чёрное тело» был введён Густавом Кирхгофом ([Gustav Kirchhoff](#)) в 1862 году.

## §9.5. Излучение спектральных линий

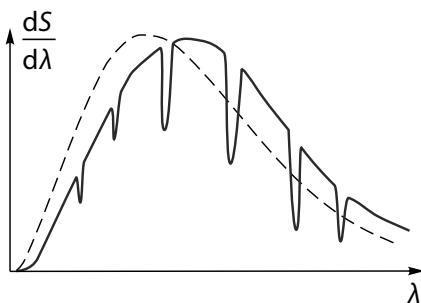
Реальная картина излучения усложняется конкуренцией между излучением с непрерывным спектром и излучением в дискретных линиях испускания атомов и молекул, а также убыванием температуры к поверхности излучающего тела из-за радиационного остывания. Как правило, в линейчатом спектре сосредоточена лишь малая доля мощности излучения, поэтому распределение температуры в излучающем слое зависит главным образом от характеристик непрерывного спектра.

Спектральные линии излучения имеют конечную ширину. Различают *естественную* и *аппаратную* ширину спектральных линий.

Естественное уширение спектральной линии связано с тем, что время жизни атома в возбуждённом квантовом состоянии конечно, так как



**Рис. 6.** Спектр излучения нагретого тела, прозрачного в непрерывном спектре и непрозрачного в линиях. Штриховая линия соответствует планковскому спектру излучения абсолютно чёрного тела при данной температуре. Площадь под этой кривой даёт полное количество энергии, излучённой с единицы площади поверхности абсолютно чёрного тела в единицу времени, которое вычисляется по формуле (35).



**Рис. 7.** Спектр излучения тела с температурой, уменьшающейся к поверхности. Малые частоты поглощаются сильнее, чем большие. Штрихами показан планковский спектр, отвечающий средней эффективной температуре излучения. В спектре вырезаны линии селективного поглощения. Поток излучения в центрах линий равен планковскому потоку, отвечающему температуре поверхности.

атом спонтанно в среднем за время  $\tau_{\text{с.и}}$  испускает фотон и переходит в основное состояние (или другое возбуждённое состояние с меньшей энергией). Естественная полуширина спектральной линии  $\Delta\omega$  связана с временем жизни соотношением

$$\Delta\omega = 1/\tau_{\text{с.и}}, \quad (36)$$

которое следует из соотношения неопределённостей.

Аппаратная ширина спектральной линии определяется разрешающей способностью спектрального прибора, используемого для измерения спектра излучения. Если аппаратное уширение больше естественного, прибор не может различить естественную ширину спектральной линии.

В плазме существуют дополнительные механизмы уширения спектральных линий. Ударное уширение вызывается столкновениями атомов с другими частицами плазмы. В результате столкновений переходы атома между квантовыми состояниями происходят чаще, что экви-

валентно уменьшению времени жизни возбуждённых состояний. Соответственно этому увеличивается ширина спектральной линии.

Тепловое движение атомов (даже без учёта столкновений) приводит к *доплеровскому уширению* спектральных линий. Если неподвижный атом излучает плоскую волны с частотой  $\omega_0$ , то в системе отсчёта, где он движется с нерелятивистской скоростью  $v$ , частота излучения будет равна

$$\omega = \omega_0(1 + (v/c) \cos \theta), \quad (37)$$

где  $\theta$  – угол между скоростью атома и направлением распространения волны (считаем, что  $\cos \theta > 0$ , если атом приближается к наблюдателю). Так как в плазме имеются атомы с различными скоростями, частота излучаемых ими спектральных линий оказывается различной, а спектральный прибор фактически производит усреднение по функции распределения атомов по скоростям. В результате измеряемая ширина спектральной линии будет больше естественной ширины; по её величине иногда удается определить температуру плазмы (задача 12).

Из-за резонансного характера поглощения длина пробега линейчатого излучения значительно меньше, чем длина пробега излучения в непрерывном спектре. В результате тело, прозрачное в непрерывном спектре, испускает линейчатый спектр (рис. 6), так как интенсивность линий оказывается ближе к состоянию термодинамического равновесия, соответствующему насыщению, как на рисунке 5 при  $L > \ell$ .

Напротив, в спектре излучения непрозрачного тела имеются линии поглощения (рис. 7), так как линейчатое излучение выходит только из тонкого приповерхностного слоя, в котором температура ниже, чем в глубине тела, где формируется излучение с непрерывным спектром.

## §9.6. Циклотронное излучение

*Циклотронное излучение*<sup>5</sup> неизбежно возникает, если в плазме имеется магнитное поле. Согласно постулатам квантовой механики, орбитальный момент электрона в магнитном поле квантуется и может принимать значения, кратные постоянной Планка  $\hbar$ . Поэтому часть кинетической энергии электрона, отвечающая движению в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, также квантуется. Она может прини-

---

<sup>5</sup> Оно же *магнитотормозное* или *синхротронное* (в релятивистском пределе) излучение.

мать значения

$$\frac{1}{2}m_e v_\perp^2 = \left(s + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_{ce},$$

пропорциональные циклотронной частоте

$$\omega_{ce} = |\Omega_e| = \frac{eB}{m_e c}.$$

Квантовые состояния, соответствующие различным значениям индекса  $s = 0, 1, 2, \dots$ , называют уровнями Ландау [103, §112]. Переходы электронов между уровнями Ландау приводят к излучению или поглощению электромагнитных волн на частотах, кратных  $\omega_{ce}$ . Излучение на первой гармонике, т. е. на частоте  $\omega = \omega_{ce}$ , описывается в рамках дипольного приближения, а излучение на более высоких гармониках,  $\omega = 2\omega_{ce}$ ,  $\omega = 3\omega_{ce}$  и т. д., возникает в следующих порядках мультипольного разложения (задача 14).

Можно также сказать, что излучение высших гармоник связано с релятивистскими эффектами. Релятивистские эффекты малы, если  $T_e \ll m_e c^2$ . Однако чем выше номер гармоники, тем быстрее возрастает интенсивность излучения при увеличении энергии электрона. Кроме того, существенно различается угловое распределение излучения низших и высших гармоник. Первая гармоника излучается преимущественно вдоль магнитного поля, а высшие гармоники — поперёк (задача 15).

Подсчитаем полную интенсивность излучения в дипольном приближении на первой гармонике. Подставляя  $a = \omega_{ce} v_\perp$  в формулу Лармора (2), получаем

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} (\omega_{ce} v_\perp)^2.$$

В соответствии с уравнением

$$\frac{d}{dt} \frac{m_e v_\perp^2}{2} = -I$$

энергия электрона уменьшается в  $e = 2,71 \dots ^6$  раз за время

$$\tau = 3m_e^3 c^5 / 4e^4 B^2. \quad (38)$$

При  $B = 50$  кГс это «время высвечивания» составляет 0,1 с. Удельную мощность циклотронного излучения находим, умножив  $I$  на плотность

---

<sup>6</sup> Следует различать основание натурального логарифма  $e$  и элементарный заряд  $e$ .

электронов  $n_e$  и приняв во внимание, что среднее значение  $\left\langle \frac{1}{2}mv_\perp^2 \right\rangle = T_e$ :

$$P_{\text{ц.и}} = \frac{4}{3} \frac{e^4 B^2 T_e n_e}{m_e^3 c^5}. \quad (39)$$

Она может быть больше мощности, выделяемой в термоядерных реакциях (лекция 12). Однако в плотной плазме низшие гармоники сильно поглощаются и не выходят наружу (задача 16). В результате излучаются преимущественно высшие гармоники, а их интенсивность при  $T_e \ll m_e c^2$  на порядки меньше, чем по нашей оценке. Кроме того, циклотронное излучение относительно длинноволновое. При  $B = 50$  кГс длина волн составляет  $\lambda = 2\pi c/\omega_{ce} = 2$  мм. Такое излучение (в отличие от тормозного) хорошо отражается металлическими стенками и может быть возвращено в плазму.

В однородном магнитном поле основным механизмом уширения спектральных линий циклотронного излучения обычно является эффект Доплера. Согласно формуле (37) доплеровский сдвиг частоты тем больше, чем меньше длина волны. Следовательно, доплеровское уширение более существенно для коротковолновых высоких гармоник циклотронного излучения, чем для низких гармоник. Эффект уширения может быть столь сильным, что в области высоких частот гармоники перекрываются и поэтому спектр циклотронного излучения становится непрерывным.

В реальных лабораторных установках магнитное поле неоднородно, что имеет два важных последствия. Во-первых, линии излучения в низших гармониках превращаются в полосы, а высшие гармоники вообще сливаются в сплошной спектр. Во-вторых, неоднородность затрудняет резонансное поглощение гармоник циклотронной частоты, а в результате длина пробега циклотронного излучения возрастает.

## Литература

В «Физике плазмы для физиков» Л. А. Арцимовича и Р. З. Сагдеева [7, §1.8] на элементарном уровне изложена спектральная теория излучения плазмы в непрерывном спектре.

Детальное изучение процессов излучения в плазме можно начать с классической монографии «Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений» Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [8, гл. V, §1–4] или многократно переизданной «Физики газового разряда»

Ю. П. Райзера [9, гл. 8]. Обзоры В. И. Когана и В. С. Лисицы в «Итогах науки и техники» [104, 105] дополняют эти монографии.

Спектральная мощность тормозного излучения в рамках классической физики вычислена в §70 «Теории поля» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [66]; там же в §74 изложена теория магнитотормозного (циклотронного) излучения. Квантовая теория тормозного излучения разработана А. Зоммерфельдом (Arnold Sommerfeld) [106]. Она изложена в «Квантовой электродинамике» В. Б. Берестецкого, Е. М. Лифшица и Л. П. Питаевского [61] в §92. Там же в §56 вычислено сечение фоторекомбинации. Важные результаты в теории рекомбинационного излучения получены М. Штоббе (M. Stobbe), В. М. Катковым, В. М. Страховенко, А. И. Мильштейном, И. А. Котельниковым [99, 107–110].

Квантовая теория магнитотормозного излучения изложена в [61], §90. Предложенная Б. А. Трубниковым аппроксимационная формула для универсального коэффициента выхода циклотронного излучения из плазмы приведена в его статье [111] в «Вопросах теории плазмы».

Методы оптических измерений параметров плазмы обсуждаются в книге «Горячая плазма и управляемый ядерный синтез» С. Ю. Лукьянова и Н. Г. Ковальского [15, гл. VI].

### Задачи и вопросы

**Задача 1.** Докажите, что при столкновении частиц с одинаковым отношением электрического заряда к массе мощность дипольного излучения равна нулю. Решение ⇒ 306

**Задача 2.** Оцените мощность тормозного и рекомбинационного излучения в антиборновском приближении при  $\epsilon \ll J_Z$ , предполагая, что в процессе излучения доминируют близкие столкновения с заметным искривлением траектории электрона. Решение ⇒ 306

**Задача 3.** Определите зависимость сечения тормозного излучения от частоты. Решение ⇒ 308

**Задача 4.** Найдите спектр тормозного излучения в плазме с максвелловским распределением электронов по скоростям. Решение ⇒ 308

**Задача 5.** Вычислите мощность тормозного излучения в полностью ионизованной плазме. Решение ⇒ 309

**Задача 6.** Найдите сечение фотозахвата на высоковозбуждённые уровни водородоподобного атома. [Решение ⇒ 310](#)

**Задача 7.** Вычислите полное сечение фоторекомбинации для водородоподобного иона. [Решение ⇒ 310](#)

**Задача 8.** Вычислите мощность рекомбинационного излучения. [Решение ⇒ 312](#)

**Задача 9.** Найдите спектр излучения абсолютно чёрного тела (планковский спектр). [Решение ⇒ 313](#)

**Задача 10.** Найдите плотность потока энергии излучения с поверхности абсолютно чёрного тела. [Решение ⇒ 314](#)

**Задача 11.** Найдите естественную форму и ширину спектральной линии. [Решение ⇒ 314](#)

**Задача 12.** Найдите форму спектральной линии излучения, предполагая, что она определяется доплеровским уширением, а распределение атомов является максвелловским. [Решение ⇒ 316](#)

**Задача 13.** Оцените длину пробега излучения в дискретном спектре. [Решение ⇒ 316](#)

**Задача 14.** Объясните происхождение высших гармоник в спектре циклотронного излучения. [Решение ⇒ 319](#)

**Задача 15.** Найдите угловое распределение циклотронного излучения на первой и второй гармониках циклотронной частоты. [Решение ⇒ 319](#)

**Задача 16.** Оцените длину пробега циклотронного излучения в пределе  $T_e \rightarrow 0$ . [Решение ⇒ 319](#)

**Задача 17.** Оцените номер гармоники циклотронного излучения, выше которой линии излучения перекрываются. [Решение ⇒ 320](#)

**Задача 18.** Определите спектр циклотронного излучения в области низких частот, где плазма непрозрачна для циклотронного излучения. [Решение ⇒ 320](#)

## Лекция 10

# Атомные процессы в плазме

---

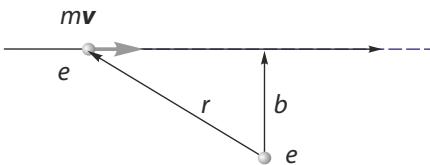
**Ионизация электронным ударом. Тройная рекомбинация.  
Ступенчатые процессы. Принцип детального равновесия.  
Резонансная перезарядка**

Как сказано в лекции 3, степень ионизации термодинамически равновесной плазмы однозначно определяется её температурой  $T$  и плотностью  $n$  в соответствии с уравнением Саха. В неравновесной плазме нужно сравнивать скорости *элементарных процессов*, которые сопровождают столкновения молекул, атомов, ионов и электронов.

К числу таких процессов принадлежат *ионизация*, т. е. выбивание связанныго электрона из нейтрального или частично ионизованного атома, *рекомбинация* — захват ионом свободного электрона, *перезарядка* — передача связанныго электрона от атома к иону, *прилипание* — захват электрона атомом или молекулой с образованием отрицательного иона, *возбуждение* — переход связанныго электрона в связное состояние с большей энергией, *тушение (дезактивация)* — переход связанныго электрона в связное состояние с меньшей энергией, *диссоциация* — распад молекулы на более простые молекулы, атомы или ионы, *ассоциация* — объединение атомов или ионов в молекулы или простых молекул в более сложные.

Этот список можно продолжить. К тому же нужно понимать, что многие процессы идут по нескольким каналам. Например, ионизация случается при столкновении атома с электроном, ионом или фотоном, а перезарядка бывает резонансной и нерезонансной. Подобные элементарные процессы изучают в курсах низкотемпературной плазмы и газового разряда. Мы рассмотрим только некоторые процессы, главным образом те, которые удаётся описать при помощи простых теоретических моделей. Сначала исследуем процессы, происходящие без излучения или поглощения фотонов. Такие элементарные процессы называют

**Рис. 1.** Приближение далёких пролётов при вычислении сечения ионизации электронным ударом. Предполагается, что скорость атомарного электрона пренебрежимо мала по сравнению со скоростью налетающего электрона, который движется по прямой с постоянной скоростью.



атомными. Радиационным процессам, таким как фотоионизация и фоторекомбинация, посвящена следующая лекция.

### §10.1. Ионизация электронным ударом

Изучение атомных процессов начнём с *ионизации электронным ударом* (impact ionization). В этом процессе при столкновении свободного электрона с нейтральным атомом образуются ион и второй электрон:



Простейшая модель этого процесса на примере атома водорода предложена первооткрывателем электрона Дж. Томсоном (Joseph Thomson) в 1912 году. Следуя ему, рассмотрим столкновение свободного электрона со связанным атомарным электроном, который первоначально был неподвижен. Такое предположение оправдано, если начальная скорость свободного электрона  $v$  значительно больше, чем скорость  $v_1$  его связанного собрата на основном уровне  $k = 1$ . Напомним, что  $v_1 = \alpha c$  (где  $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$  — постоянная тонкой структуры) и что на возбуждённых уровнях (с номером  $k > 1$ ) скорость связанного электрона  $v_k = \alpha c/k$  ещё меньше. Условие  $v \gg v_1$  означает, что энергия свободного электрона  $\epsilon = \frac{1}{2}m_e v^2$  велика по сравнению с энергией ионизации  $J = \frac{1}{2}m_e \alpha^2 c^2 = 13,6$  эВ. В столкновении свободный электрон передаёт часть своей энергии связанному электрону. Если переданная энергия  $\mathcal{E}$  превысит энергию ионизации  $J$ , произойдёт ионизация атома из основного состояния в результате всего лишь одного столкновения.

Для вычисления  $\mathcal{E}$  при  $\epsilon \gg J$  воспользуемся приближением далёких пролётов, считая, что траектория свободного электрона почти не отклоняется от прямой (рис. 1). Тогда импульс, переданный атомарному

электрону, после столкновения будет направлен почти перпендикулярно скорости налетающего электрона, так как работа проекции силы кулоновского взаимодействия электронов  $\mathbf{F} = e^2 \mathbf{r}/r^3$  на направление движения при интегрировании за полное время пролёта обратится в нуль. Импульс атомарного электрона в направлении, перпендикулярном скорости налетающего электрона, легко найти, интегрируя по времени проекцию силы  $F_{\perp} = (b/r)\mathbf{F}$  на это направление. Эти вычисления уже проделаны в §7.5:

$$p_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2 b}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{2e^2}{vb}.$$

Отсюда выражаем квадрат прицельного расстояния

$$b^2 = \frac{e^4}{\varepsilon \mathcal{E}} \quad (2)$$

через энергию  $\varepsilon = \frac{1}{2}m_e v^2$  налетающего электрона и энергию  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}p_{\perp}^2/m_e$ , переданную им атомарному электрону. Дифференцируя затем  $\pi b^2$  по  $\mathcal{E}$ , находим дифференциальное сечение кулоновского рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\mathcal{E}} = \left| \pi \frac{db^2}{d\mathcal{E}} \right| = \frac{\pi e^4}{\varepsilon \mathcal{E}^2} \quad (3)$$

в зависимости от  $\mathcal{E}$ . Для столкновений тождественных частиц полученная формула является точной: её можно вывести из формулы Резерфорда (7.6), не используя приближение далёких пролётов (задача 1).

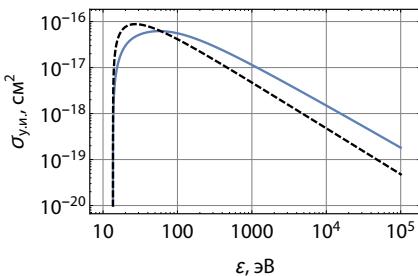
Налетающий электрон должен затратить на ионизацию энергию, как минимум превышающую энергию ионизации  $J$ , но не больше всей своей энергии  $\varepsilon$ . Поэтому полное сечение ионизации получается интегрированием (3) по  $\mathcal{E}$  в пределах от  $J$  до  $\varepsilon$ :

$$\sigma_{y,i} = \int_J^{\varepsilon} \frac{d\sigma}{d\mathcal{E}} d\mathcal{E} = \frac{\pi e^4}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{J} - \frac{1}{\varepsilon} \right]. \quad (4)$$

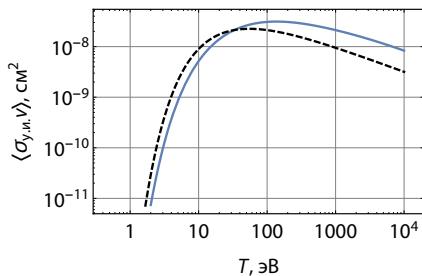
Эта формула получена Дж. Томсоном в 1912 году [112]. В случае ионизации атома водорода  $\text{H}$  ей можно придать более запоминающийся вид, если ввести обозначение  $a_B = e^2/2J$  для боровского радиуса:

$$\sigma_{y,i} = 4\pi a_B^2 \frac{J}{\varepsilon} \left[ 1 - \frac{J}{\varepsilon} \right]. \quad (5)$$

Формула Томсона качественно верно отражает зависимость сечения



**Рис. 2.** Сечение ионизации атома водорода электронным ударом из основного состояния. Сплошная линия — экспериментальное сечение [113], штриховая — вычисленное по формуле Томсона (5).



**Рис. 3.** Константа скорости ионизации атома водорода электронным ударом из основного состояния. Сплошная линия — экспериментальные данные [113], штриховая — расчёт по формуле Томсона (5).

ударной ионизации от энергии налетающего электрона. Она предсказывает, что максимальное сечение,  $\sigma_{\max} = \pi a_B^2 \approx 0.9 \times 10^{-16} \text{ см}^2$ , достигается при  $\epsilon = 2J$ . Даже вблизи порога ионизации  $\epsilon = J$ , где предположение  $\epsilon \gg J$  заведомо нарушается, она правильно предсказывает, что сечение ионизации,  $\sigma_{y,i} \approx \sigma_0 \times (\epsilon - J)/J$ , пропорционально разности  $\epsilon - J$ . Однако для количественных расчётов формула Томсона непригодна. Её сравнение с экспериментальными данными (рис. 2) показывает, что вблизи порога ионизации она завышает коэффициент пропорциональности  $\sigma_0$  в 4,3 раза. При  $\epsilon \gg J$ , напротив, экспериментальное сечение заметно превышает теоретическое. В точных расчётах используют аппроксимирующие формулы, которые можно найти в базе данных [113] Международного агентства по атомной энергии (МАГАТЭ).

Один электрон со скоростью  $v$  в единицу времени производит  $n_a \sigma_{y,i} v$  пар ионов и электронов, если считать, что плотность атомов равна  $n_a$ . Величина  $n_a \langle \sigma_{y,i} v \rangle$ , усреднённая по распределению свободных электронов, имеет смысл частоты ионизации. Её произведение на плотность имеющихся свободных электронов  $n_e$  даёт число новых электронов, рождённых в единице объёма за единицу времени. Следовательно, скорость нарастания плотности электронов описывается уравнением

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} \Big|_{y,i} = k_{y,i} n_a n_e, \quad (6)$$

где коэффициент в правой части,

$$k_{y,i} = \langle \sigma_{y,i} v \rangle,$$

называют константой скорости ударной ионизации. Подстановка формулы Томсона (5) с последующим усреднением по максвелловской функции распределения в пределе  $T_e \ll J$  (задача 2) даёт формулу

$$k_{y,i}^{(1)} = 8\sqrt{\pi} \alpha c a_B^2 (T_e/J)^{1/2} \exp(-J/T_e), \quad (7)$$

где индекс <sup>(1)</sup> в обозначении  $k_{y,i}^{(1)}$  напоминает, что коэффициент ударной ионизации вычислен для случая, когда ионизация происходит непосредственно из основного состояния за одно столкновение атома с электроном. Формула (7) примерно в 4 раза завышает константу скорости ударной ионизации по сравнению с экспериментальными данными (рис. 3), поскольку во столько же раз формула Томсона завышает сечение ионизации вблизи порога процесса. В другом предельном случае  $T_e \gg J$  для константы скорости получается формула

$$k_{y,i}^{(1)} = 8\sqrt{\pi} \alpha c a_B^2 (T_e/J)^{-1/2} \exp(-J/T_e). \quad (8)$$

которая отличается от (7) лишь заменой степени множителя  $T_e/J$  (экспоненциальный множитель  $\exp(-J/T_e)$  в этой формуле при  $T_e \gg J$  приблизительно равен 1 и оставлен «для симметрии»).

Наряду с рассмотренным процессом «прямой» ионизации возможен и другой сценарий выбивания электрона из атома, при котором атом сначала переходит в возбуждённое состояние. При следующих столкновениях он ещё более возбуждается, а уж затем ионизуется. В этом сценарии атом проходит целую серию возбуждённых состояний, а соответствующий процесс называется *ступенчатой ионизацией*. В отличие от неё, ионизация в одну стадию называется *прямой*. Константы скорости прямой  $k_{y,i}^{(1)}$  и ступенчатой  $k_{y,i}^{st}$  ударной ионизации мы сравним в §10.3. Константа  $k_{y,i}$  в уравнении (6) должна учитывать как прямую, так и ступенчатую ионизацию.

## §10.2. Тройная рекомбинация

Пока электронов мало, уравнение (6) описывает нарастание их плотности по экспоненциальному закону,  $n_e \propto \exp(t/\tau)$ , с постоянной времени  $\tau = (k_{y,i} n_a)^{-1}$ . По мере увеличения плотности электронов в игру вступает обратный процесс *рекомбинации*, который ведёт к уменьшению числа электронов.

Если температура плазмы достаточно высока, молекулярные ионы в ней отсутствуют, а рекомбинация электрона и иона происходит при столкновении с третьей частицей. Чаще всего третьей частицей является электрон, так что *тройная рекомбинация* (three-body recombination, ternary recombination) электрона и иона на электроне протекает по схеме



обратной ионизации электронным ударом (1). При столкновении двух электронов один электрон захватывается на атомарный уровень (если поблизости находится подходящий ион), а второй электрон улетает, унося избыточную энергию.

Сразу после акта рекомбинации вновь образованный атом не обязательно оказывается в основном состоянии. В процессе тройной рекомбинации, как правило, сначала образуется атом в возбуждённом состоянии, что принято отмечать звёздочкой в верхнем индексе:



Затем, после нескольких столкновений с другими электронами, ионами или атомами, возбуждённый атом переходит в основное состояние, т. е. весь процесс является ступенчатым, протекая в несколько стадий.

Тройная рекомбинация приводит к уменьшению плотности электронов, а её скорость пропорциональна плотности всех трёх сортов частиц, участвующих в столкновении, то есть  $n_i$ ,  $n_e$  и ещё раз  $n_e$ :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -k_{y,p} n_i n_e^2. \quad (11)$$

В рассматриваемом случае  $T_e \ll J$  коэффициент рекомбинации  $k_{y,p}$  определяется первыми стадиями процесса, при которых атом проходит ряд возбуждённых состояний. Более того, ключевую роль играет самая первая стадия, когда свободный электрон впервые захватывается на возбуждённый атомарный уровень. Соответствующую константу  $k_{y,p}^*$  будем помечать звёздочкой в верхнем индексе в отличие от константы прямой рекомбинации в основное состояние  $k_{y,p}^{(1)}$ , константы ступенчатой рекомбинации  $k_{y,p}^{st}$  и константы тройной рекомбинации вообще  $k_{y,p}$ , включающей как прямую, так и ступенчатую рекомбинации.

Не все электроны, первоначально захваченные на высоко возбуждённый уровень, затем «сваливаются» на основной уровень. Часть из

них вновь выбивается из атома при последующих столкновениях вместо того, чтобы перейти на более низкий энергетический уровень в атоме. Поэтому коэффициент ступенчатой рекомбинации  $k_{y,p}^{\text{ст}}$ , вообще говоря, должен быть меньше, чем коэффициент рекомбинации в возбуждённое состояние  $k_{y,p}^*$ . Однако в столкновениях одинаковых частиц энергия перераспределяется в равных пропорциях, поэтому если константы  $k_{y,p}^{\text{ст}}$  и  $k_{y,p}^*$  различаются, то только численным коэффициентом.

Оценим константу скорости ступенчатой тройной рекомбинации  $k_{y,p}^{\text{ст}}$ , полагая, что она примерно равна константе скорости тройной рекомбинации  $k_{y,p}^*$  в возбуждённое состояние. В соответствии с формулой (2) столкновение электронов, сопровождающееся передачей всей кинетической энергии налетающей частицы,  $\mathcal{E} \sim \varepsilon$ , происходит в том случае, когда  $b \sim e^2/\varepsilon$ . Так как в среднем  $\varepsilon \sim T_e$ , соответствующее сечение столкновения оценивается как  $\sigma_{ee} \sim \pi b^2 \sim \pi(e^2/T_e)^2$ . Число таких столкновений электронов в единице объёма за единицу времени равно  $\langle \sigma_{ee} v \rangle n_e^2 \sim \pi(e^2/T_e)^2 v_{Te} n_e^2$ , где  $v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$  – тепловая скорость электронов. Однако рекомбинация происходит только в том случае, когда поблизости, на расстоянии порядка  $b \sim e^2/T_e$ , находится ион. Число таких столкновений в  $n_i b^3 \sim n_i (e^2/T_e)^3$  раз меньше полного числа столкновений электронов с указанной передачей энергии. В результате оказывается, что количество актов рекомбинации в единице объёма как раз описывается формулой (11) с константой

$$k_{y,p}^{\text{ст}} \sim \pi (e^2/T_e)^5 \sqrt{T_e/m_e}.$$

Полученную оценку константы скорости тройной рекомбинации  $k_{y,p}^{\text{ст}}$  перепишем, выделив боровский радиус  $a_B$  и нормировав температуру на энергию ионизации:

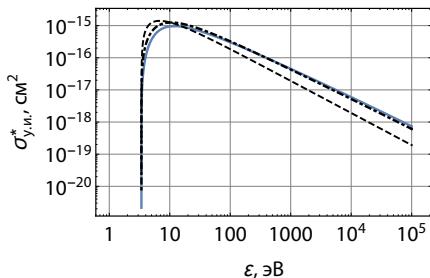
$$k_{y,p}^{\text{ст}} = \mathbb{A}_{y,p}^{\text{ст}} \alpha c a_B^5 (T_e/J)^{-9/2}. \quad (12)$$

Здесь  $\mathbb{A}_{y,p}^{\text{ст}}$  – численный коэффициент порядка  $2^{9/2}\pi \approx 71$ , который набирается при замене  $e^2 = 2J a_B$  и  $m_e = 2J/(\alpha c)^2$ . Для оценки коэффициента ударной рекомбинации используют практическую формулу [43]

$$k_{y,p}^{\text{ст}} = 8,75 \times 10^{-27} T_e^{-9/2} [\text{см}^6/\text{с}],$$

где температура  $T_e$  задана в электронвольтах. Эта формула получается из (12), если взять коэффициент  $\mathbb{A}_{y,p} = 76$ , который менее чем на 10% отличается от полученного выше в результате простых оценок по порядку величины.

**Рис. 4.** Сечение ударной ионизации атома водорода из возбуждённого состояния 2s (сплошная линия) и 2p (штрих-пунктирная линия) [113]. Штриховой линией показано сечение, вычисленное по формуле (14) с  $k = 2$ .



### §10.3. Ступенчатая ионизация

В низкотемпературной плазме ударная ионизация атома из основного состояния за одно столкновение может происходить только за счёт надтепловых электронов с энергией, значительно превышающей среднюю. Имеется альтернативный процесс *ступенчатой ионизации* (step-wise ionization), когда атом предварительно проходит целую серию возбуждённых состояний под воздействием соударений с электронами:



а затем и ионизуется из возбуждённого состояния:



Всю цепочку процессов в целом записывают следующим образом:



Скорость ионизации возбуждённых атомов пропорциональна их плотности  $n_a^*$ , плотности электронов  $n_e$  и константе скорости ударной ионизации из возбуждённого состояния  $k_{y,i}^*$ . Соответствующее уравнение можно записать по аналогии с универсальным уравнением (6) ударной ионизации:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} \Big|_{y,i}^* = k_{y,i}^* n_e n_a^*.$$

Однако в большей степени интерес представляет константа ступенчатой ударной ионизации  $k_{y,i}^{ct}$ , которая связывает скорость ионизации с плотностью всех ионов, независимо от их состояния:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} \Big|_{y,i}^{ct} = k_{y,i}^{ct} n_a n_e.$$

Покажем сначала, что константа ионизации из возбуждённого состояния заметно больше, чем из основного состояния,  $k_{\text{у.и}}^* \gg k_{\text{у.и}}^{(1)}$ . Формула Томсона (5) получена для ионизации из основного состояния, но её нетрудно обобщить на случай, когда атом находится в возбуждённом состоянии. Для этого достаточно учесть, что радиус орбиты атомарного электрона увеличивается пропорционально квадрату главного номера  $k$  квантового состояния,  $r_k = a_B k^2$ , а энергия ионизации с соответствующего энергетического уровня  $J_k = e^2/2r_k = e^2/2a_B k^2$ , напротив, уменьшается обратно пропорционально  $k^2$ :

$$\sigma_{\text{у.и}}^* = \frac{\pi e^4}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{J_k} - \frac{1}{\varepsilon} \right] = 4\pi a_B^2 \frac{J_k}{\varepsilon} \left[ 1 - \frac{J_k}{\varepsilon} \right] \propto k^4. \quad (14)$$

Эта формула неплохо согласуется с экспериментом (рис. 4). Максимальное сечение  $\sigma_{\text{max}} = \pi a_B^2 k^4$  достигается при меньшей энергии  $\varepsilon = 2J/k^2$  и быстро увеличивается с ростом  $k$ . Получается, что ионизовать возбуждённый атом действительно легче, поэтому в некоторых ситуациях ступенчатая ионизация доминирует над прямой. Имея формулу (14), константу ионизации из возбуждённого состояния можно вычислить тем же способом, что и константу прямой ионизации (7), но от этого не будет много профита, так как надо ещё суметь вычислить плотность возбуждённых атомов  $n_a$ .

Для вычисления константы ступенчатой ионизации, исходя из динамики столкновений, следовало бы проанализировать всю цепочку превращений атома в ион из основного состояния через промежуточные возбуждённые состояния. Существующая теория не позволяет сделать это.<sup>1</sup> Однако константу ступенчатой ионизации  $k_{\text{у.и}}^{\text{ст}}$  всё-таки можно оценить, если считать, что плотность электронов в системе достаточно велика, так что все переходы между возбуждёнными состояниями осуществляются только в результате столкновений с электронами, а не за счёт излучения или поглощения фотонов. В этом случае процесс ступенчатой ионизации оказывается детально противоположным по отношению к процессу тройной рекомбинации. Иными словами, в ходе этих двух процессов атомы претерпевают одинаковую цепочку превращений, но в противоположных направлениях, что позволяет применить принцип детального равновесия для вычисления  $k_{\text{у.и}}^{\text{ст}}$ .

---

<sup>1</sup> Возбуждение электронной оболочки атома является существенно квантовым процессом, поскольку энергия связанного электрона при переходе с одного квантового уровня на другой может меняться только дискретным образом. Экспериментальные измерения сечений возбуждения также чрезвычайно трудны.

*Принцип детального равновесия* заключается в том, что в равновесных системах всякому прямому процессу соответствует обратный процесс, идущий с той же скоростью, что и прямой. Традиционное представление о стационарном состоянии некой системы подразумевает, что сумма скоростей прямых процессов равна сумме скоростей обратных процессов. Предположение о детальном равенстве скоростей прямых и обратных процессов является существенно более жёстким по сравнению с предположением о стационарности состояния системы.

Принцип детального равновесия позволяет вычислить скорость обратного перехода, если известна скорость прямого перехода, и наоборот. Применимельно к рассматриваемой задаче принцип детального равновесия позволит нам найти константу ударной ионизации  $k_{y,i}^{\text{ст}}$  по вычисленной ранее константе тройной рекомбинации  $k_{y,p}^{\text{ст}}$ .

Представим, что электроны находятся в термодинамическом равновесии с атомами, причём образование заряженных частиц происходит за счёт ступенчатой ионизации, а их нейтрализация — в результате ступенчатой тройной рекомбинации, так что

$$k_{y,i}^{\text{ст}} n_a n_e = k_{y,p}^{\text{ст}} n_i n_e^2,$$

и поэтому

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{k_{y,i}^{\text{ст}}}{k_{y,p}^{\text{ст}}}.$$

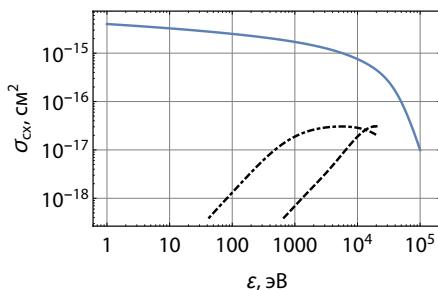
С другой стороны, в соответствии с уравнением Саха (3.6) в состоянии термодинамического равновесия

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = K(T), \quad (15)$$

где константа равновесия

$$K(T) = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{\lambda_{Te}^3} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{a_B^3} \left( \frac{T}{4\pi J} \right)^{3/2} \quad (16)$$

согласно уравнению (3.7) зависит от общей температуры  $T$  электронов и ионов, поскольку в состоянии термодинамического равновесия  $T_e = T_i$ . В рассматриваемом случае, вообще говоря,  $T_e \neq T_i$ . Поэтому температуру  $T$  в константе равновесия нужно заменить на температуру электронов  $T_e$ , так как движение ионов никак не влияет на скорость процесса ввиду того, что средняя скорость движения ионов мала по сравнению со скоростью электронов. Отсюда следует, что константа ступенчатой



**Рис. 5.** Сечение резонансной перезарядки атома водорода на ионе водорода в зависимости от энергии налетающего атома (сплошная кривая). Сечение нерезонансной перезарядки из основного состояния 1s в состояние 2s (штриховая линия) и 2p (штрих-пунктирная линия) на несколько порядков меньше.

ионизации  $k_{\text{у.и}}^{\text{ст}}$  связана с константой ступенчатой тройной рекомбинации  $k_{\text{у.р}}^{\text{ст}}$  соотношением

$$k_{\text{у.и}}^{\text{ст}} = K(T_e) k_{\text{у.р}}^{\text{ст}}.$$

Подставляя сюда формулу (12) для  $k_{\text{у.р}}^{\text{ст}}$ , получаем

$$k_{\text{у.и}}^{\text{ст}} = \mathbb{A}_{\text{у.и}}^{\text{ст}} \alpha c a_B^2 (T_e/J)^{-3} \exp(-J/T_e), \quad (17)$$

где  $\mathbb{A}_{\text{у.и}}^{\text{ст}} \sim (g_e g_i / g_a) \mathbb{A}_{\text{у.р}}^{\text{ст}} / (4\pi)^{3/2}$  — числовой коэффициент порядка единицы. Константа ступенчатой ионизации при низкой температуре,  $T_e \ll J$ , примерно в  $(J/T_e)^{7/2}$  раз больше константы ударной ионизации (7) из основного состояния.

#### §10.4. Перезарядка

В процессе *перезарядки* (charge exchange) атом передаёт иону свой электрон:



При этом число заряженных частиц не меняется, т. е.

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right|_{\text{cx}} = 0. \quad (19)$$

В лабораторных условиях перезарядка часто является нежелательным процессом, который увеличивает потери энергии из плазмы. Медленный атом, пришедший в плазму со стенок лабораторной установки, теряет электрон и застревает в плазме, если она удерживается, например, магнитным полем. Образовавшийся быстрый атом свободно вылетает на стенку, отдавая ей приобретённую энергию.

Особую опасность представляет *резонансная перезарядка*, когда атом и ион принадлежат одному химическому элементу, а электрон переходит на тот же энергетический уровень в новом атоме, на котором он находился в первом атоме:



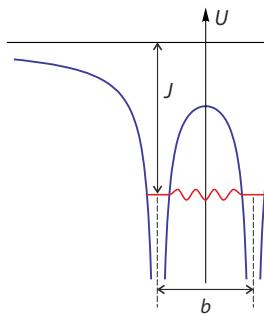
Такой процесс имеет резонансный характер; его сечение очень велико, так как энергия электрона не меняется при переходе с атомного уровня вблизи одного ядра на такой же уровень вблизи другого ядра. Для водорода при энергии сталкивающихся частиц порядка 1 эВ сечение резонансной перезарядки примерно в 20 раз больше «видимой» площади сечения атома  $\pi a_B^2$ . По мере увеличения относительной скорости  $v$  атома и иона, особенно если она превышает скорость электрона в атоме  $v_1 = \sqrt{2J/m_e}$ , резонансный характер взаимодействия теряется, а сечение перезарядки быстро уменьшается с ростом энергии, как показано на рисунке 5.

Оценим сечение резонансной перезарядки  $\sigma_{cx}$  на примере атома водорода при  $v \ll v_1$ .

Движение ядер можно рассматривать классически, так как их длина волн де Броиля мала из-за большой массы. Более того, движение ядер можно считать прямолинейным, даже если их кинетическая энергия меньше энергии ионизации, так как электростатическое взаимодействие иона с нейтральным атомом мало. Пусть ион пролетает со скоростью  $v$  на прицельном расстоянии  $b$  от неподвижного атома. Согласно постулатам квантовой механики, вероятность обнаружить атомарный электрон на расстоянии  $r \sim b$  от атома мала, но не равна нулю, даже если  $r$  значительно больше радиуса  $a_B$  орбиты Бора. Вследствие этого атомарный электрон может оказаться в области притяжения иона. Этот эффект называется подбарьерным прохождением, так как электрону нужно пройти под барьером с высотой порядка энергии ионизации  $J$  (рис. 6). Вероятность подбарьерного просачивания на расстояние  $b$  оценивается как

$$w \sim \exp(-2\sqrt{2m_e J} b / \hbar) = \exp(-2b/a_B).$$

Оказавшись ближе к иону, чем к ядру атома, электрон захватывается на атомарную орбиту иона, ион становится атомом, а бывший атом — ионом.



**Рис. 6.** Потенциальная энергия электрона в поле двух протонов. Связанный электрон, находящийся на атомарном уровне с энергией ионизации  $J$ , может перейти на такой же уровень соседнего иона под потенциальным барьером. При равенстве энергии двух уровней процесс носит резонансный характер.

Время, в течение которого два ядра находятся на минимальном расстоянии  $b$  друг от друга, примерно равно

$$\Delta t \sim b/v,$$

тогда как связанный электрон обращается вокруг ядра атома за время

$$\tau \sim a_B/v_1,$$

где  $v_1 = \alpha c$ . Следовательно, за время сближения ядер электрон  $\Delta t/\tau$  раз может оказаться на стороне пролетающего иона и каждый раз с вероятностью  $w$  захватиться на его орбиту. Таким образом, вероятность перезарядки по порядку величины равна

$$w\Delta t/\tau \sim (bv_1/a_B v) \exp(-2b/a_B). \quad (21)$$

Если формально  $w\Delta t/\tau > \frac{1}{2}$ , электрон много раз за время сближения иона с атомом успеет поменять «прописку» и в итоге с вероятностью  $\frac{1}{2}$  остаться на орбите другого ядра. Заменив левую часть уравнения (21) на  $\frac{1}{2}$ , найдём максимальное расстояние  $b_{cx}$ , на котором процесс обмена электроном между ядрами не задавлен потенциальным барьером:  $b_{cx} \sim a_B \ln(v_1/v)$ . Сечение резонансной перезарядки оценивается по формуле

$$\sigma_{cx} \sim \pi b_{cx}^2 \sim \pi a_B^2 \ln^2(v_1/v). \quad (22)$$

Более аккуратный анализ предсказывает, что в аргументе логарифма имеется дополнительный большой множитель порядка 100 [9, §2.7].

## Литература

Статья А. В. Елецкого и Б. М. Смирнова [114] в 1-м томе «Основ физики плазмы» в краткой форме излагает основы элементарных процессов

в плазме; содержанию лекции соответствует §1. Обширный перечень таких процессов имеется в §4 «Введение в физику плазмы» Б. М. Смирнова [115], а простейшая теория ряда процессов изложена в §5. Можно рекомендовать также книгу того же автора «Физика слабоионизованного газа в задачах с решениями» [116], дополненную позднее в переводе на английский язык [117].

Монографии «Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений» Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [8, §10, 11, 16, 17] и «Физика газового разряда» Ю. П. Райзера [9, гл. 2, 3, 5, 8] признаны «классикой жанра».

Изучение атомных процессов в плазме можно продолжить чтением первой из двух обзорных статей В. С. Лисицы и В. И. Когана [104].

### Задачи и вопросы

**Задача 1.** Вычислите дифференциальное сечение кулоновского рассеяния  $d\sigma/dE$  электрона с начальной энергией  $\varepsilon$  на первоначально неподвижном другом электроне в зависимости от величины переданной ему энергии  $E$ . [Решение](#) ⇒ 320

**Задача 2.** Вычислите  $k_{y,i}^{(1)} = \langle \sigma_{y,i} v \rangle$  при  $T_e \ll J$  и  $T_e \gg J$ , усреднив сечение ионизации (5) по максвелловской функции распределения электронов. [Решение](#) ⇒ 321

**Задача 3.** Выясните условия, при которых ионизация ионным ударом несущественна. [Ответ](#) ⇒ 321

**Задача 4.** Вычислите константу скорости тройной рекомбинации  $k_{y,p}^{(1)}$  непосредственно в основное состояние атома, минуя захват электрона на возбуждённые уровни. [Решение](#) ⇒ 321

**Задача 5.** Оцените сечение конверсии атомарных ионов в молекулярные в тройных столкновениях. [Решение](#) ⇒ 322

**Задача 6.** Установите связь между сечениями неупругих столкновений для прямых и обратных процессов (принцип детального равновесия). [Решение](#) ⇒ 323

## Лекция 11

# Радиационные процессы в плазме

---

### Фоторекомбинация и фотоионизация. Корональное равновесие. Отрицательные ионы

Продолжая изучение элементарных процессов в плазме, расскажем о процессах ионизации и рекомбинации с участием фотонов. Из множества явлений, которые изучает современная физика газового разряда и низкотемпературной плазмы, в заключение темы обсудим ещё одно — образование и разрушение отрицательных ионов, которые играют ключевую роль в формировании оптической части спектра излучения Солнца. Значение отрицательных ионов для физики плазмы заметно возросло в последние годы в связи с тем, что они будут использоваться для приготовления пучков нейтральных атомов большой энергии, которые необходимы для нагрева плазмы в термоядерном реакторе.

#### §11.1. Фоторекомбинация

В процессе тройной рекомбинации (10.9) с участием иона и двух электронов роль второго электрона сводилась к выносу энергии связи электрона в атоме, которая высвобождается в результате нейтрализации иона. С этой ролью могла бы справиться частица другого сорта, например второй ион. Однако сечение такого процесса невелико. Эффективным каналом образования атомов при столкновениях ионов с электронами является *фоторекомбинация*; её также называют радиационной рекомбинацией (radiative recombination). В этом процессе энергию, высвободившуюся при переходе свободного электрона в связанное состояние, уносит фотон:



Число актов рекомбинации в единице объёма пропорционально плотности каждого сорта рекомбинирующих частиц, поэтому

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} \Big|_{\text{ф.р.}} = -k_{\text{ф.р.}} n_i n_e. \quad (2)$$

Поскольку скорость (2) фоторекомбинации пропорциональна первой степени плотности электронов  $n_e$  (тогда как скорость тройной рекомбинации (10.11) пропорциональна квадрату  $n_e$ ), в достаточно разреженной плазме фоторекомбинация идёт быстрее, чем тройная рекомбинация. Константа фоторекомбинации

$$k_{\text{ф.р.}} = \langle \sigma_{\text{ф.р.}} v \rangle \quad (3)$$

равна усреднённому произведению сечения рекомбинационного излучения  $\sigma_{\text{ф.р.}}$  на скорость  $v$  относительного движения электрона и иона. Из-за большей массы ионы можно считать неподвижными, а усреднение производить только по распределению скоростей электронов. Уже отсюда ясно, что результат усреднения будет зависеть от температуры электронов, но не ионов.

Для вычисления  $k_{\text{ф.р.}}$  используем оценку (9.18) сечения тормозного излучения, полученную в лекции 9. Как указано в §9.3, она приблизительно верна и для рекомбинационного излучения в случае низких энергий, когда  $\epsilon \ll J_Z$  и фотон в среднем уносит энергию, лишь немногим превышающую энергию ионизации, т. е.  $\hbar\omega \approx J_Z$ , поэтому

$$\sigma_{\text{ф.р.}}^{(1)} \sim \frac{4\pi^2}{3} \frac{J_Z}{T_e} \alpha^3 a_B^2. \quad (4)$$

Заменяя далее  $v$  на  $v_{Te}$ , с учётом равенства  $v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e} = \alpha c Z (T_e/J_Z)^{1/2}$  получаем

$$k_{\text{ф.р.}}^{(1)} \sim \frac{4\pi^2}{3} \alpha^4 c Z a_B^2 (J_Z/T_e)^{1/2}. \quad (5)$$

Точный расчёт для фоторекомбинации в основное состояние водородоподобного иона даёт близкий по порядку величины результат, однако при учёте фотозахвата в возбуждённые состояния добавляется большой логарифмический множитель  $\ln(J_Z/T_e)$  (задача 1).

Если  $T_e \gg J_Z$ , фоторекомбинация идёт преимущественно с захватом свободного электрона на основной уровень в атоме. Сечение фоторекомбинации быстро убывает с ростом энергии электрона (задача 9.7), поэтому константа скорости фоторекомбинации будет меньше, чем

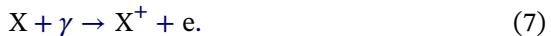
это предсказывает формула (5). Для приближённых вычислений можно принять, что

$$k_{\text{ф.р}}^{(1)} \sim 100\alpha^4 c a_{\text{B}}^2 Z (J_z/T_e)^{3/2}, \quad (6)$$

но область применимости этой формулы ограничена очень малыми значениями параметра  $J_z/T_e$  (задача 1).

### §11.2. Фотоионизация

Процессом, противоположным фоторекомбинации, является *фотоионизация* (photoionization). В квантовой теории её называют *фотоэфектом* (photoelectric effect). Ионизацию атома производит фотон с достаточно большой энергией:



Скорость процесса

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = k_{\text{ф.и}} n_a \quad (8)$$

пропорциональна плотности атомов. По логике вещей, она должна быть также пропорциональна плотности фотонов, но та плохо определена, так как (см. §9.4) существенным образом зависит от размеров системы из-за очень большой длины пробега излучения в плазме. Формально считают, что плотность фотонов включена в константу фотоионизации  $k_{\text{ф.и}}$ ; в результате уже константа фотоионизации становится плохо определённой величиной, поэтому для неё не существует универсальных формул в системах, где излучение заперто в плазме.

Если излучение заперто в плазме и находится в термодинамическом равновесии с ней, число квантов в единице объёма есть функция температуры  $T$ . При этом можно установить связь между  $k_{\text{ф.и}}$  и  $k_{\text{ф.р}}$ , пользуясь принципом детального равновесия, который требует равенства скоростей фотоионизации и фоторекомбинации. Повторяя рассуждения, изложенные в конце §10.3, получаем

$$k_{\text{ф.и}} = K(T_e) k_{\text{ф.р}}. \quad (9)$$

### §11.3. Корональное равновесие

С учётом всех рассмотренных процессов ионизации и рекомбинации уравнение баланса для плотности электронов принимает следую-

щий вид:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = k_{y,i} n_a n_e - k_{y,p} n_i n_e^2 + k_{\phi,i} n_a - k_{\phi,p} n_i n_e, \quad (10)$$

где константу скорости ударной ионизации  $k_{y,i}$  нужно вычислять с учётом как прямой, так и ступенчатой ионизации.

В лабораторных условиях излучение обычно не заперто в плазме и поэтому плотность фотонов значительно меньше термодинамически равновесной, при которой третье и четвёртое слагаемые в правой части уравнения (10) равны друг другу. Таким образом, в оптически тонкой плазме  $k_{\phi,i} n_a \ll k_{\phi,p} n_i n_e$  и третьим слагаемым можно пренебречь по сравнению с четвёртым.

При не очень большой плотности плазмы можно также пренебречь тройной рекомбинацией по сравнению с фоторекомбинацией, т. е. пренебречь вторым слагаемым по сравнению с четвёртым. Это можно сделать, если

$$n_e \ll k_{\phi,p} / k_{y,p}. \quad (11)$$

Тогда равновесная концентрация электронов и ионов определяется *уравнением Эльверта* (G. Elwert, 1952 [118])

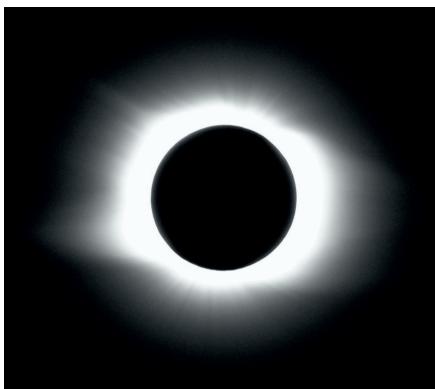
$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{k_{y,i}}{k_{\phi,p}}. \quad (12)$$

Оно получается из сравнения оставшихся (первого и четвёртого) слагаемых в правой части уравнения (10). Это так называемое *корональное равновесие*. Оно осуществляется в солнечной короне (рис. 1), где степень ионизации не зависит от плотности плазмы, как это следует из уравнения Эльверта.

Солнечная корона представляет собой разреженную плазму с плотностью  $10^6$ – $10^{10}$  см<sup>-3</sup> и температурой до 200 эВ. Поскольку  $T_e \gg J_Z$ , ударная ионизация происходит преимущественно из основного состояния, и для вычисления  $k_{y,i}$  нужно выбрать формулу (10.8). Процесс фоторекомбинации также идёт преимущественно с захватом электрона в основное состояние, поэтому нужно выбрать формулу (6). Учитывая также, что солнечная корона состоит преимущественно из водорода, примем  $Z = 1$ . В результате получаем уравнение

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{k_{y,i}^{(1)}}{k_{\phi,p}^{(1)}} \sim \frac{0,1}{\alpha^3} \frac{T_e}{J}, \quad (13)$$

из которого следует, что почти все атомы ионизованы.



**Рис. 1.** Солнечная корона при полном солнечном затмении, Новосибирск, 1 августа 2008 г. Солнечная корона простирается от фотосфера — видимой поверхности Солнца; верхняя граница солнечной короны достоверно не установлена. В составе солнечной короны преобладают водород и гелий. Фото Irrrbis.

### §11.4. Отрицательные ионы

Атомы и молекулы некоторых газов могут захватывать электроны, образуя отрицательные ионы — *анионы* (англ. anions). Такие газы называют *электроотрицательными*. С точки зрения квантовой теории отрицательный ион — это слабосвязанное состояние. Энергия такого состояния  $\varepsilon_-$  отрицательна, как и у других связанных состояний электрона в атоме. Энергию связанного состояния, взятую со знаком минус, вообще говоря, называют энергией связи, но в применении к лишнему электрону в отрицательном ионе её чаще называют *энергией сродства к электрону* или, ещё проще, *сродством к электрону* (англ. electron affinity) и обозначают  $\mathcal{E}_{ea} = -\varepsilon_-$ .

Энергия сродства у атомов варьируется в интервале от долей электронвольта до трёх с лишним электронвольт согласно экспериментальным данным, которые представлены в таблице 1. Наибольшим сродством к электрону обладают атомы кислорода (O) и галогенов (фтор F, хлор Cl, бром Br, йод I), а также молекулы, содержащие эти атомы. Самая большая энергия сродства  $\mathcal{E}_{ea} = 3,61$  эВ наблюдается у атома хлора Cl, но и она меньше самого низкого потенциала ионизации — потенциала ионизации атома цезия Cs, который равен  $J = 3,89$  эВ. Сравнительно недавно были обнаружены молекулы с очень высокими значениями сродства к электрону: гекса-, пента- и тетрафториды переходных металлов. Наибольшим из известных в настоящее время значений сродства к электрону обладает гексафторид платины PtF<sub>6</sub> ( $\mathcal{E}_{ea} = 7,00 \pm 0,35$  эВ).

Не все атомы и молекулы могут образовывать отрицательные ионы. К числу таких исключений в первую очередь относятся атомы, у кото-

**Таблица 1.** Сродство к электрону некоторых атомов и молекул в основном состоянии (эВ)

$\text{H}^-$	0,754	$\text{He}^-$	-0,52	$\text{Li}^-$	0,618	$\text{Be}^-$	-0,19
$\text{B}^-$	0,277	$\text{C}^-$	1,226	$\text{N}^-$	-0,007	$\text{O}^-$	1,461
$\text{F}^-$	3,401	$\text{Ne}^-$	-0,55	$\text{Na}^-$	0,548	$\text{Mg}^-$	-0,32
$\text{Al}^-$	0,433	$\text{Si}^-$	1,385	$\text{P}^-$	0,746	$\text{S}^-$	2,077
$\text{Cl}^-$	3,613	$\text{K}^-$	0,502	$\text{Ca}^-$	-0,025	$\text{Sc}^-$	0,188
$\text{Ti}^-$	0,084	$\text{V}^-$	0,525	$\text{Cr}^-$	0,676	$\text{Mn}^-$	-1,07
$\text{Fe}^-$	0,163	$\text{Co}^-$	0,662	$\text{Ni}^-$	1,157	$\text{Cu}^-$	1,236
$\text{Br}^-$	3,364	$\text{I}^-$	3,059	$\text{Cs}^-$	0,472	$\text{Pt}^-$	2,125
$\text{C}_2^-$	3,269	$\text{F}_2^-$	3,08	$\text{Cl}_2^-$	2,25	$\text{Br}_2^-$	2,53
$\text{O}_2^-$	0,450	$\text{I}_2^-$	2,524	$\text{Cs}_2^-$	0,520	$\text{OH}^-$	1,828
$\text{H}_2\text{O}^-$	0,9	$\text{CO}_2^-$	0,645	$\text{NO}_2^-$	2,73	$\text{NO}_3^-$	3,70
$\text{SO}_2^-$	1,07	$\text{SF}_6^-$	1,03	$\text{UF}_6^-$	5,06	$\text{PtF}_6^-$	7,00

рых заполнена электронная оболочка. Например, если к атому гелия (He) или неона (N) добавить лишний электрон, возникнет квантовое состояние с положительной энергией. Энергия связи такого *автоионизационного состояния* формально отрицательна, как показано в таблице 1. На рисунке 9.1 (на с. 131) оно попадает в область сплошного спектра. Чтобы разрушить автоионизационное состояние, не нужно затрачивать дополнительную энергию, поэтому оно не может существовать продолжительное время.

Особое место в семействе анионов занимает отрицательный ион водорода  $\text{H}^-$ . У него имеется даже специальное название — *гидрид-ион*. Теория гидрид-иона разработана настолько детально, что энергия сродства вычислена с точностью, превышающей точность измерений. Отрицательные ионы водорода используют в источниках нейтральных атомов, которые разрабатываются для нагрева плазмы в термоядерном реакторе.

Чаще всего отрицательные ионы имеют только одно — основное — состояние. Достоверно известно, что отрицательный ион кремния Si имеет три возбуждённых состояния, отрицательные ионы углерода C, алюминия Al, скандия Sc, иттербия Yb имеют по два возбуждённых со-

стояния. Теория предсказывает, что отрицательный ион водорода имеет одно возбуждённое состояние, однако экспериментально оно не обнаружено.

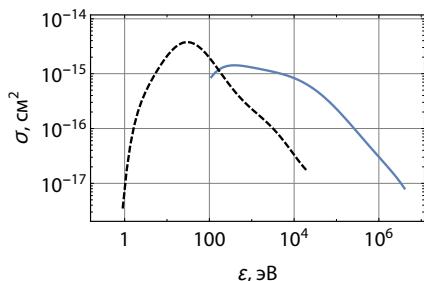
Плазма, состоящая из положительных и отрицательных ионов, характеризуется малой электрической проводимостью по сравнению с плазмой, состоящей из положительных ионов и электронов. Это связано с низкой подвижностью отрицательных ионов по сравнению с электронами. Тем самым превращение электронов в отрицательные ионы в плазме существенно изменяет её свойства. Этот факт используется в системах защиты высоковольтных электрических систем. Электрический пробой в таких системах начинается с образования свободных электронов, размножение которых в электрическом поле приводит к пробою. Чтобы избежать пробоя, в газ добавляют небольшую примесь электроотрицательных молекул, которые поглощают электроны, превращаясь в отрицательные ионы.

Отрицательные ионы являются носителями отрицательного заряда в нижних слоях земной атмосферы, вплоть до так называемого D-слоя ионосферы, расположенного на высоте 80–100 км над поверхностью Земли. Излучение Солнца в оптической области спектра формируется в процессе радиационного прилипания электронов к атомам водорода с образованием отрицательных ионов водорода. Этот процесс осуществляется в фотосфере – узкой области солнечной атмосферы, которая располагается на расстоянии примерно 700 тысяч километров от центра Солнца.

### §11.5. Процессы образования отрицательных ионов

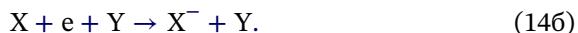
Процесс присоединения электрона атомом или молекулой называют *прилипанием* или *захватом*, а обратный процесс *отрывом*. Процессы образования отрицательных ионов имеют определённое сходство с рекомбинацией положительных ионов, а процессы разрушения отрицательных ионов имеют много общего с ионизацией атомов. Поэтому терминология, используемая для описания этих процессов, также имеет очевидное сходство.

В плотном газе и при низких энергиях электронов образование отрицательных ионов наиболее эффективно происходит за счёт процессов *прилипания* (англ. electron attachment) в тройных столкновениях, при-



**Рис. 2.** Сечение отрыва электрона от отрицательного иона водорода при столкновениях с атомами водорода (сплошная линия) и электронами (штриховая линия) в зависимости от энергии налетающей частицы (атома или электрона) [113].

чём третьей частицей может быть как электрон, так и другой атом:



Процесс (14a) имеет значительную скорость реакции лишь при достаточно большой плотности электронов. Если же степень ионизации газа мала, более высокую скорость реакции показывают тройные столкновения с участием двух атомов и электрона в процессе (14b).

Обратные процессы *ударного отрыва* (англ. impact detachment)



ведут к нейтрализации отрицательных ионов. Как показано на рисунке 2, сечения этих реакций могут на 1–2 порядка превышать значение  $\pi a_B^2$ , типичное для процессов с участием атомов. Скорости прямых реакций (14) в тройных столкновениях пропорциональны кубу плотности и при увеличении плотности растут быстрее, чем скорости обратных реакций (15), которые пропорциональны квадрату плотности. Отсюда следует, что доля отрицательных ионов тем выше, чем больше плотность газа.

В газоразрядной плазме, а также в слабоионизованном газе, где средняя энергия электрона значительно превышает тепловую энергию частиц газа, эффективный процесс образования отрицательного иона проходит по схеме



в которой молекула XY диссоциирует на составляющие её атомы X и Y, один из которых захватывает электрон, разрушивший молекулу. Этот

процесс называется *диссоциативным прилипанием* (англ. dissociative electron attachment) и носит резонансный характер, что связано с образованием промежуточного короткоживущего комплекса. При сближении электрона с молекулой происходит образование отрицательного молекулярного иона  $XY^-$  в автоионизационном состоянии. Это состояние самопроизвольно распадается на электрон и молекулу, и тогда прилипание не происходит. Однако возможен и другой вариант развития событий, когда энергия, запасённая в промежуточном комплексе, затрачивается на диссоциацию молекулы. В этом случае итогом столкновения электрона с молекулой является образование атомарного отрицательного иона  $X^-$  и атома Y.

*Радиационный захват* (англ. radiative electron attachment) электрона к атому или молекуле называют также фотозахватом (англ. photoattachment). Он происходит по схеме



и завершается излучением фотона, который уносит избыток энергии. Из закона сохранения энергии следует, что энергия фотона равна сумме кинетической энергии электрона и энергии сродства атома к электрону, поэтому фотозахват определяет свечение слабоионизованной плазмы в той части спектра, где энергия фотона превышает энергию сродства атома к электрону. При этом интенсивность свечения за счёт данного процесса существенно выше, чем тормозное излучение при рассеянии электронов на этих атомах.

Процесс радиационного захвата электрона к атому имеет очень малое сечение. Проводя аналогию с процессом фоторекомбинации положительных ионов, можно ожидать, что это сечение по порядку величины равно  $\sigma_{\text{ф.п.}} \sim \pi \alpha^3 a_B^2 \sim 3 \cdot 10^{-23} \text{ см}^2$ . На самом деле для атома водорода оно не превышает  $6 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ , поэтому фотозахват играет заметную роль в производстве отрицательных ионов только в разреженных газах, где скорость образования отрицательных ионов в тройных столкновениях (14) становится очень малой (она пропорциональна кубу, а в реакции (17) – квадрату плотности). В обратном процессе *фотоотрыва* электрона (англ. electron photodetachment)



отрицательный ион поглощает фотон, теряет лишний электрон и превращается в нейтральный атом. Фотоотрыв отвечает за образование сво-

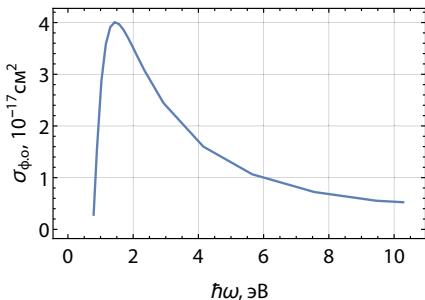


Рис. 3. Сечение фотоотрыва электрона от отрицательного иона водорода в зависимости от энергии фотона [119].

бодных электронов в газе, содержащем отрицательные ионы. Как показано на рисунке 3, сечение фотоотрыва  $\sigma_{\text{ф.о}}$  имеет максимум при энергии фотона, немного превышающей пороговую (которая равна энергии сродства). По порядку величины  $\sigma_{\text{ф.о}} \sim 10^{-17}\text{--}10^{-16} \text{ см}^2$ , т. е.  $\sigma_{\text{ф.о}} \sim \pi a_{\text{в}}^2$ .

Процесс фотозахвата характерен для явлений, происходящих в верхней атмосфере Земли и Солнца. В атмосфере Земли на высоте до 100 км отрицательный заряд ночью связан с отрицательными ионами, тогда как днём в результате процесса фотоотрыва (18) там образуются свободные электроны, что изменяет проводимость на этих высотах, и из-за этого отличаются условия дальнего радиоприема на коротких волнах днём и ночью.

Излучение Солнца видимого света в диапазоне длин волн от 4000 Å до 7500 Å формируется в фотосфере Солнца в процессе фотоприлипания электрона к атому водорода с образованием отрицательного иона водорода. Фотосфера представляет собой сравнительно узкий слой атмосферы Солнца, который служит основным источником его излучения. Фотосфера существенно непрозрачна, она поглощает и затем переизлучает энергию, поступающую из недр звезды. Толщина фотосферы оценивается в 300 км, её расстояние от центра Солнца составляет около 700 тыс. км. Фотосфера заполнена относительно плотной плазмой. Плотность атомов водорода в ней равна примерно  $10^{17} \text{ см}^{-3}$ , температура этой плазмы около 6000 К, плотность электронов составляет  $2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , а плотность отрицательных ионов водорода равна  $2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ . Вследствие высокой плотности плазмы, несмотря на уход излучения из фотосферы, в ней поддерживаются равновесные условия, которые оправдывают применение уравнения Саха для расчёта концентраций атомов, электронов, положительных и отрицательных ионов (задача 6). Процесс фотоприлипания с образованием отрицательных ионов играет важную роль в формировании излучения Солнца, но практически не влияет на концентра-

цию ионов, а присутствие отрицательных ионов в фотосфере Солнца не отражается на свойствах плазмы.

В лабораторных условиях получение отрицательных ионов для технологических приложений основано на физических процессах с участием атомов цезия Cs. Например, при поверхностной ионизации в плазму вводится цезиевый электрод, на котором происходит гидратизация (связывание водорода с цезием) с последующей диссоциацией



Цезий используется потому, что он имеет самую низкую энергию ионизации.

## Литература

В книге [Б. М. Смирнова](#) «Физика слабоионизованного газа в задачах с решениями» [116], собраны простые теоретические модели разных атомных и радиационных процессов в низкотемпературной плазме.

Теория фоторекомбинации и фотоионизации изложена в «Квантовой электродинамике» [В. Б. Берестецкого, Е. М. Лифшица](#) и [Л. П. Питаевского](#) [61, §56], а также в работах [В. М. Каткова, В. М. Страховенко, А. И. Мильштейна, И. А. Котельникова](#) [99, 108–110]. Статьи [В. И. Когана](#) и [В. С. Лисицы](#) [104, 105] дополняют эти публикации.

## Задачи и вопросы

**Задача 1.** Вычислите скорость фоторекомбинации. [Решение](#) ⇒ 324

**Задача 2.** Оцените энергию сродства в отрицательном ионе водорода. [Решение](#) ⇒ 325

**Задача 3.** Объясните, почему сечения фотоприлипания и фотоотрыва отличаются на много порядков величины. [Решение](#) ⇒ 326

**Задача 4.** Уточните условие (11) при  $T_e \gg J_Z$  и оцените отношение  $n_i/n_a$  в солнечной короне. [Решение](#) ⇒ 326

**Задача 5.** Вычислите статвес гидрид-иона. [Решение](#) ⇒ 326

**Задача 6.** Найдите соотношение между плотностями электронов, отрицательных ионов и атомов водорода в фотосфере Солнца. [Решение](#) ⇒ 327

## Лекция 12

# Термоядерные реакции

---

Физика ядерных реакций. Топливные циклы.  
Кулоновский барьер. Термоядерное горение.  
Критерий Лоусона. Тройное произведение.  
Управляемый термоядерный синтез.

### §12.1. Физика ядерных реакций

В периодической системе Д. И. Менделеева химические элементы расположены в порядке возрастания числа протонов в ядрах атомов. Ядра каждого следующего элемента имеют на один протон больше, поэтому их электрический заряд больше, чем у предшествующего элемента, на величину одного элементарного заряда  $e$ . Химические свойства химических элементов определяются структурой электронной оболочки атомов, а она в конечном итоге фиксируется зарядом ядер, так как в электрически нейтральном атоме число отрицательно заряженных электронов в точности равно числу положительно заряженных протонов.

Помимо протонов ядра атомов содержат электрически нейтральные нейтроны. Число нейронов в ядрах атомов одного и того же химического элемента варьируется в некоторых пределах вокруг среднего значения, которое при переходе к каждому следующему элементу в периодической таблице растёт несколько быстрее числа протонов  $Z$  в ядре. Ядра с одинаковым  $Z$ , но с разным числом нейронов относят к разным изотопам одного химического элемента. Отдельный изотоп характеризуется *атомным весом*  $A$ , который, по определению, принятому в ядерной физике, равен количеству нуклонов в ядре, т. е. сумме числа протонов и нейронов. В химии атомным весом называют другую величину, поскольку химические свойства различных изотопов одного элемента, за редкими исключениями, почти не различаются. Несколько упрощая, можно сказать, что «химический» атомный вес — это среднее значение

числа нуклонов в ядрах одного элемента с учётом распространённости различных изотопов этого элемента в природе.

Нуклоны в ядрах атомов удерживаются ядерными силами, которые обеспечивают стабильность ядер, компенсируя кулоновское расталкивание протонов. Ядерные силы столь велики, что на несколько десятых долей процента уменьшают массу ядра по сравнению с суммой масс составляющих его нуклонов. Это уменьшение называют *дефектом массы*. Для ядра с массой  $m$ , атомным номером  $Z$  и атомным весом  $A$  дефект массы вычисляется по формуле

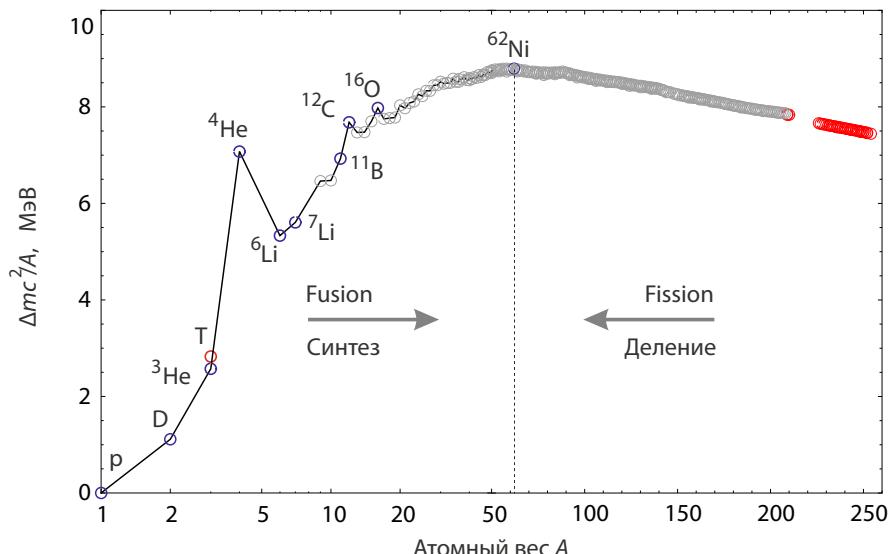
$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m.$$

Массы протона  $m_p$  и нейтрона  $m_n$  приблизительно равны, отличаясь на величину, до 10 раз меньшую, чем дефект масс в расчёте на один нуклон. Дефект массы возникает из-за того, что ядро находится в состоянии с меньшей энергией, чем составляющие его нуклоны, когда они не упакованы в ядро. Энергия связи  $\Delta m c^2$  пропорциональна дефекту массы, она варьируется от элемента к элементу и от изотопа к изотопу.

Если два лёгких ядра сливаются в одно ядро большего размера, дефект массы которого больше суммы дефектов масс прореагировавших ядер, соответствующая разность энергии связи высвобождается в виде кинетической энергии продуктов *реакции ядерного синтеза*. Для преодоления кулоновского отталкивания сливающиеся ядра должны иметь большую энергию (см. ниже), которая естественным образом достигается при нагреве плазмы до очень большой температуры. В связи с этим ядерные реакции синтеза часто называют *термоядерными реакциями*. Термоядерные реакции с выделением энергии являются *экзотермическими*. Существуют также *эндотермические реакции* синтеза, которые идут с поглощением энергии.

Похожая ситуация имеет место в *реакциях деления ядер*, когда тяжёлое ядро расщепляется на более лёгкие осколки. Если суммарная энергия связи осколков превышает энергию связи исходного ядра, она выделяется в виде кинетической энергии осколков, а реакция является *экзотермической*.

График энергии связи  $\Delta m c^2$  в расчёте на один нуклон в зависимости от числа нуклонов  $A$  в ядре приведён на рисунке 1. Для ядра *протия*<sup>1</sup>H с атомным весом  $A = 1$  (водород-1), состоящего из одного протона  $p$ , энергия связи равна нулю. Затем она быстро увеличивается с ростом  $A$ , достигая широкого максимума на уровне 8,8 МэВ на один нуклон в районе железа <sup>58</sup>Fe и никеля <sup>62</sup>Ni, и затем слегка уменьшается. Для самых тя-



**Рис. 1.** Энергия связи ядер в расчёте на один нуклон в зависимости от атомного веса. Шкала  $A$  логарифмическая в диапазоне 1–50 кэВ и линейная выше 50 кэВ. Показаны стабильные изотопы, тритий и долгоживущие изотопы с временем жизни больше года и атомным весом больше 208.

жёлых ядер  $\Delta m c^2/A \approx 7,5$  МэВ. Особенно стоит отметить высокое значение  $\Delta m c^2/A$  для ядра  $^4\text{He}$  (гелий-4), которое также называют  $\alpha$ -частицей. Изотоп  $^2\text{H}$  (водород-2), известный так же как дейтерий, обозначают буквой D. Водород-3  $^3\text{H}$  называют тритием и обозначают буквой T. Существуют и более тяжёлые изотопы водорода (вплоть до  $^6\text{H}$ ), но они очень неустойчивы и быстро распадаются на составные части.

Реакции деления ядер элементов тяжелее железа, таких как уран  $^{235}\text{U}$  или плутоний  $^{239}\text{Pu}$ , используются в атомных реакторах для производства электроэнергии и в атомных бомбах. Реакции ядерного синтеза протекают в звёздах, где водород перерабатывается сначала в гелий, а затем в ещё более тяжёлые элементы.

