Théorème de Zeckendorf

Azizi Marwan
Crague Ilian

1 Caractérisation de la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est définie par le principe suivant : les deux premiers termes sont 0 et 1 et chaque terme est la somme des 2 précédents. Malgré son apparente simplicité, elle reste particulièrement intéressante pour un grand nombre de raisons, dont sa présence dans certains phénomènes naturels, mais aussi la non trivialité de son étude. En effet, en comptant les spirales formées par les graines de tournersols sur la face de ces fleurs, on obtient constamment un terme de Fibonacci.

$$\begin{cases} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \ , \ n \geq 0 \end{cases}$$

2 Propriétés essentielles et démonstrations

Dans toutes nos preuves nous utiliserons le principe de récurrence sous diverses formes. Comme nous voulons montrer des propriétés sur l'ensemble des entiers naturels, (se figurant être les indices de la suite), il se révèle particulièrement adapté.

Il consiste à montrer qu'une propriété P est vraie pour un ou plusieurs cas de base puis qu'elle est vraie à un certain rang n+1, sous l'hypothèse qu'elle l'est au rang n et/ou aux rangs précédents.

2.1 F_n est positive

On pose : P_n : " $F_n \geq 1$ " $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation : $n = 1$

$F_1 = 1$ et $F_2 = 1$, donc P_1 et P_2 vraies.

Hérédité : On suppose P_n et P_{n+1} vraies pour un entier n fixé, montrons que P_{n+2} est vraie :

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
Par hypothèse de récurrence, F_n et F_{n+1} sont positifs, donc leur somme est positive : $F_{n+2} \geq 1$

Donc P_{n+2} est vraie. Donc, d'après le principe de récurrence, P_n est vraie.

2.2 F_n est strictement croissante à partir du rang 2

Soit n $\geq$ 2, on a : $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$
$n \geq 2$, donc $n-1 \geq 1$, donc on peut appliquer 2.1 à F_{n-1} : $F_{n+1} - F_n \geq 1 > 0$

donc $F_{n+1} > F_n$

F_n est strictement croissante à partir du rang 2.

3 Décomposition d'entiers naturels en termes de F_n, théorème de Zeckendorf

On peut facilement décomposer n'importe quel entier naturel en termes de Fibonacci en s'interdisant les doublons, en opérerant de manière gloutonne. En essayant de prouver ce résultat, on en obtient un encore plus fort : non seulement chaque entier naturel admet une décomposition en somme de termes de Fibonacci, mais elle est unique et les termes sont non consécutifs : c'est l'énoncé du théorème de Zeckendorf, que nous allons démontrer par la suite :

Tout entier naturel peut s'exprimer de manière unique comme somme de termes de Fibonacci non consécutifs.

$Post - Scriptum$: La représentation est unique, mais les termes sont considérés pour celle-ci à partir de l'indice 2 : les termes F_1 et F_2 sont égaux.

3.1 Existence :

On pose P_n : "$\exists\, F_{r_1}\ \ldots\ F_{r_k}$ non consécutifs, tels que : $\sum_{i=1}^{k} F_{r_i} = n$"

$Initialisation$: $n\ =\ 0$

si on prend $n\ =\ 0$, $F_n\ =\ 0$, donc la propriété est vérifiée au rang 0.

$Hérédité$: On suppose P_{N-1} vraie $\forall\, n\ \leq\ N-1$, montrons que P_N est vraie :

Soit A = $\{\ i\ \in\ \mathbb{N} \mid F_i\ \leq\ N\ \}$, $0\ \in A$ et F_n est strictement croissante à partir du rang 2, donc A est majoré et non vide.

Si $N\ \in\ A$: P_N est prouvée par hypothèse de récurrence.
Si $N\ \notin\ A$: Soit $a = \max(\mathrm{A})$.

$$F_a \leq N < F_{a+1}$$
$$0 \leq N - F_a < F_{a-1}$$

On pose $N_1 = N\ -\ F_a$, comme $F_a > 0$, par hypothèse de récurrence, N_1 s'écrit comme somme S de nombres de la suite de Fibonacci non consécutifs. N s'écrit $S + F_a$
Donc P_{n+1} est vraie. Donc, d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n.

