



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρονικής και Υπολογιστών

Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης
Πολυπρακτορικών Συστημάτων με επικοινωνία
διακριτού χρόνου

Διπλωματική Εργασία
της
Ηλιάνα Κόγια

Επιθετικός: Ροβιθάκης Γεώργιος
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Ιούλιος, 2025

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζει την ανάπτυξη ενός κατανεμημένου πρωτοκόλλου ελέγχου για πολυπρακτορικά συστήματα, βασιζόμενου στη μεθοδολογία ελέγχου προκαθορισμένης απόκρισης (PPC), σε σενάρια όπου οι πράκτορες επικοινωνούν την έξοδό τους σε άλλους πράκτορες σε διακριτές χρονικές στιγμές. Οι ελεγκτές που έχουν σχεδιαστεί στο πλαίσιο συνεχούς χρόνου παρουσιάζουν σοβαρά ζητήματα, τόσο ως προς τη ευστάθεια όσο και ως προς την ποιότητα της απόκρισης, υπό τέτοιους περιορισμούς επικοινωνίας. Στο πλαίσιο αυτό, είναι ουσιώδες να εξαχθούν τα μέγιστα επιτρεπτά χρονικά διαστήματα μεταξύ των μεταδόσεων, ώστε να διασφαλιστεί η ευστάθεια των σημάτων του κλειστού βρόχου, διατηρώντας ταυτόχρονα την προκαθορισμένη απόκριση και τα χαρακτηριστικά χαμηλής πολυπλοκότητας του σχεδιασμού ελέγχου. Οι συνθήκες που προκύπτουν αποκαλύπτουν έναν άμεσο συμβιθασμό μεταξύ των χρονικών διαστημάτων μετάδοσης, των απαιτήσεων απόκρισης, της δυναμικής των πρακτόρων και της πολυπλοκότητας του γράφου. Μελέτες προσομοίωσης επαληθεύουν και αποσαφηνίζουν το προτεινόμενο πρωτόκολλο ελέγχου.

Abstract

This thesis presents the development of a distributed control protocol for multi-agent systems based on the prescribed performance control (PPC) methodology in scenarios where agents communicate their output to other agents at discrete-time instants. Controllers designed for continuous-time frameworks exhibit serious issues related to both stability and quality of performance under such communication constraints. In this direction, it is essential to derive the maximum allowable transmission intervals to guarantee stability of the closed-loop, while preserving the prescribed performance and the low-complexity attributes of the control design. The derived conditions reveal a direct trade-off between transmission intervals, performance requirements, agent dynamics and the complexity of the graph. Simulation studies verify and clarify the proposed control protocol.

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όσους με καθοδήγησαν και βοήθησαν στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία. Έτσι, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ροβιθάκη Γεώργιο για την συνεχή καθοδήγηση του και την άμεση υποστήριξη στα πλαίσια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Η συνεργασία μας ήταν άψογη και καθοριστική. Επίσης, ευχαριστώ θερμά την οικογένεια μου που με στήριξε σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Prescribed Performance Control of Multi-Agent Systems with discrete-time communication

Iliana Kogia
ilianakogia@ece.auth.gr

July, 2025

Περιεχόμενα

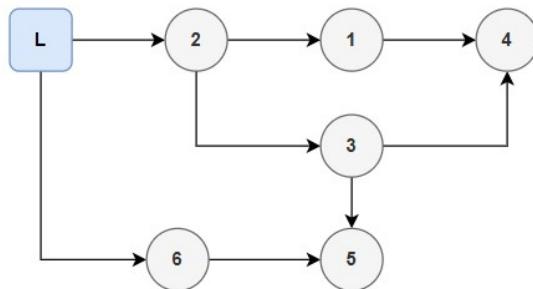
1 Εισαγωγή	2
1.1 Πολυπρακτορικά Συστήματα	2
1.2 Μέγιστο Επιτρεπόμενο Διάστημα Μετάδοσης	3
1.3 Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης	4
1.4 Θεωρία Γράφων	6
1.5 Στόχοι Εργασίας	6
1.6 Διάρθρωση Εργασίας	7
2 Κύρια Αποτελέσματα	8
2.1 Διατύπωση Προβλήματος	8
2.1.1 Δυναμική Πολυπρακτορικού Συστήματος	8
2.1.2 Υποθέσεις	9
2.1.3 Στόχος Ελέγχου - Θεώρημα	10
2.1.4 Εξάρτηση t_{mati} από την τοπολογία	15
2.1.5 Διερεύνηση Συναρτήσεων Μετασχηματισμού	17
2.2 Ανάλυση Ευστάθειας	19
2.2.1 Απόδειξη Θεωρήματος	19
3 Προσομοίωση μέσω MATLAB	30
3.1 Ομογενές Πολυπρακτορικό Σύστημα - Συστήματα δευτέρου βαθμού	30
3.1.1 Υπολογισμός τ_{mati} - Κυκλικός γράφος	33
3.1.2 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 0.001 \text{ sec}$, $\rho_{1,\infty} = 0.01$	37
3.1.3 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 0.004 \text{ sec}$, $\rho_{1,\infty} = 0.01$	41
3.1.4 Άλλαγή Κερδών	44
3.1.5 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 0.003 \text{ sec}$, $\rho_{1,\infty} = 0.04$	45
3.1.6 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 0.01 \text{ sec}$, $\rho_{1,\infty} = 0.04$	48
3.1.7 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 5e - 7$, $\rho_{1,\infty} = 0.1$	51
3.1.8 Υπολογισμός τ_{mati} - Γράφος αλυσίδα	54
3.1.9 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 0.004 \text{ sec}$, $\rho_{1,\infty} = 0.01$ γράφος αλυσίδα	56
3.1.10 Υλοποίηση με διαφορετικά $T_s(i)$	59
4 Επίλογος	63
4.1 Σύνοψη - Συμπεράσματα	63
Α' Ακρωνύμια και συντομογραφίες	64

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Πολυπρακτορικά Συστήματα

Ένα δίκτυο δυναμικών συστημάτων αποτελεί ένα πολυπρακτορικό σύστημα. Στόχος του είναι η επίτευξη συμφωνίας μεταξύ κάποιων μεταβλητών, όπως είναι για παράδειγμα η έξοδος των συστημάτων. Τα πολυπρακτορικά συστήματα ηγέτη-ακολούθων αποτελούνται από τον ηγέτη ο οποίος υποδεικνύει ουσιαστικά τον στόχο και οι ακόλουθοι/πράκτορες, οι οποίοι επικοινωνούν με τον ηγέτη ή με ορισμένους γειτονικούς πράκτορες, προσπαθούν να "μιμηθούν" τον ηγέτη.



Σχήμα 1.1: Παράδειγμα Γράφου Συστήματος ηγέτη-ακολούθων

Υπάρχουν αρκετές εφαρμογές συγχρονισμού πολυπρακτορικών συστημάτων [1]. Παραδείγματα εφαρμογών αποτελούν τα αυτόνομα οχήματα, τα UAVs σε σμήνη, η διαχείριση κυκλοφορίας στους δρόμους, τα έξυπνα δίκτυα ενέργειας και η ρομποτική. Οι πιθανές μη γραμμικότητες της δυναμικής των πρακτόρων και τα ετερογενή δυναμικά συστήματα υψηλότερου βαθμού μας στρέφουν στο συγχρονισμό των πρακτόρων μέσω της ανταλλαγής πληροφορίας εξόδου.

Στη βιβλιογραφία, έχουν μελετηθεί γραμμικά υψηλής τάξης ετερογενή συστήματα, τα οποία περιλαμβάνουν και αβεβαιότητες, [2–4]. Ωστόσο, όταν εισάγονται και μη γραμμικότητες στα δυναμικά συστήματα η προσέγγιση όσον αφορά την σχεδίαση ελεγκτή γίνεται πολύπλοκη [5–7]. Για ορισμένα πολυπρακτορικά συστήματα με τοπολογία κατευθυνόμενου και μη γράφου, υλοποιείται η μέθοδος backstepping για τον αποκεντρωμένο ελεγκτή [8–11], ενώ στο [12] υλοποιείται μια διαφορετική τεχνική για

τοπολογία μεταβαλλόμενου γράφου. Επίσης, λύση στις όποιες αθεβαιότητες μπορούν να διθούν - με αυξήμενη μεν πολυπλοκότητα - μέσω προσαρμοστικού ελέγχου ή με χρήση νευρωνικών και ασαφών δομών. Ωστόσο, τέτοιες δομές για την προσέγγιση των μη γραμμικοτήτων ή της αθεβαιότητας καθιστούν δύσκολη την υλοποίησή τους σε εφαρμογές με περιορισμένους υπολογιστικούς πόρους, όπως για παράδειγμα τα ενσωματωμένα συστήματα.

Επιπλέον, όσον αφορά τα μη γραμμικά, ετερογενή υψηλότερου βαθμού, αθέβαια πολυπρακτορικά συστήματα υπάρχουν λύσης ελέγχου μόνο πάνω σε μιας εισόδου - μιας εξόδου συστήματα πρακτόρων (SISO) και όχι πολλαπλών (MIMO). Η εκ των προτέρων εγγύηση χαρακτηριστικών επίδοσης, τόσο στην μεταβατική όσο και στη μόνιμη κατάσταση, είναι για αυτή την κλάση πολυπρακτορικών συστημάτων αρκετά απαιτητική. Ορισμένες προτάσεις πάνω σε αυτό το πρόβλημα δίνονται με χρήση νευρωνικών δικτύων και ενισχυτικής μάθησης [13] και για την επίτευξη προκαθορισμένων χαρακτηριστικών με χρήση του ελεγκτή προδιαγεγραμμένης απόκρισης [14–16], η μεθοδολογία του οποίου προτάθηκε για πρώτη φορά στο [17]. Ακολούθησαν, έπειτα, εργασίες σχεδίασης ελέγχου προδιαγεγραμμένης απόκρισης για αυτή τη κλάση πολυπρακτορικών συστημάτων, με χρήση προσεγγιστικών δομών [18], αλλά και απουσία τους [19–21]. Ακόμη, οι αθεβαιότητες της δυναμικής των πρακτόρων αντιμετωπίζονται με την ενσωμάτωση νευρωνικών και ασαφών συστημάτων στο πρωτόκολλο ελέγχου αυξάνοντας την πολυπλοκότητα [14–16], [22, 23]. Από τις λύσεις αυτές το [16] αναφέρεται μόνο σε συστήματα πολλαπλής εισόδου - πολλαπλής εξόδου, όμως περιορίζεται για συστήματα κανονικής μορφής Brunovsky, ενώ επιπλέον απαιτείται η γνώση του πίνακα εισόδου ελέγχου. Μια προσέγγιση ελέγχου προδιαγεγραμμένης απόκρισης για ετερογενή συστήματα (MIMO) κανονικής μορφής Brunovsky με άγνωστο και διαγώνιο πίνακα εισόδου ελέγχου προτάθηκε στο [24]. Τέλος, έλεγχος προδιαγεγραμμένης απόκρισης χαμηλής πολυπλοκότητας προτάθηκε στο [25] για μη γραμμικά συστήματα ηγέτη-ακολούθου MIMO, υψηλότερης τάξης, ετερογενή και με παρουσία αθεβαιοτήτων.

1.2 Μέγιστο Επιτρεπόμενο Διάστημα Μετάδοσης

Το μέγιστο επιτρεπόμενο διάστημα μετάδοσης αποτελεί το άνω όριο που πρέπει να επιβληθεί στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών στιγμών, κατά τις οποίες έχουμε μετάδοση του απαιτούμενου σήματος στο κανάλι, με σόχο να μπορεί να διασφαλιστεί η ευστάθεια στο κλειστό βρόχο.

Οι περιορισμένοι πόροι, τα θέματα ασφάλειας σε πολλές πραγματικές εφαρμογές και γενικότερα η φύση των πολυπρακτορικών συστημάτων ελέγχου καθιστούν αναγκαία την αποστολή της πληροφορίας, μεταξύ των εκάστοτε συστημάτων, ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Ωστόσο, η δειγματοληψία αυτή θα πρέπει να είναι κατάλληλη, ώστε να μην επηρεάζεται η ευστάθεια και η απόδοση των συστημάτων.

Η υλοποίηση σε διακριτό χρόνο μπορεί να παρουσιάσει προβλήματα απόδοσης ή αστάθειας στο κλειστό βρόχο όπως αναλύεται στα [26–28]. Εύρεση του μέγιστου επιτρεπόμενου διαστήματος μετάδοσης, ώστε να επιτυγχάνεται η ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου, συναντάται στα [29–32], ενώ στα [33–35] γίνεται επέκταση αυτού του διαστήματος μέσω μιας ανάλυσης χειρότερου σεναρίου. Μια άλλη προσέγγιση διακριτού χρόνου αποτελεί η χρήση μηχανισμών με αφύπνιση σε κάποια γεγονότα (event triggered) [36–39]. Ωστόσο, οι συγκεκριμένες λύσεις για το μέγιστο επιτρεπόμενο διάστημα μετάδοσης αφορούν κυρίως την ευστάθεια και δεν εισάγουν την εγγύηση για

χαρακτηριστικά προκαθορισμένης απόδοσης. Μία λύση ανάλυσης χερότερου σεναρίου για την εύρεση του t_{mati} προτάθηκε στο [40], η οποία λαμβάνει υπόψην, εκτός από την ευστάθεια, και τα χαρακτηριστικά προδιαγεγραμμένης απόκρισης. Ωστόσο, αφορά δικτυωμένα συστήματα ελέγχου και όχι πολυπρακτορικά ηγέτη-ακολούθου και τα σήματα διακριτού χρόνου αφορούν όλες τις καταστάσεις και το σήμα ελέγχου είσοδου.

Γενικά, θα ήταν επιθυμητό ένα μεγαλύτερο επιτρεπτό διάστημα μετάδοσης του σήματος, ώστε να μην απασχολούνται οι διαθέσιμοι πόροι συνεχώς. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι θα πρέπει να γίνει συμβιβασμός (trade off) μεταξύ των ορίων της προκαθορισμένης απόκρισης που εισάγονται μέσω της $\rho(t)$, της δυναμικής των συστημάτων των πρακτόρων, της πολυπλοκότητας του γράφου επικοινωνίας και του επιτρεπτού ορίου δειγματοληψίας t_{mati} .

1.3 Έλεγχος Προδιαγεγραμμένης Απόκρισης

Ο ελεγκτής που υλοποιείται, στην παρούσα διπλωματική εργασία, σε πολυπρακτορικά συστήματα ηγέτη-ακολούθου και με σήμα αναφοράς στον διακριτό χρόνο για κάθε σύστημα βασίζεται στη μεθοδολογία ελέγχου προδιαγεγραμμένης απόκρισης (PPC), η οποία προτάθηκε για πρώτη φορά στο [17]. Ο συγκεκριμένος ελεγκτής εξασφαλίζει χαρακτηριστικά προκαθορισμένης απόκρισης και συγκεκριμένα όσον αφορά την μέγιστη υπερύψωση, τον ελάχιστο ρυθμό σύγκλισης και το μέγιστο σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση.

Έστω ένα γενικό σφάλμα παρακολούθησης το οποίο είναι βαθμωτό και μετρήσιμο, δηλαδή $e(t) \in \mathbb{R}$. Η προδιαγεγραμμένη απόκριση επιτυγχάνεται εφόσον το σφάλμα $e(t)$ μεταβάλλεται και περιορίζεται εντός μιας προκαθορισμένης περιοχής, η οποία μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια μιας συνάρτησης απόκρισης:

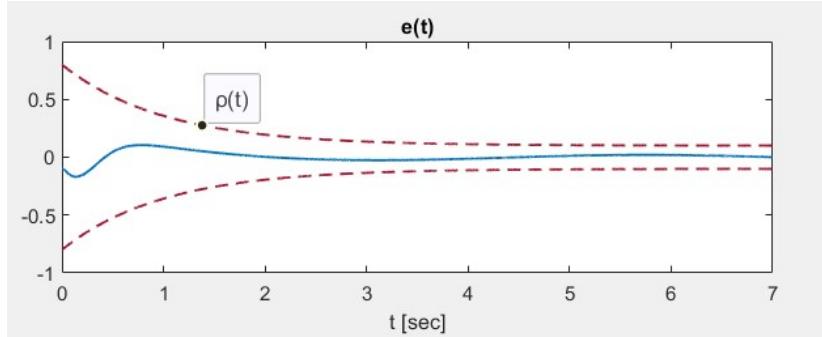
$$-\rho(t) < e(t) < \rho(t)$$

Η συνάρτηση απόκρισης $\rho(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση μακριά από το μηδέν κατα μία σταθερά και έχει φραγμένη παράγωγο. Μια επιλογή για τη συνάρτηση αυτή είναι η παρακάτω εκθετική συνάρτηση:

$$\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty, \quad \forall t \geq 0$$

Η σταθερά $\rho_0 = \rho(0)$ επιλέγεται, έτσι ώστε να ικανοποιείται $\rho(0) > |e(0)|$. Επίσης, ανάλογα με την ακρίβεια που θέλουμε να επιτύχουμε στη σύγκλιση του $e(t)$ στο μηδέν ορίζεται η σταθερά $\rho_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t)$ αντίστοιχα κοντά στο μηδέν. Ο ρυθμός μείωσης της εκθετικής συνάρτησης που σχετίζεται με τη σταθερά λ επηρεάζει την ταχύτητα σύγκλισης του σφάλματος $e(t)$ και ουσιαστικά θέτει ένα κατώτερο όριο σε αυτή. Επομένως, στη συνάρτηση $\rho(t)$ ενσωματώνουμε τους εκάστοτε περιορισμούς και κατά αυτόν τον τρόπο καθορίζονται τα όρια της προδιαγεγραμμένης απόκρισης του σφάλματος παρακολούθησης.