Энергия, выделяемая в ядерных реакциях, значительно больше, чем в химических реакциях, поскольку энергия связи, которая удерживает нуклоны в ядре, примерно в миллион раз больше, чем энергия, которая привязывает электроны к ядру. Например, при рекомбинации электрона на основной уровень атома водорода высвобождается энергия, рав-

ная энергии ионизации  $J = 13,6$  эВ, тогда как при слиянии ядра трития T с ядром дейтерия D выделяется  $\Delta m c^2 = 17,6$  МэВ. Если отвлечься от огромной разницы в порядке величин, то в остальном между ядерными и химическими реакциями имеется очевидная аналогия. Энергии ионизации можно сопоставить химический дефект масс  $J/c^2$ . Это означает, что масса атома меньше суммы масс ядра и связанных электронов. Однако это уменьшение ничтожно даже по сравнению с массой электрона, тогда как ядерный дефект масс в максимуме приближается к 1% массы ядра.

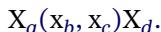
Факт существования дефекта масс обнаружил Фрэнсис Астон (Francis Aston). Он изобрёл масс-спектрометр, измерил массы многих изотопов и в 1919 году предположил, что синтез изотопов водорода с образованием гелия должен сопровождаться выделением огромной энергии [120].

## §12.2. Топливные циклы

В большинстве реакций ядерного синтеза два ядра ( $X_a$  и  $X_b$ ) сливаются, образуя более тяжёлое ядро ( $X_d$ ) и лёгкую частицу ( $X_c$ ). Такая реакция записывается как



либо



Законы сохранения энергии и импульса запрещают слияние двух ядер с образованием только одного ядра без испускания второй частицы, но разрешают возникновение трёх частиц. Например, при слиянии двух ядер трития в реакции  $T(t, nn)^4\text{He}$  образуются  $\alpha$ -частица и два нейтрона.

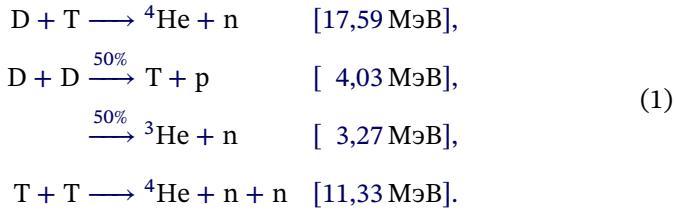
### DT цикл

По свидетельству Л. А. Арцимовича [122], в конце 1950 года А. Д. Сахаров и И. Е. Тамм сформулировали идею магнитного термоядерного



**Рис. 2.** Взрыв первого термоядерного устройства Айви Майк (Ivy Mike), осуществлённый США 31 октября 1952 года на атолле Эниветок (Enewetak) в Тихом океане. Устройство, спроектированное по схеме Э. Теллера (Edward Teller) и С. Улама (Stanisław Ulam), не было пригодно для боевого применения из-за больших размеров и криогенной системы охлаждения жидкого дейтерия, но было в 1000 раз мощнее атомной бомбы, брошенной на Хиросиму. Первая водородная бомба РДС-6с, испытанная в СССР 12 августа 1953 года на Семипалатинском полигоне, соответствовала 30 «Хиросимам» и была спроектирована по схеме А. Д. Сахарова в виде чередующихся сферических слоев термоядерного топлива и природного урана, окруженных химическим взрывчатым веществом. Для увеличения доли сгоревшего дейтерия «слойка» была окружена оболочкой из природного урана, который при взрыве сжимал дейтерий, увеличивая скорость термоядерной реакции, и одновременно делился под действием быстрых нейтронов. Эта «первая идея» — ионизационное обжатие дейтерия — была существенно дополнена В. Л. Гинзбургом «второй идеей», состоящей в использовании твёрдого дейтерида лития-6 [121]. Всего в мире к сегодняшнему дню взорвано более 2 000 ядерных и термоядерных зарядов, из них около 500 — в воздухе. Фото United States Department of Energy.

реактора, работающего на смесидейтерия и трития:



Похожие реакции протекают при взрыве водородной бомбы (рис. 2). Суммарная энергия  $\mathcal{E}_{\text{fus}} = \Delta m c^2$ , выделяемая в каждой реакции, указана в скобках в правой части схемы (1). В тех реакциях, где образуются две частицы, законы сохранения однозначно определяют энергию каждого продукта реакции (задача 1). Она распределяется обратно пропорционально массе частиц. Например, в реакции  $T(d, n){}^4\text{He}$  нейtron уносит энергию  $\mathcal{E}_n = 14,1 \text{ МэВ}$  ( $4/5$  от  $\mathcal{E}_{\text{fus}}$ ), а  $\alpha$ -частица —  $\mathcal{E}_{\text{ch}} = 3,5 \text{ МэВ}$  ( $1/5$  от  $\mathcal{E}_{\text{fus}}$ ). При большем числе продуктов, как в реакции  $T(t, nn){}^4\text{He}$ , можно указать диапазон энергий каждого продукта (задача 2).

В смесидейтерия с тритием при энергии ядер менее 100 кэВ заметно быстрее других протекает реакция  $D(t, n){}^4\text{He}$ . Вероятности альтернативных каналов  $D(d, p)T$  и  $D(d, n){}^3\text{He}$  реакции  $D+D$  примерно одинаковы. Помимо этих двух основных, существуют и другие каналы, не указанные в перечне (1). Так, при слиянии двух ядердейтерия могут образовываться основной изотоп гелия  ${}^4\text{He}$  и фотон  $\gamma$ , но скорость реакции  $D(d, \gamma){}^4\text{He}$  на семь порядков меньше, чем  $D(d, p)T$  или  $D(d, n){}^3\text{He}$  (задача 9). Продукты реакций вступают во вторичные реакции, порождая сложные цепочки (циклы) реакций.

Дейтерий был открыт в конце 1931 года Гарольдом Уреем (Harold Urey) [123]. Вместе с другими сотрудниками Колумбийского университета из 5 литров сжиженного водорода он выделил 1 миллилитр жидкости и с помощью масс-спектрометра показал, что она содержит очень малое количество изотопа водорода с атомным весом 2. Тогда, за год до открытия нейтрона Джеймсом Чедвиком (James Chadwick), это вызвало шок в научном сообществе, хотя поисками тяжелого водорода были заняты несколько групп исследователей.

Далее события развивались с поразительной быстротой и преимущественно в Кавендишской лаборатории Оксфордского университета, которой тогда руководил Эрнест Резерфорд (Ernest Rutherford).

Ядерные реакции с участием изотопов водорода впервые наблюдали Джон Кокрофт (John Cockcroft) и Эрнест Уолтон (Ernest Walton) в 1932 году [124, 125]. Они бомбардировали пучком протонов с энергией выше 100 кэВ образцы лития, окруженные сцинтиллятором, и, предположительно, обнаружили гелий в продуктах реакции. Это явление тогда было названо *трансмутацией ядер*.

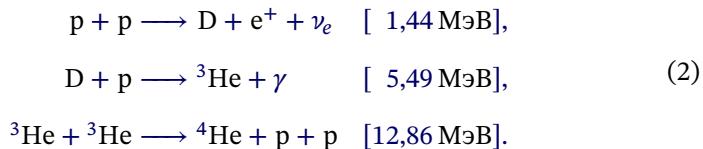
Получив полмиллилитра тяжёлой воды, Марк Олифант (Markus Oliphant) и Пауль Хартек (Paul Harteck) сообщили об открытии реакций синтеза в статье [126], опубликованной двумя годами позже. Они предположили, что наблюдаемое ими явление суть равновероятные реакции D(d, p)T и D(d, n)<sup>3</sup>He, хотя тритий и гелий-3 до того времени не были известны.

В лаборатории Резерфорда предполагали, что ядро трития нестабильно, но только в 1939 году его радиоактивность окончательно была доказана Луисом Альваресом (Luis Alvarez) и Робертом Корногом (Robert Cornog) [127].

### Астрофизические циклы

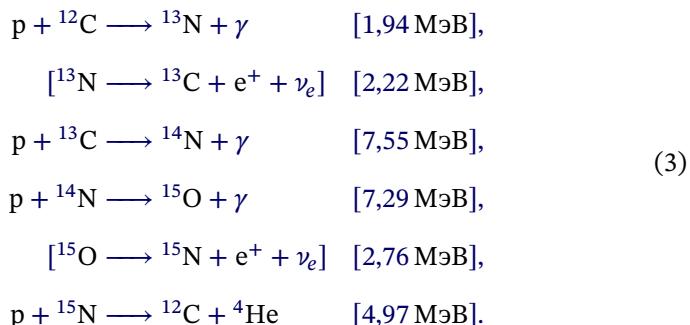
Излучая свет миллиарды лет, Солнце и другие звёзды черпают энергию из термоядерных реакций, перерабатывая водород в гелий. Имеются две основные цепочки реакций, и обе сопровождаются превращениями протонов в нейтроны с образованием нейтрино  $\nu_e$ .

В Солнце доминирует водородный (pp) цикл:



Наличие нейтрино  $\nu_e$  и фотонов  $\gamma$  в продуктах реакций свидетельствует, что в синтез новых ядер вовлечено электрослабое взаимодействие; следовательно, сечения этих реакций чрезвычайно малы.

В более тяжёлых звёздах преобладает углеродный (CNO) цикл, в котором углерод <sup>12</sup>C выступает в качестве катализатора (а не расходного материала):



В квадратных скобках здесь указаны реакции бета-распада радиоактивных (неустойчивых) изотопов.

Гипотезу об энергии связи ядер как источнике излучения звёзд высказал Артур Эддингтон ([Arthur Eddington](#)) в 1920 году [128] вслед за открытием Фрэнсиса Астона ([§12.1](#)). По прошествии ста лет частные подробности рассуждений Эддингтона кажутся наивными, но они были благожелательно восприняты его современниками, так как уже тогда было ясно, что никакие иные источники энергии не могут объяснить свечение звёзд на протяжении миллиардов лет. Предположение о ключевой роли pp-цикла в энергетике Солнца высказал фон Вейцзеккер ([Carl von Weizsäcker](#)) в 1937 году [129, 130]. Через два года Ганс Бете ([Hans Bethe](#)) заложил основы теории CNO-цикла производства энергии в звёздах [131].

### Анейтронные циклы

В реакции  $T(d, n)^4\text{He}$  нейтроны уносят 80% выделившейся энергии, так как  $\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{\text{fus}} = 4/5$  (таблица 1). Взаимодействуя с элементами конструкции реактора, нейтроны образуют радиоактивные продукты во вторичных реакциях. Кроме того, нейтронное излучение вызывает смещение атомов в кристаллической решётке и ядерные реакции трансмутации, которые изменяют состав материалов. Основную роль здесь играют реакции  $X_a(n, \alpha)X_d$ , которые приводят к появлению микропузьрков гелия, вызывая радиационное распухание материала, открытые Которном (C. Cawthorne) и Фултоном (E. J. Fulton) [132]. При больших дозах нейтронного облучения конструкционные материалы становятся хрупкими и теряют прочность. Если не будут найдены материалы, стойкие к нейтронному облучению, термоядерный реактор, работающий на смесидейтерия и трития, будет производить радиоактивные отходы в большом количестве, как и реактор деления. Однако состав отходов будет различным.

В реакторе деления каждый акт ядерного распада сопровождается эмиссией примерно двух нейтронов и выделением энергии 200 МэВ, преимущественно в виде кинетической энергии ядерных осколков деления. Основная доля остаточной активности содержится в радиоактивных отходах, а наведённая нейтронами радиационная активность элементов конструкции представляет относительно меньшую опасность.

В термоядерном DT-реакторе складывается иная ситуация. Радиоактивное отработанное топливо теперь отсутствует, но при равной мощности реактора активация элементов конструкции будет существенно выше по двум причинам. Во-первых, в одном акте ядерного синтеза выделяется энергия примерно в 10 раз меньше, чем в одном акте ядерного

**Таблица 1.** Коэффициенты активации при использовании различных видов ядерного топлива.

Топливо	$Z$	$\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle$ , МэВ	$\langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle$ , МэВ	$\langle \mathcal{E}_{\text{n}} \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle$
DT	1 + 1	17,6	3,5	0,80
DD	1 + 1	14,4	8,9	0,38
D <sup>3</sup> He	1 + 2	20,0	18,9	0,05
p <sup>11</sup> B	1 + 5	8,7	8,7	~0,002

распада, поэтому в DT-реакторе поток нейтронов будет больше, чем в реакторе деления. Во-вторых, термоядерные нейтроны имеют существенно большую энергию, чем нейтроны деления, поэтому каждый термоядерный нейtron создаёт, вообще говоря, более значительную активацию. И всё-таки, по оценкам некоторых экспертов, суммарный экологический ущерб от DT-реактора будет меньше, чем от реактора деления, так как радиоактивность термоядерного реактора снижается до безопасного уровня за сравнительно небольшой срок — менее чем за 100 лет [133]. Тем не менее это не решает проблему радиоактивного заражения по существу, поэтому имеет смысл рассмотреть другие реакции синтеза, где нейтроны производятся в меньшем количестве.

Нейтроны не возникают в реакции синтезадейтерия с гелием-3:



Однако в смеси D и <sup>3</sup>He нейтроны образуются в цепочках реакций, начинающихся с D(d, p)T и D(d, n)<sup>3</sup>He. Более «чистой» является смесь бора-11 и протия. В реакции между ними образуются три  $\alpha$ -частицы:



С учётом всех других реакций, возможных в этой смеси, нейтроны уносят всего 0,2% выделившейся энергии [134], — меньше, чем при использовании любого другого вида ядерного топлива, представленного в таблице 1. В этой таблице приведены значения полной энергии  $\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle$ , энергии заряженных продуктов реакции  $\langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle$  и коэффициента активации  $\langle \mathcal{E}_{\text{n}} \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle = \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} - \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle$ , рассчитанные с учётом вторичных реакций топливных циклов. В смеси дейтерия и трития почти все нейтроны возникают в первичной реакции T(d, n)<sup>4</sup>He, поскольку сечения ре-

акций  $T(t, nn)^4\text{He}$  или  $D(d, n)^3\text{He}$  существенно меньше; поэтому средние значения  $\langle E_{\text{fus}} \rangle$  и  $\langle E_{\text{ch}} \rangle$  почти равны величине  $E_{\text{fus}}$  и  $E_{\text{ch}}$  в реакции  $T(d, n)^4\text{He}$ . Примеры вычисления коэффициента активации с учётом вторичных реакций имеются в задачах 3 и 4.

Реакции, в которых нейтроны уносят не более процента выделившейся энергии, называют *анейтронными* (aneutronic) или безнейтронными. Под это определение подходит смесь бора-11 и водорода-1, но и смесь дейтерия с гелием-3 можно считать анейтронной. Далее мы увидим, что для анейтронных реакций требуется существенно более высокая температура, чем для реакции дейтерия с тритием, а реактор при существующих технологических ограничениях должен иметь существенно большие размеры.

### Термоядерное топливо

*Протий*  $p$ , первый изотоп водорода  $^1\text{H}$ , является основным топливом природного термоядерного реактора в центре Солнца. Из-за очень малого сечения реакции  $p(p, e^+\nu_e)D$  попытки воспроизвести в чистом виде солнечный реактор на Земле обречены на провал.

*Дейтерий*  $D$ , второй изотоп водорода  $^2\text{H}$ , как и основной изотоп  $^1\text{H}$ , стабилен. Он содержится в обычной воде в виде молекул *полутяжёлой воды*  $\text{HDO}$ , где один атом протия замещён атомом дейтерия. Промышленность производит диоксид дейтерия  $\text{D}_2\text{O}$ , более известный под названием *тяжёлая вода*. В морской воде на 3 200 молекул  $\text{H}_2\text{O}$  приходится всего одна молекула  $\text{HDO}$ , что составляет 1 атом дейтерия на 6 400 атомов протия, но энергия, которую можно извлечь из литра морской воды, если выделить весь дейтерий и «сжечь» его в термоядерном реакторе, минимум в 200 раз больше теплотворной способности литра бензина (задача 5).

*Тритий*  $T$ , третий изотоп водорода  $^3\text{H}$ , бета-радиоактивен с периодом полураспада 12,32 года. Он расщепляется на гелий-3, электрон и антинейтрино в реакции



поэтому на Земле нет месторождений трития. Промышленный тритий получают, облучая литий быстрыми нейtronами в ядерных реакторах деления:



Образовавшийся медленный нейтрон может прореагировать с другим природным изотопом лития:



В результате получается положительный выход энергии, а на один быстрый нейтрон выходит более одного ядра трития.

Термоядерный реактор, работающий на смесидейтерия с тритием, будет потреблять дейтерий и литий, а производить инертный газ гелий. Для работы реактора необходимо очень небольшое количество лития и дейтерия. Например, реактор с тепловой мощностью 1 ГВт сжигает около 200 кг дейтерия и 650 кг лития в год (задача 6).

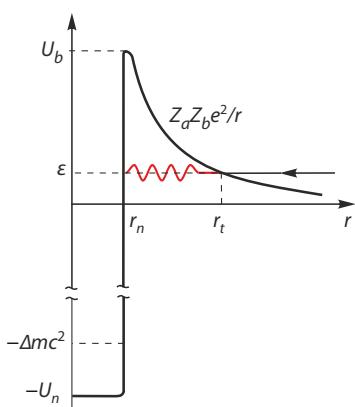
Если предположить, что все термоядерные электростанции будут иметь суммарную мощность 10 ТВт – примерно в 5 раз больше, чем сегодня производят все электростанции Земли,<sup>1</sup> – то потребление дейтерия и лития составит всего 2000 и 6500 тонн в год соответственно. Ресурсы такого типа реакторов ограничены запасами лития. Разведанные рудные запасы лития составляют 24 млн тонн. Этих запасов должно хватить на тысячу лет. Кроме того, литий содержится в морской воде в количестве, превышающем в тысячи раз разведанные рудные запасы (задача 7).

Запасы энергии дейтерия в воде мирового океана практически безграничны. При нынешнем уровне производства электроэнергии жителям нашей планеты их хватило бы на миллиарды лет (задача 7). Для сравнения можно указать, что Солнце превратится в звезду красный гигант через 5 миллиардов лет, поглотив при раздувании нашу планету.<sup>2</sup> Мировое производство дейтерия уже сейчас составляет десятки тысяч тонн в год. Однако создание термоядерного реактора, работающего на чистом дейтерии, при современном уровне развития технологий если и возможно, то заведомо неоправданно по экономическим причинам.

На Земле изотоп  ${}^3\text{He}$  почти отсутствует: его запасы не превышают 1 тонны. Однако на поверхности Луны гелий-3 обнаружен в значительном количестве. Там его запасы оцениваются в размере от 0,5 до 10 млн тонн. Кроме того, гелий-3 может производиться в реакторе, работающем на чистом дейтерии, существенным образом улучшая энергетический баланс этого реактора (задача 3).

<sup>1</sup> Интересно, что такую мощность имеют некоторые фемтосекундные лазеры.

<sup>2</sup> Глобальные катаклизмы, приводившие в прошлом почти к полному вымиранию животных и растений на Земле, случаются ещё чаще – примерно раз в 100–200 миллионов лет. В результате последней глобальной катастрофы вымерли динозавры.



**Рис. 3.** Потенциальная энергия взаимодействия ядер в зависимости от расстояния между ними. Отмечены кулоновский барьер  $U_b$ , потенциальная яма  $-U_n$ , классическая точка отражения  $r_t$  и радиус сильно-го взаимодействия  $r_n$ . Если энергия относи-тельного движения меньше высоты куло-новского барьера,  $\epsilon < U_b$ , сталкивающиеся ядра с некоторой вероятностью соединя-ются, проходя под потенциальным барь-ром благодаря квантовому эффекту тунне-лирования. Синтезированное ядро переходит на квантовый уровень с отрицатель-ной энергией  $-\Delta m c^2$ , при этом избыточная энергия  $\epsilon + \Delta m c^2$  выделяется в виде кинети-ческой энергии продуктов реакции.

### §12.3. Кулоновский барьер

Чтобы соединить два ядра с атомным весом  $A_a$  и  $A_b$ , их нужно сбли-зить на расстояние

$$r_n \simeq 1,44 \times 10^{-13} (A_a^{1/3} + A_b^{1/3}) [\text{см}],$$

примерно равное сумме радиусов ядер. На меньшем расстоянии начи-нают действовать ядерные силы, притягивающие нуклоны друг к другу. На большем расстоянии сближению ядер препятствует сила кулонов-ского отталкивания положительно заряженных ядер, создавая *кулонов-ский барьер*.

В рамках классической физики для преодоления кулоновского ба-рьера (рис. 3) сближающиеся ядра должны были бы иметь кинетиче-скую энергию больше его высоты

$$U_b = \frac{Z_a Z_b e^2}{r_n} \simeq \frac{Z_a Z_b}{A_a^{1/3} + A_b^{1/3}} [\text{МэВ}].$$

Для изотопов водорода ( $Z_{a,b} = 1, A_{a,b} = 1-3$ ) такая энергия соответствует температуре порядка четырёх–шести миллиардов градусов. Ещё более высокая температура требуется для синтеза с участием более тяжёлых ядер. Однако даже в центре звёзд температура плазмы не превышает нескольких десятков миллионов градусов.

Таблица 2. Сечение некоторых реакций ядерного синтеза.

Реакция	$\sigma_{10\text{ кэВ}}, \text{бн}$	$\sigma_{100\text{ кэВ}}, \text{бн}$	$\sigma_{\max}, \text{бн}$	$\varepsilon_{\max}, \text{кэВ}$
T(d, n) <sup>4</sup> He	$2,7 \times 10^{-2}$	3,4	5,1	65
D(d, p)T	$2,8 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-2}$	0,09	1000
D(d, n) <sup>3</sup> He	$2,8 \times 10^{-4}$	$3,7 \times 10^{-2}$	0,12	800
T(t, nn) <sup>4</sup> He	$9,6 \times 10^{-5}$	$3,4 \times 10^{-2}$	0,14	1050
<sup>3</sup> He(d, p) <sup>4</sup> He	$2,2 \times 10^{-7}$	$1,0 \times 10^{-1}$	0,82	262
<sup>6</sup> Li(p, <sup>3</sup> He) <sup>4</sup> He	$(6 \times 10^{-10})$	$2,8 \times 10^{-3}$	0,21	1530
<sup>11</sup> B(p, $\alpha\alpha$ ) <sup>4</sup> He	$(4,6 \times 10^{-17})$	$4,38 \times 10^{-4}$	0,8	573
p(p, e <sup>+</sup> $\nu_e$ )D	$(3,6 \times 10^{-26})$	$(4,4 \times 10^{-25})$		
<sup>12</sup> C(p, $\gamma$ ) <sup>13</sup> N	$(1,9 \times 10^{-26})$	$1,1 \times 10^{-10}$	0,00012	425

Согласно квантовой теории, синтез возможен при любой энергии сталкивающихся ядер из-за эффекта туннельного перехода под потенциальным барьером, открытого Георгием Гамовым (George Gamow, 1928 [135]). Однако сечение реакции экспоненциально мало, если энергия относительного движения ядер  $\varepsilon$  в системе центра масс мала по сравнению с энергией Гамова  $G$ :

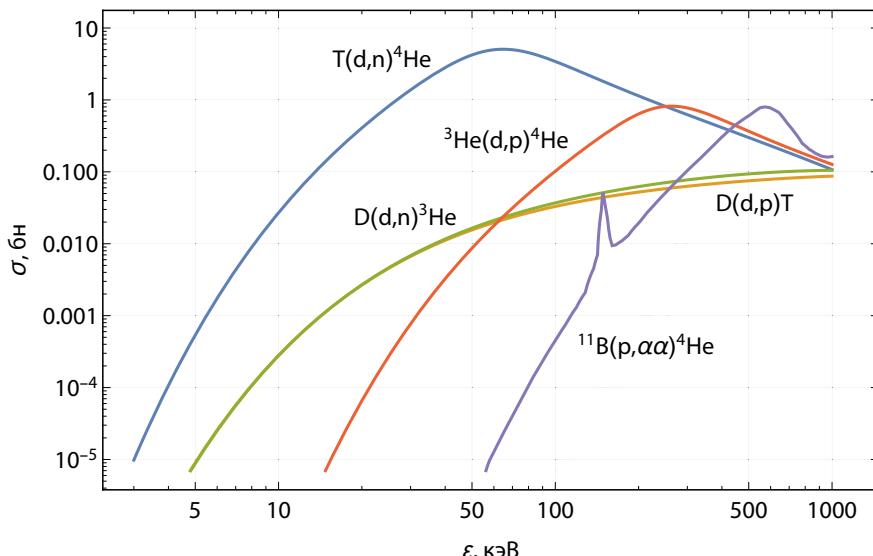
$$\sigma \sim \lambda_{ab}^2 \exp(-\sqrt{G/\varepsilon}). \quad (7)$$

Для пары ядер с массами  $m_a$ ,  $m_b$  и относительной скоростью движения  $v = |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|$  энергия относительного движения  $\varepsilon = \frac{1}{2}m_{ab}v^2$  пропорциональна приведённой массе  $m_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$ ,  $\lambda_{ab} = \hbar / (m_{ab}v)$  имеет смысл длины волны приведённой частицы, а энергия Гамова

$$G = 2\pi^2 m_{ab} e_a^2 e_b^2 / \hbar^2$$

с точностью до численного коэффициента совпадает с энергией ионизации для приведённой частицы в кулоновском поле (задача 8).

Сечения ядерных реакций измеряют в барнах:  $1 \text{ бн} = 10^{-24} \text{ см}^2$ . Величины сечений некоторых реакций ядерного синтеза приведены в таблице 2 при энергии 10 кэВ и 100 кэВ в системе центра масс; здесь указаны также максимальное сечение  $\sigma_{\max}$  и энергия  $\varepsilon_{\max}$ , при которой сечение максимально; в скобках приведены результаты расчётов в тех случаях, когда экспериментальные данные отсутствуют. Как видно из данных, приведённых в таблице 2, максимум сечения реакции T(d, n)<sup>4</sup>He



**Рис. 4.** Сечения некоторых реакций ядерного синтеза в зависимости от энергии в системе центра масс [136].

на порядок больше значения  $\pi r_n^2 \approx 0,5$  бн, которое можно было бы ожидать из простой оценки по величине радиуса действия  $r_n$  ядерных сил. Такая аномалия связана с тем, что реакция  $T(d, n)^4\text{He}$  носит резонансный характер, так как слияние ядердейтерия и трития происходит через образование долгоживущего (метастабильного) состояния. Резонансной также является реакция  ${}^3\text{He}(d, p){}^4\text{He}$ , но максимум её сечения смешён в сторону существенно большей энергии, как видно из рисунка 4. При энергии  $\epsilon$  до 200 кэВ сечение реакции  $T(d, n)^4\text{He}$  значительно больше сечений любых других реакций ядерного синтеза.

Реакции pp цикла в звёздах, сопровождающиеся превращением протона в нейтрон, идут за счёт слабого взаимодействия. Их сечения меньше на 20 с лишним порядков.

## §12.4. Параметры термоядерных реакций

Число событий реакции синтеза  $X_a(x_b, x_c)X_d$  в единице объёма за единицу времени выражается через константу скорости реакции  $\langle\sigma_{ab}v\rangle$  так же, как в любом элементарном процессе (лекция 10), где участвуют

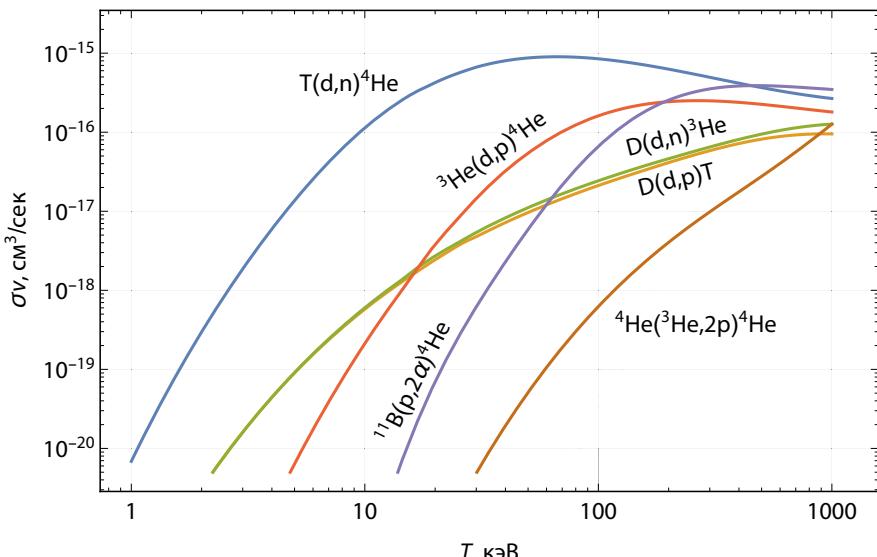


Рис. 5. Скорости некоторых реакций ядерного синтеза [136].

два сорта реагентов, т. е. ядер *a* и *b*, вступающих в первичную реакцию синтеза:

$$\left( \frac{\partial n_c}{\partial t} \right)_{\text{fus}} = \left( \frac{\partial n_d}{\partial t} \right)_{\text{fus}} = \frac{\langle \sigma_{ab} v \rangle}{1 + \delta_{ab}} n_a n_b. \quad (8)$$

Здесь  $v = |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|$  — относительная скорость реагирующих ядер, а угловые скобки означают усреднение по функциям распределения обоих реагентов (задача 10). Если оба ядра принадлежат к одному сорту ( $a = b$ ), как в реакции D + D, произведение  $n_a n_b$  нужно поделить на 2, чтобы не подсчитывать дважды одну и ту же пару частиц. В формуле (8) это сделано при помощи множителя  $1/(1 + \delta_{ab})$ , где символ Кронекера  $\delta_{ab}$  равен единице, если  $a = b$ , или нулю, если  $a \neq b$ .

Если функция распределения реагентов по скоростям является максвелловской и если температура не превышает нескольких десятков килоэлектронвольт, основной вклад в константу реакции  $\langle \sigma_{ab} v \rangle$  вносят надтепловые частицы с энергией, в несколько раз превышающей температуру. Это связано с тем, что сечение ядерных реакций синтеза в этой области энергий является быстро растущей функцией энергии. Графики зависимости  $\langle \sigma_{ab} v \rangle$  от  $\epsilon = \frac{1}{2} m_{ab} v^2$  для некоторых реакций приведены

на рисунке 5.

Реакция ядерного синтеза не имеет порога в точном смысле этого слова, но из-за малости сечений достаточное для практических применений число актов синтеза в единицу времени может быть получено лишь при достаточно высоких температурах в сотни миллионов градусов (десятки кэВ). При более низких температурах требуется сжатие рабочего вещества до огромных плотностей, превышающих плотность твёрдого тела, чтобы обеспечить ту же интенсивность реакции синтеза.

Вариант с высокой плотностью плазмы реализуется в ядрах звёзд. В центре Солнца плотность достигает  $160 \text{ г}/\text{см}^3$  ( $n_{\text{H}} \approx 6,6 \times 10^{25} \text{ см}^{-3}$ ) при относительно низкой температуре  $1,6 \times 10^7 \text{ К}$  (1,5 кэВ). Давление в центре Солнца в  $3 \times 10^{11}$  раза больше атмосферного. Такое давление невозможно получить в наземных устройствах стационарного действия, но развитие техники мощных лазеров и генераторов пучков заряженных частиц, в принципе, делает возможными импульсное сжатие и нагрев небольших твердотельных мишеней до состояния термоядерного горения. В этом состоит идея *инерциального термоядерного синтеза*.

Вариант с высокой температурой плазмы при относительно низкой плотности закладывают в проекты *магнитного термоядерного синтеза*, основанного на магнитном удержании плазмы. Чтобы успешно конкурировать с другими технологиями производства электрической энергии, термоядерный реактор должен иметь высокую удельную мощность.

Удельная мощность термоядерной реакции, т. е. мощность энерговыделения в расчёте на единицу объёма, получается умножением числа актов реакции синтеза (8) в единице объёма за единицу времени на энергию продуктов реакции  $\mathcal{E}_{\text{fus}}$ :

$$P_{\text{fus}} = \mathcal{E}_{\text{fus}} \frac{\langle \sigma_{ab} v \rangle}{1 + \delta_{ab}} n_a n_b. \quad (9)$$

Часть этой мощности

$$P_{\text{ch}} = \mathcal{E}_{\text{ch}} \frac{\langle \sigma_{ab} v \rangle}{1 + \delta_{ab}} n_a n_b, \quad (10)$$

выделяемая в виде кинетической энергии заряженных частиц  $\mathcal{E}_{\text{ch}}$ , естественным образом может быть использована для нагрева реагентов и реализации схем *термоядерного реактора* с самоподдерживающейся термоядерной реакцией. Например, если для удержания плазмы используется магнитное поле, то оно же удерживает в плазме и заряженные продукты реакции, которые нагревают плазму, компенсируя потери энер-

гии с излучением или выносом частиц плазмы на внутреннюю стенку реактора.

При заданной плотности ионов плазмы  $n = (n_a + n_b)/(1 + \delta_{ab})$  мощность реакции ядерного синтеза максимальна при равной доле реагентов, когда

$$n_a = n_b = \frac{1}{2}(1 + \delta_{ab})n. \quad (11)$$

Следовательно, максимальная (при заданной плотности) удельная мощность реакции ядерного синтеза вычисляется по формуле

$$P_{\text{fus}}^{(n)} = \frac{1}{4}(1 + \delta_{ab})\mathcal{E}_{\text{fus}}\langle\sigma_{ab}v\rangle n^2. \quad (12)$$

Мощность, выделяемая в виде заряженных частиц, получается отсюда при замене  $\mathcal{E}_{\text{fus}}$  на  $\mathcal{E}_{\text{ch}}$ .

В схемах термоядерного реактора с магнитным удержанием плазмы достижение предельных параметров упирается в ограничение по давлению плазмы  $p$ , которое не может превышать давление магнитного поля  $B^2/8\pi$ . Если в реакции синтеза участвуют ядра с зарядами  $Z_a$  и  $Z_b$ , то при заданном давлении

$$p = \frac{(1 + Z_a)n_a T + (1 + Z_b)n_b T}{1 + \delta_{ab}}$$

максимум удельной мощности достигается при

$$n_a = \frac{1 + Z_b}{2 + Z_a + Z_b}(1 + \delta_{ab})n, \quad n_b = \frac{1 + Z_a}{2 + Z_a + Z_b}(1 + \delta_{ab})n \quad (13)$$

(задача 14). Например, для реакции бора-11 ( $Z_a = 5$ ) с водородом-1 ( $Z_b = 1$ ) плотность бора должна быть в 3 раза меньше плотности водорода. Подставляя эти значения  $n_a$  и  $n_b$  в формулу (9), получим

$$P_{\text{fus}}^{(p)} = \frac{(1 + Z_a)(1 + Z_b)}{(2 + Z_a + Z_b)^2} \mathcal{E}_{\text{fus}}(1 + \delta_{ab})\langle\sigma_{ab}v\rangle n^2. \quad (14)$$

При  $Z_a = Z_b$  формулы (12) и (14) совпадают; в иных случаях  $P_{\text{fus}}^{(n)}$  и  $P_{\text{fus}}^{(p)}$  могут различаться в разы. Этот факт иллюстрирует эффект простейшей оптимизации термоядерного реактора. Если в результате подобной «игры с параметрами» удельная мощность может быть удвоена без существенного изменения конструкции реактора, то цена производимой электроэнергии почти наверняка уменьшится наполовину.

Ближайший к нам природный термоядерный реактор — наше Солнце — в этом смысле устроен очень неэффективно. Удельная мощность в нём даже меньше, чем в теле человека (задача 13). На Земле нужны более эффективные устройства! Ориентиром могут служить существующие атомные реакторы, использующие реакцию деления тяжёлых ядер под действием медленных нейтронов, где удельная мощность составляет  $100 \text{ Вт}/\text{см}^3$ .

### §12.5. Зажигание термоядерной реакции

В стационарно работающем термоядерном реакторе сток энергии из плазмы должен быть компенсирован за счёт нагрева плазмы внешним источником или продуктами термоядерной реакции. Сток энергии включает как бесполезные потери, так и мощность, которая пойдёт на выработку электроэнергии для внешних потребителей.

Пусть  $P_{\text{out}}$  обозначает суммарную мощность стока в расчёте на единицу объёма плазмы. Если предположить, что заряженные продукты термоядерной реакции полностьюдерживаются в плазме вплоть до того момента, когда всю свою кинетическую энергию они истратят на нагрев плазмы, можно будет утверждать, что для поддержания стационарного режима работы реактора не потребуются внешние источники нагрева, если будет выполнено условие

$$P_{\text{ch}} > P_{\text{out}}. \quad (15)$$

Тогда мощность энерговыделения в виде заряженных частиц  $P_{\text{ch}}$  превысит мощность стока после того, как будет произведено *зажигание термоядерной реакции* и начнётся *термоядерное горение*. При этом процесс зажигания реакции (процесс запуска термоядерного реактора) в любом случае потребует нагрева плазмы внешним источником энергии.

На заре термоядерных исследований была поставлена промежуточная цель — положительный баланс мощности в реакции  $T(d, n)^4\text{He}$ , имеющей самое большое сечение при энергии до  $200 \text{ кэВ}$ . Для этого необходимо как минимум выполнить условие

$$P_{\text{fus}} > P_{\text{out}}, \quad (16)$$

которое часто формулируют в виде неравенства

$$Q > 1, \quad (17)$$

где параметр

$$Q = P_{\text{fus}}/P_{\text{out}} \quad (18)$$

называют коэффициентом усиления. Поскольку  $P_{\text{fus}}/P_{\text{ch}} = \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle$ , условие зажигания термоядерной реакции (15) эквивалентно неравенству

$$Q > \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle. \quad (19)$$

В смеси дейтерия с тритием для зажигания реакции синтеза необходимо  $Q > 5$ , а в смеси бора-11 с водородом-1 достаточно  $Q > 1$ , но это вовсе не означает, что реакцию  $^{11}\text{B}(\text{p}, \alpha\alpha)^4\text{He}$  проще осуществить. В реакторах с магнитным удержанием зажигание последней реакции вряд ли возможно из-за огромных потерь на тормозное излучение (§12.8), а удельная мощность энерговыделения при заданном ограничении на давление плазмы в 1000 раз меньше, чем в смеси дейтерия с тритием (задача 19).

## §12.6. Критерий Лоусона

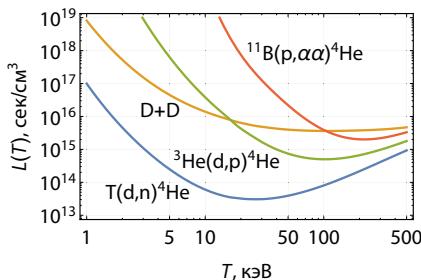
Условие  $Q > 1$  можно конкретизировать, связав  $P_{\text{out}}$  с параметрами плазмы. Если время жизни отдельной частицы в реакторе в среднем равно  $\tau$ , то

$$P_{\text{out}} = \frac{3T}{2\tau} \frac{(1 + Z_a)n_a + (1 + Z_b)n_b}{1 + \delta_{ab}}, \quad (20)$$

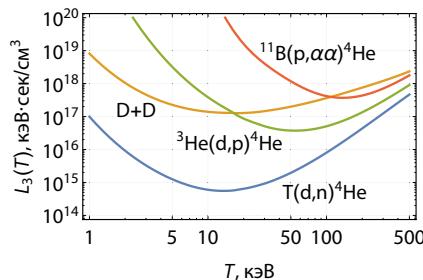
так как каждый ион и каждый электрон, покидающие плазму, выносят энергию  $\frac{3}{2}T$ , а на каждый ион сорта  $a$  или  $b$  приходится соответственно  $Z_a$  или  $Z_b$  электронов; множитель  $(1 + \delta_{ab})^{-1}$  вновь добавлен, чтобы правильно учесть случай, когда ионы  $a$  или  $b$  тождественны. Сравнение удельной мощности (9) термоядерной реакции с мощностью потерь показывает, что положительный баланс  $P_{\text{fus}} > P_{\text{out}}$  достигается, если

$$\tau > \frac{3T}{2\mathcal{E}_{\text{fus}} \langle \sigma_{ab} v \rangle} \left[ \frac{1 + Z_a}{n_b} + \frac{1 + Z_b}{n_a} \right].$$

Простое упражнение на поиск экстремума показывает, что при заданной плотности ядер  $n = (n_a + n_b)/(1 + \delta_{ab})$  правая сторона этого нера-



**Рис. 6.** Выбор параметров реакций термоядерного синтеза по критерию Лоусона; плотности реагентов должны быть выбраны так, что  $n_a/n_b = \sqrt{1+Z_b}/\sqrt{1+Z_a}$  в соответствии с формулой (21), а температура должна соответствовать минимуму на графике функции (22) для соответствующей реакции.



**Рис. 7.** Выбор параметров реакций термоядерного синтеза по критерию тройного произведения; плотности реагентов должны быть выбраны так, что  $n_a/n_b = (1+Z_b)/(1+Z_a)$  в соответствии с формулой (13), а температура должна соответствовать минимуму на графике функции (25) для соответствующей реакции.

венства минимальна, если  $n_a/n_b = \sqrt{1+Z_b}/\sqrt{1+Z_a}$ . Подстановка

$$\begin{aligned} n_a &= \frac{\sqrt{1+Z_b}}{\sqrt{1+Z_a} + \sqrt{1+Z_b}} (1 + \delta_{ab}) n, \\ n_b &= \frac{\sqrt{1+Z_a}}{\sqrt{1+Z_a} + \sqrt{1+Z_b}} (1 + \delta_{ab}) n \end{aligned} \quad (21)$$

преобразует последнее условие к неравенству

$$n\tau > \frac{3T}{2\mathcal{E}_{\text{fus}}\langle\sigma_{ab}v\rangle} \frac{(\sqrt{1+Z_a} + \sqrt{1+Z_b})^2}{1 + \delta_{ab}} \equiv L(T). \quad (22)$$

Функция  $L(T)$  в правой части этого неравенства имеет минимум при некоторой температуре, так как при уменьшении  $T$  константа скорости реакции  $\langle\sigma_{ab}v\rangle$  в знаменателе быстро уменьшается, а при большой температуре подрастает числитель. Как видно из графика функции  $L(T)$  на рисунке 6, её минимальное значение  $L_{min} = 0,3 \times 10^{14}$  с/см<sup>3</sup> для смеси DT достигается при температуре  $T_{min} = 26,5$  кэВ. Снижение температуры плазмы относительно этого значения в 2–3 раза может иметь очень важное практическое значение, хотя при этом придётся увеличить  $n\tau$ .

**Таблица 3.** Выбор параметров реакций термоядерного синтеза.

Топливо	Критерий Лоусона		Тройное произведение	
	$T$ , кэВ	$n\tau$ , с/см <sup>3</sup>	$T$ , кэВ	$n\tau$ , с/см <sup>3</sup>
DT	26,5	$3,1 \times 10^{13}$	13,5	$4,1 \times 10^{13}$
DD	107,7	$3,6 \times 10^{15}$	15,6	$8,3 \times 10^{15}$
D <sup>3</sup> He	102,1	$5,0 \times 10^{14}$	54,5	$6,9 \times 10^{14}$
p <sup>11</sup> B	218,7	$2,0 \times 10^{15}$	137,1	$2,7 \times 10^{15}$

Обычно в качестве ориентира выбирают температуру

$$T = 10 \text{ кэВ}, \quad (23)$$

при которой  $L = 0,6 \times 10^{14} \text{ с/см}^3$ . Тогда условие (22) с некоторым запасом приводится к неравенству

$$n\tau > 10^{14} \text{ с/см}^3, \quad (24)$$

которое в совокупности с выбором температуры (23) называют *критерием Лоусона* (John Lawson, 1955). Для других видов термоядерного топлива критериальные параметры приведены в таблице 3.

Нужно понимать условность проведённых расчётов. В них не был принят во внимание к.п.д. преобразования тепловой энергии в электрическую и предполагалось, что все 100% термоядерной мощности можно преобразовать в электрический ток. Нужно также отметить, что если энергия теряется из плазмы быстрее, чем частицы, то в критерии Лоусона должно стоять время удержания энергии  $\tau_e$ . Наконец, чтобы получить условие зажигания термоядерной реакции, в приведённом выводе нужно заменить  $\mathcal{E}_{fus}$  на  $\mathcal{E}_{ch}$ , что увеличит минимальное значение  $n\tau$  для смесидейтерия и трития в 5 раз (если по-прежнему не учитывать конечный к.п.д.). После зажигания реакция синтеза может идти без применения внешних источников нагрева плазмы — нужно только обеспечить удаление «остывших» продуктов реакции синтеза и замещение израсходованного «горючего» материала.

Любопытна история появления критерия Лоусона. Как вспоминал сам Джон Лоусон, вскоре после присоединения к секретной британской программе термоядерного синтеза он, будучи молодым инженером, спонтанно написал короткий доклад [137], где изложил условия осуществления управляемой термоядерной реакции, главным образом для того, чтобы умерить чрезмерные

ожидания своих коллег. В августе 1956 года (когда доклад Лоусона был ещё за-секречен), условия осуществления управляемой термоядерной реакции были изложены [Л. А. Арцимовичем](#) на Международной конференции астрономического союза [122], причём в форме, более близкой к современной трактовке. Доклад Лоусона был спешно рассекречен и опубликован в январе 1957 года [138]. Ясно, что в какой-то форме условия зажигания термоядерной реакции были известны и другим физикам, работавшим в лабораториях разных стран. Однако термин «критерий Лоусона» закрепился в научной литературе.

### §12.7. Тройное произведение

При выводе критерия Лоусона для смесидейтерия и трития температура была «вручную» подправлена более чем в 2 раза в сторону уменьшения. Интуитивные соображения, на основании которых это было сделано, легко формализовать, полагая, что достижение предельных параметров реактора упирается в ограничение по давлению плазмы, а не плотности. Как уже было сказано, в реакторе с магнитным удержанием плазмы её давление ограничено сверху давлением магнитного поля  $B^2/8\pi$ , а вот плотность плазмы можно варьировать в некоторых пределах, поддерживая давление плазмы на предельном уровне за счёт соответствующего изменения температуры. Это означает, что следует отыскивать минимум отношения  $P_{\text{out}}/P_{\text{fus}}$  при постоянном значении давления

$$p = \frac{(1 + Z_a) n_a T + (1 + Z_b) n_b T}{1 + \delta_{ab}},$$

а не плотности  $n$  (задача 14). Повторяя рассуждения, приведшие к критерию Лоусона, находим, что искомый минимум достигается при  $n_a/n_b = (1 + Z_b)/(1 + Z_a)$ , а вместо (22) имеем условие

$$n\tau T > \frac{3T^2}{\mathcal{E}_{\text{fus}} \langle \sigma_{ab} v \rangle} \frac{2 + Z_a + Z_b}{1 + \delta_{ab}} \equiv L_3(T). \quad (25)$$

Оно будет выполнено, если *тройное произведение*  $n\tau T$  превышает минимум функции  $L_3(T)$  (рис. 7). Этот минимум достигается при меньшей температуре, нежели минимум функции  $L(T)$ . Соответствующие значения приведены в таблице 3. Особенно впечатляет снижение в 6 раз оптимальной температуры для термоядерного реактора, где в качестве топлива используется толькодейтерий. Полезно заметить, что задача оптимизации параметров термоядерного синтеза по критерию тройного

**Таблица 4.** Параметры тормозного излучения при использовании различных топливных циклов.

Топливо	$T_{\text{т.и}}$ , кэВ	$T_{\min}$ , кэВ	$\min(P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}})$
DT	2,7	39,4	$5,3 \times 10^{-3}$
DD	57,7	553	$4,1 \times 10^{-1}$
D <sup>3</sup> He	29,0	152	$1,4 \times 10^{-1}$
p <sup>11</sup> B		295	2,6

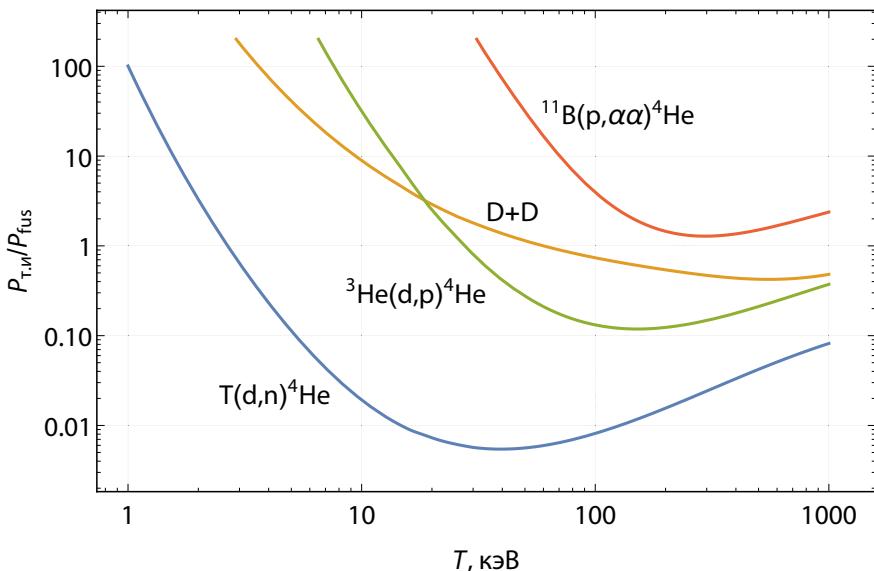
произведения эквивалентна отысканию максимума мощности термоядерной реакции при заданном давлении плазмы. В частности, указанное выше оптимальное соотношение плотностей реагентов совпадает с результатом расчёта по формуле (13), а максимальная мощность энерговыделения в реакции синтеза вычисляется по формуле (14) при температуре  $T$ , соответствующей минимуму функции (25).

## §12.8. Потери на излучение

Для термоядерного синтеза нужны только ядра, но электроны неизбежно должны присутствовать в системе, чтобы нейтрализовать электрический заряд, образуя квазинейтральную плазму. Электроны в термоядерном реакторе имеют температуру, сравнимую с температурой ионов или даже больше её.<sup>3</sup> При столкновениях с ионами они непрерывно испускают тормозное излучение. Солнце и другие звёзды непрозрачны для излучения, но в земных устройствах плазма имеет слишком малые размеры по сравнению с длиной пробега тормозного излучения. Если иные виды потерь энергии из плазмы гипотетически можно устраниТЬ, увеличивая размеры плазмы, то тормозное излучение крайне сложно отразить обратно в плазму или напрямую конвертировать в электрическую энергию, поэтому отношение мощности тормозного излучения  $P_{\text{т.и}}$  к мощности термоядерной реакции  $P_{\text{fus}}$  является важным контрольным параметром.

Поскольку и  $P_{\text{т.и}}$ , и  $P_{\text{fus}}$  пропорциональны  $n^2$ , отношение  $P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}}$  зависит только от температуры. Графики  $P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}}$  для некоторых реакций показаны на рисунке 8, а в таблице 4 указаны минимальные значения

<sup>3</sup> Быстрые заряженные продукты ядерных реакций при торможении в плазме передают свою энергию преимущественно электронам (задача 8.6).



**Рис. 8.** Мощность тормозного излучения по отношению к термоядерной мощности (14) при заданном давлении плазмы для некоторых реакций ядерного синтеза; предполагается, что плотности реагентов выбраны в соответствии с формулой (13), чтобы максимизировать мощность термоядерных реакций.

$P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}}$ , температура  $T_{\min}$ , при которой достигается минимум, а также минимальная температура  $T_{\text{т.и}}$ , при которой  $P_{\text{т.и}} = P_{\text{fus}}$ . Расчёты выполнены в предположении, что топливная смесь содержит доли реагентов, вычисленные в соответствии с формулой (13), чтобы максимизировать мощность термоядерных реакций при заданном давлении плазмы, при этом вклад вторичных реакций не учитывался. В смеси дейтерия и трития условие

$$P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}} < 1$$

выполняется при  $T > 2,7$  кэВ, а при  $T = 10$  кэВ мощность тормозного излучения  $P_{\text{т.и}}$  не превышает 2% от  $P_{\text{т.и}}$ . В смеси бора-11 и водорода мощность тормозного излучения превышает термоядерный выход при любой температуре.

Если электрические заряды ядер не равны, как в смеси гелия-3 с дейтерием или бора-11 с протием, потери на тормозное излучение по отношению к мощности термоядерной реакции можно понизить, уменьшив

долю реагента с большим зарядом, т. е. гелия-3 и бора-11 соответственно. Однако достигаемый при этом эффект трудно однозначно признать положительным. Например, в смеси бора и протия относительные потери на излучение можно снизить в 3 раза (приблизив  $P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}}$  к единице), если уменьшить долю бора до 9% (задача 15), но за такую «оптимизацию» придётся заплатить снижением удельной мощности термоядерной реакции.

В действующем термоядерном реакторе из-за накопления заряженных продуктов реакции соотношение  $P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}}$  будет больше расчётного, поскольку мощность тормозных потерь быстро увеличивается с ростом среднего заряда ионов плазмы. Чтобы минимизировать последствия этого эффекта, необходимо обеспечить быстрое удаление заряженных продуктов реакции после того, как они отдадут плазме большую часть своей энергии.

## §12.9. Управляемый термоядерный синтез

Становление физики плазмы как науки в значительной степени было связано с проблемой управляемого термоядерного синтеза (сокращённо — УТС). Такое название получили работы по созданию термоядерного реактора для производства электрической энергии. Полностью эта проблема не решена до сих пор. О масштабах проводимых исследований некоторое представление даёт рисунок 1.6 на с. 22, где изображена схема международного реактора-токамака ITER (International Tokamak Experimental Reactor), сооружение которого начато во Франции в 2008 году и должно быть завершено к 2025 году.

В любом из известных вариантов управляемого термоядерного синтеза термоядерные реакции не могут войти в режим неконтролируемого нарастания мощности без последующего срыва плазмы и прекращения реакций. В этой связи говорят, что термоядерному реактору присуща внутренняя безопасность, исключающая инциденты с выбросом в окружающую среду большого количества радиоактивных материалов.

### Магнитный УТС

Теоретические основы термоядерного реактора, где плазма имела бы форму тора и удерживалась магнитным полем, были разработаны в 1951 году И. Е. Таммом и А. Д. Сахаровым [139–141]. Красивое название *токамак* в 1957 году придумал И. Н. Головин как сокращение от слов

«тороидальная камера с магнитной катушкой». Всего было предложено около десятка различных схем удержания и нагрева плазмы, но не исключено, что главное изобретение на этом пути всё ещё впереди. Лидирующим направлением в настоящее время является токамак. Первый токамак был построен в 1954 году, и долгое время токамаки существовали только в СССР. Лишь после 1968 года, когда на токамаке Т3 в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова под руководством [Л. А. Арцимовича](#) была достигнута температура плазмы 10 млн градусов [142] и английские учёные со своей аппаратурой подтвердили этот факт [143], в который поначалу отказывались верить, в мире начался настоящий бум токамаков. Всего было сооружено около 300 токамаков.

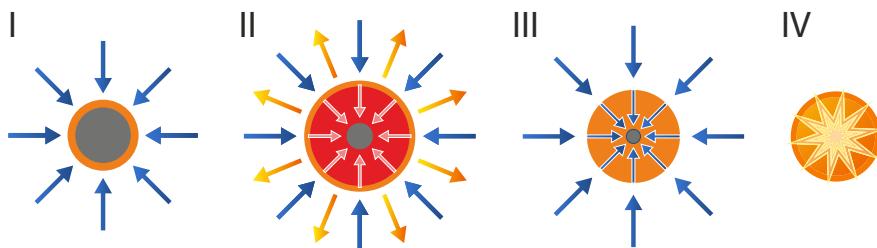
Магнитное поле в токамаке выполняет две функции. Во-первых, оно разрывает механический контакт плазмы с металлическими стенками камеры. Во-вторых, оно подавляет теплопроводность. Первая функция предполагает, что давление магнитного поля больше давления плазмы. Вторая функция даже более важна, так как гипотетически плазма может «опираться» на стенки камеры через слой холодной, но очень плотной плазмы, если теплопроводность подавлена. Без подавления теплопроводности плазма слишком быстро остывает, так что ионы не успевают вступить в реакцию синтеза.

31 октября 1999 году на европейском токамаке JET в импульсном режиме в смеси дейтерия и трития достигнута мощность  $P_{\text{fus}} = 16 \text{ МВт}$ , что составило 65% от мощности нагрева плазмы. В апреле следующего года на японском токамаке JT-60 в дейтериевой плазме достигнут режим, который в пересчёте на дейтерий-тритиевую плазму эквивалентен превышению критерия Лоусона на 25%. Это означает, что достигнут положительный выход в управляемой термоядерной реакции.

В новом токамаке ITER может быть осуществлено зажигание термоядерной реакции в смеси дейтерия и трития. Однако для создания первого промышленного термоядерного реактора необходимо решить ещё множество технических проблем. Некоторые физики считают, что токамак не может быть прототипом промышленного термоядерного реактора, не без оснований полагая, что будущие технологии позволят заново «изобрести термояд» [144, 145].

### Инерциальный УТС

Создание мощных лазеров в 1960-х годах открыло новое направление инерциального УТС. Идея лазерного синтеза проста. Нужно сфокусиро-



**Рис. 9.** Стадии инерциального ядерного синтеза. Синие стрелки обозначают лазерные пучки, оранжевые — поток испаряемого вещества, розовые — перенос тепловой энергии внутрь мишени. I) Лазер испаряет поверхностный слой мишени, образуя плазменную оболочку. II) Реактивная сила от разлетающейся оболочки сжимает ядро мишени. III) Ядро нагревается, зажигается реакция ядерного синтеза. IV) Волна термоядерного горения распространяется наружу по сжатому топливу.

вать свет от множества мощных лазеров на маленькой мишени из смеси дейтерия и трития, как показано на рисунке 9. Мгновенное испарение (точнее — абляция) внешнего слоя создаст реактивную силу, направленную к центру, что приведёт к сильному сжатию мишени и её разогреву до температуры зажигания термоядерной реакции. Реакция, начавшись в центре мишени, распространится наружу во внешние, более холодные слои намного раньше, чем весь сжатый материал разлетится в стороны.

В настоящее время считается, что для получения положительного баланса энергия лазерного импульса должна превысить 1 МДж [146]. Такая энергия достигнута 10 марта 2009 года на установке NIF (National Ignition Facility) в Ливерморской национальной лаборатории (Lawrence Livermore National Laboratory) в США. Вспышка длительностью миллиардные доли секунды ознаменовала завершение долгостоящего 12-летнего строительства крупнейшей лазерной системы на планете, состоящей из 192 лазеров. Сооружение лазера LMJ (Laser MégaJoule) с энергией в импульсе 1,8 МДж завершено во Франции в 2014 году. Ещё более мощный лазер УФЛ-2М с энергией 2,8 МДж планируется построить к 2022 году в Сарове (Россия).

Эксперименты на лазерах предыдущего поколения показали, что даже с большим числом лазеров прямым облучением со всех сторон трудно добиться равномерного сжатия мишени. Микроскопические неравномерности приводят к тому, что горячая плазма «расплёскивается»,

прежде чем ударная волна внутри шарика мишени запустит реакцию синтеза. Поэтому в NIF используется другой метод создания равномерного облучения мишени — так называемый непрямой привод (англ. *indirect drive*). Заключается он в том, что лазеры направляют лучи не в саму мишень с ядерным топливом, а в специальный польй цилиндр под названием холраум (англ. *hohlraum*), выполненный из золота, внутри которого на полимерной распорке подвешен топливный шарик. Мощный импульс лазеров, попадающий через торцевые отверстия на внутренние стенки цилиндра под точно рассчитанным углом, превращает его в плазму, которая окутывает топливный шарик и успевает выдать мощный импульс рентгеновского излучения, прежде чем разлетится прочь. Рентген взрывает главную мишень не хуже, чем прямое попадание лазеров.

Благодаря мгновенному испарению внешнего слоя шарика последний сжимается так, что плотность вещества в нём по расчётам должна подскочить до 1 килограмма на миллилитр (что в 100 раз выше плотности свинца), а температура вырастет до 100 млн градусов — выше, чем в центре звёзд. Если цепная реакция в таком шарике будет запущена, она высвободит энергию порядка 20 МДж.

### §12.10. Перспективы УТС

Эйфория, охватившая общество в 60-х годах двадцатого века после успехов в создании термоядерного оружия и освоения первых атомных реакторов деления, коснулась и учёных-плазмистов, обещавших старт термоядерной энергетики через 20 лет [147]. Однако жизнь ещё раз показала, как осторожно надо подходить к такого рода предсказаниям. Сложность проблемы создания термоядерного источника энергии в земных условиях была явно недооценена. Оказалось, что необходимо развить теорию равновесных конфигураций плазмы, детально анализировать дрейфы частиц в сложной геометрии магнитных полей. В замагниченной плазме возбуждались многочисленные магнитогидродинамические и кинетические неустойчивости, увеличивая перенос частиц и энергии на стенки вакуумной камеры. Возникающие примеси охлаждали плазму. Потребовалось десятилетия фундаментальных исследований многообразия процессов в плазме, в результате которых возникла современная физика горячей плазмы. Только благодаря её развитию параметры плазмы постепенно приближались к значениям, представляющим интерес для энергетического термоядерного реактора.

Нынешний флагман программы управляемого термоядерного синтеза — международный проект ITER [148] — будет прототипом промышленного термоядерного реактора. Если экстраполировать стоимость ITER на промышленный реактор, то станет ясно, что в обозримой перспективе термоядерный реактор будет неконкурентоспособен как коммерческое предприятие [145]. Своему ближайшему конкуренту — атомному реактору деления — термоядерный реактор проигрывает в соревновании цен. При этом он имеет лишь одно неоспоримое преимущество: ему внутренне присуща безопасность относительно самопроизвольного взрыва. По идее, термоядерный реактор не должен взрываться так, как взорвался атомный реактор в Чернобыле. Однако термоядерный реактор, работающий на смесидейтерия и трития, как и атомный реактор, будет производить большое количество радиоактивного мусора.

Кардинальным решением проблемы радиоактивных отходов было бы создание реактора, работающего на топливной смеси, не производящей нейтроны даже во вторичных реакциях. Меньше всего нейтронов производит смесь водорода-1 и бора-11. ITER будет работать на смесидейтерия и трития, а на пути к безнейтронному термоядерному реактору учёных и инженеров ожидают гигантские трудности. При одинаковой мощности реактор, работающий на смеси водорода-1 и бора-11, будет во много раз больше, чем реактор, работающий на смесидейтерия и трития, так как при одинаковых технических ограничениях удельная мощность термоядерной реакции в смеси  $p^{11}B$  в тысячу раз меньше, чем в смеси DT [149].

История открытий на множестве примеров учит, что при прочих равных условиях обычно побеждает та технология, которая появилась первой. Может ли так случиться, что термоядерный реактор, ещё не родившийся, уже упустил свой шанс, уступив возобновляемым источникам энергии, таким как солнечная панель или ветрогенератор, в гонке за источник энергии для будущих поколений?

Солнечная энергетика, в отличие от термоядерной, на наших глазах становится реальностью. Первые солнечные панели мощностью 1 Вт были установлены на американском и советском искусственных спутниках Земли, которые были запущены в 1958 году. В наши дни любой домовладелец где-нибудь в США, Германии, Китае или России может купить солнечную панель и установить её на крышу своего дома или гаража. В некоторых случаях такое решение экономически оправдано уже сейчас, и следует ожидать, что цена солнечных панелей будет па-

дать по мере расширения масштабов их производства. В 2018 году цена генерации на солнечных электростанциях в Индии опустилась ниже цены генерации на угольных электростанциях. Крупнейший на момент издания этой книги Солнечный парк Бхадла (Bhadla Solar Park) находится в Индии, занимает площадь 57 кв. км, его пиковая мощность генерации достигает 2245 МВт. Бхадла — песчаный и засушливый регион, который географы описывают как «почти непригодный для жизни» из-за его климата. Средняя температура здесь колеблется от 46 до 48 градусов по Цельсию, часто бывают горячие ветры и песчаные бури.

Установленная мощность солнечных и ветровых электростанций в мире примерно одинакова, причём каждая по отдельности уже превысила установленную мощность атомных электростанций.<sup>4</sup> Тем не менее из-за суточных и сезонных вариаций солнечного освещения и силы ветров, средняя выработка электроэнергии на таких электростанциях пока ещё меньше, чем на атомных. Однако она продолжает расти высокими темпами, и молодые люди, выбирающие профессию, должны для себя решить, не окажется ли термоядерный реактор тупиковой ветвью технического прогресса ко времени, когда реактор будет наконец построен.

Сторонники термоядерной энергетики в спорах почти всегда оказываются противниками так называемой «зелёной энергетики», интуитивно чувствуя в ней успешного конкурента. Они указывают на суточные и сезонные колебания выработки энергии на солнечных и ветровых электростанциях как основное препятствие для роста доли зелёной энергетики. Чтобы сгладить подобные колебания, необходимо решить проблему аккумуляции больших количеств энергии. Экологически чистым решением этой проблемы является электролиз воды с производством водорода и кислорода на пиках мощности солнечных и ветровых электростанций и генерация электричества в водородных топливных элементах с восстановлением воды на минимумах мощности. Топливный элемент генерирует электричество в процессе электрохимической реакции, в которой атомы поступающего под давлением водорода разлагаются на электроны и протоны. Электроны поступают во внешнюю цепь, создавая электрический ток. Протоны проходят через мембрану, где с ними соединяются кислород и электроны, которые подводятся из

<sup>4</sup> К началу 2020 года установленная мощность солнечных и ветровых электростанций в мире превысила соответственно 630 ГВт и 650 ГВт. В настоящее время 31 страна эксплуатирует атомные электростанции. По состоянию на середину 2018 года, в мире насчитывался 451 энергетический атомный реактор (не включая остановленных на длительный срок) общей мощностью около 394 ГВт, 55 реакторов находятся в стадии сооружения.

внешней цепи. Единственными побочными продуктами такой реакции являются водяной пар и тепло. КПД процесса достигает 60–80%. Водород в топливных элементах может также использоваться как экологически чистое топливо для автомобилей и самолётов. «Водородная энергетика» имеет много сторонников, но и она сталкивается с технологическими проблемами. Одной из них является хранение больших объёмов водорода. Предполагается, что водород можно накапливать в подземных пещерах, соляных куполах, истощённых нефтяных и газовых месторождениях. Безусловно, с учётом масштабов производства электрической энергии в мире проблема аккумуляции представляется очень сложной. Время покажет, будет ли её решение дешевле термоядерного реактора сопоставимой мощности.

## Литература

В книге «Управляемые термоядерные реакции» [3, §1.1, 1.2] много летний руководитель советской программы токамаков [Л. А. Арцимович](#) изложил представления об управляемом термоядерном синтезе, сформированные на начальном этапе термоядерных исследований. Современное состояние УТС обсуждается в статье [147] академиков [Е. П. Велихова](#) и [В. П. Смирнова](#). В книге «Физика лазерного термоядерного синтеза» [Н. Г. Басова](#), И. Г. Лебо и В. Б. Розанова [150] в доступной форме изложены основы инерциального термоядерного синтеза.

Изучение анейтронных термоядерных реакций можно начать с оригинальных статей Д. Моро (D. Moreau) [151] и Л. Виттенберга (L. Wittenberg) с соавторами [152]. Обширная база данных по ядерным реакциям и смежным предметам собрана Международным агентством по атомной энергии (МАГАТЭ) [136].

История начального этапа работ по созданию магнитного термоядерного реактора на основе ранее секретных документов описана в статье [В. Д. Шафранова](#) [153]. В том же номере журнала «Успехи физических наук» за 2001 год опубликованы другие материалы на эту тему.

## Задачи и вопросы

**Задача 1.** Используя законы сохранения энергии и импульса, покажите, что в реакции ядерного синтеза, где образуются две частицы, выделившаяся энергия распределяется между ними обратно пропорционально их массам.

**Задача 2.** Найдите диапазон энергий продуктов реакции  $T(t, nn)^4\text{He}$ .

Ответ  $\Rightarrow 328$

**Задача 3.** Найдите энергию, произведенную парой ядер дейтерия с учётом вторичных реакций ядерного синтеза, и вычислите коэффициент активации в термоядерном реакторе, работающем на чистом дейтерии.

Решение  $\Rightarrow 328$

**Задача 4.** Вычислите коэффициент активации в термоядерном реакторе, работающем на равнокомпонентной смеси дейтерия и гелия-3.

**Задача 5.** Во сколько раз энергия, которую можно извлечь из литра воды, если выделить весь дейтерий и «сжечь» его в термоядерном реакторе, больше теплотворной способности литра бензина?

Решение  $\Rightarrow 329$

**Задача 6.** Оцените массу дейтерия и лития, необходимую для работы DT реактора мощностью 1 ГВт в течение одного года.

Решение  $\Rightarrow 329$

**Задача 7.** Оцените, на сколько лет хватит разведанных запасов дейтерия и лития, если все термоядерные электростанции будут производить 10 трлн кВт · ч электроэнергии в год — в 5 раз больше, чем производят все электростанции Земли в настоящее время.

Решение  $\Rightarrow 329$

**Задача 8.** Вычислите энергию Гамова.

Решение  $\Rightarrow 330$

**Задача 9.** Оцените сечение реакции  $D(d, \gamma)^4\text{He}$ .

Ответ  $\Rightarrow 330$

**Задача 10.** Запишите константу  $\langle \sigma_{ab} v \rangle$  реакции  $X_a(x_b, x_c)X_d$  ядерного синтеза в виде интеграла по энергии  $\varepsilon$  относительного движения сталкивающихся ядер. Считайте, что их функции распределения являются максвелловскими с заданной температурой  $T$ .

Решение  $\Rightarrow 330$

**Задача 11.** Вычислите константу реакции ядерного синтеза при температуре ниже энергии Гамова.

Решение  $\Rightarrow 331$

**Задача 12.** Используя данные из таблицы 2, получите формулу Гамова для реакции  $p(p, e^+\nu_e)D$ .

Решение  $\Rightarrow 331$

**Задача 13.** Оцените удельную мощность термоядерных реакций внутри Солнца.

Решение  $\Rightarrow 332$

**Задача 14.** При какой плотности ионов каждого сорта удельная мощность реакции ядерного синтеза максимальна, если в реакции участвуют ядра с зарядами  $Z_a$  и  $Z_b$ , а давление плазмы не может превышать заданной величины? Считайте, что температуры ионов и электронов одинаковы.

[Решение](#) ⇒ 332

**Задача 15.** При какой плотности ионов каждого сорта отношение мощности тормозного излучения к мощности реакции ядерного синтеза минимально, если в реакции участвуют ядра с зарядами  $Z_a$  и  $Z_b$ ?

[Решение](#) ⇒ 333

**Задача 16.** Найдите тепловой поток на стенку трубы, внутри которой идёт термоядерная реакция в DT-плазме с плотностью  $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$  и температурой  $T = 10 \text{ кэВ}$ . Радиус трубы  $R$ .

[Решение](#) ⇒ 333

**Задача 17.** Можно ли получить положительный энергетический выход, облучая мишень из тяжёлой воды пучком ионов трития, ускоренных до высокой энергии?

[Решение](#) ⇒ 334

**Задача 18.** Оцените плотность DT-плазмы, необходимую для получения удельной мощности энерговыделения на уровне  $100 \text{ Вт/см}^3$ , как в реакторах деления. Можно ли получить такую удельную мощность в реакторе с магнитным удержанием, работающем на чистом дейтерии, при максимальном магнитном поле, достижимом в настоящее время в стационарных устройствах?

**Задача 19.** Сравните удельную мощность энерговыделения реакции ядерного синтеза в смеси дейтерия с тритием и бора-11 с водородом при условии, что давление плазмы не может превышать заданного значения.

[Решение](#) ⇒ 334

## Лекция 13

# Кинетическое уравнение

---

Функция распределения. Уравнение Лиувилля.

Самосогласованное поле. Уравнение Власова.

Потенциальные колебания электронов плазмы.

Правило обхода Ландау. Затухание Ландау

### §13.1. Функция распределения

В кинетической теории описание каждого сорта частиц плазмы осуществляется функцией распределения

$$f = f(\mathbf{P}, \mathbf{X}, t).$$

Она определена как плотность частиц в их фазовом пространстве и является, вообще говоря, функцией выбранных каким-либо образом обобщённых координат (совокупность которых обозначена через  $\mathbf{X}$ ) и канонически сопряжённых им обобщённых импульсов (совокупность которых обозначена через  $\mathbf{P}$ ), а в нестационарном состоянии — ещё и времени  $t$ .

Если для исчерпывающего описания движения отдельной частицы требуется задать  $s$  координат и  $s$  импульсов, фазовое пространство имеет  $2s$  координатных осей, на которых отложены значения  $s$  координат и  $s$  импульсов. Произведение дифференциалов координат и импульсов,

$$d^s\mathbf{X} = dX_1 \dots dX_s \quad \text{и} \quad d^s\mathbf{P} = dP_1 \dots dP_s,$$

интерпретируют как элемент объёма фазового пространства.

В полностью ионизованной идеальной плазме иные степени свободы, кроме поступательного движения, не играют заметной роли, поэтому отдельный ион или электрон однозначно характеризуется тремя координатами и тремя импульсами. Соответственно, функцию распределения  $f$  определяют так, что

$$dN = f(\mathbf{P}, \mathbf{X}, t) d^3P d^3X$$

есть среднее число частиц, находящихся в заданном объёме  $d^3P d^3X$  шестимерного фазового пространства, каждой точке которого сопоставлены три координаты и три компоненты обобщённого импульса. При этом подразумевается, что элемент объёма  $d^3P d^3X$  является *физическими* малым, т. е. включает достаточно много частиц. Существует альтернативная трактовка функции распределения, согласно которой  $dN$  есть *вероятность* обнаружить частицу в элементе фазового объёма  $d^3P d^3X$ . При таком понимании функции распределения элемент объёма может быть бесконечно малым в математическом понимании этого слова. Так или иначе, интеграл по всему объёму плазмы и по всему пространству импульсов равен полному числу частиц данного сорта

$$N = \iint d^3P d^3X f(\mathbf{P}, \mathbf{X}, t). \quad (1)$$

Выбор координат и импульсов всецело определяется соображениями удобства при решении конкретной задачи. В частности, можно отказаться от использования импульсов, канонически сопряжённых выбранному набору координат, перейдя от фазового пространства к *конфигурационному* пространству с произвольным набором координат  $\mathbf{x}$  и импульсов  $\mathbf{p}$ . В этом случае через

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) \equiv f(\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t), \mathbf{X}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t), t)$$

будем обозначать всё ту же плотность частиц в фазовом пространстве. Так как

$$dN = f d^3P d^3X = f J d^3p d^3x, \quad (2)$$

где

$$J = \frac{\partial(\mathbf{P}, \mathbf{X})}{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{x})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial p_x} & \frac{\partial P_x}{\partial p_y} & \frac{\partial P_x}{\partial p_z} & \frac{\partial P_x}{\partial x} & \frac{\partial P_x}{\partial y} & \frac{\partial P_x}{\partial z} \\ \frac{\partial P_y}{\partial p_x} & \frac{\partial P_y}{\partial p_y} & \frac{\partial P_y}{\partial p_z} & \frac{\partial P_y}{\partial x} & \frac{\partial P_y}{\partial y} & \frac{\partial P_y}{\partial z} \\ \frac{\partial P_z}{\partial p_x} & \frac{\partial P_z}{\partial p_y} & \frac{\partial P_z}{\partial p_z} & \frac{\partial P_z}{\partial x} & \frac{\partial P_z}{\partial y} & \frac{\partial P_z}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial p_x} & \frac{\partial X}{\partial p_y} & \frac{\partial X}{\partial p_z} & \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial p_x} & \frac{\partial Y}{\partial p_y} & \frac{\partial Y}{\partial p_z} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial p_x} & \frac{\partial Z}{\partial p_y} & \frac{\partial Z}{\partial p_z} & \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

обозначает якобиан преобразования, произведение

$$\bar{f} = f J \quad (3)$$

можно трактовать как плотность частиц в конфигурационном пространстве. Таким образом, наряду с функцией распределения  $f$  в фазовом пространстве канонически сопряжённых импульсов и координат  $(P, X)$  можно ввести функцию распределения  $\bar{f}$  в пространстве произвольного набора координат и импульсов  $(p, x)$ . На практике используют оба вида функций распределения, и важно понимать, какая функция распределения подразумевается в каждом конкретном случае.

