

ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Направление 02.03.01 Математика и Компьютерные науки
Кафедра общей математики и математической физики

Соловьев Илья Олегович

АЛГОРИТМЫ ПОИСКА В МОДЕЛИ КВАНТОВЫХ
СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ

Научный руководитель: А.Н. Цирулёв

Тверь 2024

Цели и задачи

Цели работы: работы является проверка утверждения о том, что случайные блуждания в общем случае ускоряют алгоритм Гровера.

- ❶ Исследование квантовых случайных блужданий и Алгоритмов поиска;
- ❷ Исследование результатов объединения квантовых случайных блужданий и алгоритмов поиска

Задачи:

- ❶ Построение универсальной схемы квантовых случайных блужданий;
- ❷ Реализация алгоритма Гровера
- ❸ Комбинирование квантовых случайных блужданий и алгоритма Гровера

Классический случайные блуждания на прямой

Классическое случайное блуждание на прямой (или случайное блуждание в одномерном пространстве) - это модель случайного процесса, который описывает перемещение частицы по прямой линии, причём каждый шаг перемещения происходит в случайном направлении.

В типичной формулировке этой модели на каждом временном шаге частица может двигаться либо вправо, либо влево с равной вероятностью. При этом каждый шаг независим от предыдущих.

Квантовый случайные блуждания

Квантовые блуждания — это квантовые аналоги классических случайных блужданий. Они также как и в случае с классическими случайными блужданиями делятся на два типа: непрерывные и дискретные(далее будут рассматриваться дискретные). В отличие от классического случайного блуждания, где частица принимает определенные состояния, а случайность возникает за счет стохастических переходов между состояниями, в квантовых блужданиях случайность возникает за счет: квантовой суперпозиции состояний, неслучайной обратимой унитарной эволюции.

Правило перехода

В классических случайных блужданиях на прямой мы начинали с позиции 0. На каждом шаге мы имели возможность переместиться влево или вправо с одинаковой вероятностью. В квантовых случайных блужданиях аналогом будет квантовый процесс с базисными состояниями $|n\rangle, n \in \mathbb{Z}$.

На каждом временном шаге будем выполнять преобразование SC
Сдвиг S :

$$S|n, 0\rangle = |n - 1, 0\rangle, S|n, 1\rangle = |n + 1, 1\rangle \quad (1)$$

Для C часто выбирают преобразование Адамара:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$1 \quad C|n, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|n, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|n, 1\rangle$$

$$2 \quad C|n, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|n, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|n, 1\rangle$$

Квантовая схема

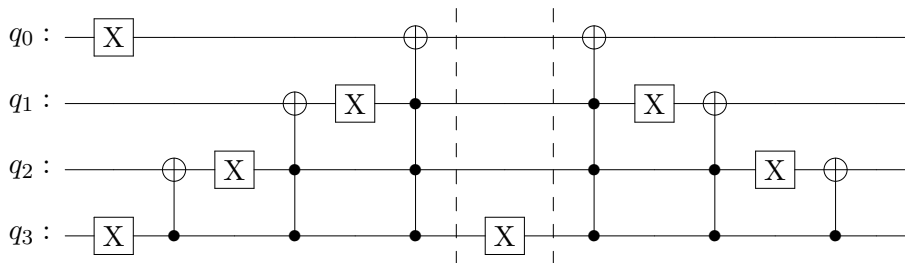


Рис.: Шаг случайного блуждания

Результаты в разных конфигурациях

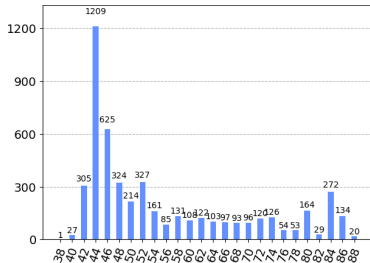


Рис.: Конфигурация с начальным состоянием $|100000\rangle|0\rangle$

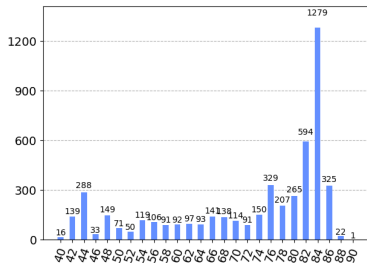


Рис.: Конфигурация с начальным состоянием $|100000\rangle|1\rangle$

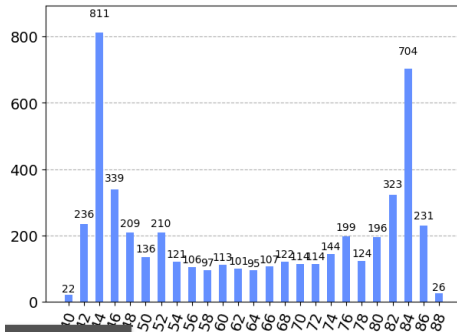


Рис.: Конфигурация с начальным состоянием $\frac{1}{2}|100000\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}|100000\rangle|1\rangle$

$SU(2)$ -случайные квантовые блуждания

Различия простых случайных блужданий и $SU(2)$ в том, что вместо оператора Адамара применяется оператор, полученный с помощью случайно сгенерированного оператора из группы $SU(2)$.