Παρακάτω απεικονίζεται πως εξελίσσεται το σφάλμα παρακολούθησης εντός της περιοχής που ορίζεται από τη συνάρτηση απόκρισης:



Σχήμα 1.2: Προδιαγεγραμμένη απόκριση του σφάλματος εξόδου $e(t)$, εντός των ορίων που επιβάλλει η συνάρτηση απόδοσης $\rho(t)$

Εισάγεται, ακόμη, ένας βοηθητικός μετασχηματισμός σφάλματος, με σκοπό να διαμορφωθεί το σφάλμα παρακολούθησης σύμφωνα με τα επιτρεπόμενα όρια απόκρισης, όπως αυτά καθορίστηκαν με τη συνάρτηση απόκρισης $\rho(t)$. Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός είναι ο εξής:

$$\varepsilon = T(\xi(t))$$

ή

$$\varepsilon = T\left(\frac{e(t)}{\rho(t)}\right)$$

Μετασχηματισμός $T(\cdot)$ είναι μία ομαλή γνησίως αύξουσα συνάρτηση του σφάλματος ε για την οποία ισχύει:

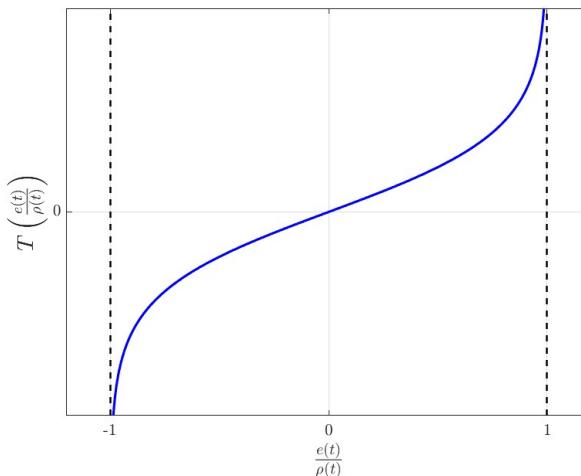
$$T : (-1, 1) \rightarrow (-\infty, \infty).$$

Μια υποψήφια συνάρτηση μετασχηματισμού αποτελεί η παρακάτω λογαριθμική:

$$T(\xi(t)) = \ln\left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right). \quad (1.1)$$

ή ισοδύναμα

$$T\left(\frac{e(t)}{\rho(t)}\right) = \ln\left(\frac{1 + \frac{e}{\rho}}{1 - \frac{e}{\rho}}\right). \quad (1.2)$$



Σχήμα 1.3: Γραφική Απεικόνιση της Συνάρτησης Μετασχηματισμού $T(\cdot)$

Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού $T(\cdot)$ μπορούν να επιτύχουν την απαιτούμενη προδιαγεγραμμένη απόκριση εφόσον κατα τη σχεδίαση του ελεγκτή αποδειχτεί ότι διασφαλίζεται το παρακάτω:

$$\varepsilon(t) \in \mathcal{L}_\infty, \quad \forall t \geq 0$$

Σημείωση: Το μέγεθος του σφάλματος ε δεν επηρεάζει το σφάλμα e , το οποίο καθορίζει η επιλογή της ρ .

1.4 Θεωρία Γράφων

Ένας κατευθυνόμενος γράφος $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση της επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων, όπου $\mathcal{V} = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ δηλώνει το μη κενό σύνολο των κόμβων που αντιπροσωπεύουν τους πράκτορες και $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ δηλώνει το σύνολο των ακμών.

Ο γράφος αναπαρίσταται από τον πίνακα γειτνίασης $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ με $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $i, j = 1, \dots, N$. Αν ο πράκτορας **i λαμβάνει** πληροφορίες **από** τον πράκτορα **j**, τότε $a_{ij} = 1$ (δηλαδή, $(n_j, n_i) \in \mathcal{E}$), διαφορετικά $a_{ij} = 0$. Σε όλο το άρθρο, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν κύκλοι, δηλαδή $a_{ii} = 0$ (δηλαδή, $(n_i, n_i) \notin \mathcal{E}$).

Το σύνολο των γειτόνων ενός κόμβου n_i δηλώνεται ως $N_i = \{n_j : (n_i, n_j) \in \mathcal{E}\}$ και ο πίνακας έσω-βαθμού ορίζεται ως ο διαγώνιος πίνακας $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$ με $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$, $i = 1, \dots, N$.

Ορίζουμε τον λαπλασιανό πίνακα του γράφου ως $L = D - A$.

Κατευθυνόμενος ονομάζεται ο γράφος στον οποίο οι ακμές του έχουν κατεύθυνση.

Ένας κατευθυνόμενος γράφος έχει εκτεινόμενο δέντρο spanning tree, αν υπάρχει ένας κόμβος, ο οποίος δεν έχει γονέα και ονομάζεται ρίζα (συμβολίζεται ως n_0), έτσι ώστε να υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι από τη ρίζα σε κάθε άλλο κόμβο του γράφου. Ο επαυξημένος γράφος $\bar{\mathcal{G}}$ ορίζεται ως $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}})$, όπου $\bar{\mathcal{V}} = \{n_0, n_1, \dots, n_N\}$ και $\bar{\mathcal{E}} \subseteq \bar{\mathcal{V}} \times \bar{\mathcal{V}}$.

Η κατάσταση του ηγέτη παρέχεται μόνο σε ένα υποσύνολο των N πρακτόρων. Έτσι, ορίζεται ο διαγώνιος πίνακας $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_N)$ με $b_i = 1$ όταν ο i πράκτορας λαμβάνει πληροφορία απευθείας από τον ηγέτη, διαφορετικά $b_i = 0$.

1.5 Στόχοι Εργασίας

Όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, τα πολυπρακτορικά συστήματα καθιστούν σημαντική την υλοποίηση των όποιων ελεγκτών στο διακριτό χρόνο. Ωστόσο, οι ελεγκτές συνεχούς χρόνου μπορεί να παρουσιάσουν προβλήματα κατά τη μετάβαση τους στο διακριτό χρόνο, είτε θέματα ευστάθειας είτε χαρακτηριστικών απόκρισης. Μια λύση ελέγχου για τα πολυπρακτορικά συστήματα έχει προταθεί στο [41], η οποία κάνει χρήση του ελεγκτή PPC, ωστόσο με χρήση προσαρμοστικού ελέγχου με κάποιες τεχνικές δυναμικής γραμμικοποίησης.

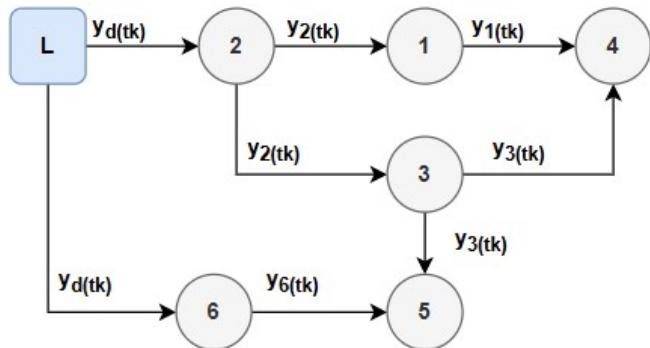
Το μέγιστο επιτρεπόμενο διάστημα μετάδοσης θέτει έναν περιορισμό στη δειγματοληψία, ώστε να διαβεβαιώνεται η ευστάθεια και η προδιαγεγραμμένη απόκριση κάθε επιμέρους συστήματος. Στο [42] βρίσκεται το t_{mati} για την περίπτωση ενός προσαρμοστικού

ελεγκτή υψηλών κερδών. Η εύρεση του t_{mati} στο [40] αφορά έλεγχο προδιαγεγραμμένης απόκρισης σε δικτυωμένα συστήματα με σήματα διακριτού χρόνου εσωτερικά του συστήματος (καταστάσεις, είσοδος ελέγχου).

Σε αυτή την εργασία υλοποιούμε ενα διανεμημένο πρωτοκόλλου ελέγχου:

- για πολυπρακτορικά συστήματα ηγέτη-ακολούθου με έλεγχο προδιαγεγραμμένης απόκρισης χαμηλής πολυπλοκότητας,
- σε επικοινωνία διακριτού χρόνου, δηλαδή όλα τα σήματα εξόδων των πρακτόρων και του ηγέτη είναι διακριτά
- και βρίσκουμε το μέγιστο επιτρεπτό διάστημα μετάδοσης των σημάτων αυτών, ώστε να πληρείται η ευστάθεια στο κλειστό βρόχο του πολυπρακτορικού συστήματος και κάθε πράκτορας να ακολουθεί με προκαθορισμένα χαρακτηριστικά τον ηγέτη, όταν λαμβάνει διακριτό σήμα αναφοράς.

Το σχήμα που ακολουθεί είναι αποσαφηνιστικό:



Σχήμα 1.4: Παράδειγμα γράφου με επικοινωνία διακριτού χρόνου

1.6 Διάρθρωση Εργασίας

Η πορεία της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας συνοψίζεται ως εξής:

Στο Κεφάλαιο 2, αναλύεται η κλάση των πολυπρακτορικών συστημάτων που θα μας απασχολήσουν και δίνονται οι απαραίτητες εξισώσεις και ορισμοί. Διατυπώνεται, επίσης, το πρόβλημα που θα επιλυθεί με τη μορφή θεωρήματος και στη συνέχεια δίνεται η απόδειξη του θεωρήματος αυτού που αποτελεί και το μέγιστο επιτρεπόμενο διάστημα μετάδοσης. Στο Κεφάλαιο 3, παρατίθενται οι προσομοιώσεις μέσω MATLAB για ομογενή και ετερογενή δυναμικά συστήματα πρακτόρων σε διακριτή επικοινωνίας και τέλος, στο Κεφάλαιο 4 παρατίθενται τα επιμέρους συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 2

Κύρια Αποτελέσματα

2.1 Διατύπωση Προβλήματος

2.1.1 Δυναμική Πολυπρακτορικού Συστήματος

Θεωρούμε το ετερογενές πολυπρακτορικό (multi-agent) σύστημα αποτελούμενο από έναν ηγέτη (leader) και $N > 1$ ακολούθους. Η δυναμική κάθε πράκτορα περιγράφεται από ένα μη γραμμικό δυναμικό μοντέλο βαθμού m_i σε κανονική μορφή:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i,q} &= x_{i,q+1} + f_{i,q}(x_{i,1}, \dots, x_{i,q}), \quad q = 1, \dots, m_i - 1 \\ \dot{x}_{i,m_i} &= f_{i,m_i}(x_i) + G_i(x_i)u_i + \zeta_i(t) \\ y_i &= x_{i,1}, \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}\tag{1}$$

όπου:

$y_i \in \mathbb{R}^M$ η έξοδος του συστήματος κάθε πράκτορα,
το διάνυσμα καταστάσεων κάθε πράκτορα i είναι:

$$x_i = \begin{bmatrix} x_{i,1} \\ \vdots \\ x_{i,m_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Mm_i}$$

με τα αντίστοιχα στοιχεία:

$$x_{i,q} = \begin{bmatrix} x_{i,q,1} \\ \vdots \\ x_{i,q,M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^M, \quad q = 1, \dots, m_i$$

η είσοδος ελέγχου κάθε πράκτορα i :

$$u_i = \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ \vdots \\ u_{i,M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^M,$$

το διάνυσμα εξωτερικών διαταραχών: $\zeta_i(t) \in \mathbb{R}^M$,
Επίσης, οι ακόλουθες συναρτήσεις:

$$\begin{aligned}f_{i,q} : \mathbb{R}^{qM} &\rightarrow \mathbb{R}^M, \quad q = 1, \dots, m_i \\ G_i : \mathbb{R}^{Mm_i} &\rightarrow \mathbb{R}^{M \times M}\end{aligned}$$

είναι μη γραμμικές τοπικά Lipschitz με άγνωστες αναλυτικές εκφράσεις.

Για κάθε πράκτορα $i = 1, \dots, N$ ορίζουμε το σφάλμα διαφωνίας εξόδου $\delta_{i,1}$ ως ε -
ξής:

$$\delta_{i,1} = [\delta_{i,1}^1 \quad \dots \quad \delta_{i,1}^M]^T \in \mathbb{R}^M \triangleq x_{i,1} - x_{0,1}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

Ορίζουμε, ακόμη, το σφάλμα συγχρονισμού γειτονιάς ως:

$$e_{i,1} = [e_{i,1}^1 \quad \dots \quad e_{i,1}^M]^T \in \mathbb{R}^M \quad (3)$$

με

$$e_{i,1} \triangleq \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_{i,1} - x_{j,1}) + b_i(x_{i,1} - x_{0,1}) \quad (4)$$

Ορίζουμε για $i = 1, \dots, N$, $q = 2, \dots, m$, τα κανονικοποιημένα διανύσματα σφάλματος
με $\xi_{i,1} = [\xi_{i,1}^1 \dots \xi_{i,1}^M]^T \in \mathbb{R}^M$, $\xi_{i,q} = [\xi_{i,q}^1 \dots \xi_{i,q}^M]^T \in \mathbb{R}^M$ και

$$\begin{aligned} \xi_{i,1} &\triangleq R_{i,1}^{-1} e_{i,1}, \\ \xi_{i,q} &\triangleq R_{i,q}^{-1} (x_{i,q} - \psi_{i,q-1}) \end{aligned} \quad (5)$$

όπου $\psi_{i,q} = [\psi_{i,q}^1 \dots \psi_{i,q}^M]^T \in \mathbb{R}^M$, $q = 1, \dots, m-1$ είναι τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου
όπως θα οριστούν στη συνέχεια στις (8), (9).

Επιπλέον:

$R_{i,q} = \text{diag}(\rho_{i,q}^1, \dots, \rho_{i,q}^M) \in \mathbb{R}^{M \times M}$, $q = 1, \dots, m$ με στοιχεία όπως ορίζονται στην (10),
και τα κέρδη $K_{i,q} = \text{diag}(K_{i,q}^1, \dots, K_{i,q}^M)$.

2.1.2 Υποθέσεις

Υπόθεση 1:

Το συμμετρικό μέρος $G_{si}(x_i) = \frac{G_i(x_i) + G_i^T(x_i)}{2}$, $i = 1, \dots, N$ του πίνακα που πολλαπλα-
σιάζεται με την είσοδο ελέγχου είναι ένας θετικά ή αρνητικά ορισμένος πίνακας και
γνωρίζουμε το πρόσημο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε θετικά ορισμένο.

Η Υπόθεση 1 είναι φανερό πως αποτελεί τη συνθήκη ελεγχιμότητας του παραπάνω συ-
στήματος (1).

Υπόθεση 2:

Οι διαταραχές $\zeta(t) \in \mathbb{R}^M$, είναι άγνωστες τμηματικά συνεχείς και φραγμένες συναρ-
τήσεις στο χρόνο, με γνωστό το άνω όριο $\bar{\zeta}$.

Υπόθεση 3:

Έστω ο ηγέτης του πολυπρακτορικού συστήματος
με διάνυσμα κατάστασης:

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1}^T \\ \vdots \\ x_{0,m}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Mm}$$

και διάνυσμα εξόδου $y_0 = x_{0,1} \in \mathbb{R}^M$

Θεωρούμε οτι η δυναμική του ηγέτη είναι τέτοια ώστε τα $x_{01}(t)$ και $\dot{x}_{01}(t)$ να είναι φραγμένα και επίσης γνωρίζουμε το άνω όριο από το οποίο φράσσεται καθένα από αυτά: $|x_{0,1}| \leq \bar{x}_{0,1}$, $|\dot{x}_{0,1}| \leq \bar{\dot{x}}_{0,1}$. Επιπλέον, μόνο το σήμα εξόδου του ηγέτη καθώς και τα σήματα εξόδου κάθε ακολούθου είναι διαθέσιμα για τη σχεδίαση του ελεγκτή κάθε πράκτορα.

Υπόθεση 4:

Ο επαυξημένος γράφος \tilde{G} περιέχει ένα γεννητορικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη (μηδενικός κόμβος). Για κάθε ακόλουθο υπάρχει ένα μονοπάτι από τον ηγέτη προς αυτόν.

Υπόθεση 5:

Η συγκεκριμένη υπόθεση αφορά τον διακριτό χρόνο και είναι η εξής:

Υπάρχουν κάποιες χρονικές στιγμές t_k , $k \in \mathbb{N}$ με $t_0 = 0$ και $t_{k+1} > t_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, που αναπαριστούν τις χρονικές στιγμές δειγματοληψίας. Έτσι, για το σήμα αναφοράς κάθε ακολούθου, το οποίο είναι σε διακριτό χρόνο ισχύει $x_{ref}(t) = x_{ref}(t_k) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}], k \in \mathbb{N}$.

Σημείωση: Αξίζει να επισημανθεί ότι κάθε πράκτορας μπορεί να λαμβάνει πληροφορία εξόδου, που τη χρησιμοποιεί σαν σήμα αναφοράς είτε μόνο από τον ηγέτη, είτε από τον ηγέτη και έναν ή περισσότερους γειτονικούς πράκτορες, είτε μόνο από άλλους πράκτορες.

2.1.3 Στόχος Ελέγχου - Θεώρημα

Στόχος Ελέγχου: Ο σχεδιασμός ενός διανεμημένου πρωτοκόλλου ελέγχου, χαμηλής υπολογιστικής πολυπλοκότητας, ενός ετερογενούς πολυπρακτορικού συστήματος που ικανοποιεί τις Υποθέσεις 1-4 και με διακριτό σήμα αναφοράς κάθε ακολούθου, το οποίο να ικανοποιεί την Υπόθεση 5 και επιτυγχάνει το σφάλμα διαφωνίας εξόδου $\delta_{i,1}$ κάθε ακολούθου:

$$\delta_{i,1} = [\delta_{i,1}^1 \quad \dots \quad \delta_{i,1}^M]^T \in \mathbb{R}^M \triangleq x_{i,1} - x_{0,1}, \quad i = 1, \dots, N$$

να οδηγείται με έναν προκαθορισμένο ελάχιστο ρυθμό σύγκλισης σε μια προκαθορισμένη μικρή γειτονιά γύρω από το μηδέν, διατηρώντας πάντα όλα τα σήματα που κυκλοφορούν στον κλειστό βρόχο φραγμένα.

****Σημείωση:** Η απαίτηση για χαμηλή πολυπλοκότητα υποδεικνύεται από πραγματικές υλοποιήσεις και εφαρμογές κατα τις οποίες είναι διαθέσιμοι περιορισμένοι υπολογιστικοί πόροι για τον κάθε πράκτορα. Η χαμηλή πολυπλοκότητα σε αυτή την περίπτωση σχετίζεται ποιοτικά άμεσα με τις ακόλουθες απαιτήσεις για το αντικείμενο του ελέγχου:

- 1) Απουσία οποιωνδήποτε προσεγγιστικών δομών από τις οποίες θα ήταν εφικτό να αντλήσουμε γνώση για τις εκάστοτε μη γραμμικότητες.
- 2) Το πρωτόκολλο ελέγχου δεν απαιτεί δύσκολους υπολογισμούς, ούτε δύσκολες αριθμητικές ή αναλυτικές μεθόδους.
- 3) Ο ελεγκτής είναι στατικός, αποφεύγοντας την αύξηση του βαθμού του κλειστού βρόχου.

Ορίζουμε το παρακάτω διάνυσμα που περιέχει τα σφάλματα γειτονιάς όλων των πράκτορων του γράφου:

$$\bar{e}_1 = [e_{1,1} \quad \dots \quad e_{N,1}]^T \in \mathbb{R}^{MN}.$$

Τότε, το γειτονικό σφάλμα συγχρονισμού μπορεί να γραφτεί σε συμπαγή μορφή:

$$\bar{e}_1 = ((L + B) \otimes I_M)(\bar{x}_1 - \mathbf{1} \otimes x_{0,1}) \quad (6)$$

όπου

$$\bar{x}_1 = [x_{1,1}^T \dots x_{N,1}^T]^T \in \mathbb{R}^{MN},$$

και I_M είναι η μοναδιαία μήτρα $M \times M$ και $\mathbf{1} = [1 \dots 1]^T \in \mathbb{R}^N$.