Рассмотрим несколько примеров.

В электромагнитном поле с векторным потенциалом  $A(x, t)$  кинематический импульс  $p$  отличается от канонического импульса  $P = p + (e/c)A$ , сопряжённого вектору координат  $X = x$ , на слагаемое  $(e/c)A$ , которое не зависит от  $p$ , поэтому

$$J = \frac{\partial(P, X)}{\partial(p, x)} = \frac{\partial(P, x)}{\partial(p, x)} = \frac{\partial(P)}{\partial(p)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, функция распределения  $f(p, x, t)$  в фазовом пространстве одновременно будет функцией распределения  $\bar{f}(p, x, t)$  и в конфигурационном пространстве координат импульсов  $p$  и  $x$ , выбранных указанным выше способом, т. е.

$$f(p, x, t) = \bar{f}(p, x, t).$$

В нерелятивистском пределе вместо  $f(p, x, t)$  часто используют функцию распределения  $\bar{f}(v, x, t)$ , выраженную через скорость частиц  $v = p/m$ . Якобиан соответствующего преобразования  $J = \partial(p, x)/\partial(v, x) = m^3$  равен константе, поэтому функция  $\bar{f}(v, x, t) = m^3 f(p, x, t)$  с точностью до этой константы имеет смысл плотности частиц в фазовом пространстве, как и  $f(p, x, t)$ . Далее для краткости мы опускаем черту над  $\bar{f}(v, x, t)$ .

Из сказанного ясно, что кинематический импульс  $p$  и скорость  $v$  являются равносценной заменой каноническому импульсу  $P$ . Чтобы не показалось, будто вместо  $P$  с тем же успехом можно взять вообще любой набор переменных, укажем для примера, что при переходе к переменным  $\epsilon = mv^2/2$ ,  $\mu = mv_1^2/2B$ ,  $\phi$  (энергия, магнитный момент, фаза ларморовского вращения) якобиан преобразования  $J = mB/\sqrt{2(\epsilon - \mu B)/m}$  не равен единице.

Обычная плотность (концентрация) частиц  $n$  получается интегрированием функции распределения по всему пространству импульсов,

$$n(\mathbf{x}, t) = \int d^3p f(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t), \quad (4)$$

если координаты  $\mathbf{x}$  определены так, что дифференциал  $d^3x$  равен элементу объёма  $dV$  в пространстве координат. Если же  $d^3x \neq dV$ , в подынтегральное выражение дополнительным множителем войдёт якобиан преобразования от координат  $\mathbf{x}$  к таким координатам  $\mathbf{X}$ , что  $d^3X = dV$  (задача 1). При тех же оговорках плотность потока частиц  $\Gamma$  выражается через аналогичный интеграл с весом, равным скорости  $\mathbf{v}$ :

$$\Gamma(\mathbf{x}, t) = \int d^3p \mathbf{v} f(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t). \quad (5)$$

В переменных  $\epsilon, \mu, \phi$  формула (4) записывается в виде

$$n = \int d\epsilon d\mu d\phi \bar{f},$$

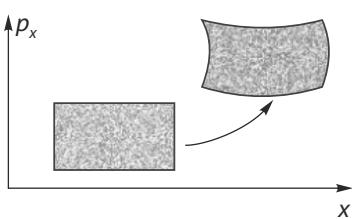
где

$$\bar{f}(\epsilon, \mu, \phi, \mathbf{x}, t) = \frac{mB}{\sqrt{2(\epsilon - \mu B)/m}} f(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t).$$

В практических приложениях функцию распределения обычно находят из решения так называемого кинетического уравнения. Это не одно какое-то универсальное уравнение. В зависимости от используемой модели описания плазмы кинетическое уравнение может иметь разные формы записи.

## §13.2. Уравнение Лиувилля

Каждая точка фазового пространства отвечает определённому состоянию системы. При эволюции системы изображающая её фазовая точка описывает в фазовом пространстве соответствующую линию, которую называют *фазовой траекторией*. Рассмотрим интеграл  $\int d^3p d^3x$ , взятый по некоторой области фазового пространства  $\Delta$ , и представим себе, что каждая точка данной области перемещается со временем согласно уравнениям движения рассматриваемой механической системы.



**Рис. 1.** Фазовая плоскость, соответствующая одномерному движению. Площадь выделенного элемента сохраняется при движении заполняющих его частиц в самосогласованном поле. Предполагается, что частицы не могут перепрыгнуть через границу элемента, составленную такими же частицами.

Тем самым будет перемещаться и вся область (рис. 1). При этом её объём остаётся неизменным:

$$\int_{\Delta} d^3P d^3X = \text{const.} \quad (6)$$

Это утверждение составляет теорему Лиувилля (Joseph Liouville, 1838 [154]). С другой стороны, число частиц внутри выделенного объёма также постоянно и

$$\int_{\Delta} d^3P d^3X f = \text{const.} \quad (7)$$

Так как можно взять любой объём, в том числе и достаточно малый, отсюда следует, что функция распределения также будет постоянной вдоль фазовой траектории, т. е.

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (8)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{p} + d\mathbf{p}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}, t + dt) - f(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)}{dt} = \\ &= \left[ d\mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + d\mathbf{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + dt \frac{\partial f}{\partial t} \right] / dt = \\ &= \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned}$$

уравнение (8) буквально означает, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{x}} \equiv d\mathbf{x}/dt$ ,  $\dot{\mathbf{p}} \equiv d\mathbf{p}/dt$ , а функция распределения  $f$  определена как плотность частиц в фазовом пространстве канонических переменных,

но  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{x}$  – не обязательно такие переменные. Кинетическое уравнение в форме (9) иногда называют *уравнением Лиувилля*, однако нужно иметь в виду, что в физике есть несколько уравнений с таким названием.

Функция распределения  $\bar{f} = fJ$ , определённая как плотность частиц в произвольном конфигурационном пространстве  $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ , удовлетворяет кинетическому уравнению в дивергентной форме (задача 2):

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\dot{\mathbf{x}} \bar{f}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot (\dot{\mathbf{p}} \bar{f}) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) имеет простой смысл. Его можно интерпретировать так, что изменение  $\bar{f}$  в данной неподвижной точке конфигурационного пространства вызвано приходом в неё частиц из других точек и с другими импульсами. Действительно, плотность потока частиц вдоль координатной линии  $\mathbf{x}$  равна  $\dot{\mathbf{x}} \bar{f}$ . Составляя разность потоков через границы выделенного неподвижного объёма площадью  $dS_x = dy dz d^3p$  при  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ , найдём соответствующее приращение

$$(\dot{\mathbf{x}} \bar{f}) \Big|_{\mathbf{x}} dS_x - (\dot{\mathbf{x}} \bar{f}) \Big|_{\mathbf{x} + d\mathbf{x}} dS_x = \left[ -\frac{\partial(\dot{\mathbf{x}} \bar{f})}{\partial x} dx \right] dS_x = -\frac{\partial(\dot{\mathbf{x}} \bar{f})}{\partial x} d^3x d^3p$$

числа частиц в этом объёме. Вклад потоков через другие грани шестимерного объёма вычисляется аналогичным образом. Приравнивая их сумму к изменению числа частиц в выделенном объёме  $(\partial \bar{f} / \partial t) d^3x d^3p$  и сокращая общий множитель  $d^3x d^3p$ , получаем уравнение (10).

При выборе канонических переменных уравнения (9) и (10) эквивалентны, и этот факт является очевидным следствием гамильтоновых уравнений движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}},$$

где  $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$  – функция Гамильтона (William Hamilton, 1833). Действительно, при переходе от уравнения (10), переписанного в канонических переменных  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{x}$ , к уравнению (9) сначала учтём, что  $\bar{f} = f$ , а затем заметим, что слагаемые

$$\bar{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \bar{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \bar{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} - \bar{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}$$

взаимно сокращаются.

В частном случае, который обсуждался в §13.1, когда  $\mathbf{p} = \mathbf{P} - (e/c)\mathbf{A}$  и  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ , обе формы кинетического уравнения также эквивалентны. Действительно, в этом случае  $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$  и с помощью уравнений движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{p}} = e \left( \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \right) \quad (11)$$

заряженной частицы в заданном электромагнитном поле нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} = 0$$

(задача 3). Вынося  $\dot{\mathbf{x}}$  и  $\dot{\mathbf{p}}$  из-под знака дифференцирования в уравнении (10), получим уравнение (9).

Далее в нашем курсе лекций, говоря о функции распределения, мы всегда будем подразумевать функцию  $f$ , определённую как плотность частиц в фазовом пространстве канонически сопряжённых импульсов и координат. Это не может помешать нам в любой момент выбрать другой, произвольный набор импульсов и координат, как мы это уже делали раньше.

### §13.3. Уравнение Власова

После подстановки формул (11) в (9) получается *кинетическое уравнение для бесстолкновительной плазмы*:

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{x}} + e_b \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (12)$$

Индекс  $b$  здесь и далее метит величины, относящиеся к частицам сорта  $b$ ; его значения  $e$  и  $i$  отвечают соответственно электронам и ионам.

Несмотря на кажущуюся простоту этого уравнения, его смысл требует пояснений. Как минимум следует понять, действительно ли при его выводе были потеряны эффекты столкновений частиц.

В плазме, ввиду дальнодействующего характера кулоновских сил, заметное изменение движения частиц при столкновениях происходит даже на больших прицельных расстояниях. Действительно, экранирование кулоновских сил в плазме происходит лишь на расстояниях, превышающих дебаевскую длину  $\lambda_D$ . В идеальной плазме, где  $n^{-1/3} \ll \lambda_D$ , такие расстояния велики по сравнению с межчастичными расстояниями, поэтому каждая частица в каждый момент времени испытывает

воздействие многих частиц. Однако не все такие воздействия должны интерпретироваться в кинетическом уравнении как столкновения. Хаотические столкновения представляют собой механизм, который приближает систему к состоянию равновесия с соответствующим возрастанием энтропии. Между тем столкновения на больших ( $r \sim \lambda_D$ ) прицельных расстояниях представляют собой коллективный эффект, в котором задействовано большое число частиц и поэтому хаотическая составляющая взаимодействия мала.

Взаимодействие на далёких дистанциях можно учесть макроскопически, а именно следующим образом. Если где-то в плазме изменилась функция распределения электронов или ионов, то там изменяются также плотность электрических зарядов  $\rho_q$  и плотность тока  $\mathbf{J}$ . Это изменение выразится в изменении макроскопических электрического и магнитного полей на большом удалении от области, где изменилась функция распределения. В свою очередь, изменение полей влияет на ход изменения функции распределения. Таким образом, через посредство полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  взаимно связываются значения функции распределения, вообще говоря, на любых дистанциях. Для учёта этой связи нужна, с одной стороны, система уравнений Максвелла, где связь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  с функциями распределения будет осуществлена посредством зарядов и токов. С другой стороны, для учёта обратного влияния появляющихся полей на функции распределения достаточно ввести эти поля в кинетическое уравнение для заряженных частиц. Таким образом, мы приходим к системе уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (13)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho_q, \quad (14)$$

где плотность зарядов

$$\rho_q = \sum_b \int e_b f_b d^3 p \quad (15a)$$

и плотность тока

$$\mathbf{J} = \sum_b \int e_b \mathbf{v} f_b d^3 p \quad (15b)$$

выражаются через функции распределения частиц всех сортов.

Уравнения (12)–(15) составляют согласованную систему уравнений, связывающих функцию распределения частиц каждого сорта с электрическим и магнитным полями. Определяемые таким образом поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  называют самосогласованными.

Представление о *самосогласованном поле* было введено в физику плазмы А. А. Власовым в 1938 году [155]. В связи с этим систему уравнений (12)–(15) называют *уравнениями Власова*. Чаще уравнением Власова называют только кинетическое уравнение (12) с нулевой правой частью, но при этом всё равно подразумевается, что электрическое и магнитное поля согласованы с функцией распределения уравнениями (13)–(15).

Эволюция функции распределения в бесстолкновительной плазме, описываемой уравнением Власова, не связана с увеличением энтропии и потому сама по себе не может привести к установлению статистического равновесия (задача 5). Это очевидно и прямо из уравнения (12), в котором  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  выступают формально лишь как внешние поля, наложенные на плазму. Рост энтропии обеспечивают столкновения.

Интересно, что способ учёта столкновений в системе заряженных частиц с кулоновским взаимодействием был найден Л. Д. Ландау за 2 года до публикации статьи А. А. Власова. Власов упоминает статью Ландау [156, 157], но поясняет, что установленный Ландау интеграл столкновений (лекция 14) в типичных условиях представляет собой лишь малую поправку к эффекту, произведенному самосогласованным полем.

В отечественной литературе уравнение Власова долгое время принято было называть кинетическим уравнением с самосогласованным полем. Многие советские физики избегали упоминания имени Власова из-за противостояния между университетской и академической науками тех лет как составной части антисемитской кампании по «борьбе с космополитизмом» в 1948–1953 годах. Лауреат Нобелевской премии В. Л. Гинзбург на склоне лет публично возражал против названия «уравнение Власова» [158]. В критике Власова участвовали академики В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, М. А. Леонтович, В. А. Фок [159]. Редакция «Журнала Экспериментальной и Теоретической Физики» (ЖЭТФ), опубликовавшая критическую статью академиков, нарушила общепринятые этические нормы, отказавшись напечатать ответ Власова,<sup>1</sup> который был вынужденно опубликован в малоизвестном «Вестнике Московского университета» [160]. Будущий лауреат Нобелевской премии Ландау писал в 1946 году [41, 42], что большая часть результатов Власова в его основополагающей статье [155] является ошибочной. То же утверждение имеется в критической статье четырёх авторов [159]. Между тем позднее было доказано, что раскритикованная статья вообще не содержит ошибок.

---

<sup>1</sup> В редакционном примечании к статье [159] сказано, что её авторы были ознакомлены с ответом А. А. Власова.

Признание научных заслуг Анатолия Александровича Власова пришло из-за рубежа, где бесстолкновительное кинетическое уравнение (12) называли не иначе как по имени его автора. В 1970 году Власову была присуждена Ленинская премия за его работы по физике плазмы. Признанию на Родине содействовал академик Б. Б. Кадомцев [161].

### §13.4. Потенциальные колебания электронов плазмы

Кинетическое уравнение с самосогласованным полем его автор попытался применить (не вполне успешно) для решения задачи о потенциальных колебаниях электронов плазмы. Напомним (§1.6), что эти колебания были открыты Дитмером (Arthur Dittmer) и Пеннингом (Frans Penning) в 1926 году, но их происхождение тогда не было понято. Гидродинамическая теория потенциальных электронных колебаний была изложена в статье Тонкса (Levi Tonks) и Ленгмюра (Irving Langmuir) 1929 года [30]. Однако лишь после предсказания в 1945–1946 годах явления бесстолкновительного затухания Ландау теория ленгмюровских колебаний приобрела завершённый вид.

Повторим сначала вычисления, сделанные Власовым в 1938 году [155].<sup>2</sup> С самого начала учтём, что в потенциальных колебаниях магнитное поле отсутствует, а электрическое поле можно выразить через градиент электрического потенциала:

$$\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

Представим также, что ионы образуют неподвижный однородный фон с плотностью  $n_i = \text{const}$ , и рассмотрим ленгмюровские колебания, распространяющиеся в направлении оси  $x$ , так что задача становится одномерной. Кинетическое уравнение для функции распределения электронов  $f(v, x, t)$  в таком случае приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(-e)}{m} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (16)$$

где  $(-e)$  — заряд электрона,  $m$  — его масса; для краткости в этом параграфе опускаем индекс  $e$  у величин  $f_e$ ,  $e_e = -e$ ,  $m_e$ , которые относятся к электронам, и, кроме того, выражаем функцию распределения через

---

<sup>2</sup> Способ вычислений в указанной статье отличается от описанного ниже. Нужно также пояснить, что Власов рассматривал не только потенциальные колебания плазмы.

скорость  $v = p/m$  вместо импульса  $p$ . Электрический потенциал должен удовлетворять уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_e dv - n_i \right). \quad (17)$$

Для колебаний с малой амплитудой уравнения (16), (17) можно линеаризовать, выделив в функции распределения электронов  $f$  малую часть  $f_1$ , пропорциональную малой амплитуде потенциала  $\varphi$ :

$$f_e = f_0(v) + f_1(v, x, t). \quad (18)$$

Равновесная часть функции распределения  $f_0(v)$  в однородной плазме не зависит от координаты  $x$  и удовлетворяет условию квазинейтральности

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) dv = n_i,$$

поэтому в уравнение Пуассона входит только  $f_1$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} f_1 dv. \quad (19)$$

Чтобы линеаризовать кинетическое уравнение, нужно отбросить слагаемое  $(e/m)(\partial\varphi/\partial x)(\partial f_1/\partial p)$ , поскольку оно квадратично по амплитуде волны, а также учесть, что  $\partial f_0/\partial t = 0$  и  $\partial f_0/\partial x = 0$ . В линеаризованном уравнении

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad (20)$$

как и в уравнения Пуассона (19), все коэффициенты при неизвестных пока функциях  $f_1$  и  $\varphi$  не зависят ни от координаты  $x$ , ни от времени  $t$ ; равновесная функция распределения  $f_0(v)$  предполагается известной.

Обычный способ решения подобных систем уравнений состоит в том, что неизвестные функции раскладывают в интегралы Фурье по функциям  $\exp(ikx)$ . Уравнения для Фурье-амплитуд получают, приговаривая слова «ищем решение в виде»

$$\varphi(x, t) = \varphi_k(t) \exp(ikx), \quad f_1(v, x, t) = f_k(v, t) \exp(ikx). \quad (21)$$

Подставляя это представление в уравнения (19) и (20), получаем систему линейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikv f_k + ik\varphi_k \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad (22)$$

$$-k^2\varphi_k = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} f_k(v) dv \quad (23)$$

для амплитуд  $\varphi_k(t)$  и  $f_k(v, t)$ , в которую  $k$  входит как внешний параметр.

По аналогии с системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами попробуем сначала отыскать решение в виде собственных колебаний с заданной частотой  $\omega$ . Подставив

$$f_k(v, t) = f_{k\omega}(v) \exp(-i\omega t), \quad \varphi_k(t) = \varphi_{k\omega} \exp(-i\omega t) \quad (24)$$

в уравнение (22), находим

$$f_{k\omega} = \frac{k}{\omega - kv} \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \varphi_{k\omega}. \quad (25)$$

Подставляя это выражение в уравнение (23), получаем уравнение

$$k^2 \epsilon(\omega, k) \varphi_{k\omega} = 0, \quad (26)$$

где

$$\epsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv. \quad (27)$$

Из него следует, что собственное колебание с амплитудой  $\varphi_{k\omega}$ , не равной нулю, существует, если имеется такая пара параметров  $\omega$  и  $k$ , которые являются решением дисперсионного уравнения

$$\epsilon(\omega, k) = 0. \quad (28)$$

Функцию  $\epsilon(\omega, k)$  называют диэлектрической проницаемостью плазмы. Подынтегральное выражение в её определении (27) имеет особенность — полюс первого порядка при

$$kv = \omega. \quad (29)$$

Интеграл не определён, пока не указано правило обращения с этой особенностью.

Поскольку скорость электронов  $v$  не может превышать скорость света  $c$ , особенность возникает только для колебаний, фазовая скорость которых  $\omega/k$  меньше скорости света. В статье 1938 года Власов словно бы не заметил этого факта и ограничился рассмотрением случая  $kv \ll \omega$ . Он разложил знаменатель в подынтегральном выражении в ряд и удержал несколько первых членов:

$$\frac{1}{\omega - kv} \approx \frac{1}{\omega} + \frac{kv}{\omega^2} + \frac{k^2 v^2}{\omega^3} + \frac{k^3 v^3}{\omega^4}.$$

Решив уравнение (28), он вычислил частоту ленгмюровских колебаний с учётом первой поправки:

$$\omega = \omega_p \left( 1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_D^2 \right),$$

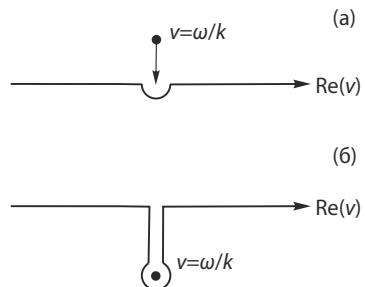
где  $\omega_p = \sqrt{4\pi n^2 e^2 / m}$ ,  $\lambda_D = \sqrt{T / 4\pi n e^2}$  (задача 10).

Позднее Л. Д. Ландау утверждал [41, 42], что Власов без достаточных оснований предложил взять главное значение в интеграле (27), хотя в статье Власова [155] нет слов «интеграл в смысле главного значения». В монографии 1945 года Власов дал точное решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) о потенциальных колебаниях в плазме с лоренцевской функцией распределения электронов и предсказал, что такие колебания затухают [40, с. 37 и 189]. Монография [40] была подписана в печать 26 мая 1945 года. Через неделю, 2 июня, редакция ЖЭТФ получила статью Ландау [41, 42]. Решение Власова, опубликованное в малодоступных «Учёных записках Московского университета», на долгие годы осталось неизвестным, и бесстолкновительное затухание волн в плазме получило название затухания Ландау.

Во время описываемых событий Власов и Ландау оба преподавали в Московском государственном университете. Имеется свидетельство профессора Л. С. Кузьменкова [162, с. 197] в приложении к переизданию монографии [40], что Ландау присутствовал на семинаре, где Власов рассказал о своих расчётах; Ландау объявил эти расчёты ошибочными и пообещал изложить правильную теорию на следующем семинаре, но опубликовал её под своим именем, умолчав о решении Власова. В упоминавшейся критической статье [159] четырёх авторов, направленной в ЖЭТФ 12 марта 1945 года, почти на три месяца раньше статьи Ландау [41, 42], имеется косвенное подтверждение этой версии. В примечании на титульной странице статьи сказано, что её авторы ознакомлены с ответом Власова. В этом ответе, отвергнутом редакцией ЖЭТФ, но позднее опубликованном в «Вестнике Московского университета» [160], Власов повторил свое решение задачи Коши, посетовав, что его критики предпочли умолчать о его монографии [40]. У нас нет права приписывать Ландау злой умысел, ведь могло случиться и так, что Власов обратился к задаче Коши под влиянием реплик Ландау на том семинаре.

Следует признать, что Ландау продемонстрировал более ясное и математически изящное решение задачи о малых колебаниях плазмы. Он разъяснил, что естественная постановка этой задачи обычно содержит начальные или граничные условия. Ниже мы ограничимся «правдоподобными» рассуждениями, предоставив читателю возможность самостоятельно воспроизвести метод решения, предложенный Ландау (задачи 15 и 16).

**Рис. 2.** Контур интегрирования в комплексной плоскости  $v$  при вычислении интегралов вида  $\int_{-\infty}^{\infty} [g(v)/(\omega - kv)] dv$  для случая  $k > 0$ ; (а) при  $\text{Im}(\omega) > 0$  контур интегрирования проходит по вещественной оси  $\text{Re}(v)$ ; (б) при  $\text{Im}(\omega) \leq 0$ , контур интегрирования обходит особую точку  $v = \omega/k$  снизу.



### §13.5. Правило обхода Ландау

Чтобы придать интегралу (27) определённый смысл, вместо строго гармонической функции  $\varphi_k(t)$ , пропорциональной  $e^{-i\omega t}$ , будем подразумевать потенциал, который медленно включается от бесконечно удалённого в прошлое момента времени  $t = -\infty$ . Такому описанию соответствует добавление к частоте потенциала малой положительной мнимой части, т. е. замена  $\omega \rightarrow \omega + i\gamma$  при  $\gamma > 0$ . Действительно, тогда  $\varphi_k(t) \propto e^{-i(\omega+i\gamma)t} = e^{-i\omega t} e^{\gamma t} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Вызываемое множителем  $e^{\gamma t}$  неограниченное возрастание потенциала при  $t \rightarrow +\infty$  не должно смущать, так как в силу принципа причинности оно не влияет на процессы, рассматриваемые при конечных временах  $t$ , между тем как с  $\gamma < 0$  потенциал оказался бы большим в прошлом, что нарушило бы применимость линейного приближения. Таким образом, правило обхода полюса в интеграле (27) определяется заменой

$$\omega \rightarrow \omega + i0. \quad (30)$$

В таком виде впервые оно было установлено [Л. Д. Ландау](#) в 1946 году [[41](#), [42](#)], хотя по существу использовалось и ранее, пусть и не в столь ясной формулировке. Например, [Г. Лэмб \(Horace Lamb\)](#), столкнувшись с проблемой расходимости интеграла из-за сингулярности на контуре интегрирования [[163](#), [164](#)] в задаче о возбуждении корабельных волн на поверхности воды, без каких-либо пояснений интерпретировал интеграл в смысле главного значения. Однако интуиция подсказала ему добавить к главному значению слагаемое, которое в сумме с интегралом обратило в нуль возвышение поверхности жидкости далеко впереди корабля. Таким способом [Лэмб](#) получил правильный результат, но упустил возможность открыть правило обхода Ландау, которое нашло применение в самых разных областях физики (см. ниже).

При учёте правила обхода (30) в формуле (27) мы имеем дело с интегралом вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z) dz}{z - i\gamma}, \quad \gamma > 0.$$

В таком интеграле путь интегрирования в плоскости комплексной переменной  $z = kv$  проходит снизу под точкой сингулярности  $z = i\gamma$ ; при  $\gamma \rightarrow 0$  это эквивалентно интегрированию вдоль вещественной оси с обходом полюса  $z = i\gamma$  по бесконечно малой полуокружности снизу, как показано на рисунке 2. Вклад в интеграл от этого обхода определяется полувычетом подынтегрального выражения, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z)}{z - i0} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z)}{z} dz + i\pi g(0),$$

где перечёркнутый знак интеграла означает, что интеграл берётся в смысле главного значения. Этую формулу можно записать в символическом виде

$$\frac{1}{z - i0} = \mathcal{P} \frac{1}{z} + i\pi \delta(z),$$

где символ  $\mathcal{P}$  означает взятие (при дальнейшем интегрировании) главного значения. Считается также, что дельта-функция Дирака  $\delta(z)$  равна нулю всюду, кроме точки  $z = 0$ , однако интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} g(z) \delta(z) dz = g(0)$  имеет конечное значение. В исходных переменных

$$\frac{1}{\omega - kv + i0} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega - kv} - \pi i \delta(\omega - kv) \quad (31)$$

при том, что  $\delta(\omega - kv) = \delta(kv - \omega) = \delta(v - \omega/k)/|k|$ .

Правило обхода Ландау нашло применение во многих разделах физики. Например, аналог затухания Ландау, которому посвящён следующий параграф, обнаружен в задаче о распространении звуковой волны в жидкости с пузырьками газа [165], в задаче о возбуждении корабельных волн надводным или подводным объектом [166], в задаче о возбуждении ветром волн на поверхности воды [167], а также в различных задачах о колебаниях неоднородной жидкости и плазмы [168].

## §13.6. Затухание Ландау

С учётом правила обхода Ландау диэлектрическая проницаемость оказывается комплексной даже при вещественных  $k$  и  $\omega$ :

$$\epsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv} dv - \frac{4\pi e^2}{km} \frac{\pi i}{|k|} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k}. \quad (32)$$

Отсюда следует, что дисперсионное уравнение не может иметь вещественных корней (за исключением случая, когда  $\partial f_0 / \partial v = 0$  при  $v = \omega/k$ ).

Рассмотрим предельный случай длинных волн,  $k \rightarrow 0$ , в плазме с максвелловской функцией распределения электронов

$$f_0(v) = \frac{n}{\sqrt{\pi} v_T} e^{-v^2/v_T^2}, \quad (33)$$

где  $v_T = \sqrt{2T/m}$  — тепловая скорость. Поскольку функция  $f_0(v)$  быстро убывает с увеличением  $|v|$ , а точка  $v = \omega/k$  отодвигается к очень большим  $|v|$ , подынтегральное выражение в формуле (32) можно разложить по степеням  $k$  и затем выполнить интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv &\approx \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0}{\partial v} \left[ \frac{1}{\omega} + \frac{kv}{\omega^2} + \dots \right] dv = \\ &= -\frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{1}{\omega} + \frac{kv}{\omega^2} + \dots \right] dv = \\ &= -\frac{4\pi e^2}{km} \frac{k}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) dv = -\frac{4\pi e^2 n}{m \omega^2}. \end{aligned}$$

В результате такого упрощения дисперсионное уравнение принимает вид

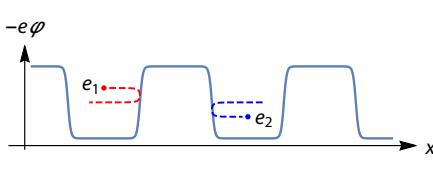
$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{4\pi e^2}{km} \frac{\pi i}{|k|} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} = 0, \quad (34)$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n / m}$  обозначает ленгмюровскую частоту (§1.6). Последнее слагаемое в этом уравнении экспоненциально мало (если  $\omega/k \gg v_T$ ), поэтому решение ищем методом последовательных приближений в виде  $\omega = \omega'_k + i\omega''_k$ , где  $i\omega''_k$  — малая мнимая добавка. На первом шаге пренебрегаем последним слагаемым в уравнении (34) и находим вещественное решение

$$\omega'_k = \omega_p \quad (35)$$

(для определённости выбираем волну, которая при  $k > 0$  распространяется в положительном направлении оси  $x$ ). На втором шаге подставим  $\omega = \omega_p$  в отброшенное ранее слагаемое, а сумму двух первых слагаемых разложим относительно  $i\omega''_k = \omega - \omega_p$ :

$$\varepsilon = \frac{2i\omega''_k}{\omega_p} - \frac{4\pi e^2}{km} \frac{\pi i}{|k|} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega_p/k} = 0.$$



**Рис. 3.** Схема обмена энергией между резонансными электронами и волной. Электрон  $e_1$ , опережающий волну, тормозится, а электрон  $e_2$ , отстающий от волны, ускоряется при отражении от горба потенциала.

Отсюда находим

$$\omega_k'' = \omega_p \frac{2\pi e^2}{km} \frac{\pi}{|k|} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\omega_p/k}. \quad (36)$$

В плазме с максвелловской функцией распределения мнимая поправка отрицательна и равна

$$\omega_k'' = -\frac{\sqrt{\pi}\omega_p}{(2k^2\lambda_D^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2k^2\lambda_D^2}\right) = -\gamma, \quad (37)$$

где  $\lambda_D = v_T/\sqrt{2\omega_p} = \sqrt{T/4\pi ne^2}$  — дебаевская длина электронов. Следовательно, ленгмюровские колебания затухают. Декремент затухания (37) вычислен [Л. Д. Ландау](#) [41, 42], в связи с чем сам эффект бесстолкновительного затухания ленгмюровских колебаний называют **затуханием Ландау**. При  $k\lambda_D \ll 1$  декремент затухания экспоненциально мал. Однако при  $k\lambda_D \lesssim 1$  затухание становится сильным и  $\gamma \sim \omega_p$ . Сильное затухание ленгмюровских колебаний при  $k\lambda_D \lesssim 1$  было предсказано Ленгмюром [30] задолго до появления теории Ландау.

Затухание Ландау не вызывало бы удивление, если бы было следствием столкновений частиц. Однако кинетическое уравнение Власова считается бесстолкновительным, поскольку сохраняет энтропию. Мы окончательно убедимся в этом в следующей лекции, где будет дан вывод кинетического уравнения с интегралом столкновений. Не будучи связанным со столкновениями, затухание Ландау принципиально отличается от диссиляции в обычных поглощающих средах тем, что представляет собой термодинамически обратимый процесс. Этот факт был доказан в экспериментах по генерации эха в плазме [169].

Механизм затухания Ландау можно пояснить с помощью рисунка 3. Там изображён потенциальный рельеф ленгмюровской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$  с фазовой скоростью  $v_{ph} = \omega/k$ . Пусть система координат перемещается вместе с волной. В этой системе электрический потенциал представляет периодическая функция  $\varphi(x)$ , не за-

висящая от времени. Для упрощения анализа профиль  $\phi(x)$  составлен из прямоугольных кусков. Электрон, скорость которого в лабораторной системе координат равна  $v$ , в системе волны движется со скоростью  $u = v - v_{ph}$ . Если  $mu^2/2 < e\phi_0$ , где  $\phi_0$  — амплитуда электрического потенциала волны, то электрон будет заперт в потенциальной яме между двумя потенциальными горбами. Отражаясь от этих горбов, электрон будет обмениваться энергией с волной. Такие «резонансные» электроны при надлежат к узкому участку распределения скоростей, поскольку предполагается, что амплитуда потенциала волны, умноженная на заряд электрона, мала по сравнению со средней кинетической энергией теплового движения электрона (иначе нельзя линеаризовать кинетическое уравнение). Электроны, не принадлежащие к этому участку распределения, испытывают только относительно слабое воздействие поля волны.

Резонансные частицы можно разделить на две группы: догоняющие волну ( $v > v_{ph}$ ) и отстающие от волны ( $v < v_{ph}$ ). На рисунке 3 точка  $e_1$  изображает электрон, принадлежащий к первой группе, а точка  $e_2$  — электрон второй группы. В системе координат, движущейся вместе с волной, обе частицы после столкновения с потенциальными горбами изменяют направление скорости (без изменения её значения):  $u \rightarrow -u$ . Поэтому в лабораторной системе координат догоняющий электрон после столкновения будет иметь скорость  $v_1 = v_{ph} - u = 2v_{ph} - v < v$ , т. е. часть кинетической энергии от электронов будет передана волне. Напротив, отстающий электрон после столкновения с гребнем волны приобретает дополнительную энергию. При максвелловском распределении электронов в плазме по скоростям, которое убывает с ростом скорости, догоняющих частиц меньше, чем отстающих, поэтому суммарный эффект взаимодействия резонансных частиц с волной должен заключаться в перекачке энергии волны в энергию теплового движения, что должно привести к затуханию колебаний.

Очевидно, что чем больше концентрация резонансных частиц, тем более сильным должно быть затухание. При максвелловском распределении по скоростям оно должно усиливаться с уменьшением  $v_{ph}$ . Фазовая скорость волны уменьшается с увеличением волнового числа  $k$ , и при  $k \gtrsim 1/\lambda_D$  она оказывается порядка тепловой скорости электронов  $v_T$ . В этом случае затухание становится настолько сильным, что волны не могут распространяться в плазме. В противоположном случае, при  $k \ll 1/\lambda_D$ , фазовая скорость велика по сравнению с тепловой,  $v_{ph} \gg v_T$ , число резонансных частиц экспоненциально уменьшается, и затухание оказывается очень слабым.

Из подобных рассуждений и формулы (36) ясно, что волна будет затухать ( $\omega''_k < 0$ ), если вблизи резонанса  $v = \omega/k$  производная  $\partial f_0 / \partial v$  меньше нуля. Напротив, волна будет нарастать ( $\omega''_k > 0$ ), если производная положительна. Это может случиться, если в плазму вводят пучок частиц. Соответствующее явление называют пучковой неустойчивостью. Поучительно проследить за механизмом затухания Ландау и механизмом раскачки пучковой неустойчивости более детально и вывести формулу (36) прямым способом, не прибегая к кинетическому уравнению (задача 11).

### Литература

Начальные сведения по кинетике плазмы наряду с выводом уравнения Власова и дисперсии ленгмюровских колебаний изложены в «Лекциях по физике плазмы» Д. А. Франк-Каменецкого [4, гл. 6, §1, 2, 6–8]. В 10-м томе «Курса теоретической физики» [55], написанном Е. М. Лифшицем и Л. П. Питаевским, содержанию лекции соответствуют §27 и §30. Здесь сформулировано понятие функции распределения и физически малого объёма фазового пространства.

Линейное и нелинейное затухание Ландау рассматривается во многих книгах. Одно из лучших описаний дано Б. Б. Кадомцевым в учебнике «Коллективные явления в плазме» [11, гл. 2, §4.5]. Эксперименты по проверке затухания Ландау описаны в книге «Введение в физику плазмы» Ф. Чена (Francis Chen) [10, §7.8].

### Задачи и вопросы

**Задача 1.** Обобщите формулу (4), которая выражает плотность частиц через их функцию распределения, на случай  $d^3x \neq dV$ .

Решение  $\Rightarrow 336$

**Задача 2.** Выведите кинетическое уравнение в дивергентной форме (10) для функции распределения  $\bar{f}$ , имеющей смысл плотности частиц в конфигурационном пространстве, не предполагая, что координаты и импульсы канонически сопряжены.

Решение  $\Rightarrow 337$

**Задача 3.** Проверьте равенство  $\frac{\partial}{\partial p} \cdot [v \times B] = 0$ .

Решение  $\Rightarrow 338$

**Задача 4.** Найдите радиус экранирования точечного заряда в плазме с изотропной, но не обязательно максвелловской функцией распределения.

[Решение ⇒ 339](#)

**Задача 5.** Докажите, что кинетическое уравнение Власова сохраняет энтропию.

[Решение ⇒ 340](#)

**Задача 6.** Найдите стационарное решение уравнения Власова в дрейфовом приближении.

[Решение ⇒ 341](#)

**Задача 7.** Используя результат предыдущей задачи, покажите, что в дрейфовом приближении плотность и давление плазмы на фиксированной силовой линии зависят только от величины магнитного поля  $B$ .

[Решение ⇒ 342](#)

**Задача 8.** Вычислите плотность и давление плазмы, в которой распределение ионов описывается функцией  $f = N \delta(\mu - \varepsilon/B_*) \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$ , где  $N$  — нормировочная константа,  $B_*$  — магнитное поле в точке остановки частиц, а  $\varepsilon_0$  — энергия ионов. Для простоты принять, что  $\varphi = 0$  (плазма с холодными электронами).

**Задача 9.** Докажите, что в устойчивой плазме нули диэлектрической проницаемости могут находиться только в нижней полуплоскости комплексной частоты  $\omega$ .

[Решение ⇒ 342](#)

**Задача 10.** Найдите тепловую поправку к вещественной части частоты ленгмюровских колебаний.

[Решение ⇒ 342](#)

**Задача 11.** Найдите декремент затухания ленгмюровских колебаний, выполнив интегрирование уравнений движения электронов и вычислив работу электрического поля над электронами плазмы.

[Решение ⇒ 343](#)

**Задача 12.** Докажите, что для изотропной плазмы бесстолкновительная диссипация всегда положительна.

[Решение ⇒ 344](#)

**Задача 13.** Вычислите диэлектрическую проницаемость плазмы с лоренцевской функцией распределения, а также частоту и декремент затухания ленгмюровской волны.

[Решение ⇒ 344](#)

**Задача 14.** Вычислите диэлектрическую проницаемость плазмы с максвелловской функцией распределения.

[Решение ⇒ 345](#)

**Задача 15.** Используя преобразование Лапласа, решите задачу о потенциальных колебаниях электронов плазмы при заданных начальных условиях.

[Решение](#)  $\Rightarrow$  345

**Задача 16.** При  $t \rightarrow +\infty$  найдите асимптотику решения, полученного в предыдущей задаче.

[Решение](#)  $\Rightarrow$  347

## Лекция 14

# Интеграл столкновений

Уравнение Фоккера–Планка.

Вектор динамической силы и тензор диффузии.

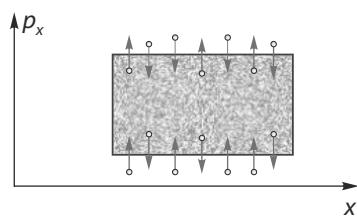
Интеграл столкновений Ландау

Попытаемся теперь учесть столкновения частиц. Столкновения приводят к скачкообразному изменению скорости, которое в фазовом пространстве выглядит как переброс частиц из одной точки фазового пространства ( $\mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1$ ) в другую ( $\mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2$ ), причём  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ , как показано на рисунке 1. Такие перескоки можно описать, добавив в правую часть кинетического уравнения (13.12) дополнительный член  $\sum_a C_{ba}$ , где суммирование идёт по всем сортам частиц:

$$\frac{df_b}{dt} = \sum_a C_{ba}. \quad (1)$$

Отдельное слагаемое  $C_{ba} \equiv C[f_b, f_a]$  называется *интегралом столкновений* частиц сорта  $b$  с частицами сорта  $a$ . Интеграл столкновений имеет смысл числа частиц, которые появляются за единицу времени в единице объёма шестимерного фазового пространства.

**Рис. 1.** В столкновениях частиц их импульс изменяется на случайную величину за очень малое время. Анализируя динамику системы за более длительное время, можно считать, что частицы испытывают мгновенные случайные блуждания, которые приводят к изменению числа частиц внутри выделенного объёма в фазовом пространстве.



Кулоновские столкновения являются собой типичный пример кинетических процессов, в которых средние изменения величин (от которых зависит функция распределения) в каждом элементарном акте малы по сравнению с их характерными значениями. Характерные времена таких процессов велики по сравнению с временами элементарных актов, составляющих их микроскопический механизм; в этом смысле такие процессы можно назвать медленными. Медленность кулоновского рассеяния обусловлена доминированием далёких столкновений, в одном акте которых импульс частиц изменяется незначительно. Подобные медленные процессы описывает уравнение Фоккера–Планка, которое было известно задолго до зарождения физики плазмы.

### §14.1. Уравнение Фоккера–Планка

Обозначим через  $w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q$  отнесённую к единице времени вероятность изменения импульса  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{q}$  частицы сорта  $b$  при её столкновении с частицей сорта  $a$ . Тогда кинетическое уравнение для функции  $f_b(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$  записывается в виде

$$\frac{df_b}{dt} = \sum_a \int \{w_{ba}(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{x}, t) - w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)\} d^3q, \quad (2)$$

где справа стоит разность между числом частиц, поступающих за единицу времени в единичный элемент импульсного пространства и покидающих его за то же время. Для краткости несущественные аргументы  $\mathbf{x}, t$  далее временно будут опущены.

Согласно сделанным предположениям, функция  $w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  быстро убывает с увеличением  $\mathbf{q}$ , так что основной вклад в интеграл дают значения  $\mathbf{q}$ , малые по сравнению со средним импульсом частиц  $\mathbf{p}$ . Это обстоятельство позволяет произвести в подынтегральном выражении разложение

$$\begin{aligned} w_{ba}(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p}) &\approx \\ &\approx -q_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} q_\mu q_\nu \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\nu} w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3)$$

где по повторяющимся индексам  $\mu, \nu$  (которые пробегают значения  $x, y, z$ ) подразумевается суммирование. Меняя в уравнении (2) очерёдность интегрирования по  $d^3q$  и дифференцирования по  $p_\mu$  и  $p_\nu$ , получа-

ем уравнение Фоккера—Планка

$$\frac{df_b}{dt} = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \left( F_\mu f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\mu\nu} f_b \right), \quad (4)$$

где

$$F_\mu = \sum_a \int q_\mu w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q, \quad D_{\mu\nu} = \sum_a \int q_\mu q_\nu w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q. \quad (5)$$

Коэффициенты  $F_\mu$  и  $D_{\mu\nu}$  составляют соответственно вектор динамической силы и тензор диффузии в пространстве импульсов.

Существует альтернативная форма уравнения Фоккера—Планка

$$\frac{df_b}{dt} = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \left( A_\mu f_b - \frac{1}{2} D_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f_b \right), \quad (6)$$

в которой коэффициент

$$A_\mu = F_\mu - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial p_\nu} \quad (7)$$

также (и даже чаще, чем  $F_\mu$ ) называют динамической силой; в отличие от  $\mathbf{F}$ , сила  $\mathbf{A}$  не является силой трения в обычном понимании этого слова (задача 3).

Уравнение Фоккера—Планка по сути является уравнением непрерывности в импульсном пространстве, поскольку интеграл столкновений в его правой части есть дивергенция вектора  $\mathbf{s}$  с компонентами

$$s_\mu = F_\mu f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\mu\nu} f_b.$$

Вектор  $\mathbf{s}$  имеет смысл плотности потока частиц в импульсном пространстве. Наконец, следует обратить внимание, что два первых члена разложения (3), которые мы сохранили при вычислении  $\mathbf{s}$ , дают вклад одного порядка величины в интеграл столкновений, а вот последующие члены разложения уже малы по сравнению с двумя первыми и поэтому были отброшены. Это наблюдение подтверждается тем (пока ещё не доказанным) фактом, что для равновесной — максвелловской — функции распределения правая часть уравнения (6) должна обращаться в нуль. Формально оно означает, что усреднение первых степеней знакопеременных величин  $q_\mu$  связано с большим погашением, чем при усреднении квадратичных выражений  $q_\mu q_\nu$ . По сути же дела, наличие динамической силы  $A_\mu f$  объясняется тем, что однородное (в пространстве импульсов) распределение не является равновесным. Если искусственно

создать такое распределение, то по истечении некоторого времени оно само собой перейдет в распределение Максвелла.

Кинетическое уравнение вида (6), в котором коэффициенты определены через усреднённые характеристики элементарных актов согласно формулам (5) и (7), было получено независимо А. Фоккером ([Adriaan Fokker, 1914 \[170\]](#)) и М. Планком ([Max Planck, 1917 \[171\]](#)). Специфические свойства переменных  $\mathbf{p}$  как импульсов частиц в изложенном выше выводе не играли роли. Уравнение такого же типа будет справедливо и для функций распределения по другим переменным, если только выполнено условие, лежащее в основе вывода — относительная малость изменения величин в элементарных актах.

Фоккер и Планк рассматривали процессы, в которых интегральный оператор, выражющий изменение функции распределения в элементарных актах, линеен по функции распределения  $f_b$ . В плазме коэффициенты  $F_\mu$  и  $D_{\mu\nu}$ , вообще говоря, зависят от функций распределения частиц всех сортов. Знаменательное исключение составляет модель пробных частиц, которая хорошо описывает случай, когда в плазму вводят пучок частиц малой плотности. Если плотность пробных частиц мала по сравнению с плотностью полевых частиц, можно считать, что коэффициенты  $F_\mu$  и  $D_{\mu\nu}$  не зависят от функции распределения пробных частиц и мы приходим к той постановке задачи, которую рассматривали Фоккер и Планк. Её решение, помимо очевидной практической пользы, позволяет также выявить физический смысл коэффициентов  $F_\mu$  и  $D_{\mu\nu}$  (задача 3).

Согласно формулам (5), интеграл столкновений в самом общем случае выражается через средние характеристики столкновений. Следовательно, его вычисление представляет собой механическую задачу. Она будет решена в следующем разделе.

## §14.2. Интеграл столкновений Ландау

Чтобы вычислить коэффициенты уравнения Фоккера—Планка (5), заметим, что отдельный интеграл, например

$$\int q_\mu w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q,$$

есть не что иное, как среднее приращение компоненты импульса  $p_\mu$  частицы сорта  $b$  за единицу времени в результате кулоновского рассеяния на частицах сорта  $a$ . Используя сведения, изложенные в лекциях 7 и 8,

это же приращение можно выразить через сечение кулоновских столкновений  $d\sigma$ , относительную скорость сталкивающихся частиц  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$  и функцию распределения частиц плазмы, причём далее удобно перейти к распределению по скоростям  $f_a(\mathbf{v}')$ :

$$\iint q_\mu u d\sigma f_a(\mathbf{v}') d^3 v'.$$

Дифференциальное сечение, соответствующее передаче импульса  $\mathbf{q}$  с рассеянием на угол  $\theta$ , определяется формулой Резерфорда

$$d\sigma = \frac{e_a^2 e_b^2}{4m_{ab}^2 u^4} \frac{do}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (8)$$

где  $do = 2\pi \sin \theta d\theta$  обозначает элемент телесного угла, соответствующего элементу объёма  $d^3 q = q^2 do$  в пространстве импульсов. Таким образом, вычисление коэффициентов уравнения Фоккера—Планка включает двойное интегрирование по углу рассеяния и по распределению рассеивающих частиц:

$$\begin{aligned} F_\mu &= \sum_a \iint q_\mu u d\sigma f_a(\mathbf{v}') d^3 v', \\ D_{\mu\nu} &= \sum_a \iint q_\mu q_\nu u d\sigma f_a(\mathbf{v}') d^3 v'. \end{aligned} \quad (9)$$

Выполним отдельно усреднение по углу рассеяния. Для этого вычислим интегралы

$$\int q_\mu u d\sigma, \quad \int q_\mu q_\nu u d\sigma, \quad (10)$$

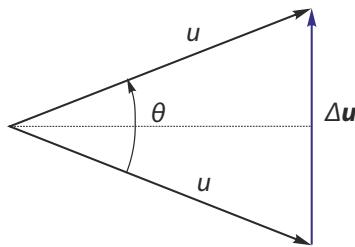
приняв во внимание, что формула Резерфорда (8) относится к системе центра инерции.

В этой системе абсолютная величина относительной скорости  $u$  в результате рассеяния не меняется, а изменение импульса

$$\mathbf{q} = m_{ab} \Delta \mathbf{u}$$

выражается через изменение вектора относительной скорости  $\Delta \mathbf{u}$  и приведённую массу  $m_{ab}$ . Как показано на рисунке 2,

$$\Delta \mathbf{u} = 2u \sin(\theta/2).$$



**Рис. 2.** В системе центра масс столкновение двух заряженных частиц поворачивает вектор относительной скорости  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a$  на угол  $\theta$ , не меняя его длину. Изменение  $\Delta\mathbf{u}$  вектора  $\mathbf{u}$  по абсолютной величине равно длине основания равнобедренного треугольника с длиной бедер  $u$  и углом  $\theta$  между ними,  $\Delta\mathbf{u} = 2u \sin(\theta/2)$ .

Сохранение энергии сталкивающихся частиц  $\frac{1}{2}m_{ab}u^2 = \frac{1}{2}m_{ab}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})^2$  в системе центра масс даёт ещё одно полезное равенство

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{2}m_{ab}\Delta\mathbf{u}^2.$$

Интегрирование по  $d\sigma$  в формулах (10) сводится к интегрированию по телесному углу  $d\sigma = 2\pi \sin \theta \, d\theta$ . Поскольку направление относительной скорости  $\mathbf{u}$  составляет единственное выделенное направление, очевидно, что результат интегрирования можно выразить через компоненты вектора  $\mathbf{u}$  и инвариантные тензоры, такие как единичный тензор второго ранга  $\delta_{\mu\nu}$  и абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга  $\epsilon_{\mu\nu\gamma}$ ; напомним, что инвариантным называется тензор, компоненты которого не изменяются при повороте или инверсии системы координат (задача 4). Следовательно,

$$\begin{aligned} \int q_\mu u \, d\sigma &= \mathbb{A} \frac{u_\mu}{u}, \\ \int q_\mu q_\nu u \, d\sigma &= \mathbb{B} \delta_{\mu\nu} + \mathbb{C} \frac{u_\mu u_\nu}{u^2} + \mathbb{D} \epsilon_{\mu\nu\gamma} \frac{u_\gamma}{u}, \end{aligned} \tag{11}$$

где  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{D}$  – функции, зависящие только от  $u = |\mathbf{u}|$ . Так как  $q_\mu q_\nu$  не изменяется при замене  $\mathbf{u}$  на  $-\mathbf{u}$ , без дальнейших вычислений ясно, что должно быть  $\mathbb{D} = 0$ . Чтобы найти коэффициент  $\mathbb{A}$ , нужно составить свёртку

$$\frac{u_\mu}{u} \int q_\mu u \, d\sigma = \mathbb{A},$$

умножив  $\int q_\mu u \, d\sigma$  на  $u_\mu/u$  и затем выполнив суммирование по повторяющемуся индексу  $\mu$ . Аналогичным образом коэффициенты  $\mathbb{B}$  и  $\mathbb{C}$  выра-

жаются через свёртки  $\int q_\mu q_\nu u d\sigma$  с тензором  $\delta_{\mu\nu}$  и тензором  $u_\mu u_\nu / u^2$ :

$$\delta_{\mu\nu} \int q_\mu q_\nu u d\sigma = 3\mathbb{B} + \mathbb{C},$$

$$\frac{u_\mu u_\nu}{u^2} \int q_\mu q_\nu u d\sigma = \mathbb{B} + \mathbb{C}.$$

Левые части составленных уравнений нетрудно определить, вычислив свёртки под знаком интеграла в формулах (10):

$$\frac{u_\mu}{u} \int q_\mu u d\sigma = \int (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}) d\sigma = -\frac{m_{ab}}{2} \int \Delta u^2 d\sigma,$$

$$\delta_{\mu\nu} \int q_\mu q_\nu u d\sigma = \int (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) u d\sigma = m_{ab}^2 u \int \Delta u^2 d\sigma,$$

$$\frac{u_\mu u_\nu}{u^2} \int q_\mu q_\nu u d\sigma = \int (\mathbf{q} \cdot \mathbf{u})^2 u^{-1} d\sigma = \frac{m_{ab}^2}{4u} \int \Delta u^4 d\sigma.$$

Отсюда видно, что вычисление коэффициентов (9) в уравнении Фокке-Планка сводится к вычислению средних значений  $\Delta u^2$  и  $\Delta u^4$ .

Используя формулу Резерфорда (8) и соотношение  $\Delta u = 2u \sin(\theta/2)$ , имеем

$$\int \Delta u^2 d\sigma = \int [2u \sin(\theta/2)]^2 \frac{e_a^2 e_b^2}{4m_{ab}^2 u^4} \frac{d\sigma}{\sin^4(\theta/2)} =$$

$$= \frac{e_a^2 e_b^2}{m_{ab}^2 u^2} \int \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{\sin^2(\theta/2)} = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2}{m_{ab}^2 u^2} \int \frac{\cos(\theta/2) d\theta}{\sin(\theta/2)}.$$

Интеграл логарифмически расходится на нижнем пределе, но происхождение расходимости, как установлено в лекции 7, вызвано тем, что формула Резерфорда не учитывает дебаевское экранирование кулоновского поля рассеивающего центра. Приблизительно правильный результат получается обрезанием интервала интегрирования со стороны малых углов. Выполнив интегрирование по  $\theta$  от  $\theta_{\min}$  до  $\pi$ , находим

$$\int \Delta u^2 d\sigma = \frac{8\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_{ab}^2 u^2} \equiv \frac{2c_{ab}}{m_{ab}^2 u^2}, \quad (12)$$

где  $\Lambda_{ab} = \ln[1/\sin(\theta_{\min}/2)] \approx \ln[2/\theta_{\min}]$  — кулоновский логарифм и введено обозначение

$$c_{ab} = 4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab} \quad (13)$$

для сокращения последующих выкладок.

При вычислении среднего значения  $\Delta u^4$  получается сходящийся интеграл, поэтому результат не содержит кулоновского логарифма  $\Lambda_{ab}$ . Поскольку теория кулоновских столкновений верна с точностью до поправок порядка  $\Lambda_{ab}^{-1} \ll 1$ , можно (и даже нужно!) считать, что

$$\int \Delta u^4 d\sigma = 0. \quad (14)$$

Тогда

$$\mathbb{A} = -\frac{m_{ab}}{2} \int \Delta u^2 d\sigma = -\frac{c_{ab}}{m_{ab} u^2}, \quad \mathbb{B} = -\mathbb{C} = \frac{m_{ab}^2 u}{2} \int \Delta u^2 d\sigma = \frac{c_{ab}}{u}.$$

Возвращаясь к интегралам (11), находим:

$$\begin{aligned} \int q_\mu u d\sigma &= \frac{c_{ab}}{m_{ab}} \left( -\frac{u_\mu}{u^3} \right), \\ \int q_\mu q_\nu u d\sigma &= c_{ab} \left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right). \end{aligned}$$

С помощью цепочки преобразований

$$\left( -\frac{u_\mu}{u^3} \right) = \frac{\partial}{\partial u_\mu} \frac{1}{u} = \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{1}{u} \quad (15)$$

и

$$\left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right) = \frac{\partial}{\partial u_\mu} \left( \frac{u_\nu}{u} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial u_\mu \partial u_\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \quad (16)$$

эти интегралы можно выразить через производные модуля относительной скорости  $u = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$  по компонентам скорости  $\mathbf{v}$  частиц сорта  $b$ . Подставляя затем полученные выражения в формулы (9) для коэффициентов уравнения Фоккера–Планка, дифференцирование по компонентам  $v_\mu, v_\nu$  можно вынести из-под знака интегрирования по  $d^3 p'$  (т. е. по импульсами частиц сорта  $a$ ) и записать результат в элегантной форме

$$\begin{aligned} F_\mu &= \sum_a \iint q_\mu u d\sigma f_a(\mathbf{v}') d^3 v' = \sum_a \frac{c_{ab}}{m_{ab}} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu}, \\ D_{\mu\nu} &= \sum_a \iint q_\mu q_\nu u d\sigma f_a(\mathbf{v}') d^3 v' = \sum_a c_{ab} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu}, \end{aligned} \quad (17)$$

где функции

$$h_a = \int u^{-1} f_a(\mathbf{v}') d^3 v', \quad g_a = \int u f_a(\mathbf{v}') d^3 v' \quad (18)$$

называются *потенциалами Розенблюта*. Они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 h_a}{\partial v_\nu^2} = -4\pi f_a, \quad \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\nu^2} = 2h_a. \quad (19)$$

Первое уравнение следует из очевидной аналогии с уравнением Пуассона  $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho_q$  и его решением

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho_q(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'.$$

Второе уравнение проверяется дифференцированием под знаком интеграла в определении  $g_a$  при помощи тождества

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v_\nu^2} = \frac{2}{u},$$

которое является частным случаем цепочки преобразований (15).

Подставляя выражения (17) в уравнение Фоккера—Планка (4), заменим в этом уравнении производные по импульсу на производные по скорости частиц сорта  $b$  (к которым относится уравнение), например:  $\partial/\partial p_\mu = (1/m_b)\partial/\partial v_\mu$ . В результате получим

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{c_{ab}}{m_b^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left( \frac{m_b}{m_{ab}} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} f_b \right).$$

С помощью второй из формул (18) это уравнение легко преобразовать к канонической форме уравнения Фоккера—Планка, выполнив дифференцирование каждого сомножителя во втором слагаемом по отдельности. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial v_\nu} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} = \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\nu^2} = 2 \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu},$$

результат дифференцирования потенциала  $g_a$  частично сокращается с первым слагаемым в скобках, приводя к малозаметной замене множителя  $m_b/m_{ab} = (m_a + m_b)/m_a$  на  $m_b/m_a$ :

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{c_{ab}}{m_b^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left( \frac{m_b}{m_a} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \frac{\partial}{\partial v_\nu} f_b \right). \quad (20)$$

В такой форме уравнение Фоккера—Планка для частиц с кулоновским взаимодействием было получено М. Розенблютом ([Marshall Rosenbluth](#)) с соавторами в 1957 году [[172](#)]. Его правую часть можно было бы назвать интегралом столкновений Розенблюта, но ещё раньше, в 1936 году, интеграл столкновений был вычислен [Л. Д. Ландау](#) [[156, 157](#)]. Свой результат Ландау представил в симметричной форме

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{c_{ba}}{2m_b} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \int \left( \frac{f_b}{m_a} \frac{\partial f'_a}{\partial v'_\nu} - \frac{f'_a}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} dv', \quad (21)$$

явно подчёркивающей нелинейную зависимость интеграла столкновений от функции распределения взаимодействующих частиц  $f_b = f_b(\mathbf{v})$  и  $f'_a = f_a(\mathbf{v}')$ . В статье Розенблюта работа Ландау не упоминается. В других публикациях того времени можно найти отголоски былых представлений, будто Ландау не учёл силу динамического трения в уравнении Фоккера—Планка, хотя доказательство эквивалентности уравнений (20) и (21) не составляет большого труда (задача 5).

### §14.3. Применение интеграла столкновений

Вывод кинетического уравнения с интегралом столкновений, изложенный выше, трактует столкновения частиц как мгновенные события, происходящие локально в одной точке пространства за бесконечно малое время. Можно предположить поэтому, что уравнение Фоккера—Планка позволяет отслеживать эволюцию функции распределения лишь за промежутки времени, большие по сравнению с длительностью столкновений, и на расстояниях, больших по сравнению с размерами области столкновения.

В плазме эти размеры характеризуются дебаевским радиусом  $\lambda_D$ , а время столкновения по порядку величины равно  $\lambda_D/v_T \sim \omega_p^{-1}$ . Таким образом, величины  $\lambda_D$  и  $\omega_p^{-1}$ ,казалось бы, устанавливают нижний предел расстояний и интервалов времени, которые допускаются кинетическим уравнением с интегралом столкновений. Однако при выводе уравнения Фоккера—Планка было использовано единственное предположение — малость изменения импульса частицы в акте столкновения, которое зарядомо выполнено в идеальной классической плазме. На практике кинетическое уравнение используют и на меньших масштабах, и на меньших временах. Вместе с тем существуют точки зрения, ставящая под сомнение такое применение интеграла столкновений Ландау [[55, §41](#)].

Другой логический изъян интеграла столкновений Ландау был указан А. А. Власовым. С одной стороны, Ландау рассматривал парные столкновения, в которых участвуют по две частицы. С другой стороны, он вынужден был обрезать расходящийся интеграл на малых углах рассеяния, которым соответствуют расстояния порядка дебаевской длины. В таких столкновениях одновременно участвует много частиц. Осознание этого факта привело Власова к понятию самосогласованного поля, о чём было рассказано в предыдущей лекции.

В реальных физических задачах существуют характерные параметры длины  $L$  и времени  $\tau$ , навязываемые условиями задачи (такие как градиентные размеры макроскопических величин плазмы, длина и период распространяющихся в ней различных волн и т. п.). В таких задачах достаточно следить за поведением системы на расстояниях и временах, малых лишь по сравнению с этими  $L$  и  $\tau$ . Другими словами, малыми лишь по сравнению с  $L$  и  $\tau$  должны быть физически бесконечно малые элементы объёма и времени. Усреднёнными по таким элементам задаются и начальные условия задачи.

## Литература

Выход уравнения Фоккера—Планка для функции распределения в системе с произвольными свойствами имеется в «Лекциях по физике плазмы» Д. А. Франк-Каменецкого [4, гл. 6, §4]; там же в §19 дан вывод интеграла столкновений Ландау.

Выход интеграла столкновений Ландау, близкий к оригиналу [156, 157], приведён в «Физической кинетике» [55] Е. М. Лифшица и Л. П. Пitaевского. Содержанию лекции соответствуют §21 и §41; в §46 дан вывод сходящегося интеграла столкновений.

Более детально с теорией кулоновских столкновений можно ознакомиться по статье Ф. Хинтона в 1-м томе «Основ физики плазмы» [173]. Можно также рекомендовать статьи Б. А. Трубникова [94, §8–11] и Д. В. Сивухина [95, §14–17] в сборнике «Вопросы теории плазмы».

## Задачи и вопросы

**Задача 1.** Докажите, что уравнение Фоккера—Планка сохраняет полное число частиц.

Решение  $\Rightarrow$  349

**Задача 2.** Выразите силу динамического трения через тензор диффузии в состоянии термодинамического равновесия, когда распределение частиц всех сортов описывается функциями распределения Максвелла с одинаковой температурой. [Решение ⇒349](#)

**Задача 3.** С помощью уравнения Фоккера—Планка исследуйте рассеяние моноэнергетического пучка частиц малой плотности, инжектированного в плазму внешним источником. Выясните физический смысл коэффициентов  $F_\mu$  и  $D_{\mu\nu}$ . [Решение ⇒349](#)

**Задача 4.** Найдите инвариантные тензоры первого, второго и третьего рангов. [Решение ⇒351](#)

**Задача 5.** Проверьте эквивалентность интеграла столкновений Розенблюта (20) и интеграла столкновений Ландау (21). [Решение ⇒354](#)

**Задача 6.** Вычислите потенциалы Розенблюта для максвелловского распределения полевых частиц. [Решение ⇒354](#)

## Лекция 15

# Стандартные задачи кинетики плазмы

---

**Законы сохранения в столкновениях частиц. Н-теорема.**

**Передача энергии между электронами и ионами.**

**Упрощение интеграла столкновений**

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений с разной степенью точности позволило решить многие задачи кинетики плазмы. Интеграл столкновений в форме Ландау используется преимущественно для получения фундаментальных результатов, таких как проверка законов сохранения или доказательство Н-теоремы, согласно которой энтропия замкнутой системы возрастает при приближении системы к равновесию. Интеграл столкновений в форме Розенблюта или его различные упрощения бывают особенно полезны в прикладных задачах.

В заключительной лекции курса «Основы физики плазмы» мы решим несколько классических задач кинетики плазмы. Следующий курс «Магнитной гидродинамики» начнётся с изучения теории классического переноса в плазме. Эта теория строится на основе решения кинетического уравнения с интегралом столкновений Ландау в приближении слабонеоднородной плазмы.

### §15.1. Законы сохранения в кулоновских столкновениях

Интеграл столкновений обладает свойствами, очевидными из его физического смысла как числа частиц, появляющихся за единицу времени в единице объёма пространства импульсов. Поскольку полное число частиц при рассеянии сохраняется, то

$$\int C_{ba} d^3v = 0, \quad (1a)$$

где  $C_{ba}$  обозначает отдельное слагаемое в сумме  $\sum_a$  по сортам частиц в кинетическом уравнении (14.20) (или аналогичное слагаемое в уравнении (14.21)). Сохранение импульса и энергии сталкивающихся частиц означает, что

$$\int [m_a \mathbf{v} C_{ab} + m_b \mathbf{v} C_{ba}] d^3v = 0, \quad (16)$$

$$\int \left[ \frac{1}{2} m_a v^2 C_{ab} + \frac{1}{2} m_b v^2 C_{ba} \right] d^3v = 0. \quad (17)$$

Легче всего проверить равенство (1a). Так как  $C_{ba}$  имеет вид дивергенции в пространстве скоростей,

$$C_{ba} = -\frac{c_{ba}}{2m_b} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \int \left( \frac{f_b}{m_a} \frac{\partial f'_a}{\partial v'_\nu} - \frac{f'_a}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3v' \equiv -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{s}_{ba}, \quad (2)$$

с помощью теоремы Остроградского—Гаусса интеграл в левой части (1a) преобразуется к интегралу по бесконечно удалённой поверхности в пространстве импульсов, где подынтегральное выражение обращается в нуль:

$$\int C_{ba} d^3v = - \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{s}_{ba} d^3v = - \oint (\mathbf{dS}_v \cdot \mathbf{s}_{ba}) = 0.$$

Проверка законов сохранения импульса (16) и энергии (17) представляется более трудоёмким упражнением (задачи 1 и 2). Фактически же проверять нужно не сами законы сохранения, а тот факт, что конкретная форма интеграла столкновений удовлетворяет этим законам, поскольку равенства (1) по сути очевидны. Различные упрощённые формы интеграла столкновения зачастую этим законам не удовлетворяют (см. §15.4), поэтому следует критически воспринимать результаты расчётов, выполненных с их применением.

Интеграл столкновений в форме Ландау выдерживает проверку другими свойствами, очевидными из физических соображений. В частности, он обращается в нуль, если частицы всех сортов имеют максвелловское распределение с одинаковой температурой (задача 3). Можно также проверить, что решение кинетического уравнения с интегралом столкновений Ландау не будет отрицательным ни при каких условиях (задача 4). Наконец, можно доказать, что максвелловское распределение является единственным не зависящим от времени решением кинетического уравнения с интегралом столкновений Ландау. Последнее утверждение является следствием Н-теоремы, которая доказана в следующем параграфе.

## §15.2. H-теорема

Исходные динамические уравнения, использованные при выводе интеграла столкновений, обратимы по времени, однако кинетическое уравнение с интегралом столкновений не инвариантно относительно изменения знака  $t$ . Это утверждение известно как *H-теорема* Л. Больцмана (Ludwig Boltzmann, 1872 [174]). Он доказал, что существует функционал  $H$  от функции распределения  $f$ , такой, что  $dH/dt \leq 0$  для любой функции  $f$ , удовлетворяющей кинетическому уравнению. От обозначения этого функционала и происходит название H-теоремы, которая в современной формулировке гласит, что энтропия замкнутой системы не убывает со временем, т. е.

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{dH}{dt} \geq 0.$$

Докажем, что единственны не зависящие от времени функции распределения — максвелловские с одинаковой температурой и средней скоростью. Представим плотность энтропии в виде

$$s = - \sum_b \int d^3v f_b (\ln f_b - 1) \quad (3)$$

и для простоты рассмотрим однородную плазму, заменив

$$\frac{df_b}{dt} = \frac{\partial f_b}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e_b}{m_b} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{v}} \quad (4)$$

на  $\partial f_b / \partial t$  в левой части кинетического уравнения (14.21), которое мы перепишем в виде

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} = - \sum_a \frac{c_{ba}}{2m_b} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \int f_b f'_a \chi_{ab,\nu} \left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right) d^3v', \quad (5)$$

где  $f_b = f_b(\mathbf{v})$ ,  $f'_a = f_a(\mathbf{v}')$  и введено обозначение

$$\chi_{ab,\nu} = \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial v'_\nu} \ln f'_a - \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \ln f_b. \quad (6)$$

Как следует из решения задачи 13.5, бесстолкновительное кинетическое уравнение  $df_b/dt = 0$  сохраняет энтропию системы, поэтому учёт производных  $\partial f_b / \partial \mathbf{x}$  и  $\partial f_b / \partial \mathbf{v}$  в (4) лишь незначительно усложнил бы последующее доказательство (нужно было бы добавить ещё интегрирование по пространству координат, чтобы вычислить полную энтропию  $S = \int s d^3x$ ).

Дифференцируя определение энтропии (3), получаем соотношение

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - \sum_b \int \frac{\partial f_b}{\partial t} \ln f_b \, d^3v.$$

Выражая в его правой части производную  $\partial f_b / \partial t$  из уравнения (5) и интегрируя по частям, получим следующее соотношение

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - \sum_b \sum_a \frac{c_{ba}}{2m_b} \iint f_b f'_a \chi_{ab,\nu} \left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right) \left( \frac{\partial}{\partial v_\mu} \ln f_b \right) d^3v \, d^3v'.$$

Его правую часть можно записать иначе, сделав замену  $a \leftrightarrow b$  и  $v \leftrightarrow v'$ . Сложив эти две формы записи, получим выражение

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sum_b \sum_a \frac{c_{ba}}{4} \iint f_b f'_a \chi_{ab,\mu} \chi_{ab,\nu} \left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right) d^3v \, d^3v', \quad (7)$$

которое симметрично относительно указанной перестановки. Свойство неотрицательности следует из того факта, что

$$\chi_{ab,\mu} \chi_{ab,\nu} \left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right) = \frac{\chi_{ab}^2 u^2 - (\chi_{ab} \cdot \mathbf{u})^2}{u^3} \geq 0, \quad (8)$$

где  $\chi_{ab} = |\chi_{ab}|$  — длина вектора  $\chi_{ab}$  с компонентами  $\chi_{ab,\mu}$ .

Для выполнения равенства в условии (8), что эквивалентно максимуму энтропии, необходимо, чтобы вектор  $\chi_{ab}$  был параллелен вектору  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ , т. е.

$$\chi_{ab} = \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \ln f'_a - \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \ln f_b = \beta(\mathbf{v} - \mathbf{v}').$$

Поскольку  $\chi_{ab}$  есть разность двух функций, одна из которых зависит только от  $\mathbf{v}$ , а другая — только от  $\mathbf{v}'$ , последнее равенство возможно в том и только в том случае, когда  $\beta = \text{const}$  и каждая из этих функций линейная с одинаковыми коэффициентами, а именно:

$$\frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \ln f'_a = \beta(\mathbf{u} - \mathbf{v}'), \quad \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \ln f_b = \beta(\mathbf{u} - \mathbf{v}).$$

Отсюда после интегрирования находим, что функции распределения должны быть максвелловскими с общей средней скоростью  $\mathbf{u}$  и температурой  $T = 1/\beta$ :

$$f_{mb}(\mathbf{v}) = \frac{n_b}{(2\pi T/m_b)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_b(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T}\right) \quad (9)$$

(и аналогичное выражение для  $f_a$ ). Подстановка этих функций в правую часть кинетического уравнения (5) обращает её в нуль, поскольку

$$\left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right) u_\nu = 0.$$

Это означает, что максвелловские распределения частиц с одинаковой температурой  $T$  и потоковой скоростью  $\mathbf{u}$  дают единственное стационарное решение кинетического уравнения с интегралом столкновений Ландау.

Значение Н-теоремы состоит в том, что она указывает направление релаксации произвольного начального состояния плазмы к состоянию термодинамического равновесия с максвелловским распределением частиц.

Кроме того, Н-теорема наполняет содержанием утверждение, что уравнение Власова описывает бесстолкновительную плазму. Фактически она указывает количественный критерий, какие траектории частиц в дальнейшем кулоновском поле нужно считать столкновениями, а какие – регулярным движением в самосогласованном поле. Так как уравнение Власова не содержит интеграла столкновений, самосогласованное поле, в том виде как оно определено в §13.3, не приводит к возрастанию энтропии и не связано со столкновениями. Всё остальное заключено в интеграле столкновений.

### §15.3. Передача энергии между электронами и ионами

Большая разница между массами электронов  $m_e$  и ионов  $m_i$  затрудняет обмен энергией между ними: при столкновении тяжёлой и лёгкой частиц энергия каждой из них почти не меняется. Поэтому установление равновесия между электронами самими по себе и ионами самими по себе происходит значительно быстрее, чем между электронами и ионами. В результате легко возникает ситуация, в которой электронная и ионная компоненты плазмы имеют каждая свое максвелловское распределение с различными температурами  $T_e$  и  $T_i$ .

Разность температур электронов и ионов приводит к передаче энергии между обеими компонентами плазмы; определим эту передачу.