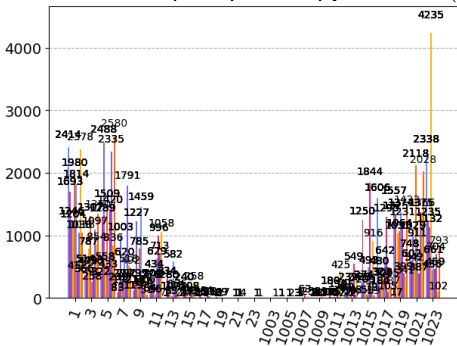


Рис.: Конфигурация с начальным состоянием $|1000000000\rangle|0\rangle$

Поиск на основе блужданий

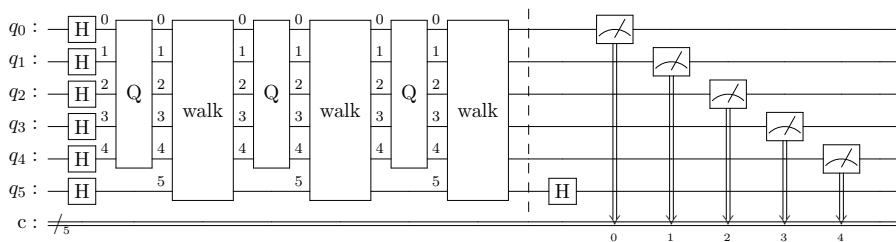
Выполнение алгоритма поиска начинается с применения оператора $\hat{H}^{\otimes n} \otimes \hat{I}_2$ к начальному состоянию $|0\rangle^{\otimes(n+1)}$, чтобы получить состояние

$$|\psi^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k, 0\rangle$$

с равномерным распределением амплитуд. Затем в цикле длины $O(\sqrt{N})$ (конкретное значение определяется в процессе повторения алгоритма) к начальному состоянию применяется оператор

$$\hat{U} = \hat{U}_w \hat{D} \hat{U}_f, \quad (3)$$

Схема

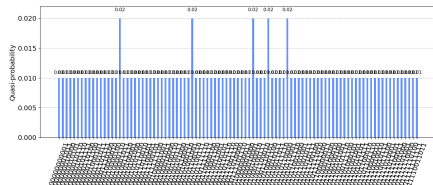
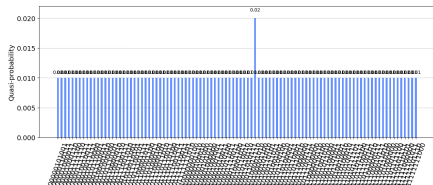
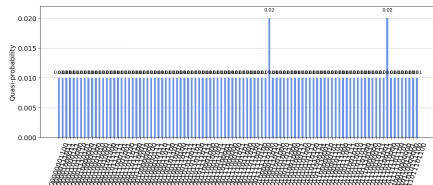
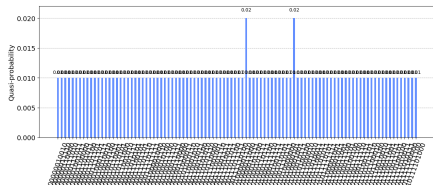


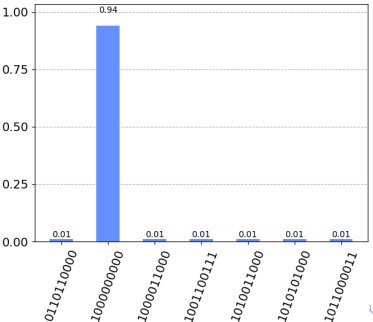
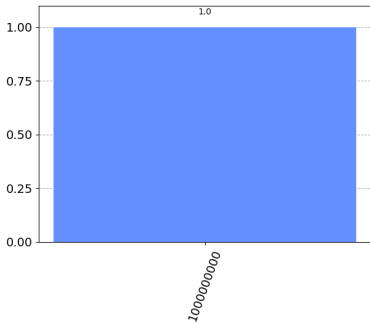
Испытания

Испытания будем проводить на системе из 10 кубитов (9 - состояний и 1 контролирующий). Для такого количества кубитов оптимальным будет количество итераций равным 25. Количество итерация определяется по формуле:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{2^{\text{qubits}}}{\text{markedStates}}} \quad (4)$$

Для того, чтобы понять, как на алгоритм гровера будет влиять введение случайного блуждания проведем 4 экспериментов с шагом в 5 итераций.





Испытания

В случае суперпозиции начальных состояний системы и последующим SU_2 квантовым случайным блужданием. Амплитуды вероятностей приближаются к равномерному распределению с коллапированием в случайное состояние.

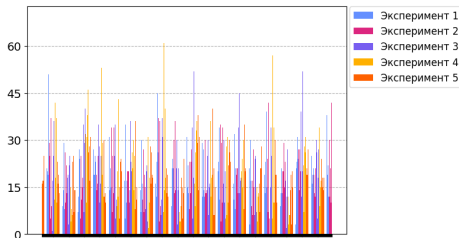


Рис.: Результат работы случайных блужданий в случае полной суперпозиции начальных состояний

Заключение

В данной работе получены следующие основные результаты:

- 1 Построены универсальные схемы квантовых случайных блужданий детерминированного и недетерминированного классов
- 2 Построены алгоритмы квантовых случайных блужданий детерминированного и недетерминированного классов
- 3 Проверена универсальность общего утверждения об ускорении сходимости квантового поиска на графах различных конфигураций по средствам применения случайного оператора блуждания. Результат отрицательный для циклического графа