Για να συνεχίσουμε, ορίζουμε το σφάλμα διαφωνίας εξόδου όλων των πρακτόρων ως:

$$\bar{\delta}_1 = [\delta_{1,1}^T \dots \delta_{N,1}^T]^T \in \mathbb{R}^{MN} \triangleq \bar{x}_1 - \mathbf{1} \otimes x_{0,1} \quad (7)$$

Καθώς ο πίνακας $((L + B) \otimes I_M)$ είναι αντιστρέψιμος, από τις (4) και (5), λαμβάνουμε:

$$|\bar{\delta}_1| \leq \frac{|\bar{e}_1|}{\underline{\sigma}((L + B) \otimes I_M)} = \frac{|\bar{e}_1|}{\underline{\sigma}(L + B)} \quad (8)$$

Παρατήρηση 1: Μέσω του γειτονικού σφάλματος συγχρονισμού \bar{e}_1 έχουμε μια έγκυρη μετρική της ποιότητας του συγχρονισμού μεταξύ των πρακτόρων, η οποία περιγράφεται από το σφάλμα διαφωνίας εξόδου $\bar{\delta}_1$. Ωστόσο, καθώς η τιμή $\sigma(L + B)$ είναι μια μεταβλητή που εξαρτάται από την καθολική τοπολογία του διανεμημένου συστήματος, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο σχεδιασμό του διανεμημένου ελέγχου, ώστε να τεθούν τα απαιτούμενα όρια στο σφάλμα $\bar{\delta}_1$. Για να επιλυθεί αυτό το θέμα, γίνεται χρήση ενός πιο χαλαρού κατώτερου ορίου, όπως αυτό περιγράφεται στο [43]. Συγκεκριμένα, το όριο, εξαρτάται αποκλειστικά από τον αριθμό των εκάστοτε N ακολούθων και όχι από τον γράφο του πολυπρακτορικού συστήματος.

Επομένως, χρησιμοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$|\bar{\delta}_1| \leq \frac{|\bar{e}_1|}{\underline{\sigma}(L + B)} \leq \left(\frac{N^3 + N^2 - N}{N - 1} \right)^{\frac{N-1}{2}} |\bar{e}_1| \quad (9)$$

Παρατήρηση 2: Κατά τη μετάβαση από το συνεχή στο διακριτό χρόνο των σημάτων αναφοράς, παρατηρούμε ότι το μέγιστο επιτρεπόμενο διάστημα μετάδοσης εξαρτάται από το $\rho(t)$. Σε περίπτωση που οι τιμές των $\rho(t)$ και $\sigma(L + B)$ δεν μας επιτρέπουν να θέσουμε τα επιθυμητά χαρακτηριστικά, τότε θα πρέπει να είναι γνωστή εκ των προτέρων η τοπολογία των πρακτόρων, ώστε να υπολογίσουμε μια πιο ακριβή τιμή για το κάτω όριο της ιδιάζουσας τιμής.

Ο στόχος ελέγχου συνοψίζεται ως εξής στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1:

Θεωρήστε ένα πολυπρακτορικό σύστημα, με οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες και οποιαδήποτε τροχιά αναφοράς του ηγέτη, που αποτελείται από N πράκτορες, όπως περιγράφεται από την (1), ικανοποιώντας τις Υποθέσεις 1, 2 και έναν ηγέτη που ικανοποιεί την Υπόθεση 3. Το γράφημα επικοινωνίας είναι κατευθυνόμενο και ικανοποιεί την Υπόθεση 4 και τα σήματα αναφοράς των πρακτόρων την Υπόθεση 5.

Θεωρούμε, ακόμη, τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου για κάθε διάσταση $p = 1, \dots, M$:

Για $q = 1$

$$\psi_{i,1}^p = -K_{i,1}^p T \left(\frac{e_{i,1}^p}{\rho_{i,1}^p} \right), \quad (10)$$

Για $q = 2, \dots, m_i - 1$,

$$\psi_{i,q}^p = -K_{i,q}^p T \left(\frac{x_{i,q}^p - \psi_{i,q-1}^p}{\rho_{i,q}^p} \right) \quad (11)$$

Για $q = m_i$ λαμβάνουμε το τελικό σήμα ελέγχου:

$$\psi_{i,m}^p = -K_{i,m}^p r_{i,m}^p T \left(\frac{x_{i,m}^p - \psi_{i,m-1}^p}{\rho_{i,m}^p} \right), \quad r_{i,m} = \frac{T'(\xi_{i,m})}{\rho_{i,m}} \quad (12)$$

Το κατανεμημένο πρωτόκολλο ελέγχου ορίζεται ως $u_{i,m_i} = \psi_{i,m_i}^p$, όπου:

$$\rho_{i,q}^p(t) = (\rho_{i,q}^p(0) - \rho_{i,q,\infty}^p)e^{-\bar{F}_{i,q}^p t} + \rho_{i,q,\infty}^p, \quad q = 1, \dots, m_i \quad (13)$$

για $i = 1, \dots, N$, $p = 1, \dots, M$

Οι παράμετροι σχεδίασης ικανοποιούν:

$$\begin{aligned} \rho_{i,1}^p(0) &> |e_{i,1}^p(0)| \\ \rho_{i,q}^p(0) &> |x_{i,q}^p(0) - \psi_{i,q-1}^p(0)|, \quad q = 2, \dots, m_i \end{aligned} \quad (14)$$

Αν οι χρονικές στιγμές δειγματοληψίας t_k ικανοποιούν για κάθε $k \in \mathbb{N}$:

$$t_{k+1} - t_k \leq \tau_{mati}$$

$$\begin{aligned} t_{mati} = \min_{i,p, q=2, \dots, m-1} \{ & \frac{\rho_{i,1,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,1} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i + b_i) K_{i,1}^p} \right) \right)}{\bar{F}_{i,1}^p + (d_i + b_i) K_{i,1}^p T(\bar{\xi}_{i,1})}, \\ & \frac{\rho_{i,q,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,q} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,q}^p}{K_{i,q}^p} \right) \right)}{\bar{F}_{i,q}^p + K_{i,q}^p T(\bar{\xi}_{i,q})}, \\ & \frac{\rho_{i,m,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,m} - T^{-1} \left(\frac{F_{i,m}^p}{\underline{I}_{i,m}^p K_{i,m}^p g_i^*} \right) \right)}{\bar{F}_{i,m}^p + G_i^* K_{i,m}^p \bar{r}_{i,m}^p T(\bar{\xi}_{i,m})} \} \end{aligned} \quad (15)$$

όπου, οι σταθερές $\bar{\xi}_{i,1}$ ικανοποιούν για όλους τους ακολούθους $i = 1, \dots, N$ την παρακάτω ανισότητα:

για $q = 1$

$$\max_p \left\{ |\xi_{i,1}^p(0)|, T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i + b_i) K_{i,1}^p} \right) \right\} < \bar{\xi}_{i,1} < 1,$$

για $q = 2, \dots, m - 1$

$$\max_p \left\{ |\xi_{i,q}^p(0)|, T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,q}^p}{K_{i,q}^p} \right) \right\} < \bar{\xi}_{i,q} < 1$$

και για $q = m$

$$\max_p \left\{ |\xi_{i,m}^p(0)|, T^{-1} \left(\frac{F_{i,m}^p}{\underline{I}_{i,m}^p K_{i,m}^p g_i^*} \right) \right\} < \bar{\xi}_{i,m} < 1, \quad (16)$$

με παραμέτρους:

$$\bar{F}_{i,1}^p = (d_i + b_i) \left(\bar{f}_{i,1}^p + \rho_{i,2}^p(0) \right) + b_i |\dot{x}_{0,1}^p| + \sum_{j \in Ni} (\bar{f}_{j,1}^p + \rho_{j,2}^p(0) + |\psi_{j,1}^p|) + |\dot{\rho}_{i,1}^p| \quad (17\alpha)$$

$$\bar{F}_{i,q}^p = \bar{f}_{i,q}^p + \rho_{i,q+1}^p(0) + \bar{\rho}_{i,q}^p + \bar{\psi}_{i,q-1}^p, \quad (17\beta)$$

$$\bar{F}_{i,m}^p = \bar{f}_{i,m}^p + \bar{\psi}_{i,q-1}^p + \bar{\rho}_{i,m}^p + \bar{\zeta}, \quad (17\gamma)$$

$$\bar{f}_{i,1} = \sup_{|\bar{x}_{i,1}| < \frac{\rho_{i,1}(0)}{\sigma_{minL+B}} + \bar{x}_{0,1}} |f_{i,1}(\bar{x}_{i,1})|, \quad (17\delta)$$

$$\bar{f}_{i,q} = \sup_{|\bar{x}_{i,j}| < \rho_{i,j}^0 + \bar{\psi}_{i,j-1}, j=1,\dots,q} |f_{i,q}(\bar{x}_{i,q})|, \quad q = 2, \dots, m, \quad (17\delta)$$

$$\bar{\psi}_{i,q} = K_{i,q}^p \bar{r}_{i,q}^p \left(\bar{F}_{i,q}^p + \bar{\psi}_{i,q}^p \right) \quad q = 1, \dots, m-1 \quad (17\epsilon)$$

$$\bar{\psi}_{i,q}^p = K_{i,q}^p T \left(\bar{\xi}_{i,q}^p \right), \quad (17\sigma)$$

$$\bar{\rho}_{i,1} = \bar{\rho}_{i,1}^0, \quad (17\eta)$$

$$\bar{r}_{i,q}^p = \frac{T'(\bar{\xi}_{i,q}^p)}{\rho_{i,q}^p(\infty)}, \quad q = 1, \dots, m-1$$

$$\underline{r}_{i,m}^p = \frac{T'(0)}{\rho_{i,m}^p(0)}$$

Στη σχέση 17α είναι N_i : σύνολο γειτονικών πρακτόρων από τους οποίους λαμβάνει σήμα αναφοράς ο πράκτορας i .

Τότε ο παραπάνω ελεγκτής με διακριτό σήμα αναφοράς για κάθε πράκτορα, επιτυγχάνει $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$:

a)

$$|\delta_{i,1}^p(t)| \leq \left(\frac{N^3 + N^2 - N}{N - 1} \right)^{\frac{N-1}{2}} |\rho_{i,1}^p(t)|, \quad \forall t \geq 0 \quad (18)$$

β) Την φραγμένη συμπεριφορά όλων των σημάτων του κλειστού βρόχου.

Παρατήρηση 1: Τα άνω όρια $\bar{\xi}_{i,q}$ επιλέγονται ελεύθερα αρκεί να πληρούν τη σχέση (16).

Παρατήρηση 2: Κάθε πράκτορας πρέπει να λαμβάνει την πληροφορία σήματος αναφοράς με τον ίδιο ρυθμό $T_s \leq t_{mati}$ από όλους τους γειτονικούς πράκτορες ή τον ηγέτη, που επικοινωνεί.

Παρατήρηση 3: Για κάθε πράκτορα πρέπει πρώτα να έχουμε εξασφαλίσει ότι όλοι οι υπόλοιποι πράκτορες σε κάθε μονοπάτι από τον ηγέτη προς αυτόν έχουν εξασφαλίσει T_s στην δειγματοληψία του δικού τους σήματος αναφοράς, τέτοιο ώστε να διαθεβαιώνεται η ευστάθεια τους και τα προκαθορισμένα χαρακτηριστικά και έπειτα να προχωρήσουμε στην ανάλυση για το συγκεκριμένο πράκτορα, όπως αυτή περιγράφεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 1. Αυτή η απαίτηση ουσιαστικά μεταφράζεται στο ότι παίρνουμε τελικά το ελάχιστο όλων των επιμέρους t_{mati} των πρακτόρων.

Παρατήρηση 4: Όσον αφορά το t_{mati} για το πολυπρακτορικό σύστημα προκύπτουν οι δύο παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όλοι οι πράκτορες λαμβάνουν τα εκάστοτε σήματα αναφοράς με τον ίδιο ρυθμό

δειγματοληψίας T_s . Επομένως, για τον κοινό ρυθμό δειγματοληψίας θα πρέπει να ισχύει:

$$T_s \leq t_{mati} = \min_i t_{mati}(i), \quad i = 1, \dots, N$$

ii) Οι πράκτορες λαμβάνουν τα εκάστοτε σήματα αναφοράς με διαφορετικό ρυθμό δειγματοληψίας T_s^i . Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να ισχύει:

$$T_s^i \leq \min_i t_{mati}(i), \quad i \in \bar{N}_i,$$

όπου, το σύνολο \bar{N}_i περιλαμβάνει όλους τους πράκτορες που υπάρχουν σε κάθε μονοπάτι του γράφου από τον ηγέτη έως τον πράκτορα i :

$$\bar{N}_i = \bigcup_{P \in \mathcal{P}(n_0, n_i)} V(P)$$

με $P(n_0, n_i)$ να είναι το σύνολο όλων των μονοπατιών από τον ηγέτη n_0 στον πράκτορα n_i
και $V(P)$ το σύνολο των πρακτόρων που ανήκουν στο P

Παρατήρηση 5: Από τις σχέσεις (15), (17a) του Θεωρήματος, προκύπτει ότι το φράγμα $\bar{F}_{i,1}^p$ λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές όταν οι πράκτορες βρίσκονται σε μεγαλύτερο επίπεδο και δεν επικοινωνούν άμεσα με τον ηγέτη (δηλαδή επίπεδο > 1). Τότε θα προκύψει μικρότερο t_{mati} και κατ' επέκταση μικρότερο T_s . Επίσης, μεγαλύτερες τιμές λαμβάνει το $\bar{F}_{i,1}^p$, όταν ένας πράκτορας λαμβάνει σήμα αναφοράς από πολλούς πράκτορες, ωστόσο αυτό αντισταθμίζεται, ως ένα βαθμό, μέσω του $(d_i + b_i)$ που βρίσκεται στον παρονομαστή του $T^{-1}(\cdot)$, σχέση (16), είτε μέσω των κερδών.

Παρατήρηση 6: Από τις σχέσεις 15 και 17a, παρατηρούμε ότι τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου $\psi_{i,1}$ του εκάστοτε πράκτορα i , καθώς και τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου $\psi_{j,1}$ των γειτονικών πρακτόρων j από τους οποίους λαμβάνει σήμα αναφοράς ο i επηρεάζουν το t_{mati} , (όταν αυξάνονται το t_{mati} μειώνεται).

**Τα παραπάνω εξασφαλίζουν ότι σε κάθε περίπτωση όλα τα συστήματα θα είναι σε ευστάθεια και θα ελέγχονται με προκαθορισμένα χαρακτηριστικά στο διακριτό χρόνο.

2.1.4 Εξάρτηση t_{mati} από την τοπολογία

Αριθμητικά, η τοπολογία του γράφου επηρεάζει το σφάλμα στγχρονισμού $e_{i,1}$ μέσω της νόρμας του πίνακα $L+B = D-A+B$. Στην περίπτωση που εμφανίζονται όλες οι δυνατές συνδέσεις μεταξύ των πρακτόρων του γράφου ο πίνακας παίρνει τη μορφή:

$$L+B = \begin{bmatrix} N & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & N & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & N \end{bmatrix}$$

και επομένως το άνω όριο της ιδιάζουσας τιμής είναι:

$$\bar{\sigma}(L+B) = \lambda_{max}(L) + 1 = N + 1$$

και για το κάτω όριο αντίστοιχα, όπως έχουμε αναφερθεί, από [43] είναι:

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(L+B)} \leq \left(\frac{N^3 + N^2 - N}{N - 1} \right)^{\frac{N-1}{2}}$$

Ο διαγώνιος πίνακας D , όπως αυτός ορίστηκε στο Κεφάλαιο 1, έχει για στοιχεία του τον αριθμό των πρακτόρων από τους οποίους λαμβάνει πληροφορία ο κάθε πράκτορας. Άρα, στη χειρότερη περίπτωση $\lambda(D) \leq N - 1$. Επίσης, η πληροφορία για το αν κάθε πράκτορας λαμβάνει σήμα αναφοράς από τον ηγέτη ενσωματώνεται στα στοιχεία του B , και άρα $\lambda(B) \in \{0, 1\}$.

Επομένως, για κάθε ακόλουθο $i = 1, \dots, N$ γνωρίζοντας τον αριθμό d_i των ακολούθων από τους οποίους λαμβάνει σήμα αναφοράς, το b_i το οποίο υποδεικνύει αν λαμβάνει πληροφορία από τον ηγέτη και τέλος τα στοιχεία j για τα οποία ισχύει $a_{ij} = 1$, τα οποία δείχνουν από ποιους πράκτορες λαμβάνει σήμα αναφοράς, θα ισχύει για το σφάλμα στγχρονισμού:

$$e_{i,1} = (d_i + b_i)x_{i,1} - b_i x_{0,1} - \sum_{j \in Ni} y_{j,1}$$

και η παράγωγος ως προς το χρόνο:

$$\dot{e}_{i,1} \leq (d_i + b_i)\dot{x}_{i,1} + b_i \dot{x}_{0,1} + \sum_{j \in Ni} |\dot{x}_{j,1}|$$

αντίστοιχα για το φράγμα της παραγώγου ως προς το χρόνο προκύπτει:

$$|\dot{e}_{i,1}| \leq (d_i + b_i)|\dot{x}_{i,1}| + b_i|\dot{x}_{0,1}| + \sum_{j \in Ni} |\dot{x}_{j,1}|$$

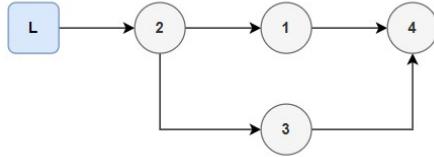
Επίσης:

$$|\dot{\xi}_{i,1}| \leq \frac{1}{\rho_{i,1}^\infty} (|\dot{e}_{i,1}| + \dot{\rho}_{i,1}(0))$$

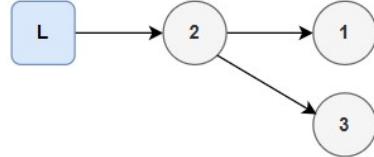
Παρατήρηση: Ο πίνακας $(L+B)$, μέσω των d_i, b_i, a_{ij} εμφανίζεται στο φράγμα $\bar{F}_{i,1}^p$, το οποίο συναντάται στον παρονομαστή του μέγιστου επιτρεπόμενου διαστήματος μετάδοσης, αλλά και με αρνητικό πρόσημο στον αριθμητή. Επομένως, όσο περισσότερες

συνδέσεις έχουμε μεταξύ των πρακτόρων τόσο η θετική σταθερά $\bar{F}_{i,1}^P$ αυξάνεται με αποτέλεσμα το t_{mati} να λαμβάνει πιο μικρές τιμές για την εκ των προτέρων εγγύηση της ευστάθειας σχέση (15).