Изменение энергии ионов (за 1 секунду в 1 см<sup>3</sup> плазмы) выражается интегралом

$$Q_{ie} = \int \frac{1}{2} m_i v^2 C_{ie} d^3v. \quad (10)$$

Подставляя сюда

$$C_{ie} = -\frac{c_{ie}}{2m_i} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \int \left( \frac{f_i}{m_e} \frac{\partial f'_e}{\partial v'_\nu} - \frac{f'_e}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial v_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3v' \quad (11)$$

и интегрируя по частям по  $d^3v$ , получаем

$$Q_{ie} = \frac{c_{ie}}{2} \iint v_\mu \left( \frac{f_i}{m_e} \frac{\partial f'_e}{\partial v'_\nu} - \frac{f'_e}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial v_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3v d^3v'. \quad (12)$$

Для максвелловских распределений с температурами  $T_e$  и  $T_i$  имеем

$$\left( \frac{f_i}{m_e} \frac{\partial f'_e}{\partial v'_\nu} - \frac{f'_e}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial v_\nu} \right) = -f_i f'_e \left( \frac{v'_\nu}{T_e} - \frac{v_\nu}{T_i} \right).$$

Но вследствие тождества

$$\frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} u_\nu = 0$$

в последнем выражении можно заменить  $v'_\nu$  на  $v_\nu$ ; выполнив эту замену, получим

$$Q_{ie} = -\frac{c_{ie}}{2} \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) \iint v_\mu v_\nu f_i f'_e \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3v d^3v'. \quad (13)$$

Ввиду малости массы электронов их скорости в среднем велики по сравнению со скоростями ионов. Поэтому  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$  можно приближённо заменить на  $-\mathbf{v}'$ . После этого интегралы в формуле (13) разделяются, так что

$$Q_{ie} = -\frac{c_{ie}}{2} \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) \int v_\mu v_\nu f_i d^3v \int \frac{v'^2 \delta_{\mu\nu} - v'_\mu v'_\nu}{v'^3} f'_e d^3v'. \quad (14)$$

Поскольку

$$\int v_\mu v_\nu f_i d^3v = \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \int v^2 f_i d^3v = \delta_{\mu\nu} \frac{n_i T_i}{m_i},$$

а  $\delta_{\mu\nu} (v'^2 \delta_{\mu\nu} - v'_\mu v'_\nu) / v'^3 = 2/v'$ , находим, что

$$Q_{ie} = -c_{ie} \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) \frac{n_i T_i}{m_i} \int \frac{f'_e}{v'} d^3v'. \quad (15)$$

Наконец, подставив сюда согласно (14.13)  $c_{ie} = 4\pi e^4 Z^2 \Lambda$  (где  $Ze$  – заряд ионов) и вычислив интеграл

$$\int \frac{f'_e}{v'} dv' = n_e \sqrt{\frac{2m_e}{\pi T_e}},$$

получим

$$Q_{ie} = \frac{4\sqrt{2\pi m_e} e^4 Z^2 \Lambda n_i n_e}{m_i T_e^{3/2}} (T_e - T_i).$$

Вводя обозначение

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{n_i Z^2 e^4 \Lambda_{ie}}{m_e^{1/2} T_e^{3/2}}, \quad (16)$$

перепишем это выражение в виде

$$Q_{ie} = \frac{3n_e}{\tau_e} \frac{m_e}{m_i} (T_e - T_i), \quad (17)$$

чтобы выделить характерное время  $\tau_e$  электрон-электронных столкновений.

Величина  $Q_{ie}$ , взятая со знаком «минус», характеризует убывание энергии электронной компоненты плазмы  $\frac{3}{2} n_e T_e$  в единице объёма за единицу времени, поэтому

$$\frac{3}{2} n_e \frac{dT_e}{dt} = -Q_{ie} = -\frac{3n_e}{\tau_e} \frac{m_e}{m_i} (T_e - T_i),$$

и темп изменения температуры электронов описывается уравнением

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{T_e - T_i}{\tau_{ei}}, \quad (18)$$

где параметр

$$\tau_{ei} = \frac{m_i}{2m_e} \tau_e \quad (19)$$

представляет собой время выравнивания температур ионов и электронов. Оно примерно в  $2m_i/m_i$  раз больше времени установления максвелловского распределения электронов; по порядку величины  $\tau_{ei} \sim 1/\nu_{ei}^{(\varepsilon)}$ , где частота  $\nu_{ei}^{(\varepsilon)}$  была определена в §8.4.

В зарубежной литературе авторство формулы (19) приписывают Л. Спицеру (Lyman Spitzer [175]), однако Л. Д. Ландау вывел её раньше [156, 157].

### §15.4. Упрощение интеграла столкновений

При решении конкретных задач интеграл столкновений часто упрощают при наличии в задаче малых параметров. Например, при определении функции распределения заряженных продуктов термоядерной реакции в первом приближении можно рассматривать эти продукты как пробные частицы, а также пренебречь их рассеянием на ионах плазмы, сохранив в интеграле столкновений только те члены, которые отвечают за торможение на электронах плазмы. Обсудим подробнее некоторые упрощённые формы интеграла столкновений.

#### Тау-приближение

В самой примитивной форме интеграл столкновений записывают в так называемом тау-приближении:

$$\frac{df_b}{dt} = -\frac{f_b - f_{mb}}{\tau}. \quad (20)$$

Оно описывает релаксацию распределения частиц к максвелловской функции  $f_{mb}$  с характерным временем  $\tau$ . Интеграл столкновений Ландау также описывает приближение распределения к равновесному, но в отличие от более простых аналогов удовлетворяет законам сохранения. К тому же реальный процесс установления равновесия характеризуется набором различных времён (см. §8.2 и §8.4 в лекции 8), а не единственным параметром  $\tau$ .

Другое название уравнения (20) — модель БГК — происходит из фамилий предложивших его учёных П. Батнагара ([Prabhu L. Bhatnagar](#)), Е. Гросса ([Eugene P. Gross](#)) и М. Крука ([Max Krook](#)) [176]. С помощью кинетического уравнения с интегралом столкновений БГК можно, например, предсказать эффект затухания Ландау как предел столкновительного затухания ленгмюровских волн при  $\tau \rightarrow \infty$  (задача 6).

#### Лоренцева плазма

Плазму, состоящую из электронов ( $e_e = -e$ ) и бесконечно тяжёлых холодных ионов ( $e_i = Ze$ ) с большим зарядовым числом  $Z$ , принято называть *лоренцевой*. При  $Z \gg 1$  рассеянием электронов на электронах можно пренебречь по сравнению с их рассеянием на ионах, оставив в

правой части кинетического уравнения для электронов только слагаемое  $C_{ei}$ :

$$\frac{df_e}{dt} = C_{ei} = -\frac{4\pi Z^2 e^4 \Lambda_{ei}}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left( \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial h_i}{\partial v_\mu} f_e - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \frac{\partial f_e}{\partial v_\nu} \right). \quad (21)$$

Тот факт, что отброщенное слагаемое  $C_{ee}$  примерно в  $Z$  раз меньше по сравнению с  $C_{ei}$ , легко установить, если учесть, что потенциалы Розенблюта пропорциональны плотности частиц соответствующего сорта и поэтому  $h_i/h_e \sim g_i/g_e \sim n_i/n_e = 1/Z$ .

Малость отношения масс  $m_e/m_i$  позволяет пренебречь обменом энергией между электронами и ионами, если анализировать эволюцию плазмы на сравнительно малых интервалах времени,  $t \ll 1/\nu_{ei}^{(\varepsilon)}$  (напомним, что  $\nu_{ei}^{(\varepsilon)} \sim (m_e/m_i)\nu_{ei}^{(p)}$ , задача 8.5). Тем самым можно ещё более упростить кинетическое уравнение (21), отбросив первое слагаемое в правой части, которое пропорционально  $m_e/m_i$ . Во второе слагаемое можно подставить  $g_i = n_i v$ , так как скорость электронов при сопоставимых энергиях значительно больше скорости ионов. Действительно, в формуле

$$g_i(\mathbf{v}) = \int u f_i(\mathbf{v}') d^3 v'$$

можно произвести замену  $u = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \approx v$  и затем вынести  $v$  из-под знака интеграла, после чего оставшийся интеграл оказывается равным плотности ионов  $n_i$ , так что  $g_i \approx n_i v$ . Последующее вычисление производной  $\partial^2 g_i / \partial v_\mu \partial v_\nu = n_i \partial^2 v / \partial v_\mu \partial v_\nu$  по аналогии с (14.15) приводит к уравнению

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{1}{v} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right) \frac{\partial f_e}{\partial v_\nu}, \quad (22)$$

куда входит вектор

$$\left( \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp = \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\mathbf{v}}{v} \left( \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right).$$

Он перпендикулярен вектору скорости  $\mathbf{v}$ , поскольку

$$\mathbf{v} \cdot \left( \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp = 0.$$

Интеграл столкновений выражается через дивергенцию этого вектора в пространстве скоростей, так как

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{1}{v} \left( \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left( \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp - \frac{\mathbf{v}}{v^3} \cdot \left( \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left( \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp.$$

Как известно, дивергенция градиента есть лапласиан, но в данном случае оператор дивергенции действует только на часть градиента, перпендикулярную направлению скорости. В сферической системе координат  $(v, \theta, \psi)$  эта часть, очевидно, не содержит производных по модулю скорости  $v$  и поэтому результат вычисления дивергенции выражается через угловую часть лапласиана:

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}{m_e^2 v^3} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f_e}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f_e}{\partial \psi^2} \right]. \quad (23)$$

В коэффициенте перед квадратной скобкой в правой части уравнения (23) легко распознать половину частоты кулоновских столкновений  $\nu_{ei}^{(p)}$  электронов с ионами (§8.2). В такой форме интеграл столкновений мы используем для вычисления электрической проводимости и электронной теплопроводности лоренцевой плазмы во второй части курса (лекция 17). Результат вычислений с точностью до численного коэффициента порядка единицы будет правильным даже при  $Z = 1$ .

### Модель пробных частиц

В модели пробных частиц, описанной ранее в §8.2 и §8.4, интеграл столкновений линеен относительно функции распределения пробных частиц. Иными словами, в интегrale столкновений оставляют только те потенциалы Розенблюта, которые зависят от функции распределения полевых частиц. Это существенное упрощение. Проведём дальнейшие упрощения в интеграле столкновений, предполагая, что функция распределения полевых частиц изотропна, т. е. зависит только от длины вектора  $v$ , но не от его направления:

$$f_a(v) = f_a(v).$$

Очевидно, что в этом случае потенциалы Розенблюта также изотропны, т. е.  $h_a = h_a(v)$ ,  $g_a = g_a(v)$ . Следовательно,

$$\frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} = \frac{v_\mu}{v} \frac{dh_a}{dv}.$$

Второй потенциал Розенблюта входит в интеграл столкновений в виде производной

$$\frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} = \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{v_\nu}{v} \frac{dg_a}{dv} = \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} + \frac{1}{v} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right) \frac{dg_a}{dv}.$$

Подстановка этих производных в кинетическое уравнение (14.20) приводит его к виду

$$\begin{aligned} \frac{df_b}{dt} = - \sum_{a \neq b} \frac{c_{ba}}{m_b^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[ \frac{m_b}{m_a} \frac{v_\mu}{v} \frac{dh_a}{dv} f_b - \frac{1}{2} \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right) \frac{1}{v} \frac{dg_a}{dv} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right], \quad (24) \end{aligned}$$

где суммирование проводится только по сортам полевых частиц. Так как

$$\frac{v_\nu}{v} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} = \frac{\partial f_b}{\partial v},$$

первое и второе слагаемые в правой части имеют похожую структуру, их удобно объединить в одно выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[ \frac{m_b}{m_a} \frac{v_\mu}{v} \frac{dh_a}{dv} f_b - \frac{1}{2} \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[ \frac{v_\mu}{v} \left( \frac{m_b}{m_a} \frac{dh_a}{dv} f_b - \frac{1}{2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} \frac{\partial f_b}{\partial v} \right) \right]. \end{aligned}$$

Далее, из-под знака дифференцирования можно вынести множитель  $v_\mu/v^3$  ввиду того, что

$$\frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{v_\mu}{v^3} = 0.$$

Поскольку

$$\frac{v_\mu}{v^3} \frac{\partial}{\partial v_\mu} [v^2 (\dots)] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} [v^2 (\dots)],$$

в итоге получаем

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^2 \left( \frac{m_b}{m_a} \frac{dh_a}{dv} f_b - \frac{1}{2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} \frac{\partial f_b}{\partial v} \right) \right]. \quad (25)$$

Последнее слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[ -\frac{1}{2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right) \frac{1}{v} \frac{dg_a}{dv} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right]$$

в (24) почти идентично выражению, стоящему в правой части уравнения (22), отличаясь от него дополнительным множителем  $-\frac{1}{2} dg_a/dv$ . Поэтому результат преобразований,

$$-\frac{1}{2v^3} \frac{dg_a}{dv} \nabla_\perp^2 f_b, \quad (26)$$

также отличается на этот множитель и выражается через оператор

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}.$$

Подставляя (25) и (26) в (24), получаем кинетическое уравнение

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_{a \neq b} \frac{c_{ba}}{m_b^2 v^2} \left[ \frac{\partial}{\partial v} v^2 \left( \frac{m_b}{m_a} \frac{dh_a}{dv} f_b - \frac{1}{2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} \frac{\partial f_b}{\partial v} \right) - \frac{1}{2v} \frac{dg_a}{dv} \nabla_{\perp}^2 f_b \right] \quad (27)$$

для пробных частиц в плазме с изотропным распределением полевых частиц.

Если функцию распределения полевых частиц считать максвелловской, потенциалы Розенблюта удаётся выразить через функцию ошибок erf (задача 14.6), но и без долгих вычислений нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 g_a}{d^2 v} = - \frac{T_a}{m_a v} \frac{dh_a}{dv}. \quad (28)$$

Действительно, последнее слагаемое в правой части (27), содержащее  $\nabla_{\perp}^2$ , обращается в нуль, как только  $f_b$  становится изотропной. Оставшееся выражение должно обращаться в нуль, как только функция  $f_b$  становится максвелловской с температурой, равной температуре  $T_a$  полевых частиц, поскольку обмен энергией между пробными и полевыми температурами должен прекращаться при равенстве температур. Поставляя в (27) соотношение

$$\frac{\partial f_b}{\partial v} = - \frac{m_b v}{T_a} f_b,$$

имеющее место в таком случае, и приравнивая к нулю выражение в круглых скобках, получим равенство (28). Разумеется, оно верно и в том случае, когда функция распределения пробных частиц не будет максвелловской, так как потенциалы  $h_a$  и  $g_a$  в приближении пробных частиц вообще не зависят от  $f_b$ . В итоге получается, что в интеграле столкновений остаются только первые производные  $h_a$  и  $g_a$ :

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{c_{ba}}{m_b^2 v^2} \left[ \frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{m_b}{m_a} \frac{dh_a}{dv} \left( f_b + \frac{T_a}{m_b v} \frac{\partial f_b}{\partial v} \right) - \frac{1}{2v} \frac{dg_a}{dv} \nabla_{\perp}^2 f_b \right]. \quad (29)$$

Имеется по крайней мере два практически значимых применения модели пробных частиц. Во-первых, пробными часто можно считать быстрые ионы, которые возникают при инжекции пучков быстрых нейтральных атомов с большой энергией в плазму с целью её нагрева.

В результате перезарядки атомы превращаются в быстрые ионы и далее удерживаются в плазме магнитным полем, тогда как нейтральные атомы — быстрые инжектированные и медленные продукты перезарядки — свободно входят и выходят из неё. Быстрые ионы тормозятся в плазме, передавая энергию полевым частицам, одновременно испытывая рассеяние по углу. Во-вторых, заряженные продукты ядерной реакции синтеза также можно считать пробными частицами, поскольку их плотность всё-таки существенно меньше плотности плазмы. При использовании ряда дополнительных, но вполне естественных упрощений функцию распределения быстрых ионов и продуктов термоядерной реакции удается найти в аналитическом виде, причём выясняется, что те и другие передают свою энергию преимущественно электронам плазмы (задача 8).

### Литература

В статье Ф. Хинтона (Fred Hinton) [173] в сборнике «Основы физики плазмы» приведено доказательство Н-теоремы и доказаны некоторые другие свойства интеграла столкновений Ландау.

Передача энергии между электронами и ионами, длина пробега частиц в плазме, явление убегания электронов рассчитаны в учебнике «Физическая кинетика» Е. М. Лифшица и Л. П. Питаевского [55, §42–45].

Функция распределения быстрых ионов, возникающих при инжеекции в плазму пучка нейтральных атомов, найдена в статье Ф. Хинтона и М. Розенблюта (Marshall Rosenbluth) [177].

### Задачи и вопросы

**Задача 1.** Докажите, что интеграл столкновений Ландау удовлетворяет закону сохранения импульса. Решение  $\Rightarrow 356$

**Задача 2.** Докажите, что интеграл столкновений Ландау удовлетворяет закону сохранения энергии. Решение  $\Rightarrow 357$

**Задача 3.** Докажите, что интеграл столкновений Ландау равен нулю, если частицы всех сортов имеют максвелловское распределение с одинаковыми температурой и потоковой скоростью. Решение  $\Rightarrow 357$

**Задача 4.** Докажите, что функция распределения, подчиняющаяся кинетическому уравнению с интегралом столкновений Ландау, неотрицательна.

[Указание](#) ⇒ 357

**Задача 5.** Докажите Н-теорему в приближении лоренцевой плазмы, не используя предположение, что она однородна.

[Решение](#) ⇒ 358

**Задача 6.** Используя кинетическое уравнение с интегралом столкновений БГК, найдите декремент затухания ленгмюровских колебаний.

**Задача 7.** Плоскопараллельный пучок моноэнергетических электронов вводят в плазму с многозарядными ионами. Определите функцию распределения электронов на небольшом расстоянии от границы плазмы.

[Решение](#) ⇒ 359

**Задача 8.** Упростите кинетическое уравнение применительно к анализу торможения быстрых ионов, возникающих при инжекции в плазму пучков нейтральных атомов. Считайте, что плотность быстрых ионов мала по сравнению с плотностью плазмы, а их скорость значительно больше тепловой скорости ионов, но меньше тепловой скорости электронов.

[Решение](#) ⇒ 360

**Задача 9.** Найдите функцию распределения быстрых ионов — заряженных продуктов термоядерной реакции.

[Решение](#) ⇒ 361

**Задача 10.** Найдите функцию распределения «плещущихся» ионов, которые образуются при стационарной инжекции быстрых нейтральных атомов в плазму. Считайте, что угловой и энергетический разброс инжектированных атомов пренебрежимо малы.

[Решение](#) ⇒ 362

**Задача 11.** (Задача Будкера.) Найдите время жизни плазмы в пробко-троне с большим пробочным отношением.

[Решение](#) ⇒ 363

**Задача 12.** Используя решение предыдущей задачи, найдите аксиальный профиль плотности и давления в адиабатической открытой ловушке.

[Решение](#) ⇒ 365

## Приложение A

# Ответы к задачам

---

### Лекция 1

**Задача 1.2.** Следует различать дебаевский радиус электронов  $\lambda_{De}$  и дебаевский радиус ионов  $\lambda_{Di}$ . Рассмотрим полностью ионизованный газ, в котором плотность электронов  $n_e$  связана с плотностью ионов  $n_i$  уравнением квазинейтральности  $n_e = Zn_i$ . Чтобы оценить  $\lambda_{De}$ , представим, что в таком газе из области в виде шара радиуса  $R = \lambda_{De}$  удалены все электроны. Такой шар будет иметь электрический заряд  $Q = (4\pi/3)e n_e R^3$ , а потенциал в центре шара относительно бесконечно удалённой точки будет равен  $\varphi_0 = 3Q/2R$ . Приравняв потенциальную энергию электрона  $e\varphi_0$  к  $T_e/2$ , где  $T_e$  — температура электронов, получим

$$\lambda_{De} = \sqrt{T_e/4\pi e^2 n_e}.$$

Аналогичным способом находим

$$\lambda_{Di} = \sqrt{T_i/4\pi Z^2 e^2 n_i}.$$

При равных температурах электронов и ионов ( $T_e = T_i$ ) дебаевская длина ионов  $\lambda_{Di}$  формально оказывается в  $\sqrt{Z}$  меньше, чем дебаевская длина электронов  $\lambda_{De}$ . В лекции 2 доказывается, что физический смысл имеет величина

$$\lambda_D = 1/\sqrt{1/\lambda_{De}^2 + 1/\lambda_{Di}^2}.$$

**Задача 1.3.** Запишем уравнения движения и непрерывности для электронов:

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p_e - e n_e \mathbf{E}, \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{v}) = 0. \quad (1.3.2)$$

Электрическое поле выразим через электрический потенциал:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (1.3.3)$$

Он удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2\varphi = -4\pi e(n_i - n_e). \quad (1.3.4)$$

Предположим также, что давление электронов  $p_e = n_e T$  связано с их плотностью  $n_e$  уравнением политропы

$$p_e/n_e^\gamma = p_0/n_0^\gamma = \text{const}. \quad (1.3.5)$$

Ввиду большой, по сравнению с электронами, массы ионы будем считать неподвижными, а их плотность постоянной во времени и однородной в пространстве,  $n_i = n_0 = \text{const}$ .

Линеаризуем записанную систему уравнений, считая электрическое поле  $\mathbf{E}$ , потенциал  $\varphi$  и скорость  $\mathbf{v}$  малыми величинами первого порядка. При возникновении колебаний плотность и давление электронов осциллируют proximity равновесных значений  $n_0$  и  $p_0 = n_0 T_0$ . Малые добавки к равновесным значениям будем метить индексом 1, так что  $n_e = n_0 + n_1$  и  $p_e = p_0 + p_1 = n_0 T_0 + \gamma n_1 T_0$ . Последующие вычисления упрощаются, если ввести вектор смещения  $\xi$ , такой что

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (1.3.6)$$

В линейном приближении

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \approx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Кроме того,

$$\nabla p_e = \gamma T_0 \nabla n_1,$$

поскольку  $p_0 = \text{const}$ . Поэтому уравнение (1.3.1) принимает вид

$$n_0 m_e \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\gamma T_0 \nabla n_1 + e n_0 \nabla \varphi.$$

Применив к нему оператор дивергенции, получим

$$n m_e \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \xi = -\gamma T \nabla^2 n_1 + e n \nabla^2 \varphi, \quad (1.3.7)$$

где для краткости опущен индекс 0 в обозначении равновесной температуры  $T_0$  и равновесной плотности  $n_0$ . Уравнение непрерывности (1.3.2) в линеаризованном виде

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n \operatorname{div} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

удаётся проинтегрировать и выразить возмущение плотности  $n_1$  через дивергенцию вектора смещения:

$$n_1 = -n \operatorname{div} \xi. \quad (1.3.8)$$

Учитывая также, что

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi e n_1 = -4\pi e n \operatorname{div} \xi, \quad (1.3.9)$$

все члены в уравнении (1.3.7) можно выразить через  $\operatorname{div} \xi$ :

$$m_e \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \xi = \gamma T \nabla^2 \operatorname{div} \xi - 4\pi e^2 n \operatorname{div} \xi. \quad (1.3.10)$$

Отсюда для возмущений вида  $\xi \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$  получаем закон дисперсии ленгмюровской волны:

$$\omega^2 = k^2 \frac{\gamma T}{m_e} + \frac{4\pi n e^2}{m_e}.$$

Он связывает частоту волны  $\omega$  с волновым числом  $k$ . При помощи обозначений

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}}, \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}}$$

для ленгмюровской частоты  $\omega_p$  и дебаевской длины  $\lambda_D$  закон дисперсии записывается в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2 [1 + \gamma k^2 \lambda_D^2]. \quad (1.3.11)$$

Полученная формула совпадает с результатом кинетической теории при  $\gamma = 3$  (задача 13.10). Кинетическая теория предсказывает, что ленгмюровские колебания сильно затухают, если  $k\lambda_D \gtrsim 1$ , поэтому второе слагаемое в (1.3.11) нужно считать малым по сравнению с единицей. Интересно, что затухание ленгмюровских волн при  $k\lambda_D \gtrsim 1$  было предсказано Ленгмюром и Тонксом в 1929 году [30], но строгая теория этого явления, которое называют затуханием Ландау, была создана в 1945–1946 годах [40–42].

**Задача 1.4.** Электроны осциллируют с частотой  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m_e}$  со скоростью

$$v_x = v_0 \cos(kx_0) \cos(\omega_p t)$$

около точки старта  $x_0$  так, что

$$x = x_0 + (v_0 / \omega_p) \cos(kx_0) \sin(\omega_p t).$$

При  $v_0 > \omega_p / k$  существует момент времени, когда плотность электронов

$$n = n_0 / \frac{\partial x}{\partial x_0}$$

формально становится бесконечной. В этот момент происходит «опрокидывание волны», а указанное решение теряет смысл.

**Задача 1.6.** Термины «плазменные колебания», «ленгмюровские колебания», «потенциальные электронные колебания» иногда используются как синонимы. Однако в широком смысле плазменными колебаниями называют вообще все типы волн, которые могут распространяться в плазме. Если плазма помещена в магнитном поле, то в ней могут существовать потенциальные колебания на частоте, отличающейся от ленгмюровской.

**Задача 1.7.**  $\omega_p/\sqrt{2}$ .

**Задача 1.8.** Эта задача решена в статье [26], где Ленгмюр впервые назвал плазмой квазинейтральный ионизованный газ.

Любой произвольно выбранный элемент объёма плазмы можно рассматривать как трёхмерный гармонический осциллятор, состоящий из трёх линейных осцилляторов. Так как электроны с тепловым распределением скоростей, соответствующим температуре  $T$ , непрерывно входят в этот элемент объёма и выходят из него, линейный осциллятор приобретает в среднем энергию  $T$  на каждую степень свободы, причём  $\frac{1}{2}T$  приходится на кинетическую и столько же на потенциальную энергию (электрического поля). Потенциальная энергия представляет собой новый вклад, отличающий плазму от нейтрального газа.

Если имеется  $N$  независимых осцилляторов на единицу объёма, энергия электрического поля этих осцилляторов равна  $\frac{3}{2}NT$ , причём дополнительный множитель 3 отвечает трём степеням свободы осциллятора. Приравнивая энергию осцилляторов к плотности энергии электрического поля  $E^2/8\pi$ , получаем

$$\frac{1}{8\pi}E^2 = \frac{3}{2}NT.$$

Если бы не было нижнего предела на длину волны осциллятора, нужно было бы считать, что число осцилляторов  $N$  равно концентрации электронов,  $N = n$ , как в теории теплоемкости твёрдых тел Дебая [33].

Чтобы найти число  $N$  в плазме, следует разложить пространственное распределение потенциала  $\phi(x, y, z)$  в ряд Фурье, оборвав ряд на минимальном размере ячейки  $\lambda_D$ , в котором возможно существование незатухающих ленгмюровских колебаний. Можно также сказать, что число независимых осцилляторов в единице объёма равно  $n$ , но те из них, размер которых меньше  $\lambda_D$ , сильно затухают. Соответственно, число действующих осцилляторов в единице объёма можно оценить как  $N \sim 1/\lambda_D^3$ . Таким образом,

$$\frac{1}{8\pi}E^2 \sim \frac{3}{2}nT/(n\lambda_D^3).$$

Точный расчёт выполнен в §2.4. Плотность энергии ленгмюровских колебаний  $E^2/8\pi$  составляет малую долю внутренней энергии плазмы  $\frac{3}{2}nT$  при условии, что  $n\lambda_D^3 \gg 1$ .

**Задача 1.9.** Предположим, что цилиндрическое облако действительно вращается вокруг своей оси. Пренебрегая тепловым разбросом скоростей, рассмотрим отдельный электрон, движущийся по окружности радиуса  $r$  со скоростью  $v$ . На электрон действуют сила Лоренца  $e_e(v/c)B$ , направленная по радиусу, и сила  $e_e E$  со стороны собственного электрического поля облака; здесь  $e_e = -e$  обозначает заряд электрона с учётом его знака. Электрическое поле равно  $E = 2\pi e n_e r$ , где  $n_e$  — плотность электронов, и также направлено по радиусу. Обе эти силы уравновешиваются центростремительной силой  $-m_e v^2/r$ , т. е.

$$\frac{m_e v^2}{r} + e_e E + \frac{e_e}{c} v B = 0.$$

После подстановки  $v = \omega r$  общий множитель  $r$  сокращается и получается квадратное алгебраическое уравнение относительно частоты вращения  $\omega$ :

$$\omega^2 + \frac{1}{2} \omega_p^2 + \omega \Omega_e = 0,$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m_e}$ , а  $\Omega_e = e_e B / m_e c$ . Уравнение имеет два вещественных корня

$$\omega_{\pm} = -\frac{1}{2} \left[ \Omega_e \pm \sqrt{\Omega_e^2 - 2\omega_p^2} \right].$$

Они исчезают, становясь комплексными при  $\omega_p^2 > \Omega^2/2$ . Соответствующее значение плотности электронов  $n_e = B^2/8\pi m_e c^2$  определяет предел Бриллюэна [178], выше которого магнитное поле не способно удерживать электроны от разлёта.

В пределе низкой плотности,  $n_e \ll B^2/8\pi m_e c^2$ , большая (по абсолютной величине) частота стремится к циклотронной,  $\omega_+ \approx -\Omega_e$ , а меньшая пропорциональна плотности электронов,  $\omega_- \approx -\omega_p^2/2\Omega_e$ . Это второе решение можно получить, отбросив центробежную силу  $m_e v^2/r$  в уравнении  $m_e v^2/r + e_e E + e_e(c/v)B = 0$ . В таком приближении электрическое поле исчезает в сопутствующей системе отсчёта, где  $E' = E + (v/c)B = 0$ . Иными словами, вращение играет роль нейтрализующего фона положительно заряженных ионов в квазинейтральной плазме, поэтому облако электронов в режиме медленного вращения обладает многими свойствами плазмы. В этой связи говорят о *заряженной плазме*.

## Лекция 2

**Задача 2.1.** Возьмём в качестве пробной частицы одну из частиц плазмы, приняв, что  $q = e$ . Тогда разложение функции (2.1) в ряд Тейлора применимо при  $r \gg r_* = e^2/T$ . Нетрудно проверить, что  $r_*$  меньше, чем среднее расстояние  $n^{-1/3}$  между частицами плазмы, если  $N_D \gg 1$ . Это означает, что разложение, использованное при выводе уравнения (2.3), теряет смысл в столь малой окрестности пробного заряда, где нет частиц плазмы. В этой окрестности потенциал

пробного заряда описывается законом Кулона,  $\varphi = q/r$ , который был использован в качестве граничного условия при  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  для решения упомянутого уравнения.

**Задача 2.2.** При небольшом потенциале сетки,  $eU \ll T$ , электрический потенциал в дебаевском слое, образующемся вокруг сетки, убывает в обе стороны по экспоненциальному закону:

$$\varphi = U \exp(-|x|/\lambda_D).$$

Если же  $eU \gg T$ , вблизи сетки образуется слой зарядов исключительно одного знака (противоположного знаку приложенного потенциала). Ширину слоя  $d$  можно оценить, взяв плотность тока в законе «трёх вторых»,

$$J = \frac{2}{9\pi} \sqrt{\frac{2eU}{m}} \frac{U}{d^2},$$

в виде  $J \sim en\sqrt{2eU/m}$ . Отсюда имеем

$$d \sim \sqrt{\frac{9\pi eU}{ne^2}}.$$

По порядку величины ширина слоя совпадает с дебаевской длиной, вычисленной по «эффективной температуре»  $eU$  вместо  $T$ .

**Задача 2.3.**  $\varphi = (T/e)(n_1/2n_0) \exp(x/\lambda_D)$  при  $x < 0$ ,  $\varphi = (T/e)(n_1/2n_0)[2 - \exp(-x/\lambda_D)]$  при  $x > 0$ ;  $\lambda_D = \sqrt{T/4\pi e^2 n_0}$ ;  $n_e = n_0[1 + e\varphi/T]$ .

**Задача 2.4.** Воспользовавшись формулами (2.10) и (2.4), находим энергию электростатического взаимодействия на единицу объёма

$$w \approx -\sqrt{\pi Z^3 e^3 n_i^{3/2}/T^{1/2}} = -\sqrt{\pi Z^{3/2} e^3 n_e^{3/2}/T^{1/2}}.$$

Кинетическая энергия плазмы в единице объёма близка к  $\frac{3}{2}n_e T$ , так как  $n_e = Zn_i \gg n_i$ . В идеальной плазме она должна быть больше энергии электростатического взаимодействия  $w$ , т. е.  $T \gg Ze^2 n_e^{1/3}$ . Это условие может быть записано в виде  $N_D \gg 1$ , где  $N_D \sim n_e \lambda_D^3$  – число частиц в дебаевской сфере (примерно равное числу электронов), а  $\lambda_D \approx \sqrt{T/4\pi Ze^2 n_e}$  – полный дебаевский радиус.

**Задача 2.5.** По принципу Паули (Wolfgang Pauli, 1925), в любом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. Квантовое состояние свободного электрона характеризуют значениями трёх компонент импульса  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  и квантового числа, известного как спин электрона. Спин электрона может иметь два значения: одно условно называют «спином вверх» (или  $S_z = +\frac{1}{2}$ ), другое — «спином вниз» (или  $S_z = -\frac{1}{2}$ ). Энергия электрона  $\epsilon = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m_e$  не зависит от спина. Это явление называют *вырождением*. Следствием вырождения является тот факт, что на одном энергетическом уровне могут находиться два электрона. Вырождение в макроскопическом смысле наступает, когда большинство электронов парами занимают квантовые состояния с минимальными уровнями энергии.

Энергию отдельного квантового состояния нетрудно найти, пренебрегая взаимодействием электронов между собой, то есть считая квантовый газ электронов идеальным, а каждый электрон — свободным. Отдельному электрону в этом случае отвечает волновая функция  $\psi \propto \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar)$  с импульсом  $\mathbf{p}$ , который квантуется, принимая дискретные значения, так чтобы на длине системы укладывалось целое число волн де Броиля  $\lambda_e = \hbar/p$ . Например, проекция импульса  $p_x$  на ось  $x$  может быть равна  $2\pi\hbar l_x/L_x$ , где  $L_x$  — длина системы в направлении оси  $x$ , а  $l_x = 1, 2, 3, \dots$  — целое число. Каждому набору квантовых чисел  $s, l_x, l_y$  и  $l_z$ , однозначно характеризующих квантовое состояние, отвечает значение энергии частицы  $\epsilon = (4\pi^2\hbar^2/2m_e)(l_x^2/L_x^2 + l_y^2/L_y^2 + l_z^2/L_z^2)$ . Одно значение энергии имеют два квантовых состояния с разными значениями спина, поэтому на одном энергетическом уровне могут находиться один электрон, два электрона или вообще ни одного.

Чем меньше температура, тем с большей вероятностью электроны оккупируют наиболее низкоэнергетические состояния. В системе с  $N = n_e L_x L_y L_z$  электронами при абсолютном нуле температуры будут заняты  $N/2$  самых низких энергетических уровней. Иными словами, наступает макроскопическое вырождение, поэтому квантовую плазму называют *вырожденной*.

Состоянию с импульсом  $p = \hbar/L_x$  отвечает длина волны электрона  $\lambda_e = L_x$ , равная размеру всей плазмы. Это состояние имеет минимальную энергию  $\epsilon = \hbar^2/2m_e L_x^2$  (если  $L_x$  больше других линейных размеров  $L_y$  и  $L_z$ ), которая для макроскопических объектов столь мала, что её можно считать равной нулю. Но в этом состоянии могут находиться максимум 2 электрона, поэтому другие электроны вынуждены оккупировать квантовые состояния с большей энергией. Энергию самого высокого уровня, который могут занимать электроны при абсолютном нуле температуры, называют энергией Ферми  $\mathcal{E}_F$ . В пространстве квантовых чисел  $l_x, l_y, l_z$  поверхность  $\epsilon = \mathcal{E}_F$  имеет форму эллипсоида с полусиями  $l_x = \sqrt{2m_e \mathcal{E}_F} L_x / 2\pi\hbar$ ,  $l_y = \sqrt{2m_e \mathcal{E}_F} L_y / 2\pi\hbar$ ,  $l_z = \sqrt{2m_e \mathcal{E}_F} L_z / 2\pi\hbar$ . Объём этого эллипсоида  $(4\pi/3)l_x l_y l_z$  равен числу занятых энергетических уровней  $N/2$ , где  $N = n_e L_x L_y L_z$  — это число электронов в системе. Решая составленные уравнения, находим, что  $\mathcal{E}_F = (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_e^{2/3} / 2m_e$ ,  $l_x/L_x = l_y/L_y = l_z/L_z = (3/\pi)^{1/3} n_e^{1/3} / 2$ . Отметим, что энергии Ферми отвечает длина волны порядка

среднего расстояния между электронами,  $\lambda_e \sim n_e^{-1/3}$ .

При ненулевой температуре часть электронов переходит в более коротковолновые состояния с энергией большей, чем  $\mathcal{E}_F$ , но при  $T \ll \mathcal{E}_F$  таких электронов мало, так что почти все электроны занимают низшие квантовые состояния с энергиями от 0 до  $\mathcal{E}_F$ , как показано на рисунке 2.2 штриховой линией. Отсюда следует, что средняя кинетическая энергия примерно равна энергии Ферми  $\mathcal{E}_F$ , но численно несколько меньше  $\mathcal{E}_F$  в согласии с формулой (2.23), которая является точной в модели идеального вырожденного газа электронов (задача 2.6).

**Задача 2.6.** Число электронов с заданным импульсом в интервале от  $p$  до  $p+dp$  в единице объёма задано распределением Ферми–Дирака

$$dn_e = \frac{g_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi p^2 dp}{\exp[p^2/2m_e T - p_F^2/2m_e T] + 1},$$

где  $g_e = 2$  – статистический вес. В пределе  $T = 0$  имеем  $dn_e = 8\pi p^2 dp/(2\pi\hbar)^3$  при  $p < p_F$  и  $dn_e = 0$  при  $p > p_F$ . Выполнив интегрирование по импульсам, получаем  $n_e = 8\pi p_F^3/(3(2\pi\hbar)^3)$ . Отсюда находим сначала импульс Ферми  $p_F = (3\pi^2 n_e)^{1/3} \hbar$ , а затем энергию Ферми

$$\mathcal{E}_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2 n_e^{2/3}}{2m_e}.$$

Она обратно пропорциональна массе частицы, поэтому возможна ситуация, когда электроны вырождены, а ионы нет, т. е.  $\mathcal{E}_{Fi} \ll T \ll \mathcal{E}_F$ .

**Задача 2.7.** Воспользовавшись решением предыдущей задачи, добавим к кинетической энергии  $p^2/2m_e$  в распределении Ферми–Дирака потенциальную энергию  $e\varphi$ :

$$dn_e = \frac{g_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi p^2 dp}{\exp[p^2/2m_e T - p_F^2/2m_e T + e\varphi/T] + 1}.$$

В пределе  $T = 0$  имеем  $dn_e = 8\pi p^2 dp/(2\pi\hbar)^3$  при  $p^2 < p_F^2 - 2m_e e\varphi$  и  $dn_e = 0$  при  $p^2 > p_F^2 - 2m_e e\varphi$ . Выполнив интегрирование по импульсам, находим плотность электронов

$$n_e = n_{e0} [1 - e\varphi/\mathcal{E}_F]^{3/2} \approx n_{e0} [1 - (3/2)e\varphi/\mathcal{E}_F],$$

где  $n_{e0} = 8\pi p_F^3/(3(2\pi\hbar)^3)$ . Повторяя далее вычисления, приведшие к уравнению (2.3), находим дебаевскую длину вырожденного электронного газа:

$$\lambda_F = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_F}{6\pi e^2 n_{e0}}}.$$

Поскольку при вычислении «полной» длины Дебая производится суммирование обратных квадратов дебаевских длин отдельных сортов частиц, вклад ионов при  $T \ll \mathcal{E}_F$  доминирует. Однако в металлах ионы закреплены в узлах кристаллической решётки и не участвуют в электростатическом экранировании, поэтому там дебаевская длина равна  $\lambda_F$ .

**Задача 2.8.** Из термодинамических равенств  $dU = T dS - p dV$  и  $F = U - TS$  выражаем дифференциал свободной энергии

$$dF = -S dT - p dV,$$

где  $V$  – объём плазмы. Отсюда имеем  $p = -(\partial F / \partial V)_T$  и  $S = -(\partial F / \partial T)_V$ . Исключая энтропию из свободной энергии  $F = U + T (\partial F / \partial T)_V$ , выражаем затем внутреннюю энергию через свободную:

$$U = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{F}{T} \right)_V.$$

Учитывая, что корреляционная поправка к внутренней энергии  $\Delta U = Vw$ , вычисленная с помощью уравнения (2.10), исчезает при  $T \rightarrow \infty$ , соответствующую поправку к свободной энергии вычисляем по формуле

$$\Delta F = -T \int_{\infty}^T \frac{\Delta U}{T^2} dT.$$

Так как  $\Delta U \propto T^{-1/2}$ , интегрирование даёт

$$\Delta F = \frac{2}{3} Vw.$$

Далее, поскольку  $\Delta F \propto V^{-1/2}$  (при заданном числе частиц  $N = nV$ ), выполнив дифференцирование  $p = -(\partial F / \partial V)_T$ , находим

$$\Delta p = \frac{1}{3} w.$$

Так как  $w < 0$ , давление в плазме немного меньше, чем в нейтральном газе при той же плотности и температуре.

**Задача 2.9.** Формулу (2.24) можно получить, если предположить, что два электрона не могут сближаться на расстояние меньше длины волны электрона  $\lambda_e$  (это следует из принципа Паули). Внутри сферы радиуса  $R = \lambda_e$  находится примерно  $n_i R^3$  ионов. Оценивая создаваемый ими потенциал как потенциал  $\varphi = Q/R$  проводящего шара с зарядом  $Q \sim e_i n_i R^3 = e n_e R^3$  и радиусом  $R = \lambda_e$  и умножая  $\varphi$  на заряд электрона  $e_e = -e$ , получим  $W'' \sim -e^2 \lambda_e^2 n$ . Аккуратные вычисления энергии обменного взаимодействия выполнены в [54, §80].

**Задача 2.10.** Солнце: идеальная классическая. Белый карлик: идеальная вырожденная.

**Задача 2.11.** В идеальную плазму статическое электрическое поле проникает на глубину порядка дебаевской длины  $\lambda_D = \sqrt{T/8\pi n e^2}$ .

В металле при комнатной температуре электроны проводимости можно рассматривать как неидеальную вырожденную плазму, причём ионы (ядра атомов) закреплены в узлах кристаллической решётки и поэтому не участвуют в дебаевском экранировании. Формально оценивая дебаевскую длину электронов через энергию Ферми, находим  $\lambda_{De} = \lambda_F = \sqrt{\mathcal{E}_F/6\pi n_e e^2} \sim (n_e n_B)^{-1/6}$ , где  $n_e$  — концентрация электронов проводимости, а  $n_B = 1/a_B^3$  — плотность атомов в твёрдом теле. Поскольку  $n_e < n_B$ ,  $\lambda_{De} < n_e^{-1/3}$ , т. е.  $N_D < 1$ . В этих условиях глубина проникновения электрического поля определяется величиной межэлектронного расстояния  $n_e^{-1/3}$ .

**Задача 2.12.** Приравнивая  $p_F = (3\pi^2 n_e)^{1/3} \hbar$  к  $m_e c$ , находим  $n_e = (m_e c / \hbar)^3 / 3\pi^2$ . Если переписать этот результат в виде  $n_e a_B^3 = 1 / 3\pi^2 \alpha^3$ , где  $\alpha = e^2 / \hbar c \approx 1/137$  — постоянная тонкой структуры, легко видеть, что вырожденная электронная плазма становится релятивистской при плотности примерно в 87 000 раз больше плотности твёрдого тела  $n = 1/a_B^3$ . В абсолютных единицах концентрация равна  $n_e = 5,87 \times 10^{29} \text{ см}^{-3}$ , а массовая плотность водородной плазмы составляет  $m_p n_e = 9,81 \times 10^5 \text{ г/см}^3$ .

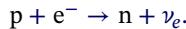
**Задача 2.13.** В ходе эволюции плотность вещества в недрах звезды увеличивается, газ электронов становится вырожденным и релятивистским. Процесснейтронизация начинается после того, как энергия Ферми

$$\mathcal{E}_F = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_F^2 c^2} - m_e c^2$$

превысит энергию

$$Q = (m_n - m_p - m_e)c^2 = 0,7825 \text{ МэВ},$$

которая выделяется в реакции обратного бета-распада



Из равенства  $\mathcal{E}_F = Q$  находим импульс Ферми

$$p_F = \sqrt{Q(2m_e c^2 + Q)} / c,$$

а затем и концентрацию электронов

$$n_e = \frac{8\pi}{3} \frac{p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} = 7,32 \times 10^{30} \text{ см}^{-3}.$$

При этом массовая плотность вещества равна  $m_p n_e = 1,22 \times 10^7$  г/см<sup>3</sup>. При дальнейшем сжатии всё большее число протонов будет захватывать по электрону, так что общее число электронов будет уменьшаться, но их плотность будет неизменна.

### Лекция 3

**Задача 3.1.** Легко проверить, что в реакции  $H \rightleftharpoons H^+ + e$  законы сохранения импульса,  $\mathbf{p}_H = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_e$ , и энергии,  $\varepsilon_H = \varepsilon_i + \varepsilon_e$ , не могут быть выполнены одновременно. Действительно, в системе отсчёта, где атом покоялся, его энергия равна энергии ионизации  $J$  со знаком минус,  $\varepsilon_H = -J$ . В той же системе отсчёта импульсы иона и электрона равны по величине, но противоположны по направлению,  $\mathbf{p}_i = -\mathbf{p}_e$ , поскольку нуль равен импульсу атома,  $\mathbf{p}_H = 0$ . Следовательно, суммарная энергия иона и электрона,  $\varepsilon_i + \varepsilon_e = p_H^2/2m_H + p_e^2/2m_e$ , заведомо не отрицательна, так что закон сохранения энергии не может быть выполнен. Требуется ещё одна частица, которая могла бы передать атому энергию, необходимую для его ионизации, или забрать у иона и электрона избыток энергии, который выделяется при рекомбинации.

**Задача 3.3.** Сила притяжения единственного электрона к ядру увеличивается в  $Z$  раз по сравнению с атомом водорода. Следовательно, достаточно заменить  $e^2$  на  $Ze^2$  во всех формулах предыдущей задачи. Таким образом, радиус орбиты первого (основного) уровня

$$a_z = \frac{\hbar^2}{m_e Ze^2}$$

уменьшается в  $Z$  раз, а энергия ионизации

$$J_Z = \frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2}$$

увеличивается  $Z^2$  раз.

**Задача 3.4.** Внутренними степенями свободы атомов, ионов и электронов являются пространственная ориентация спина и орбитального момента. Измененный в единицах  $\hbar$  спин обозначают через  $S$ , а орбитальный момент — через  $L$ . Если пренебречь слабым спин-орбитальным взаимодействием, то окажется, что энергия квантового состояния не зависит от этих степеней свободы. Иными словами, энергетические уровни вырождены (с точностью до несущественных, по условию задачи, малых поправок, обусловленных спин-орбитальным взаимодействием).

Полное число различных квантовых состояний с заданными значениями  $L$  и  $S$  равно  $(2L+1)(2S+1)$ . Спин электрона  $S$  равен  $\frac{1}{2}$ , а его орбитальный момент

на  $k$ -м энергетическом уровне может иметь целочисленные значения от 0 до  $k - 1$ . Вычисляя сумму  $g_k = \sum_{L=0}^{k-1} (2L + 1)(2S + 1)$ , находим  $g_k = 2k^2$ . При заданном состоянии электронной оболочки атома ядро (протон) может находиться в двух состояниях, так как его спин также равен  $\frac{1}{2}$ . Поэтому, строго говоря, величину  $g_k$  следовало бы умножить на  $g_p = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2$  (как сделано в лекции). Однако при определении статвеса атома степени свободы ядра учитываются не всегда, поскольку такой же статвес имеет свободное ядро и при вычислении степени ионизации статвес ядра сокращается.

**Задача 3.5.** Если температура низка в сравнении с энергией ионизации, то члены ряда быстро уменьшаются по величине и после немногих первых членов становятся пренебрежимо малыми. Таким образом, возникает впечатление, что ряд сходится. Однако полная сумма ряда тем не менее расходится. Такой ряд называют асимптотическим. На практике от асимптотического ряда оставляют сумму первых нескольких членов, почти не зависящую от числа взятых членов. Физическое обоснование такого способа обращения с формально расходящимся рядом в данном случае состоит в том, что расходимость возникает только для изолированного атома в бесконечном объёме. При  $k \rightarrow \infty$  его радиус электронной орбиты  $r_k = a_B k^2$  формально становится бесконечным. Однако при учёте взаимодействия с соседними атомами число связанных уровней оказывается конечным.

**Задача 3.6.** Для ионизации атома необходимо столкновение двух частиц — атома и электрона. Скорость этого процесса пропорциональна произведению плотности атомов и плотности электронов. Для рекомбинации иона и электрона в атоме необходимо столкновение трёх частиц — иона и двух электронов, так как второй электрон должен унести энергию, выделившуюся при рекомбинации. Скорость этого процесса пропорциональна произведению плотности иона и квадрата плотности электронов. Составляя уравнение

$$An_a n_e = Bn_i n_e^2,$$

получаем

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{A}{B}.$$

Определяя долю ионизованных атомов  $\zeta = n_i/n_0$ , где  $n_0 = n_a + n_i$  и  $n_e = n_i$ , приходим к уравнению

$$\frac{\zeta^2}{1 - \zeta} = \frac{A}{Bn_0},$$

откуда видно, что  $\zeta$  тем больше, чем меньше плотность ядер  $n_0$  (т. е. ионов и атомов вместе).

**Задача 3.7.** При  $n = 1 \text{ см}^{-3}$  переход водорода в ионизованное состояние происходит в узком диапазоне температур  $\Delta T_* \approx \pm 0,02 \text{ эВ}$  вблизи  $T_* = 0,28 \text{ эВ}$ . При  $T = 1 \text{ эВ}$  водород полностью ионизован:  $\zeta = 1 - 2,2 \times 10^{-16}$ .

**Задача 3.8.** Степень ионизации водорода и гелия, вычисленная по уравнению Саха, примерно одинакова и составляет 74%. Реально весь водород ионизован, поскольку при плотности  $n_H = 6,6 \times 10^{25} \text{ см}^{-3}$  расстояние между ядрами меньше размера атома водорода  $a_B = 0,5 \times 10^{-8} \text{ см}$ , т. е. уравнение Саха в столь плотном веществе неприменимо.

**Задача 3.9.** Учтём, что  $g_H^+ g_e / g_H = g_K^+ g_e / g_K = 1$ . Из уравнения Саха

$$\frac{\zeta_H^2}{1 - \zeta_H} = \frac{1}{\lambda_{Te}^3 n} e^{-J_H/T}$$

находим степень ионизации чистого водорода  $\zeta_H = 1 \times 10^{-8}$ . По условию задачи, после добавления калия  $n_e = 2\zeta_H n$ . Следовательно, для степени ионизации водорода  $\zeta'_H$  и калия  $\zeta'_K$  в образовавшейся смеси имеем уравнения

$$\frac{2\zeta_H \zeta'_H}{1 - \zeta'_H} = \frac{1}{\lambda_{Te}^3 n} e^{-J_H/T}$$

и

$$\frac{2\zeta_H \zeta'_K}{1 - \zeta'_K} = \frac{1}{\lambda_{Te}^3 n} e^{-J_K/T}.$$

Суммарная доля ионов и атомов калия  $\beta = (n_K + n_K^+)/n$  (по отношению к числу ионов и атомов водорода) определяется из уравнения

$$\zeta'_H + \zeta'_K \beta = 2\zeta_H$$

и оказывается очень малой:  $\beta = 1,5 \times 10^{-8}$ . Степень ионизации водорода снижается до  $\zeta'_H = 5 \times 10^{-9}$ , но это снижение перекрывается практически полной ионизацией примеси:  $\zeta'_K = 0,999992$ .

**Задача 3.10.** Пока степень ионизации мала,  $\zeta \ll 1$ , сжатие газа происходит адиабатически, т. е. температура и плотность газа связаны адиабатой Гюгонио  $Tn^{-3/2} = \text{const}$ . При этом параметр  $n\lambda_{Te}^3$  остаётся равным начальному значению. Подставляя именно это начальное значение в константу равновесия

$$K = (g_e g_i / g_a) \exp(-J/T) / n\lambda_{Te}^3$$

и приравнивая её к значению  $\frac{1}{2}$ , соответствующему величине  $\zeta^2/(1 - \zeta)$  при  $\zeta = \frac{1}{2}$ , находим

$$T_* = J / \ln[2g_e g_i / g_a n \lambda_{Te}^3].$$

**Задача 3.11.** Обозначим через  $n = n_a + n_i$  плотность ядер, т. е. суммарную плотность ионов и атомов, а через  $\zeta$  долю ионизованных ядер. Тогда  $n_e = n_i = \zeta n$ ,  $n_a = (1 - \zeta)n$ , а давление и внутренняя энергия газа соответственно равны  $p = n_e T_e + n_i T_i + n_a T_a = (1 + \zeta)nT$  и  $U = 3(1 + \zeta)nT/2$ . При изменении объёма газа  $V$  сохраняется полное число ядер:

$$d(nV) = 0. \quad (3.11.1)$$

При увеличении доли ионизованных ядер часть внутренней энергии расходуется на ионизацию:

$$d(UV) = -p dV - J d(\zeta nV). \quad (3.11.2)$$

Поделив обе части последнего уравнения на  $pV$  и исключив объём  $V$  при помощи (3.11.1), после простых преобразований получаем

$$\frac{3}{2} \frac{dT}{T} - \frac{dn}{n} + \left( \frac{3}{2} + \frac{J}{T} \right) \frac{d\zeta}{1 + \zeta} = 0. \quad (3.11.3)$$

Пусть сжатие газа происходит обратимым образом, т. е. настолько медленно, что в каждый момент времени ионизационное равновесие описывается уравнением Саха

$$\frac{\zeta^2}{1 - \zeta} = xy, \quad (3.11.4)$$

где  $x = g_e g_i / g_a n \lambda_{Te}^3$  и  $y = \exp(-J/T)$ . Перепишем в тех же обозначениях уравнение (3.11.3):

$$\frac{dx}{x} + \left( \frac{3}{2} - \ln y \right) \frac{d\zeta}{1 + \zeta} = 0,$$

а затем исключим из него переменную  $y$ , используя уравнение (3.11.4):

$$\frac{d \ln x}{d \ln(1 + \zeta)} + \ln x + \frac{3}{2} - \ln \frac{\zeta^2}{1 - \zeta} = 0.$$

Полученное уравнение интегрируется в элементарных функциях, приводя к искомому результату:

$$(1 + \zeta) \ln x + \frac{5}{2} \zeta - (1 - \zeta) \ln(1 - \zeta) - 2\zeta \ln \zeta = \text{const}. \quad (3.11.5)$$

Выразив  $\zeta$  и  $x$  через  $T$  и  $n$ , можно получить уравнение, связывающее температуру с плотностью. Оно весьма громоздко, но в практических случаях поддаётся существенному упрощению. В частности, сумма слагаемых  $\frac{5}{2}\zeta - (1 - \zeta) \ln(1 - \zeta) - 2\zeta \ln \zeta$  изменяется в ограниченных пределах от 0 при  $\zeta = 0$  до  $\frac{5}{2}$  при  $\zeta = 1$ , достигая максимального значения 2,68 при  $\zeta = 0,84$ . Эти слагаемые можно отбросить, если  $\ln x \gg 1$ . Сравнительно просто также связать параметры газа в полностью ионизованном состоянии ( $\zeta = 1$ ) с начальными параметрами нейтрального газа ( $\zeta = 0$ ):

$$2 \ln x_1 + \frac{5}{2} = \ln x_0.$$

В размерных единицах отсюда получаем

$$\frac{T_1}{J} = \frac{2\sqrt{\pi}}{e^{5/6}} \left( \frac{g_e g_i}{g_a} \right)^{-1/3} \frac{(n_1 a_B^3)^{2/3}}{(n_0 a_B^3)^{1/3}} \sqrt{\frac{T_0}{J}}.$$

**Задача 3.12.** В соответствии с общей формулой [54, §31, уравнение (31.3)] свободная энергия

$$F = -T \ln Z \quad (3.12.1)$$

выражается через статистическую сумму

$$Z \equiv \sum_n e^{-E_n/T}, \quad (3.12.2)$$

где  $E_n$  — энергия тела в квантовом состоянии, характеризуемом набором квантовых чисел  $n$ .

Рассмотрим идеальный газ атомов. В этом случае энергия  $E_n$  может быть представлена в виде суммы энергий отдельных атомов, поскольку идеальность газа означает, что энергией взаимодействия атомов между собой можно пренебречь. Написав энергию  $E_n$  в виде суммы энергий  $\varepsilon_k$ , можно свести суммирование по всем состояниям газа к суммированию по всем состояниям отдельного атома. Каждое состояние газа будет определяться набором  $N$  значений ( $N$  — число атомов в газе) энергии  $\varepsilon_k$  отдельных атомов, которые в Больцмановском случае (когда среднее число заполнения квантовых состояний атома мало,  $\bar{n}(\varepsilon_k) \ll 1$ ) можно считать все различными. Написав  $e^{-E_n/T}$  в виде произведения множителей  $e^{-\varepsilon_k/T}$  для каждого из атомов и суммируя независимо по всем состояниям каждого атома, мы бы получили выражение

$$\left( \sum_k e^{-\varepsilon_k/T} \right)^N. \quad (3.12.3)$$

Набор возможных значений  $\varepsilon_k$  для всех атомов газа одинаков, поэтому однаковы и суммы  $\sum_k e^{-\varepsilon_k/T}$ . Однако, поступив таким образом, мы бы не учли следующее обстоятельство. Все наборы  $N$  различных значений  $\varepsilon_k$ , отличающиеся лишь распределением одинаковых атомов по уровням энергии  $\varepsilon_k$ , соответствуют одному и тому же квантовому состоянию газа. В статистической же сумме в формуле (3.12.2) каждое из состояний должно учитываться лишь один раз. Поэтому мы должны ещё поделить выражение (3.12.3) на число возможных перестановок  $N$  атомов друг с другом, т. е. на  $N!$ . Таким образом,

$$Z = \frac{1}{N!} \left( \sum_k e^{-\varepsilon_k/T} \right)^N. \quad (3.12.4)$$

Подставляя это выражение в формулу (3.12.1), получаем

$$F = -TN \ln \sum_k e^{-\varepsilon_k/T} + T \ln N!.$$

Поскольку  $N!$  — очень большое число, то приблизительно  $\ln N! \approx N \ln(N/e)$ . Следовательно, свободная энергия любого газа, состоящего из одинаковых частиц и подчиняющегося статистике Больцмана, равна

$$F = -TN \ln \left[ \frac{e}{N} \sum_k e^{-\varepsilon_k/T} \right]. \quad (3.12.5)$$

Поступательное движение атома, заключенного в макроскопическом объёме, практически всегда квазиклассично, причём энергию атома можно записать в виде

$$\varepsilon_k = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \varepsilon'_k,$$

где первое слагаемое есть кинетическая энергия его поступательного движения, а посредством  $\varepsilon'_k$  обозначены уровни энергии, соответствующие внутреннему состоянию связанного электрона в атоме;  $\varepsilon'_k$  не зависит ни от импульса атома  $\mathbf{p} = \{p_x, p_y, p_z\}$ , ни от координат  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$  центра атома.

В квазиклассическом приближении статистическую сумму под знаком логарифма в (3.12.5) следует заменить выражением

$$\sum_k \iint \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} d^3x = \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} V \sum_k e^{-\varepsilon'_k/T},$$

поскольку интегрирование по  $d^3x = dx dy dz$  производится по всему объёму газа  $V$ . Для свободной энергии в итоге получаем

$$F = -TN \ln \left[ \frac{eV}{N} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_k e^{-\varepsilon'_k/T} \right]. \quad (3.12.6)$$

Как показано в §3.3, вероятность найти атом в возбуждённом состоянии мала. Поэтому далее примем для простоты, что электрон может находиться только на первом (основном) энергетическом уровне с энергией  $\varepsilon'_1 = -J$ . Тогда

$$F = -TN \ln \left[ \frac{eV}{N} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g e^{J/T} \right], \quad (3.12.7)$$

где  $g$  — статистический вес основного состояния атома.

Зная функцию  $F$ , можно вычислить все другие термодинамические функции: давление

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{NT}{V},$$

энтропию

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = N \ln \left[ \frac{e^{5/2} V}{N} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g \right],$$

энергию

$$U = F + TS = \frac{3NT}{2} - JN,$$

термодинамический потенциал (должен быть выражен через  $p$ , а не  $V$ )

$$\Phi = F + pV = N \ln \left[ \frac{T}{p} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g e^{J/T} \right],$$

химический потенциал

$$\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial N} = -T \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g e^{J/T} \right]. \quad (3.12.8)$$

**Задача 3.13.** Частично ионизованный газ представляет собой смесь трёх идеальных газов: газа атомов, газа ионов и газа электронов. Предположим, что ионизация и обратный ей процесс рекомбинации проходят при постоянных температуре и давлении смеси. При таких процессах стремится к минимуму термодинамический потенциал. Следовательно, в равновесии потенциал  $\Phi$  должен иметь наименьшее возможное (при заданных  $p$  и  $T$ ) значение. Обозначим посредством  $N_a$ ,  $N_i$  и  $N_e$  число атомов, ионов и электронов. Тогда необходимое условие минимальности  $\Phi$  можно записать в виде равенства нулю полной производной (при заданных  $p$  и  $T$ ) по одному из этих чисел, скажем по  $N_a$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N_a} + \frac{\partial \Phi}{\partial N_i} \frac{dN_i}{dN_a} + \frac{\partial \Phi}{\partial N_e} \frac{dN_e}{dN_a} = 0.$$

Изменение чисел  $N_a$ ,  $N_i$  и  $N_e$  в реакциях ионизации и рекомбинации связано уравнениями

$$dN_i = dN_e = -dN_a.$$

Поэтому предыдущее равенство можно записать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N_a} - \frac{\partial \Phi}{\partial N_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial N_e} = 0.$$

Наконец, подставляя

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N_a} = \mu_a, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial N_i} = \mu_i, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial N_e} = \mu_e,$$

получим

$$\mu_a - \mu_i - \mu_e = 0. \quad (3.13.1)$$

Химический потенциал газа атомов вычисляем по формуле (3.12.8) из предыдущей задачи:

$$\mu_a = -T \ln \left[ \frac{V}{N_a} \left( \frac{m_a T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g_a e^{J/T} \right].$$

Применяя ту же формулу для вычисления химического потенциала газа ионов и газа электронов, нужно взять  $J = 0$ :

$$\mu_i = -T \ln \left[ \frac{V}{N_i} \left( \frac{m_i T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g_i \right],$$

$$\mu_e = -T \ln \left[ \frac{V}{N_e} \left( \frac{m_e T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g_e \right].$$

Подстановка этих выражений в уравнение (3.13.1) приводит к уравнению Саха

$$\frac{N_e N_i}{N_a} = \frac{g_e g_i}{g_a} \frac{m_i^{3/2}}{m_a^{3/2}} \left( \frac{m_e T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} V e^{-J/T}. \quad (3.13.2)$$

Оно совпадает с уравнением (3.6), которое получено в §3.1, поскольку  $m_i \approx m_a$ , а  $N_e N_i / N_a = V n_e n_i / n_a$ .

## Лекция 4

**Задача 4.1.** Приравнивая радиус столба плазмы  $a = 1$  м к толщине скин-слоя  $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$  для проводника с проводимостью  $\sigma$  в переменном поле, которое изменяется по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$ , находим время скинирования  $\tau = 2\pi/\omega = (2\pi a/c)^2\sigma$ . Для медного проводника  $\sigma = 5 \times 10^{17}$  с<sup>-1</sup> и  $\tau \approx 220$  с. Чтобы обеспечить проникновение магнитного поля в плазму в импульсных экспериментах, её создают, ионизуя нейтральный газ, предварительно включив магнитное поле.

**Задача 4.2.** Запишем уравнения движения в четырёхмерном виде:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{e}{mc} F^{ik} \frac{dx_k}{d\tau},$$

где  $\tau$  – собственное время частицы,  $x^i = (ct, x, y, z)$  – контравариантные,  $x_k = (ct, -x, -y, -z)$  – ковариантные компоненты четырёх-вектора частицы, а

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

обозначает тензор электромагнитного поля. Направим электрическое поле по оси  $y$ , а магнитное – по оси  $z$ , приняв, что  $E = (0, E, 0)$ ,  $B = (0, 0, B)$ . Общее решение 4 обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка зависит от 8 констант. Из них 6 констант – это начальные значения координат и скоростей. Ещё одну константу можно определить, выбрав значение  $t$  при  $\tau = 0$ . Восьмая константа определяется из условия, что длина четырёхмерного вектора скорости частицы равна скорости света, т. е.  $(dx^i/d\tau)(dx_i/d\tau) = c^2$ . В случае  $B > E$  результат имеет следующий вид:

$$t(\tau) = \Gamma \left\{ [\gamma' \tau] + \frac{E}{cB} [X' - \rho' \cos(\Omega' \tau + \psi')] \right\},$$

$$x(\tau) = \Gamma \left\{ [X' - \rho' \cos(\Omega' \tau + \psi')] + \frac{cE}{B} [\gamma' \tau] \right\},$$

$$y(\tau) = Y' + \rho' \sin(\Omega' \tau + \psi'),$$

$$z(\tau) = Z' + \frac{p'_z}{m\gamma'} \gamma' \tau,$$

где

$$\Omega' = e\sqrt{B^2 - E^2}/mc, \quad \Gamma = 1/\sqrt{1 - E^2/B^2}, \quad \gamma' = \sqrt{1 + p'_z{}^2/m^2c^2 + \rho'^2\Omega'^2/c^2},$$

а константы  $X', Y', Z', \rho', \psi'$  и  $p'_z$  являются свободными параметрами.

Другим способом эти же формулы можно получить, выполнив преобразование Лоренца в систему отсчёта  $(t', x', y', z')$  ведущего центра, движущуюся относительно исходной системы со скоростью  $cE/B$  в направлении  $x$ . В движущейся системе  $E' = 0, B' = \sqrt{B^2 - E^2}$ , а частица вращается вокруг направления магнитного поля (оси  $z'$ ) с частотой  $\Omega'/\gamma'$ , где  $\gamma' = \sqrt{1 + (p'_z{}^2 + p'_\perp{}^2)/m^2c^2}$  – relativistiskий фактор частицы в этой системе отсчёта. Обозначив ларморовский радиус в этой системе отсчёта через  $\rho' = p'_\perp/m\Omega'$ , координаты ведущего центра через  $X', Y', Z' + (p'_z/\gamma')t'$ , начальную фазу ларморовского вращения через  $\psi'$ , собственное время частицы через  $\tau = t'/\gamma'$  и выполнив преобразование Лоренца обратно в исходную систему отсчёта, получим приведённые выше формулы. При этом выясняется физический смысл свободных параметров. В частности,  $p'_z = p_z$  обозначает постоянную проекцию импульса частицы на направление  $B$ ,  $\rho'$  можно отождествить с шириной ларморовской спирали в направлении оси  $y$ , а  $\Gamma\rho'$  – в направлении оси  $x$ . Сечение спирали является эллипсом, а скорость движения вдоль оси  $z$  периодически меняется (это будет ясно, если суметь выразить собственное время  $\tau$  через  $t$ ).

В случае  $E > B$  решение можно получить, перейдя в систему отсчёта, движущуюся вдоль оси  $x$  со скоростью  $cB/E$ . В ней исчезает магнитное поле, поэтому частица неограниченно ускоряется.

**Задача 4.3.** Скорость  $w$  движущейся системы отсчёта выберем так, чтобы она была перпендикулярна векторам  $E$  и  $B$ . Тогда напряжённости полей  $E'$  и  $B'$  в новой системе отсчёта определяются по формулам

$$E' = \frac{E + w \times B/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}},$$

$$B' = \frac{B - w \times E/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}.$$

Скорость  $w$  может быть найдена из условия коллинеарности векторов  $E'$  и  $B'$ , т. е.

$$E + w \times B/c = \alpha (B - w \times E/c),$$

где  $\alpha$  — скаляр. Умножая последнее уравнение векторно на  $\mathbf{B}$  и принимая во внимание, что  $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{E}) = 0$ , получим

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{w}}{c} \mathbf{B}^2 = \alpha \frac{\mathbf{w}}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}),$$

а скалярным умножением на  $\mathbf{E}$  найдём

$$\mathbf{E}^2 - \left( [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\mathbf{w}}{c} \right) = \alpha (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}).$$

Исключение  $\alpha(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$  из последних двух уравнений даёт квадратное уравнение

$$\frac{\mathbf{w}}{c} = \frac{1 + w^2/c^2}{B^2 + E^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$$

для искомой скорости  $\mathbf{w}$ . Корни этого уравнения вещественны, причём один корень всегда больше, а другой всегда меньше  $c$ . Разумеется, следует взять меньший корень. Вводя обозначение  $\varpi = |[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] / (B^2 + E^2)| < 1/2$ , находим

$$\frac{\mathbf{w}}{c} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varpi^2}}{2\varpi^2} \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2 + E^2}.$$

Переход в третью систему отсчёта, движущуюся вдоль общего направления векторов  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$ , не изменяет их величину и направление. Отсюда следует, что система отсчёта с требуемыми свойствами существует и притом такая система единственная (с точностью до ничего не меняющего перемещения вдоль общего направления  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$ ). В пределе  $E \ll B$  найденная скорость  $\mathbf{w}$  совпадает со скоростью электрического дрейфа  $v_E = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] / B^2$  в нерелятивистском пределе.

Если в исходной системе отсчёта электрическое поле перпендикулярно магнитному, то в найденной системе отсчёта оно обратиться в нуль, поскольку скалярное произведение  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$  наряду с разностью  $B^2 - E^2$  является релятивистским инвариантом. В этом случае  $w = cE/B$ , если  $B > E$ , причём в движущейся системе отсчёта исчезает электрическое поле, или  $w = cB/E$ , если  $E > B$ , а исчезает магнитное поле.

**Задача 4.4.** Полагая  $E \sim T/e a$ , получаем, что  $v_E \ll \sqrt{2T/m_i}$ , если ларморовский радиус ионов  $\rho_i = \sqrt{2T/m_i}/\Omega_i$  мал по сравнению с радиусом плазмы  $a$ , т. е.  $\rho_i \ll \ll a$ . При этом условие  $v_E \ll \sqrt{2T/m_e}$  для электронов будет также выполнено.

**Задача 4.5.** Если  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  ( $\hat{\mathbf{z}}$  обозначает единичный вектор вдоль оси координат  $z$ ), а электрическое поле изменяется по закону  $\mathbf{E} = E \cos(kY) \hat{\mathbf{y}}$ , то

$$\mathbf{v}_E = (cE/B)J_0(k\rho) \cos(kY) \hat{\mathbf{x}},$$

где  $J_0$  — функция Бесселя первого рода,  $\rho$  — ларморовский радиус частицы,  $Y$  — координата ведущего центра, а  $k = 2\pi/\lambda$ . При  $k\rho \ll 1$  справедливо разложение  $J_0(k\rho) \simeq 1 - (k\rho)^2/4$ , приводящее к тому же результату, что и формула (4.30).

**Задача 4.6.** Пусть магнитное поле  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  направлено по оси  $\mathbf{z}$ , а электрическое поле  $\mathbf{E} = E(t)\hat{\mathbf{y}}$  направлено вдоль оси  $\mathbf{y}$ .

Переменное электрическое поле неизбежно создаёт переменное магнитное поле, но в уравнениях движения частицы переменной частью магнитного поля можно пренебречь, так как при нерелятивистских скоростях движения соответствующая добавка к силе Лоренца заведомо мала по сравнению с электрической частью силы:

$$\dot{v}_x = v_y \Omega, \quad \dot{v}_y = \frac{e}{m} E - v_x \Omega.$$

Сложим эти два уравнения, предварительно домножив первое на  $\exp(i\Omega t)$ , а второе на  $i \exp(i\Omega t)$ . Получившееся уравнение,

$$\frac{d}{dt} [(v_x + iv_y) e^{i\Omega t}] = \frac{e}{m} i E e^{i\Omega t},$$

легко интегрируется при произвольной зависимости  $E(t)$ :

$$v_x + iv_y = (v_x + iv_y)_0 e^{-i\Omega t} + \frac{e}{m} \int_0^t dt' i E(t') e^{i\Omega(t'-t)}.$$

Если  $E(t)$  изменяется незначительно за период вращения частицы  $2\pi/\Omega$ , интеграл в правой части можно приблизённо выразить через текущее значение  $E(t)$ , несколько раз выполнив интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' i E(t') e^{i\Omega(t'-t)} &= \frac{e^{i\Omega(t'-t)}}{i\Omega} i E(t') \Big|_0^t - \int_0^t \frac{dt'}{i\Omega} i \frac{dE(t')}{dt'} e^{i\Omega(t'-t)} = \\ &= \frac{e^{i\Omega(t'-t)}}{i\Omega} i E(t') \Big|_0^t - \frac{e^{i\Omega(t'-t)}}{(i\Omega)^2} i \frac{dE(t')}{dt'} \Big|_0^t + \dots = \\ &= i \frac{E(t)}{i\Omega} - \frac{1}{(i\Omega)^2} i \frac{dE(t)}{dt} + \dots . \end{aligned}$$

Слагаемые, возникающие от нижнего предела интегрирования  $t' = 0$ , содержат множитель  $\exp(-i\Omega t)$ , т. е. имеют такую же структуру, как  $(v_x + iv_y)_0 e^{-i\Omega t}$ . Они уточняют определение радиуса ларморовской спирали в переменном электрическом поле и в данном случае нас не интересуют, поэтому на последнем шаге вычислений в формуле выше оставлен только вклад верхнего предела  $t' = t$ . Каждый новый член возникающего при этом ряда содержит дополнительный малый множитель  $\frac{1}{\Omega}$  по сравнению с предыдущим. Удерживая два первых члена ряда и отделяя вещественную часть уравнения от мнимой, находим

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} \cos(\Omega t) + v_{y0} \sin(\Omega t) + c \frac{E}{B}, \\ v_y &= v_{y0} \cos(\Omega t) - v_{x0} \sin(\Omega t) + \frac{c}{B\Omega} \frac{dE}{dt}. \end{aligned}$$

Осциллирующие слагаемые здесь описывают лармровское вращение. В последнем слагаемом в правой части первого уравнения нетрудно распознать скорость электрического дрейфа (4.14), а последнее слагаемое в правой части второго уравнения есть скорость поляризационного дрейфа (5.16).

**Задача 4.7.** Магнитное поле потенциально там, где нет токов, поэтому вблизи оси системы катушек можно ввести скалярный магнитный потенциал  $\chi$  так, что  $\mathbf{B} = \nabla\chi$ . Из уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  следует, что  $\chi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2\chi = 0$ . Запишем его в цилиндрической системе координат  $(r, \psi, z)$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0.$$

Вследствие аксиальной симметрии задачи  $\chi = \chi(r, z)$  не зависит от азимутального угла  $\psi$ . Ищем решение в виде ряда

$$\chi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z) r^n$$

по степеням  $r$ . Подставив ряд в уравнение и приравняв нулю сумму коэффициентов отдельно при каждой степени  $r^n$ , получим рекуррентное соотношение

$$\chi_n = -\frac{\chi''_{n-2}}{n^2}.$$

На оси  $r = 0$  имеем  $B_z(0, z) = \chi'_0(z) = B_0(z)$ ,  $B_r(0, z) = \chi_1(z) = 0$ . Функции  $\chi_n(z)$  с нечётными индексами  $n$  обращаются в нуль, так как все они выражаются через  $\chi_1(z)$ . Остальные члены ряда выражаются через  $\chi_0(z) = \int^z B_0(z) dz$ :

$$\chi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \chi_0^{(2n)}(z) r^{2n}.$$

Этой формуле можно придать элегантную форму

$$\chi(r, z) = J_0\left(r \frac{d}{dz}\right) \chi_0(z),$$

воспользовавшись разложением функции Бесселя  $J_0(x)$  в ряд Тейлора. Вблизи оси системы для практических целей можно ограничиться несколькими первыми членами ряда:

$$\chi(r, z) = \int^z B_0(z) dz - \frac{1}{4} B'_0(z) r^2.$$

Это так называемое параксиальное (приосевое) приближение. В параксиальном приближении магнитное поле описывается формулами

$$B_r = -\frac{1}{2} B'_0(z) r, \quad B_\psi = 0, \quad B_z = B_0(z) - \frac{1}{4} B''_0(z) r^2.$$

Вычислив поток магнитного поля через окружность радиуса  $r$  в плоскости  $z = \text{const}$ , получим

$$\Phi(r, z) = \int_0^r 2\pi r B_z(r, z) dr = \pi r^2 B_0(z) - \frac{1}{16} r^4 B_0''(z) + \dots$$

Форму магнитной силовой линии можно найти, заметив, что эта линия лежит на поверхности  $\Phi = \text{const}$ . Ограничевшись первым членом параксиального разложения функции  $\Phi(r, z)$  из условия  $\pi r^2 B_0(z) = \pi r_0^2 B_0(0) = \text{const}$ , находим

$$r(z) = r_0 \sqrt{\frac{B_0(z)}{B_0(0)}},$$

где параметры  $r_0$  и  $B_0(0)$  имеют смысл радиуса силовой линии и величины магнитного поля в сечении  $z = 0$ .