3.2 Lemme de la somme

Pour simplifier la démonstration de l'unicité de la décomposition de Zeckendorf, on veut montrer que la somme des termes de Fibonacci non consécutifs jusqu'à un indice n est inférieure au terme d'indice n+1 :
Soit $(a_1, ..., a_d)_n$ une famille d'entiers naturels inférieurs à n non consécutifs telle que :
$\forall i \in [1, d-1],\ a_i < a_{i+1}$, on a donc :

$$\forall\ (a_i)_{i\,\leq\,d},\ \sum_{i=1}^{n} F_{a_i} \leq F_{a_n+1}$$

Montrons le par récurrence :

On pose P_n : "$\forall\ (a_i)_{i\,\leq\,d},\ \sum_{i=1}^{n} F_{a_i} \leq F_{a_n+1}$"

Initialisation : $n = 1$

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, donc comme $F_1 \leq F_2$ et $F_0 \leq F_2$, la propriété est vérifiée au rang 1.

Hérédité :

On suppose P_n vraie pour un entier n fixé, montrons que P_{n+1} est vraie :
Par hypothèse de récurrence, $\sum_{i=1}^{n} F_{a_i} \leq F_{a_n+1}$.
De plus on sait que $a_p + 1 \leq a_{p+1} - 1$ (car non consécutifs), donc :

$$\sum_{i=1}^{n} F_{a_i} + F_{a_{n+1}} \leq F_{a_n+1} + F_{a_{n+1}},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_{a_i} \leq F_{a_{n+1}-1} + F_{a_{n+1}},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_{a_i} \leq F_{a_{n+1}+1}$$

Donc P_{n+1} est vraie. Donc, d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n.

3.3 Unicité

On veut désormais montrer l'unicité, une nouvelle fois par récurrence :

P_n : L'entier n admet une unique représentation de Zeckendorf.

Initialisation : $n = 0$

$F_0 = 0$, F_n est croissante, donc pour tout $n \geq 1$, $F_n \geq 1$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n vraie $\forall\, n \leq N - 1$, montrons que P_N est vraie :

Par l'absurde : on suppose la représentation de Zeckendorf de N non unique :
il existe $r, s \geq 2$ tels que :

$$N = \sum_{i=1}^{r} F_{a_i} = \sum_{j=1}^{s} F_{b_j}$$

- Si $F_{a_r} = F_{b_s}$:

On pose $N_1 = N - F_{a_r} = N - F_{b_s} < N$. Donc par hypothèse de récurrence sur N_1, P_N est vraie.

- Si $F_{a_r} \neq F_{b_s}$:

On suppose $a_r < b_s$, donc $a_r + 1 \leq b_s$.
Si $F_{b_s} = n$: on a forcément $\sum_{i=1}^{r} F_{a_i} \neq \sum_{j=1}^{s} F_{b_j}$, donc P_N est vraie.
Si $F_{b_s} < n$: d'après le lemme de la somme : $F_{a_r+1} > n$. On a donc :

$$n < F_{a_r+1} \leq F_{b_s} < n,$$

ce qui aboutit à une contradiction.

Donc P_N est vraie.

La représentation de Zeckendorf de N est unique, pour tout entier N.

4 Système de numération de Zeckendorf

Chaque entier peut être représenté de manière unique grâce au théorème de Zeckendorf, nous permettant d'introduire un nouveau système de numération. A l'image de la représentation binaire, elle est constituée de 0 et de 1.
Le bit b à l'indice n de la représentation, a pour valeur $b \times F_n$.

Exemple : $100101_{Zeckendorf} = F_8 + F_4 + F_2 = 21_{10} + 3_{10} + 1_{10} = 25_{10}$

L'énoncé du théorème de Zeckendorf implique que dans une telle représentation, il n'y aura jamais deux 1 côte à côte.

Par exemple, les deux représentations suivantes s'évaluent numériquement au même entier :

100000 et 11000 représentent l'entier 13. La représentation de droite est une somme des termes F_5 et F_6, valant F_7. Cette représentation est incorrecte, en effet dans la représentation de Zeckendorf, il ne peut pas y avoir deux bits valant 1 consécutifs.

Dès lors, nous pouvons définir des opérations arithmétiques en base de Zeckendorf.

4.1 L'addition

Premièrement, on cherche à ajouter un terme de Fibonacci à une décomposition de Zeckendorf.