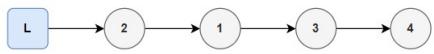
Παρατίθενται οι μέγιστες και οι ελάχιστες ιδιάζουσες τιμές για τους ακόλουθους γράφους:



Σχήμα 2.1: $\sigma_{L+B} : 2.57/0.43$



Σχήμα 2.2: $\sigma_{L+B} : 1.93/0.5$



Σχήμα 2.3: $\sigma_{L+B} : 1.87/0.35$



Σχήμα 2.4: $\sigma_{L+B} : 1.8/0.44$

- Η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή μας δίνει πληροφορία για τη συνεκτικότητα του γράφου. 'Οσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του σ_{max} τόσο πιο συνεκτικός είναι ο γράφος, δηλαδή υπάρχουν περισσότερες συνδέσεις μεταξύ των πρακτόρων, καθώς η τιμή $(d_i + b_i)$ εκφράζει ουσιαστικά πως επηρεάζει αριθμητικά ο πίνακας $L + B$ τον κάθε πράκτορα μεμονωμένα. Επίσης, όσον αφορά το Θεώρημα 1 για μεγαλύτερες τιμές σ_{max} έχουμε μεγαλύτερες τιμές των άνω φραγμάτων F_1 , $|\xi_1|$ και άρα στην ανάλυση χειρότερου σεναρίου η τιμή του t_{mati} θα λάβει μικρότερη τιμή (μη επιθυμητό).
- Η ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή σχετίζεται με την δυνατότητα κάθε πράκτορα να ευθυγραμμίζεται με τον ηγέτη και ουσιαστικά δίνει πληροφορία για τη ποιότητα του συγχρονισμού. 'Οσο μεγαλύτερο είναι το σ_{min} τόσο ο όρος $\frac{\rho(t)}{\sigma_{min}}$ λαμβάνει μικρότερες τιμές και άρα το σφάλμα στο σήμα αναφοράς κάθε πράκτορα διαφέρει λιγότερο από το σήμα αναφοράς του ηγέτη. Οπότε, το $|\xi_1|$ μειώνεται και το t_{mati} αυξάνεται, κάτι το οποίο είναι επιθυμητό.

Συμπέρασμα: Συνολικά, για την υλοποίηση του ελέγχου στο διακριτό χρόνο είναι επιθυμητό ο γράφος να έχει μεγαλύτερες τιμές για το $\underline{\sigma}$ και μικρότερες τιμές για το $\bar{\sigma}$, ώστε να επιτυγχάνονται μεγαλύτερες τιμές για το t_{mati} (εφόσον θεωρούμε τις υπόλοιπες παραμέτρους που επηρεάζουν, όπως τα κέρδη αμετάβλητες).

Για να γίνει εξισορρόπηση (trade-off) μεταξύ αυτών των δύο απαιτήσεων διαπιστώνουμε ότι ένας κυκλικός γράφος είναι η καλύτερη επιλογή με όσο είναι εφικτό, για να επιλυθεί το εκάστοτε πρόβλημα, λιγότερους κόμβους.

Στην περίπτωση, που θέλουμε να μελετήσουμε την επίδραση της επικοινωνίας μεμονωμένα για κάθε πράκτορα καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Αν ένας πράκτορας λαμβάνει σήματα αναφοράς από πολλούς γειτονικούς πράκτορες (συμπεριλαμβανομένου ή όχι του ηγέτη), τότε η τιμή $d_i + b_i$, που βρίσκεται στον παρονομαστή του t_{mati} θα είναι μεγαλύτερη και άρα το απαιτούμενο t_{mati} μικρότερο.

- Αν ένας πράκτορας βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από τον ηγέτη, δηλαδή σε επόμενα επίπεδα (layer), τότε η τιμή του φράγματος $\bar{F}_{i,1}^p$ θα λαμβάνει μεγαλύτερη τιμή, διότι τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου $\psi_{j,1}$ τα οποία φράσσουν την παράγωγο του σήματος $\dot{x}_{j,1}$ των γειτονικών πρακτόρων λαμβάνουν μεγαλύτερες τιμές. Καθώς το φράγμα $\bar{F}_{i,1}^p$ λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές, από τη σχέση (15) το απαιτούμενο τ_{mati} μειώνεται.

*Σημείωση: Υπενθυμίζουμε ότι η θεωρητική ανάλυση για το μέγιστο επιτρεπόμενο διάστημα μετάδοσης βασίζεται σε ανάλυση χειρότερου σεναρίου, οπότε και τα συμπεράσματα για τη συσχέτιση της τοπολογίας αναφέρονται σε τέτοια περίπτωση χειρότερης ανάλυσης.

2.1.5 Διερεύνηση Συναρτήσεων Μετασχηματισμού

Όσον αφορά τη συνάρτηση μετασχηματισμού σφάλματος $T(\xi)$, όπως αυτή περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 1, υπάρχουν διαθέσιμες ορισμένες υποψήφιες συναρτήσεις με τις απαραίτητες ιδιότητες για τη μέθοδο ελέγχου προδιαγεγραμμένης απόκρισης. Η πιο συχνή επιλογή είναι η συνάρτηση που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 1. Ωστόσο, η συνάρτηση κοντά στα όρια -1 και 1 παρουσιάζει απότομη σχετικά καμπύλη. Για τον λόγο αυτό, στην περίπτωση των πολυπρακτορικών συστημάτων που μελετάμε σε αυτή την εργασία, προτείνουμε την συνάρτηση μετασχηματισμού του κανονικοποιημένου σφάλματος:

$$T(\xi) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$$

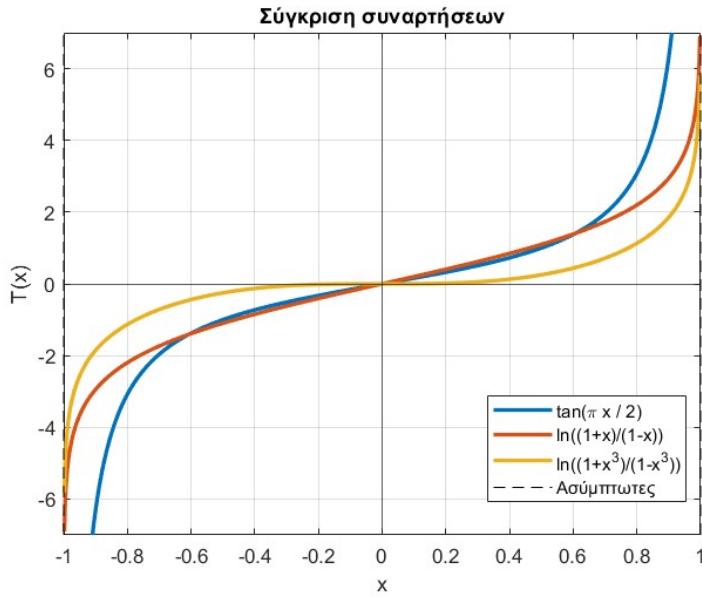
με την αντίστροφή της συνάρτηση:

$$T^{-1}(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(\varepsilon)$$

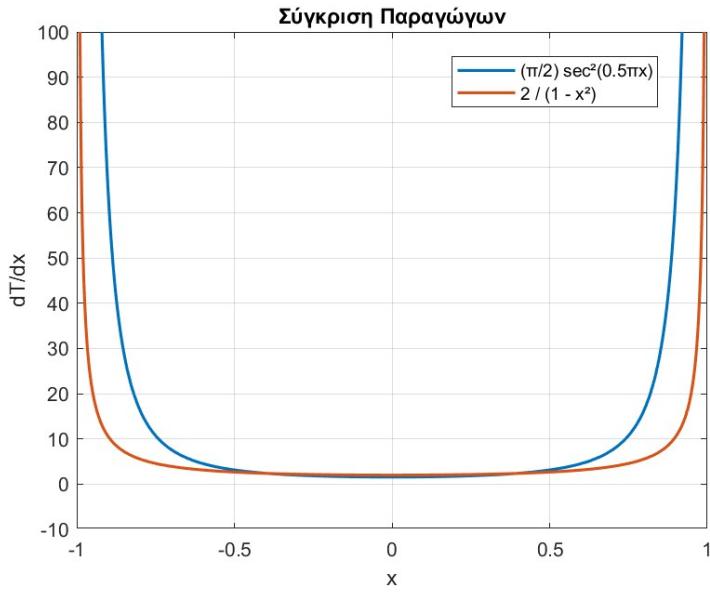
και με συνάρτηση παραγώγου ως προς ξ :

$$\frac{dT}{d\xi} = \frac{\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$$

Για την παραπάνω συνάρτηση $T(\xi)$ ισχύει ότι είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(-1, 1)$ και $T : (-1, 1) \rightarrow (-\infty, \infty)$. Επιπλέον, όπως είναι γνωστό και γίνεται αντιληπτό και από το παρακάτω διάγραμμα, η συγκεκριμένη συνάρτηση μετασχηματισμού $T(\xi)$ λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές για ξ κοντά στα σημεία -1 και 1, συγκριτικά με την $\ln((1 + \xi)/(1 - \xi))$. Αυτό είναι σημαντικό, ώστε να αποφεύγεται η αστάθεια στο διακριτό χρόνο, ιδιαίτερα για τους πράκτορες που βρίσκονται σε μεγαλύτερα επίπεδα στο γράφο επικοινωνίας.



Παρατίθενται, αντίστοιχα, οι παράγωγοι των συναρτήσεων μετασχηματισμού:



** Η παραπάνω συνάρτηση της εφαπτομένης βοηθά στο να προκύπτουν αριθμητικά μεγαλύτερα t_{mati} και επομένως για μεγαλύτερο T_S μπορούμε να εγγυηθούμε ευστάθεια και προκαθορισμένα χαρακτηριστικά, όταν κυριαρχεί η χειρότερη περίπτωση κατά τη διακριτή επικοινωνία των πρακτόρων, όπως αυτή αναλύεται στην Απόδειξη του Θεωρήματος 1.

2.2 Ανάλυση Ευστάθειας

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1, ακολουθείται μία επαναληπτική διαδικασία, κατά την οποία αναλύουμε την ευστάθεια κάθε πράκτορα, θεωρώντας ότι όλοι οι υπόλοιποι πράκτορες που βρίσκονται σε κάθε μονοπάτι από τον ηγέτη προς αυτόν, βρίσκονται σε ευστάθεια. Αυτή η απαίτηση πληρείται όταν τελικά λαμβάνουμε το ελάχιστο όλων των επιμέρους τ_{mati} που βρέθηκαν για κάθε πράκτορα κατά την ανάλυση ευστάθειας. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο ηγέτης δεν ελέγχεται και ισχύει η Υπόθεση 3 για την έξοδό του.

2.2.1 Απόδειξη Θεωρήματος

Απόδειξη Θεωρήματος 1

Ορίζουμε το μη κενό και ανοιχτό σύνολο $\Omega_\xi = (-1, 1)^M \subset \mathbb{R}$.

Για κάθε ακόλουθο $i = 1, \dots, N$ επειδή ισχύει:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_{i,1}^p(0) &> |e_{i,1}^p(0)| \\ \rho_{i,q}^p(0) &> |x_{i,q}^p(0) - \psi_{i,q-1}^p(0)|, \quad q = 2, \dots, m_i \end{aligned}}$$

προκύπτει ότι $\xi_{i,q}(0) \in \Omega_\xi^M$ και άρα $\varepsilon_{i,q}(0)$, $q = 1, \dots, m_i$ είναι καλά ορισμένο.

Έχαιτίας της (22) συμπεραίνουμε ότι ισχύει: $\boxed{\xi_{i,q}(0) \in (-\bar{\xi}_{i,q}, \bar{\xi}_{i,q}) \subset \Omega_\xi}$

Έστω ότι $t_1 > 0$ είναι η επόμενη χρονική στιγμή δειγματοληψίας.

Λόγω των (16) και (17) προκύπτει η συνέχεια των $\xi_{i,q}(t)$ και κατα συνέπεια υπάρχει μέγιστο χρονικό διάστημα $t \in [0, t_{max}^1]$ τέτοιο ώστε $\xi_{i,q}(t) \in \Omega_\xi^M$ για κάθε $t \in [0, t_{max}^1]$.

Επιπλέον, καθώς έχουμε $[-\bar{\xi}_{i,q}, \bar{\xi}_{i,q}] \subset \Omega_\xi^M$ προκύπτει ότι $t_{max}^1 > t_1$.

Παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο τα $\xi_{i,q}(t)$ για κάθε q , και έτσι προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{i,1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{i,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{i,1}^{-1} \left((d_i + b_i)(x_{i,2} + f_{i,1}(x_{i,1})) - b_i \dot{x}_{0,1} - \sum_{j \in N_i} \dot{x}_{j,1} - \dot{R}_{i,1} \xi_{i,1} \right) \\ R_{i,2}^{-1} \left((x_{i,3} + f_{i,2}(x_{i,1}, x_{i,2}) - \dot{\psi}_{i,1}) - \dot{R}_{i,2} \xi_{i,2} \right) \\ \vdots \\ R_{i,(m-1)}^{-1} \left((x_{i,m} + f_{i,(m-1)}(x_{i,1}, \dots, x_{i,(m-1)}) - \dot{\psi}_{i,(m-2)}) - \dot{R}_{i,(m-1)} \xi_{i,(m-1)} \right) \\ R_{i,m}^{-1} \left((f_{i,m}(x_i) + G(x_i)u + \zeta(t) - \dot{\psi}_{i,(m-1)}) - \dot{R}_{i,m} \xi_{i,m} \right) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Ορίζουμε τα σφάλματα:

$$\varepsilon_{i,q} = [\varepsilon_{i,q}^1 \dots \varepsilon_{i,q}^M]^T$$

και

$$\varepsilon_{i,q} = \left[\ln \left(\frac{1+\xi_{i,q}^1}{1-\xi_{i,q}^1} \right) \quad \dots \quad \ln \left(\frac{1+\xi_{i,q}^M}{1-\xi_{i,q}^M} \right) \right]^T \quad (20)$$

Σημειώνεται ότι τα στοιχεία $\varepsilon_{i,q}^p$, $p = 1, \dots, M$ είναι καλά ορισμένα για κάθε $t \in [0, t_1]$. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο, λαμβάνουμε:

$$\dot{\varepsilon}_{i,1} = r_{i,1} \left((d_i + b_i)(x_{i,2} + f_{i,1}(x_{i,1})) - b_i \dot{x}_{0,1} - \sum_{j \in Ni} \dot{x}_{j,1} - \dot{R}_{i,1} \xi_{i,1} \right), \quad (21)$$

και

$$\dot{\varepsilon}_{i,q} = r_{i,q} (\dot{x}_{i,q} - \dot{\psi}_{i,q-1} - \dot{R}_{i,q} \xi_{i,q}), \quad q = 2, \dots, m, \quad (22)$$

όπου

$$r_{i,q} = \text{diag} \left(\frac{T'(\xi_{i,q}^1)}{\rho_{i,q}^1}, \dots, \frac{T'(\xi_{i,q}^M)}{\rho_{i,q}^M} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad q = 1, \dots, m$$

Το **πρωτόκολλο ελέγχου** (10)-(12) μπορεί να γραφτεί ως:

$\psi_{i,q} = -K_{i,q} \varepsilon_{i,q}, \quad q = 1, \dots, m-1$
$u = -K_{i,m} r_{i,m} \varepsilon_{i,m}$

Συνεχίζουμε την ανάλυση ακολουθώντας μια **επαναληπτική διαδικασία** τη βημάτων για κάθε πράκτορα **i**, η οποία περιγράφεται παρακάτω:

Βήμα ($q = 1$)

Θεωρούμε την θετικά ορισμένη συνάρτηση Lyapunov για κάθε $t \in [0, t_1]$:

$$V_{i,1} = \frac{1}{2} \varepsilon_{i,1}^T \varepsilon_{i,1}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο τη συνάρτηση Lyapunov θα έχουμε για κάθε $t \in [0, t_1]$:

$$\dot{V}_{i,1} = \varepsilon_{i,1}^T \dot{\varepsilon}_{i,1}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (21) λαμβάνουμε:

$$\dot{V}_{i,1} = \varepsilon_{i,1}^T r_{i,1} \left((d_i + b_i)(x_{i,2} + f_{i,1}(x_{i,1})) - b_i \dot{x}_{0,1} - \sum_{j \in Ni} \dot{x}_{j,1} - \dot{R}_{i,1} \xi_{i,1} \right)$$

Επίσης, ισχύουν οι σχέσεις: $x_{i,2} = R_{i,2} \xi_{i,2} + \psi_{i,1}$ και $\psi_{i,1} = -K_{i,1} \varepsilon_{i,1}$. Αντικαθιστώντας, η \dot{V}_1 για κάθε $t \in [0, t_1]$ γίνεται:

$$\dot{V}_{i,1} = \varepsilon_{i,1}^T r_{i,1} \left((d_i + b_i)(R_{i,2} \xi_{i,2} - K_{i,1} \varepsilon_{i,1} + f_{i,1}(x_{i,1})) - b_i \dot{x}_{0,1} - \sum_{j \in Ni} \dot{x}_{j,1} - \dot{R}_{i,1} \xi_{i,1} \right)$$

ή

$$\dot{V}_{i,1} = \varepsilon_{i,1}^T r_{i,1} \left((d_i + b_i)(R_{i,2} \xi_{i,2} + f_{i,1}(x_{i,1})) - b_i \dot{x}_{0,1} - \sum_{j \in Ni} \dot{x}_{j,1} - \dot{R}_{i,1} \xi_{i,1} - K_{i,1}(d_i + b_i) \varepsilon_{i,1} \right)$$

ή

$$\dot{V}_{i,1} = -\varepsilon_{i,1}^T r_{i,1} K_{i,1} (d_i + b_i) \varepsilon_{i,1} + \varepsilon_{i,1}^T r_{i,1} \left((d_i + b_i)(R_{i,2} \xi_{i,2} + f_{i,1}(x_{i,1})) - b_i \dot{x}_{0,1} - \sum_{j \in Ni} \dot{x}_{j,1} - \dot{R}_{i,1} \xi_{i,1} \right)$$

Ο πίνακας $r_{i,1}$ είναι διαγώνιος και θετικά ορισμένος. Το ίδιο ισχύει και για τον διαγώνιο πίνακα $K_{i,q}$ των κερδών. Δεδομένου ότι $\xi_{i,1}, \xi_{i,2} \in \Omega_\xi^M$, καταλήγουμε ότι τα $\xi_{i,1}, \xi_{i,2}$ είναι φραγμένα για κάθε $t \in [0, t_1]$. Επιπλέον, τα $\rho_{i,2}, \dot{\rho}_{i,1}, \dot{x}_{0,1}$ είναι φραγμένα εκ κατασκευής.

Από (5), τον ορισμό του $R_{i,1}$ και το γεγονός ότι $\xi_{i,1} \in \Omega_\xi$, καταλήγουμε άμεσα στο ότι το $e_{i,1}$ είναι φραγμένο για κάθε $t \in [0, t_1]$ και συνεπώς από τη σχέση (4) και την Υπόθεση 4, συμπεραίνουμε ότι τα $x_{i,1}, \delta_{i,1}$ είναι φραγμένα για κάθε $t \in [0, t_1]$.