**Задача 4.8.** Обобщая решение предыдущей задачи, скалярный потенциал можно разложить в ряд Фурье:

$$\chi(r, \psi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \chi_m(r, z) e^{im\psi}.$$

Для каждой функции  $\chi_m(r, z)$  имеем ряд Тейлора по степеням  $r$ :

$$\chi_m(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |m|!}{2^{2n} n! (|m| + n)!} \chi_{m,0}^{(2n)}(z) r^{|m|+2n} = 2^{|m|} |m|! J_{|m|} \left( r \frac{d}{dr} \right) \chi_{m,0},$$

где  $\chi_{m,0}(z)$  считается известной функцией, причём  $\chi_{-m,0}(z) = \chi_{m,0}(z)^*$  вследствие вещественности  $\chi(r, \psi, z)$ .

В практически важном случае квадрупольного магнитного поля с плоскостью симметрии, проходящей через ось системы, в ряду Фурье оставляют слагаемые с  $m = 0$  и  $m = 2$ . Тогда приближённо

$$\chi(r, z) = \int^z B_0(z) dz - \frac{1}{4} B'_0(z) r^2 + h(z) r^2 \cos(2\psi),$$

где функция  $h(z)$  отвечает за квадрупольную добавку, и

$$B_r = \frac{\partial \chi}{\partial r} = -\frac{1}{2} B'_0 r + 2h r \cos(2\psi),$$

$$B_\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \psi} = -2h r \sin(2\psi),$$

$$B_z = \frac{\partial \chi}{\partial z} = B_0 - \frac{1}{4} B''_0 r^2 + h' r^2 \cos(2\psi).$$

**Задача 4.9.** В декартовой системе координат

$$\begin{aligned} B_x &= \left(-\frac{1}{2}B'_0 + 2h\right)x, \\ B_y &= \left(-\frac{1}{2}B'_0 - 2h\right)y, \\ B_z &= B_0. \end{aligned}$$

Интегрируя уравнения

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x}{B_z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{B_y}{B_z}$$

для силовой линии, проходящей через точку  $(x_0, y_0, 0)$ , находим, что  $x = x_0 X(z)$ ,  $y = y_0 Y(z)$ , где

$$\begin{aligned} X(z) &= \sqrt{B_0(0)/B_0(z)} \exp\left(+2 \int_0^z [h(z)/B_0(z)] dz\right), \\ Y(z) &= \sqrt{B_0(0)/B_0(z)} \exp\left(-2 \int_0^z [h(z)/B_0(z)] dz\right). \end{aligned}$$

**Задача 4.10.** Поскольку  $\operatorname{div}(f(\alpha, \beta)[\nabla \alpha \times \nabla \beta]) = 0$  для произвольных функций координат  $\alpha = \alpha(\mathbf{r})$ ,  $\beta = \beta(\mathbf{r})$ , магнитное поле можно представить в виде

$$\mathbf{B} = f(\alpha, \beta) [\nabla \alpha \times \nabla \beta],$$

так как  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ; более детально данное утверждение обсуждается в решении задачи 19.5 во втором томе. Криволинейные координаты с контравариантными компонентами  $x^1 = \alpha$ ,  $x^2 = \beta$  называют потоковыми; другое название — потенциалы Клебша (Alfred Clebsch). Они удобны тем, что силовые линии магнитного поля в этих координатах являются «пряммыми», которые соответствуют пересечению поверхностей  $\alpha = \text{const}$  и  $\beta = \text{const}$ , поскольку  $(\nabla \alpha \cdot \mathbf{B}) = (\nabla \beta \cdot \mathbf{B}) = 0$ . Выбор потоковых координат неоднозначен. Если известно, что  $\alpha$  и  $\beta$  — какая-то пара потоковых координат для поля  $\mathbf{B}$ , то  $\alpha' = \alpha'(\alpha, \beta)$  и  $\beta' = \beta'(\alpha, \beta)$  также будут потоковыми координатами для того же поля.

Для потенциального магнитного поля с потенциалом  $\chi$  верно также другое представление магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \nabla \chi.$$

Выбрав  $x^3 = \chi$  в качестве третьей контравариантной координаты, находим ковариантные компоненты вектора магнитного поля в координатах  $x^i = (\alpha, \beta, \chi)$ :

$$B_i = (0, 0, 1).$$

Контравариантные компоненты  $B^i$  находим с помощью формулы для векторного произведения  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^i = \epsilon^{ijk} a_j b_k / \sqrt{g}$ , где  $g$  — определитель метрического

тензора  $g_{ik} = (\partial \mathbf{r}/\partial x^i) \cdot (\partial \mathbf{r}/\partial x^k)$ , а  $\epsilon^{ijk}/\sqrt{g}$  – абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга (его элементы равны нулю, если хотя бы два индекса одинаковы, а ненулевые элементы получаются из  $\epsilon^{123} = 1$  перестановкой соседних индексов, причём при каждой перестановке происходит изменение знака). Так как  $\nabla_j \alpha = \partial \alpha / \partial x^j = (1, 0, 0)$  и  $\nabla_k \beta = \partial \beta / \partial x^k = (0, 1, 0)$ , получаем

$$B^i = (0, 0, f/\sqrt{g}).$$

Вычисляя свёртку  $B^i B_i = f/\sqrt{g}$ , нетрудно найти определитель метрического тензора, не вычисляя сам тензор, так как  $B^i B_i = |\mathbf{B}|^2$ .

Обратившись к решению задачи 4.9, заметим, что силовые линии квадрупольного магнитного поля лежат на пересечении поверхностей  $x_0 = x/X(z) = \text{const}$  и  $y_0 = y/Y(z) = \text{const}$ . Поэтому в качестве потоковых координат можно выбрать  $\alpha = x_0$  и  $\beta = y_0$ . При этом с нужной точностью  $f = B_0(0)$ .

## Лекция 5

**Задача 5.1.** Скорость градиентного и центробежного дрейфов релятивистской частицы проще всего найти, предположив, что электрическое поле отсутствует. Тогда кинетическая энергия частицы сохраняется, релятивистский фактор  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  остаётся постоянным, и уравнение движения

$$\frac{d}{dt} m\gamma \mathbf{v} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

можно переписать в виде уравнения движения нерелятивистской частицы с массой  $\gamma m$ :

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Циклотронная частота такой частицы равна  $\Omega/\gamma$ , если  $\Omega = eB/mc$  по-прежнему обозначает нерелятивистское значение циклотронной частоты. Следовательно, искомые формулы для скорости дрейфа получаются из выражений (5.2) и (5.9) путём замены  $\Omega$  на  $\Omega/\gamma$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{VB} &= \frac{\gamma v_\perp^2}{2\Omega} \left[ \mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right], \\ \mathbf{v}_{cf} &= \frac{\gamma v_\parallel^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}]. \end{aligned}$$

**Задача 5.3.** 45 часов.

**Задача 5.4.** Пусть вектор  $\mathbf{R}(t)$  задаёт положение ведущего центра в произвольный момент времени  $t$ . Следует различать сопутствующую систему отсчёта  $S'$ , движущуюся со скоростью ведущего центра  $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{R}}$  (где точка сверху обозначает производную по времени) относительно некоторой инерциальной (лабораторной) системы отсчёта  $S$ , от системы отсчёта  $S''$ , вращающейся с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  относительно системы  $S'$ .

Пусть положение частицы в системах  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$  задано соответственно векторами  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{r}'(t)$  и  $\mathbf{r}''(t)$ , причём

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}''. \quad (5.4.1)$$

Для скорости частицы в этих системах имеем соотношения

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}', \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}'' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'']. \quad (5.4.2)$$

Сравнение результата почленного дифференцирования уравнений (5.4.1) с уравнениями (5.4.2) даёт формальное правило вычисления производных в разных системах:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{v}', \quad \dot{\mathbf{r}}'' = \mathbf{v}'' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'']. \quad (5.4.3)$$

Поэтому для производных скорости в разных системах имеем

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}, \quad \dot{\mathbf{v}}' = \mathbf{a}', \quad \dot{\mathbf{v}}'' = \mathbf{a}'' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}''], \quad (5.4.4)$$

где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{a}''$  – ускорение частицы в системах  $S$ ,  $S'$  и  $S''$  соответственно. Дифференцируя теперь уравнения (5.4.2), получаем

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{a}', \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a}'' + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'']] + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}''] + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'']. \quad (5.4.5)$$

По второму закону Ньютона, сила, действующая на частицу в инерциальной системе отсчёта  $S$ , равна  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . В неинерциальной системе отсчёта  $S'$ , как следует из уравнения  $m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\dot{\mathbf{u}}$ , на частицу дополнительно действует поступательная сила инерции

$$\mathbf{F}_{\text{in}} = -m\dot{\mathbf{u}}.$$

Во вращающейся системе  $S''$  к ней прибавляются центробежная сила

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = -m[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'']],$$

сила Кориолиса (Gaspard-Gustave de Coriolis, [179])

$$\mathbf{F}_{\text{C}} = -2m[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'']$$

и сила Эйлера (Leonhard Euler)

$$\mathbf{F}_{\text{Eu}} = -m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}''],$$

обусловленная неравномерностью вращения.

В задаче о дрейфе заряженной частицы в магнитном поле удобно использовать либо сопутствующую систему отсчёта  $S'$ , движущуюся поступательно относительно инерциальной системы отсчёта  $S$ , либо систему  $S''$ , вращающуюся относительно  $S'$  так, чтобы направление магнитного поля в этой системе было неизменным.

В первом случае на заряженную частицу помимо силы Лоренца действует только поступательная сила инерции.

Во втором случае удобно привязать систему координат к трёхграннику, составленному из единичных векторов касательной  $\mathbf{h}$ , главной нормали  $\mathbf{n}$  и би-нормали  $\mathbf{b}$  к траектории ведущего центра. Вычисленная для такой системы отсчёта величина  $\omega$  в рамках дрейфового приближения мала по сравнению с циклотронной частотой,  $\omega \ll \Omega$ , поэтому три силы:  $\mathbf{F}_{\text{cf}}$ ,  $\mathbf{F}_C$ ,  $\mathbf{F}_{\text{Eu}}$  — малы по сравнению с силой Лоренца  $\mathbf{F}_L = m[\mathbf{v}'' \times \Omega]$ . В отличие от них, сила инерции  $\mathbf{F}_{\text{in}}$  не меняет направление при движении частицы вдоль лармировской окружности, поэтому её эффект, накапливаясь, приводит к дрейфу частицы.

**Задача 5.5.** Искомые формулы можно упростить, если переменную времени  $t$  заменить координатой  $s$ , отмеряющей длину траектории, положив  $ds = |\dot{\mathbf{r}}| dt$ . Обозначая дифференцирование по  $s$  штрихом, имеем систему уравнений, которая описывает изменение тройки единичных векторов

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}', \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}'' / |\mathbf{r}''|, \quad \mathbf{b} = [\mathbf{h} \times \mathbf{n}] \quad (5.5.1)$$

при движении вдоль гладкой кривой  $\mathbf{r}(s)$ :

$$\mathbf{h}' = \kappa \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{h} + \tau \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}, \quad (5.5.2)$$

причём кривизна  $\kappa$  и кручение  $\tau$  вычисляются по формулам Френе—Серра (Jean Frenet, 1847; Joseph Serret, 1851):

$$\kappa = |\mathbf{r}''|, \quad \tau = |\mathbf{r}' \cdot [\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''']| / \kappa^2. \quad (5.5.3)$$

Вектор Дарбу

$$\boldsymbol{\omega} = \kappa \mathbf{b} + \tau \mathbf{h} \quad (5.5.4)$$

имеет смысл вектора угловой скорости тройки векторов Френе  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ , поскольку уравнения (5.5.2) можно переписать в виде

$$\mathbf{h}' = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}], \quad \mathbf{n}' = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{b}' = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}]. \quad (5.5.5)$$

**Задача 5.6.** Радиус кривизны и радиус кручения лармировской спирали соответственно равны  $1/\kappa = v^2/v_{\perp}\Omega$  и  $1/\tau = -v^2/v_{\parallel}\Omega$ .

**Задача 5.7.** Введём обозначения для формальных параметров разложения

$$\epsilon_\ell = \frac{\rho}{\ell} \ll 1, \quad \epsilon_t = \frac{1}{\Omega\tau} \ll 1,$$

которые согласно условиям (4.1) и (4.2) в рамках теории дрейфов считаются малыми. Для простоты рассмотрим дрейф в стационарных полях, что соответствует пределу  $\tau = \infty$  и  $\epsilon_t = 0$ .

Выберем в качестве формального определения радиус-вектора ведущего центра ларморовской орбиты уравнение (4.10):

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}].$$

В этом определении  $\mathbf{R}$  величины  $\Omega$  и  $\mathbf{h}$  следует брать в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , где находится частица в данный момент времени. Преобразуя производную по времени

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{\Omega} [\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{h}] + \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \dot{\mathbf{h}}] - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}]$$

с помощью уравнений движения (4.13), получим формулу

$$\dot{\mathbf{R}} = \underbrace{\mathbf{v}_\parallel \mathbf{h}}_I + \underbrace{\frac{e}{m\Omega} [\mathbf{E} \times \mathbf{h}]}_{II} + \underbrace{\frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \dot{\mathbf{h}}]}_{III} - \underbrace{\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}]}_{IV}, \quad (5.7.1)$$

где  $\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v} + [[\mathbf{v} \times \mathbf{h}] \times \mathbf{h}] = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\perp$ .

Уравнение (5.7.1) является точным, так как при его выводе не сделано каких-либо приближений. Величина  $\dot{\mathbf{R}}$  содержит в себе как осциллирующие (с частотой  $\Omega$ ) члены, которые при усреднении по времени обращаются в нуль, так и плавную составляющую, не обращающуюся в нуль при усреднении. Чтобы выделить скорость дрейфа, нужно усреднить это уравнение по быстрым осцилляциям.

Начнём с первого слагаемого  $I = \mathbf{v}_\parallel \mathbf{h}$ . Оно не содержит малого параметра  $\epsilon_\ell$ , т. е.  $\mathbf{v}_\parallel \mathbf{h} = \mathcal{O}(1)$ . Будем стремиться к тому, чтобы все поля вычислялись в точке  $\mathbf{R}$ , где в данный момент времени расположен ведущий центр, и разложим вектор  $\mathbf{h}$  в ряд Тейлора вблизи этой точки:

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) \simeq \mathbf{h}(\mathbf{R}) + (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{h}(\mathbf{R}).$$

Последний член здесь имеет порядок  $\epsilon_\ell$ . Такой же порядок малости имеет скорость дрейфа. Однако при усреднении по быстрым осцилляциям последний член исчезает, так как  $\langle \boldsymbol{\rho} \rangle = 0$ . То же самое происходит при усреднении  $\mathbf{v}_\parallel$ . Следовательно,

$$\langle I \rangle = \mathbf{v}_\parallel \mathbf{h}(\mathbf{R}).$$

Второе слагаемое  $II = \frac{e}{m\Omega} [\mathbf{E} \times \mathbf{h}]$  уже мало, так как электрическое поле в хорошо проводящей плазме обычно не может быть очень большим. Поэтому в аргументах  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\Omega$  для усреднения достаточно заменить  $\mathbf{r}$  на  $\mathbf{R}$ :

$$\langle II \rangle = \frac{c}{B^2(\mathbf{R})} [\mathbf{E}(\mathbf{R}) \times \mathbf{B}(\mathbf{R})].$$

Перейдём к третьему слагаемому  $III = \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \mathbf{h}]$ . В нём

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{h}.$$

Будем считать, что магнитное поле не зависит от времени. Тогда частная производная по времени равна нулю, и мы заключаем, что

$$III = \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

Чтобы выполнить усреднение, перейдём к индексным обозначениям, выразив векторное произведение через абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ :

$$III_\alpha = \frac{1}{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_\beta v_\nu \frac{\partial h_\gamma}{\partial x_\nu}.$$

Это выражение содержит малую производную  $\partial h_\gamma / \partial x_\nu$ , поэтому с необходимой точностью порядка  $\epsilon_\ell$  можно считать, что  $\Omega$  и  $h_\nu$  вычисляются в точке  $\mathbf{R}$ ; при этом усреднять следует только тензор  $v_\beta v_\nu$ :

$$\langle III \rangle_\alpha = \frac{1}{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial h_\gamma}{\partial x_\nu} \langle v_\beta v_\nu \rangle.$$

Результат усреднения  $\langle v_\beta v_\nu \rangle$  не должен изменяться при любом повороте вокруг направления  $\mathbf{h}$ . Поэтому тензор  $\langle v_\beta v_\nu \rangle$  выражается через инвариантные тензоры  $\delta_{\alpha\beta}$ ,  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ , которые не меняются при любом повороте (все другие инвариантные тензоры выражаются через эти два), и компоненты вектора  $\mathbf{h}$ . Наиболее общее выражение для  $\langle v_\beta v_\nu \rangle$ , которое можно составить из имеющихся тензоров, имеет вид

$$\langle v_\beta v_\nu \rangle = \mathbb{A} \delta_{\beta\nu} + \mathbb{B} h_\beta h_\nu + \mathbb{C} \epsilon_{\beta\nu\mu} h_\mu.$$

Так как  $v_\beta v_\nu$  не изменяется при изменении знака  $\mathbf{h}$ , коэффициент  $\mathbb{C}$  равен нулю. Коэффициенты  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  найдём, составив свёртки  $\langle v_\beta v_\nu \rangle$  с  $\delta_{\beta\nu}$  и  $h_\beta h_\nu$ . Решив полученные при этом уравнения

$$v^2 = 3\mathbb{A} + \mathbb{B}, \quad v_\parallel^2 = \mathbb{A} + \mathbb{B},$$

находим искомый тензор

$$\langle v_\beta v_\nu \rangle = \frac{1}{2} v_\perp^2 \{ \delta_{\beta\nu} - h_\beta h_\nu \} + v_\parallel^2 h_\beta h_\nu$$

и третье слагаемое

$$\langle III \rangle_\alpha = \frac{v_\perp^2}{2\Omega} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left\{ \frac{\partial h_\gamma}{\partial x_\beta} - h_\beta h_\nu \frac{\partial h_\gamma}{\partial x_\nu} \right\} + \frac{v_\parallel^2}{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} h_\beta h_\nu \frac{\partial h_\gamma}{\partial x_\nu}.$$

В векторных обозначениях

$$\langle III \rangle = \frac{v_\perp^2}{2\Omega} \{ \text{rot } \mathbf{h} - [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] \} + \frac{v_\parallel^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

С помощью векторного тождества

$$[\mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{h}] = \nabla \frac{h^2}{2} - (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = -(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \quad (5.7.2)$$

выражение в фигурных скобках приводится к виду

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} - [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] = \operatorname{rot} \mathbf{h} + [\mathbf{h} \times [\mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{h}]] = \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}).$$

Таким образом,

$$\langle III \rangle = \frac{v_\perp^2}{2\Omega} (\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}) \mathbf{h} + \frac{v_\parallel^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

Переходя к последнему слагаемому  $IV = -\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}]$ , учтём, что

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Omega = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Omega.$$

Дальнейшие вычисления проводим аналогично изложенному выше:

$$\begin{aligned} \langle IV \rangle_\alpha &= -\left\langle \frac{1}{\Omega^2} v_\nu \frac{\partial \Omega}{\partial x_\nu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_\beta h_\gamma \right\rangle = -\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x_\nu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma \langle v_\nu v_\beta \rangle = \\ &= -\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x_\nu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma \left\{ \frac{1}{2} v_\perp^2 \delta_{\beta\nu} + \left( v_\parallel^2 - \frac{1}{2} v_\perp^2 \right) h_\beta h_\nu \right\}. \end{aligned}$$

Так как  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} h_\beta h_\gamma = [\mathbf{h} \times \mathbf{h}]_\alpha = 0$ , в итоге получаем сравнительно простое выражение

$$IV = -\frac{v_\perp^2}{2\Omega^2} [\nabla \Omega \times \mathbf{h}].$$

Собирая все слагаемые вместе, приходим к окончательной формуле

$$\dot{\mathbf{R}} = \left( v_\parallel + \frac{v_\perp^2}{2\Omega} \mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h} \right) \mathbf{h} + \frac{c}{B} [\mathbf{E} \times \mathbf{h}] + \frac{v_\parallel^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] + \frac{v_\perp^2}{2\Omega B} [\mathbf{h} \times \nabla B]. \quad (5.7.3)$$

В первом слагаемом поправка к  $v_\parallel$  мала по параметру  $\epsilon_\ell$ , ею обычно пренебрегают. Последние три члена описывают соответственно электрический, центробежный и градиентный дрейфы.

## Лекция 6

**Задача 6.1.** В релятивистском случае частота циклотронного вращения уменьшается в  $\gamma$  раз. Повторяя вычисления в §6.1, получаем

$$I = \frac{e\Omega}{2\pi\gamma},$$

где  $\gamma > 1$  – релятивистский фактор, а  $\Omega = eB/mc$  – циклотронная частота в нерелятивистском приближении. Величина лармировского радиуса при заданной скорости  $v_\perp$  увеличивается в  $\gamma$  раз:

$$\rho = \gamma v_\perp / \Omega.$$

Собирая множители в формуле  $\mu_\gamma = SI/2c = \pi\rho^2I/2c$ , которая не изменилась по сравнению с нерелятивистским пределом, находим

$$\mu_\gamma = \frac{\gamma m v_\perp^2}{2B}.$$

Вводя релятивистский импульс  $p_\perp = \gamma m v_\perp$ , можно также записать

$$\mu_\gamma = \frac{p_\perp^2}{2\gamma m B}.$$

**Задача 6.2.** При ускорении заряженной частицы вдоль магнитного поля её лармировский радиус  $\rho = p_\perp/m\Omega$  не меняется, поэтому магнитный поток  $\Phi = \pi\rho^2B$  через орбиту частицы остаётся постоянным. Напротив, магнитный момент  $\mu_\gamma = p_\perp^2/2\gamma m B$  уменьшается обратно пропорционально релятивистскому фактору  $\gamma = \sqrt{m^2c^2 + p_\perp^2 + p_\parallel^2}/mc$  вследствие релятивистского замедления циклотронного вращения при увеличении продольного импульса  $p_\parallel$ .

**Задача 6.4.** Пусть магнитное поле медленно изменяется во времени. Поскольку сила Лоренца  $\mathbf{F} = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c$  перпендикулярна  $\mathbf{B}$ , её работа  $\int(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) dt$  тождественно равна нулю. Следовательно, магнитное поле напрямую не может передать энергию заряженной частице. Однако при изменении  $\mathbf{B}$  в соответствии с законом электромагнитной индукции,

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

возникает вихревое электрическое поле  $\mathbf{E}$ , которое уже может совершать работу над заряженной частицей. Умножив скалярно уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

на  $\mathbf{p}_\perp = \gamma m v_\perp$ , получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{p_\perp^2}{2} = e(\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{E}).$$

Интегрируя по периоду циклотронного вращения  $2\pi\gamma/|\Omega|$ , находим среднее значение

$$\frac{d}{dt} \frac{p_\perp^2}{2} = \frac{e|\Omega|}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi\gamma/|\Omega|} (\mathbf{E} \cdot \gamma m \mathbf{v}_\perp) dt.$$

Интеграл по времени заменим интегрированием вдоль замкнутой орбиты в системе отсчёта, сопутствующей ведущему центру частицы:

$$\frac{d}{dt} \frac{p_\perp^2}{2} = \frac{em|\Omega|}{2\pi} \oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}).$$

Здесь  $d\mathbf{l} = \mathbf{v}_\perp dt$  – элемент дуги вдоль траектории частицы ( $\mathbf{v}_{||} = 0$  в сопутствующей системе отсчёта). С помощью теоремы Стокса интеграл по замкнутому контуру преобразуем в интеграл по ориентированной поверхности, которая натянута на ларморовскую орбиту:

$$\frac{d}{dt} \frac{p_\perp^2}{2} = \frac{em|\Omega|}{2\pi} \int_S (\text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = -\frac{em|\Omega|}{2\pi c} \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right).$$

Направление нормали к поверхности  $S$  определяется направлением обхода контура интегрирования по правилу правого винта, поэтому  $d\mathbf{S} = -(\Omega/|\Omega|) dS$ , а интегрирование сводится к умножению подынтегрального выражения на площадь ларморовского кружка  $S = \pi\rho^2 = \pi(p_\perp c/eB)^2$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{p_\perp^2}{2} = \frac{em|\Omega|}{2\pi c} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \frac{\Omega}{|\Omega|} \right) \pi\rho^2 = \frac{p_\perp^2}{2B^2} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} \right) = \frac{p_\perp^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Так как в сопутствующей системе отсчёта  $\dot{\mathbf{R}} = 0$  и, следовательно,  $\partial B/\partial t = dB/dt$ , в итоге получаем искомый результат

$$\frac{d}{dt} \frac{p_\perp^2}{2B} = 0.$$

**Задача 6.5.** Последовательный вывод уравнения (6.11) методом усреднения имеется в [68, с. 207] и [71, с. 24]. Приведём упрощённый вариант вывода.

Обозначая угловыми скобками усреднение по периоду ларморовского вращения, запишем темп изменения кинетической энергии частицы

$$\frac{dK}{dt} = \langle e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \rangle \approx e(\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{R}}) + e(\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{E}).$$

Здесь первое слагаемое представляет собой работу электрического поля по перемещению ведущего центра заряженной частицы за единицу времени. Преобразуем второе слагаемое, которое, как мы увидим, описывает работу вихревого электрического поля по замкнутой ларморовской окружности. Запишем

это слагаемое в индексных обозначениях:

$$e\langle \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{E} \rangle = e \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} \langle v_\alpha \rho_\beta \rangle.$$

Далее используем определение вектора ларморовского радиуса (4.24), которое перепишем в индексных обозначениях с помощью тензора Леви-Чивиты  $\epsilon_{\beta\gamma\delta}$ :

$$\rho_\beta = -\frac{1}{\Omega} \epsilon_{\beta\gamma\delta} v_\gamma h_\delta.$$

Следовательно,

$$e\langle \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{E} \rangle = -\frac{e}{\Omega} \epsilon_{\beta\gamma\delta} \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} h_\delta \langle v_\alpha v_\gamma \rangle$$

и усреднение сводится к вычислению  $\langle v_\alpha v_\gamma \rangle$ . Легко проверить, что

$$\langle v_\alpha v_\gamma \rangle = \frac{v_\perp^2}{2} (\delta_{\alpha\gamma} - h_\alpha h_\gamma) + v_\parallel^2 h_\alpha h_\gamma,$$

где  $\delta_{\alpha\gamma}$  обозначает символ Кронекера. Поскольку

$$\epsilon_{\beta\gamma\delta} h_\gamma h_\delta = 0,$$

получаем

$$e\langle \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{E} \rangle = -\frac{ev_\perp^2}{2\Omega} \epsilon_{\beta\gamma\delta} \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} h_\delta \delta_{\alpha\gamma} = -\frac{ev_\perp^2}{2\Omega} (\text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}).$$

Учитывая, что

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$(\partial \mathbf{B} / \partial t) \cdot \mathbf{h} = \partial B / \partial t$  и  $\Omega = eB/mc$ , в итоге получаем равенство

$$e\langle \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{E} \rangle = \frac{mv_\perp^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial t} = \mu \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Тем самым

$$\frac{dK}{dt} = e(\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{R}}) + \mu \frac{\partial B}{\partial t}.$$

**Задача 6.6.** При переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую электрический и магнитный дипольные моменты преобразуются по формулам [180, задача 613]

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_\perp &= \mathbf{d}'_\perp + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \boldsymbol{\mu'}], & \mathbf{d}_\parallel &= \mathbf{d}'_\parallel / \Gamma, \\ \boldsymbol{\mu}_\perp &= \boldsymbol{\mu}'_\perp - \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{d'}], & \boldsymbol{\mu}_\parallel &= \boldsymbol{\mu}'_\parallel / \Gamma, \end{aligned}$$

где  $\Gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ , а значки  $\perp$  и  $\parallel$  указывают ориентацию относительно взаимной скорости  $\mathbf{V}$  движения систем отсчёта. Адиабатическим инвариантом можно назвать абсолютное значение магнитного момента в системе отсчёта ведущего центра частицы (и то только если пренебречь отличием от единицы релятивистского фактора  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , вычисленного по полной энергии частицы в этой системе отсчёта). Инварианты не подлежат пересчёту в другую систему координат. Нужно пересчитывать параметры частицы, через которые выражается адиабатический инвариант.

**Задача 6.7.** Пренебрегая слагаемым  $\frac{1}{2}mv_E^2$  в (6.13), имеем  $\varepsilon = \frac{1}{2}mv_{\parallel 0}^2 + \mu B_{\min} + e\varphi_0$  в минимуме магнитного поля, где  $B = B_{\min}$ , и  $\varepsilon = \mu B_{\max}$  в максимуме магнитного поля, где  $B = B_{\max}$  и  $\varphi = 0$ . Так как  $\mu = mv_{\perp 0}^2/2B_{\min}$ , приравнивая два выражения для энергии  $\varepsilon$ , находим границу конуса потерь  $mv_{\parallel 0}^2/2 = (B_{\max}/B_{\min} - 1)mv_{\perp 0}^2/2 - e\varphi_0$ , где  $e > 0$  для ионов и  $e < 0$  для электронов. При заданной поперечной скорости  $v_{\perp 0}$  в конус потерь попадают частицы с продольной скоростью, превышающей значение  $v_{\parallel 0}$  на границе конуса потерь.

**Задача 6.8.** Абсолютным называется удержание заряженной частицы внешним электромагнитным полем в ограниченной изолированной области пространства, выход из которой невозможен без нарушения точных интегралов движения, таких как энергия и обобщённый азимутальный момент.

В рамках адиабатического приближения заряженная частица удерживается в пробкотроне, если её пичч-угол находится вне конуса потерь, т. е.

$$\theta_0 > \arcsin \sqrt{B_{\min}/B_{\max}}, \quad (6.8.1)$$

где  $B_{\min}$  и  $B_{\max}$  — это минимальное и максимальное значения магнитного поля на магнитной линии, по которой движется частица. Этот критерий по существу требует, чтобы магнитный момент частицы имел достаточно большую величину. Однако магнитный момент не является точным инвариантом. Точными интегралами движения в ловушке с аксиально-симметричным магнитным полем являются энергия,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + e\varphi,$$

и обобщённый азимутальный момент,

$$P_\psi = mr v_\psi + \frac{e}{c} r A_\psi,$$

причём предполагается, что в цилиндрической системе координат векторный потенциал выбран так, что имеет только азимутальную компоненту  $A_\psi(r, z)$ . В параксиальном приближении

$$A_\psi(r, z) \approx \frac{1}{2}B_0(z)r,$$

где  $B_0(z)$  — магнитное поле на оси пробкотрона. Гамильтониан заряженной частицы в таком поле равен

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} \left( P_\psi - \frac{e}{c} r A_\psi \right)^2,$$

где  $p_r = mv_r$  и  $p_z = mv_z$  обозначают радиальную и аксиальную компоненты импульса частицы. Он описывает движение в двумерном потенциале

$$U(r, z) = \frac{1}{2mr^2} \left( P_\psi - \frac{e}{2c} r^2 B_0(z) \right)^2.$$

Изолинии  $U = \text{const}$  на плоскости  $rz$  ограничивают область пространства, доступную частице с заданной энергией. Если изолинии не замкнуты, частица может уйти из ловушки. Абсолютному удержанию соответствуют замкнутые изолинии вокруг локальных минимумов  $U = U_{\min}$ , где обращаются в нуль первые производные,

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (6.8.2)$$

а вторые производные удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} \right)^2. \quad (6.8.3)$$

Они отделены от незамкнутых изолиний сепаратрисой, которая проходит через седловую точку, где первые производные также обращаются в нуль, но одно из условий (6.8.3) не выполнено.

В результате несложных вычислений находим, что при  $eP_\psi > 0$  уравнения (6.8.2) имеют решение  $r = \sqrt{2cP_\psi/eB_0(z)}$  при любом  $z$ . Однако оно соответствует «ущелью»  $U = 0$ , которое тянется до бесконечных значений  $z$ .

При  $eP_\psi < 0$  уравнения (6.8.2) имеют решение  $r = \sqrt{-2cP_\psi/eB_0(z)}$  при  $z$  таком, что  $\partial B_0 / \partial z = 0$ . В минимуме  $B_0 = B_{\min}$  находится локальный минимум эффективного потенциала  $U_{\min} = -eP_\psi B_{\min}/mc$ . Через максимум  $B_0 = B_{\max}$  проходит сепаратриса, которой соответствует значение эффективного потенциала  $U_{\sep} = -eP_\psi B_{\max}/mc$ . Внутри области, включающей минимум  $U$  и ограниченной сепаратрисой, удерживаются частицы с энергией  $m(v_r^2 + v_z^2)/2 + U < U_{\sep}$ . Так как по сути  $U = mv_\psi^2/2$ , достаточное условие удержания частицы в ловушке можно записать в виде

$$\varepsilon < -eP_\psi B_{\max}/mc, \quad (6.8.4)$$

где энергия  $\varepsilon = m(v_r^2 + v_\psi^2 + v_z^2)/2$  и обобщённый азимутальный импульс  $P_\psi = mr v_\psi + (e/2c)r^2 B_0(z)$ , будучи точными интегралами движения, однозначно определяются по начальной скорости частицы и её начальным координатам.

Пусть вначале частица находилась в плоскости минимума магнитного поля, где  $B_0(0) = B_{\min}$  в точке с координатами

$$x = R_0 \cos \chi + \rho_0 \cos \theta, \quad y = R_0 \sin \chi + \rho_0 \sin \theta, \quad z = 0$$

и имела скорость

$$v_x = v_{\perp 0} \sin \theta, \quad v_y = -v_{\perp 0} \cos \theta, \quad v_z = v_{\parallel 0},$$

причём  $\Omega_0 = eB_{\min}/mc$  и  $v_{\perp 0} = \rho_0 \Omega_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} P_\psi &= m(v_y x - v_x y) + \frac{m}{2}(x^2 + y^2)\Omega_0 = \frac{m}{2}(R_0^2 - \rho_0^2)\Omega_0, \\ \varepsilon &= \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{m}{2}(v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2) \end{aligned}$$

и условие (6.8.4) приводится к виду

$$\frac{v_{\perp 0}^2}{B_{\min}} > \frac{v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2}{B_{\max}} + \frac{R_0^2 \Omega_0^2}{B_{\min}}. \quad (6.8.5)$$

Отсюда видно, что область абсолютного удержания находится внутри области адиабатического удержания

$$\frac{v_{\perp 0}^2}{B_{\min}} > \frac{v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2}{B_{\max}}, \quad (6.8.6)$$

совпадая с ней при  $R_0 = 0$  для частиц, ведущий центр которых движется по оси системы. Ясно также, что ларморовский радиус частицы  $\rho_0 = v_{\perp 0}/\Omega_0$  должен превышать расстояние  $R_0$  от оси системы до ведущего центра, т. е. траектория должна охватывать ось.

**Задача 6.9.** Плазма в адиабатической ловушке имеет амбиполярный потенциал  $\phi \sim T_e/e$ . В зависимости от величины амбиполярного электрического поля  $E \sim \phi/a$ , где  $a$  обозначает характерный радиус плазменного столба, время обхода  $\tau_{\text{dr}}$  дрейфовой траектории частицы вокруг оси плазмы можно оценить либо как частное от деления  $a$  на скорость градиентного и центробежного дрейфа,  $v_{\text{dr}} \sim (\rho a/L^2) v$ , где  $L$  – длина ловушки, если электрическое поле достаточно мало, либо как частное от деления  $a$  на скорость электрического дрейфа,  $v_E \sim cT_e/eBa$ , если электрическое поле велико. В первом случае условие  $\tau_{\text{dr}} \gg L/v$  сохранения продольного адиабатического инварианта  $J_{\parallel}$  эквивалентно неравенству  $\rho \ll L$ , которое в реальных ловушках всегда выполняется. Во втором случае необходимо условие  $\rho \ll a^2/L$ , существенно более жёсткое при обычном соотношении размеров  $a \ll L$ . Поскольку при одинаковой энергии ларморовский радиус ионов  $\rho_i$  в  $\sqrt{m_i/m_e}$  раз больше, чем ларморовский радиус электронов  $\rho_e$ , проверять условие сохранения  $J_{\parallel}$  нужно прежде всего для ионов.

**Задача 6.10.** В катушке Гельмгольца магнитных пробок нет. Её используют для создания протяженной области однородного магнитного поля. В центре

катушки, т. е. в точке на оси симметрии  $z$  на равном удалении от витков, равны нулю первые три производные  $B_0(z)$  по  $z$ .

В катушке из двух витков, расстояние между которыми равно их диаметру (а не радиусу, как в катушке Гельмгольца), пробочное отношение на оси равно 1,54358.

**Задача 6.11.**  $n = (B/B_{\min})(B_* - B_{\min})^{1/2}(B_* - B)^{-1/2} n_0$ . (Подсказка: учесть, что наряду с сохранением потока магнитного поля  $BS$  через переменную площадь сечения пучка  $S$  сохраняется также полный поток частиц  $\nu v_{\parallel} S$ .) Формально плотность обращается в бесконечность при  $B \rightarrow B_*$ . Бесконечность сглаживается при учёте конечной ширины углового распределения частиц пучка.

**Задача 6.12.** Энергия частицы уменьшится в 4 раза. Это результат легко получить, если траектория частицы лежит в экваториальной плоскости магнитного поля диполя, где магнитное поле минимально вдоль каждой силовой линии. Но он правилен и в общем случае. Чтобы доказать это, учтём, что сохраняются магнитный момент  $\mu$ , продольный адиабатический инвариант

$$J_{\parallel} = \frac{1}{\pi} \int \sqrt{2m(\epsilon - \mu B)} ds$$

и магнитный поток через дрейфовую оболочку

$$\Phi = \int_{r_0}^{\infty} B_\theta 2\pi r dr = \frac{2\pi m}{r_0},$$

где  $m$  — магнитный момент диполя,  $r_0$  — радиус дрейфовой оболочки в экваториальной плоскости диполя. В сферической системе координат  $(r, \theta, \psi)$ , в которой широтный угол  $\theta$  отсчитывается от направления магнитного диполя, его поле имеет компоненты

$$\mathbf{B} = (2 \cos \theta, \sin \theta, 0) m/r^3.$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{B_r}{B_\theta},$$

находим уравнение силовой линии

$$r = r_0 \sin^2 \theta.$$

Переходя в формуле для  $J_{\parallel}$  от интегрирования по элементу длины силовой линии  $ds = \sqrt{dr^2 + (r d\theta)^2}$  к интегрированию по безразмерной переменной  $\xi = r/r_0$ , приведём её к следующему виду

$$J_{\parallel} = \frac{2\sqrt{2m}}{\pi} \int \sqrt{\epsilon r_0^2 - (\mu m/r_0) \sqrt{4 - 3\xi}/\xi^3} \sqrt{(4 - 3\xi)/(1 - \xi)} d\xi,$$

где интегрирование производится от нуля выражения под знаком первого корня до  $\xi = 1$ . Так как  $J_{\parallel}$  зависит от двух комбинаций параметров:  $\mu m/r_0$  и  $\epsilon r_0^2$ , а  $\mu$ ,  $m/r_0$  и  $J_{\parallel}$  сохраняются в адиабатическом процессе, ясно, что сохраняется также произведение  $\epsilon r_0^2$ . При увеличении  $m$  в 2 раза радиус дрейфовой оболочки  $r_0$  увеличивается в 2 раза (поскольку  $m/r_0$  сохраняется). Следовательно, энергия частицы  $\epsilon$  уменьшается в 4 раза.

**Задача 6.14.**  $\epsilon/\epsilon_0 = \sqrt{n} \cos^2 \theta_0 + n \sin^2 \theta_0$ .

**Задача 6.15.** 2,5 кэВ.

**Задача 6.16.** Если предположить, что магнитное поле можно аппроксимировать гладкой функцией с характерным масштабом изменения порядка длины установки для удержания плазмы, изменение магнитного момента  $\Delta\mu$  за один пролёт между магнитными пробками будет пропорционально амплитуде резонанса  $\langle\Omega\rangle = N\omega_{\parallel}$  между ларморовским вращением со средней частотой  $\langle\Omega\rangle$  и продольными колебаниями частицы между пробками с частотой  $\omega_{\parallel}$ . Тогда

$$\Delta\mu/\mu \sim A^N/N!, \quad (6.16.1)$$

где  $N$  — номер резонанса. Численный множитель  $A \sim 1$  близок к единице, при чём его точное значение зависит от конкретного выбора аппроксимирующей функции. По порядку величины  $N \simeq L/\rho_{\parallel 0}$ , где  $\rho_{\parallel 0} = v_{\parallel 0}/\Omega_0$  — продольный ларморовский радиус частицы в минимуме магнитного поля. С помощью формулы Стирлинга  $N! \sim \sqrt{2\pi N} (N/e)^N$  из (6.16.1) следует оценка

$$\Delta\mu/\mu \sim \exp(-L/\rho_{\parallel 0}), \quad (6.16.2)$$

совпадающая с результатом более строгого анализа [82]. Она не накладывает существенных ограничений на выбор конфигурации магнитного поля, обеспечивающей адиабатический (устойчивый) режим удержания частиц в пробкотроне. Действительно, движение будет стохастическим (неустойчивым), если  $\Delta\mu/\mu$  превысит относительное расстояние между резонансами:

$$\Delta\mu/\mu \geq 1/N. \quad (6.16.3)$$

Однако неравенство  $\exp(-L/\rho_{\parallel 0}) > \rho_{\parallel 0}/L$ , эквивалентное (6.16.3), формально не может быть выполнено.

Между тем магнитная система крупных установок для удержания плазмы состоит из большого числа катушек, поэтому аппроксимация магнитного поля «гладкой» функцией означает пренебрежение резонансами между ларморовским вращением и модуляцией продольного движения мелкомасштабной составляющей магнитного поля, неизбежно усиленной вследствие дискретной

структурой элементов магнитной системы. Амплитуда таких резонансов мала, поскольку мала относительная амплитуда  $\delta$  мелкомасштабной составляющей магнитного поля. Например, если расстояние между катушками равно  $l$ , а их радиус  $b$ , то  $A_\delta \sim \delta \simeq \exp(-2\pi b/l) \ll 1$ . Однако номер резонанса  $N_\delta = l/2\pi\rho_{\parallel 0}$  также значительно меньше, чем  $N$ , если  $l \ll L$ . Поэтому из (6.16.1) следует оценка [83]

$$\Delta\mu/\mu \sim \exp(-b/\rho_{\parallel 0}), \quad (6.16.4)$$

значительно превышающая (6.16.2).

**Задача 6.18.** Теория дрейфового движения заряженных частиц в квадрупольной адиабатической ловушке изложена в статье Д. Д. Рютова и Г. В. Ступакова [81] в сборнике «Вопросы теории плазмы».

## Лекция 7

**Задача 7.1.**  $\frac{1}{2}m_e v^2/[1 + (m_e v^2 b / 4e^2)^2]$ .

**Задача 7.2.** Для оценки возьмём  $\frac{1}{2}mv^2 = T$ ,  $e_a = e_b = e$ ,  $n_a = n_b = n$  и  $\lambda_D = \sqrt{T/8\pi ne^2}$ . Тогда

$$\frac{\lambda_D}{b_*} = \frac{\lambda_D}{e^2/mv^2} = \frac{2\lambda_D T}{e^2} = 16\pi n \lambda_D^3 = 6N_D.$$

При  $T = 100$  эВ,  $n = 10^{14}$  см<sup>-3</sup> получаем  $N_D = 1,2 \times 10^5$ ,  $\Lambda = 13,5$ . При изменении плотности плазмы на 2 порядка кулоновский логарифм меняется всего лишь на 17%.

**Задача 7.3.** Интегрируя в формуле (7.13) от  $\theta = \pi/2$  до  $\theta = \pi$ , получаем

$$4\pi b_*^2 \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{d\sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = 4\pi b_*^2 \ln \sqrt{2}. \quad (7.3.1)$$

Это примерно в 3Λ раз меньше, чем полная величина транспортного сечения.

**Задача 7.4.**  $\sigma_t = 4\pi\Lambda e_a^2 e_b^2 / p^2 v^2$ .

**Задача 7.5.** Магнитное поле слабо влияет на кулоновское рассеяние до тех пор, пока ларморовский радиус больше дебаевской длины,  $\rho > \lambda_D$ , т. е.

$$\frac{B^2}{8\pi} < nmc^2.$$

Это типичная ситуация для экспериментов по управляемому термоядерному синтезу. Однако указанное условие нарушается в заряженной плазме. Как следует из решения задачи 1.9, магнитное поле способно предотвратить разлёт заряженной плазмы только при  $B^2/8\pi > nmc^2$ . При  $\rho < \lambda_D$  необходимо принять во внимание ларморовское искривление траектории налетающей частицы вблизи рассеивающего центра, но учёт этого эффекта оказывается только на величине кулоновского логарифма, при вычислении которого нужно принять, что  $b_{\max} \approx \rho$ . Дело в том, что на большем расстоянии от рассеивающего центра движение пролетающей частицы становится адиабатическим, поэтому энергия и импульс, полученные частицей от рассеивающего центра при подлете к центру, будут ему возвращены при удалении от него.

Подробно теория кулоновских столкновений в сильном магнитном поле изложена в 10-м томе курса «Теоретической физики» [55, §60].

**Задача 7.6.** Помимо теплового движения со скоростью порядка тепловой,  $v \sim \nu_T$ , в поле волны рассеиваемая частица участвует в осцилляторном движении. Если частота волны существенно больше плазменной,  $\omega \gg \omega_p$ , на участке траектории порядка длины Дебая  $\lambda_D$  укладывается много периодов осцилляций  $2\pi\nu/\omega$ . Это означает, что вынужденные осцилляции пролетающей частицы в поле рассеивающего центра являются адиабатическими, а поэтому их энергия не рассеивается и возвращается волне после пролёта мимо рассеивающего центра. Движение не будет адиабатическим при пролёте на расстоянии порядка или меньше  $v/\omega$ . Отсюда следует, что при вычислении затухания высокочастотной волны в плазме обычное определение кулоновского логарифма  $\Lambda \approx \ln(\lambda_D/b_*)$ , где  $b_* = e^2/mv^2$  обозначает кулоновский радиус, нужно заменить на  $\Lambda \approx \ln(v/b_*\omega) = \ln(mv^3/e^2\omega)$ . Количественное рассмотрение процесса дано в статье [181].

**Задача 7.8.** Будем считать, что угловым рассеянием быстрого иона можно пренебречь, так как ион быстрее тормозится на электронах плазмы, чем рассеивается на ионах плазмы. Такое предположение верно, пока ион не затормозится до энергии порядка  $(m_i/m_e)^{1/3} T_e$ . Обозначая через  $\nu_{ie}$  и  $\Omega_i$  соответственно частоту столкновений иона с электронами и циклотронную частоту, запишем уравнения движения иона

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{v} \times \Omega_i] - \nu_{ie}(\mathbf{r})\mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}.$$

При условиях, типичных для замагниченной плазмы,  $\nu_{ie} \ll \Omega_i$ , поэтому движение иона можно рассматривать как дрейф в магнитном поле под действием

малой внешней силы  $\mathbf{F} = -m_i \nu_{ie} \mathbf{v}$ . Тогда, в соответствии с общей формулой (4.26), заключаем, что скорость движения ведущего центра ларморовской орбиты есть

$$\dot{\mathbf{R}} = -\frac{1}{\Omega_i} [\langle \nu_{ie} \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{h}],$$

где угловые скобки обозначают усреднение по периоду циклотронного движения. В однородной плазме усреднение  $\langle \nu_{ie} \mathbf{v} \rangle$  дало бы нуль, однако часть ларморовской орбиты находится за границей плазмы, где  $\nu_{ie} = 0$ . Обозначая через  $2\alpha$  угол, на который опирается сегмент ларморовской окружности, лежащий внутри плазмы, находим, что вектор  $\langle \nu_{ie} \mathbf{v} \rangle$  параллелен границе плазмы, а по величине равен  $(\nu_0/\pi)v \sin \alpha$ , где  $\nu_0$  есть величина  $\nu_{ie}$  внутри плазмы. Следовательно, изменение координаты  $X$  ведущего центра, отсчитываемой по нормали к границе плазмы, подчиняется уравнению

$$\dot{X} = -\frac{\nu_0}{\pi} \rho \sin \alpha, \quad (7.8.1)$$

где  $\rho = v/\Omega_i$  — текущее значение ларморовского радиуса. Так как, по условию задачи, нейтральный атом, влетевший в плазму по нормали к её границе, ионизовался непосредственно на границе, первоначально ведущий центр образовавшегося иона будет находиться на границе плазмы при  $X = 0$ , а внутри плазмы будет проходить ровно половина ларморовской окружности, так что  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ . Далее как  $X$ , так и  $\alpha$  будут увеличиваться до тех пор, пока ларморовская окружность полностью не погрузится в плазму. Этому моменту соответствует  $\alpha = \pi$ . Дальнейшее торможение иона уже не будет сопровождаться дрейфом его ведущего центра, поэтому, двигаясь по медленно скручивающейся спирали, ион в итоге попадёт в точку, где остановился ведущий центр.

Уменьшение ларморовского радиуса иона вследствие его торможения описывается уравнением

$$\dot{\rho} = -\langle \nu_{ei} \rangle \rho,$$

которое получается путём скалярного умножения на  $\mathbf{v}$  уравнения для  $\dot{\mathbf{v}}$ . Замечая, что  $\langle \nu_{ei} \rangle = \nu_0 \alpha / \pi$ , имеем

$$\dot{\rho} = -\frac{\nu_0}{\pi} \alpha \rho. \quad (7.8.2)$$

Постоянный множитель  $\nu_0/\pi$  не входит в ответ задачи; от него зависит время торможения иона, но не его конечная координата. Опуская далее этот множитель (можно считать, что он включен в безразмерное время  $\tau = (\nu_0/\pi)t$ ), исключим из полученных уравнений  $\rho$  с помощью геометрического соотношения

$$X = -\rho \cos \alpha. \quad (7.8.3)$$

В результате получим пару уравнений

$$\dot{X}/X = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \dot{\alpha} = -(\alpha - \operatorname{tg} \alpha)/\operatorname{tg} \alpha.$$

Рассматривая  $X$  как функцию  $\alpha$  и замечая, что  $\dot{X} = (\mathrm{d}X/\mathrm{d}\alpha)\dot{\alpha}$ , в первом из этих уравнений исключим время  $\tau$  с помощью второго уравнения. Полученное в результате уравнение,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \ln(X) = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\alpha - \operatorname{tg} \alpha},$$

интегрируется в элементарных функциях:

$$X = \frac{\rho_0 \cos \alpha}{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}. \quad (7.8.4)$$

Сравнивая (7.8.4) и (7.8.3), находим, что

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha},$$

откуда следует, что константу интегрирования  $\rho_0$  нужно отождествить с начальным значением ларморовского радиуса (при  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ). В конечном состоянии (которому соответствует  $\alpha = \pi$ ) имеем  $X = \rho_0/\pi$ .

**Задача 7.9.** Когда ион или электрон приближается к нейтральному атому, он поляризует его своим полем, а сам испытывает действие наведённого в атоме дипольного момента. Сила поляризационного взаимодействия убывает с расстоянием гораздо медленнее, чем сила, действующая между нейтральными атомами.

О поляризации атома имеет смысл говорить, если скорость налетающей частицы значительно меньше, чем характерная скорость электронов в атоме,  $v \ll v_{\text{at}}$ . В обратном предельном случае,  $v \gg v_{\text{at}}$ , взаимодействия заряженной частицы с атомом можно рассматривать как кулоновское рассеяние на ядре и электронах атома по отдельности, как на свободных частицах.

Условие  $v \ll v_{\text{at}}$  легче выполнить для ионов, поэтому для определённости рассмотрим столкновение однозарядного иона с атомом. Находясь на расстоянии  $r$  от атома, ион своим электрическим полем  $e^2/r$  индуцирует в атоме дипольный момент  $d = pe/r^2$ , где  $p$  — поляризуемость атома. По порядку величины поляризуемость равна кубу радиуса атома. Вектор  $d$  направлен вдоль линии, соединяющей центры иона и атома. Положительный ион подтягивает атомарные электроны ближе к себе, отрицательный — отодвигает от себя. Дальше от иона всегда оказывается заряд того же знака, поэтому  $p > 0$ , а поляризационное взаимодействие притягивает ион к атому. Напряжённость электрического поля наведённого диполя в точке, где находится ион, равна  $2d/r^3 = 2pe/r^5$ . На ион действует сила  $F = 2pe^2/r^5$ . Энергия взаимодействия  $U(r) = -pe^2/2r^4$  отрицательна, независимо от знака заряда иона.

**Задача 7.10.** Существует два типа орбит в поле рассеивающего центра с поляризационным потенциалом  $U(r) = -pe^2/2r^4$ . Если прицельный параметр  $b$  больше некоторого критического значения,  $b > b_L$ , орбита, начинающаяся на бесконечности, уходит на бесконечность. При  $b \ll b_L$  налетающая частица «захватывается», а орбита спиралью сворачивается к центру.

Критический прицельный параметр  $b_L$  можно определить из законов сохранения энергии и углового момента. Для налетающей частицы с массой  $m$  и скоростью  $v$  в полярной системе координат (в плоскости движения частицы) с началом в точке расположения рассеивающего центра (который пока будем считать неподвижным) имеем

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r),$$

$$mvb = mr^2\dot{\phi}.$$

В точке наибольшего сближения  $r = r_{\min}$ , где радиальная скорость обращается в нуль,  $\dot{r} = 0$ , комбинирование законов сохранения приводит к квадратному уравнению для  $r_{\min}^2$ :

$$v^2r_{\min}^2 - v^2b^2 + \frac{pe^2}{mr_{\min}^2} = 0.$$

Оно не имеет вещественного решения, если

$$b^2 \leq 2\sqrt{\frac{pe^2}{mv^2}} \equiv b_L^2.$$

Максимально возможное  $b$  в этом неравенстве даёт искомое критическое значение  $b_L$ . Ему соответствует сечение захвата

$$\sigma_L = \pi b_L^2 = 2\pi \sqrt{\frac{pe^2}{mv^2}},$$

известное также как сечение Ланжевена (Paul Langevin). Чтобы найти сечение захвата при столкновении реальных частиц, под массой налетающей частицы надо понимать массу приведённой частицы,  $m = m_a m_b / (m_a + m_b)$ , а скорость  $v$  заменить на относительную скорость движения частиц  $u = |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|$  до столкновения. Так как  $\sigma_L \propto 1/u$ , частота захвата  $\nu_L = n_a \sigma_L u$  не зависит от  $u$ .

В реальных условиях «захваченная» частица не падает на центр, так как вид потенциала взаимодействия изменяется, как только частица приблизится к атому на расстояние порядка его размера. После рассеяния на ядре или электронах атома спираль орбиты разворачивается в обратную сторону, так что захват может закончиться рассеянием на угол порядка единицы. Рассеяние упругое, если начальная энергия налетающей частицы недостаточна для ионизации или возбуждения атома, что как раз имеет место при  $v < v_{\text{at}}$ .

**Задача 7.11.** Сечение рассеяния с точностью до численного коэффициента равно сечению захвата.

**Задача 7.12.** В борновском приближении

$$\frac{d\sigma}{do} = |f|^2,$$

где

$$f = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r$$

называют амплитудой рассеяния на рассеивающем центре с потенциалом

$$U(\mathbf{r}) = \frac{e_a e_b}{r} e^{-r/\lambda_D}.$$

Здесь  $m$  — приведённая масса,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  — разность волновых векторов частицы после и до рассеяния, причём  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = mu/\hbar$  и

$$|\mathbf{q}| = (m/\hbar)|\Delta\mathbf{u}| = (2mu/\hbar)\sin(\theta/2).$$

Амплитуда рассеяния пропорциональна фурье-компоненте потенциала

$$U_{\mathbf{q}} = \int U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r = \frac{4\pi e_a e_b}{q^2 + 1/\lambda_D^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\sigma}{do} = \left| \frac{m U_{\mathbf{q}}}{2\pi\hbar^2} \right|^2 = \frac{(b_*/2)^2}{\left( \sin^2(\theta/2) + (\lambda_B/2\lambda_D)^2 \right)^2},$$

где  $b_* = e_a e_b / mu^2$ ,  $\lambda_B = \hbar/mu$ . Для транспортного сечения в этом случае получаем

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \int (1 - \cos\theta) \frac{d\sigma}{do} do = \\ &= 2\pi b_*^2 \int_0^\pi \frac{(1 - \cos\theta) \sin\theta d\theta}{\left( 1 - \cos\theta + \lambda_B^2/2\lambda_D^2 \right)^2} = 2\pi b_*^2 \int_0^2 \frac{x dx}{\left( x + \lambda_B^2/2\lambda_D^2 \right)^2} = 4\pi b_*^2 \Lambda', \end{aligned}$$

где

$$\Lambda' = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4\lambda_D^2}{\lambda_B^2} + 1 \right) - \frac{2\lambda_D^2}{4\lambda_D^2 + \lambda_B^2}.$$

При  $\lambda_D \gg \lambda_B$  приближённо  $\Lambda' = \ln(\lambda_D/\lambda_B)$ , т. е. в кулоновском логарифме вместо  $b_*$  фигурирует длина волны де Броиля  $\lambda_B = \hbar/mu$ . Условием применимости борновского приближения является неравенство  $e_a e_b / \hbar v \ll 1$ , которое эквивалентно  $\lambda_B \gg b_*$ .

## Лекция 8

**Задача 8.2.** Для изотропной максвелловской функции

$$f_a(\mathbf{v}') = \frac{n_a}{\pi^{3/2} v_{Ta}^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{v}'^2}{v_{Ta}^2}\right), \quad (8.2.1)$$

которая описывает распределение частиц сорта  $a$  с тепловой скоростью  $v_{Ta} = \sqrt{2T_a/m_a}$ , из (8.10) находим

$$\mathbf{F}_{ba}(\mathbf{v}) = -\frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2 e_b^2 n_a}{m_{ab}} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\mathbf{v}}{v_{Ta}}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\mathbf{v}}{v_{Ta}} \exp\left(-\frac{\mathbf{v}^2}{v_{Ta}^2}\right) \right] \frac{\mathbf{v}}{v^3}, \quad (8.2.2)$$

где  $\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x dx \exp(-x^2)$  — функция ошибок. В пределе  $v/v_{Ta} \rightarrow \infty$  выражение в квадратных скобках стремится к единице, соответственно,

$$\mathbf{F}_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2 e_b^2 n_a}{m_{ab}} \frac{\mathbf{v}}{v^3}. \quad (8.2.3)$$

В другом предельном случае,  $v/v_{Ta} \rightarrow 0$ , оно равно  $4v^3/3\sqrt{\pi}v_{Ta}^3$ , а сила пропорциональна скорости частиц пучка:

$$\mathbf{F}_{ba} = -\frac{16\sqrt{\pi}\Lambda_{ab}e_a^2 e_b^2 n_a}{3m_{ab}} \frac{\mathbf{v}}{v_{Ta}^3}. \quad (8.2.4)$$

Чтобы завершить вычисления, нужно взять сумму сил  $\sum_a \mathbf{F}_{ba}$  по всем сортам частиц плазмы.

**Задача 8.3.** Выполнив интегрирования в формуле (8.18) для изотропной максвелловской функции распределения (8.2.1), получим

$$A_{ba} = \frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2 e_b^2 n_a}{m_b v} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\mathbf{v}}{v_{Ta}} \left(1 + \frac{m_b}{m_a}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{v}^2}{v_{Ta}^2}\right) - \frac{m_b}{m_a} \operatorname{erf}\left(\frac{\mathbf{v}}{v_{Ta}}\right) \right].$$

Медленная пробная частица получает энергию от плазмы, так как в пределе  $v \ll v_{Ta}$  величина

$$A_{ba} = \frac{8\sqrt{\pi}\Lambda_{ab}e_a^2 e_b^2 n_a}{m_b v_{Ta}}$$

положительна. Быстрая пробная частица,  $v \gg v_{Ta}$ , напротив, теряет энергию:

$$A_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2 e_b^2 n_a}{m_a v}.$$

**Задача 8.4.** Тепловой разброс несуществен, если скорость частиц пучка  $v \equiv v_b$  значительно больше скорости частиц плазмы,  $v \gg v_a \sim v_{Ta}$ . Тогда

$$\nu_{ba}^{(p)} = \frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2 e_a^2 n_a}{m_{ba} m_b v^3}.$$

Если выделить в этой формуле транспортное сечение  $\sigma_{ba} = 4\pi e_b^2 e_a^2 \Lambda_{ba} / (m_{ba}^2 v^4)$  и поток частиц  $n_a v$ , записав

$$\nu_{ba}^{(p)} = \frac{m_a}{m_a + m_b} \sigma_{ba} n_a v,$$

её можно интерпретировать как произведение частоты рассеяния приведённой частицы на кулоновском центре  $\nu_{ba} = \sigma_{ba} n_a v$  на долю импульса  $m_a / (m_a + m_b)$ , которую в среднем частица с массой  $m_b$  передаёт при столкновениях частице массы  $m_a$ . Отсюда видно, что при рассеянии лёгкой частицы на тяжёлых ( $m_b \ll m_a$ ) она передаёт им почти весь свой импульс за время порядка  $\nu_{ba}^{-1}$ , тогда как торможение тяжёлой частицы на лёгких ( $m_b \gg m_a$ ) происходит в  $m_b/m_a$  раз медленнее.

Для столкновений электронов с электронами  $m_{ee} = \frac{1}{2}m_e$ , ионов с ионами  $m_{ii} = \frac{1}{2}m_i$ , а для электронов с ионами  $m_{ei} = m_{ie} \approx m_e$ . Вводя обозначения  $e_e = -e$ ,  $e_i = Ze$ , имеем

$$\begin{aligned} \nu_{ee}^{(p)} &= \frac{8\pi\Lambda e^4}{m_e^2 v^4} n_e v, & \nu_{ei}^{(p)} &= \frac{4\pi\Lambda e^4 Z^2}{m_e^2 v^4} n_i v, \\ \nu_{ii}^{(p)} &= \frac{8\pi\Lambda e^4 Z^4}{m_i^2 v^4} n_i v, & \nu_{ie}^{(p)} &= \frac{m_e}{m_i} \frac{4\pi\Lambda e^4 Z^2}{m_e^2 v^4} n_e v, \end{aligned}$$

где для простоты принято одно и то же значение кулоновского логарифма  $\Lambda$  во всех столкновениях.

При одинаковой скорости  $v$  величина  $\nu_{ee}^{(p)}$  в 2 раза больше, чем  $\nu_{ei}^{(p)}$ . Малый множитель  $m_e/m_i$  в  $\nu_{ie}^{(p)}$ , отсутствующий  $\nu_{ei}^{(p)}$ , имеет простое объяснение: электрон, как более лёгкая частица, в одном столкновении с ионом может передать иону весь свой импульс, а ион электрону — только малую долю порядка  $m_e/m_i$ .

Если тепловая скорость частиц плазмы вовсе не мала по сравнению со скоростью частиц пучка  $v$ , то приведённые формулы можно использовать для грубых оценок по порядку величины, заменив в них  $v$  на тепловую скорость  $v_T$  соответствующего сорта частиц. В ион-ионных столкновениях это тепловая скорость ионов  $v_{Ti} = \sqrt{2T_i/m_i}$ , в остальных случаях — тепловая скорость электронов  $v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$ , так как при  $T_e \sim T_i$  она больше, чем  $v_{Ti}$ . Принимая во внимание, что  $n_e = Z n_i$ , и игнорируя численные множители порядка 2, можно составить следующие пропорции между частотами столкновений различных сортов частиц:

$$\nu_{ee}^{(p)} : \nu_{ei}^{(p)} : \nu_{ii}^{(p)} : \nu_{ie}^{(p)} = 1 : Z : \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} Z^3 : \frac{m_e}{m_i} Z^2.$$

Они характеризуют динамику установления равновесия в плазме. Например, в случае  $Z \gg 1$  самым быстрым процессом является торможение электронов об ионы, тогда как при  $Z \sim 1$  потеря импульса электроном в столкновениях с другими электронами происходит столь же быстро.

**Задача 8.5.** В пределе  $v \gg v'$  из формулы (8.21) получаем

$$\begin{aligned} \nu_{ba}^{(\varepsilon)} &= \frac{8\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}m_bv^2} \left[ \mathbf{v} \cdot \int \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f_a(\mathbf{v}') d^3v' - \frac{m_{ba}}{m_b} \int \frac{f_a(\mathbf{v}') d^3v'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \right] \approx \\ &\approx \frac{8\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}m_bv^2} \left[ 1 - \frac{m_{ba}}{m_b} \right] \int \frac{f_a(\mathbf{v}') d^3v'}{|\mathbf{v}|} = \frac{8\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2n_a}{m_b m_a v^3}. \end{aligned}$$

Если выделить в этом выражении транспортное сечение  $\sigma_{ba} = 4\pi e_b^2 e_a^2 \Lambda / (m_{ba}^2 v^4)$  и поток частиц  $n_a v$ , записав

$$\nu_{ba}^{(\varepsilon)} = \frac{2m_b m_a}{(m_b + m_a)^2} \sigma_{ba} n_a v,$$

его можно интерпретировать так, что  $\nu_{ba} = \sigma_{ba} n_a v$  суть частота актов рассеяния на угол порядка единицы (в системе центра масс), в каждом из которых передаётся доля энергии порядка  $2m_b m_a / (m_b + m_a)^2$  (в лабораторной системе). Таким образом, при электрон-электронных или ион-ионных столкновениях передаётся в среднем половина энергии налетающей частицы, а при электрон-ионных столкновениях — лишь её малая доля порядка  $2m_e/m_i$ . Как и аналогичную формулу для частоты  $\nu_{ba}^{(p)}$  торможения быстрых частиц (задача 8.4), полученную формулу для  $\nu_{ba}^{(\varepsilon)}$  можно использовать для оценок по порядку величины даже при  $v \sim v_T$ . В результате получаются следующие пропорции между частотами столкновений частиц разных сортов:

$$\nu_{ee}^{(\varepsilon)} : \nu_{el}^{(\varepsilon)} : \nu_{ii}^{(\varepsilon)} : \nu_{ie}^{(\varepsilon)} = 1 : \frac{m_e}{m_i} Z : \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} Z^3 : \frac{m_e}{m_i} Z^2.$$

Принципиальное отличие электрон-электронных столкновений от упругого рассеяния электронов на ионах состоит в том, что электроны пучка теряют энергию, передавая её электронам плазмы так же быстро, как теряют импульс в направлении первоначального движения.

**Задача 8.6.** При указанном превышении энергии  $\alpha$ -частиц  $W$  над температурой плазмы  $T$  тепловая скорость электронов плазмы превышает скорость  $\alpha$ -частиц. Следовательно, частоту  $\nu_{ie}^{(p)}$ , соответствующую торможению  $\alpha$ -частиц на электронах, нужно оценивать по тепловой скорости электронов, а частоту  $\nu_{ii}^{(p)}$ , соответствующую торможению на ионах плазмы, — по скорости  $\alpha$ -частиц.

Используя решение задачи 8.4, легко установить, что при указанных параметрах отношение  $\nu_{ie}^{(p)}/\nu_{ii}^{(p)} \sim (W/T)^{3/2}(m_e/m_i)^{1/2}$  будет больше единицы. Таким образом, продукты термоядерных реакций замедляются преимущественно на электронах плазмы. Так как  $\nu_{ie}^{(\varepsilon)} \sim \nu_{ie}^{(p)}$ , а  $\nu_{ii}^{(\varepsilon)} \sim \nu_{ii}^{(p)}$ , электроны также получают большую часть энергии  $\alpha$ -частиц.

**Задача 8.7.** Ток является откликом плазмы на внешнее электрическое поле  $\mathbf{E}$ . Под его действием прежде всего начинают ускоряться электроны, как самые лёгкие частицы. В результате возникнет сила трения  $\mathbf{F}_{ei}$  со стороны ионов, которая в конечном итоге должна компенсировать электрическую силу. Поскольку сила трения зависит от скорости, уравнение  $e_e\mathbf{E} + \mathbf{F}_{ei} = 0$  не может быть выполнено отдельно для каждого электрона, но оно должно выполняться для силы  $\langle \mathbf{F}_{ei} \rangle$ , усреднённой по распределению электронов плазмы:

$$e_e\mathbf{E} + \langle \mathbf{F}_{ei} \rangle = 0. \quad (8.7.1)$$

Чтобы вычислить среднюю силу, учтём, что вследствие третьего закона Ньютона сумма сил трения, действующих на электроны плазмы со стороны ионов плазмы, и сил трения, действующих на ионы плазмы со стороны электронов плазмы, равна нулю, т. е.

$$n_e \langle \mathbf{F}_{ei} \rangle + n_i \langle \mathbf{F}_{ie} \rangle = 0. \quad (8.7.2)$$

Предположим теперь в соответствии с условием задачи, что функция распределения электронов (8.2.1) изотропна и является максвелловской в системе отсчёта, которая движется относительно ионов со скоростью  $\mathbf{u} = \mathbf{J}/e_e n_e$ . При достаточно малой величине электрического поля  $\mathbf{E}$ , токовая скорость значительно меньше тепловой скорости электронов, т. е.  $\mathbf{u} \ll \mathbf{v}_{Te}$ . При одинаковых температурах тепловая скорость ионов также мала по сравнению с тепловой скоростью электронов, поэтому для вычисления  $\langle \mathbf{F}_{ie} \rangle$  можно использовать формулу (8.2.4) из решения задачи 2:

$$\mathbf{F}_{ie} = -\frac{16\sqrt{\pi}\Lambda_{ie}e_e^2e_i^2n_e}{3m_{ei}} \frac{\mathbf{v}}{v_{Te}^3}. \quad (8.7.3)$$

При усреднении по распределению ионов плазмы скорость отдельного иона заменится на среднюю скорость  $-\mathbf{u}$  ионов в системе отсчёта, где средняя скорость электронов равна нулю, а их распределение описывается изотропной функцией Максвелла. Комбинируя полученную формулу с (8.7.2) при учёте приближённого равенства  $m_{ei} = m_e m_i / (m_e + m_i) \approx m_e$ , находим, что

$$\langle \mathbf{F}_{ei} \rangle = -m_e \mathbf{u} / \tau_e, \quad (8.7.4)$$

где

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{16\sqrt{\pi}e_e^2e_i^2\Lambda_{ie}n_i}{3m_e^2v_{Te}^3}. \quad (8.7.5)$$

Подставляя (8.7.5) в (8.7.1) и выражая  $\mathbf{E}$  через  $\mathbf{u}$  при помощи равенств  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = e_e n_e \mathbf{u}$ , находим проводимость плазмы

$$\sigma = \frac{\omega_p^2 \tau_e}{4\pi}. \quad (8.7.6)$$

В реальных условиях функция распределения заметно отличается от максвелловской, поэтому точный результат вычисления электрической проводимости плазмы (17.41) в зависимости от зарядового числа  $Z = e_i/|e_e|$  может быть в два-три раза меньше, чем (8.7.6).

**Задача 8.8.** Спроецировав уравнение (временно опускаем знак суммы по индексу  $a$ )

$$\frac{d\mathbf{p}_b}{dt} = -\nu_{ba}^{(p)} \mathbf{p}_b$$

на направление первоначального движения пучка, получим

$$\frac{d}{dt}(p \cos \theta) = -\nu_{ba}^{(p)} p \cos \theta.$$

Отсюда при  $\theta \ll 1$  следует

$$\frac{dp}{dt} - p\theta \frac{d\theta}{dt} = -\nu_{ba}^{(p)} p. \quad (8.8.1)$$

Производную  $dp/dt$  выражаем из уравнения

$$\frac{d\varepsilon_b}{dt} = -\nu_{ba}^{(\varepsilon)} \varepsilon_b.$$

Подставив туда  $\varepsilon_p = p^2/2m_b$ , находим

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{2}\nu_{ba}^{(\varepsilon)} p$$

после чего из уравнения (8.8.1), восстановив суммирование по сортам частиц и знак усреднения, получаем уравнение для темпа изменения среднего квадрата угла направления движения частиц пучка относительно направления пучка:

$$\frac{d}{dt}\langle\theta^2\rangle_b = \sum_a (2\nu_{ba}^{(p)} - \nu_{ba}^{(\varepsilon)}). \quad (8.8.2)$$

Оно применимо, пока  $\langle\theta^2\rangle_b \ll 1$ . Чтобы найти угловой разброс пучка после прохождения слоя плазмы толщиной  $\ell$ , правую сторону уравнения нужно умножить на  $\ell/v$ , где  $v$  — начальная скорость частиц пучка.

## Лекция 9

**Задача 9.1.** Дипольный момент двух частиц с зарядами  $e_a, e_b$  и массами  $m_a, m_b$  в системе их центра инерции равен  $\mathbf{d} = (e_b/m_b - e_a/m_a)m_{ab}\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a$ ,  $m_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$ . При  $e_b/m_b = e_a/m_a$  он обращается в нуль, а вместе с ним и мощность дипольного излучения.

**Задача 9.2.** Обозначим через  $r_*$  расстояние между электроном и ионом в момент их наибольшего сближения, когда скорость электрона максимальна и равна  $v_*$  (рис. 9.3). Полную излучённую энергию найдём, умножив мощность излучения в момент максимального сближения

$$I = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 r_*^4}$$

на его длительность  $\tau \sim r_*/v_*$ :

$$\mathcal{E} \sim \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v_*^3 r_*}. \quad (9.2.1)$$

Параметры  $v_*$  и  $r_*$  выразим через скорость электрона  $v$  «на бесконечности» и прицельное расстояние  $b$ , воспользовавшись законами сохранения энергии и момента импульса

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{m_e v_*^2}{2} - \frac{Ze^2}{r_*}, \quad m_e v b = m_e v_* r_*.$$

При  $v_* \gg v$  (иначе верно приближение далёких пролётов) из первого уравнения выразим  $v_* \simeq \sqrt{2Ze^2/m_e r_*}$  через  $r_*$ . Подставив  $v_*$  во второе уравнение, найдём расстояние максимального сближения

$$r_* = \left( \frac{2Ze^2}{m_e v^2 b} \right)^{-1} b,$$

а затем максимальную скорость

$$v_* = \left( \frac{2Ze^2}{m_e v^2 b} \right) v.$$

Следовательно, характерная частота излучения  $\omega \sim v_*/r_*$  будет равна

$$\omega \sim \frac{v}{b} \left( \frac{2Ze^2}{m_e v^2 b} \right)^2.$$

Параметр  $Ze^2/m_e v^2 b$  здесь следует считать большим:

$$Ze^2/m_e v^2 b \gg 1.$$

Выделив орбитальное квантовое число  $l = m_e v b / \hbar$ , последнее условие можно представить в виде

$$l \ll \frac{Ze^2}{\hbar v}.$$

Отсюда видно, что расчёт излучения в рамках квазиклассического приближения, характеризуемого условием  $l \gg 1$ , совместим с приближением близких пролётов, если интервал  $1 \ll l \ll Ze^2/\hbar v$  существует, т. е.