Si le terme n'est pas présent dans la décomposition, on remplace le bit correspondant par un 1. On parcourt la représentation de gauche à droite, si deux bits consécutifs valent 1, on remplace leur valeur par 0 et le bit à leur gauche par 1, et ce tant que la représentation est incorrecte :

Exemple :
$10100_Z + F_5 = 10100_Z + 1000_Z = 11100_Z = 100100_Z$

Si ce terme est déjà présent dans la décomposition :
Si ce terme est F_2, on remplace le terme d'indice 1 par 1 et le terme d'indice 0 par 0. On effectue ensuite la même vérification que lors du premier cas.
Si le terme est F_3, on ajoute deux fois F_2.
Sinon, le terme peut s'écrire F_{n+2}, on ajoute F_{n+1} puis F_n.

Exemples :
$101_Z + F_2 = 101_Z + 1_Z = 110_Z = 1000_Z$
$10_Z + F_3 = 10_Z + F_2 + F_2 = 10_Z + 1_Z + 1_Z = 11_Z + 1_Z = 100_Z + 1_Z = 101_Z$
$10100_Z + F_4 = 10100_Z + F_3 + F_2 = 10100_Z + 10_Z + 1_Z = 100000_Z + 1_Z = 100001_Z$

On peut dès lors additionner deux entiers naturels quelconques en faisant la somme du premier et de chaque terme de la décomposition du second.

4.2 Conversions

Convertir un nombre depuis la base 10 à la base de Zeckendorf revient simplement à appliquer l'algorithme glouton évoqué en introduction de 3.
La conversion réciproque revient simplement à décomposer la représentation de Zeckendorf en somme de termes de Fibonacci.
On peut ainsi lier la base de Zeckendorf et la base 10. Cette dernière étant une base de numération positionnelle exprimée à l'aide de puissances de 10, on peut très facilement passer de la base 10 à n'importe quelle autre base exprimée à l'aide de puissances, en particulier à la base 2.

Exemple :
$100000_Z = 13_{10} = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 1101_2$

On peut mettre en perspective cette dernière et la base de Zeckendorf, et voir si elle pourrait être plus efficace que le binaire dans une quelconque utilisation.

Stocker un entier sous la forme de Zeckendorf prend-il plus de place que en binaire ?

Une représentation de Zeckendorf est maximale quand le bit de poids fort vaut 1 et qu'ensuite un bit sur deux vaut 0, l'autre valant 1. D'après le lemme de la somme, une nombre de Zeckendorf de n bits est donc inférieur à F_{n+2}.
En base 2, une représentation est maximale lorsque tous les bits valent 1. Un tel nombre de n bits est égal à $2^n - 1$.

On pose P_n : " $F_{n+2} \leq 2^n - 1$ " pour tout entier n supérieur à 2.

Initialisation : $n = 2$

$F_4 = 3$ et $2^2 - 1 = 3$, donc P_2 est vraie.

$F_5 = 5$ et $2^3 - 1 = 7$ donc P_3 est vraie.

Hérédité : On suppose P_n et P_{n+1} vraies pour un entier n fixé, montrons que P_{n+2} est vraie :

$$F_{n+2} \leq 2^n - 1 \; et \; F_{n+3} \leq 2^{n+1} - 1$$
$$F_{n+2} + F_{n+3} \leq 2^n - 1 + 2^{n+1} - 1$$
$$F_{n+4} \leq 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+2} - 1$$
$$F_{n+4} \leq 2^{n+2} - 1$$

Donc P_{n+2} est vraie. Donc, d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur à 2.

D'après cette propriété, pour représenter un même entier, il faudra plus de termes de Fibonacci que de puissances de 2, on comprend donc que la taille de la représentation de Zeckendorf d'un entier sera plus longue que sa représentation en binaire :

Entier	Zeckendorf	Binaire
0	0_Z	0_2
1	1_Z	1_2
2	10_Z	10_2
3	100_Z	11_2
...	...	...
100	1000010100_Z	1100100_2
...	...	...
10^6	$10001010000000000010100000000_Z$	11000011010100000_2

La représentation de Zeckendorf n'est donc pas meilleure que le binaire en terme d'espace occupé.

De par sa difficulté à interagir avec d'autres bases de numérations, sa taille, ainsi que son évaluation coûteuse, la représentation de Zeckendorf ne semble pas avoir d'intérêt pratique.