****Σημείωση:** Η παράγωγος των πρώτων καταστάσεων των γειτονικών πρακτόρων $\dot{x}_{j,1}, j \in N_i$ είναι επίσης φραγμένη, καθώς θεωρούμε ότι οι γειτονικοί πράκτορες έχουν εξασφαλίσει T_s κατάλληλα, ώστε να επιτυχάνεται η ευστάθεια τους και το φραγμένο των σημάτων του κλειστού βρόχου τους. Αυτή η απαίτηση ουσιαστικά πληρείται όταν τελικά λαμβάνουμε το ελάχιστο των επιμέρους t_{mati} κάθε πράκτορα. Επίσης, όσον αφορά τους πράκτορες που βρίσκονται στο επίπεδο 1 και λαμβάνουν πληροφορία μόνο απευθείας από τον ηγέτη, είναι δεδομένο ότι η παράγωγος $\dot{x}_{j,1} = \dot{x}_{0,1}$ είναι φραγμένη, διότι ο ηγέτης δεν ελέγχεται και η δυναμική του είναι τέτοια που πληρείται η Υπόθεση 3. Επομένως, ακολουθιακά από το επίπεδο 0 (ηγέτης) έως το τελευταίο επίπεδο του γράφου - εφόσον για κάθε πράκτορα υπάρχει μονοπάτι από τον ηγέτη προς αυτόν - μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\dot{x}_{j,1}, j \in N_i$ φραγμένο για κάθε επόμενο πράκτορα i .

Ακόμη, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής για το $f_{i,1}(x_{i,1})$, έχουμε για κάθε διάσταση $p = 1, \dots, M$:

$$\boxed{(d_i + b_i)(R_{i,2}^p \xi_{i,2}^p + f_{i,1}^p(x_{i,1})) - b_i \dot{x}_{0,1}^p - \sum_{j \in N_i} \dot{x}_{j,1}^p - R_{i,1}^p \xi_{i,1}^p \leq \bar{F}_{i,1}^p} \quad (23)$$

όπου η $\bar{F}_{i,1}^p$ είναι μία θετική σταθερά.

Επομένως, για την παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov ισχύει η παρακάτω ανισότητα για καθένα πράκτορα i :

$$\dot{V}_{i,1} \leq \sum_{p=1}^M \left(r_{i,1}^p |\varepsilon_{i,1}^p| \left(-K_{i,1}^p (d_i + b_i) |\varepsilon_{i,1}^p| + \bar{F}_{i,1}^p \right) \right)$$

ή

$$\dot{V}_{i,1} \leq \sum_{p=1}^M \left(r_{i,1}^p |\varepsilon_{i,1}^p| \left(\bar{F}_{i,1}^p - K_{i,1}^p (d_i + b_i) |\varepsilon_{i,1}^p| \right) \right)$$

Συνεπώς, για το πρόσημο της $\dot{V}_{i,1}$ για κάθε πράκτορα i θα ισχύει:

$$\dot{V}_{i,1} < 0, \quad \text{av} \quad |\varepsilon_{i,1}^p(t)| > \frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i + b_i) K_{i,1}^p}, \quad p = 1, \dots, M$$

ή ισοδύναμα:

$$\boxed{\dot{V}_{i,1} < 0, \quad \text{av} \quad |\xi_{i,1}^p(t)| > T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i + b_i) K_{i,1}^p} \right) \quad p = 1, \dots, M} \quad (24)$$

Σημειώση: Καθώς η $\varepsilon_1(t)$ αποτελεί γνησίως αύξουσα συνάρτηση της $\xi_1(t)$, η ανάλυση μας μπορεί να πραγματοποιηθεί ισοδύναμα βασιζόμενη σε ένα από τα δύο σήματα.

Συνεχίζοντας την ανάλυση, θα ερευνηθούν ξεχωριστά οι δύο παρακάτω περιπτώσεις:

$$\text{i)} |\varepsilon_{i,1}^p(t)| > \frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \text{ ή ισοδύναμα } |\xi_{i,1}^p(t)| > T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \right)$$

$$\text{ii)} |\varepsilon_{i,1}^p(t)| \leq \frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \text{ ή ισοδύναμα } |\xi_{i,1}^p(t)| \leq T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \right)$$

Περίπτωση i)

Υπολογίζεται, αρχικά, το όριο του $\bar{\xi}_{i,1}(t)$. Παραγωγίζουμε τη $\xi_{i,1}(t)$ ως προς t :

$$\dot{\xi}_{i,1}^p = \frac{\dot{e}_{i,1}^p}{\rho_{i,1}^p} - \frac{\dot{\rho}_{i,1}^p \xi_{i,1}^p}{\rho_{i,1}^p} = \frac{1}{\rho_{i,1}^p} (\dot{e}_{i,1}^p - \dot{\rho}_{i,1}^p \xi_{i,1}^p)$$

όμως, ισχύει:

$$-1 < \xi_{i,1}^p(t) < 1$$

Επομένως, για το άνω φράγμα λαμβάνουμε:

$$|\dot{\xi}_{i,1}^p| \leq \left(\frac{1}{\rho_{i,1,p}^\infty} \right) (|\dot{e}_{i,1}^p| + |\dot{\rho}_{i,1}^p(0)|)$$

ακόμη:

$$|\dot{e}_{i,1}| \leq (d_i + b_i)|\dot{x}_{i,1}| + b_i|\dot{x}_{0,1}| + \sum_{j \in N_i} |\dot{x}_{j,1}|$$

Αντικαθιστώντας από τη δυναμική εξίσωση του πράκτορα i :

$$\dot{x}_{i,1}^p \leq |x_{i,2}| + |f_{i,1}| = |\rho_{i,2}\xi_{i,2}| + |\psi_{i,1}| + |f_{i,1}| \leq \bar{\rho}_{i,2} + \bar{\psi}_{i,1} + \bar{f}_{i,1}$$

ή

$$\dot{x}_{i,1}^p = \rho_{i,2}^p(0) + \bar{\psi}_{i,1}^p + \bar{f}_{i,1}^p$$

και για κάθε γειτονικό πράκτορα $j \in N_i$, από τον οποίο λαμβάνει σήμα αναφοράς ο i είναι:

$$\sum_{j \in N_i} \dot{x}_{j,1}^p \leq \sum_{j \in N_i} (|x_{j,2}| + |f_{j,1}|) = \sum_{j \in N_i} (|\rho_{j,2}\xi_{j,2}| + |\psi_{j,1}| + |f_{j,1}|) \leq \sum_{j \in N_i} (\bar{\rho}_{j,2} + \bar{\psi}_{j,1} + \bar{f}_{j,1})$$

Επομένως, το άνω φράγμα θα είναι, για κάθε διάσταση $p = 1, \dots, M$:

$$|\dot{\xi}_{i,1}^p| \leq \frac{1}{\rho_{i,1,p}^\infty} \left((d_i + b_i) (\bar{f}_{i,1}^p + |\rho_{i,2}^p| + |\psi_{i,1}^p|) + b_i |\dot{x}_{0,1}^p| + \sum_{j \in N_i} (\bar{f}_{j,1}^p + |\rho_{j,2}^p| + |\psi_{j,1}^p|) + |\dot{\rho}_{i,1}^p| \right) \quad (25)$$

ή

$$|\dot{\xi}_{i,1}^p| \leq \frac{1}{\rho_{i,1,p}^\infty} \left((d_i + b_i) (\bar{f}_{i,1}^p + |\rho_{i,2}^p|) + b_i |\dot{x}_{0,1}^p| + \sum_{j \in N_i} (\bar{f}_{j,1}^p + |\rho_{j,2}^p| + |\psi_{j,1}^p|) + |\dot{\rho}_{i,1}^p| + (d_i + b_i) |\psi_{i,1}^p| \right) \quad (26)$$

Ορίζουμε, έτσι, την παρακάτω βοηθητική μεταβλητή που αποτελεί το άνω φράγμα:

$$\boxed{\bar{F}_{i,1}^p = (d_i + b_i) \left(\bar{f}_{i,1}^p + \rho_{i,2}^p(0) \right) + b_i |\dot{x}_{0,1}^p| + \sum_{j \in Ni} (\bar{f}_{j,1}^p + \rho_{j,2}^p(0) + |\psi_{j,1}^p|) + |\dot{\rho}_{i,1}^p|} \quad (27)$$

Τελικά, προκύπτει για το όριο της παραγώγου του κανονικοποιημένου σφάλματος:

$$\boxed{|\dot{\xi}_{i,1}^p(t)| \leq \frac{\bar{F}_{i,1}^p + K_{i,1}^p(d_i + b_i)T(\bar{\xi}_{i,1})}{\rho_{i,1,p}^\infty} \triangleq \bar{\xi}_{i,1}^p} \quad (28)$$

Λόγω της συνέχειας του $\xi_{i,1}(t)$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια χρονική στιγμή $t_1^* > 0$ τέτοια ώστε $|\xi_{i,1}^p(t)| \geq T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i + b_i)K_{i,1}^p} \right)$ για όλα τα $t \in [0, t_1^*]$.

Επιπλέον, από το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης Lyapunov (σχέση 24) η $|\dot{\xi}_{i,1}^p(t)|$ θα είναι αυστηρά φθίνουσα για όλα τα $t \in [0, t_1^*]$, συνεπώς και $|\xi_{i,1}^p(t)| < |\xi_{i,1}^p(0)| < \bar{\xi}_{i,1}$ για όλα τα $t \in [0, t_1^*]$.

Ως εκ τούτου, καθώς επιδιώκουμε να προκύψει η μέγιστη χρονική στιγμή t_1 , τέτοια ώστε $\xi_{i,1}(t) \in [-\bar{\xi}_{i,1}, \bar{\xi}_{i,1}]$ για όλα τα $t \in [0, t_1]$, καταλήγουμε ότι $t_1 > t_1^*$.

Επιπλέον, η χρονική στιγμή t_1^* ικανοποιεί, για κάθε διάσταση $p = 1, \dots, M$ του διανύσματος $\xi_{i,1}$:

$$t_1^* \geq \frac{|\xi_{i,1}^p(0)| - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i + b_i)K_{i,1}^p} \right)}{\bar{\xi}_{i,1}^p} \quad \text{και} \quad \xi_{i,1}^p(t_1^*) = T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i + b_i)K_{i,1}^p} \right)$$

Επιπλέον, από (10), συμπεραίνουμε ότι για όλα τα $t \in [t_1^*, t_1]$ ισχύει:

$$|\xi_{i,1}(t)| < |\xi_{i,1}(t_1^*)| + (t_1 - t_1^*) \bar{\xi}_{i,1} \quad (29)$$

Επομένως, λόγω της προαναφερθείσας ανάλυσης και της (29), συμπεραίνουμε ότι αν η ακόλουθη ανισότητα ισχύει:

$$|\xi_{i,1}^p(t)| < \bar{\xi}_{i,1}$$

ή

$$t_1 \bar{\xi}_{i,1}^p - |\xi_{i,1}^p(0)| + 2T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i + b_i)K_{i,1}^p} \right) \leq \bar{\xi}_{i,1}, \quad (30)$$

τότε $\xi_{i,1}^p(t) \in [-\bar{\xi}_{i,1}, \bar{\xi}_{i,1}]$ για $p = 1, \dots, M$ και επομένως $\xi_{i,1}(t) \in [-\bar{\xi}_{i,1}, \bar{\xi}_{i,1}]$ για όλα τα $t \in [0, t_1]$.

Έτσι, αντικαθιστώντας την (28), και λόγω της συνέχειας του $\xi_{i,1}(t)$, καταλήγουμε ότι $\xi_{i,1}(t) \in [-\bar{\xi}_{i,1}, \bar{\xi}_{i,1}]$ για όλα τα $t \in [0, t_1]$ αν:

$$t_1 \leq \frac{\bar{\xi}_{i,1} + |\xi_{i,1}^p(0)| - 2T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i + b_i)K_{i,1}^p} \right)}{|\bar{\xi}_{i,1}^p|}, \quad p = 1, \dots, M$$

ή

$$t_1 \leq \min_p \left\{ \frac{\rho_{i,1,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,1} + |\xi_{i,1}^p(0)| - 2T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \right) \right)}{\bar{F}_{i,1}^p + (d_i+b_i)K_{i,1}^p T(\bar{\xi}_{i,1})} \right\} \quad (31)$$

Περίπτωση ii)

Σε αυτήν την περίπτωση, συμπεραίνουμε απευθείας ότι για όλα τα $t \in [0, t_1]$ ισχύει:

$$|\xi_{i,1}(t)| < |\xi_{i,1}(0)| + t_1 \bar{\xi}_{i,1}. \quad (32)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, συμπεραίνουμε ότι αν ισχύει:

$$|\xi_{i,1}(0)| + t_1 \bar{\xi}_{i,1} \leq \bar{\xi}_{i,1}, \quad (33)$$

τότε $\xi_{i,1}(t) \in (-\bar{\xi}_{i,1}, \bar{\xi}_{i,1}) \subset \Omega_\xi$, για όλα τα $t \in [0, t_1]$

Συνεπώς, λόγω του γεγονότος ότι $|\xi_{i,1}^p(0)| \leq T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \right)$, σύμφωνα με (28), και λόγω της συνέχειας της $\xi_{i,1}(t)$, συμπεραίνουμε ότι $\xi_{i,1}(t) \in [-\bar{\xi}_{i,1}, \bar{\xi}_{i,1}]$ για όλα τα $t \in [0, t_1]$, εφόσον

$$t_1 \leq \frac{\bar{\xi}_{i,1} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \right)}{|\bar{\xi}_{i,1}^p|}, \quad p = 1, \dots, M \quad (34)$$

Συνδυάζοντας τις (31) και (34) των δύο επιμέρους περιπτώσεων, και λόγω του γεγονότος ότι $\bar{\xi}_{i,1} + |\xi_{i,1}^p(0)| - 2T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \right) \geq \bar{\xi}_{i,1} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \right)$ όταν $|\xi_{i,1}^p(t)| > T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{K_{i,1}^p} \right)$, συμπεραίνουμε ότι εάν η στιγμή $t_1 > 0$ ικανοποιείται:

$$t_1 \leq \frac{\bar{\xi}_{i,1} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \right)}{|\bar{\xi}_{i,1}^p|}, \quad p = 1, \dots, M$$

ή

$$t_1 \leq \min_p \left\{ \frac{\rho_{i,1,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,1} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \right) \right)}{\bar{F}_{i,1}^p + (d_i+b_i)K_{i,1}^p T(\bar{\xi}_{i,1})} \right\} \quad (35)$$

τότε $\xi_{i,1}^p(t) \in [-\bar{\xi}_{i,1}, \bar{\xi}_{i,1}] \subset \Omega_\xi$, για όλα τα $t \in [0, t_1]$. Επιπλέον, λόγω της (5), συμπεραίνουμε ότι $|e_{i,1}^p(t)| < \rho_{i,1}^p(t)$ για όλα τα $t \in [0, t_1]$. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο το $\psi_{i,1}(t)$, θα ισχύει για κάθε ακόλουθο ι:

$$\dot{\psi}_{i,1}^p = -K_{i,1}^p(r_{i,1}^p) \left(\dot{e}_{i,1}^p - \dot{\rho}_{i,1}^p \xi_{i,1}^p \right)$$

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι για όλα τα $t \in [0, t_1]$ προκύπτουν τα παρακάτω φράγματα:

$$|\psi_{i,1}^p(t)| \leq \bar{\psi}_{i,1}^p = K_{i,1}^p T(\bar{\xi}_{i,1}), \quad (36)$$

$$|\dot{\psi}_{i,1}^p(t)| \leq \bar{\psi}_{i,1}^p = K_{i,1}^p \bar{r}_{i,1}^p \left(\bar{F}_{i,1}^p + \bar{\psi}_{i,1}^p \right), \quad (37)$$

όπου

$$\bar{r}_{i,1}^p = \frac{T'(\bar{\xi}_{i,1})}{\rho_{i,1}^p(\infty)}$$

Βήμα ($2 \leq q \leq m - 1$)

Θεωρούμε την θετικά ορισμένη συνάρτηση Lyapunov για κάθε $t \in [0, t_1]$:

$$V_{i,q} = \frac{1}{2} \varepsilon_{i,q}^T \varepsilon_{i,q}$$

ως προς το χρόνο τη συνάρτηση Lyapunov θα προκύψει για κάθε $t \in [0, t_1]$:

$$\dot{V}_{i,q} = \varepsilon_{i,q}^T r_{i,q} \left((x_{i,q+1} + f_{i,q}(x_{i,1}, \dots, x_{i,q})) - \dot{\psi}_{i,q-1} - \dot{R}_{i,q} \xi_{i,q} \right), \quad \forall t \in [0, t_1]$$

Επιπλέον ισχύουν $x_{i,q+1} = R_{i,q+1} \xi_{i,q+1} + \psi_{i,q}$ και $\psi_{i,q} = -K_{i,q} \varepsilon_{i,q}$, οπότε η $\dot{V}_{i,q}$ γίνεται:

$$\dot{V}_{i,q} = -\varepsilon_{i,q}^T r_{i,q} K_{i,q} \varepsilon_{i,q} + \varepsilon_{i,q}^T r_{i,q} \left((R_{i,q+1} \xi_{i,q+1} + f_{i,q}(x_{i,1}, \dots, x_{i,q})) - \dot{\psi}_{i,q-1} - \dot{R}_{i,q} \xi_{i,q} \right), \quad \forall t \in [0, t_1]$$

Λαμβάνοντας υπόψην ότι $\xi_{i,q}, \xi_{i,q+1} \in \Omega_\xi^M$ για κάθε $t \in [0, t_1]$, συμπεραίνεται ότι τα $\xi_{i,q}, \xi_{i,q+1}$ είναι φραγμένα για κάθε $t \in [0, t_1]$. Συνεχίζοντας, στο προηγούμενο βήμα αποδείχτηκε ότι $\dot{\psi}_{i,q-1}$ είναι φραγμένο για κάθε $t \in [0, t_1]$. Επιπλέον, $R_{i,q+1}, \dot{R}_{i,q}$ είναι φραγμένα εκ κατασκευής. Με την εφαρμογή του Θεωρήματος Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής στη συνάρτηση $f_{i,q}^p(x_{i,1}, \dots, x_{i,q})$ προκύπτει ότι υπάρχει θετική σταθερά $F_{i,q}^p$, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα:

$$|R_{i,q+1}^p \xi_{i,q+1}^p + f_{i,q}^p(x_{i,1}, \dots, x_{i,q}) - \dot{\psi}_{i,q-1}^p - \dot{R}_{i,q}^p \xi_{i,q}^p| \leq F_{i,q}^p, \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (38)$$

Ακόμη, επειδή οι πίνακες $K_{i,q}, r_{i,q}$ είναι διαγώνιοι με θετικά στοιχεία, η $\dot{V}_{i,q}$ γίνεται:

$$\dot{V}_{i,q} \leq \sum_{p=1}^M (r_{i,q,p} |\varepsilon_{i,q,p}| (-K_{i,q,p} |\varepsilon_{i,q,p}| + \bar{F}_{i,q,p})), \quad \forall t \in [0, t_1]$$

Συνεπώς, για το πρόσημο της $\dot{V}_{i,q}$ για κάθε πράκτορα i θα ισχύει:

$$\dot{V}_{i,q} < 0, \quad \text{av} \quad |\varepsilon_{i,q}^p(t)| > \frac{\bar{F}_{i,q}^p}{K_{i,q}^p}, \quad p = 1, \dots, M$$

ή ισοδύναμα:

$$\dot{V}_{i,q} < 0, \quad \text{av} \quad |\xi_{i,q}^p(t)| > T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,q}^p}{K_{i,q}^p} \right), \quad p = 1, \dots, M \quad (39)$$

Για να συνεχίσουμε, παρατηρούμε ότι καθώς $\xi_{i,q}(t) \in \Omega_\xi^M$ για κάθε $t \in [0, t_1]$, και λόγω των (11) και (17στ), προκύπτει ότι $|x_{i,q}(t)| < \rho_{i,q}^0 + \bar{\psi}_{i,q-1}$ για κάθε $t \in [0, t_1]$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το τελευταίο και το Θεώρημα Μέγιστης Τιμής, συμπεραίνουμε την ύπαρξη

αυστηρά θετικών σταθερών $\bar{f}_{i,q}$ τέτοιων ώστε $|f_{i,q}(x_i)| \leq \bar{f}_{i,q}$. Επομένως, επαναλαμβάνοντας την ίδια ανάλυση του Βήματος 1, καταλήγουμε ότι αν η χρονική στιγμή $t_1 > 0$ ικανοποιεί:

$$t_1 \leq \min_p \left\{ \frac{\bar{\xi}_{i,q} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,q}^p}{K_{i,q}^p} \right)}{|\bar{\xi}_{i,q}^p|} \right\}$$

τότε $\xi_{i,q}(t) \in [-\bar{\xi}_{i,q}, \bar{\xi}_{i,q}] \subset \Omega_\xi$, για όλα τα $t \in [0, t_1]$.