$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \gg 1. \quad (9.2.2)$$

Подставив  $r_*$  и  $v_*$  в (9.2.1), выразим  $\mathcal{E}$  через  $b$  и  $v$ :

$$\mathcal{E} \sim \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v b^3} \left( \frac{2Ze^2}{m_e v^2 b} \right)^2.$$

Учитывая, что при очень больших значениях орбитального момента действует приближение далёких пролётов, при  $l \gg Ze^2/\hbar v$  для оценки по порядку величины можно использовать формулы (9.10) и (9.11):

$$\hbar\omega \sim \frac{\varepsilon}{l}, \quad \mathcal{E} \sim \frac{\alpha^3 Z^2}{l^3} \varepsilon, \quad (9.2.3)$$

тогда как при  $1 \ll l \ll Ze^2/\hbar v$  имеем

$$\hbar\omega \sim \frac{\varepsilon}{l} \left( \frac{Ze^2}{\hbar v l} \right)^2, \quad \mathcal{E} \sim \frac{\alpha^3 Z^2}{l^3} \left( \frac{Ze^2}{\hbar v l} \right)^2 \varepsilon. \quad (9.2.4)$$

По сравнению со случаем близких пролётов величина  $\mathcal{E}$  возрастает в  $(Ze^2/\hbar v l)^2$  раз, но во столько же раз увеличивается частота излучения, поэтому вероятность излучения  $w \sim \mathcal{E}/\hbar\omega$  по-прежнему определяется формулой (9.12), полученной в приближении близких пролётов:

$$w_l \sim \frac{\alpha^3 Z^2}{l^2}. \quad (9.2.5)$$

При вычислении мощности излучения вкладом области далёких пролётов можно вообще пренебречь, так как интеграл

$$P = \int n_i n_e v \mathcal{E} 2\pi b db = \int n_i n_e v \mathcal{E} \lambda_e^2 2\pi l dl \quad (9.2.6)$$

«набирается» на нижнем пределе.

Чтобы оценить мощность тормозного излучения, интегрирование нужно обрезать на значении  $l \sim (Ze^2/\hbar v)^{2/3}$ , которое соответствует излучению фотона с энергией  $\hbar\omega \sim \varepsilon$ . В результате получается выражение

$$P_{\text{т.и.}} \sim \alpha^3 Z^2 n_e n_i v \varepsilon \lambda_e^2 \sim \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3 \lambda_e},$$

которое приблизительно совпадает с оценкой (9.8), полученной в приближении далёких пролётов.

Если же обрезать интегрирование на значении  $l = 1$ , которое соответствует  $\hbar\omega \sim J_Z$ , получим

$$P_{\text{п.и}} \sim \alpha^3 Z^2 n_e n_i v \varepsilon \lambda_e^2 \left( \frac{Ze^2}{\hbar v} \right)^2 \sim \frac{Z^4 e^{10} n_e n_i}{\hbar^3 c^3 m_e v}.$$

При  $v \sim v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$  эта оценка совпадает с формулой для мощности рекомбинационного излучения (9.27).

**Задача 9.3.** Чтобы найти зависимость сечения тормозного излучения от частоты, в формуле (9.14) достаточно выразить  $dl$  через  $d\omega$ . Поскольку  $dl/l \sim db/b \sim d\omega/\omega$  как в приближении далёких пролётов, так и в приближении близких пролётов,

$$d\sigma = \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{d\omega}{\omega}. \quad (9.3.1)$$

Хотя сечение излучения  $d\sigma$  имеет особенность в пределе  $\omega \rightarrow 0$ , спектральная мощность излучения  $dP = \hbar\omega d\sigma$  в том же пределе стремится к постоянной величине.

Аккуратный расчёт, сделанный Х. Крамерсом (Hendrik Kramers, 1923 [98]) в рамках классической физики, при  $\hbar\omega \gg \frac{1}{2}m_e v^2/(Ze^2/\hbar v)$ ,  $Ze^2/\hbar v \gg 1$  даёт результат

$$d\sigma = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{d\omega}{\omega}, \quad (9.3.2)$$

который отличается от простой оценки по порядку величины (9.3.1) лишь множителем  $4/\sqrt{3}\pi \approx 0,74$ . Вывод формулы Крамерса в рамках классической физики можно найти в «Теории поля» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [66, §70, формула (70.22)]. Замечательно, что квантовая теория подтверждает формулу Крамерса [61, §92, (92.23)]. В пределе низких частот,  $\hbar\omega \ll \frac{1}{2}m_e v^2/(Ze^2/\hbar v)$ , точный расчёт даёт выражение

$$d\sigma = \frac{16}{3} \alpha^3 Z^2 \ln\left(\frac{m_e v^3}{0,89\omega Ze^2}\right) \lambda_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \quad (9.3.3)$$

с большим логарифмическим множителем [66, (70.21)]. Его появление объясняется вкладом далёких пролётов с прицельным параметром  $b > v/\omega$  и означает, что спектральная мощность излучения  $\hbar\omega d\sigma$  логарифмически растёт при  $\omega \rightarrow 0$ . Эта расходимость устраняется при учёте дебаевской экранировки.

**Задача 9.4.** Мощность излучения из единицы объёма плазмы в интервале частот  $d\omega$  выразим как произведение энергии кванта  $\hbar\omega$  с заданной частотой  $\omega$  на частоту соответствующего процесса и на плотность ионов  $n_i$ . Частота процесса равна произведению плотности потока электронов  $n_e v$  на сечение процесса  $d\sigma = (d\sigma/d\omega) d\omega$ . Собирая все множители вместе, получаем

$$dP = \hbar\omega \cdot n_e v \cdot n_i \cdot d\sigma.$$

Для сечения тормозного излучения используем формулу Крамерса в пределе высоких частот (формула (9.3.2) из задачи 9.3):

$$d\sigma = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{d\omega}{\omega} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2}{m_e^2 v^2 c^3} \frac{d\omega}{\hbar\omega}.$$

Разбросом скоростей ионов можно пренебречь, но нужно учесть, что электроны имеют разные скорости  $v$ , и заменить  $n_e$  на

$$dn_e = \frac{n_e}{(2\pi T_e/m_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_e}\right) 4\pi v^2 dv$$

с последующим интегрированием по  $v$ . При интегрировании нужно учесть, что энергия кванта  $\hbar\omega$  в спектре тормозного излучения не может быть больше энергии электрона  $\frac{1}{2}m_e v^2$ , выбрав соответствующим образом пределы интегрирования:

$$\frac{dP}{d\omega} = \hbar\omega n_i \int_{\sqrt{2\hbar\omega/m_e}}^{\infty} \frac{d\sigma}{d\omega} \frac{dn_e}{dv} v \, dv = \frac{16\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2 n_e n_i}{m_e^{3/2} c^3 \sqrt{T_e}} e^{-\hbar\omega/T_e}.$$

В плазме без магнитного поля невозможно распространение электромагнитных волн с частотами ниже электронной плазменной, поэтому полученная формула неприменима в диапазоне  $\omega < \omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e/m_e}$ , где  $dP/d\omega = 0$ . Если отвлечься от этого уточнения, то  $dP/d\omega$  монотонно убывает с увеличением частоты.

В оптике спектр излучения чаще характеризуют зависимостью от длины волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$ , а не круговой частоты  $\omega$ . Пересчёт из шкалы частот в шкалу длин волн производится по формуле  $dP/d\lambda = |d\omega/d\lambda| dP/d\omega$ , где  $|d\omega/d\lambda| = 2\pi c/\lambda^2$ . Мощность излучения  $dP/d\lambda$  на единичный интервал длин волн пропорциональна  $\exp(-2\pi\hbar c/\lambda T_e)/\lambda^2$ , обращаясь в нуль как при  $\lambda \rightarrow 0$ , так и при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Максимум в спектре приходится на длину волны  $\lambda = \pi\hbar c/T_e$ , что соответствует фотону с энергией  $\hbar\omega = 2T_e$ . Спектр тормозного излучения показан на рисунке 9.4 сплошной линией.

**Задача 9.5.** Использовав результат предыдущей задачи и выполнив интегрирование по интервалу частот, получаем

$$P_{\text{т.и.}} = \int_0^{\infty} \frac{dP}{d\omega} \, d\omega = \frac{16\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2 n_e n_i}{m_e^{3/2} c^3 \hbar} \sqrt{T_e}.$$

Отсюда имеем практическую формулу

$$P_{\text{т.и}} = 1,54 \times 10^{-32} Z^2 n_e n_i \sqrt{T_e} [\text{Вт}/\text{см}^3],$$

где  $n_e$ ,  $n_i$  выражены в  $\text{см}^{-3}$ , а  $T_e$  — в эВ. Различные справочники воспроизводят эту формулу с коэффициентами от 1,5 до 1,69 вместо 1,54.

**Задача 9.6.** Задача о фоторекомбинации электрона в кулоновском поле ядра решается точно, но соответствующие общие результаты [107–110] труднообозримы. В случае, когда параметр Зоммерфельда  $Ze^2/\hbar v$  и главное квантовое число  $k$  имеют большие значения, хорошей заменой точной теории фоторекомбинации оказывается квазиклассическое приближение Х. Крамерса [98]. Действительно, пусть  $\eta = Ze^2/\hbar v \gg 1$  и  $k \gg 1$ ; тогда движение электрона квазиклассично как до, так и после акта фотозахвата, который сопровождается, как и в случае тормозного излучения, переходом электрона с одной почти параболической траектории на другую (различие между тормозным и рекомбинационным излучением в знаке энергии конечного состояния электрона в рассматриваемой связи несущественно). Поэтому можно вычислить интенсивность фоторекомбинационного излучения при захвате электрона на уровень  $k$  непосредственно по формуле Крамерса (9.3.2) из задачи 9.3, должным образом выбрав в ней интервал  $d\omega$ : ясно, что он должен быть равен ширине того участка  $\omega$ , который приходится на долю уровня  $k$  в некотором эквивалентном континууме, заменяющем в нашем рассуждении фактический дискретный спектр. Из равенства

$$\hbar\omega = \frac{J_Z}{k^2} + \varepsilon$$

имеем

$$d\omega = -\frac{2J_Z}{\hbar k^3} dk,$$

где согласно сказанному надо положить  $dk = -1$ . Подставляя это в указанную формулу, приходим к формуле Крамерса для фотозахвата на возбуждённый уровень  $k > 1$ :

$$\sigma_{\text{Ф.п}}^{(k)} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \frac{J_Z}{\varepsilon} \frac{J_Z/k^3}{J_Z/k^2 + \varepsilon} \alpha^3 a_{\text{B}}^2. \quad (9.6.1)$$

**Задача 9.7.** Если известно сечение фотоионизации  $\sigma_{\text{Ф.и}}^{(k)}$  с определённого квантового уровня  $k$ , то сечение фоторекомбинации  $\sigma_{\text{Ф.р}}^{(k)}$  на этот уровень можно найти с помощью принципа детального равновесия, согласно которому (задача 10.6)

$$\sigma_{\text{Ф.р}}^{(k)} = 2 \frac{(\hbar\omega/c)^2}{(m_e v)^2} \sigma_{\text{Ф.и}}^{(k)}. \quad (9.7.1)$$

Квантовая теория фотоионизации создана М. Штоббе (M. Stobbe, 1930 [107]). Её изложение выходит за рамки данного курса. Приведём для справки некоторые результаты этой теории [61, §56, формулы (56.13) и (56.14)].

Сечение фотоионизации основного уровня ( $k = 1$ ) водородоподобного иона на пороге ионизации при  $\hbar\omega = J_Z = Z^2J$  равно

$$\sigma_{\Phi.i}^{(1)} = \frac{2^9 \pi^2}{3 e^4} \frac{\alpha a_B^2}{Z^2}, \quad (9.7.2)$$

где  $e = 2,71 \dots$  (не путать с элементарным зарядом  $e$ ). Оно конечно потому, что граница между фоторекомбинационным излучением (с захватом на возбуждённый уровень) и тормозным излучением в сплошной спектр условна.

Сечение фотоионизации основного уровня при  $\hbar\omega \gg J_Z$  описывается формулой

$$\sigma_{\Phi.i}^{(1)} = \frac{2^8 \pi}{3} \frac{\alpha a_B^2}{Z^2} \left( \frac{J_Z}{\hbar\omega} \right)^{7/2}, \quad (9.7.3)$$

причём  $\hbar\omega = \varepsilon + J_Z$ ,  $J_Z = Z^2J$ . Сечение фотоионизации возбуждённого уровня с главным квантовым числом  $k$  меньше в  $k^3$  раз.

Комбинируя формулы (9.7.2) и (9.7.3) с уравнением (9.7.1), находим сечение фоторекомбинации на основной уровень водородоподобного иона

$$\sigma_{\Phi.p}^{(1)} = \frac{2^8 \pi^2}{3 e^4} \alpha^3 a_B^2 \frac{J_Z}{\varepsilon} = \frac{2^8 \pi^2}{3 e^4} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \quad (9.7.4)$$

при  $\varepsilon \ll J_Z$  и

$$\sigma_{\Phi.p}^{(1)} = \frac{2^7 \pi}{3} \alpha^3 a_B^2 \left( \frac{J_Z}{\varepsilon} \right)^{5/2} = \frac{2^7 \pi}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \left( \frac{J_Z}{\varepsilon} \right)^{3/2} \quad (9.7.5)$$

при  $\varepsilon \gg J_Z$ . Известно точное решение задачи о радиационной рекомбинации в основное состояние водородоподобного иона [61, §56]:

$$\sigma_{\Phi.p}^{(1)} = \frac{2^8 \pi^2}{3} \frac{\eta^6 e^{-4\eta} \operatorname{arctg}(1/\eta)}{(1 - e^{-2\pi\eta})(\eta^2 + 1)^2} \alpha^3 a_B^2, \quad (9.7.6)$$

где  $\eta = \sqrt{J_Z/\varepsilon} = Ze^2/\hbar v$ . Оно найдено М. Штоббе (M. Stobbe) [107]. Точные формулы для сечений радиационной рекомбинации на возбуждённые уровни атома водорода получены В. М. Катковым и В. М. Страховенко [108].

Чтобы вычислить полное сечение фоторекомбинации, нужно учесть возможность захвата электрона на возбуждённые уровни ( $k > 1$ ). В случае  $\varepsilon \gg J_Z$  вероятность фотозахвата убывает пропорционально  $k^{-3}$ , так что исходное сечение получается умножением правой части уравнения (9.7.5) на  $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \approx 1,202$ :

$$\sigma_{\Phi.p} = \frac{2^7 \pi}{3} \zeta(3) \alpha^3 a_B^2 \left( \frac{J_Z}{\varepsilon} \right)^{5/2}. \quad (9.7.7)$$

Для случая  $\varepsilon \ll J_Z$  имеется формула Крамерса (задача 9.6)

$$\sigma_{\text{Ф.Р.}}^{(k)} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \alpha^3 a_B^2 \frac{J_Z}{\varepsilon} \frac{J_Z}{k^3(\varepsilon + J_Z/k^2)}. \quad (9.7.8)$$

Она получена для фотозахвата на высоковозбуждённые уровни  $k \gg 1$ , но с 25-процентной точностью совпадает с формулой Штоббе (9.7.4) при  $k = 1$ . Заменяя суммирование по  $k$  интегрированием, нетрудно вычислить полное сечение фоторекомбинации:

$$\sigma_{\text{Ф.Р.}} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \alpha^3 a_B^2 \frac{J_Z}{\varepsilon} \ln \frac{J_Z}{\varepsilon}. \quad (9.7.9)$$

Полное сечение радиационной рекомбинации водородоподобного иона при произвольной величине параметра  $\eta$  вычислено А. И. Мильштейном [109, 110], но полученная им формула включает интегрирование весьма сложного выражения. Удобная для практических вычислений аппроксимационная формула предложена в работе [99].

**Задача 9.8.** Чтобы вычислить мощность рекомбинационного излучения при фотозахвате электрона в основное состояние в случае  $T_e \ll J_Z$ , нужно подставить сечение фоторекомбинации (9.24), вычисленное в пределе  $\varepsilon \ll J_Z$ , в формулу (9.26) и выполнить усреднение по функции распределения электронов, которую будем считать максвелловской,

$$f_m = \frac{n_e}{(2\pi T_e/m_e)^{3/2}} e^{-m_e v^2/2T_e},$$

сделав замену  $n_e \rightarrow f_m d^3v$ . Вычислив интеграл, получим

$$P_{\text{Ф.Р.}}^{(1)} = \frac{512\pi^{3/2}}{3e^4} \sqrt{\frac{J_Z}{T_e}} \alpha^4 a_B^2 c Z J_Z n_e n_i = \frac{2^{15/2}\pi^{3/2}}{3e^4} \frac{e^{10} Z^4 n_e n_i}{m_e^{1/2} c^3 \hbar^3 \sqrt{T_e}}.$$

Для практических вычислений можно использовать формулу

$$P_{\text{Ф.Р.}}^{(1)} = 3,33 \times 10^{-31} \frac{Z^4 n_e n_i}{\sqrt{T_e}} [\text{Вт/см}^3],$$

где  $n_e$ ,  $n_i$  выражены в  $\text{см}^{-3}$ , а  $T_e$  — в эВ.

Чтобы учесть фотозахват на возбуждённые уровни, следует взять приближённую формулу Крамерса (9.25) и выполнить суммирование по главному квантовому числу  $k$ . Результат имеет вид

$$P_{\text{Ф.Р.}} = \frac{64\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} \zeta(3) \sqrt{\frac{J_Z}{T_e}} \alpha^4 a_B^2 c Z J_Z n_e n_i,$$

где  $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1/k^x)$  – дзета-функция Римана. Для практических вычислений отсюда получается формула

$$P_{\text{ф.п}} = 5,02 \times 10^{-31} \frac{Z^4 n_e n_i}{\sqrt{T_e}} [\text{Вт}/\text{см}^3] n_e n_i.$$

Этот результат примерно на 20% больше, чем даёт расчёт по более точной формуле (9.28).

Если  $T_e \gg J_Z$ , для сечения фоторекомбинации следует взять формулу (9.29). Повторив дальнейшие вычисления с учётом того, что  $\hbar\omega_k = \varepsilon + J_Z/k^2 \approx \varepsilon$ , получим

$$P_{\text{ф.п}} = \frac{256\pi}{3} \zeta(3) \frac{J_Z}{T_e} \alpha^4 a_B^2 c Z J_Z n_e n_i = 2,28 \times 10^{-29} \frac{Z^5 n_e n_i}{T_e} [\text{Вт}/\text{см}^3].$$

Излучение при рекомбинации на основной уровень  $k = 1$  меньше в  $\zeta(3) = 1,202$  раза.

**Задача 9.9.** Абсолютно чёрное тело – физическая идеализация, применяемая в термодинамике. Так называют тело, которое поглощает всё падающее на него электромагнитное излучение во всех диапазонах частот и ничего не отражает. Несмотря на название, абсолютно чёрное тело само может испускать электромагнитное излучение любой частоты и визуально иметь цвет. Спектр излучения абсолютно чёрного тела определяется только его температурой  $T$ .

Найдём среднее число фотонов в одном квантовом состоянии. Пусть энергия одного фотона в этом состоянии равна  $\hbar\omega$ . Так как фотоны являются бозе-частицами (поскольку имеют целочисленный спин), в данном состоянии может находиться любое число фотонов (а не один, как в случае ферми-частиц с полуцелым спином). Вероятность наличия  $n$  фотонов в данном состоянии пропорциональна  $\exp(-n\hbar\omega/T)$ . Следовательно, среднее число фотонов в состоянии с заданной энергией  $\hbar\omega$  равно

$$n_{\omega} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-n\hbar\omega/T)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\hbar\omega/T)} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/T) - 1};$$

данная зависимость числа заполнения  $n_{\omega}$  от энергии фотона называется распределением Планка (Max Planck, 1900).

Спектральная плотность излучения  $U_{\omega}$  есть энергия электромагнитного поля излучения, отнесённая к единице объёма и единичному интервалу частот. Энергия электромагнитного поля излучения, сосредоточенная в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  в единице объёма, равна  $U_{\omega} d\omega$ . С другой стороны, та же величина равна  $2\hbar\omega n_{\omega} d^3k/(2\pi)^3$ , где множитель 2 есть число независимых поляризаций электромагнитной волны,  $d^3k/(2\pi)^3$  суть число состояний в рассматриваемом интервале фазового пространства. Приравнивая указанные величины и пользуясь дисперсионным соотношением  $k = \omega/c$  (где  $c$  – скорость

света) между частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  электромагнитной волны в вакууме, получим формулу Планка

$$U_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} n_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 [\exp(\hbar\omega/T) - 1]}.$$

**Задача 9.10.** Поток излучения с поверхности абсолютно чёрного тела — это энергия излучения, выходящего за единицу времени с единицы поверхности через небольшое отверстие в сосуде с непрозрачными стенками, который заполнен равновесным излучением.

В соответствии с теорией [М. Планка](#), плотность энергии такого излучения равна  $U_\omega = \hbar\omega^3/\pi^2 c^3 [\exp(\hbar\omega/T) - 1]$  ([задача 9.9](#)). Так как оно изотропно, с поверхности абсолютно чёрного тела в единицу времени во все стороны в единицу телесного угла излучается энергия  $c U_\omega / 4\pi$ . Если направление излучения составляет угол  $\theta$  с нормалью к излучающей поверхности, то только часть потока, равная  $\cos \theta$ , уходит наружу за пределы излучающего тела. Соответственно, спектр излучения определяется величиной

$$\frac{dS}{d\omega} = c U_\omega \int_0^{\pi/2} 2\pi \cos \theta \sin \theta d\theta / 4\pi = \frac{c U_\omega}{4}.$$

Вычисляя интеграл  $S = \int_0^\infty (dS/d\omega) d\omega$ , получим

$$S = \sigma T^4,$$

где коэффициент  $\sigma = \pi^2/60c^2\hbar^3$  называют постоянной Стефана—Больцмана, а всё выражение в целом — законом Стефана—Больцмана.

Пересчёт к шкале длин волн производится по формуле

$$dS/d\lambda = (2\pi c/\lambda^2)(dS/d\omega).$$

Максимум в спектре приходится на длину волны  $\lambda = 0,40\pi\hbar c/T$ . Спектр излучения в шкале длин волн показан на [рисунке 9.4](#).

**Задача 9.11.** Возбуждённое состояние атома не является строго стационарным, а имеет конечное время жизни  $\tau$ , поэтому энергетический уровень  $\varepsilon_k$  в соответствии с квантово-механическим принципом неопределённости размыт на величину  $\Delta\varepsilon_k \sim \hbar/\tau$ , а частоты в линии излучения имеют разброс порядка  $\Delta\omega \sim \Delta\varepsilon_k/\hbar \sim \tau^{-1}$ . Эта ширина линии существует независимо от внешних воздействий и называется естественной. Обычно она очень мала:  $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-7}$ .

В классической модели линия излучения также имеет конечную ширину, причём теория позволяет легко определить распределение излучения в линии по частотам. Учтём, что колебания электрона являются гармоническими лишь

в нулевом приближении и на самом деле затухают по экспоненциальному закону

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp(-\gamma t) \sin(\omega_0 t), \quad (9.11.1)$$

где  $\mathbf{v}_0$  — амплитуда скорости в момент  $t = 0$ , соответствующая начальной энергии  $W_0 = mv_0^2/2$ . Затухающим колебаниям отвечает не единственная частота  $\omega_0$ , а определённый спектр. Чуг синусоидальных колебаний имеет конечную длительность порядка  $\tau = \gamma^{-1}$ . Это значит, что колебания разных частот в результате сложения должны уничтожить друг друга при  $t > \tau$ . Для этого за время  $\tau$  они должны набрать фазовый сдвиг примерно  $\pi$ , откуда  $\Delta\omega\tau \sim \pi$  или  $\Delta\omega \sim \gamma$ .

Спектральный состав излучения можно определить путём разложения в интеграл Фурье вектора ускорения  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ . Подставив Фурье-амплитуду ускорения

$$\mathbf{a}_\omega = \int_0^\infty \mathbf{a}(t) e^{i\omega t} dt = -\frac{i\mathbf{v}_0 \omega \omega_0}{\gamma^2 - 2i\gamma\omega - \omega^2 + \omega_0^2}$$

в формулу Лармора

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4e^2}{3c^3} |\mathbf{a}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (9.11.2)$$

найдём энергию

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4e^2 W_0 \omega^2 \omega_0^2}{3\pi c^3 m (\gamma^2 - 2i\gamma\omega - \omega^2 + \omega_0^2)(\gamma^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2 + \omega_0^2)},$$

излучённую в интервале частот  $d\omega$ ; нужно пояснить, что в формуле (9.11.2) интервал частот приведён к полуоси  $\omega > 0$  и этим вызвана замена коэффициента  $2/3$  на  $4/3$ . В пределе  $\gamma \ll \omega_0$  полученное выражение можно упростить:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{e^2 W_0 \omega_0^2}{3\pi c^3 m (\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2)}. \quad (9.11.3)$$

Из условия

$$\int_0^\infty d\mathcal{E}_\omega = W_0$$

находим

$$\gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{3mc^3}.$$

Поэтому можно записать, что в определённый частотный интервал  $d\omega$  излучается следующая доля начальной энергии осциллятора  $W_0$ :

$$\frac{d\mathcal{E}_\omega}{W_0} = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2)} d\omega \equiv F_L d\omega. \quad (9.11.4)$$

В таком виде результат вычислений совпадает с предсказаниями квантовой теории. Функция  $F_L(\omega)$  характеризует естественную форму линии излучения; её называют лоренцевой. Частотная ширина пика по полувысоте равняется  $\Delta\omega = 2\gamma$ .

**Задача 9.12.** Одной из причин уширения спектральных линий является изменение частоты излучаемого света из-за эффекта Доплера. Пусть  $\omega_0$  — частота волны, излучаемой неподвижным атомом (или молекулой). Если атом равномерно движется, то частота волны, излучаемой им в направлении оси  $x$ , в лабораторной системе отсчёта в нерелятивистском приближении определяется формулой

$$\omega = \omega_0(1 + v_x/c), \quad (9.12.1)$$

где  $v_x$  — скорость молекулы в направлении оси  $x$ .

При максвелловском распределении скоростей вероятность того, что  $x$ -составляющая скорости атома лежит в интервале  $(v_x, v_x + dv_x)$ , равна

$$dw = A \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2T}\right) dv_x,$$

где  $m$  — масса атома, а  $A$  — постоянная нормировки. Заменив в этом выражении переменную  $v_x$  на  $d\omega$  по формуле (9.12.1), получим

$$dw = A \frac{c}{\omega_0} \exp\left[-\frac{mc^2}{2T} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2\right] d\omega.$$

Так как излучение различных атомов некогерентно, то эта величина определяет вероятность излучения в спектральный интервал  $(\omega, \omega + d\omega)$ . Интенсивность света  $I(\omega) d\omega$ , приходящаяся на этот интервал, пропорциональна  $dw$ , поэтому

$$I(\omega) = I_0 \exp\left[-\frac{mc^2}{2T} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2\right] d\omega, \quad (9.12.2)$$

где  $I_0 = I(\omega_0)$  есть спектральная интенсивность в середине линии. По обе стороны от середины линии спектральная интенсивность убывает экспоненциально по закону (9.12.2). Полуширина спектральной линии по уровню  $I(\omega) = I_0/2$  определяется формулой

$$\Delta\omega = 2\sqrt{\ln 2} \frac{v_T}{c} \omega_0,$$

где  $v_T = \sqrt{2T/m}$  — тепловая скорость атомов.

**Задача 9.13.** Найдём сначала декремент радиационного затухания собственных колебаний электрона в атоме. Если электрон совершает колебания с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $x_0$ , то, согласно представлениям классической физики, каждую секунду он излучает энергию

$$I = \frac{2e^2 \omega_0^4 x_0^2}{3c^3}. \quad (9.13.1)$$

Из-за потерь на излучение энергия соответствующего осциллятора

$$W = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2} \quad (9.13.2)$$

уменьшается в соответствии с уравнением

$$\frac{dW}{dt} = -I, \quad (9.13.3)$$

решением которого является экспоненциальная зависимость

$$W = W_0 e^{-2\gamma t} \quad (9.13.4)$$

с декрементом затухания

$$\gamma = \frac{2\omega_0^2}{3c} r_e, \quad (9.13.5)$$

где  $r_e = e^2/mc^2$  — классический радиус электрона.

Чтобы описать обратный процесс — поглощение электромагнитной волны (точнее, её рассеяние, см. ниже), запишем уравнение вынужденных колебаний электрона в атоме

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \gamma \dot{x} + \frac{eE}{m}. \quad (9.13.6)$$

Для гармонической волны вида

$$E = \frac{1}{2} E_\omega e^{-i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (9.13.7)$$

где к.с обозначает комплексно сопряжённое слагаемое, решение удобно искать в виде

$$x = \frac{1}{2} x_\omega e^{-i\omega t} + \text{к.с.} \quad (9.13.8)$$

Тогда амплитуду  $x_\omega$  находим из уравнения

$$-\omega^2 x_\omega = -\omega_0^2 x_\omega + i\gamma x_\omega + \frac{eE_\omega}{m}. \quad (9.13.9)$$

Оно получается после подстановки (9.13.7) и (9.13.8) в уравнение (9.13.6) и отделения слагаемых пропорциональных  $e^{-i\omega t}$  и  $e^{+i\omega t}$ . Отсюда находим зависимость  $x(t)$  и её производных. В частности,

$$\dot{x} = \frac{eE_\omega}{2m} \frac{-i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} + \text{к.с.} \quad (9.13.10)$$

Зная  $\dot{x}$ , нетрудно вычислить среднее значение работы электрического поля над электроном в единицу времени

$$A = e \langle \dot{x} E \rangle. \quad (9.13.11)$$

Усреднение (обозначенное угловыми скобками (...) ) выполняется путём отбрасывания слагаемых, содержащих гармонические множители  $e^{-2i\omega t}$  и  $e^{+2i\omega t}$ , осциллирующие с двойной частотой:

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^2 |E_\omega|^2}{4m} \left\{ \frac{-i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} + \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \right\} = \\ &= \frac{e^2 |E_\omega|^2}{2m} \frac{\omega^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}. \end{aligned} \quad (9.13.12)$$

Эта работа идёт на увеличение энергии осциллятора, но в конечном итоге переизлучается им в направлении, отличном от направления распространения первичной электромагнитной волны. Иными словами, происходит рассеяние падающей на атом электромагнитной волны. Можно также учесть поглощение падающей волны вследствие столкновений, если к декременту радиационного затухания  $\gamma$  добавить частоту столкновений:

$$\gamma \rightarrow \gamma + \nu. \quad (9.13.13)$$

Из-за рассеяния и столкновительного поглощения плотность потока энергии в падающей волне  $S = c|E_\omega|^2/8\pi$  при её распространении вдоль оси  $z$  убывает в соответствии с уравнением

$$\frac{d}{dz} \frac{c|E_\omega|^2}{8\pi} = -n_a A, \quad (9.13.14)$$

где  $n_a$  обозначает плотность атомов. Его решением является экспоненциально убывающая зависимость

$$|E_\omega|^2 \propto e^{-2z/\ell}, \quad (9.13.15)$$

где длина пробега  $\ell$  определяется из уравнения

$$-\frac{2}{\ell} \frac{c|E_\omega|^2}{8\pi} = -\frac{e^2 |E_\omega|^2}{2m} \frac{\omega^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} n_a,$$

которое получается после подстановки (9.13.12) и (9.13.15) в уравнение (9.13.14). Длина пробега минимальна при  $\omega = \omega_0$ , и тогда она равна

$$\ell = \frac{2\gamma c}{\omega_p^2},$$

где  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_a / m$ . Если столкновения редки, так что декремент затухания  $\gamma$  вычисляется по формуле (9.13.5), тогда

$$\ell = \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} r_e = \frac{4\pi}{3\lambda^2 n_a},$$

где  $\lambda = 2\pi c / \omega_0$  — длина волны линии излучения. В случае частных столкновений  $\gamma \approx \nu \propto n_a$  и длина пробега излучения не зависит от плотности.

**Задача 9.14.** В рамках классической физики гармоники  $\omega = s\Omega_e$  с номером  $s > 1$  появляются в следующих за дипольным порядках мультипольного разложения. Действительно, удерживая три первых неисчезающих члена в мультипольном разложении электромагнитного поля, созданного электроном на большом расстоянии  $r$  от его лармировской орбиты, имеем следующее выражение для электрического поля в волновой зоне (см. [66, §71])

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 r} \left\{ [[\ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}] + \frac{1}{6c} [[\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}] + [\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{m}}] \right\},$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$  — единичный вектор в направлении излучения,  $\mathbf{d} = \sum e\rho$  — электрический дипольный момент системы зарядов,  $\mathbf{m} = (1/2c) \sum e[\rho \times \mathbf{v}]$  — магнитный момент,  $\mathbf{D} = \sum e \{ 3\rho(\rho \cdot \mathbf{n}) - \rho^2 \mathbf{n} \}$  — свёртка тензора квадрупольного момента с вектором  $\mathbf{n}$ . Лармировскому вращению электрона в магнитном поле отвечает вращение вектора  $\rho$  и перпендикулярного ему вектора  $\mathbf{v}$  с циклотронной частотой. Учитывая это, нетрудно видеть, что дипольная составляющая поля излучения содержит первую гармонику циклотронной частоты, а квадрупольная и магнитодипольная — вторую.

**Задача 9.15.** Поток энергии определяется вектором Пойнтинга  $\mathbf{S} = (c/4\pi)E^2\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении излучения. Энергия  $dI$ , излучаемая в элемент телесного угла  $d\Omega$ , вычисляется по формуле  $dI = \langle S \rangle r^2 d\Omega$ , где  $r$  — расстояние до излучателя, а угловые скобки означают усреднение по времени. Используя формулу для поля излучения из предыдущей задачи, находим поток энергии в элемент телесного угла  $d\Omega$  на первой и второй гармониках

$$dI_1/d\Omega = (e^4 B^2 / 8\pi m^2 c^3) \beta^2 (1 + \sin^2 \theta),$$

$$dI_2/d\Omega = (e^4 B^2 / 2\pi m^2 c^3) \beta^4 (1 + \sin^2 \theta) \cos^2 \theta.$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлением излучения и направлением внешнего магнитного поля, а  $\beta = v/c$ , причём предполагается, что  $\beta \ll 1$ . Вычисления для произвольных значений  $\beta$  и  $s$  проделаны в [66, §74]. При  $\beta \ll 1$  угловое распределение излучения на  $s$ -ой гармонике определяется формулой

$$dI_s/d\Omega = (s^{2s+2} / 2^{2s} (s!)^2) (e^4 B^2 / 2\pi m^2 c^3) \beta^{2s} (1 + \sin^2 \theta) \cos^{2s-2} \theta.$$

**Задача 9.16.** Предполагая, что в пределе  $T_e \rightarrow 0$  длина пробега циклотронного излучения  $\ell$  не зависит от температуры электронов  $T_e$ , величину  $\ell$  можно оценить из соображений размерности.

Ясно, что длина пробега обратно пропорциональна плотности электронов  $n_e$ . Поскольку плотность электронов пропорциональна квадрату ленгмировской частоты  $\omega_p^2$ , а единственная иная частота, которая имеется в задаче, — это электронная циклотронная частота  $\Omega_e$ , также ясно, что из перечисленных величин и скорости света  $c$  можно составить единственную комбинацию  $c\Omega_e/\omega_p^2$ ,

имеющую размерность длины и обратно пропорциональную плотности электронов. Следовательно,  $\ell \sim c\Omega_e/\omega_p^2$ .

В неоднородном магнитном поле полученная оценка может оказаться сильно заниженной. Она верна, если изменение циклотронной частоты  $\Delta\Omega_e \sim \sim |\nabla\Omega_e|\ell$  на длине  $\ell$  меньше естественной ширины  $1/\tau$  линии излучения, которая определяется временем высвечивания (9.38).

**Задача 9.17.** Рассмотрим два эффекта, которые приводят к перекрытию гармоник циклотронного излучения электронов  $\omega_n = n\omega_{ce}$  (для ионов рассмотрение проводится аналогично): эффект Доплера и неоднородность магнитного поля.

Тепловое движение атомов приводит к доплеровскому уширению спектральных линий. По порядку величины доплеровская ширина линии излучения равна  $\Delta\omega \sim (v_{Te}/c)\omega_n$  (задача 9.12). Она увеличивается пропорционально номеру гармоники  $n$ . Соседние гармоники невозможно различить, если расстояние между ними  $\omega_{n+1} - \omega_n = \omega_{ce}$  станет меньше, чем  $\Delta\omega$ . Из приближённого равенства  $\Delta\omega \sim \omega_{ce}$  находим  $n \sim c/v_{Te}$ .

В неоднородном магнитном поле волны, вышедшие из разных точек плазмы, будут иметь разную частоту. Внешний наблюдатель будет видеть уширение гармоник циклотронного излучения. Ширина отдельной гармоники оценивается по формуле  $\Delta\omega = (\Delta B/B)\omega_n$ , где  $\Delta B/B$  — относительное изменение напряжённости магнитного поля в области, из которой принимается излучение (обычно она меньше области, которая занята плазмой). Поэтому  $n \sim B/\Delta B$ .

**Задача 9.18.** В той области частот, где плазма непрозрачна, циклотронное излучение является равновесным, поэтому его спектр приближается к спектру излучения абсолютно чёрного тела. В пределе низких частот он подчиняется закону Рэлея-Джинса, согласно которому  $dP/d\omega \propto \omega^3$ .

## Лекция 10

**Задача 10.1.** Воспользуемся формулой Резерфорда (7.6) для рассеяния частицы массы  $m$  на неподвижном рассеивающем центре. После замены  $m$  на приведённую массу пары электронов  $m_{ee} = m_e m_e / (m_e + m_e) = m_e/2$  она связывает угол рассеяния  $\theta$  в системе отсчёта центра масс с прицельным расстоянием  $b$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{2e^2}{m_e v^2 b}.$$

Абсолютная величина скорости каждой из сталкивающихся частиц в системе центра масс до и после столкновения равна  $\frac{1}{2}v$ . С такой же скоростью система центра масс движется относительно исходной системы отсчёта. Следовательно, в исходной системе отсчёта налетавший электрон после рассеяния приобретает скорость с проекцией  $v_\perp = \frac{1}{2}v \sin \theta$  в направлении, перпендикулярном

начальному направлению движения, а вдоль этого направления его скорость уменьшается до  $v_{\parallel} = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v \cos \theta$ . Разность  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_e v^2 \sin^2(\theta/2)$  начальной энергии налетавшего электрона  $\varepsilon = \frac{1}{2}m_e v^2$  и его конечной энергии  $\frac{1}{2}m_e v_{\perp}^2 + \frac{1}{2}m_e v_{\parallel}^2$  будет передана второму электрону. Замечая, что  $\operatorname{tg}^2(\theta/2) = \mathcal{E}/(\varepsilon - \mathcal{E})$ , из формулы Резерфорда получаем

$$b^2 = \frac{e^4}{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon - \mathcal{E}}{\mathcal{E}}.$$

Так как  $d\sigma = |2\pi b db|$ , искомый результат получается дифференцированием  $\pi b^2$  по  $\mathcal{E}$  при фиксированной энергии  $\varepsilon$ :

$$\frac{d\sigma}{d\mathcal{E}} = \frac{\pi e^4}{\varepsilon \mathcal{E}^2}.$$

Эта формула является точной во всём диапазоне  $0 < \mathcal{E} < \varepsilon$  разрешённых значений переданной энергии.

**Задача 10.2.**  $\langle \sigma_{y,i} v \rangle = 8\sqrt{2\pi T_e/m_e} a_B^2 \exp(-J/T_e)$  в пределе  $T_e \ll J$ . При  $T_e \gg J$  этот результат нужно умножить на  $J/T_e$ .

**Задача 10.3.** При столкновении с атомом ион может передать связанныму электрону только малую долю (порядка  $2m_e/m_i$ ) своей кинетической энергии  $\varepsilon$ . В связи с этим можно было бы ожидать, что заметная ионизация ионным ударом имеет место только при  $\varepsilon \geq (m_i/2m_e)J \sim 10^4\text{--}10^5$  эВ. К тому же при меньшей энергии воздействие иона на связанный электрон носит адиабатический характер, так как скорость движения иона меньше скорости электрона в атоме. При адиабатическом взаимодействии энергия, переданная электрону при подлёте иона, полностью возвращается иону по мере его удаления от атома. Однако в экспериментах ионизация ионами иногда наблюдается уже при  $\varepsilon \gtrsim 100$  эВ. Например, для ионов аргона в газе аргона  $\sigma \approx 10^{-16} \text{ см}^2$  при  $\varepsilon \sim 200$  эВ. Этот эффект объясняется образованием неустойчивых молекулярных ионов  $\text{Ar}_2^+$ .

**Задача 10.4.** В соответствии с принципом детального равновесия, скорость тройной рекомбинации в основное состояние атома

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right|_{y,p}^{(1)} = -k_{y,p}^{(1)} n_i n_e^2$$

в режиме термодинамического равновесия равна (со знаком минус) скорости ионизации электронным ударом из основного состояния

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right|_{y,i}^{(1)} = k_{y,i}^{(1)} n_a n_e,$$

при том что плотности частиц связаны уравнением Саха (3.6). Отсюда следует, что  $k_{y,p}^{(1)} = k_{y,i}^{(1)}/K(T_e)$ . Используя формулы (10.7) и (3.7), находим

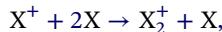
$$k_{y,p}^{(1)} = 64\pi^2 \alpha c a_B^5 \frac{g_a}{g_e g_i} \frac{J}{T_e}. \quad (10.4.1)$$

Сравнение  $k_{y,p}^{(1)}$  с константой ступенчатой тройной рекомбинации  $k_{y,p}^{ct}$ , вычисленной по формуле (10.12), приводит к ожидаемому выводу, что при  $T_e \ll J$  рекомбинация на основной уровень в  $(J/T_e)^{7/2}$  раз менее вероятна, чем захват электрона на возбуждённые атомарные уровни с последующим излучением избыточной энергии при переходе атома в основное состояние.

При  $T_e \gg J$  константа  $k_{y,i}^{(1)}$  будет содержать дополнительный множитель  $J/T_e$  по сравнению с формулой (10.7). Соответственно, константа ударной рекомбинации в основное состояние также должна быть умножена на такой же множитель. Тогда

$$k_{y,p}^{(1)} = 64\pi^2 \alpha c a_B^5 \frac{g_a}{g_e g_i} \left(\frac{J}{T_e}\right)^2. \quad (10.4.2)$$

**Задача 10.5.** Оценим константу реакции



в которой атомарный ион  $X^+$  превращается в молекулярный ион  $X_2^+$ . При поляризационном взаимодействии атома с ионом потенциальная энергия определена уравнением

$$U(r) = -pe^2/2r^4,$$

где  $p \sim a_B^3$  — коэффициент поляризуемости атома (задача 7.9). Характерный радиус взаимодействия  $b$  найдём, считая, что на этом расстоянии средняя кинетическая энергия частицы (которая определяется температурой газа  $T$ ) равна  $U$ :

$$b \sim \sqrt[4]{pe^2/2T}.$$

Следовательно, сечение такого столкновения, в котором атом и ион обмениваются почти всей имеющейся кинетической энергией, будет равно

$$\sigma \sim \pi b^2 \sim \pi \sqrt{pe^2/2T}.$$

Число таких столкновений в единице объёма за единицу времени оценивается как

$$\sigma v n_a n_+,$$

где  $v \sim \sqrt{2T/m_a}$  — тепловая скорость частиц,  $n_a$  — плотность атомов,  $n_+$  — плотность ионов. Чтобы образовался молекулярный ион, на расстоянии порядка

$b \sim \sqrt[4]{pe^2/2T}$  должен находиться ещё один атом. Вероятность такого столкновения в  $n_a b^3$  раз меньше, поэтому число столкновений, которые завершаются конверсией атомарного иона в молекулярный, приблизительно равно

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} = -kn_a^2 n_+,$$

где

$$k \sim \sigma v \cdot b^3 \sim \pi (pe^2/T)^{5/4} (T/m_a)^{1/2}.$$

**Задача 10.6.** Принцип детального равновесия связывает характеристики элементарного процесса в прямом и обратном направлениях. Это соответствие связано с симметрией системы относительно обращения знака времени. Выведем эту связь между характеристиками прямого и обратного процессов, исходя из их квантового описания.

Пусть переход системы из состояния 1 в состояние 2 или наоборот осуществляется в результате взаимодействия, описываемого оператором  $\mathcal{V}$ . Вероятность перехода в единицу времени из одного состояния в другое равна

$$\begin{aligned} w_{12} &= \frac{2\pi}{\hbar} |V_{12}|^2 \frac{dg_2}{d\varepsilon}, \\ w_{21} &= \frac{2\pi}{\hbar} |V_{21}|^2 \frac{dg_1}{d\varepsilon}, \end{aligned} \quad (10.6.1)$$

где  $V_{12}$ ,  $V_{21}$  — матричные элементы оператора  $\mathcal{V}$ , взятые между рассматриваемыми состояниями,  $dg_1/d\varepsilon$ ,  $dg_2/d\varepsilon$  — статистические веса начального и конечного состояний, приходящиеся на единичный интервал энергии. Пусть каждое из состояний соответствует наличию двух частиц, столкновение которых приводит к рассматриваемым переходам. Поместим систему в пространства объёма  $\Omega$  и будем считать, что до и после столкновения в этом объёме имеется по одной частице каждого сорта. Тогда по определению сечений перехода между состояниями 1 и 2, обозначаемого как  $\sigma_{12}$ , и для сечения обратного перехода  $\sigma_{21}$  имеем

$$\begin{aligned} w_{12} &= \frac{u_1 \sigma_{12}}{\Omega}, \\ w_{21} &= \frac{u_2 \sigma_{21}}{\Omega}, \end{aligned} \quad (10.6.2)$$

где  $u_1$ ,  $u_2$  — относительные скорости столкновения в соответствующем канале реакции.

Принцип детального равновесия соответствует инвариантности гамильтонiana относительно обращения знака времени, т. е. равенства матричных элементов  $|V_{12}| = |V_{21}|$ , которые отличаются заменой начального и конечного состояний. Учитывая это, из уравнений (10.6.1) и (10.6.2) получим следующее соотношение между сечениями прямого и обратного процессов:

$$u_1 \sigma_{12} dg_1 = u_2 \sigma_{21} dg_2. \quad (10.6.3)$$

Рассмотрим частный случай фоторекомбинации и обратного её процесса фотоионизации

$$X^+ + e \rightleftharpoons X + \gamma. \quad (10.6.4)$$

Для этих процессов соотношение (10.6.3) и закон сохранения энергии имеют вид

$$v_e g_{X^+} \frac{2 d^3 p_e}{(2\pi\hbar)^3} \sigma_{\text{ф.п.}} = c g_X \frac{2 d^3 k}{(2\pi)^3} \sigma_{\text{ф.и.}}, \quad (10.6.5)$$

$$\frac{m_e v_e^2}{2} + J = \hbar\omega. \quad (10.6.6)$$

Здесь  $g_{X^+}$ ,  $g_X$ ,  $2 d^3 p_e / (2\pi\hbar)^3$ ,  $2 d^3 k / (2\pi)^3$  — статистические веса иона, атома, свободного электрона и фотона,  $p_e = m_e v_e$  — импульс свободного электрона,  $c$  — скорость света,  $k$  — волновой вектор фотона, связанный с частотой дисперсионным соотношением  $\omega = kc$ ,  $J$  — потенциал ионизации атома,  $\hbar\omega$  — энергия фотона. Так как

$$d^3 p_e = 4\pi m_e^3 v_e^2 dv_e, \quad d^3 k = 4\pi k^2 dk,$$

причём вследствие (10.6.6)

$$m_e v_e dv_e = \hbar c k dk,$$

отсюда получаем

$$\frac{m_e^2 v_e^2}{\hbar^2} g_{X^+} \sigma_{\text{ф.п.}} = g_X k^2 \sigma_{\text{ф.и.}} \quad (10.6.7)$$

Для атома водорода  $g_X = 2g_{X^+}$ , поэтому

$$\sigma_{\text{ф.п.}} = 2 \frac{(\hbar\omega/c)^2}{(m_e v)^2} \sigma_{\text{ф.и.}} \quad (10.6.8)$$

## Лекция 11

**Задача 11.1.** Чтобы найти константу фоторекомбинации, нужно вычислить интеграл

$$k_{\text{ф.п.}} = \int_0^\infty \sigma_{\text{ф.п.}} \sqrt{2\varepsilon/m_e} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (11.1.1)$$

с максвелловской функцией распределения электронов

$$f(\varepsilon) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi} T_e^{3/2}} e^{-\varepsilon/T_e}. \quad (11.1.2)$$

В случае  $T_e \ll J_Z$  сюда достаточно подставить упрощённую формулу (9.7.4) для  $\sigma_{\text{ф.п.}}^{(1)}$  из решения задачи 9.7. Интегрирование получившегося выражения не представляет трудностей, и мы получаем

$$k_{\text{ф.п.}}^{(1)} = \frac{512\pi^{3/2}}{3e^4} \sqrt{\frac{J_Z}{T_e}} \alpha^4 c a_B^2 Z. \quad (11.1.3)$$

В противоположном случае  $T_e \gg J_Z$  вычисления оказываются значительно более сложными. Если воспользоваться приближённым выражением (9.7.5) для  $\sigma_{\phi,p}^{(1)}$  из той же задачи, то выяснится, что интеграл (11.1.1) расходится на нижнем пределе. Это означает, что основной вклад вносит область энергий  $\epsilon \sim J_Z$  и поэтому для аккуратных вычислений необходимо использовать точную формулу (9.7.6). Интегрирование удаётся выполнить только численно. Интерполяция результата интегрирования даёт следующую приближённую формулу [99]:

$$k_{rr}^{(1)} = \frac{17,41 \alpha^4 c Z a_B^2}{(T/J_Z)^{1/2} + 0,359(T/J_Z)^{7/6} + 0,147(T/J_Z)^{3/2}}. \quad (11.1.4)$$

При  $T/J_Z < 10^4$  её точность лучше 3%.

Чтобы вычислить константу полной скорости фоторекомбинации  $k_{\phi,p}$ , необходимо дополнительно выполнить суммирование по номеру уровня, на который происходит фотозахват. В случае  $T_e \ll J_Z$  можно использовать результат такого суммирования (9.7.9) в задаче 9.7. Интегрирование по  $\epsilon$  в формуле (11.1.1) даёт приближённо

$$k_{\phi,p} = \frac{32\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} \sqrt{\frac{J_Z}{T_e}} \ln\left(\frac{J_Z}{T_e}\right) \alpha^4 a_B^2 c Z. \quad (11.1.5)$$

В общем случае константа полной скорости фоторекомбинации вычислена в работе [99]. Там получена следующая аппроксимационная формула:

$$k_{rr} = \frac{8,41[\ln(1+J_Z/T) + 3,50]\alpha^4 c Z a_B^2}{(T/J_Z)^{1/2} + 0,652(T/J_Z) + 0,214(T/J_Z)^{3/2}}. \quad (11.1.6)$$

В интервале  $10^{-4} < T/J_Z < 10^4$  она имеет точность 3%.

**Задача 11.2.** Из соображений размерности ясно, что в ионе водорода  $H^-$  энергия будет порядка ритберга  $Ry = 2J = e^2/a_B = m_e e^4/\hbar^2 \approx 27,2$  эВ, а размер будет порядка боровского радиуса  $a_B = \hbar^2/m_e e^2 \approx 0,5 \cdot 10^{-8}$  см, так как нет других величин соответствующей размерности. Поэтому речь может идти не об обычной оценке, а о простой модели, которая даёт правдоподобные численные коэффициенты.

Оценим сначала энергию ионизации атома водорода. Будем рассматривать всё в атомной системе единиц (длина в боровских радиусах, а энергия в ритбергах). Импульс электрона  $p$  связан с радиусом орбиты электрона  $r$  соотношением неопределённости, т. е.  $p = 1/r$ , поэтому энергия электростатического взаимодействия будет равна  $W = -1/r$ , а кинетическая энергия  $-K = p^2/2 = 1/2r^2$ . Минимизируя полную энергию  $K + W = 1/2r^2 - 1/r$ , находим, что минимум достигается при  $r = 1$  и равен  $-1/2$ . В размерных единицах это означает, что радиус атома равен  $a_B$ , а энергия равна  $-J$  в полном соответствии с точным расчётом.

Представим теперь, что в отрицательном ионе водорода два связанных электрона находятся с противоположных сторон от протона на расстоянии  $r$ . Тогда кинетическая энергия обоих электронов будет  $K = 1/r^2$ , потенциальная энергия  $W = -2/r + 1/(2r) = -3/(2r)$ . Отыскивая минимум суммы  $K + W = 1/r^2 - 3/(2r)$ , находим  $r = 4/3$ , то есть на треть больше боровского радиуса. При этом энергия двух электронов равна  $K + W = 1/r^2 - 3/(2r) = -9/16$ . Потенциал ионизации отрицательного иона ищем как разность энергии атома  $-1/2$  и отрицательного иона  $-9/16$  и получаем  $-1/2 - (-9/16) = 1/16$ . В обычных единицах это соответствует  $27,2/16 \approx 1,7$  эВ, что совсем неплохо согласуется с экспериментом для такой простой модели.

**Задача 11.3.** Сечения процессов (11.17) и (11.18) связаны принципом детального равновесия, согласно которому

$$\sigma_{\phi,n} = (g_-/g_a)(k^2/q^2)\sigma_{\phi,o},$$

где  $g_-$ ,  $g_a$  — статистический вес отрицательного иона и атома соответственно,  $k = \omega/c$  — волновой вектор фотона,  $q = m_e v/\hbar$  — волновой вектор электрона. Полагая, что  $(g_-/g_a) = 1$ ,  $\hbar\omega = \mathcal{E}_{ea}$ , получаем

$$\sigma_{\phi,n}/\sigma_{\phi,o} \sim (\mathcal{E}_{ea}/m_e v^2)(\mathcal{E}_{ea}/m_e c^2).$$

Для грубой оценки можно считать, что  $m_e v^2 \sim \mathcal{E}_{ea} \sim 0,1 \alpha^2 m_e c^2$ , где  $\alpha = e^2/\hbar c$  — постоянная тонкой структуры, поэтому  $\sigma_{\phi,n}/\sigma_{\phi,o} \sim 0,1 \alpha^2 \sim 10^{-5}$ .

**Задача 11.4.** Подставляя

$$k_{\phi,p}^{(1)} = 118(J/T_e)^{3/2} \alpha^4 c a_B^2 Z$$

из формулы (11.14) и

$$k_{y,p}^{(1)} = 64\pi^2 \alpha c a_B^5 \frac{g_a}{g_e g_i} \left(\frac{J}{T_e}\right)^2$$

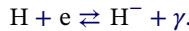
из (10.4.2) в неравенство (11.11), получаем

$$n_e \ll k_{\phi,p}^{(1)}/k_{y,p}^{(1)} \sim (\alpha/a_B)^3 (T_e/J)^{1/2}. \quad (11.4.1)$$

**Задача 11.5.** Гидрид-ион (отрицательный ион водорода  $H^-$ ) — физическая система, состоящая из одного протона и двух электронов. Два электрона создают электронную оболочку гидрид-иона, электронная конфигурация которой

$1s^2$ . Иначе говоря, ядро гидрид-иона окружает двухэлектронное облако с антипараллельными спинами электронов, как в атоме гелия Не. Спин пары электронов в таком состоянии равен нулю,  $S = 0$ , поэтому их статвес в соответствии с общим правилом равен  $g_{ee} = 2S + 1 = 1$ . Статвес ядра, состоящего из одного протона (со спином  $S = 1/2$ ), равен  $g_p = 2S + 1 = 2$ . Пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием ядра с электронами, нужно считать, что статвес гидрид-иона равен произведению статвесов ядра и электронов,  $g_- = g_p g_{ee} = 2$ .

**Задача 11.6.** Излучение солнечной фотосферы определяется процессом притяжения электрона к атому водорода



Поскольку этот процесс является относительно слабым, а плотность фотосферной плазмы велика, в ней поддерживается локальное термодинамическое равновесие в солнечной фотосфере за счёт столкновительных процессов



Запишем для этих процессов уравнения Саха (3.6):

$$\frac{n_e n_+}{n_H} = \frac{g_e g_+}{g_H} \left[ \frac{m_e T}{2\pi\hbar^2} \right]^{3/2} \exp\left(-\frac{J}{T}\right),$$

$$\frac{n_e n_H}{n_-} = \frac{g_e g_H}{g_-} \left[ \frac{m_e T}{2\pi\hbar^2} \right]^{3/2} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{ea}}{T}\right).$$

Здесь параметры с индексами  $e$ ,  $H$ ,  $+$  и  $-$  относятся соответственно к электронам, нейтральным атомам водорода, положительным и отрицательным ионам водорода,  $T = 6000$  К обозначает локальную температуру,  $J = 13,605$  эВ — потенциал ионизации атома водорода,  $\mathcal{E}_{ea} = 0,754$  эВ — средство к электрону атому водорода. Предполагая, что

$$n_H \gg n_e \gg n_-,$$

сначала заключаем, что

$$n_e \approx n_+$$

вследствие квазинейтральности, а затем находим соотношения между плотностями разных частиц в виде

$$n_e = \sqrt{\frac{g_e g_+}{g_H}} \left[ \frac{m_e T}{2\pi\hbar^2} \right]^{3/4} n_H^{1/2} \exp\left(-\frac{J}{2T}\right),$$

$$n_- = \sqrt{\frac{g_e^2 g_+}{g_H^3 g_-}} \left[ \frac{m_e T}{2\pi\hbar^2} \right]^{-3/4} n_H^{3/2} \exp\left(-\frac{J - 2\mathcal{E}_{ea}}{2T}\right).$$

Подставив сюда плотность нейтральных атомов в фотосфере  $n_H$  и значения ставвесов  $g_e = g_+ = g_- = 2$ ,  $g_H = 4$ , найдём плотности всех частиц

$$n_H = 10^{17} \text{ см}^{-3}, \quad n_e = n_+ = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}, \quad n_- = 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}.$$

Они удовлетворяют сделанному выше предположению.

## Лекция 12

**Задача 12.2.** Нейтроны, образовавшиеся в реакции, забирают одинаковую долю выделившейся энергии от  $\frac{1}{3}$  (когда они отлетают в одном направлении) до  $\frac{1}{2}$  (когда они разлетаются в противоположные стороны в системе центра масс). Ядро гелия, соответственно, уносит от  $\frac{1}{3}$  до 0. Полная энергия продуктов реакции складывается из кинетической энергии сливающихся ядер трития  $\varepsilon = \frac{1}{4} m_T v^2$  (где  $v$  – их относительная скорость) и энергии  $\mathcal{E}_{\text{fus}}$ , выделившейся в реакции. В условиях термоядерного реактора, где температура плазмы не превышает десятков кэВ, величина  $\varepsilon$  в сотни раз меньше, чем  $\mathcal{E}_{\text{fus}}$ , поэтому её обычно не учитывают при определении энергии продуктов реакции. Таким образом, указанные доли нужно умножить на  $\mathcal{E}_{\text{fus}} = 11,33$  МэВ.

**Задача 12.3.** При анализе цепочки реакций синтеза вдейтериевой плазме нужно учесть оба равновероятных канала  $D(d, p)T$  и  $D(d, n)^3\text{He}$ . Затем надо понять, что происходит с продуктами этих реакций.

В реакции  $D(d, p)T$  образуются только заряженные частицы, поэтому  $\mathcal{E}_{\text{ch}} = \mathcal{E}_{\text{fus}} = 4,03$  МэВ. Тритий полностью выгорает в реакции  $T(d, n)^4\text{He}$  сдейтерием. Из  $\mathcal{E}_{\text{fus}} = 17,57$  МэВ он добавляет в энергетический баланс цепочки реакций  $\mathcal{E}_{\text{ch}} = 3,52$  МэВ, остальную энергию уносит нейtron.

В реакции  $D(d, n)^3\text{He}$  гелий-3 из  $\mathcal{E}_{\text{fus}} = 3,27$  МэВ забирает  $\mathcal{E}_{\text{ch}} = 0,82$  МэВ. Гелий-3 мог бы выгорать в реакции  ${}^3\text{He}(d, p){}^4\text{He}$ . При температуре ниже 10 кэВ её скорость заметно меньше, чем скорость наработки гелия (см. рис. 12.5), поэтому дейтерий выгорает, не успевая провзаимодействовать с гелием-3. Однако при  $T \gtrsim 20$  кэВ гелий-3 полностью выгорает, добавляя в энергетический баланс  $\mathcal{E}_{\text{ch}} = \mathcal{E}_{\text{fus}} = 18,35$  МэВ.

В случае низких температур,  $T \lesssim 10$  кэВ, в рассмотренной цепочке реакций будет «израсходовано» 5 ядер дейтерия. В пересчёте на одну пару ядер дейтерия они произведут энергию  $\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle \approx \frac{2}{5} (4,03 + 17,59 + 3,27) \approx 9,96$  МэВ. При этом энергия заряженных продуктов реакции составит  $\langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle \approx \frac{2}{5} (4,03 + 3,52 + 0,82) \approx 3,35$  МэВ. Соответственно,  $\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} - \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle \approx 0,66$ .

В случае высоких температур,  $T \gtrsim 20$  кэВ, будет израсходовано 6 ядер дейтерия. Полная энергия, выделенная парой ядер, равна  $\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle \approx \frac{2}{6} (4,03 + 17,59 + 3,27 + 18,35) \approx 14,41$  МэВ, а энергия заряженных продуктов реак-

ции составит  $\langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle \approx \frac{2}{6} (4,03 + 3,52 + 0,82 + 18,35) \approx 8,91$  МэВ. Соответственно,  $\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} - \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle \approx 0,38$ , как указано в таблице 12.1.

**Задача 12.5.** Бензин состоит из смеси углеводородов с плотностью 0,75 г/см<sup>3</sup>. Теплотворная способность бензина равна 10 500 ккал/кг или 46 МДж/кг. В пересчёте на литр получаем 35 МДж/л.

Поделив 1 кг на массу одной молекулы воды (состоящей из 8 нейтронов и 10 протонов), нетрудно подсчитать, что в одном литре содержится примерно  $3,3 \times 10^{25}$  молекул H<sub>2</sub>O. Столько же в ней пар атомов водорода. Пар ядер дейтерия в 6 400 раз меньше. С учётом всех цепочек реакций синтеза, протекающих в дейтериевой плазме, каждая такая пара в конечном итоге производит 8,9 МэВ в виде кинетической энергии заряженных продуктов реакции (энергию нейтронов не учитываем). Умножая  $3,3 \times 10^{25} / 6400$  на 8,9 МэВ, находим, что теплотворная способность воды равна 7 400 МДж/л, что в 200 раз больше, чем у бензина.

С учётом энергии, которую уносят нейтроны, пара ядер дейтерия производит 14,4 МэВ. При этом получается, что теплотворная способность воды больше, чем у бензина, в 350 раз.

**Задача 12.6.** Поделив 1 ГВт · год на 3,52 МэВ, найдём число прореагировавших за год пар ядер дейтерия и трития. Умножив это число на массу одного ядра  $m_D = m_p + m_n$ , найдём массу дейтерия, выгорающего за год. Она приблизительно составляет 200 кг.

Аналогичным образом нетрудно подсчитать потребление лития. Так как в реакциях (12.6) одно ядро лития производит одно ядро трития, число использованных ядер лития уже фактически найдено — оно равно числу прореагировавших ядер трития. Среднюю массу ядра лития, строго говоря, следует подсчитывать с учётом природного содержания изотопов <sup>6</sup>Li (7,52%) и <sup>7</sup>Li (92,48%), но для оценки можно принять, что все ядра лития состоят из трёх протонов и четырёх нейтронов, т. е.  $m_{\text{Li}} = 3m_p + 4m_n$ . В итоге получается, что за год реактор потребляет около 650 кг лития.

Столько нужно реактору с тепловой мощностью 1 ГВт. Чтобы найти расход топлива реактором, который выдаёт 1 ГВт электрической мощности, нужно поделить найденные количества на к. п. д. преобразования тепловой энергии в электрическую. При к. п. д. 50% расход термоядерного топлива удваивается.

**Задача 12.7.** Для производства 10 трлн кВт · ч электроэнергии в год необходимо иметь примерно 10 000 реакторов мощностью 1 ГВт каждый. Ресурсная база реакторов, работающих на смеси дейтерия и трития, ограничена запасами лития, используемого для производства трития. Разведанные рудные запасы лития составляют 24 млн тонн. При расходе 650 кг лития на реактор в год этих запасов хватит на 3 тысячи лет, если считать, что к.п.д. преобразования тепловой энергии в электрическую равно 100%.

Кроме того, литий содержится в морской воде в концентрации  $1,5 \times 10^{-5}\%$  и количестве, превышающем в тысячи раз разведанные рудные запасы. Однако литий нужен и другим отраслям промышленности.

Реактор, работающий на чистом дейтерии, потребляет 150 кг дейтерия в год в оптимистическом сценарии, когда пара ядер дейтерия эффективно производит 8,9 МэВ (задача 3). Масса воды в мировом океане оценивается в размере  $1,35 \times 10^{18}$  метрических тонн. Масса полутяжёлой воды HDO меньше в 3 200 раз. Масса дейтерия составляет  $2/19$  этой массы. Поделив  $1,35 \times 10^{18} \times \frac{1}{3200} \times \frac{2}{19}$  тонн на 150 кг/год получим 30 млрд лет.

В пессимистическом сценарии, когда пара ядер дейтерия эффективно производит 3,35 МэВ, реактор потребляет около 400 кг в год. Тогда дейтерия в мировом океане хватит на 10 млрд лет.

Так как концентрация дейтерия в мировом океане будет уменьшаться по мере его извлечения, реально можно извлечь только некоторую долю дейтерия. Даже если кроме этого учесть конечный к.п.д. термоядерного реактора, всё равно дейтерия хватит на миллиарды или хотя бы сотни миллионов лет. Ясно, что запасы дейтерия на Земле практически неисчерпаемы.

**Задача 12.8.** В квазиклассическом приближении вероятность туннельного перехода под кулоновским барьером пропорциональна  $\exp(-2|\int p \, dr|/\hbar)$ , где  $p = \sqrt{2m_{ab}(\varepsilon - e_a e_b / r)}$ , а интегрирование производится между радиусом действия ядерных сил  $r_n$  и точкой отражения  $r_t = e_a e_b / \varepsilon$ . Вычислив интеграл в пределе  $e_a e_b / r_n \gg \varepsilon$ , находим  $2|\int p \, dr|/\hbar \approx \sqrt{G/\varepsilon}$ , где величина  $G = 2\pi^2 m_{ab} e_a^2 e_b^2 / \hbar^2$  называется энергией Гамова.

**Задача 12.9.**  $\sigma \sim \alpha^3 \lambda_{DD}^2 \exp(-\sqrt{G/\varepsilon})$ .

**Задача 12.10.** Пусть распределение ядер сорта *a* описывается функцией

$$f_a(v_a) = \left( \frac{m_a}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{m_a v_a^2}{2T} \right),$$

и такая же функция  $f_b(v_b)$  описывает распределение ядер сорта *b*. Константа реакции, усреднённая по скоростям обоих сортов, в общем случае равна

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle = \iint \sigma_{ab}(u) u f_a(v_a) f_b(v_b) d^3 v_a d^3 v_b,$$

где  $u = v_a - v_b$ . Скорости сталкивающихся ядер

$$v_a = V + (m_{ab}/m_a) u, \quad v_b = V - (m_{ab}/m_b) u$$

выразим через скорость относительного движения  $\mathbf{u}$ , скорость центра масс  $\mathbf{V} = (m_a \mathbf{v}_a + m_b \mathbf{v}_b)/(m_a + m_b)$  и приведённую массу  $m_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$ , а также заметим, что

$$d^3v_a \, d^3v_b = d^3V \, d^3u.$$

Интегрирование по  $d^3V$  удаётся выполнить в общем виде, поскольку сечение реакции  $\sigma_{ab}(u)$  зависит только от  $u$ . Подстановка  $\varepsilon = \frac{1}{2}m_{ab}u^2$  приводит результат интегрирования к искомому виду:

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle = \frac{4}{(2\pi m_{ab} T^3)^{1/2}} \int_0^\infty \sigma(\varepsilon) \varepsilon \exp(-\varepsilon/T) \, d\varepsilon.$$

**Задача 12.11.** Запишем сечение реакции ядерного синтеза (12.7) в виде

$$\sigma(\varepsilon) = (A/\varepsilon) \exp(-\sqrt{G/\varepsilon}),$$

где  $A$  и  $G$  – два параметра, характеризующие конкретную реакцию. Используя результат предыдущей задачи, получим формулу

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle = \frac{4A}{(2\pi m_{ab} T^3)^{1/2}} \int_0^\infty \exp(-\sqrt{G/\varepsilon} - \varepsilon/T) \, d\varepsilon.$$

Её можно использовать при  $T \ll G$ , так формула (12.7) верна при  $\varepsilon \ll G$ . Условие  $T \ll G$  позволяет вычислить интеграл методом перевала. Разложив показатель экспоненты  $S = -\sqrt{G/\varepsilon} - \varepsilon/T$  вблизи  $\varepsilon = G^{1/3}T^{2/3}/2^{2/3}$  в ряд Тейлора до квадратичных слагаемых включительно, получим

$$S = -\frac{3G^{1/3}}{2^{2/3}T^{1/3}} - \frac{3}{2^{4/3}G^{1/3}T^{5/3}} (\varepsilon - G^{1/3}T^{2/3}/2^{2/3})^2.$$

Последующее интегрирование даёт

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle = \frac{2^{13/6} A G^{1/6}}{(3m_{ab})^{1/2} T^{2/3}} \exp\left(-\frac{3G^{1/3}}{2^{2/3}T^{1/3}}\right).$$

Константы  $A$  и  $G$  можно определить по результатам измерения сечения при низкой энергии  $\varepsilon \ll G$ . В частности, для реакции  $p(p, e^+ \bar{\nu}_e)D$  с помощью данных из таблицы 2 находим  $G = 494$  кэВ,  $A = 4.06 \times 10^{-22}$  см<sup>2</sup>/кэВ. Учитывая далее, что приведённая масса  $m_{pp}$  равна половине массы протона, получаем

$$\langle \sigma_{pp} v \rangle = (1.30 \times 10^{-37} / T^{2/3}) \exp(-14.9 / T^{1/3}) [\text{см}^3/\text{с}],$$

где температура  $T$  выражена в единицах кэВ.

**Задача 12.12.** Записав формулу Гамова (12.7) в виде

$$\sigma = (A/\varepsilon) \exp(-\sqrt{G/\varepsilon}),$$

замечаем, что для определения двух входящих в неё констант  $A$  и  $G$  нужно составить два уравнения. Для этого достаточно использовать величину сечения при двух значениях энергии из таблицы 12.2. Решить полученные уравнения можно только численно. В результате получаем

$$\langle \sigma_{pp} v \rangle = (4,06 \times 10^{-22}/\varepsilon) \exp(-22,2258/\sqrt{\varepsilon}) \text{ [бн].}$$

**Задача 12.13.** Используя решения задач 12.11 и 12.12, получаем практическую формулу

$$\langle \sigma_{pp} v \rangle = 1,30 \times 10^{-37} T^{-2/3} \exp(-14,9396/T^{1/3}) \text{ [см}^3/\text{с],}$$

для скорости реакции  $p(p, e^+\bar{\nu}_e)D$ , причём температура  $T$  здесь выражена в единицах кэВ. Отсюда при  $T = 1,5$  кэВ в центре Солнца  $\langle \sigma_{pp} v \rangle = 2 \times 10^{-43} \text{ см}^3/\text{с}$ .

Последующие реакции в pp-цикле протекают быстрее, поэтому именно реакция  $p(p, e^+\bar{\nu}_e)D$  определяет темп выгорания протонов. Однако следующие в цепочке реакции необходимо принять во внимание при расчёте энерговыделения. В реакции  $p(p, e^+\bar{\nu}_e)D$  при слиянии двух протонов выделяется 1,44 МэВ. Ещё 5,49 МэВ добавляет реакция  $p(d, \gamma)^3\text{He}$ . В ней расходуются ещё один протон и ядро дейтерия, образованное в первой реакции. Два ядра  $^3\text{He}$  в реакции  $^3\text{He} + ^3\text{He}, pp)^4\text{He}$  производят 12,86 МэВ. Таким образом, 6 протонов в итоге дают одно ядро  $^4\text{He}$  и два протона. Эти 6 протонов выделят энергию  $2(1,44 + 5,49) + 12,86 = 26,72$  МэВ, но в итоге будут израсходованы только 4 протона, т. е. пара протонов в среднем производит  $(2/4) \times 26,72 = 13,36$  МэВ. Эту энергию нужно умножить на константу реакции и  $\frac{1}{2}n_p^2$ , где  $n_p = 6,6 \times 10^{25} \text{ см}^{-3}$  — плотность водорода в центре Солнца, рассчитанная в предположении, что 90% вещества составляет водород, а 10% — гелий, при том что массовая плотность равна 160 г/см<sup>3</sup>. В итоге находим удельную мощность энерговыделения в центре Солнца на уровне  $10^{-3} \text{ Вт/см}^3$ .

Интересно, что удельная мощность выделения энергии в теле человека немногим меньше этой величины. С другой стороны, плотность энерговыделения, усреднённая по всему объёму Солнца, во много раз меньше, составляя  $2,7 \times 10^{-7} \text{ Вт/см}^3$ . Её можно оценить, зная полную мощность излучения Солнца ( $3,84 \times 10^{26}$  Вт) и его радиус ( $6,96 \times 10^5$  км).

**Задача 12.14.** Если температура всех сортов частиц в плазме, включая электроны, одинакова и равна  $T$ , то давление плазмы равно  $p = (1 + Z_a)n_a T + (1 + Z_b)n_b T$ . Максимизируя произведение  $n_a n_b$  при заданном  $p$ , находим

$$n_a = \frac{p/2T}{1 + Z_a}, \quad n_b = \frac{p/2T}{1 + Z_b}.$$

Выразив давление через плотность ядер  $n = n_a + n_b$ , получим

$$n_a = \frac{1 + Z_b}{2 + Z_a + Z_b} n, \quad n_b = \frac{1 + Z_a}{2 + Z_a + Z_b} n.$$

Гипотетическая плотность реагирующих ядер можно увеличить, если охладить электроны. Однако заряженные продукты термоядерной реакции передают свою энергию преимущественно электронам плазмы, поэтому в реакторе температура электронов может быть даже больше, чем температура ионов.