Υπολογίζεται σε αυτό το σημείο το όριο του $\dot{\xi}_{i,q}(t)$:

$$|\dot{\xi}_{i,q}(t)| \leq \left| R_{i,q}^{-1} \left((x_{i,q+1} + f_{i,q}(x_1, \dots, x_{i,q}) - \dot{\psi}_{i,q-1}) - \dot{R}_{i,q} \xi_{i,q} \right) \right|$$

Για κάθε διάσταση $p = 1, \dots, M$:

$$\begin{aligned} |\dot{\xi}_{i,q}^p(t)| &\leq \frac{1}{\rho_{i,q,p}^\infty} \left((\bar{f}_{i,q}^p + \rho_{i,q+1}^p(0) + \bar{\psi}_{i,q-1}^p + \bar{\psi}_{i,q}^p) + \bar{\rho}_{i,q}^p \right) \\ &\Rightarrow |\dot{\xi}_{i,q}^p(t)| \leq \frac{1}{\rho_{i,q,p}^\infty} \left((\bar{f}_{i,q}^p + \bar{\rho}_{i,q+1}^p(0) + \bar{\rho}_{i,q}^p + \bar{\psi}_{i,q-1}^p) + \bar{\psi}_{i,q}^p \right) \\ &\quad \boxed{\Thetaέτουμε \quad \bar{F}_{i,q}^p = \bar{f}_{i,q}^p + \rho_{i,q+1}^p(0) + \bar{\rho}_{i,q}^p + \bar{\psi}_{i,q-1}^p} \end{aligned} \quad (40)$$

Επομένως, το άνω φράγμα είναι:

$$|\dot{\xi}_{i,q}^p(t)| \leq \frac{\bar{F}_{i,q}^p + K_{i,q}^p T(\bar{\xi}_{i,q})}{\rho_{i,q,p}^\infty} \triangleq \bar{\xi}_{i,q}^p$$

Οπότε, η χρονική στιγμή t_1 θα πρέπει να ικανοποιεί:

$$t_1 \leq \min_p \left\{ \frac{\rho_{i,q,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,q} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,q}^p}{K_{i,q}^p} \right) \right)}{\bar{F}_{i,q}^p + K_{i,q}^p T(\bar{\xi}_{i,q})} \right\} \quad (41)$$

Επίσης, παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο το $\psi_{i,q}$, προκύπτει για τα στοιχεία του:

$$\dot{\psi}_{i,q}^p = -K_{i,q}^p(r_{i,q}^p)(\dot{x}_{i,q}^p - \dot{\psi}_{i,q-1}^p - \dot{\rho}_{i,q}^p \xi_{i,q}^p)$$

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι για όλα τα $t \in [0, t_1]$,

$$|\psi_{i,q}^p(t)| \leq \bar{\psi}_{i,q}^p = K_{i,q}^p T(\bar{\xi}_{i,q}^p), \quad (42)$$

και

$$|\psi_{i,q}^p(t)| \leq \bar{\psi}_{i,q}^p = K_{i,q}^p \bar{r}_{i,q} \left(\bar{F}_{i,q}^p + \bar{\psi}_{i,q}^p \right) \quad (43)$$

όπου

$$\bar{r}_{i,q}^p = \frac{T'(\bar{\xi}_{i,q}^p)}{\rho_{i,q}^p(\infty)}$$

Βήμα ($q = m$)

Θεωρούμε την θετικά ορισμένη συνάρτηση Lyapunov για κάθε $t \in [0, t_1]$:

$$V_{i,m} = \frac{1}{2} \epsilon_{i,m}^T K_{i,m} \epsilon_{i,m}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο τη συνάρτηση Lyapunov για κάθε $t \in [0, t_1]$ θα έχουμε:

$$\dot{V}_{i,m} = -\epsilon_{i,m}^T r_{i,m} K_{i,m} G(x) K_{i,m} r_{i,m} \epsilon_{i,m} + \epsilon_{i,m}^T r_{i,m} K_{i,m} \left(f_{i,m}(x) + \zeta(t) - \dot{\psi}_{i,m-1} - \dot{R}_{i,m} \xi_{i,m} \right)$$

Στο προηγούμενο βήμα αποδείχτηκε ότι $\dot{\psi}_{m-1}$ είναι φραγμένο για κάθε $t \in [0, t_1]$ και το $\dot{R}_{i,m}$ είναι φραγμένο εκ κατασκευής.

Λόγω του $\xi_{i,m}(t) \in \Omega_\xi^M$ για κάθε $t \in [0, t_1]$, προκύπτει ότι $\bar{\xi}_{i,m}$ είναι επίσης φραγμένο για κάθε $t \in [0, t_1]$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής στη συνάρτηση $f(\bar{x})$ και από την Υπόθεση 2, προκύπτει:

$$\left| f_{i,m}^p(x_i) + \zeta(t) - \dot{\psi}_{i,m-1}^p - \dot{R}_{i,m}^p \xi_{i,m} \right| \leq F_{i,m}^p, \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (44)$$

όπου η $F_{i,m}^p$ είναι μια θετική σταθερά.

Σύμφωνα με την Υπόθεση 1, ο πίνακας $G_i(x_i)$ κάθε πράκτορα είναι θετικά ορισμένος. Εκφράζοντας, τον πίνακα $G_i(x_i)$ ως άθροισμα του συμετρικού και αντισυμμετρικού του μέρους καταλήγουμε ότι υπάρχει μια σταθερά g_i^* , τέτοια ώστε:

$$\underline{\sigma}\left((G_i(x_i) + G_i^T(x_i))/2\right) \geq g_i^* > 0 \quad (45)$$

όπου με $\underline{\sigma}(\cdot)$ συμβολίζεται η μικρότερη ιδιάζουσα τιμή ενός πίνακα. Οπότε:

$$\epsilon_{i,m}^T r_{i,m} K_{i,m} G(x) K_{i,m} r_{i,m} \epsilon_{i,m} \geq g_i^* |K_{i,m} r_{i,m} \epsilon_{i,m}|^2$$

Έτσι, θα ισχύει για την παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov:

$$\dot{V}_{i,m} \leq \sum_{p=1}^M (-g_i^* |K_{i,m}^p r_{i,m}^p \epsilon_{i,m}^p|^2 + |\epsilon_{i,m,p}^T r_{i,m}^p K_{i,m}^p| \bar{F}_{i,m}^p)$$

ή

$$\dot{V}_{i,m} \leq \sum_{p=1}^M (|K_{i,m}^p r_{i,m}^p \epsilon_{i,m}^p| (-g_i^* |K_{i,m}^p r_{i,m}^p \epsilon_{i,m}^p| + \bar{F}_{i,m}^p))$$

Για το πρόσημο της συνάρτησης $\dot{V}_{i,m}$ θα ισχύει:

$$\dot{V}_{i,m} < 0, \quad \text{av} \quad |\epsilon_{i,m}^p(t)| > \frac{F_{i,m}^p}{\underline{\rho}_{i,m}^p K_{i,m}^p g_i^*}$$

με

$$\underline{\rho}_{i,m}^p = \frac{T'(0)}{\rho_{i,m}^p(0)}$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\dot{V}_{i,m} < 0, \quad \text{av} \quad |\xi_{i,m}^p(t)| > T^{-1} \left(\frac{F_{i,m}^p}{\underline{r}_{i,m}^p K_{i,m}^p g_i^*} \right), \quad p = 1, \dots, M} \quad (46)$$

Παρομοίως με τα προηγούμενα βήματα, το άνω φράγμα της παραγώγου του $\xi_{i,m}^p(t)$ είναι:

$$|\dot{\xi}_{i,m}^p| \leq \frac{\bar{F}_{i,m}^p + G_i^* K_{i,m}^p \bar{r}_{i,m}^p T(\bar{\xi}_{i,m})}{\rho_{i,q,p}^\infty} \quad (47)$$

όπου

$$\bar{F}_{i,m}^p = \bar{f}_{i,m}^p + |\dot{\psi}_{i,q-1}^p| + |\dot{\rho}_{i,m}^p| + |\zeta| \quad (48)$$

Παρατηρούμε ότι καθώς $\bar{\xi}_{i,m}(t) \in \Omega_\xi$ για κάθε $t \in [0, t_1]$, και λόγω των (12) και (17σ), προκύπτει ότι $|\bar{x}_{i,m}^p(t)| < \rho_{i,m}^p(0) + \bar{\psi}_{i,m-1}^p$ για κάθε $t \in [0, t_1]$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το τελευταίο και το Θεώρημα Μέγιστης Τιμής, συμπεραίνουμε την ύπαρξη αυστηρά θετικών σταθερών $\bar{f}_{i,m}$ τέτοιων ώστε $|f_{i,m}(x_{i,m})| \leq \bar{f}_{i,m}$. Ακόμη, ο πίνακας ελέγχου $G_i(x_i)$ παρουσιάζει άνω όριο $G_i^* > 0$ για τη μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του, διότι το διάνυσμα x_i όλων των καταστάσεων κάθε πράκτορα φράσσεται, όπως έχει αποδειχτεί παραπάνω. Επομένως, επαναλαμβάνοντας την ίδια ανάλυση του Βήματος 1, καταλήγουμε ότι αν η χρονική στιγμή $t_1 > 0$ ικανοποιεί:

$$t_1 \leq \frac{\bar{\xi}_{i,m} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,m}^p}{\underline{r}_{i,m}^p K_{i,m}^p g_i^*} \right)}{|\dot{\bar{\xi}}_{i,m}^p|}, \quad p = 1, \dots, M$$

ή

$$\boxed{t_1 \leq \min_p \left\{ \frac{\rho_{i,m,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,m} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,m}^p}{\underline{r}_{i,m}^p K_{i,m}^p g_i^*} \right) \right)}{\bar{F}_{i,m}^p + G_i^* K_{i,m}^p \bar{r}_{i,m}^p T(\bar{\xi}_{i,m})} \right\}} \quad (49)$$

τότε $\xi_{i,m}(t) \in [-\bar{\xi}_{i,m}, \bar{\xi}_{i,m}] \subset \Omega_\xi^M$, για όλα τα $t \in [0, t_1]$.

Παρομοίως, η ανάλυση επεκτείνεται σε όλα τα χρονικά διαστήματα $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, με t_{k+1} να ικανοποιεί $t_k < t_{k+1} < t_k + t_{\max}^k$, $k \in \mathbb{N}$, με t_{\max}^k να είναι ο αντίστοιχος μέγιστος χρόνος. Επομένως, αν **για κάθε πράκτορα i ισχύει**:

$$\boxed{t_{k+1} - t_k \leq \min_i t_{mati}(i), \quad i \in \bar{N}_i}$$

όπου:

$$t_{mati}(i) = \min_{p, q=2, \dots, m-1} \left\{ \frac{\rho_{i,1,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,1} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \right) \right)}{\bar{F}_{i,1}^p + (d_i+b_i)K_{i,1}^p T(\bar{\xi}_{i,1})}, \right.$$

$$\frac{\rho_{i,q,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,q} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,q}^p}{K_{i,q}^p} \right) \right)}{\bar{F}_{i,q}^p + K_{i,q}^p T(\bar{\xi}_{i,q})},$$

$$\left. \frac{\rho_{i,m,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,m} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,m}^p}{\bar{F}_{i,m}^p K_{i,m}^p g_i^*} \right) \right)}{\bar{F}_{i,m}^p + G_i^* K_{i,m}^p \bar{r}_{i,m}^p T(\bar{\xi}_{i,m})} \right\}$$

Για την περίοδο δειγματοληψίας του σήματος αναφοράς του εκάστοτε πράκτορα θα πρέπει να ισχύει:

$$T_s^i \leq \min_{i \in \bar{N}_i} t_{mati}(i)$$

και επιπλέον, για το συνολικό γράφο σε σύγχρονη επικοινωνία διακριτού χρόνου θα πρέπει το μέγιστο επιτρεπτό διάστημα μετάδοσης των σημάτων αναφοράς από τους πράκτορες να ισούται με:

$$T_s \leq t_{mati} = \min_i \{t_{mati}(i)\}, \quad i = 1, \dots, N$$

και από τη σχέση (35) λαμβάνουμε τελικά:

$$t_{mati} = \min_{i,p, q=2, \dots, m-1} \left\{ \frac{\rho_{i,1,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,1} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i+b_i)K_{i,1}^p} \right) \right)}{\bar{F}_{i,1}^p + (d_i+b_i)K_{i,1}^p T(\bar{\xi}_{i,1})}, \right.$$

$$\frac{\rho_{i,q,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,q} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,q}^p}{K_{i,q}^p} \right) \right)}{\bar{F}_{i,q}^p + K_{i,q}^p T(\bar{\xi}_{i,q})},$$

$$\left. \frac{\rho_{i,m,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,m} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,m}^p}{\bar{F}_{i,m}^p K_{i,m}^p g_i^*} \right) \right)}{\bar{F}_{i,m}^p + G_i^* K_{i,m}^p \bar{r}_{i,m}^p T(\bar{\xi}_{i,m})} \right\}$$

τότε για όλα τα $q = 1, \dots, m$ και για κάθε πράκτορα $i = 1, \dots, N$ με διάσταση $p = 1, \dots, M$:

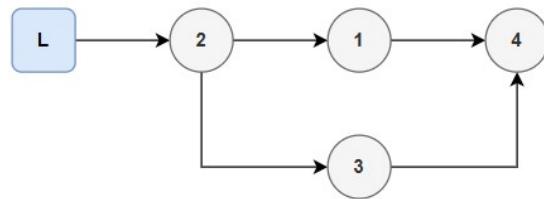
$$\bar{\xi}_{i,q}^p(t) \in [-\bar{\xi}_{i,q}, \bar{\xi}_{i,q}] \subset \Omega_\varepsilon, \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}$$

Από το παραπάνω συνεπάγεται ότι η λύση του $\xi_{i,q}(t)$, $q = 1, \dots, m$, εξελίσσεται αυστηρά εντός του Ω_ε^M για όλα τα $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, επεκτείνοντας διαδοχικά τη λύση στο $+\infty$. Συνεπώς, όλα τα σήματα στο κλειστό βρόχο είναι φραγμένα και επιπλέον $|e_{i,1}^p(t)| < \rho_{i,1}^p(t)$ για όλα τα $t \geq 0$, διατηρώντας έτσι τα προδιαγεγραμμένα χαρακτηριστικά απόδοσης του σφάλματος παρακολούθησης εξόδου, και ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Κεφάλαιο 3

Προσομοίωση μέσω MATLAB

3.1 Ομογενές Πολυπρακτορικό Σύστημα - Συστήματα δευτέρου βαθμού



Σχήμα 3.1: Γράφος Πολυπρακτορικού Συστήματος

Leader:

Η δυναμική του συστήματος του ηγέτη είναι τέτοια ώστε να παράγει στην έξοδό του το φραγμένο σήμα :

$$\mathbf{x}_{01}(t) = \begin{bmatrix} 0.2 \cos(0.4\pi t) \\ 0.2 \sin(0.4\pi t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{01}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τα συστήματα όλων των πρακτόρων 1,2,3 και 4 είναι ομοίου βαθμού $m = 2$ με εξισώσεις :

Agent 1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11} &= x_{12} + f_{11}, \\ \dot{x}_{12} &= f_{12} + G_1 u_1 + z. \end{aligned}$$

με

$$G_1 = \begin{bmatrix} x_{11}(1)^2 + 1 & \cos(x_{11}(2)) \\ \sin(x_{12}(1)) & x_{12}(2)^2 + 4 \end{bmatrix}$$

και

$$f_{11} = \begin{bmatrix} \sin(x_{11}(1)) \\ \cos(x_{11}(2)) \end{bmatrix}, \quad f_{12} = \begin{bmatrix} -2x_{12}(1) - x_{12}(2) \\ x_{11}(1)^2 \end{bmatrix}$$

Agent 2:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{21} &= x_{22} + f_{21}, \\ \dot{x}_{22} &= f_{22} + G_2 u_2 + z.\end{aligned}$$

με

$$G_2 = \begin{bmatrix} x_{21}(1)^2 + 1 & \sin(x_{21}(2)) \\ \cos(x_{22}(2)) & x_{22}(2)^2 + 1 \end{bmatrix}$$

και

$$f_{21} = \begin{bmatrix} +2x_{21}(1) \\ x_{21}(2)^3 \end{bmatrix}, \quad f_{22} = \begin{bmatrix} x_{21}(1)^2 \\ x_{22}(2)^2 - x_{21}(1)^5 \end{bmatrix}.$$

Agent 3:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{31} &= x_{32} + f_{31}, \\ \dot{x}_{32} &= f_{32} + G_3 u_3 + z\end{aligned}$$

με

$$G_3 = \begin{bmatrix} x_{31}(1)^2 + 1 & \cos(x_{31}(1)) \\ \sin(x_{31}(2)) & x_{31}(1)^2 + 3 \end{bmatrix}$$

και

$$f_{31} = \begin{bmatrix} \cos^2(x_{31}(1)) \\ x_{31}(1)^2 \end{bmatrix}, \quad f_{32} = \begin{bmatrix} \sin(x_{32}(2)) + x_{32}(1) \\ 5x_{32}(1)^3 \end{bmatrix},$$

Agent 4:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{41} &= x_{42} + f_{41}, \\ \dot{x}_{42} &= f_{42} + G_4 u_4 + z\end{aligned}$$