**Задача 12.15.** В плазме с ионами одного сорта мощность тормозного излучения из единицы объёма пропорциональна  $Z^2 n_e n_i$ . При наличии ионов двух сортов с плотностями  $n_a$  и  $n_b$  плотность электронов равна  $n_e = Z_a n_a + Z_b n_b$ , а множитель  $Z^2 n_i$  превращается в  $Z_a^2 n_a + Z_b^2 n_b$ . Так как удельная мощность термоядерной реакции пропорциональна  $n_a n_b$ , отношение  $P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}}$  пропорционально произведению параметра

$$\eta = (Z_a n_a + Z_b n_b)(Z_a^2 n_a + Z_b^2 n_b)/n_a n_b$$

на несущественную здесь функцию температуры. Параметр  $\eta$  принимает минимальное значение

$$\eta_{\text{т.и}} = (\sqrt{Z_a} + \sqrt{Z_b})^2 Z_a Z_b$$

при  $n_a/n_b = (Z_b/Z_a)^{3/2}$ , тогда как в равнокомпонентной смеси, где  $n_a/n_b = 1$ , он равен

$$\eta_n = (Z_a + Z_b)(Z_a^2 + Z_b^2).$$

Если же соотношение плотностей ионов  $n_a/n_b = (1 + Z_b)/(1 + Z_a)$  выбрано с целью максимизации мощности термоядерной реакции при заданном давлении плазмы (задача 12.14), то

$$\eta_p = \frac{(Z_a^2 + Z_a^2 Z_b + Z_a Z_b^2 + Z_b^2)(Z_a + 2Z_a Z_b + Z_b)}{(1 + Z_a)(1 + Z_b)}.$$

Для реакции  $^{11}\text{B}(\text{p}, \alpha\alpha)^4\text{He}$  нужно взять  $Z_{\text{H}} = 1$ ,  $Z_{\text{B}} = 5$ . При оптимальном отношении  $n_{\text{B}}/n_{\text{H}} = 5^{-3/2} \approx 0,09$  плотности бора  $n_{\text{B}}$  к плотности водорода  $n_{\text{H}}$  величина  $\eta_{\text{т.и}} = 5(1 + \sqrt{5})^2$  в 2,97 раза меньше, чем  $\eta_n$  при  $n_{\text{B}}/n_{\text{H}} = 1$ , и в 1,43 раза, чем  $\eta_p$  при  $n_{\text{B}}/n_{\text{H}} = \frac{1}{3}$ .

Для реакции  $^3\text{He}(\text{d}, \text{p})^4\text{He}$  нужно взять  $Z_{\text{D}} = 1$ ,  $Z_{\text{He}} = 2$ . При оптимальном отношении  $n_{\text{He}}/n_{\text{D}} = 2^{-3/2} \approx 0,35$  плотности гелия-3 к плотностидейтерия величина  $\eta_{\text{т.и}} = 2(1 + \sqrt{2})^2$  в 1,29 раза меньше, чем  $\eta_n$  при  $n_{\text{He}}/n_{\text{D}} = 1$ , и в 1,10 раза, чем  $\eta_p$  при  $n_{\text{He}}/n_{\text{D}} = \frac{2}{3}$ .

**Задача 12.16.** Поскольку приведённые параметры соответствуют критерию Лоусона, время удержания плазмы равно  $\tau = 1$  с. Поток  $S$  на единицу поверхности находим из уравнения  $2\pi RS = \pi R^2 3nT/\tau$ . Отсюда

$$S = \frac{3}{2} nTR/\tau \approx 240 \left[ \text{кВт}/\text{м}^2 \right] \times R,$$

то есть  $S = 240 \text{ кВт}/\text{м}^2$  при  $R = 1 \text{ м}$ . Это число получено в предположении, что  $\alpha$ -частицы достигают стенки. Если они тормозятся в плазме, то тепловой поток нужно умножить на  $\frac{4}{5}$ .

**Задача 12.17.** Нет. Сечение ионизации ионами с энергией порядка 100 кэВ больше сечения реакции синтеза в миллионы раз. Вся энергия ионов будет растратачена на ионизацию мишени.

**Задача 12.19.** Обратимся к рисунку 12.4 на с. 190, где приведены графики сечений ядерных реакций синтеза. На графике сечения реакции  $^{11}\text{B}(\text{p}, \alpha\alpha)\alpha$  имеется узкий пик  $\sigma = 0,05 \text{ бн}$  ( $1 \text{ бн} = 10^{-24} \text{ см}^2$ ) при энергии протона 162 кэВ (при неподвижном ядре бора), что в системе центра масс соответствует энергии  $\varepsilon = 148,5 \text{ кэВ}$ . В реакции  $T(\text{d}, n)\alpha$  сечение такой же величины достигается при энергии примерно в 10 раз меньше. В системах УТС с магнитным удержанием давление плазмы  $p$  ограничено давлением магнитного поля  $B^2/8\pi$ , т. е.  $\beta = 8\pi p/B^2 < 1$ . Следовательно, при одинаковом давлении плотность рВ-плазмы будет примерно в 10 раз меньше плотности DT-плазмы. Поскольку удельное энерговыделение в реакции слияния двух ядер пропорционально квадрату плотности, в каждом кубическом сантиметре рВ-топлива будет выделяться в 100 раз меньше энергии, чем в смесидейтерия и трития, а реактор при одинаковой мощности будет в 100 раз больше и во много раз дороже.

На самом деле оценка удельного энерговыделения в реакции  $^{11}\text{B}(\text{p}, \alpha\alpha)\alpha$  на уровне 1% удельного энерговыделения в смесидейтерия и трития является завышенной. Действительно, транспортное сечение кулоновских столкновений

$$\sigma_t \approx \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \text{бн}\cdot\text{МэВ}^2 \right] \quad (12.19.1)$$

достигает значения 1 бн при энергии  $\varepsilon = 1 \text{ МэВ}$ . Следовательно, при энергии в шесть раз меньше, соответствующей узкому пику сечения реакции  $^{11}\text{B}(\text{p}, \alpha\alpha)\alpha$ , кулоновские столкновения будут происходить в  $6^2 \text{ бн}/0,05 \text{ бн} \approx 1000$  раз чаще, чем реакция синтеза ядер. Они сделают резонансное слияние ядер фактически невозможным, так как размажут начальную функцию распределения ядер прежде, чем те вступят в реакцию синтеза.

В проекте Tri Alpha Energy (ТАЕ) [182] расчёт строится на втором, более широком и самом высоком, резонансе. Если верить базе данных МАГАТЭ [136], максимум сечения реакции  $^{11}\text{B}(\text{p}, \alpha\alpha)\alpha$  имеет значение  $\sigma = 0,8 \text{ бн}$  при энергии  $\varepsilon = 573 \text{ кэВ}$  в системе центра масс (энергия протона 625 кэВ). По данным

недавней работы [183], максимальное сечение равно  $\sigma = 1,4$  бн при энергии  $\varepsilon = 619$  кэВ в системе центра масс (энергия протона 675 кэВ). Предположим, что верно именно это второе значение. В реакции  $T(d, n)\alpha$  такое же значение сечения ядерного синтеза достигается при энергии  $\varepsilon = 30$  кэВ, т. е. примерно в 20 раз меньше. Таким образом, оказывается, что удельное энерговыделение будет 400 раз меньше, чем в DT-реакторе.

Более строгий расчёт должен учитывать тот факт, что в pB-плазме давление создаётся преимущественно электронами, так как на одно ядро бора приходится 5 электронов, поэтому на самом деле удельное энерговыделение при заданном давлении будет в 1000 раз меньше, чем в DT-плазме. Оптимизация параметров термоядерного реактора по критерию тройного произведения (т. е. поиск максимума удельного энерговыделения при заданном давлении) даёт значение температуры  $T = 13,5$  кэВ для DT-плазмы против  $T = 137$  кэВ для pB-плазмы (см. таблицу 12.3 на с. 197). При этом максимальная удельная мощность термоядерных реакций описывается уравнениями

$$P_{DT} = 1,3\beta^2 B^4 \text{ [Вт/см}^3\text{Tл}^2\text]}, \quad (12.19.2)$$

$$P_{pB} = 1,3 \times 10^{-3} \beta^2 B^4 \text{ [Вт/см}^3\text{Tл}^2\text]} \quad (12.19.3)$$

соответственно в DT- и pB-плазме [149]. Чтобы иметь удельное энерговыделение на уровне 100 Вт/см<sup>3</sup>, типичном для атомного реактора деления (см., например, [15], с. 34), при относительном давлении плазмы  $\beta = 0,5$  в DT-реакторе необходимо магнитное поле  $B = 4$  Тл на пределе современных технологий (для больших объёмов), тогда как в pB-реакторе необходимо  $B = 23$  Тл, что достигалось лишь в микроскопических объёмах и лишь в импульсных системах. При магнитном поле  $B = 5$  Тл, как на внешнем обводе тора в установке ITER, удельное энерговыделение в pB-реакторе будет в 500 раз меньше, чем в реакторе деления. Эффект накопления  $\alpha$ -частиц в плазме, а также тормозное и циклотронное излучения ещё снижают выделение полезной энергии.

Различные варианты дополнительной оптимизации термоядерного реактора вполне возможны. Например, можно попробовать снизить температуру электронов  $T_e$ . Формальное обнуление  $T_e$  увеличивает коэффициент в формуле (12.19.3) в 12 раз. Однако нужно понимать, что в термоядерном реакторе, который работает в режиме зажигания, температура реагентов реакции ядерного синтеза поддерживается нагревом от заряженных продуктов реакции. Продукты реакции синтеза передают свою энергию (как ни странно) преимущественно электронам плазмы. Уменьшение температуры электронов увеличивает темп торможения продуктов реакции синтеза на электронах плазмы и, соответственно, уменьшает долю энергии, которую продукты реакции передают реагентам. Уменьшение нагрева реагентов, в свою очередь, приводит к выходу системы из режима зажигания. Следовательно, безнейтронный магнитный термоядерный реактор будет в сотни раз больше атомного реактора одинаковой с ним мощности и во много раз дороже.

### Лекция 13

**Задача 13.1.** Возьмём набор декартовых координат  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  и проекций кинематического импульса  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  на оси декартовой системы координаты. Как показано в §13.1, этот набор эквивалентен набору канонически сопряжённых координат и импульсов. Кроме того, дифференциал  $d^3x = dx dy dz$  составляет объём  $dV$  в евклидовом пространстве, поэтому для функции распределения  $f(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ , определённой как плотность частиц в фазовом пространстве, интеграл

$$n(\mathbf{x}, t) = \int f d^3p,$$

где  $d^3p = dp_x dp_y dp_z$ , определит плотность частиц в евклидовом пространстве. Выберем теперь какой-нибудь другой набор переменных  $\mathbf{x}' = (x', y', z')$  и  $\mathbf{p}' = (p'_x, p'_y, p'_z)$ , который связан с первым набором преобразованием  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{p}', \mathbf{x}', t)$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}', \mathbf{x}', t)$ . Преобразуя интеграл к новым импульсам, получаем

$$n(\mathbf{x}', t) = \int f \frac{\partial(\mathbf{p})}{\partial(\mathbf{p}')} d^3p', \quad (13.1.1)$$

где  $\partial(\mathbf{p})/\partial(\mathbf{p}') = \partial(\mathbf{p}, \mathbf{x}')/\partial(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$  — якобиан преобразования от старых импульсов  $\mathbf{p}$  к новым  $\mathbf{p}'$  при фиксированных новых координатах  $\mathbf{x}'$ . Так как

$$\frac{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial(\mathbf{p}', \mathbf{x}')} = \frac{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{x}')}{\partial(\mathbf{p}', \mathbf{x}')} / \frac{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{x}')}{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{x})} = \frac{\partial(\mathbf{p})}{\partial(\mathbf{p}')} / \frac{\partial(\mathbf{x}')}{\partial(\mathbf{x})},$$

с одной стороны, и

$$\frac{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial(\mathbf{p}', \mathbf{x}')} = \frac{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{x}')}{\partial(\mathbf{p}', \mathbf{x}')} / \frac{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{x}')}{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{x})} = \frac{\partial(\mathbf{p})}{\partial(\mathbf{p}')} / \frac{\partial(\mathbf{x}')}{\partial(\mathbf{x})},$$

с другой, заключаем, что

$$\frac{\partial(\mathbf{p})}{\partial(\mathbf{p}')} = J \frac{\partial(\mathbf{x}')}{\partial(\mathbf{x})}.$$

Поэтому плотность частиц в новых координатах равна

$$n(\mathbf{x}', t) = \int f J \frac{\partial(\mathbf{x}')}{\partial(\mathbf{x})} d^3p', \quad (13.1.2)$$

где  $\partial(\mathbf{x}')/\partial(\mathbf{x}) = \partial(\mathbf{p}, \mathbf{x}')/\partial(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  — якобиан преобразования от координат  $\mathbf{x}'$  к координатам  $\mathbf{x}$  при постоянном импульсе  $\mathbf{p}$ . В частном случае  $\partial(\mathbf{x}')/\partial(\mathbf{x}) = 1$  имеем  $d^3x' = \partial(\mathbf{x}')/\partial(\mathbf{x}) d^3x = d^3x = dV$ ; тогда

$$n(\mathbf{x}', t) = \int \bar{f} d^3p', \quad (13.1.3)$$

где  $\bar{f} = f J$  — функция распределения в конфигурационном пространстве переменных  $\mathbf{p}', \mathbf{x}'$ .

В качестве примера рассмотрим переход от декартовых координат  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  к цилиндрическим координатам  $\mathbf{x}' = (r, \phi, z)$  при помощи преобразования

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, & p_x &= p_r \cos \phi - \frac{p_\phi}{r} \sin \phi, \\ y &= r \sin \phi, & p_y &= p_r \sin \phi + \frac{p_\phi}{r} \cos \phi, \\ z &= z, & p_z &= p_z. \end{aligned}$$

Якобиан такого преобразования равен единице,  $J = 1$ , поэтому новые переменные, как и исходные, эквивалентны каноническим. Вычисляя плотность с помощью формулы (13.1.1), нужно подставить  $\partial(\mathbf{p})/\partial(\mathbf{p}') = 1/r$ :

$$n = \int f r^{-1} dp_r dp_\phi dz.$$

В качестве второго примера рассмотрим переход к переменным энергия  $\varepsilon$ , магнитный момент  $\mu$ , фаза ларморовского вращения  $\phi$  в магнитном поле  $B = B(\mathbf{x}, t)$  посредством преобразования

$$p_x = \sqrt{2m\mu B} \cos \phi, \quad p_y = \sqrt{2m\mu B} \sin \phi, \quad p_z = \sqrt{2m(\varepsilon - \mu B)},$$

которое включает только преобразование импульсов. Вычислив якобиан преобразования

$$\frac{\partial(p_x, p_y, p_z)}{\partial(\varepsilon, \mu, \phi)} = \frac{Bm^{3/2}}{\sqrt{2(\varepsilon - B\mu)}},$$

из (13.1.1) получим формулу

$$n = \int \frac{Bm^{3/2}f}{\sqrt{2(\varepsilon - B\mu)}} d\varepsilon d\mu d\phi.$$

**Задача 13.2.** Учтём, что число частиц в выделенном объёме конфигурационного пространства сохраняется, поэтому

$$\bar{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) d^3x d^3p = \bar{f}(\mathbf{p}', \mathbf{x}', t + dt) d^3x' d^3p',$$

где  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} dt$  и  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}} dt$  есть координаты и импульсы в момент времени  $t' = t + dt$ , отличающийся от  $t$  на инфинитезимально малый интервал  $dt$ . В этот момент

$$\bar{f}(\mathbf{p}', \mathbf{x}', t + dt) = \bar{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_\beta} \dot{x}_\beta dt + \frac{\partial \bar{f}}{\partial p_\beta} \dot{p}_\beta dt.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 d^3x' d^3p' &= \frac{\partial(\mathbf{p}', \mathbf{x}')}{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{x})} d^3x d^3p = \\
 &= \left| \begin{array}{cccccc}
 1 + \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial p_x} dt & \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial p_y} dt & \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial p_z} dt & \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial x} dt & \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial y} dt & \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial z} dt \\
 \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial p_x} dt & 1 + \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial p_y} dt & \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial p_z} dt & \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial x} dt & \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial y} dt & \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial z} dt \\
 \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial p_x} dt & \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial p_y} dt & 1 + \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial p_z} dt & \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial x} dt & \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial y} dt & \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial z} dt \\
 \frac{\partial p_x}{\partial \dot{x}} dt & \frac{\partial p_y}{\partial \dot{x}} dt & \frac{\partial p_z}{\partial \dot{x}} dt & 1 + \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} dt & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} dt & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} dt \\
 \frac{\partial p_x}{\partial \dot{y}} dt & \frac{\partial p_y}{\partial \dot{y}} dt & \frac{\partial p_z}{\partial \dot{y}} dt & \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} dt & 1 + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} dt & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} dt \\
 \frac{\partial p_x}{\partial \dot{z}} dt & \frac{\partial p_y}{\partial \dot{z}} dt & \frac{\partial p_z}{\partial \dot{z}} dt & \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} dt & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} dt & 1 + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} dt
 \end{array} \right| d^3x d^3p \\
 &\approx \left( 1 + \frac{\partial \dot{x}_\beta}{\partial x_\beta} dt + \frac{\partial \dot{p}_\beta}{\partial p_\beta} dt \right) d^3x d^3p.
 \end{aligned}$$

Поэтому из равенства

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(t) d^3x d^3p &= \bar{f}(t + dt) d^3x' d^3p' \approx \\
 &\approx \left( \bar{f}(t) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_\beta} \dot{x}_\beta dt + \frac{\partial \bar{f}}{\partial p_\beta} \dot{p}_\beta dt + \bar{f} \frac{\partial \dot{x}_\beta}{\partial x_\beta} dt + \bar{f} \frac{\partial \dot{p}_\beta}{\partial p_\beta} dt \right) d^3x d^3p
 \end{aligned}$$

следует, что

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\dot{x}_\beta \bar{f}) + \frac{\partial}{\partial p_\beta} (\dot{p}_\beta \bar{f}) = 0.$$

В таком виде кинетическое уравнение верно для плотности частиц  $\bar{f}$  в конфигурационном пространстве переменных  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{p}$ , которые не обязательно канонически сопряжены.

**Задача 13.3.** Равенство  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0$  очевидно в нерелятивистском пределе, когда  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Расписывая левую часть равенства (умноженную на  $m$ ) в декартовой системе координат, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \frac{\partial}{\partial v_x} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_x + \frac{\partial}{\partial v_y} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_y + \frac{\partial}{\partial v_z} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_z.$$

Поскольку  $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_x = v_y B_z - v_z B_y$  не зависит от  $v_x$ , первое слагаемое равно нулю. Аналогичным образом равны нулю и другие слагаемые, а с ними и вся сумма. Для проверки равенства в общем случае его правую часть удобно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial p_\alpha} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_\beta B_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma \frac{\partial v_\beta}{\partial p_\alpha},$$

где  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  — абсолютно антисимметричный тензор 3-го ранга, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Далее учтём, что  $v_\beta = p_\beta / \sqrt{m^2 + p^2/c^2}$ . Вычислив производную

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial p_\alpha} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(m^2 + p^2/c^2)^{1/2}} - \frac{p_\alpha p_\beta/c^2}{(m^2 + p^2/c^2)^{3/2}},$$

заключаем, что равенство верно, так как  $\delta_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$  и  $p_\alpha p_\beta \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$ .

**Задача 13.4.** Для простоты будем считать, что ионы неподвижны, так что экранирование стороннего заряда обеспечивается исключительно электронами. Найдём функцию распределения электронов, решая стационарное уравнение Власова. Приравнивая нулю частную производную по времени  $\partial f_e / \partial t$  в (13.12), имеем

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_e - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Установившееся после внесения заряда электрическое поле потенциально, т. е.  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , причём электростатический потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi e \left( n_i - \int f_e d^3v \right) - 4\pi q \delta(\mathbf{x}).$$

Плотность холодных ионов считаем константой; от этого допущения легко отказаться, записав для функции распределения ионов такое же уравнение, как и для электронов. Полагая, что сторонний заряд слабо возмущает функцию распределения электронов плазмы, запишем её в виде суммы

$$f_e = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{v}, \mathbf{x})$$

изотропной функции  $f_0(\mathbf{v})$ , не зависящей от вектора координат  $\mathbf{x}$ , и малой добавки  $f_1(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ , пропорциональной потенциалу  $\varphi$ , который также считаем малым возмущением. Функция  $f_0(\mathbf{v})$  при этом описывает невозмущённое распределение электронов до внесения заряда, поэтому  $\int f_0(\mathbf{v}) d^3v = n_i$ . Подставляя выбранное представление  $f_e$  в уравнение Власова, пренебрегая слагаемым  $e\nabla\varphi \cdot \partial f_1 / \partial \mathbf{p}$ , квадратичным по  $\varphi$ , и тем самым линеаризуя это уравнение, получаем

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_1 + \frac{e}{m_e} \nabla \varphi \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Учитывая сферическую симметрию задачи, отсюда находим возмущение функции распределения

$$f_1 = -\frac{e}{m_e} \varphi \frac{1}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v}.$$

Подставляя  $f_1$  в уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi e \int f_1 d^3v - 4\pi q \delta(\mathbf{x}),$$

приводим его к виду

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\varphi}{a^2} - 4\pi q \delta(\mathbf{x}),$$

где

$$\frac{1}{a^2} = -\frac{4\pi e^2}{m_e} \int \frac{1}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} d^3v = \frac{4\pi e^2}{m_e} \int \frac{f_0}{v^2} d^3v.$$

Его решением является экранированный потенциал

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} e^{-r/a}.$$

Длина экранирования может быть записана в виде

$$a = \left( \frac{\omega_p^2}{v^2} \right)^{1/2},$$

где  $\langle \dots \rangle = \int (\dots) f_0 d^3v / n_e$  обозначает усреднение по функции распределения. Отсюда видно, что основной вклад в экранирование дают частицы с малой скоростью. Для максвелловской функции распределения вычисленная длина экранирования совпадает с длиной Дебая  $\lambda_{De} = \sqrt{T/4\pi e^2 n_e}$ .

**Задача 13.5.** Дифференцируя энтропию частиц одного сорта (электронов или ионов)

$$S = \iint [1 - \ln(f)] f d^3x d^3p$$

по времени под знаком интеграла (при этом полную производную можно заменить на частную, поскольку по всем другим переменным производится интегрирование), получаем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iint [1 - \ln(f)] f d^3x d^3p = - \iint \ln(f) \frac{\partial f}{\partial t} d^3x d^3p.$$

Подставляя сюда производную  $\partial f / \partial t$  из кинетического уравнения (13.12), находим

$$\frac{dS}{dt} = \iint d^3x d^3p \ln(f) \left\{ \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках в результате интегрирования даёт нуль, так как с помощью теоремы Остроградского—Гаусса оно преобразуется к интегралу по поверхности, целиком охватывающей объём плазмы, а вне плазмы  $f = 0$ :

$$\begin{aligned} \int d^3x \ln(f) \mathbf{v} \cdot \nabla f &= \int d^3x \ln(f) \operatorname{div}(\mathbf{v}f) = \\ &= - \int d^3x \mathbf{v}f \cdot \nabla \ln(f) = - \int d^3x \mathbf{v} \cdot \nabla f = \\ &= - \int d^3x \operatorname{div}(\mathbf{v}f) = 0. \end{aligned}$$

Такая же процедура по отношению ко второму слагаемому даёт нуль при интегрировании по пространству импульсов:

$$\int d^3p \ln(f) \frac{e}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Таким образом,  $dS/dt = 0$ , т. е. уравнение Власова сохраняет энтропию плазмы и описывает только термодинамически обратимые процессы.

**Задача 13.6.** Пусть координаты  $\alpha$  и  $\beta$  постоянны на силовой линии магнитного поля, маркируя её, а третья координата  $s$  отмеряет длину силовой линии. Выбирая взамен импульсов кинетическую энергию  $\varepsilon = mv^2/2$ , магнитный момент  $\mu = mv_1^2/2B$  и фазу ларморовского вращения частицы  $\phi$ , запишем бесстолкновительное кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{s} \frac{\partial f}{\partial s} + \dot{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \dot{\beta} \frac{\partial f}{\partial \beta} + \dot{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} + \dot{\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0.$$

В дрейфовом приближении производные  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$  выражаются через скорость дрейфа  $\dot{\mathbf{R}}$ ,  $\dot{s} = v_{||}$ ,  $\dot{\phi} = -eB/mc$ ,  $\dot{\mu} = 0$ .

В стационарном случае интегралами движения, не зависящими явно от времени, являются величины  $\varepsilon$ ,  $\mu$ , а также  $\alpha$ ,  $\beta$ , если пренебречь сдрейфовыванием частиц с одной силовой линии на другую. Поэтому стационарная функция распределения в этом приближении есть

$$f = F(\varepsilon, \mu, \alpha, \beta),$$

где  $F$  — функция, вообще говоря, произвольного вида. Она не зависит от  $s$  и от азимутального угла  $\phi$  в пространстве скоростей.

Если частицы совершают осциллирующее движение между пробками, то, как показано в §6.5, имеется ещё один интеграл усреднённого движения  $J_{||}$ , зависящий от  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . При этом

$$f = F(\varepsilon, \mu, J_{||}(\varepsilon, \mu, \alpha, \beta)).$$

Если в плазме имеется электрическое поле, в этих формулах под  $\varepsilon$  нужно понимать полную энергию частицы (6.13).

**Задача 13.7.** Учитывая, что  $d^3p = 2\pi p_\perp dp_\perp dp_\parallel = 2\pi(mB d\mu)(d\varepsilon/v_\parallel)$ , получаем следующее выражение для плотности электронов и ионов:

$$n_{e,i} = 2\sqrt{2\pi B} m_{e,i}^{3/2} \int \frac{f_{e,i} d\varepsilon d\mu}{\sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi}},$$

где функция  $f = F(\varepsilon, \mu, \alpha, \beta)$  удовлетворяет дрейфовому кинетическому уравнению из предыдущей задачи. Отсюда следует, что  $n_{e,i} = n_{e,i}(B, \varphi)$  (аргументы  $\alpha$  и  $\beta$ , которые маркируют линию магнитного поля, далее опускаем). Из уравнения квазинейтральности  $e_e n_e + e_i n_i = 0$  заключаем, что  $\varphi = \varphi(B)$ , а следовательно,  $n_{e,i} = n_{e,i}(B)$ . Очевидно, что продольное и поперечное давление в плазме также зависят только от  $B$ :

$$\begin{aligned} p_\parallel &= \sum_{e,i} \int d^3p m_{e,i} v_\parallel^2 f_{e,i} = \sum_{e,i} 4\sqrt{2\pi B} m_{e,i}^{3/2} \int \sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi} f_{e,i} d\varepsilon d\mu, \\ p_\perp &= \sum_{e,i} \int d^3p \frac{m_{e,i} v_\perp^2}{2} f_{e,i} = \sum_{e,i} 2\sqrt{2\pi B^2} m_{e,i}^{3/2} \int \frac{\mu f_{e,i} d\varepsilon d\mu}{\sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi}}. \end{aligned}$$

**Задача 13.9.** Наличие нулей диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega, k)$  в верхней полуплоскости комплексной частоты означало бы существование неустойчивых собственных потенциальных колебаний плазмы. В устойчивой плазме любые собственные колебания либо затухают, либо нейтрально устойчивы, т. е. мнимая часть собственных частот либо отрицательна, либо равна нулю.

**Задача 13.10.** Продолжив разложение знаменателя  $1/(\omega - kv)$  в выражении, приведшем к формуле (13.34), получим

$$\begin{aligned} \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv &\approx \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0}{\partial v} \left[ \frac{1}{\omega} + \frac{kv}{\omega^2} + \frac{k^2 v^2}{\omega^3} + \frac{k^4 v^3}{\omega^4} + \dots \right] dv = \\ &= -\frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{1}{\omega} + \frac{kv}{\omega^2} + \frac{k^2 v^2}{\omega^3} + \frac{k^3 v^3}{\omega^4} + \dots \right] dv = \\ &= -\frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) \left[ \frac{k}{\omega^2} + \frac{2k^2 v}{\omega^3} + \frac{3k^3 v^2}{\omega^4} + \dots \right] dv = \\ &= -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{3k^2 v_T^2}{2\omega^2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в формулу (13.32), приводим дисперсионное уравнение  $\varepsilon(\omega, k) = 0$  к виду

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{3k^2 v_T^2 \omega_p^2}{2\omega^4} + i \frac{2\sqrt{\pi} \omega \omega_p^2}{k^3 v_T^3} e^{-\omega^2/k^2 v_T^2} = 0,$$

откуда приближённо находим вещественную часть частоты ленгмюровских колебаний

$$\omega'_k = \pm \omega_p \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{k^2 v_T^2}{\omega_p^2} \right) = \pm \omega_p \left( 1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_D^2 \right), \quad (13.10.1)$$

где  $\lambda_D = v_T / \sqrt{2\omega_p} = \sqrt{T/4\pi n e^2}$  — дебаевская длина электронов. Добавка, пропорциональная  $k^2$ , описывает пространственную дисперсию ленгмюровских волн, обусловленную тепловым движением электронов плазмы.

**Задача 13.11.** Пусть электрон движется вдоль оси  $x$  в направленном по этой же оси слабом электрическом поле

$$E(x, t) = \operatorname{Re}[E_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{\gamma t}] = \frac{1}{2} E_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{\gamma t} + \text{с.с.};$$

множитель  $e^{\gamma t}$  описывает медленное включение поля от времени  $t = -\infty$ , а с.с. символизирует комплексно сопряжённое слагаемое. Будем искать скорость  $v_x = v$  и координату  $x$  движущегося электрона в виде

$$v = v_0 + v_1, \quad x = x_0 + x_1,$$

где  $v_1$ ,  $x_1$  — поправки к невозмущённому движению  $x_0 = v_0 t$ , происходящему с постоянной скоростью  $v_0$ . Записав линеаризованное по малым величинам уравнение движения электрона

$$m \frac{dv_1}{dt} = -eE(x_0, t) = -\frac{1}{2} e E_0 e^{ik(v_0 - \omega/k)t} e^{\gamma t} + \text{с.с.},$$

находим

$$v_1 = -\frac{e}{2m} \frac{E(x_0, t)}{ik(v_0 - \omega/k) + \gamma} + \text{с.с.},$$

$$x_1 = -\frac{e}{2m} \frac{E(x_0, t)}{[ik(v_0 - \omega/k) + \gamma]^2} + \text{с.с.}$$

Работа электрического поля, производимая над отдельным электроном в среднем за единицу времени, равна

$$q = -e \langle (v_0 + v_1) E(x_0 + x_1, t) \rangle \approx -e \langle v_0 x_1 \partial E(x_0, t) / \partial x_0 + v_1 E(x_0, t) \rangle =$$

$$= \frac{e^2}{2m} |E_0|^2 \frac{d}{dv_0} \frac{v_0 \gamma}{\gamma^2 + k^2 (v_0 - \omega/k)^2}.$$

Её надо просуммировать по электронам со всеми возможными начальными скоростями  $v_x = v_0$ . Такое суммирование эквивалентно интегрированию по  $v_x$  с весом в виде функции распределения  $f(v_x)$ :

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} q f(v_x) dv_x = -\frac{e^2 |E_0|^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_x \gamma}{\gamma^2 + k^2 (v_x - \omega/k)^2} \frac{df}{dv_x} dv_x$$

(в последнем выражении произведено интегрирование по частям). Переход к пределу  $\gamma \rightarrow 0$  осуществляется с помощью формулы

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\gamma^2 + z^2} = \pi \delta(z)$$

и приводит к

$$Q = -\frac{e^2 |E_0|^2}{2m} \frac{\pi \omega}{k |k|} \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v=\omega/k}.$$

Так как  $W = |E_0|^2 / 8\pi$  есть плотность энергии ленгмюровских колебаний, можно также записать

$$Q = 2\omega_k'' W,$$

где  $\omega_k''$  даёт минимую поправку к частоте ленгмюровских колебаний (13.36). В соответствии с обратимым характером бесстолкновительной диссипации, термодинамические условия не требуют положительности величины  $Q$  (как это имеет место для истинной диссипации).

**Задача 13.12.** В изотропной плазме функция распределения  $f$  зависит только от  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ , поэтому

$$\frac{df(v_x)}{dv_x} = \frac{d}{dv_x} \int_0^\infty f(v_x^2 + v_\perp^2) d(v_\perp^2) = 2\pi v_x \int_0^\infty f'(v_x^2 + v_\perp^2) \pi d(v_\perp^2),$$

где  $v_\perp^2 = v_y^2 + v_z^2$ . Поскольку  $f(v^2) \rightarrow 0$  при  $v^2 \rightarrow \infty$ , то

$$\frac{df(v_x)}{dv_x} = -2\pi v_x f(v_x^2),$$

так что  $df/dv_x < 0$  при  $v_x = \omega/k > 0$ .

**Задача 13.13.** Подставив

$$f_0(v) = \frac{n v_T / \pi}{v_T^2 + v^2}$$

в (13.27) и вычислив интеграл по действительной оси  $v$  в предположении, что  $\text{Im}(\omega) > 0$ , найдём диэлектрическую проницаемость в виде

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + i|k|v_T)^2}.$$

Частоту ленгмюровских колебаний находим из уравнения  $\varepsilon(\omega, k) = 0$ . Оно имеет два решения:

$$\omega = \pm \omega_p - i|k|v_T.$$

**Задача 13.14.** Подставляя максвелловскую функцию распределения (13.33) в общее выражение для диэлектрической проницаемости (13.27), получаем

$$\varepsilon = 1 - \frac{2\omega_p^2}{k^2 v_T^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u e^{-u^2}}{z-u} du = 1 - \frac{2\omega_p^2}{k^2 v_T^2} \left[ -1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{z-u} du \right],$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ ,  $v_T = \sqrt{2T/m}$ ,  $z = \omega/kv_T$ ,  $u = v/v_T$ . Далее замечаем, что

$$\frac{1}{z-u} = -i \int_0^{\infty} e^{i(z-u)\xi} d\xi,$$

поскольку  $\text{Im}(z) = \text{Im}(\omega)/kv_T > 0$  (при  $k > 0$ ). Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{z-u} du &= -i \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} \int_0^{\infty} e^{i(z-u)\xi} d\xi = -i \int_0^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2+i(z-u)\xi} = \\ &= -i \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi^2/4+iz\xi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-(u+i\xi/2)^2} = -i\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi^2/4+iz\xi} = \\ &= -i\sqrt{\pi} e^{-z^2} \int_0^{\infty} d\xi e^{-(\xi/2-iz)^2} = -i\sqrt{\pi} e^{-z^2} \left( 2 \int_0^{\infty} dy e^{-y^2} - \int_0^{-iz} dy e^{-y^2} \right) = \\ &= -i\pi e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{t^2} \right). \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$W(z) = \exp(-z^2) \left[ 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(t^2) dt \right],$$

результат вычислений можно представить в виде

$$\varepsilon = 1 + \frac{2\omega_p^2}{k^2 v_T^2} \left[ 1 + \sqrt{\pi} i \frac{\omega}{kv_T} W\left(\frac{\omega}{kv_T}\right) \right].$$

В пределе  $|\omega/kv_T| \gg 1$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{3k^2 v_T^2 \omega_p^2}{2\omega^4} + i \frac{2\sqrt{\pi} \omega \omega_p^2}{k^3 v_T^3} e^{-\omega^2/k^2 v_T^2}.$$

В противоположном пределе  $|\omega/kv_T| \ll 1$

$$\varepsilon = 1 + \frac{2\omega_p^2}{k^2 v_T^2} + i \frac{2\sqrt{\pi} \omega \omega_p^2}{k^3 v_T^3}.$$

**Задача 13.15.** Формулируя задачу с начальными условиями, нужно предположить, что возмущение равновесного состояния исчезает при  $t < 0$ . В момент времени  $t = 0$  включается внешний источник, который создаёт начальное возмущение функции распределения  $f_1(v, x, 0)$ . Чтобы определить эволюцию во времени этого возмущения, применим преобразование Лапласа. С этой целью введём функции

$$f_{k\omega}(v) = \int_0^\infty f_k(v, t) e^{i\omega t} dt, \quad (13.15.1)$$

$$\varphi_{k\omega} = \int_0^\infty \varphi_k(t) e^{i\omega t} dt \quad (13.15.2)$$

и обозначим посредством

$$g_k(v) = f_k(v, 0)$$

Фурье-амплитуду начального возмущения функции распределения; сходимость интегралов (13.15.1) и (13.15.2) гарантируется при условии, что мнимая часть  $\omega$  положительна и достаточно велика. Далее умножим обе стороны уравнения (13.22) на  $e^{i\omega t}$  и выполним интегрирование по  $dt$ . Поскольку при  $\text{Im}(\omega) > 0$  имеет место равенство

$$\int_0^\infty \frac{\partial f_k}{\partial t} e^{i\omega t} dt = f_k e^{i\omega t} \Big|_0^\infty - i\omega \int_0^\infty f_k e^{i\omega t} dt = -g_k - i\omega f_{k\omega},$$

получаем уравнение

$$f_{k\omega} = \frac{ig_k}{\omega - kv} + \frac{k}{\omega - kv} \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \varphi_{k\omega}, \quad (13.15.3)$$

которое связывает  $f_{k\omega}$  и  $\varphi_{k\omega}$ . Оно отличается от (13.25) добавлением слагаемого, содержащего  $g_k$ . Аналогично из уравнения (13.23) получаем

$$-k^2 \varphi_{k\omega} = 4\pi e \int_{-\infty}^\infty f_{k\omega} dv. \quad (13.15.4)$$

Подстановка (13.15.3) в (13.15.4) даёт окончательное выражение для амплитуды преобразования Лапласа потенциала колебаний

$$\varphi_{k\omega} = -i \frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon(\omega, k)} \int_{-\infty}^\infty \frac{g_k dv}{\omega - kv}, \quad (13.15.5)$$

где диэлектрическая проницаемость формально определена формулой (13.27). Обратное преобразование Лапласа

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \varphi_{k\omega} e^{-i\omega t} dw \quad (13.15.6)$$

вычисляется при помощи интеграла по контуру в комплексной плоскости, который проходит выше любых особенностей подынтегрального выражение (т. е.  $\sigma > 0$  и достаточно велико). При  $\sigma = 0$  формулы (13.15.2) и (13.15.5) по существу представляют прямое и обратное преобразование Фурье с учётом того факта, что  $\varphi_k(t) = 0$  при  $t < 0$ . Отличие от преобразования Фурье проявляется в том, что преобразование Лапласа (13.15.2) существует даже для растущих функций времени. Действительно, поскольку интегрирование в формуле (13.15.2) распространяется только на положительную полуось  $t$ , интеграл можно сделать сходящимся даже для экспоненциально растущей функции  $\varphi_k(t) \propto \exp(\gamma t)$ , выбрав параметр  $\omega = \omega' + i\omega''$  с достаточно большой положительной мнимой частью  $\omega'' > \gamma > 0$ , большей, чем показатель  $\gamma$  растущей экспоненты. Поэтому функция  $\varphi_{k\omega}$  существует и конечна, а значит, не имеет особенностей в области комплексной плоскости  $\omega$ , такой что  $\omega'' > \gamma > 0$ .

Формулы (13.15.3), (13.15.5) и (13.15.6) по существу решают поставленную задачу, определяя распределение электронов и электрическое поле по произвольному начальному возмущению  $g_k(v)$ . Они показывают, что в общем случае не существует определённой зависимости  $\omega$  от  $k$ , так как для заданного  $k$  интегрирование в формуле (13.15.6) выполняется по бесконечному интервалу частот.

**Задача 13.16.** Покажем, что асимптотика интеграла (13.15.6) при  $t \rightarrow \infty$  определяется только нулями функции  $\varepsilon(\omega, k)$ , если функции  $g_k(v)$  и  $f_0(v)$  не сингулярны. Именно, при  $t \rightarrow \infty$

$$\varphi_k(t) \propto \exp(-i\omega_k t), \quad (13.16.1)$$

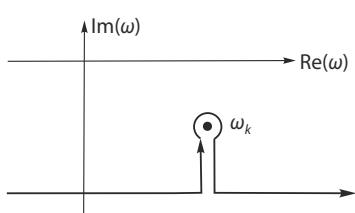
где  $\omega_k$  — корень дисперсионного уравнения (13.27) с максимальной мнимой частью.

Чтобы доказать асимптотику (13.16.1), исследуем аналитические свойства функции  $\varphi_{k\omega}$ . Выражение типа (13.15.2), рассматриваемое как функция комплексной переменной  $\omega$ , имеет смысл лишь в верхней полуплоскости, т. е. при  $\text{Im}(\omega) > 0$ . То же относится и к выражению (13.15.5). Однако мы можем определить  $\varphi_{k\omega}$  в нижней полуплоскости как аналитическое продолжение выражения (13.15.5). Легко видеть, что если  $g_k(v)$  (рассматриваемая как функция комплексной переменной  $v$ ) есть целая функция (т. е. не имеет особенностей при конечных  $v$ ), то и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_k(v) dv}{\omega - kv}, \quad (13.16.2)$$

аналитически продолженный в нижнюю полуплоскость  $\omega$ , определяет целую функцию от  $\omega$ .

Действительно, чтобы аналитически продолжить изображаемую этим интегралом функцию из верхней полуплоскости в нижнюю, сместим предварительно путь интегрирования в плоскости комплексной переменной  $v$  доста-



**Рис. 13.16.1.** Контур интегрирования в комплексной плоскости  $\omega$  при восстановлении образа преобразования Лапласа. Чтобы выделить асимптотику потенциала  $\varphi_k(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ , можно сдвинуть контур интегрирования вниз. Интегралы по смещённому и исходному контурам равны при условии, что при сдвиге контур не пересекал особенности подынтегрального выражения.

точно далеко в нижнюю полуплоскость так, чтобы точка  $v = \omega/k$  лежала выше пути интегрирования, как показано на рисунке 13.2(б) (для определённости рассматриваем случай  $k > 0$ ). Таким образом, мы получим аналитическую функцию, определяемую интегралом, который при  $\text{Im}(\omega) > 0$  берётся по действительной оси, а при  $\text{Im}(\omega) < 0$  — по пути, изображённому на рисунке 13.2(б). Эта функция не имеет особенностей ни при каком конечном значении  $\omega$ , т. е. является целой.

То же самое относится, очевидно, и к интегралу (13.27) в определении диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega, k)$ , стоящей в знаменателе выражения (13.15.5), если  $\partial f_0/\partial v$  есть целая функция; это заведомо так для максвелловской функции распределении (13.33). Таким образом, аналитическая во всей плоскости функция  $\varphi_{k\omega}$  есть частное двух целых функций. Отсюда следует, что единственными особенностями (полюсами) функции  $\varphi_{k\omega}$  являются нули диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega, k)$ . Эти соображения позволяют определить асимптотический вид потенциала  $\varphi_k(t)$  как функции времени при больших значениях последнего.

В формуле восстановления образа преобразования Лапласа (13.15.6) интегрирование производится по горизонтальной прямой в верхней полуплоскости. Понимая под  $\varphi_{k\omega}$  определённую указанным образом во всей плоскости  $\omega$  аналитическую функцию, мы можем сместить путь интегрирования в нижнюю полуплоскость так, чтобы нигде не пересечь ни одного из полюсов функции  $\varphi_{k\omega}$ . Пусть  $\omega_k = \omega'_k + i\omega''_k$  есть тот из полюсов функции  $\varphi_{k\omega}$  (корней уравнения (13.27)), который расположен выше других (обладает наибольшей мнимой частью  $\omega''_k$ ). Будем производить интегрирование в (13.15.6) по пути, смещённому достаточно далеко вниз за точку  $\omega = \omega_k$  и огибающему эту точку (а также и другие полюса, лежащие ниже), указанным на рисунке 13.16.1 образом. Тогда в интеграле (13.15.6), взятом по этому контуру, при больших  $t$  будет существенным только вычет относительно полюса  $\omega_k$ ; остальные части интеграла, в том числе интеграл по горизонтальной части пути, будут экспоненциально малы по сравнению с указанным вычетом благодаря наличию в подынтегральном выражении множителя  $e^{-i\omega t}$ , быстро спадающего с увеличением  $|\text{Im}(\omega)|$ .

Таким образом, при больших  $t$  потенциал поля  $\varphi_k(t)$  будет пропорциона-

лен множителю  $\exp(-i\omega_k t)$ . При комплексном  $\omega_k = \omega'_k + i\omega''_k$  он распадается на осциллирующий  $\exp(-i\omega'_k t)$  и экспоненциальный  $\exp(\omega''_k t)$  множители. В устойчивой системе  $\omega''_k < 0$  и мы приходим к существенному результату, что поле, вообще говоря, экспоненциально затухает со временем, с декрементом, равным  $-\omega''_k$ . Если окажется, что  $\omega''_k > 0$ , начальное возмущение будет нарастать; в таком случае плазма будет неустойчивой.

## Лекция 14

**Задача 14.1.** Запишем уравнение Фоккера—Планка в дивергентном виде,

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} f_b + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} f_b = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{s}_b,$$

умножим на  $d^3x d^3p$  и проинтегрируем по шестимерному фазовому пространству. Дивергентные члены слева и справа при интегрировании выпадают. Оставшееся слагаемое  $\int d^3x d^3p \partial f_b / \partial t$  равно  $dN_b/dt$ . Таким образом,  $dN_b/dt = 0$ .

**Задача 14.2.** Подставляя  $f_b = n_b/(2\pi m_b T)^{3/2} \exp(-p^2/2m_b T)$  в уравнение (14.6) и требуя, чтобы его правая часть обращалась в нуль, т. е.

$$A_\mu f_b - \frac{1}{2} D_{\mu\nu} \frac{\partial f_b}{\partial p_\nu} = 0,$$

находим, что  $A_\mu = -D_{\mu\nu} p_\nu / 2m_a T$ .

**Задача 14.3.** Процессы, описываемые уравнением Фоккера—Планка, проще понять, если рассмотреть ансамбль пробных частиц, плотность которых столь мала (по сравнению с полевыми частицами плазмы), что их можно не учитывать при определении коэффициентов уравнения Фоккера—Планка. Тогда эти коэффициенты оказываются заданными функциями импульса пробных частиц, а само уравнение — линейным относительно функции распределения пробных частиц.

Рассмотрим однородный плоский поток пробных частиц сорта  $b$ , первоначально имеющих одинаковый импульс  $\mathbf{p}_b$ . Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  их распределение  $f_b = n_b \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_b)$  выражается через  $\delta$ -функцию с коэффициентом  $n_b$ , не зависящим от координат. Функция  $f_b$  и далее будет пространственно однородна, поэтому пространственные градиенты в задаче отсутствуют, а коэффициент  $n_b$  без ограничения общности можно приравнять единице:

$$f_b = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_b) \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{14.3.1}$$

Электрическое и магнитное поля для простоты исключим. Тогда  $\frac{df_b}{dt} = \partial f_b / \partial t$ , а уравнение Фоккера–Планка (14.4) принимает вид

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \left( F_\mu f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\mu\nu} f_b \right) \equiv -\frac{\partial s_\mu}{\partial p_\mu}. \quad (14.3.2)$$

Применим это уравнение для вычисления производной  $\frac{d\bar{p}}{dt}$ , где черта сверху обозначает усреднение по распределению, т. е.

$$\bar{p}_\alpha = \int d^3p p_\alpha f_b. \quad (14.3.3)$$

Ограничевшись небольшим интервалом времени вблизи  $t = 0$ , для вычисления среднего можно использовать начальную функцию распределения пробных частиц (14.3.1). Тогда

$$\frac{d\bar{p}_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \int d^3p p_\alpha f_b \approx \frac{d}{dt} \int d^3p p_\alpha \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_b) = \frac{dp_{b,\alpha}}{dt},$$

где  $p_{b,\alpha}$  —  $\alpha$ -компоненты вектора  $\mathbf{p}_b$ . С другой стороны, производную  $\frac{d\bar{p}_\alpha}{dt}$  можно вычислить, выполнив дифференцирование под знаком интеграла в правой части формулы (14.3.3).

При дифференцировании подынтегрального выражения полную производную  $d/dt$  следует заменить на частную производную, чтобы подчеркнуть, что импульс, как переменную интегрирования, дифференцировать не нужно, т. е.

$$\frac{d\bar{p}_\alpha}{dt} = \int d^3p p_\alpha \frac{\partial f_b}{\partial t}.$$

Подставляя сюда  $\frac{\partial f_b}{\partial t} = -\frac{\partial s_\mu}{\partial p_\mu}$ , преобразуем подынтегральное выражение с помощью цепочки тождеств

$$-p_\alpha \frac{\partial s_\mu}{\partial p_\mu} = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} p_\alpha s_\mu + s_\mu \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\mu} = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} p_\alpha s_\mu + s_\alpha.$$

Первое слагаемое в правой части цепочки представляет собой дивергенцию тензора  $p_\alpha s_\mu$  в пространстве импульсов. Соответствующий интеграл с помощью теоремы Остроградского–Гаусса преобразуется к интегралу по бесконечно удалённой замкнутой поверхности в пространстве импульсов, где функция распределения равна нулю, а вместе с ней и сам интеграл. Интегрирование оставшегося слагаемого тривиально, так как  $f_b$  содержит  $\delta$ -функцию:

$$\int d^3p s_\alpha = \int d^3p \left( F_\alpha f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\alpha\nu} f_b \right) = \int d^3p F_\alpha f_b = F_\alpha.$$

В результате имеем

$$\frac{d\mathbf{p}_b}{dt} = \mathbf{F}_b, \quad (14.3.4)$$

где  $\mathbf{F}_b$  обозначает вектор с компонентами  $F_\alpha$ , которые вычислены при  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_b$ .

Напомним, что в §8.2 уже было получено уравнение (8.9), определяющее изменение направленного импульса пробной частицы  $d\mathbf{p}_b/dt$ . В его правой части стоит сумма сил  $\sum_a \mathbf{F}_{ba}$ , действующих на пробную частицу сорта  $b$  со стороны частиц плазмы сорта  $a$ . Таким образом, силу  $\mathbf{F}_b$  следует отождествить с суммой сил  $\sum_a \mathbf{F}_{ba}$ , которая уже была однажды вычислена.

Действуя аналогичным образом, можно также вычислить производную тензора

$$\frac{d}{dt} \overline{p_\alpha p_\beta} = \int d^3p p_\alpha p_\beta \frac{\partial f_b}{\partial t}.$$

После несложных вычислений, включающих двукратное интегрирование по частям с помощью теоремы Остроградского – Гаусса, находим

$$\frac{d}{dt} \overline{p_\alpha p_\beta} = F_\alpha p_{b,\beta} + p_{b,\alpha} F_\beta + \frac{1}{2} D_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} D_{\beta\alpha}. \quad (14.3.5)$$

Поскольку

$$\overline{(p_\alpha - \bar{p}_\alpha)(p_\beta - \bar{p}_\beta)} = \overline{p_\alpha p_\beta} - \overline{p_\alpha} \overline{p_\beta},$$

уравнение (14.3.5) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \overline{(p_\alpha - \bar{p}_\alpha)(p_\beta - \bar{p}_\beta)} = D_{\alpha\beta}, \quad (14.3.6)$$

если также учесть, что  $D_{\beta\alpha} = D_{\alpha\beta}$  в соответствии с определением (5) тензора диффузии.

Тензор  $\overline{p_\alpha p_\beta}$  не имеет столь очевидного смысла, как средний импульс пробной частицы  $p_{b,\alpha} = \bar{p}_\alpha$ , но его свёртка  $\overline{p_\alpha p_\alpha} = \delta_{\alpha\beta} \overline{p_\alpha p_\beta}$  с единичным тензором  $\delta_{\alpha\beta}$  связана с энергией пробной частицы

$$\varepsilon = \frac{\overline{\mathbf{p}^2}}{2m_b}.$$

Вводя обозначение  $\mathbf{v}_b = \mathbf{p}_b/m_b$  для скорости пробной частицы и составляя свёртку  $\delta_{\alpha\beta}$  с уравнением (14.3.5), получаем уравнение

$$\frac{d\varepsilon_b}{dt} = \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{F}_b + \frac{D_{\alpha\alpha}}{2m_b} \quad (14.3.7)$$

для скорости изменения энергии пробной частицы. Скорость изменения энергии пробных частиц была фактически вычислена в §8.4. Однако для определения всех элементов тензора диффузии этого не достаточно.

**Задача 14.4.** Найдём сначала правило преобразования компонентов вектора при вращении системы координат. Пусть  $\mathbf{e}_\mu$  – система трёх взаимно ортогональных ортов ( $\mu = 1, 2, 3$ ), таких что  $(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = 1$ , если  $\mu = \nu$ , и  $(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = 0$ , если  $\mu \neq \nu$ . Произвольный вектор  $\mathbf{a}$  можно записать в виде

$$\mathbf{a} = a_\nu \mathbf{e}_\nu, \quad (14.4.1)$$

где по повторяющимся индексам (в данном случае по индексам  $\nu$ ) подразумевается суммирование:  $a_\nu e_\nu = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ . Компоненты  $a_\mu$  вектора  $\mathbf{a}$  в декартовой системе координат, натянутой на орты  $e_\mu$ , нетрудно найти, умножив равенство (14.4.1) скалярно на  $e_\mu$ . При этом в правой части этого равенства останется только слагаемое с  $\nu = \mu$ , так что

$$a_\mu = (e_\mu \cdot \mathbf{a}). \quad (14.4.2)$$

Тот же вектор  $\mathbf{a}$  можно разложить по другой системе ортов  $e'_\nu$ . Имея разные компоненты в двух разных системах координат, вектор  $\mathbf{a}$  тем не менее представляет собой один и тот же объект, поэтому

$$a_\nu e_\nu = a'_\nu e'_\nu. \quad (14.4.3)$$

Умножив последнее равенство скалярно на  $e'_\mu$  и приняв во внимание взаимную ортогональность ортов  $e'_\mu$ , получим правило преобразования компонентов вектора  $\mathbf{a}$  из первой системы координат во вторую:

$$a'_\mu = t'_{\mu\nu} a_\nu, \quad t'_{\mu\nu} = (e'_\mu \cdot e_\nu). \quad (14.4.4)$$

Если то же равенство умножить на  $e_\mu$ , получим правило преобразования из второй системы координат в первую:

$$a_\mu = t_{\mu\nu} a'_\nu \quad t_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e'_\nu). \quad (14.4.5)$$

Очевидно, что

$$t_{\mu\nu} = t'_{\nu\mu} = (t^{-1})_{\nu\mu}.$$

Тензор ранга  $n$  преобразуется как прямое произведение  $n$  векторов. Например,

$$A_{\mu\nu} = t_{\mu\pi} t_{\nu\rho} A'_{\pi\rho}.$$

Нетрудно доказать, что инвариантного тензора первого ранга (т. е. вектора) не существует. Действительно, рассмотрим поворот системы координат на  $180^\circ$  вокруг оси  $z$ . Ему соответствует матрица преобразования

$$t'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$a'_x = t'_{x\nu} a_\nu = -a_x, \quad a'_y = t'_{y\nu} a_\nu = -a_y.$$

С другой стороны, если  $\mathbf{a}$  — инвариантный вектор, должно быть

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y,$$

что приводит к уравнениям

$$a_x = -a_x, \quad a_y = -a_y,$$

которые имеют только тривиальное решение  $a_x = a_y = 0$ . Выполнив поворот вокруг оси  $x$  или  $y$ , аналогичным образом можно доказать, что  $a_z = 0$ .

Найдём теперь инвариантный тензор второго ранга. Пусть  $A_{\mu\nu}$  — искомый тензор. Повернём систему координат на  $90^\circ$  вокруг оси  $z$ , так что

$$t'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и в новой системе координат  $x' = y$ ,  $y' = -x$ ,  $z' = z$ ,  $A'_{xx} = A_{yy}$ ,  $A'_{xy} = -A_{yx}$ ,  $A'_{xz} = -A_{yz}$  и т. д. С другой стороны, если тензор  $A_{\mu\nu}$  инвариантный, то  $A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}$ . Следовательно,  $A_{xx} = A'_{xx} = A_{yy}$ , т. е.  $A_{xx} = A_{yy}$ . Если же сделать поворот на  $180^\circ$ , получим цепочку равенств  $A_{xz} = A'_{xz} = -A_{xz}$ , т. е.  $A_{xz} = -A_{xz} = 0$ . Выполнив такие же повороты вокруг других осей, нетрудно доказать, что все диагональные элементы тензора  $A_{ij}$  одинаковы, а все недиагональные равны нулю. Таким образом,

$$A_{\mu\nu} = \mathbb{A} \delta_{\mu\nu},$$

где  $\mathbb{A} = \text{const}$ , а

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

обозначает тензор (символ) Кронекера (Leopold Kronecker, 1866). Цепочка преобразований

$$\delta'_{\mu\nu} = t'_{\mu\pi} t'_{\nu\rho} \delta_{\pi\rho} = t'_{\mu\pi} t'_{\nu\pi} = t'_{\mu\pi} (t'^{-1})_{\pi\nu} = \delta_{\mu\nu}$$

доказывает, что тензор Кронекера инвариантен относительно любого вращения. Он также инвариантен относительно инверсии, которой соответствует матрица преобразования

$$t'_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тензор  $A_{\mu\nu}$  также инвариантен относительно инверсии, если константа  $\mathbb{A}$  является истинным скаляром, то есть при инверсии она не меняет знак.

Похожим способом можно доказать инвариантность тензора Леви-Чивиты (Levi-Civita, 1900 [184])  $\epsilon_{\mu\nu\pi}$ , который также называют абсолютно антисимметричным тензором 3-го ранга. Его компоненты меняют знак при перестановке соседних индексов, например  $\epsilon_{\nu\mu\pi} = -\epsilon_{\mu\nu\pi}$ . Поэтому отличны от нуля только те компоненты, у которых нет одинаковых индексов, в частности  $\epsilon_{123} = 1$ . Инвариантен любой тензор вида  $\mathbb{A}\epsilon_{\nu\mu\pi}$ , где  $\mathbb{A}$  — истинный скаляр.

**Задача 14.5.** Преобразуем интеграл

$$\int \left( \frac{f_b}{m_a} \frac{\partial f'_a}{\partial v'_\nu} - \frac{f'_a}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3v'$$

в правой части уравнения (14.21). В первом слагаемом выполним интегрирование по частям и учтём, что

$$-\frac{\partial}{\partial v'_\nu} \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = \frac{\partial}{\partial u_\nu} \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = -\frac{2u_\mu}{u^3} = \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{2}{u}.$$

Ко второму слагаемому применим легко проверяемое равенство

$$\frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial v_\mu \partial v_\nu}.$$

В результате получим выражение

$$\begin{aligned} & \int \left( \frac{f_b}{m_a} f'_a \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{2}{u} - \frac{f'_a}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \right) d^3v' = \\ &= \frac{2}{m_b} \left[ \frac{m_b}{m_a} \left( \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int \frac{f'_a}{u} d^3v' \right) f_b - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \int f'_a u d^3v' \right) \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right], \end{aligned}$$

в котором уже нетрудно распознать потенциалы Розенблюта (14.18).

**Задача 14.6.** Выполнив в определении (14.18) потенциалов Розенблюта дифференцирование под знаком интеграла в формуле для  $h_a$ , получим выражение

$$-\frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} = \int \frac{u_\mu}{u^3} f_a(v') d^3v' = \int \frac{v_\mu - v'_\mu}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f_a(v') d^3v',$$

с точностью до обозначений совпадающее с полем сферически симметричного распределения электрических зарядов

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho_q(r') d^3r',$$

причём  $\mathbf{v}$  имеет смысл радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , а  $f_a(v')$  — плотности заряда  $\rho_q(r')$ . Как известно, поле сферически симметричного распределения зарядов на расстоянии  $r$  от центра симметрии зависит только от полного заряда внутри сферы того же радиуса, поэтому

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_q(r') dr'.$$

Сфера, соответствующая скорости пробной частицы, в пространстве скоростей полевых частиц  $a$  имеет радиус  $v$ , поэтому

$$\frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} = -\frac{v_\mu}{v^3} \int_0^v 4\pi v'^2 f_a(v') dv'.$$

Составив свёртку

$$\frac{v_\mu}{v} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} = \frac{dh_a}{dv},$$

получим

$$\frac{dh_a}{dv} = -\frac{1}{v^2} \int_0^v 4\pi v'^2 f_a(v') dv'. \quad (14.6.1)$$

Поскольку в соответствии с уравнением (14.17) сила торможения пропорциональна  $\partial h_a / \partial v$ , отсюда видно, что пробная частица обменивается импульсом только с теми полевыми частицами, которые движутся медленнее неё ( $v' < v$ ).

Дальнейшие вычисления проведём для максвелловской функции распределения

$$f_a = \frac{n_a}{\pi^{3/2} v_{Ta}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{Ta}^2}\right),$$

где  $v_{Ta} = \sqrt{2T_a/m_a}$  обозначает тепловую скорость полевой частицы. Тогда

$$\frac{dh_a}{dv} = -\frac{4n_a}{\sqrt{\pi} v^2} \int_0^{v/v_{Ta}} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Интеграл можно выразить через функцию ошибок

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx,$$

но мы воздержимся от выписывания явных формул, ограничившись двумя предельными случаями. При  $v \ll v_{Ta}$  имеем

$$\frac{dh_a}{dv} \approx -\frac{4n_a v}{3\sqrt{\pi} v_{Ta}^3}.$$

В противоположном предельном случае

$$\frac{dh_a}{dv} \approx -\frac{n_a}{v^2}.$$

Вычисление самой функции  $h_a$  не представляет интереса, так как в интеграл столкновений входит только производная  $\partial h_a / \partial v_\mu = (v_\mu/v)(dh_a/dv)$ , но вычисление производных  $g_a$  удобнее начать с вычисления самой функции

$$g_a = \int u f'_a d^3 v'.$$

Сделаем замену переменных  $v' = v - u$ , переходя от интегрирования по  $dv'$  к интегрированию по  $du$ , и временно примем  $n_a = 1$ ,  $v_{Ta} = 1$ ; по завершении вычислений мы восстановим правильную размерность. Тогда

$$\begin{aligned} g_a &= \frac{2\pi}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty du u^3 \int_{-1}^1 d \cos \theta e^{-(u^2+v^2+2uv \cos \theta)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}v} \int_0^\infty du u^2 [e^{-(v-u)^2} - e^{-(v+u)^2}]. \end{aligned}$$

Делая следующую замену  $x = u - v$  и  $x = v + u$  в первом и втором слагаемом соответственно, получим

$$\begin{aligned} g_a &= \frac{1}{\sqrt{\pi}v} \left[ \int_{-v}^\infty dx (v+x)^2 e^{-x^2} - \int_v^\infty dx (v-x)^2 e^{-x^2} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}v} \left[ \int_0^\infty dx 4xv e^{-x^2} + 2 \int_0^v dx (v-x)^2 e^{-x^2} \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}v} \int_0^v dx (v-x)^2 e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Дифференцируя и восстанавливая размерность, находим

$$\frac{dg_a}{dv} = \frac{2n_a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{v/v_{Ta}} dx \left( 1 - \frac{x^2}{(v/v_{Ta})^2} \right) e^{-x^2}, \quad \frac{d^2g_a}{dv^2} = \frac{4n_a v_{Ta}^2}{\sqrt{\pi}v^3} \int_0^{v/v_{Ta}} dx x^2 e^{-x^2}.$$

Отсюда видно, что

$$\frac{d^2g_a}{dv^2} = -v_{Ta}^2 \frac{1}{v} \frac{dh_a}{dv}.$$

При  $v \ll v_{Ta}$

$$\frac{dg_a}{dv} \approx \frac{4n_a v}{3\sqrt{\pi}v_{Ta}}.$$

В противоположном предельном случае

$$\frac{dg_a}{dv} \approx n_a.$$

## Лекция 15

**Задача 15.1.** Используем интеграл столкновений в форме Ландау (14.21) и запишем отдельное слагаемое  $C_{ba}$  в виде

$$C_{ba} = -\frac{c_{ba}}{2m_b} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \int \left( \frac{f_b}{m_a} \frac{\partial f'_a}{\partial v'_\nu} - \frac{f'_a}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} dv',$$

где  $f_b = f_b(\mathbf{v})$ ,  $f'_a = f_a(\mathbf{v}')$ . Умножив обе стороны на  $m_b v_\alpha$  и выполнив интегрирование по частям по  $d^3v$ , получим

$$\int m_b v_\alpha C_{ba} d^3v = \frac{c_{ba}}{2} \iint f_b f'_a \left( \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial v'_\nu} \ln f'_a - \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \ln f_b \right) \frac{u^2 \delta_{\alpha\nu} - u_\alpha u_\nu}{u^3} d^3v d^3v'.$$

При перестановке  $a \leftrightarrow b$  и  $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}'$  подынтегральное выражение в правой части просто меняет знак. Кроме того,  $c_{ba} = c_{ab} = 4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}$ , поэтому сумма  $\int m_a v_\alpha C_{ab} d^3v + \int m_b v_\alpha C_{ba} d^3v$  равна нулю, что и требовалось доказать.

**Задача 15.2.** Воспользуемся методом предыдущей задачи. Умножая  $C_{ba}$  на  $\frac{1}{2} m_b v^2$  и интегрируя по  $d^3v$  по частям, получаем

$$\int \frac{m_b v^2}{2} C_{ba} d^3p = \frac{c_{ba}}{2} \iint v_\mu f_b f'_a \left( \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial v'_\nu} \ln f'_a - \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \ln f_b \right) \frac{u^2 \delta_{\alpha\nu} - u_\alpha u_\nu}{u^3} d^3v d^3v'.$$

Заменяя  $a \leftrightarrow b$ , а справа также  $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}'$ , получаем

$$\int \frac{m_a v^2}{2} C_{ab} d^3v = -\frac{c_{ab}}{2} \iint v'_\mu f_b f'_a \left( \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial v'_\nu} \ln f'_a - \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \ln f_b \right) \frac{u^2 \delta_{\alpha\nu} - u_\alpha u_\nu}{u^3} d^3v d^3v'.$$

Складывая два интеграла, заключаем, что их сумма равна нулю ввиду тождества

$$(v_\mu - v'_\mu) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = u_\mu \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = 0$$

и  $c_{ba} = c_{ab}$ .

**Задача 15.3.** При равенстве потоковой (средней) скорости частиц всех сортов существует система отсчёта, где эта скорость равна нулю. В такой системе отсчёта

$$f_b = n_b \exp(-m_b v^2/2T)/(2\pi T/m_b)^{3/2},$$

$$f'_a = n_a \exp(-m_a v'^2/2T)/(2\pi T/m_a)^{3/2}.$$

Подставляя  $f_b$ ,  $f'_a$  в интеграл столкновений в форме Ландау (14.21), замечаем, что подынтегральное выражение обращается в нуль, так как

$$\left( \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial v'_\nu} \ln f'_a - \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \ln f_b \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = \frac{u_\nu}{T} \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = 0.$$

**Задача 15.4.** Тот факт, что функция  $f_b$  не может стать отрицательной, если она неотрицательна в начале, можно доказать следующим образом. Предположим, что  $f_b$  обратилась в нуль в одной точке  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ , тогда в этой точке  $\partial f_b / \partial \mathbf{v} = 0$  и

$$f_b(\mathbf{v}) \approx \frac{1}{2}(v_\pi - v_{0\pi}) \left( \frac{\partial^2 f_b}{\partial v_\pi v_\delta} \right)_0 (v_\delta - v_{0\delta}) > 0$$

для малых  $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0| \neq 0$ , а тензор  $(\partial^2 f_b / \partial v_\pi v_\delta)_0$  должен быть положительно определённым. Уравнение (14.21) при  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$  приобретает вид

$$\frac{df_b}{dt} = \sum_a \frac{c_{ba}}{2m_b^2} \int f'_a \left( \frac{\partial^2 f_b}{\partial v_\mu v_\nu} \right)_0 \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3v', \quad (15.4.1)$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}'$ . Определяя  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}/u$ ,  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  – любые два других перпендикулярных  $\mathbf{e}_1$  и взаимно перпендикулярных единичных вектора, имеем

$$\frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = \frac{e_{2\mu} e_{2\nu} + e_{3\mu} e_{3\nu}}{u}.$$

Поэтому

$$\frac{df_b}{dt} = \sum_a \frac{c_{ba}}{2m_b^2} \int \frac{f'_a}{u} \left[ e_{2\mu} \left( \frac{\partial^2 f_b}{\partial v_\mu v_\nu} \right)_0 e_{2\nu} + e_{3\mu} \left( \frac{\partial^2 f_b}{\partial v_\mu v_\nu} \right)_0 e_{3\nu} \right] d^3v' > 0.$$

Таким образом,  $f_b$  становится положительной при  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ , т. е. столкновения стремятся заполнить любые дыры в пространстве скоростей.

**Задача 15.5.** В случае лоренцевой плазмы замкнутой системой можно считать электронный газ, поскольку функция распределения «бесконечно» тяжёлых ионов вообще не меняется. Энтропия идеального электронного газа вычисляется по формуле

$$S_e = \iint [1 - \ln f_e] f_e d^3x d^3p. \quad (15.5.1)$$

Подстановка в выражение

$$\frac{dS_e}{dt} = - \iint \frac{\partial f_e}{\partial t} \ln(f_e) d^3x d^3p$$

производной  $\partial f_e / \partial t$  из кинетического уравнения даёт

$$\frac{dS_e}{dt} = \iint d^3x d^3p \ln(f_e) \left\{ \mathbf{v} \cdot \nabla f_e + \frac{e_e}{m_e} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} - C_{ei} \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках в результате интегрирования даёт нуль, так как с помощью теоремы Остроградского—Гаусса оно преобразуется к интегралу по поверхности, целиком охватывающей объём плазмы, а вне плазмы  $f_e = 0$ :

$$\begin{aligned} \int d^3x \ln(f_e) \mathbf{v} \cdot \nabla f_e &= \int d^3x \ln(f_e) \operatorname{div}(\mathbf{v} f_e) = \\ &= - \int d^3x \mathbf{v} f_e \cdot \nabla \ln(f_e) = - \int d^3x \mathbf{v} \cdot \nabla f_e = \\ &= - \int d^3x \operatorname{div}(\mathbf{v} f_e) = 0. \end{aligned}$$

Такая же процедура по отношению ко второму слагаемому даёт нуль при интегрировании по пространству импульсов:

$$\int d^3p \ln(f_e) \frac{e_e}{m_e} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

В итоге останется только последнее слагаемое с интегралом столкновений:

$$\frac{dS_e}{dt} = - \iint d^3x d^3p \ln(f_e) C_{ei}.$$

Дальнейшие вычисления проведём, использовав формулу (15.22) для интеграла столкновений в лоренцевой плазме:

$$C_{ei} = \mathbb{A} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{1}{v} \left( \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp.$$

Явный вид константы  $\mathbb{A}$ , не зависящий от  $\mathbf{v}$ , нам не понадобится, важно только, что  $\mathbb{A} > 0$ . Используя уже отработанную технологию преобразования интегралов, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dS_e}{dt} &= -\mathbb{A} \iint d^3x d^3p \ln(f_e) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{1}{v} \left( \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp = \\ &= \mathbb{A} \iint d^3x d^3p \frac{1}{v f_e} \left( \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = \\ &= \mathbb{A} \iint d^3x d^3p \frac{1}{v f_e} \left( \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{15.5.2}$$

Так как  $dS_e/dt \geq 0$ , энтропия в лоренцевой плазме действительно не убывает, что и требовалось доказать.

**Задача 15.7.** С учётом малости угла рассеяния кинетическое уравнение (15.23) приводится к виду

$$\frac{\partial f_e}{\partial x} = \frac{\nu_{ei}^{(p)}}{2v} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta \frac{\partial f_e}{\partial \theta},$$

где  $x$  — координата, отсчитываемая от границы плазмы в направлении движения пучка,  $\theta$  — угол в пространстве скоростей, отсчитываемый от направления пучка,  $v$  — скорость,  $\nu_{ei}^{(p)} = 4\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei} / m_e^2 v^3$  — частота рассеяния электронов на ионах. Это стандартное уравнение диффузии. Его решение, удовлетворяющее граничному условию

$$f_e(0, v, \theta) = n_e \delta(v - v_0) \delta(\theta) / v^2 \sin \theta$$

при  $x = 0$ , имеет вид

$$f_e(x, v, \theta) = n_e \frac{\delta(v - v_0)}{4\pi v^2} \frac{\exp(-\theta^2/4Dx)}{Dx},$$

где  $D = \nu_{ei}^{(p)} / 2v$ . С учётом малости угла рассеяния плотность пучка вычисляется по формуле

$$n_e = 2\pi \int_0^\infty dv v^2 \int_0^\infty d\theta \theta f_e$$

и не зависит от  $x$ . Полезно сравнить предъявленное решение с вычислением среднего квадрата угла рассеяния в §8.5.

**Задача 15.8.** В качестве исходного возьмём кинетическое уравнение (15.29) для пробных частиц в плазме с максвелловским распределением полевых частиц:

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_{a=e,i} \frac{4\pi e_a^2 \sigma_b^2 \Lambda}{m_b^2 v^2} \left[ \frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{m_b}{m_a} \frac{dh_a}{dv} \left( f_b + \frac{T_a}{m_b v} \frac{\partial f_b}{\partial v} \right) - \frac{1}{2v} \frac{dg_a}{dv} \nabla_\perp^2 f_b \right].$$

Здесь суммирование проводится по электронам ( $a = e$ ) и ионам ( $a = i$ ) плазмы, а также принято, что величина кулоновского логарифма не зависит от сорта сталкивающихся частиц, т. е.  $\Lambda_{ab} = \Lambda$ . Оценивая  $\partial f_b / \partial v$  по порядку величины как  $f_b / v$ , нетрудно видеть, что второе слагаемое  $(T_a / m_b v) \partial f_b / \partial v$  в круглых скобках мало по сравнению с первым слагаемым  $f_b$ , поскольку энергия быстрых ионов  $\frac{1}{2} m_b v^2$  велика по сравнению с температурой  $T_a$  полевых частиц. Отбрасывая это второе слагаемое, мы тем самым пренебрегаем диффузией быстрых ионов по энергии по сравнению с их торможением. Торможение при заданных условиях идёт быстрее, чем нарастает разброс ионов по энергии. В оставшемся слагаемом можно взять приближённые формулы из решения задачи 14.6 для производной  $dh_a / dv$  в пределе  $v \rightarrow 0$  для электронов и  $v \rightarrow \infty$  для ионов:

$$\frac{dh_e}{dv} \approx - \frac{4n_e v}{3\sqrt{\pi} v_{Te}^3}, \quad \frac{dh_i}{dv} \approx - \frac{n_i}{v^2}.$$

Последнее слагаемое в правой части кинетического уравнения, содержащее угловую часть лапласиана

$$\nabla_\perp^2 f_b = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f_b}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f_b}{\partial \psi^2},$$

отвечает за диффузию по углу. Второе слагаемое в лапласиане, содержащее дифференцирование по азимутальному углу  $\psi$  в пространстве скоростей, следует отбросить, так как функция распределения быстрых ионов не зависит от  $\psi$ , а в первом слагаемом достаточно оставить только вторую производную по  $\theta$ , предположив, что угловая ширина распределения быстрых ионов достаточно мала. Тогда

$$\nabla_{\perp}^2 f_b \approx \frac{\partial^2 f_b}{\partial \theta^2}.$$

При вычислении коэффициента  $dg_a/dv$  вновь можно использовать приближённые результаты задачи 14.6:

$$\frac{dg_e}{dv} \approx \frac{4n_e v}{3\sqrt{\pi} v_{Te}}, \quad \frac{dg_i}{dv} \approx n_i.$$

При этом выясняется, что вкладом электронов  $dg_e/dv$  можно пренебречь по сравнению с  $dg_i/dv$ , так как  $v \ll v_{Te}$ . Суммируя всё сказанное, получаем

$$\frac{df_b}{dt} = \frac{16\sqrt{\pi} e_b^2 e_e^2 n_e \Lambda}{3m_b m_e v_{Te}^3 v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ \left( v^3 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{n_i e_i^2 m_e}{n_e e_e^2 m_i} v_{Te}^3 \right) f_b \right] + \frac{2\pi e_b^2 e_i^2 n_i \Lambda}{m_b^2 v^3} \frac{\partial^2 f_b}{\partial \theta^2}.$$

Быстрые ионы, помеченные здесь индексом  $b$ , вообще говоря, не тождественны ионам плазмы, которые помечены индексом  $i$ .

**Задача 15.9.** Для определённости будем говорить об  $\alpha$ -частицах, которые возникают в реакции синтеза дейтерия с тритием. В термоядерном реакторе типа токамак  $\alpha$ -частицы рождаются с изотропным распределением и затем тормозятся на электронах и ионах плазмы, сохраняя изотропию. Записывая кинетическое уравнение, воспользуемся решением задачи 15.8, добавив в правую часть уравнения изотропный источник частиц и отбросив слагаемое, отвечающее за угловое рассеяние. Помечая индексом  $\alpha$  величины, относящиеся к  $\alpha$ -частицам, имеем

$$\frac{df_{\alpha}}{dt} = \frac{1}{\tau_{\alpha e} v^2} \frac{\partial}{\partial v} [(v^3 + v_c^3) f_{\alpha}] + \frac{\delta(v - v_{\alpha})}{4\pi v^2} S_{\alpha},$$

где

$$\frac{1}{\tau_{\alpha e}} = \frac{16\sqrt{\pi} e_{\alpha}^2 e_e^2 n_e \Lambda}{3m_{\alpha} m_e v_{Te}^3}, \quad v_c = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{n_i e_i^2 m_e}{n_e e_e^2 m_i} v_{Te}},$$

$v_{\alpha}$  — начальная скорость  $\alpha$ -частиц,  $S_{\alpha}$  — число  $\alpha$ -частиц, возникающих в единице объёма в единицу времени. В стационарном состоянии  $df_b/dt = 0$ . Приравнивая нуль первое слагаемое в правой части кинетического уравнения, находим, что

$$f_{\alpha} = \frac{A}{v^3 + v_c^3}.$$

Константы интегрирования  $\mathbb{A}$  различны при  $v > v_\alpha$  и  $v < v_\alpha$ . Так как  $\alpha$ -частицы тормозятся в плазме,  $\mathbb{A}$  следует приравнять нулю при  $v > v_\alpha$ . Учитывая это и интегрируя кинетическое уравнение по малому интервалу вблизи  $v = v_\alpha$ , находим, что  $\mathbb{A} = S_\alpha \tau_{\alpha e} / 4\pi$  при  $v < v_\alpha$ .

**Задача 15.10.** Популяция плашущихся ионов формируется при наклонной инъекции моноэнергетических нейтральных атомов с очень малым начальным угловым разбросом, последующей перезарядкой на ионах плазмы и торможением образовавшихся ионов на электронах плазмы, которое из-за большой энергии инжектированных частиц происходит значительно быстрее, чем торможение и рассеяние на ионах плазмы. Осциллируя между точками остановки вблизи магнитных пробок, где формируются пики плотности, быстрые ионы как будто плашутся между берегами озера, откуда и происходит их название — плашущиеся (sloshing) ионы.

Предполагая, что область магнитных пробок мала по сравнению с длиной однородной центральной секции пробкотрона (так что вкладом столкновений в области пробок можно пренебречь по сравнению с кулоновским рассеянием в центральной секции), помечая индексом  $b$  величины, относящиеся к плашущимся ионам, и используя решение задачи 15.8, запишем кинетическое уравнение для их функции распределения в следующем виде:

$$\frac{df_b}{dt} = \frac{1}{\tau_{be} v^2} \frac{\partial}{\partial v} [(v^3 + v_c^3) f_b] + \frac{v_b^3}{\tau_{bi} v^3} \frac{\partial^2 f_b}{\partial \theta^2} - \frac{f_b}{\tau_{cx}} + \frac{Q_b \delta(v - v_b)}{4\pi V W_b \sin \theta_b v^2} [\delta(\theta - \theta_b) + \delta(\theta + \theta_b - \pi)]. \quad (15.10.1)$$

Здесь слагаемое  $-f_b/\tau_{cx}$  в правой части описывает убыль плашущихся ионов вследствие перезарядки на примеси нейтральных атомов в плазме;  $v$  и  $\theta$  обозначают скорость и питч-угол (отсчитываемый от оси системы) плашущихся ионов в однородной части центральной секции пробкотрона;  $\theta_b$ ,  $Q_b$  и  $W_b$  — соответственно угол, мощность и энергия инъекции;  $V$  — объём плазмы,  $v_b = \sqrt{2W_b/M_b}$  — начальная скорость инжектированных атомов. Другие обозначения аналогичны использованным в задаче 15.9:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{be}} &= \frac{16\sqrt{\pi} e_b^2 e_e^2 n_e \Lambda}{3m_b m_e v_{Te}^3}, & \frac{1}{\tau_{bi}} &= \frac{2\pi e_b^2 e_i^2 n_i \Lambda}{m_b^2 v_b^3}, \\ v_c &= \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{n_i e_i^2 m_e}{n_e e_e^2 m_i} v_{Te}}, & v_{Te} &= \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}}. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в (15.10.1) имеет смысл источника быстрых ионов; эти ионы рождаются с заданным питч-углом  $\theta_b$ , однако вследствие отражения от

магнитных пробок можно считать, что половина ионов рождается под симметричным углом  $\pi - \theta_b$ , что описывается суммой дельта-функций  $\delta(\theta - \theta_b) + \delta(\theta + \theta_b - \pi)$ . Для краткости в уравнении (15.10.1) опущен индекс 0 у всех обозначений плотности сортов частиц, который должен был бы означать, что величину плотности следует относить к длинной однородной части пробкотрона; если длина припробочных областей сравнима с длиной системы, строгое решение кинетического уравнения должно включать усреднение, учитывающее истинный профиль магнитного поля. Мы также предполагаем, что плотность быстрых ионов не слишком велика,  $n_b \ll n_i$ , вследствие чего взаимными столкновениями быстрых ионов можно пренебречь.

В частном случае  $\tau_{cx} = \text{const}$  легко отыскать приближённое стационарное решение уравнения (15.10.1):

$$f_b(v, \theta) = \frac{Q_b \tau_{be} (v^3 + v_c^3)^{-1}}{4\pi^{3/2} V W_b \sin \theta_b \Delta \theta} \left( \frac{v^3 + v_c^3}{v_b^3 + v_c^3} \right)^{\tau_{bi}/3\tau_{cx}} \times \\ \times \left\{ \exp \left[ -\left( \frac{\theta - \theta_b}{\Delta \theta} \right)^2 \right] + \exp \left[ -\left( \frac{\theta + \theta_b - \pi}{\Delta \theta} \right)^2 \right] \right\}, \quad (15.10.2)$$

где  $v < v_b$ ,

$$\Delta \theta = \Delta \theta_0 \sqrt{\frac{v_b^3}{v_c^3} \ln \frac{1 + v_c^3/v^3}{1 + v_c^3/v_b^3}}, \quad \Delta \theta_0 = \sqrt{\frac{4\tau_{be}}{3\tau_{bi}}} = \sqrt{\frac{2m_i}{3m_b} \frac{v_c^3}{v_b^3}}.$$

Оно верно в области параметров, где  $\Delta \theta \ll 1$ . Найденное решение упрощается, если  $\tau_{cx} \gg \tau_{be}$  и перезарядными потерями плещущихся ионов можно пренебречь. Учитывая также, что торможение на ионах плазмы несущественно для ионов со скоростью  $v \gg v_c$ , и формально устремив  $v_c$  к нулю, получаем

$$f_b(v, \theta) = \frac{Q_b \tau_{be}}{4\pi^{3/2} V W_b v^3 \sin \theta_b \Delta \theta} \left\{ \exp \left[ -\left( \frac{\theta - \theta_b}{\Delta \theta} \right)^2 \right] + \exp \left[ -\left( \frac{\theta + \theta_b - \pi}{\Delta \theta} \right)^2 \right] \right\}, \quad (15.10.3)$$

где

$$\Delta \theta = \sqrt{\frac{4\tau_{be}}{3\tau_{bi}} \left( \frac{v_b^3}{v^3} - 1 \right)}.$$

**Задача 15.11.** Как показано в §6.4, в пробкотроне с пробочным отношением  $K$  области удержания соответствует интервал питч-углов  $\theta_{lc} < \theta < \pi - \theta_{lc}$ , где  $\theta_{lc} = \arcsin(1/\sqrt{K})$ . Вследствие кулоновских столкновений существует поток частиц из области удержания в конус потерь, что ограничивает время удержания (время жизни) частиц. Чтобы найти это время, рассмотрим модельную задачу. Будем считать, что потери частиц компенсирует изотропный источник  $S(v)$  с такой зависимостью от скорости  $v$ , что потоки частиц в пространстве скоростей, соответствующие изменению энергии, отсутствуют. Иными словами,

будем считать, что в интеграле столкновений остаются только производные по  $\theta$  и запишем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nu}{2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + S, \quad (15.11.1)$$

где  $\nu = \nu(v)$  имеет смысл частоты столкновений ионов с ионами; так как электроныдерживаются в пробкотроне амбиполярным электрическим полем, скорость потерь определяется ионами. Очевидно, что функция распределения при указанных предположениях должна быть пропорциональна максвелловской с коэффициентом пропорциональности, зависящим только от питч-угла:

$$f = \Theta(\theta) f_m(v).$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} q \nu f_m,$$

где  $q = \text{const}$ . Теперь задача сводится к отысканию функции  $\Theta(\theta)$  в области  $\theta_{lc} < \theta < \pi - \theta_{lc}$ , на границе которой  $f = 0$ . Такое граничное условие предполагает, что частица, попавшая в конус потерь, мгновенно уходит из системы, а поэтому функция распределения равна нулю в конусе потерь и на его границе. Решая уравнение (15.11.1) для стационарного состояния с  $\partial f / \partial t = 0$ , находим

$$\Theta(\theta) = q \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_{lc}}.$$

Из условия нормировки

$$n = \int f d^3v = 4\pi \int_0^\infty v^2 f_m(v) dv \times \frac{1}{4\pi} \int_{\theta_{lc}}^{\pi - \theta_{lc}} 2\pi \sin \theta \Theta(\theta) d\theta$$

находим константу

$$q = \frac{1}{\ln \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \theta_{lc}\right) - \cos \theta_{lc}}.$$

Поток частиц в конус потерь из единицы объёма вычисляем, умножив первое слагаемое справа в кинетическом уравнении (15.11.1) на  $d^3v = 2\pi \sin \theta d\theta v^2 dv$  и выполнив в явном виде интегрирование по  $\theta$ :

$$I = -2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2} \nu \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_{lc}}^{\pi-\theta_{lc}} v^2 dv.$$

Тот же поток равен интегралу от источников по всем скоростям:

$$I = \int S d^3v = \int_0^\infty \frac{1}{2} q \nu f_m v^2 dv \int_{\theta_{lc}}^{\pi - \theta_{lc}} 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Вводя обозначение

$$\langle v \rangle = \int v f_m d^3v \Bigg/ \int f_m d^3v,$$

получаем

$$I = \frac{1}{2} q \langle v \rangle \cos \theta_{lc}.$$

Время жизни определяется как частное от деления  $n$  на  $I$  и равно

$$\tau = 2 \left[ \ln \operatorname{ctg} \left( \frac{1}{2} \theta_{lc} \right) / \cos \theta_{lc} - 1 \right] \Bigg/ \langle v \rangle.$$

В пределе  $K \gg 1$  оно пропорционально логарифму пробочного отношения:

$$\tau \approx (\ln K + 2 \ln 2 - 2) / \langle v \rangle. \quad (15.11.2)$$

Эта зависимость впервые была установлена Г. И. Будкером [75]. Она нарушается при очень больших значениях  $K$ , когда время рассеяния  $\theta_{lc}^2 / \langle v \rangle$  на угол порядка  $\theta_{lc} \approx 1/\sqrt{K}$  формально становится меньше времени вылета из ловушки частицы, попавшей в конус потерь, — тогда нельзя считать, что функция распределения равна нулю в конусе потерь. Время вылета оценивается как  $L/c_s$ , где  $L$  — расстояние между пробками, а  $c_s$  — скорость звука (примерно равная тепловой скорости ионов). В случае  $L/c_s \gg \theta_{lc}^2 / \langle v \rangle$  время жизни плазмы определяется из решения гидродинамической задачи об истечении газа из сосуда с маленьким отверстием. Так как площадь сечения столба плазмы в магнитной пробке в  $K$  раз меньше её сечения в минимуме магнитного поля, время истечения плазмы в гидродинамическом режиме примерно равно  $KL/c_s$ . Это время сравнивается с (15.11.2) при  $KL/c_s \sim \ln K / \langle v \rangle$ . Таким образом, формула (15.11.2) верна, если

$$\lambda \gg LK / \ln K,$$

где  $\lambda = c_s / \langle v \rangle$  обозначает длину свободного пробега.

**Задача 15.12.** Предположим, что открытая ловушка имеет длинную центральную часть, где магнитное поле однородно, и сравнительно короткие магнитные пробки, где магнитное поле плавно нарастает от минимального значения  $B_{min}$  до максимального  $B_{max}$ . Тогда можно считать, что распределение ионов в плазме приближённо описывается функцией

$$f(v, \theta_0) = \frac{n_0}{(2\pi T/m)^{3/2}} \ln(\sin^2 \theta_0 / \sin^2 \theta_{lc}), \quad (15.12.1)$$

которая с точностью до нормировочного коэффициента  $n_0$  совпадает с функцией распределения, найденной в задаче 15.11. Предположение о длинной однородной части ловушки позволяет отождествить параметр  $\theta_0$  с питч-углом ионов в этой части ловушки, поскольку вкладом кулоновских столкновений

в области коротких магнитных пробок в формирование функции распределения тогда можно пренебречь. Вследствие сохранения магнитного момента питч-угол  $\theta$  в магнитном поле  $B$  связан с питч-углом  $\theta_0$  в однородном магнитном поле  $B_{\min}$  уравнением

$$\frac{\sin^2 \theta_0}{B_{\min}} = \frac{\sin^2 \theta}{B}. \quad (15.12.2)$$

С другой стороны, для угла  $\theta_{lc}$  раствора конуса потерь имеется уравнение

$$\frac{\sin^2 \theta_{lc}}{B_{\min}} = \frac{1}{B_{\max}}. \quad (15.12.3)$$

Следовательно, функцию распределения (15.12.1) можно переписать следующим образом:

$$f(v, \theta) = \frac{n_0}{(2\pi T/m)^{3/2}} \ln \left( \frac{\sin^2 \theta}{B} / \frac{1}{B_{\max}} \right), \quad (15.12.4)$$

выразив её через скорость  $v$  и питч-угол  $\theta$  иона в точке с произвольным значением магнитного поля  $B$ .

Переходя к вычислению плотности плазмы в точке с произвольным пропорциональным отношением  $R = B/B_{\max}$ , прежде всего учтём, что области удержания частиц в этой точке соответствует интервал питч-углов  $\arcsin(\sqrt{R}) < \theta < \pi - \arcsin(\sqrt{R})$ , поэтому

$$n = 4\pi \int_0^\infty dv v^2 \int_{\arcsin(\sqrt{R})}^{\pi/2} d\theta f(v, \theta). \quad (15.12.5)$$

Вычислив интеграл, получим

$$n = n_0 \left[ 2 \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - R}}{\sqrt{R}} \right) - 2\sqrt{1 - R} \right],$$

где параметр  $R$  изменяется в пределах от  $R_{\min} = B_{\min}/B_{\max}$  до  $R_{\max} = 1$ . Плотность монотонно убывает от максимального значения при  $R = R_{\min}$  до нуля при  $R = R_{\max}$ . Аналогичным образом можно найти распределение давления плазмы. Например, сумма продольного и поперечного давления выражается интегралом

$$p_{\parallel} + p_{\perp} = 4\pi \int_0^\infty dv v^2 \int_{\arcsin(\sqrt{R})}^{\pi/2} d\theta mv^2 \left( \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) f(v, \theta). \quad (15.12.6)$$

Именно эта сумма входит в критерий Розенблюта—Лонгмайра устойчивости желобковых колебания (см. §28.3). Вычислив интеграл, получим

$$p_{\parallel} + p_{\perp} = \frac{n_0 T}{3} \left[ 12 \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - R}}{\sqrt{R}} \right) - (13 - R)\sqrt{1 - R} \right].$$

Интересно, что графики  $n(R)$  и  $\frac{1}{2}(p_{\parallel}(R) + p_{\perp}(R))$  почти совпадают.

# Предметный указатель

## А

анион, 170  
ассоциация, 152

## Б

барн, 189  
барьер кулоновский, 188

## В

вектор, 5  
бинормали, 74  
кривизны, 73  
нормали, 74, 81  
вероятность излучения, 137  
вес  
атомный, 177  
статистический, 43  
ветер солнечный, 18, 20  
винт  
левый, 55  
правый, 55  
вода  
полутяжёлая, 186  
тяжёлая, 186  
возбуждение, 152  
вращение циклотронное, 53  
время свободного пробега, 103  
вырождение, 263  
энергетического уровня, 43

## Г

газ, 7

ионизованный, 17  
межзвездный, 18  
гидрид-ион, 171  
гидродинамика магнитная, 20

## Д

дезактивация, 152  
дейтерий, 179, 186  
дельта-функция, 224  
дефект массы, 178  
диагностика плазмы, 139  
диссоциация, 7, 152  
диэлектрическая  
проницаемость, 221  
длина  
волны де Бройля, 32  
волны электрона, 32, 44, 263  
дебаевская, 13  
свободного пробега, 103  
дрейф, 53  
гравитационный, 65  
градиентный, 69, 70, 78, 286  
инерционный, 75  
магнитный, 53  
поляризационный, 72, 77  
центробежный, 72, 78, 286  
электрический, 59, 77, 286  
дрейфовая оболочка, см.  
оболочка дрейфовая

- Ж**  
жидкость, 7
- З**  
задача  
    Будкера, 256  
    Коши, 222  
зажигание термоядерной  
    реакции, 194, 197
- закон  
    Больцмана, 26  
    Ньютона второй, 282  
    Ньютона третий, 117  
    Ома, 83  
сохранения  
    импульса, 40, 142, 244  
    энергии, 40, 142, 174, 244  
Стефана—Больцмана, 144,  
    145  
трёх вторых, 14  
Фарадея, 83
- затухание Ландау, 16, 226
- Земля, 89
- И**  
излучение, 130  
    магнитотормозное, 147  
    рекомбинационное, 140  
    синхротронное, 147  
Солнца, 172, 175  
спектральных линий, 19  
тормозное, 132, 135, 136, 200  
циклотронное, 147  
чёрного тела, 136, 146
- изотоп, 177
- импульс  
    обобщённый, 94, 210, 211, 291  
    Ферми, 264, 266
- инвариант адиабатический, 82  
второй, 92
- продольный, 95  
третий, 97
- интеграл столкновений, 231,  
    233
- БГК, 250, 256
- Ландау, 218, 234–242
- Розенблюта, 240, 242
- ион  
    быстрый, 256  
    многозарядный, 140  
    отрицательный, 170
- ионизация, 7, 8, 40, 152  
    прямая, 156  
    ступенчатая, 156, 159  
    электронным ударом, 153
- ионно-звуковая волна, см.  
    колебания  
    ионно-звуковые
- ионосфера, 18
- испарение, 7, 8
- К**  
квазинейтральность, 8, 12, 13
- кинетическое уравнение, см.  
    уравнение кинетическое
- колебания  
    ионно-звуковые, 16  
    ленгмюровские, 12, 16, 219,  
        222, 226, 229  
    потенциальные, 15
- константа  
    равновесия, 45, 161
- константа скорости  
    ионизации, 155, 156  
    из возбуждённого  
        состояния, 160  
    прямой, 160  
    ступенчатой, 159  
    ударной, 159

реакции, 190  
 рекомбинации  
     ступенчатой, 157, 158  
     тройной, 157, 158  
     фотоионизации, 168  
     фоторекомбинации, 167  
 континуум, 132  
 конус потерь, 91, 92  
 координата обобщённая, 210  
 корона солнечная, 18, 21, 169,  
     170  
 коэффициент усиления, 195  
 критерий  
     Лоусона, 196, 197  
     Розенблюта — Лонгмайра, 367

**Л**  
 ленгмюровская волна, см.  
     колебания  
     ленгмюровские  
 линия  
     магнитная силовая, 89  
     спектральная, 132  
 ловушка  
     адиабатическая, 89, 90  
     газодинамическая, 89  
     квадрупольная, 96  
     линейная, 89  
     открытая, 89  
 логарифм кулоновский, 108  
 лучи  
     катодные, 7  
     космические, 21

**М**  
 магнитная гидродинамика, см.  
     гидродинамика  
     магнитная  
 магнитная пробка, см. пробка  
     магнитная

магнитное поле, см. поле  
 магнитное  
 магнитное удержание плазмы,  
     23  
 магнитосфера, 20  
 масса приведённая, 115  
 МГД, 21  
 механизм ускорения Ферми,  
     100  
 модель атома планетарная, 49  
 момент магнитный, 82  
 мощность  
     спектральная, 136  
     удельная, 134, 192, 332

**Н**  
 нейтрон, 177  
 нуклон, 177

**О**  
 обобщённая координата, см.  
     координата обобщённая  
     обобщённый импульс, см.  
         импульс обобщённый  
         оболочка дрейфовая, 94, 95  
         окружность лармировская, 82

**П**  
 параметр  
     газовый, 30  
     Зоммерфельда, 135  
     плазменный, 30  
     прицельный, 103  
 перезарядка, 152, 162  
     резонансная, 162, 163  
 переход излучательный, 131  
 питч-угол, 91  
 плавление, 7, 8  
 плазма, 8–10, 12  
     вырожденная, 33, 263

- высокотемпературная, 17  
заряженная, 10, 112, 261, 296  
идеальная, 31  
квазинейтральная, 112  
лоренцева, 9, 27, 250  
неидеальная, 31  
низкотемпературная, 17  
полностью ионизованная, 9  
простая, 9, 27  
слабоионизованная, 9, 130  
плотность, 18  
быстрых ионов, 256  
в центре Солнца, 192, 332  
зарядов, 217  
массовая, 332  
нейтральных атомов, 8  
плазмы, 198  
потока частиц, 213  
твёрдого тела, 192  
тока, 217  
углеводородов, 329  
частиц, 213, 336  
ядер, 333  
поглощение тормозное, 132, 142  
поле  
Драйсера, 121  
самосогласованное, 8, 9, 218,  
247  
поле магнитное  
вакуумное, 78  
Земли, 89  
потенциальное, 78  
полюс, 89  
поправка корреляционная, 29  
постоянная  
Больцмана, 13  
Планка, 31  
тонкой структуры, 50, 153, 326  
постулат Бора, 49  
потенциал  
амбиполярный, 92  
дебаевский, 28  
термодинамический, 40  
потенциалы  
Клебша, 280  
Розенблюта, 239, 242, 354  
пояс радиационный, 19  
правило  
буравчика, 55  
обхода Ландау, 223, 224  
приближение  
борновское, 135  
далёких пролётов, 110, 153  
квазиклассическое, 135  
приведённая масса, см. масса  
приведённая  
прилипание, 152  
принцип  
детального равновесия, 41,  
161, 168  
неопределённости, 31  
Паули, 263  
пробка магнитная, 89, 90  
пробкотрон, 89, 93  
Будкера—Поста, 89, 90  
пробочное отношение, 91  
произведение  
векторное, 6  
прямое, 6  
скалярное, 6  
тройное, 196, 198  
просвист, 120  
пространство  
конфигурационное, 211  
фазовое, 210  
протий, 178, 186  
протон, 177  
процессы

- атомные, 153
- радиационные, 153
- элементарные, 152
  
- Р**
- равновесие
  - корональное, 169
  - термодинамическое, 40
- радиус
  - боровский, 50
  - дебаевский, 13
  - кулоновский, 105
  - ларморовский, 56
- разряд
  - газовый, 18
  - тлеющий, 18, 19
- распределение
  - Больцмана, 33
  - Ферми–Дираха, 33, 264
- рассеяние, 101
  - кулоновское, 101, 105
- реакции
  - анейтронные, 186
  - безнейтронные, 186
  - деления ядер, 178
  - термоядерные, 178
  - экзотермические, 178
  - эндотермические, 178
  - ядерного синтеза, 178
- рекомбинация, 40, 152, 156
  - тройная, 157
- релаксация, 125
  
- С**
- серия Бальмера, 49
- сечение
  - возбуждения, 160
  - дрейфовой оболочки, 97
  - ионизации, 154, 155
  - ударной, 159
- Ланжевена, 299
- отрыва, 173
- перезарядки, 162
- процесса, 102, 103
- рассеяния, 104, 116
  - дифференциальное, 105
- реакции, 189
- резонансной перезарядки, 163
- рекомбинационного излучения, 167
- тормозного излучения, 138
- транспортное, 107, 117
- фотоотрыва, 175
- фоторекомбинации, 140
- ядерного синтеза, 190
- ядерных реакций, 189
- сила
  - действующая
    - на единицу объёма, 117
    - на приведённую частицу, 116
    - на пробную частицу, 124
    - на рассеивающий центр, 116
  - динамическая, 233
  - инерции, 72, 75
  - Кориолиса, 282
  - кулоновского отталкивания, 188
  - Лоренца, 53, 83, 88, 89
  - торможения, 119, 120
  - трения, 120
  - ускоряющая, 120
  - центрробежная, 73, 75
  - Эйлера, 282
  - ядерная, 178
  - синтез термоядерный
    - инерциальный, 192

- магнитный, 192  
управляемый, 201  
система  
единиц, 6  
отсчёта сопутствующая, 72  
уравнений, см. уравнения  
сияние полярное, 20  
скорость  
движения ведущего центра, 77  
дрейфа, 71  
градиентного, 71  
поляризационного, 72, 75  
центробежного, 72  
слой  
дебаевский, 14, 26, 38  
ленгмюровский, 14, 38  
солнечная корона, см. корона  
солнечная  
солнечный ветер, см. ветер  
солнечный  
Солнце, 20, 21, 37, 39, 48, 51, 145, 166, 170, 172, 175  
соотношение  
неопределённостей, 31  
спектр  
дискретный, 41  
излучения, 130, 146  
линейчатый, 130, 132, 146  
непрерывный, 42, 130, 132, 146  
полосатый, 132  
спин, 43, 263  
статистика  
Бозе—Эйнштейна, 34  
Больцмана, 272  
Ферми, 34  
степень ионизации, 45, 130  
столкновения  
кулоновские, 101  
неупругие, 101  
упругие, 101  
сумма статистическая, 41  
суммирование по  
повторяющимся  
индексам, 6
- Т**  
твёрдое состояние вещества, 7  
тело абсолютно чёрное, 145  
температура, 8, 13, 16, 18  
тензор  
диффузии, 233  
единичный второго ранга, 236  
инвариантный, 236  
квадрупольного момента, 319  
Леви-Чивиты, 289  
метрический, 281  
электромагнитного поля, 274  
теорема  
Н-теорема, 245  
Лиувилля, 214  
об адиабатических  
инвариантах, 83  
Остроградского—Гаусса, 244, 350, 351, 359  
Стокса, 84, 288  
термоизоляция плазмы, 52  
термоядерный реактор, 192  
токамак, 201  
ITER, 22, 201, 202, 205, 335  
JET, 202  
JT-60, 202  
T-3, 202  
точка остановки, 91  
траектория  
дрейфовая, 93, 96

фазовая, 213  
 трансмутация ядер, 182  
 тритий, 179, 186  
 туманность  
   газовая, 18  
   Крабовидная, 21  
 тушение, 152

**У**

угол конуса потерь, 92  
 уравнение  
   Власова, 218, 226  
   дисперсионное, 221  
   кинетическое, 216  
   Лиувилля, 215  
   Пуассона, 13  
   Сахá, 45, 48, 152, 161  
   Фоккера—Планка, 233, 239  
   химическое, 132  
 уравнения  
   Максвелла, 217  
 уровень энергии, 131  
 УТС, 22, 201  
   инерциальный, 23, 203  
 уширение спектральных линий  
   доплеровское, 147  
   ударное, 146

**Φ**

фермион, 32  
 формула  
   Альфвен, 88  
   Будкера, 79  
   Крамерса, 141, 142, 308, 310,  
     312  
   Лармора, 133  
   практическая, 16  
   Резерфорда, 105, 154, 235, 237  
   Стирлинга, 294  
   Томсона, 154, 160

Френе—Серра, 283  
 фотозахват, 140  
 фотоионизация, 132, 168  
 фоторекомбинация, 132, 140,  
     166  
 фотосфера, 175, 176  
 фотоэффект, 168  
 функция  
   Гамильтона, 215  
 распределения, 210  
   максвелловская, 119, 225

**Ц**

центр  
   ведущий, 57  
   кулоновский, 103  
   ларморовский, 57  
 центр ведущий, 82, 89  
 центр кулоновский, 115  
 циклотронное вращение, 56

**Ч**

частица  
   полевая, 117  
   приведённая, 115  
   пробная, 117  
 частота  
   ленгмюровская, 16, 225  
   столкновений, 103  
   циклотронная, 54  
 четвёртое состояние вещества, 7  
 число зарядовое, 140

**Ш**

ширина спектральных линий,  
     145

**Э**

экранирование  
   дебаевское, 26

- электростатическое, 26
- элемент контура интегрирования, 5
- объёма, 5
- энергия Гамова, 189
- ионизации, 42
- связи ядра, 178, 179
- Ферми, 32, 33, 38
- энтропия, 245, 247
- эффект КЛР, 67

# Именной указатель

## А

Альварес, 183  
Альфвен, 20, 64, 71,  
    88, 97  
Аракчеев, 6  
Арцимович, 79, 98,  
    112, 149, 180,  
    198, 202, 207  
Астон, 184

## Б

Басов, 207  
Батнагар, 250  
Беклемишев, 6  
Бельченко, 6  
Берестецкий, 150,  
    176

Бете, 184

Бозе, 34

Больцман, 13, 26,  
    33, 38, 144,  
    145, 245, 272

Бор, 50

Брейzman, 6

Будкер, 79, 88, 109

Бурдаков, 6

## В

Вайнберг, 4  
Ван Аллен, 19  
Вейцзеккер, 184

## Векштейн, 6

Велихов, 207  
Вернов, 19  
Виттенберг, 207  
Власов, 218, 219,  
    221, 222  
Волосов, 6

## Г

Гамильтон, 215  
Гамов, 189  
Гейзенберг, 31  
Гибсон, 98  
Гинзбург, 181, 218  
Головин, 201  
Гросс, 250

## Д

Де Бройль, 32, 50  
Дебай, 13, 23, 26  
Джексон, 79  
Дирак, 224  
Дитмер, 16, 219

## Е

Елецкий, 164

## З

Зельдович, 149,  
    165  
Зоммерфельд, 135,  
    150

## И

Иванов, 6  
Кадомцев, 23, 219,  
    228

Катков, 150, 176

Клаузиус, 103

Клебш, 280

Ковальский, 150

Коган, 109, 150,  
    165, 176

Кокрофт, 182

Колумб, 12

Кориолис, 282

Корног, 183

Котельников, 6, 98,  
    150, 176

Коши, 222

Крамерс, 141, 142,  
    308, 310, 312

Крук, 250

Крукс, 7

Кузьменков, 222

## Л

Ландау, 16, 38, 48,  
    150, 218, 222,  
    223, 226, 240,  
    244, 249  
Ланжевен, 299

Лармор, 133  
 Лауэр, 98  
 Лебедев, 6  
 Лебо, 207  
 Ленгмюр, 8, 10, 12,  
     14, 16, 17, 23,  
     108, 219, 226  
 Леонович, 218  
 Либерман, 112  
 Лирак, 33  
 Лисица, 150, 165,  
     176  
 Лиувилль, 214, 215  
 Лифшиц, 38, 48,  
     112, 150, 176,  
     228, 241  
 Лихтенберг, 112  
 Лонгмайр, 367  
 Лоренц, 53, 83  
 Лотов, 6  
 Лоусон, 197  
 Лукьянов, 98, 150  
 Лэмб, 223

**М**

Менделеев, 177  
 Мильштейн, 6, 150,  
     176  
 Моро, 207  
 Морозов, 67, 79  
 Мотт-Смит, 10, 12,  
     16

**Н**

Нортроп, 79, 98

**О**

Олифант, 183

**П**  
 Пеннинг, 16, 23,  
     219  
 Питаевский, 112,  
     150, 176, 228,  
     241  
 Планк, 31, 234  
 Пост, 89, 98  
 Приходько, 6  
 Пуассон, 13  
 Пуркине, 10

**Р**  
 Райзер, 112, 149,  
     150, 165  
 Резерфорд, 105,  
     154, 182, 183  
 Рентген, 135  
 Риман, 142  
 Родионов, 98  
 Розанов, 207  
 Розенблют, 239,  
     240, 252, 254,  
     255, 367  
 Рэлей, 16  
 Рютов, 2, 6, 98, 295

**С**

Сагдеев, 79, 98, 112,  
     149  
 Санин, 6  
 Саха, 45, 47, 48, 152,  
     161  
 Сахаров, 180, 181,  
     201  
 Сепп, 283  
 Сивухин, 67, 79,  
     128, 241  
 Синицкий, 6

Смирнов, 164, 165,  
     176, 207  
 Соловьев, 79  
 Спицер, 249  
 Стефан, 144, 145  
 Стирлинг, 294  
 Стокс, 84  
 Страховенко, 150,  
     176  
 Ступаков, 4, 6, 98,  
     295

**Т**

Тамм, 180, 201  
 Теллер, 181  
 Тесла, 135  
 Тимофеев, 6  
 Томсон, 7, 154, 160  
 Тонкс, 10, 12, 16, 17,  
     219  
 Трубников, 67, 128,  
     150, 241

**У**

Уолтон, 182  
 Урей, 182

**Ф**

Фельтхаммар, 97  
 Ферми, 32, 33  
 Фок, 218  
 Фоккер, 234  
 Франк-Каменецкий,  
     8, 38, 48, 67,  
     79, 228, 241  
 Френе, 283  
 Фурье, 220

**Х**

Хартек, 183

Хинтон, 241, 255  
Хюккель, 13, 26

**Ц**  
Цидулко, 6  
**Ч**  
Чайлд, 14  
Чашин, 6

Чедвик, 182  
Чен, 228  
Черноштанов, 6  
Чириков, 98  
**Ш**  
Шафранов, 207  
Шкуринов, 6

Шоттки, 12, 23  
Штоббе, 150  
**Э**  
Эддингтон, 184  
Эйлер, 282  
Эйнштейн, 34  
Эплтон, 19

# Список литературы

- [1] Котельников И. А. Лекции по физике плазмы. 2-е изд. М. : Бином — Лаборатория знаний, 2013. 372 с. ISBN: [978-5-9963-1158-3](#).
- [2] Котельников И. А. и Ступаков Г. В. Лекции по физике плазмы. Новосибирск : НГУ, 1996. 127 с.
- [3] Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М. : Физматлит, 1961. 467 с.
- [4] Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. 3-е изд. М. : Интеллект, 2008. 280 с. ISBN: [978-5-91559-002-0](#).
- [5] Кролл Н. и Трайвелпис А. Основы физики плазмы / под ред. Дыхне А. М. М. : Мир, 1975. 527 с. ISBN: [978-5-7262-0877-0](#).
- [6] Лукьянин С. Ю. Горячая плазма и управляемый ядерный синтез. М. : Наука, 1975. 397 с.
- [7] Арцимович Л. А. и Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. М. : Ленанд, 2018. 320 с. ISBN: [978-5-9710-5018-6](#).
- [8] Зельдович Я. Б. и Райзера Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. 2-е, доп. изд. М. : Наука, 1966. 686 с.
- [9] Райзера Ю. П. Физика газового разряда. Долгопрудный : Интеллект, 2009. 736 с. ISBN: [978-5-91559-019-8](#).
- [10] Чен Ф. Введение в физику плазмы. М. : Мир, 1987. 398 с. ISBN: [978-5-458-37276-3](#).
- [11] Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. 2-е изд. М. : Наука, 1988. 303 с. ISBN: [5-02-014199-0](#).
- [12] Александров А. Ф., Богданович Л. С. и Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы / под ред. Рухадзе проф. А. А. 2-е, перераб. изд. М. : Высшая школа, 1988. 421 с. ISBN: [978-5-060-01404-4](#).
- [13] Goldston Robert J. and Rutherford Paul H. Introduction to Plasma Physics. Bristol : IOP Publishing Ltd., 1995. 493 p. ISBN: [0-7503-0325-5](#).
- [14] Трубников Б. А. Теория плазмы. М. : Энергоатомиздат, 1996. 461 с. ISBN: [5-7807-0154-7](#).

- [15] Лукьянов С. Ю. и Ковальский Н. Г. Горячая плазма и управляемый ядерный синтез. М. : МИФИ, 1997. 430 с. ISBN: 5-7262-0234-1.
- [16] Александров А. Ф. и Рухадзе А. А. Лекции по электродинамике плазмоподобных сред. М. : Изд-во МГУ, 1999. 336 с. ISBN: 5-8279-0004-4.
- [17] Freidberg J. P. Ideal Magnetohydrodynamics. NY ; L : Plenum Press, 1987. 489 p. ISBN: 9780306425127.
- [18] Freidberg J. P. Plasma Physics and Fusion Energy. Cambridge University Press, 2007. 671 p. ISBN: 9780521851077.
- [19] Миямото К. Основы физики плазмы и управляемого синтеза: Перевод с англ. / под ред. Шафранова В. Д. М. : Физматлит, 2007. 407 с. ISBN: 978-5-9221-0838-6.
- [20] Рожанский В. А. Теория плазмы. СПб. : Лань, 2012. 320 с. ISBN: 978-5-8114-1233-4.
- [21] Fusion Physics / ed. by Kikuchi Mitsuru, Lackner Karl, and Tran Minh Quang. Vienna : International Atomic Energy Agency, 2012. 1158 p. ISBN: 978-1-849-96410-4.
- [22] Вайнберг С. Гравитация и космология / под ред. Смородинского Я. А. М. : Мир, 1975. 697 с. ISBN: 978-5-397-03648-1.
- [23] Crookes William. On radiant matter: a lecture delivered to the British Association for the Advancement of Science, at Sheffield, Friday, August 22, 1879. Philadelphia: James W. Queen & Co., 1879.
- [24] Франк-Каменецкий Д. А. Плазма — четвертое состояние вещества. М. : Госатомиздат, 1961. 132 с.
- [25] Вейсман А. Д. Греческо-русский словарь, Репринт 5-го издания 1899 г. М. : Греко-латинский кабинет Ю. А. Шичалина, 1991. 1370 с. ISBN: 5-01-003637-1.
- [26] Langmuir Irving. Oscillations in Ionized Gases // National Academy of Sciences of the United States of America. 1928. Vol. 14. P. 627–637.
- [27] Tonks L. The birth of “plasma” // American Journal of Physics. 1967. Vol. 35. P. 857–858.
- [28] Браун С. Краткая история газовой электроники // Успехи физических наук. 1981. Т. 133, № 4. С. 693–706. Режим доступа: <https://ufn.ru/ru/articles/1981/4/d/>.
- [29] Mott-Smith Harold M. History of “Plasmas” // Nature. 1971. Vol. 233. P. 219. Access mode: <https://www.nature.com/articles/233219a0>.
- [30] Tonks L. and Langmuir I. Oscillations in Ionized Gases // Phys. Rev. 1929. Vol. 33. P. 195–211. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.33.195>.

- [31] Schottky W. Diffusionstheorie der positiven Säule // Phys. Zeits. 1924. Vol. 25, no. 23. P. 635.
- [32] Tonks L. and Langmuir I. A General Theory of the Plasma on an Arc. // Phys. Rev. 1929. Vol. 34. P. 876–922. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.34.876>.
- [33] Debye P. und Hückel E. Zur Theorie der Elektrolyte. I. Gefrierpunktserniedrigung und verwandte Erscheinungen // Physikalische Zeitschrift. 1923. nu. 9. S. 185–206.
- [34] Child C. D. Discharge from Hot CaO // Phys. Rev. (Ser. I). 1911. Vol. 32, no. 5. P. 492–511.
- [35] Langmuir I. The Effect of Space Charge and Residual Gases on Thermionic Currents in High Vacuum // Phys. Rev. 1913. Vol. 2. P. 450–486. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.2.450>.
- [36] Strutt J. W. Lord Rayleigh. VII. On electrical vibrations and the constitution of the atom // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1906. Vol. 11, no. 61. P. 117–123. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1080/14786440609463428>.
- [37] Dittmer Arthur F. Experiments on the Scattering of Electrons by Ionized Mercury Vapor // Phys. Rev. 1926. Vol. 28. P. 507–520. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.28.507>.
- [38] Penning F. M. Scattering of electrons in ionized gases // Nature. 1926. Vol. 118. P. 301–312. Access mode: <https://www.nature.com/articles/118301a0>.
- [39] Penning F. M. Abnormale electronensnelheden en Trilligen van Zeer Hooge Frequentie in Ontladingsbuizen // Physica. 1926. Vol. 6. P. 241–248.
- [40] Власов А. А. Теория вибрационных свойств электронного газа и её приложения // Учёные записки. 1945. № 75, книга 2, часть 1. С. 3–196. Режим доступа: <https://books.google.ru/books?id=1287MwAACAAJ>.
- [41] Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 574–586.
- [42] Landau L. On the vbltations of the electronic plasma // Journal of physics. 1946. Т. 10, № 1. С. 25–34.
- [43] Huba Jn. D. NRL Plasma Formulary. Washington : Naval Research Laboratory, 2016. 71 p. Access mode: <https://www.nrl.navy.mil/ppd/content/nrl-plasma-formulary> (online; accessed: 2019-08-22).

- [44] Рябов В. А., Царев В. А. и Цховребов А. М. Поиски частиц тёмной материи // *Успехи физических наук*. 2008. Т. 178, № 11. С. 1129–1164.
- [45] Appleton Edward V. and Barnett Miles A. F. Local reflection of wireless waves from the upper atmosphere // *Nature*. 1925. Vol. 115. P. 333–334. Access mode: <https://www.nature.com/articles/115333a0>.
- [46] Ван Аллен Дж. А. О радиационной опасности при космических полётах // *Успехи физических наук*. 1960. Т. 70, № 4. С. 715–724. Режим доступа: <https://ufn.ru/ru/articles/1960/4/f/>.
- [47] Чудаков А. Е. и Вернов С. Н. Исследования космических лучей и земного корпускулярного излучения при полётах ракет и спутников // *Успехи физических наук*. 1960. Т. 70, № 4. С. 585–619. Режим доступа: <https://ufn.ru/ru/articles/1960/4/b/>.
- [48] Alfven H. On the motion of a charged particle in a magnetic field // *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*. 1940. Vol. 27A, no. 22. P. 1–20.
- [49] Альфвен Х. Космическая электродинамика. М. : Изд-во иностр. лит., 1952. 290 с.
- [50] Alfven H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves // *Nature*. 1942. Vol. 150. P. 405–406.
- [51] Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / под ред. Леонтовича М. А. М. : Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1–4.
- [52] Бишоп А. С. Проект Шервуд: Пер. с англ. М. : Госатомиздат, 1960. 176 с.
- [53] Котельников И. А. Генезис Плазмы, или история одного слова // Вестник НГУ, серия Физика. 2008. Т. 4, № 2. С. 108–117. Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11131078>.
- [54] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособие в 10 т. 3-е изд. М. : Наука, 1976. Т. V. Статистическая физика, часть 1. 584 с.
- [55] Лифшиц Е. М. и Питаевский Л. П. Теоретическая физика : учеб. пособие в 10 т. М. : Наука, 1979. Т. X. Физическая кинетика. 528 с.
- [56] Heisenberg W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik // *Zeitschrift für Physik*. 1927. Vol. 43. P. 172–198.
- [57] Planck M. Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum // *Verhandl. Deutsch. Phys. Ges.* 1900. Bd. 2. S. 237–245.
- [58] Planck Max. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum // *Ann. Phys.* 1901. Bd. 309, nu. 3. S. 553–563.

- [59] de Broglie L. Recherches sur la théorie des quanta : thèse de doctorat ; Paris. 1924.
- [60] Fermi Enrico. Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico // Rend. Lincei. 1926. Vol. 3. P. 145–149.
- [61] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М. и Питаевский Л. П. Теоретическая физика : учеб. пособие в 10 т. 3-е изд. М. : Наука, 1989. Т. IV. Квантовая электродинамика. 720 с. ISBN: 5-02-014422-3.
- [62] Saha M. N. Ionization in the solar chromosphere // Phil. Mag. 1920. Vol. 40. P. 472–478.
- [63] Bohr N. On the Constitution of Atoms and Molecules // Phil. Mag. 1913. Vol. 26. P. 1–25.
- [64] Lorentz H. A. La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants // Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles. 1892. Vol. 25. P. 363–552.
- [65] Lorentz H. A. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light // Proceedings of the Academy of Sciences of Amsterdam. 1904. Vol. 6. P. 809–831.
- [66] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособие в 10 т. 7-е изд. М. : Наука, 1988. Т. II. Теория поля. 512 с. ISBN: 5-02-014420-7.
- [67] Сивухин Д. В. Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях // Вопросы теории плазмы / под ред. Леонтovichа М. А. М. : Атомиздат, 1963. Т. 1. С. 7–97.
- [68] Морозов А. И. и Соловьев Л. С. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях // Вопросы теории плазмы / под ред. Леонтovichа М. А. М. : Атомиздат, 1963. Т. 2. С. 177–261.
- [69] Будкер Г. И. Вопросы, связанные с дрейфом частиц в тороидальном термоядерном реакторе // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / под ред. Леонтovichа М. А. М. : Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 66–76. Работа выполнена в 1951 г.
- [70] Jackson J. D. Classical Electrodynamics. 3rd ed. University of California, Berkeley, John Wiley & Sons, Inc., 1999. 832 p. ISBN: 978-0-471-30932-1.
- [71] Нортроп Т. Адиабатическая теория движения заряженных частиц / под ред. Семашко Н. Н. пер. с англ. изд. М. : Атомиздат, 1967. 127 с.
- [72] Faraday Michael. Experimental Researches in Electricity // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1832. Vol. 122. P. 125–162. Access mode: <http://rstl>.

- [royalsocietypublishing.org/content/122/125.full.pdf](http://royalsocietypublishing.org/content/122/125.full.pdf) (online; accessed: 07.10.2013).
- [73] Ohm G. S. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. Berlin : T. H. Riemann, 1827. 249 p.
  - [74] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособие в 10 т. 4-е изд. М. : Наука, 1988. Т. I. Механика. 215 с. ISBN: 978-5-9221-1508-7.
  - [75] Будкер Г. И. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М. : Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3. С. 3–31. Работа выполнена в 1954 г.
  - [76] Post R. F. Summary of UCRL Pyrotron (Mirror Machine) program // Proc. of Second U.N. Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy (1-13 September, 1958) / United Nations. Geneva. 1958. Vol. 32. P. 245–265.
  - [77] Summary of UCRL Pyrotron (Mirror Machine) program : Technical Report : A/CONF.15/P/377 / California. Univ., Livermore. Radiation Lab. ; executor: Post R. F. Livermore : 1959. 39 p.
  - [78] Мирнов В. В. и Рютов Д. Д. Газодинамическая линейная ловушка для удержания плазмы // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 5, № 11. С. 678–682.
  - [79] Alfvén H. and Fälthammar C.-G. Cosmical Electrodynamics: Fundamental Principles. Oxford : Clarendon Press, 1963. 228 p.
  - [80] Альфвен Х. и Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика: Основные принципы. 2-е изд. М. : Мир, 1967. 260 с.
  - [81] Рютов Д. Д. и Ступаков Г. В. Процессы переноса в аксиально-несимметричных открытых ловушках // Вопросы теории плазмы / под ред. Кадомцева Б. Б. М. : Энергоатомиздат, 1983. Т. 13. С. 74–159.
  - [82] Чириков Б. В. Динамика частиц в магнитных ловушках // Вопросы теории плазмы / под ред. Кадомцева Б. Б. М. : Энергоатомиздат, 1984. Т. 13. С. 3–73.
  - [83] Kotelnikov I. A. Breakdown of the adiabatic invariant of charged particles in long open system for plasma // Proc. Int. Conf. Open Plasma Confinement Systems for Fusion (Novosibirsk, 1993) / ed. by Kabantsev A. A. Singapore : IAEA, World Scientific. 1993. P. 545–550.
  - [84] Родионов С. Н. Экспериментальная проверка поведения заряжен-

- ных частиц в адиабатической ловушке // Атомная энергия. 1959. Т. 6. С. 623–629.
- [85] Gibson Gordon, Jordan Willard C., and Lauer Eugene J. Containment of Positrons in a Mirror Machine // *Phys. Rev. Lett.* 1960. Vol. 5, no. 4. P. 141–144.
- [86] Рюотов Д. Д. Открытые ловушки // *Успехи физических наук*. 1988. Т. 154, № 4. С. 565–614. Режим доступа: <https://ufn.ru/ru/articles/1988/4/b/>.
- [87] Post R. F. The magnetic mirror approach to fusion // Nuclear Fusion. 1987. Vol. 27, no. 10. P. 1579. Access mode: <http://stacks.iop.org/0029-5515/27/i=10/a=001>.
- [88] Clausius R. Über die mittlere Länge der Wege, welche bei Molekularbewegung gasförmigen Körper von den einzelnen Molekülen zurück gelegt werden, nebst einigen anderen Bemerkungen über die mechanischen Wärmetheorie // Annalen der Physik. 1858. Bd. 105. S. 239–258.
- [89] Rutherford E. The Scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  Particles by Matter and the Structure of the Atom // Philosophical Magazine. 1911. Vol. 21. P. 669–688.
- [90] Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / под ред. Леоновича М. А. М. : Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. 300 с.
- [91] Lieberman Michael A. and Lichtenberg Allan J. Principles of Plasma Discharges and Materials Processing. Wiley-Interscience, 1994. 572 p. ISBN: 978-0-471-00577-3.
- [92] Dreicer H. Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas. I // *Phys. Rev.* 1959. Vol. 115, no. 2. P. 238–249.
- [93] Dreicer H. Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas. II // *Phys. Rev.* 1960. Vol. 117, no. 2. P. 329–342.
- [94] Трубников Б. А. Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме // Вопросы теории плазмы / под ред. Леоновича М. А. М. : Атомиздат, 1963. Т. 1. С. 98–182.
- [95] Сивухин Д. В. Кулоновские столкновения в полностью ионизованной плазме // Вопросы теории плазмы / под ред. Леоновича М. А. М. : Атомиздат, 1964. Т. 4. С. 81–187.
- [96] Larmor J. On a dynamical theory of the electric and luminiferous medium. Part 3. Relations with material media // Philosophical Transactions of the Royal Society. 1897. Vol. 190. P. 205–300.
- [97] Röntgen W. C. On a new kind of rays // *Nature*. 1896. Vol. 53. P. 274–276.

- [98] Kramers H. A. XCIII. On the Theory of X-Ray Absorption and of the Continuum X-Ray Spectrum // *Philosophical Magazine*. 1923. Vol. 46. P. 836–871.
- [99] Kotelnikov I. A. and Milstein A. I. Electron radiative recombination with a hydrogen-like ion // *Physica Scripta*. 2019. Vol. 94, no. 5. P. 055403. Access mode: <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab060a>.
- [100] Элементарные процессы в высокотемпературной плазме : Препр. ИЯФ СО АН СССР : 80-110 / Институт ядерной физики ; исполн.: Жданов В. П. Новосибирск : 1980.
- [101] Stefan J. Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur // Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien, 1879. Bd. 79. S. 391–428.
- [102] Boltzmann L. Ableitung des Stefan'schen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der elektromagnetischen Lichttheorie // Annalen der Physik und Chemie. 1884. Vol. 22. P. 291–294.
- [103] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособие в 10 т. 5-е изд. М. : Наука, 202. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). 808 с. ISBN: 5-9221-0057-2.
- [104] Лисица В. С. и Коган В. И. Атомные процессы в плазме // Итоги науки и техники. Физика плазмы / под ред. Кадомцева Б. Б. ВИНИТИ, 1982. Т. 3. С. 5–56.
- [105] Коган В. И. и Лисица В. С. Радиационные процессы в плазме // Итоги науки и техники. Физика плазмы / под ред. Кадомцева Б. Б. ВИНИТИ, 1983. Т. 4. С. 194–273.
- [106] Sommerfeld A. Über die beugung und bremsung der elektronen // *Annalen der Physik*. 1931. Bd. 403, nu. 3. S. 257–330. online; abgerufen: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19314030302>.
- [107] Stobbe M. Zur Quantenmechanik photoelektrischer Prozesse // *Annalen der physik*. 1930. Vol. 399, no. 6. P. 661–715. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19303990604>.
- [108] Катков В. М. и Страховенко В. М. Процесс радиационной рекомбинации и его использование в опытах при электронном охлаждении // ЖЭТФ. 1978. Т. 75, № 4. С. 1269.
- [109] Milstein A. I. Radiative electron-ion recombination // *Physics Letters A*. 1989. Vol. 136, no. 1. P. 52–54. Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960189906750>.

- [110] Мильштейн А. И. Полное сечение радиационной электрон-ионной рекомбинации // ЖЭТФ. 1990. Т. 97, № 6. С. 741–1748.
- [111] Трубников Б. А. Универсальный коэффициент выхода циклотронного излучения из плазменных конфигураций // Вопросы теории плазмы / под ред. Леоновича М. А. М. : Атомиздат, 1973. Т. 7. С. 274–300.
- [112] Thomson Sir J. J. XLII. Ionization by moving electrified particles // *Philosophical Magazine Series 6*. 1912. Vol. 23, no. 136. P. 449–457. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1080/14786440408637241>.
- [113] ALADDIN // Atomic and Molecular Molecular Data. Vienna, Austria : IAEA. Access mode: <http://www-amdis.iaea.org/ALADDIN/> (online; accessed: 2012-01-16).
- [114] Елецкий А. В. и Смирнов Б. М. Элементарные процессы в плазме // Основы физики плазмы / под ред. Галеева А. А. и Судана Р. М. : Энергоатомиздат, 1983. Т. 1. С. 58–81.
- [115] Смирнов Б. М. Введение в физику плазмы. 2-е, перераб. изд. М. : Наука, 1982.
- [116] Смирнов Б. М. Физика слабоионизованного газа в задачах с решениями. 3-е, перераб. и доп. изд. М. : Наука, 1985. 423 с.
- [117] Smirnov Boris M. Plasma Processes and Plasma Kinetics: 580 Worked-Out Problems for Science and Technology. John Wiley & Sons, 2007. 572 p. ISBN: 978-3-527-40681-4.
- [118] Elwert G. Über die Ionisations und Rekombinationsprozesse in einem plasma und die Ionisationsformel der Sonnenkorona // *Zeitschrift Naturforschung Teil A*. 1952. Vol. 7, no. 2. P. 432–439. Access mode: <https://www.degruyter.com/view/j/zna.1952.7.issue-6/zna-1952-0609/zna-1952-0609.xml>.
- [119] Saha H. P. Multiconfiguration Hartree-Fock calculation for the bound-free photodetachment cross section of  $H^-$  // *Phys. Rev. A*. 1988. Vol. 38. P. 4546–4551. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.38.4546>.
- [120] Aston F. W. Isotope and Atomic Weights // *Nature*. 1920. Vol. 105. P. 617–619.
- [121] Андрюшин И. А., Чернышёв А. К. и Юдин Ю. А. Укрощение ядра. Страницы истории ядерного оружия и ядерной инфраструктуры СССР / под ред. Илькаева Р. И. Саров: Красный октябрь, 2003. 481 с. ISBN: 5-7493-0621-6.
- [122] Artsimovich L. A. Untersuchungen Über Impulsentladungen im Zusammenhang mit der Möglichkeit von Kontrollierbaren Ther-

- monuklearen Reaktionen // International Astronomical Union Symposium No. 6, Electromagnetic Phenomena In Cosmical Physics / ed. by Lehnert B. ; Stockholm, August, 1956. Cambridge : The University Press. 1958. P. 451–463.
- [123] Urey H. C., Brickwedde Ferdinand G., and Murphy G. M. A Hydrogen Isotope of Mass 2 // Phys. Rev. 1932. Vol. 39. P. 164–165.
- [124] Cockcroft J. D. and Walton E. T. S. Artificial Production of Fast Protons // Nature. 1932. Vol. 129. P. 242.
- [125] Cockcroft J. D. and Walton E. T. S. Disintegration of Lithium by Swift Protons // Nature. 1932. Vol. 129. P. 649.
- [126] M. L. E. Oliphant, P. Harteck, and Lord Rutherford. Transmutation Effects Observed with Heavy Hydrogen // Proceedings of the Royal Society, A. 1934. Vol. 144. P. 692–703.
- [127] Alvarez L. W. and Cornog R. Helium and Hydrogen of Mass 3 // Phys. Rev. 1939. Vol. 56. P. 613.
- [128] Eddington A. S. The Internal Constitution of the Stars // The Observatory. 1920. Vol. 43, no. 341–358.
- [129] Von Weizsäcker C. F. Über Elementumwandlungen in Innern der Sterne. II // Physikalische Zeitschrift. 1937. Bd. 38. S. 176–191.
- [130] Von Weizsäcker C. F. Über Elementumwandlungen in Innern der Sterne. II // Physikalische Zeitschrift. 1938. Bd. 39. S. 633–646.
- [131] Bethe H. A. Energy Production in Stars // Phys. Rev. 1939. Vol. 55. P. 434–456. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.434>.
- [132] Cawthorne C. and Fulton E. J. Voids in Irradiated Stainless Steel // Nature. 1967. Vol. 216. P. 575–576. Access mode: <https://doi.org/10.1038/216575a0>.
- [133] Rytov D. D. Environmental aspects of fusion energy // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1992. Vol. 34, no. 13. P. 1805–1815. Access mode: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/34/13/009>.
- [134] Heindler M. and Kernbichler W. Advanced fuel fusion // Emerging Nuclear Energy Systems 1989, Proceedings of the Fifth International Conference / ICENES. World Scientific. 1989. P. 177–182.
- [135] Gamow G. Zur Quantentheorie des Atomkernes // Zeitschrift für Physik. 1928. Vol. 51, no. 3. P. 204–212. Access mode: <https://doi.org/10.1007/BF01343196>.
- [136] EXFOR // Experimental Nuclear Reaction Data. Vienna, Austria : IAEA, 2019. Access mode: <https://www-nds.iaea.org/exfor/> (online; accessed: 2019-08-20).

- [137] Some Criteria for a Useful Thermonuclear Reactor : Rep. : A.E.R.E. report GP/R 1807 / A.E.R.E. ; executor: Lawson J. D. : 1955, declassified April 9th, 1957.
- [138] Lawson J. D. Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor // Proceedings of Physical Society B. 1957. Vol. 70, pt.1. P. 6–10.
- [139] Тамм И. Е. Теория магнитного термоядерного реактора. Часть I. Свойства высокотемпературной плазмы, находящейся в магнитном поле // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М. : Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 3–19. Работа выполнена в 1951 г.
- [140] Сахаров А. Д. Теория магнитного термоядерного реактора. Часть II // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М. : Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 20–30. Работа выполнена в 1951 г.
- [141] Тамм И. Е. Теория магнитного термоядерного реактора. Часть III. Дрейф и теплопроводность плазмы при наличии стабилизирующего тока // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М. : Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 31–41. Работа выполнена в 1951 г.
- [142] Artsimovich L. A., Bobrovskii G. A., Gorbunov E. P., Ivanov D. P., Kirillov V. D., Kuznetsov E. I., Mirnov S. V., Petrov M. P., Rasumova K. A., Strelkov V. S., and Shcheglov D. A. (Paper CN24/B1) // Proc. 3rd Int. Conf. on Plasma Physics and Nuclear Fusion / International Atomic Energy Agency, Vienna. Novosibirsk, USSR, 1968. 1969. Vol. 1. P. 157.
- [143] Peacock N. J., Robinson D. C., Forrest M. J., Wilcock P. D., and Sanников V. V. Measurement of the Electron Temperature by Thomson Scattering in Tokamak T3 // Nature. 1969. Vol. 224. P. 488–4990.
- [144] Ryutov D. D. Reinventing Fusion. 1996. Plenary talk at 12th American Nuclear Society Topical Meeting on the Technology of Fusion Energy, Reno, NV, June 16-20, 1996.
- [145] Barnes D. C., Hammer J., Hassam A., Hill D., Hoffman A., Hooper B., Kesner J., Miley G., Perkins J., Ryutov D., Sarff J., Siemon R. E., Slough J., and Yamada M. Fusion Energy Science Opportunities in Emerging Concepts // *Journal of Fusion Energy*. 1999. Vol. 18, no. 1. P. 13–17. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1018814706158>.
- [146] Nuckolls John, Wood Lowell, and Thiessen Albertand Zimmerman George. Laser Compression of Matter to Super-High Densities: Thermonuclear (CTR) Applications // Nature. 1972. Vol. 239. P. 139–142.

- [147] Велихов Е. П. и Смирнов В. П. Состояние исследований и перспектива термоядерной энергетики // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. 2006. № 4. С. 3–14. Режим доступа: [http://vant.terru.ru/vant\\_2006\\_4/1.pdf](http://vant.terru.ru/vant_2006_4/1.pdf).
- [148] Aymar R. ITER overview // *Fusion Engineering and Design*. 1997. Vol. 36, no. 1. P. 9–21. Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920379697000082>.
- [149] Котельников И. А. Термоядерный реактор и солнечная энергетика // Сибирский физический журнал. 2017. Т. 12, № 1. С. 19–25. Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29243394>.
- [150] Басов Н. Г., Лебо И. Г. и Розанов В. Б. Физика лазерного термоядерного синтеза. М. : Знание, 1988. 172 с. ISBN: 978-5-070-00011-2.
- [151] Moreau D. C. Potentiality of the proton-boron fuel for controlled thermonuclear fusion // *Nuclear Fusion*. 1977. Vol. 17, no. 1. P. 13–20. Access mode: <https://doi.org/10.1088/0029-5515/17/1/002>.
- [152] Wittenberg L. J., Santarius J. F., and Kulcinski G. L. Lunar Source of  $^3\text{He}$  for Commercial Fusion Power // *Fusion Technology*. 1986. Vol. 10, no. 2. P. 167–178. <https://doi.org/10.13182/FST86-A24972>.
- [153] Шафранов В. Д. Первый период истории термоядерных исследований в Курчатовском институте // *Успехи физических наук*. 2001. Т. 171, № 8. С. 877–886.
- [154] Liouville J. Note sur la Théorie de la Variation des constantes arbitraires // *Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*. 1838. Vol. 3. P. 349.
- [155] Власов А. А. О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. 1938. Т. 8, № 3. С. 291.
- [156] Landau L. D. Die kinetische gleichung für den fall Coulombscher vechselwirkung // *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*. 1936. Vol. 10, no. 1. P. 154–164.
- [157] Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 203–209.
- [158] Гинзбург В. Л. О некоторых горе-историках физики // Вопросы истории естествознания и техники. 2000. № 4. С. 5–14.
- [159] Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д., Леонович М. А. и Фок В. А. О несостоятельности работ А. А. Власова по обобщённой теории плазмы и теории твёрдого тела // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 246–252.
- [160] Власов А. А. К обобщённой теории плазмы и теории твердого тела (ответ В. Гинзбург, Л. Ландау, М. Леонович, В. Фок) // Вестник Московского университета. 1946. № 3–4. С. 63–96.

- [161] Рухадзе А. А. Роль Б. Б. Кадомцева в судьбе А. А. Власова — объективность, смелость и благородство // Успехи прикладной физики. 2014. Т. 2, № 4. С. 434–435.
- [162] Власов А. А. Теория колебаний свойств электронного газа и ее приложения. М. : URSS, 2016. 225 с. ISBN: 978-5-9710-4222-8. Режим доступа: <http://urss.ru>.
- [163] Lamb H. On some cases of wave-motion on deep water // *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1898-1922)*. 1913. Vol. 21, no. 1. P. 237–250. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02419547>.
- [164] Lamb Horace. Hydrodynamics. 4th ed. Cambridge University Press, 1916. 728 p.
- [165] Рютов Д. Д. Аналог затухания Ландау в задаче о распространении звуковой волны в жидкости с пузырьками газа // Письма в ЖЭТФ. 1975. Vol. 22, no. 9. P. 446–449.
- [166] Arzhannikov A. V. and Kotelnikov I. A. Excitation of ship waves by a submerged object: New solution to the classical problem // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94. P. 023103. Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.94.023103>.
- [167] Vekstein G. E. Landau resonance mechanism for plasma and wind-generated water waves // *American Journal of Physics*. 1998. Vol. 66, no. 10. P. 886–892. Access mode: <https://doi.org/10.1119/1.18978>.
- [168] Тимофеев А. В. Резонансные эффекты в колебаниях неоднородных течений сплошных сред // Вопросы теории плазмы. М. : Энергоатомиздат, 1988. Т. 17. С. 157–244.
- [169] Malmberg J. H., Wharton C. B., Gould R. W., and O’Neil T. M. Plasma Wave Echo Experiment // *Phys. Rev. Lett.* 1968. Vol. 20. P. 95–97. Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.20.95>.
- [170] Fokker A. D. Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld // *Ann. Phys. (Leipzig)*. 1914. Vol. 43. P. 810–820.
- [171] Planck M. Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie // *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss.* 1917. S. 324–341.
- [172] Rosenbluth M. N., MacDonald W. M., and Judd D. L. Fokker-Planck Equation for an Inverse-Square Force // *Phys. Rev.* 1957. Vol. 107, no. 1. P. 1–6.
- [173] Хинтон Ф. Явление переноса в столкновительной плазме // Основы физики плазмы / под ред. Розенблюта Р. З. Сагдеева и М. М. : Энергоатомиздат, 1983. Т. 1. С. 152–200.

- [174] Boltzmann L. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen // Wiener Berichte. 1872. Bd. 66. S. 275–370.
- [175] Spitzer Jr. L. The stability of isolated clusters // Monthly Notices, Royal Astronomical Society (London). 1940. Vol. 100. P. 396–413.
- [176] Bhatnagar P. L., Gross E. P., and Krook M. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems // *Phys. Rev.* 1954. Vol. 94. P. 511–525. Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.94.511>.
- [177] Hinton F. L. and Rosenbluth M. N. Stabilization of axisymmetric mirror plasmas by energetic ion injection // *Nuclear Fusion*. 1982. Vol. 22, no. 12. P. 1547. Access mode: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0029-5515/22/12/001>.
- [178] Brillouin Leon. A Theorem of Larmor and Its Importance for Electrons in Magnetic Fields // *Phys. Rev.* 1945. Vol. 67, no. 7-8. P. 260–266.
- [179] Coriolis G.-G. Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps // J. de l'Ecole royale polytechnique. 1835. Vol. 15. P. 144–154.
- [180] Батыгин В. В. и Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. М. : РХД, 2002. 640 с. ISBN: 5-93972-155-9.
- [181] Балакин А. А. Интеграл парных электрон-ионных столкновений в переменных электромагнитных полях // Физика плазмы. 2008. Т. 34, № 12. С. 1129–1136.
- [182] Tri Alpha Energy. Foothill Ranch, California, USA, 2016. Access mode: <http://www.trialphaenergy.com/> (online; accessed: 2016-06-28).
- [183] Sikora M. H. and Weller H. R. A New Evaluation of the  $^{11}B(p, \alpha)\alpha\alpha$  Reaction Rates // *Journal of Fusion Energy*. 2016. Vol. 35, no. 3. P. 538–543. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1007/s10894-016-0069-y>.
- [184] Ricci M. M. G. et Levi-Civita T. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications // *Mathematische Annalen*. 1900. Vol. 54, no. 1-2. P. 125–201. Mode d'accès : <http://dx.doi.org/10.1007/BF01454201>.

# Оглавление

## 3 | Предисловие

## 7 | Лекция 1 Общие сведения о плазме

§1.1	Плазма как состояние вещества	7
§1.2	Квазинейтральность	8
§1.3	Определение плазмы	9
§1.4	Генезис физики плазмы	10
§1.5	Дебаевское экранирование	13
§1.6	Ленгмюровские колебания	14
§1.7	Практические формулы	16
§1.8	Плазма в природе	17
	Литература	23
	Задачи и вопросы	23

## 25 | Лекция 2 Дебаевское экранирование

§2.1	Экранирование пробного заряда	25
§2.2	Энергия кулоновского взаимодействия в плазме	28
§2.3	Плазменный параметр	30
§2.4	Идеальная и неидеальная плазмы	30
§2.5	Классическая и вырожденная плазмы	31
§2.6	Классификация плазмы	34
	Литература	37
	Задачи и вопросы	38

## 40 | Лекция 3 Ионизационное равновесие

§3.1	Уравнение Саха	41
§3.2	Степень ионизации плазмы	45

§3.3	Ограниченност теории Сахá	47
	Литература	48
	Задачи и вопросы	48

**52**

Лекция 4  
**Движение заряженных частиц**

§4.1	Дрейфовое приближение	52
§4.2	Движение в однородном магнитном поле	53
§4.3	Электрический дрейф	57
§4.4	Дрейф под действием малой силы	63
§4.5	Гравитационный дрейф	65
§4.6	Дрейф в неоднородном электрическом поле	66
	Литература	67
	Задачи и вопросы	67

**69**

Лекция 5  
**Магнитные дрейфы**

§5.1	Градиентный дрейф	70
§5.2	Центробежный дрейф	72
§5.3	Поляризационный дрейф	75
§5.4	Скорость движения ведущего центра	77
	Литература	79
	Задачи и вопросы	79

**81**

Лекция 6  
**Адиабатические инварианты**

§6.1	Магнитный момент	81
§6.2	Первый адиабатический инвариант	82
§6.3	Система уравнений ведущего центра	86
§6.4	Адиабатические ловушки с магнитными пробками	87
§6.5	Второй адиабатический инвариант	92
§6.6	Третий адиабатический инвариант	97
	Литература	98
	Задачи и вопросы	98

**101**Лекция 7  
Кулоновское рассеяние

- §7.1 Параметры столкновений [102](#)
- §7.2 Дифференциальное сечение рассеяния [103](#)
- §7.3 Транспортное сечение [106](#)
- §7.4 Кулоновский логарифм [107](#)
- §7.5 Приближение далёких пролётов [109](#)
- Литература [112](#)
- Задачи и вопросы [112](#)

**114**Лекция 8  
Парные столкновения

- §8.1 Кулоновские столкновения в плазме [114](#)
- §8.2 Торможение пробной частицы [116](#)
- §8.3 Убегание электронов [119](#)
- §8.4 Остыивание пробной частицы [122](#)
- §8.5 Иерархия времён столкновений [124](#)
- Литература [128](#)
- Задачи и вопросы [128](#)

**130**Лекция 9  
Излучение плазмы

- §9.1 Типы радиационных переходов [131](#)
- §9.2 Тормозное излучение [132](#)
- §9.3 Рекомбинационное излучение [140](#)
- §9.4 Длина пробега излучения [142](#)
- §9.5 Излучение спектральных линий [145](#)
- §9.6 Циклотронное излучение [147](#)
- Литература [149](#)
- Задачи и вопросы [150](#)

**152**Лекция 10  
Атомные процессы в плазме

- §10.1 Ионизация электронным ударом [153](#)
- §10.2 Тройная рекомбинация [156](#)
- §10.3 Ступенчатая ионизация [159](#)
- §10.4 Перезарядка [162](#)

Литература 164  
 Задачи и вопросы 165

**166**

Лекция 11  
**Радиационные процессы в плазме**

- §11.1 Фоторекомбинация 166
- §11.2 Фотоионизация 168
- §11.3 Корональное равновесие 168
- §11.4 Отрицательные ионы 170
- §11.5 Процессы образования отрицательных ионов 172
- Литература 176
- Задачи и вопросы 176

**177**

Лекция 12  
**Термоядерные реакции**

- §12.1 Физика ядерных реакций 177
- §12.2 Топливные циклы 180
- §12.3 Кулоновский барьер 188
- §12.4 Параметры термоядерных реакций 190
- §12.5 Зажигание термоядерной реакции 194
- §12.6 Критерий Лоусона 195
- §12.7 Тройное произведение 198
- §12.8 Потери на излучение 199
- §12.9 Управляемый термоядерный синтез 201
- §12.10 Перспективы УТС 204
- Литература 207
- Задачи и вопросы 207

**210**

Лекция 13  
**Кинетическое уравнение**

- §13.1 Функция распределения 210
- §13.2 Уравнение Лиувилля 213
- §13.3 Уравнение Власова 216
- §13.4 Потенциальные колебания электронов плазмы 219
- §13.5 Правило обхода Ландау 223
- §13.6 Затухание Ландау 224
- Литература 228
- Задачи и вопросы 228

**231**Лекция 14  
Интеграл столкновений

- §14.1 Уравнение Фоккера–Планка 232  
§14.2 Интеграл столкновений Ландау 234  
§14.3 Применение интеграла столкновений 240  
Литература 241  
Задачи и вопросы 241

**243**Лекция 15  
Стандартные задачи кинетики плазмы

- §15.1 Законы сохранения в кулоновских столкновениях 243  
§15.2 Н-теорема 245  
§15.3 Передача энергии между электронами и ионами 247  
§15.4 Упрощение интеграла столкновений 250  
Литература 255  
Задачи и вопросы 255

**257**Приложение А  
Ответы к задачам

- Лекция 1 257  
Лекция 2 261  
Лекция 3 267  
Лекция 4 274  
Лекция 5 281  
Лекция 6 286  
Лекция 7 295  
Лекция 8 301  
Лекция 9 306  
Лекция 10 320  
Лекция 11 324  
Лекция 12 328  
Лекция 13 336  
Лекция 14 349  
Лекция 15 356

**368** | Предметный указатель

**376** | Именной указатель

**379** | Список литературы

*Игорь Александрович КОТЕЛЬНИКОВ*  
**ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ**

**ТОМ 1**  
**ОСНОВЫ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ**

*Учебное пособие*

Зав. редакцией  
естественнонаучной литературы *Н. И. Осмоловская*  
Ответственный редактор *Н. А. Кривилёва*  
Корректор *Е. М. Матвеева*  
Выпускающий *Е. А. Романова*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028  
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»  
[lan@lanbook.ru](mailto:lan@lanbook.ru); [www.lanbook.com](http://www.lanbook.com)  
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д.1, лит. А.  
Тел.: (812) 336-25-09, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 19.01.21.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100  $\frac{1}{16}$ .  
Печать офсетная. Усл. п. л. 32,50. Тираж 30 экз.

Заказ № 089-21.

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленного оригинал-макета  
в АО «Т8 Издательские технологии»  
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.