με

$$G_4 = \begin{bmatrix} x_{41}(1)^2 + 2 & \cos(x_{41}(1)) \\ \sin(x_{41}(2)) & x_{41}(1)^2 + 3 \end{bmatrix}$$

και

$$f_{41} = \begin{bmatrix} \sin^2(x_{41}(1)) \\ x_{41}(1)^2 \end{bmatrix}, \quad f_{42} = \begin{bmatrix} \cos(x_{42}(2)) + x_{42}(1) \\ 5x_{42}(1)^2 \end{bmatrix}$$

Παρακάτω παρατίθενται τα κέρδη και οι συνάρτησης απόδοσης του ελεγκτή, καθώς και οι αρχικές συνθήκες των πρακτόρων:

Agent 1	Τιμή
K_{11}	[2 2]
K_{12}	[85 85]
ρ_{11}	$(0.8 - 0.01) \cdot \exp(-t) + 0.01$
ρ_{12}	$(3 - 0.8) \cdot \exp(-t) + 0.8$

Πίνακας 3.1: Πίνακας μεταβλητών και τιμών

αρχικές συνθήκες:

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} x_{11}(1) \\ x_{11}(2) \\ x_{12}(1) \\ x_{12}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agent 2	Τιμή
K_{21}	[2 2]
K_{22}	[85 85]
ρ_{21}	$(0.8 - 0.01) \cdot \exp(-t) + 0.01$
ρ_{22}	$(3 - 0.8) \cdot \exp(-t) + 0.8$

Πίνακας 3.2: Πίνακας μεταβλητών και τιμών

αρχικές συνθήκες:

$$x_2(0) = \begin{bmatrix} x_{21}(1) \\ x_{21}(2) \\ x_{22}(1) \\ x_{22}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agent 3	Τιμή
K_{31}	[2 2]
K_{32}	[80 80]
ρ_{31}	$(0.8 - 0.01) \cdot \exp(-t) + 0.01$
ρ_{32}	$(3 - 0.8) \cdot \exp(-t) + 0.8$

Πίνακας 3.3: Πίνακας μεταβλητών και τιμών

αρχικές συνθήκες:

$$x_3(0) = \begin{bmatrix} x_{31}(1) \\ x_{31}(2) \\ x_{32}(1) \\ x_{32}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

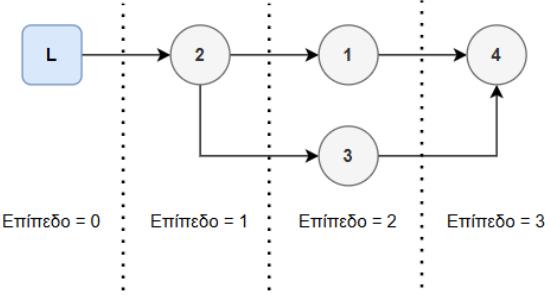
Agent 4	Τιμή
K_{41}	[2 2]
K_{42}	[70 30]
ρ_{41}	$(0.8 - 0.01) \cdot \exp(-t) + 0.01$
ρ_{42}	$(3 - 0.8) \cdot \exp(-t) + 0.8$

Πίνακας 3.4: Πίνακας μεταβλητών και τιμών

αρχικές συνθήκες:

$$x_4(0) = \begin{bmatrix} x_{41}(1) \\ x_{41}(2) \\ x_{42}(1) \\ x_{42}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.1.1 Υπολογισμός t_{mati} - Κυκλικός γράφος



Σχήμα 3.2: Γράφος Πολυπρακτορικού Συστήματος

Βήμα $q = 1$

Γενικός τύπος του άνω φράγματος:

$$\bar{F}_{i,1}^p = (d_i + b_i) \left(\bar{f}_{i,1}^p + \rho_{i,2}^p(0) \right) + b_i |\dot{x}_{0,1}^p| + \sum_{j \in N_i} (\bar{f}_{j,1}^p + \rho_{j,2}^p(0) + |\psi_{j,1}^p|) + |\dot{\rho}_{i,1}^p|$$

Τα άνω όρια των συναρτήσεων $f_{i,1}$ υπολογίζονται για $\bar{x}_{i,1} = \frac{\rho_{i,1}(0)}{\sigma_{min}(L+B)} + x_{01}$ (ανω φράγμα πρώτων καταστάσεων των συστημάτων των πρακτόρων όπως αυτό προκύπτει από τον έλεγχο προδιαγεγραμμένης απόκρισης). **Σημείωση:** Καθώς το κάτω όριο της ιδιάζουσας τιμής του γράφου επικοινωνίας είναι αυστηρό, χρησιμοποιείται για τους υπολογισμούς η ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή υπολογισμένη για τον γράφο και όχι το κάτω φράγμα αυτής. Για το συγκεκριμένο γράφο, επομένως, έχουμε:

$$\sigma_{min}(L + B) = 0.43$$

και το άνω φράγμα των πρώτων καταστάσεων των πρακτόρων θα είναι:

$$\bar{x}_{i,1}(t) = \begin{bmatrix} 0.8/0.43 + 0.2 \\ 0.8/0.43 + 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.06 \\ 2.06 \end{bmatrix}$$

Γενικός τύπος υπολογισμού του μέγιστου επιτρεπόμενου διαστήματος μετάδοσης για κάθε πράκτορα i , θεωρώντας ότι όλοι οι πράκτορες λαμβάνουν με τον ίδιο ρυθμό δειγματοληψίας το σήμα αναφοράς τους, για τον οποίο πρέπει να ισχύει ότι είναι μικρότερος ή ίσος από το ελάχιστο των επιμέρους t_{mati} που εγγυώνται την ευστάθεια του συστήματος κάθε πράκτορα:

$$t_{mati}(i) = \min_{p=1,\dots,M} \left\{ \frac{\rho_{i,1,p}^\infty \left(\bar{\xi}_{i,1} - T^{-1} \left(\frac{\bar{F}_{i,1}^p}{(d_i + b_i) K_{i,1}^p} \right) \right)}{\bar{F}_{i,1}^p + (d_i + b_i) K_{i,1}^p T(\bar{\xi}_{i,1})} \right\}$$

Επιλέγουμε, ακόμη, για τον μετασχηματισμό $T(\xi)$ των ενδιάμεσων σημάτων ελέγχου και των τελικών σημάτων ελέγχου χρησιμοποιείται η συνάρτηση της εφαπτομένης.

Σημείωση: Ακολουθούμε για τους επιμέρους υπολογισμούς το αντίστοιχο για κάθε πράκτορα μονοπάτι από τον ηγέτη προς αυτόν και επομένως λαμβάνουμε τα παρακάτω:

Πράκτορας $i = 2$: Σύμφωνα με το συγκεκριμένο γράφο επικοινωνίας, ο πράκτορας 2 λαμβάνει σήμα αναφοράς από τον ηγέτη και από κανέναν γειτονικό πράκτορα, επομένως έχουμε:

$$\boxed{d_i + b_i = 0 + 1 = 1}$$

$$N_i = \emptyset$$

$$\bar{F}_{i,1}^p = (\bar{f}_{i,1}^p + \rho_{i,2}^p(0)) + |\dot{x}_{0,1}^p| + |\dot{\rho}_{i,1}^p|$$

Πράκτορας 2 $q = 1$	<i>dimension</i> $p = 1$	<i>dimension</i> $p = 2$
$K_{i,1}$	2	2
$\bar{f}_{i,1}$	4.12	8.74
$\rho_{i,2}(0)$	3	3
$\dot{\rho}_{i,1}(0)$	0.79	0.79
$\bar{x}_{0,1}$	0.2513	0.2513
$\bar{F}_{i,1}$	8.16	12.78
$\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}}$	4.08	6.39
$T^{-1}\left(\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}}\right)$	0.8469	0.901
$\bar{\xi}_{i,1}$	0.9208	0.9208
$\bar{\varepsilon}_{i,1}$	8	8
$\rho_{i,1}^\infty$	0.01	0.01
t_{mati}	$3e - 5$	$6.879e - 6$
$\bar{\psi}_{i,1}$	16	16

Πράκτορες $i = 1$ και $i = 3$: Κάθε ένας από τους πράκτορες 1,3 λαμβάνουν σήμα αναφοράς από τον πράκτορα 2, επομένως ισχύει:

$$\boxed{d_i + b_i = 1 + 0 = 1}$$

$$N_i = \{2\}$$

$$\bar{F}_{i,1}^p = (\bar{f}_{i,1}^p + \rho_{i,2}^p(0)) + (\bar{f}_{2,1}^p + \rho_{2,2}^p(0) + |\psi_{2,1}^p|) + |\dot{\rho}_{i,1}^p|$$

Πράκτορας 1 $q = 1$	<i>dimension</i> $p = 1$	<i>dimension</i> $p = 2$
$K_{i,1}$	2	2
$\bar{f}_{i,1}$	0.996	0.47
$\rho_{i,2}(0)$	3	3
$\dot{\rho}_{i,1}(0)$	0.79	0.79
$\sum \bar{x}_{j,1}$	23.12	27.74
$\bar{F}_{i,1}$	27.9	32
$\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}}$	13.95	16
$T^{-1}(\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}})$	0.9544	0.9602
$\xi_{i,1}$	0.9681	0.9681
$\bar{\varepsilon}_{i,1}$	18	18
$\rho_{i,1}^\infty$	0.01	0.01
t_{mati}	$1.6e - 6$	$6.55e - 7$
$\bar{\psi}_{i,1}$	36	36

Πράκτορας 3 $q = 1$	<i>dimension</i> $p = 1$	<i>dimension</i> $p = 2$
$K_{i,1}$	2	2
$\bar{f}_{i,1}$	0.22	4.2436
$\rho_{i,2}(0)$	3	3
$\dot{\rho}_{i,1}(0)$	0.79	0.79
$\sum \bar{x}_{j,1}$	23.12	27.74
$\bar{F}_{i,1}$	27.13	35.77
$\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}}$	13.565	17.885
$T^{-1}(\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}})$	0.9531	0.9644
$\bar{\xi}_{i,1}$	0.9665	0.9665
$\bar{\varepsilon}_{i,1}$	19	19
$\rho_{i,1}^\infty$	0.01	0.01
t_{mati}	$2.06e - 6$	$2.8737e - 7$
$\bar{\psi}_{i,1}$	40	40

Πράκτορας i = 4: Ο πράκτορας 4 λαμβάνει σήμα αναφοράς από δύο γειτονικούς πράκτορες, οπότε προκύπτουν:

$$d_i + b_i = 2 + 0 = 2$$

$$N_i = \{1, 3\}$$

$$\bar{F}_{i,1}^p = 2 \left(\bar{f}_{i,1}^p + \rho_{i,2}^p(0) \right) + (\bar{f}_{3,1}^p + \rho_{3,2}^p(0) + |\psi_{3,1}^p|) + (\bar{f}_{1,1}^p + \rho_{1,2}^p(0) + |\psi_{1,1}^p|) + |\dot{\rho}_{i,1}^p|$$

Πράκτορας 4 $q = 1$	<i>dimension</i> $p = 1$	<i>dimension</i> $p = 2$
$K_{i,1}$	2	2
$\bar{f}_{i,1}$	0.9921	4.2436
$\rho_{i,2}(0)$	3	3
$\dot{\rho}_{i,1}(0)$	0.79	0.79
$\sum \bar{x}_{j,1}$	41.22	43.2436
$\bar{F}_{i,1}$	89.99	99.99
$\frac{F_{i,1}}{(d_i+b_i)K_{i,1}}$	22.497	24.997
$T^{-1}\left(\frac{F_{i,1}}{(d_i+b_i)K_{i,1}}\right)$	0.9717	0.9745
$\bar{\xi}_{i,1}$	0.97552	0.97552
$\bar{\varepsilon}_{i,1}$	26	26
$\rho_{i,1}^\infty$	0.01	0.01
t_{mati}	$1.969e - 7$	$5e - 8$
$\bar{\psi}_{i,1}$	52	52

Βήμα $q = 2$

Υπολογίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο τις επιμέρους συνθήκες περιορισμού για το βήμα 2 της ανάλυσης και τελικά προκύπτουν:

Step 2	Πράκτορας 1	Πράκτορας 2	Πράκτορας 3	Πράκτορας 4
t_{mati}	$e - 25$	$e - 19$	$e - 25$	$e - 27$

Παρατήρηση : Παρατηρούμε ότι στο Βήμα 2 προκύπτουν αρκετά αυστηροί περιορισμοί για το t_{mati} . Συγκεκριμένα, όσο προχωράμε τα steps η συνθήκη γίνεται πιο αυστηρή εξαιτίας των τιμών των ενδιάμεσων σημάτων $\psi_{i,1}$, των παραγώγων $\dot{\psi}_{i,1}$, αλλά και λόγω των αγνώστων μη γραμμικότητων $f_{i,2}$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα άνω όρια που χρησιμοποιούνται στον τύπο του Κεφαλαίου 2 είναι αποτέλεσμα σεναρίου χειρότερης ανάλυσης. Στη πράξη τα μεγέθη των παραμέτρων αυτών δεν θα λαμβάνουν τιμές τέτοιας τάξης μεγέθους και επομένως θα καταλήγουμε σε μία τιμή για το t_{mati} αρκετά πιο κοντά στη πραγματική.

Ολικό Πολυπρακτορικό Σύστημα:

Το μέγιστο επιτρεπόμενο διάστημα μετάδοσης των σημάτων αναφοράς για την περίπτωση ανάλυσης χειρότερου σεναρίου είναι:

$$t_{mati}|step1 = \min_i t_{mati}(i) = e^{-8}$$

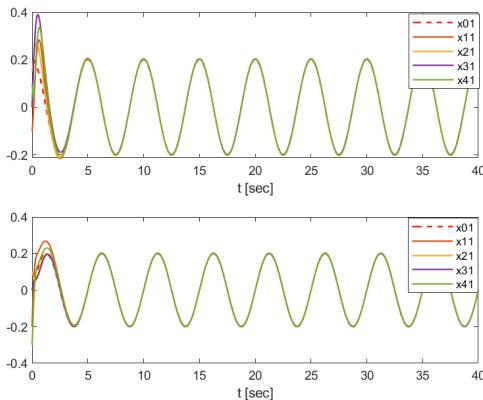
$$t_{mati}|step2 = \min_i t_{mati}(i) = e^{-27}$$

Υποθέτωντας ότι όλοι οι πράκτορες λαμβάνουν τα εκάστοτε σήματα αναφοράς με ίδια περίοδο T_s θα πρέπει να ισχύει: $T_s \leq t_{mati} = e^{-27}$, ώστε να μπορούμε να εγγυηθούμε την ευστάθεια ολόκληρου του πολυπρακτορικού συστήματος. Ωστόσο, στην πράξη καθώς τα σήματα ελέγχου u διαδίδονται πιο συχνά και συγκεκριμένα αρκετές τάξεις κάτω συγκριτικά με το T_s των σημάτων αναφοράς, μπορούμε να λάβουμε υπόψην μας μόνο τη συνθήκη που βρέθηκε για το t_{mati} στο step1 οσον αφορά τη μετάδοση των σημάτων αναφοράς.

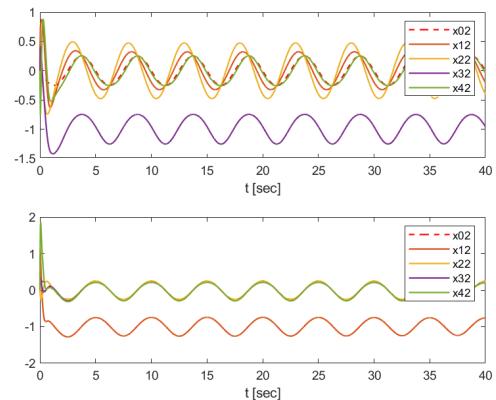
Παρατήρηση 1: Παρατηρούμε ότι το t_{mati} καθορίζεται από τον πράκτορα που βρίσκεται στο τελευταίο επίπεδο (layer), καθώς είναι ο πράκτορας που απαιτεί το μικρότερο T_s για να διατηρηθεί η ευστάθειά του.

Παρατήρηση 2: Το άνω φράγμα $\bar{F}_{i,1}^p$ κάθε πράκτορα i εξαρτάται από τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου των γειτόνων που λαμβάνεται το εκάστοτε σήμα αναφοράς, καθώς και από τον αριθμό των γειτόνων αυτών του κάθε πράκτορα. Όσο προχωράμε επίπεδα τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου των γειτονικών πρακτόρων λαμβάνουν μεγαλύτερες τιμές, με αποτέλεσμα το t_{mati} που εγγυάται ευστάθεια να μειώνεται, το οποίο δεν είναι επιθυμητό.

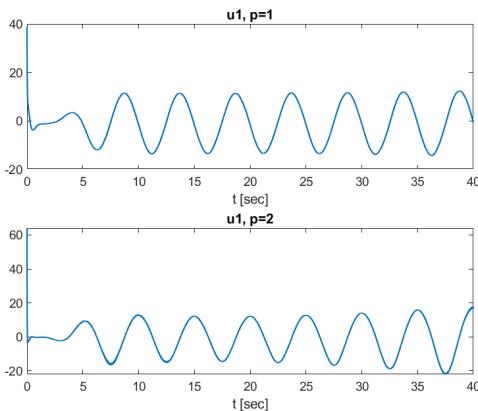
3.1.2 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 0.001$ sec, $\rho_{1,\infty} = 0.01$



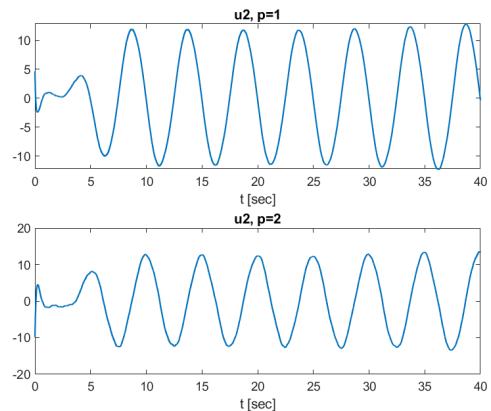
Σχήμα 3.3: κατάσταση $x_{i,1}$



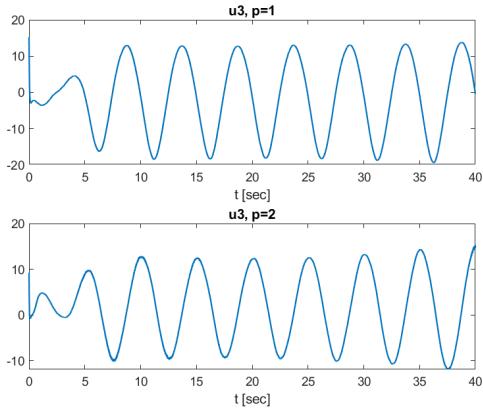
Σχήμα 3.4: κατάσταση $x_{i,2}$



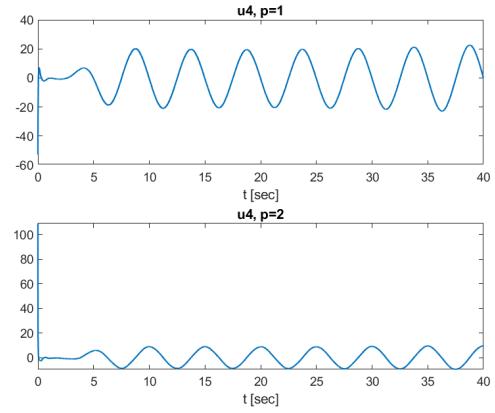
Σχήμα 3.5: σήμα ελέγχου πράκτορας 1



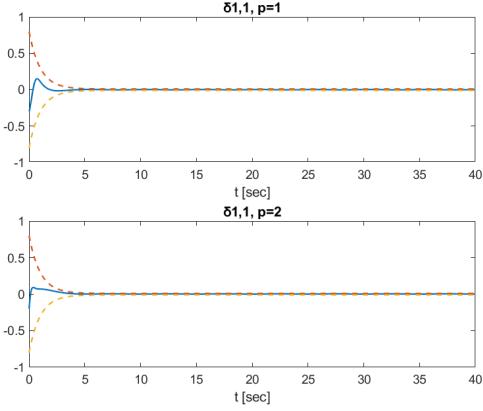
Σχήμα 3.6: σήμα ελέγχου πράκτορας 2



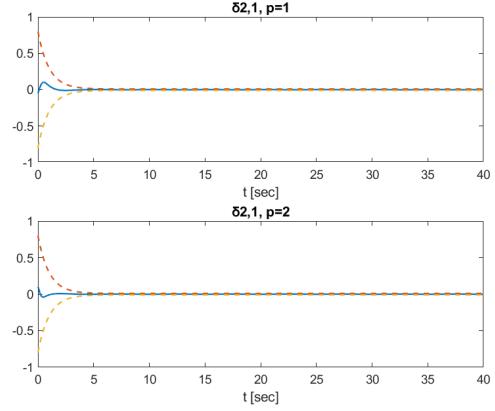
Σχήμα 3.7: σύμα ελέγχου πράκτορας 3



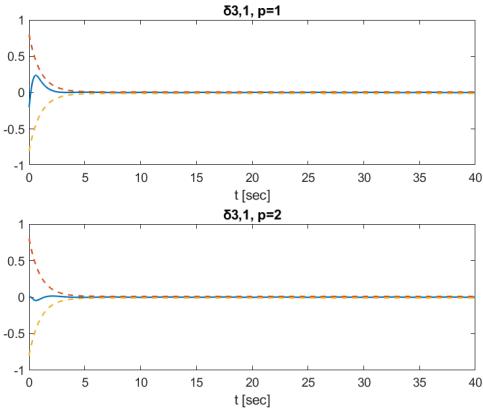
Σχήμα 3.8: σύμα ελέγχου πράκτορας 4



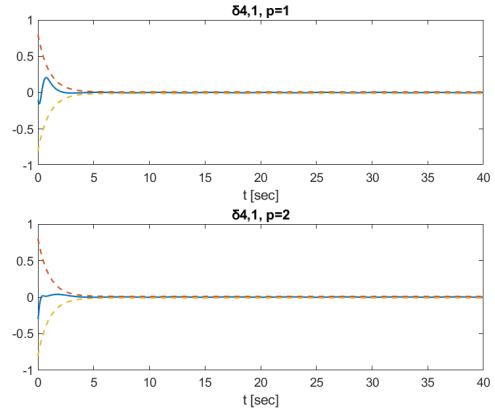
Σχήμα 3.9: δ1 πράκτορας 1



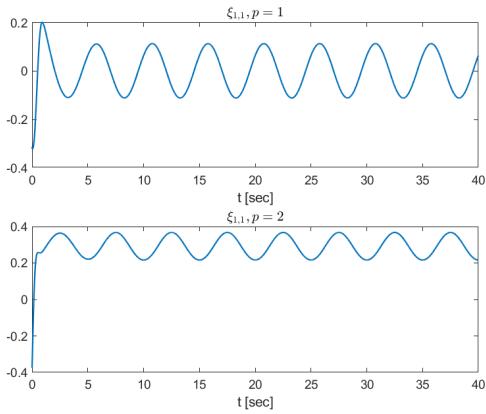
Σχήμα 3.10: δ1 πράκτορας 2



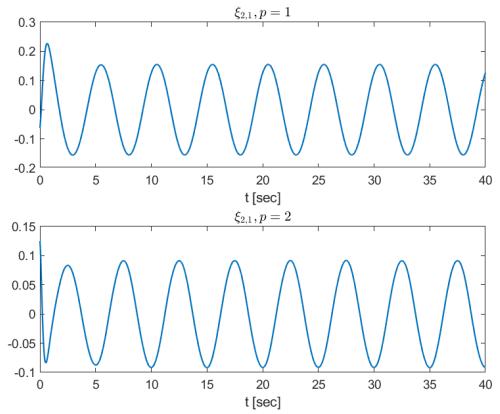
Σχήμα 3.11: δ1 πράκτορας 3



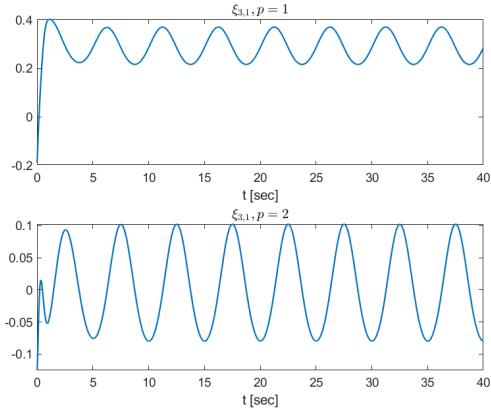
Σχήμα 3.12: δ1 πράκτορας 4



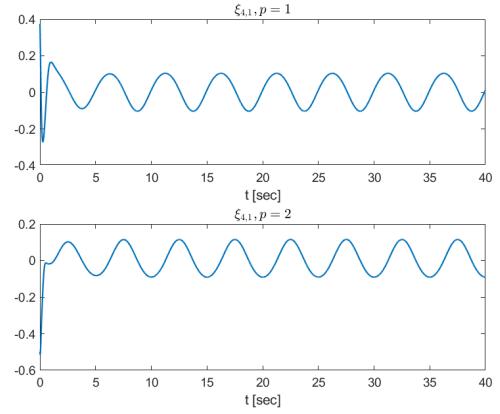
Σχήμα 3.13: ξ_1 πράκτορας 1



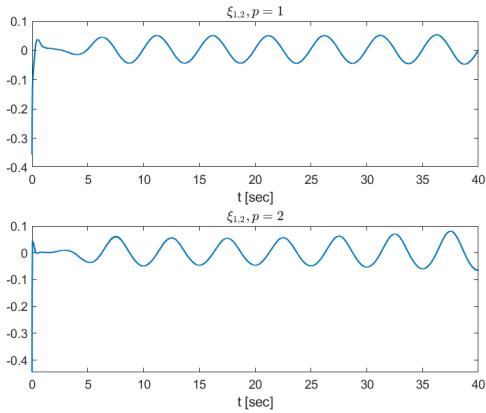
Σχήμα 3.14: ξ_1 πράκτορας 2



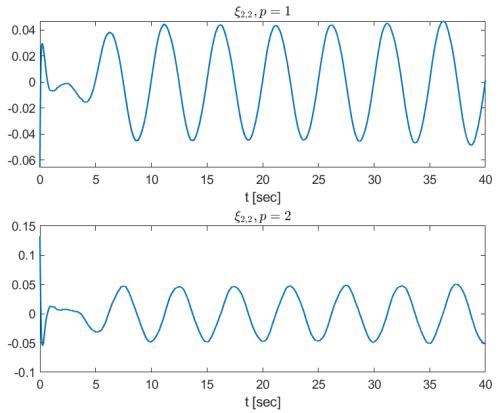
Σχήμα 3.15: ξ_1 πράκτορας 3



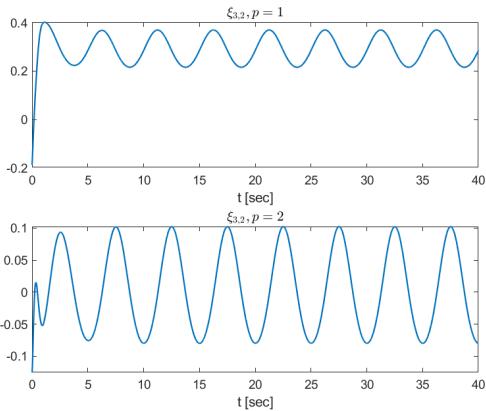
Σχήμα 3.16: ξ_1 πράκτορας 4



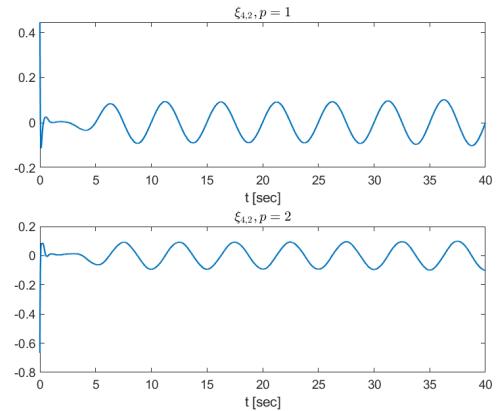
Σχήμα 3.17: ξ_2 πράκτορας 1



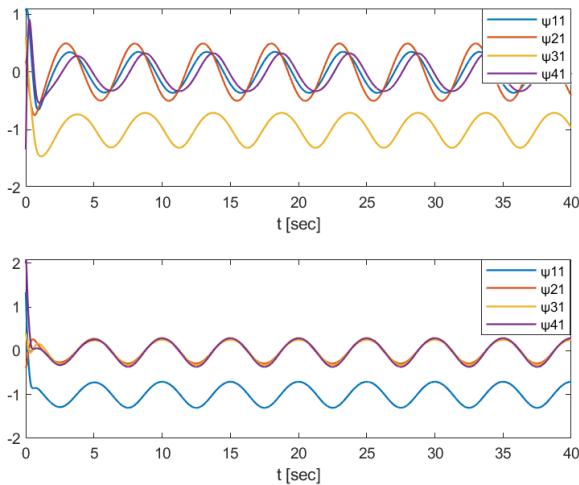
Σχήμα 3.18: ξ_2 πράκτορας 2



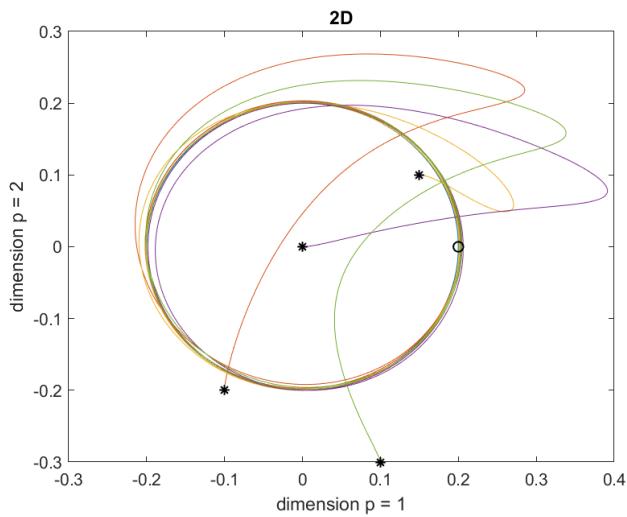
Σχήμα 3.19: ξ_2 πράκτορας 3



Σχήμα 3.20: ξ_2 πράκτορας 4



Σχήμα 3.21: ενδιάμεσα σήματα ελέγχου $\psi_{i,1}$ των πρακτόρων



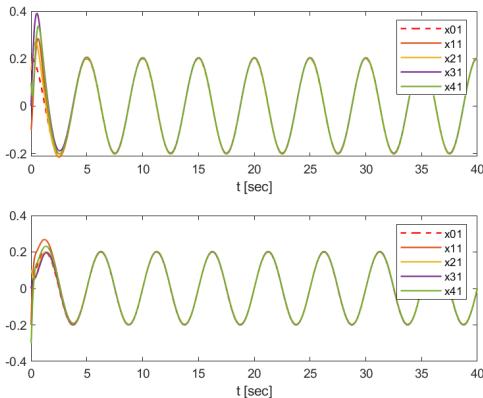
Σχήμα 3.22: τροχιά πρακτόρων στο επίπεδο

Παρατήρηση 3: Από τα διαγράμματα για $\rho_{i,1,\infty} = 0.01 \text{ sec}$ συμπεραίνουμε ότι για $T_s = 0.001 \text{ sec} > t_{mati}$ όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο είναι φραγμένα και επιτυγχάνεται ο στόχος ελέγχου. Αυτό οφείλεται στο ότι στην πράξη συναντάμε καλύτερα σενάρια συγκριτικά με το σενάριο χειρότερης περίπτωσης με βάση το οποίο πραγματοποιήθηκε η θεωρητική ανάλυση, οπότε το πραγματικό t_{mati} για την εγγύηση της ευστάθειας θα είναι μεγαλύτερο.

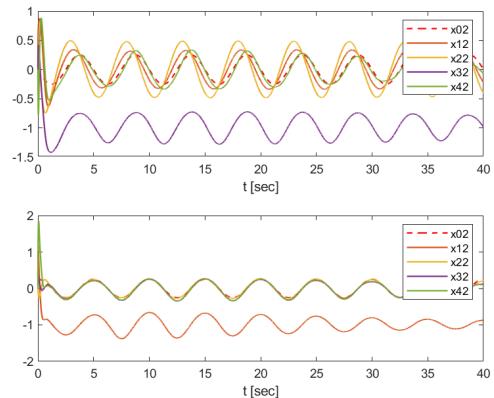
Παρατήρηση 4: Από τα διαγράμματα (3.5) - (3.7), παρατηρούμε ότι στη μόνιμη κατάσταση ο πράκτορας 4 απαιτεί μεγαλύτερα σήματα ελέγχου στη μόνιμη κατάσταση. Αυτό οφείλεται στο ότι ο πράκτορας 4 βρίσκεται στο τελευταίο επίπεδο του γράφου επικοινωνίας και λαμβάνει σήμα αναφοράς από 2 πράκτορες.

Παρατήρηση 5: Όσο προχωράμε επίπεδα στο γράφο παρατηρούμε ότι απαιτούνται μεγαλύτερα σήματα ελέγχου δηλαδή μεγαλύτερη "προσπάθεια" για τη διατήρηση ευστάθειας, διότι τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου $\psi_{i,1}$ λαμβάνουν επίσης μεγαλύτερες τιμές. Στο διάγραμμα (3.21) ο πράκτορας 4 έχει τα μεγαλύτερα όρια για το σήμα ψ_1 και για τις δύο διαστάσεις p .

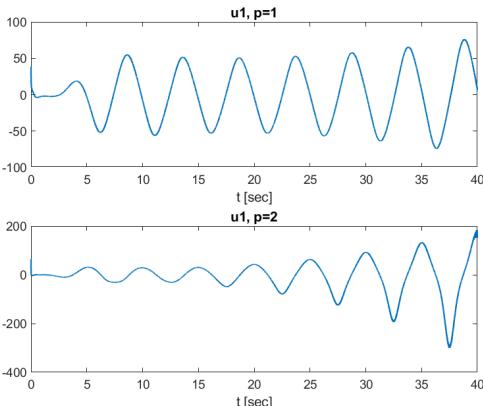
3.1.3 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 0.004 \text{ sec}$, $\rho_{1,\infty} = 0.01$



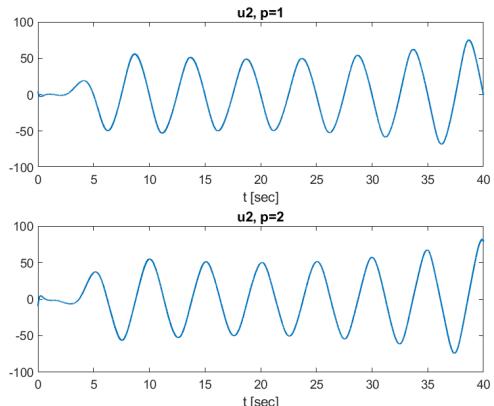
Σχήμα 3.23: κατάσταση $x_{i,1}$

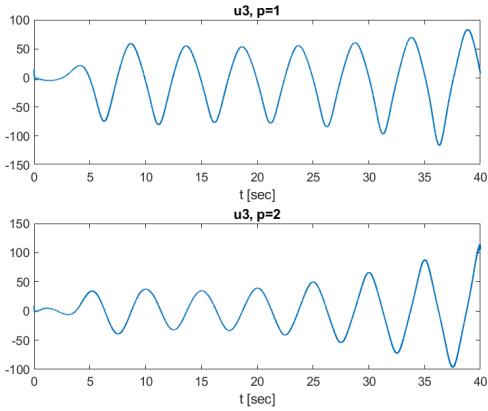


Σχήμα 3.24: κατάσταση $x_{i,2}$

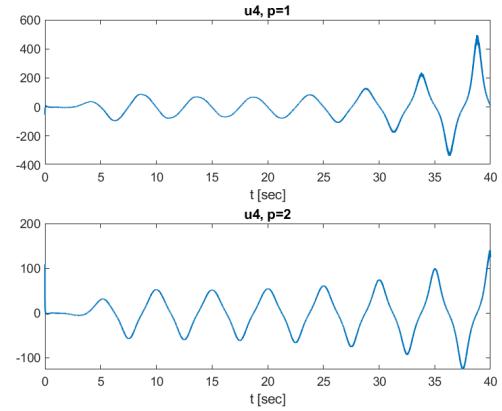


Σχήμα 3.25: σήμα ελέγχου πράκτορας 1 Σχήμα 3.26: σήμα ελέγχου πράκτορας 2

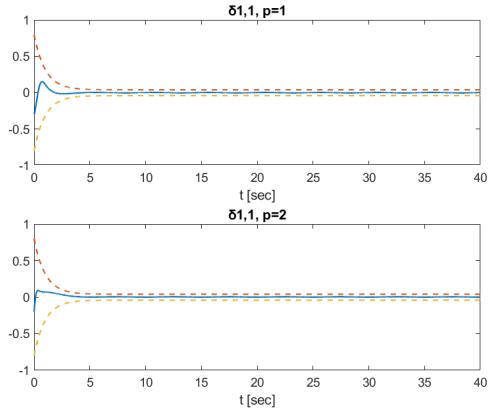




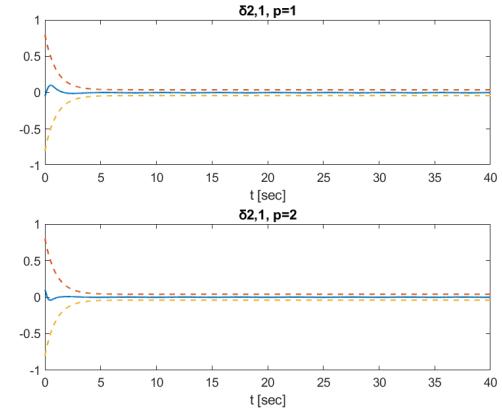
Σχήμα 3.27: σήμα ελέγχου πράκτορας 3



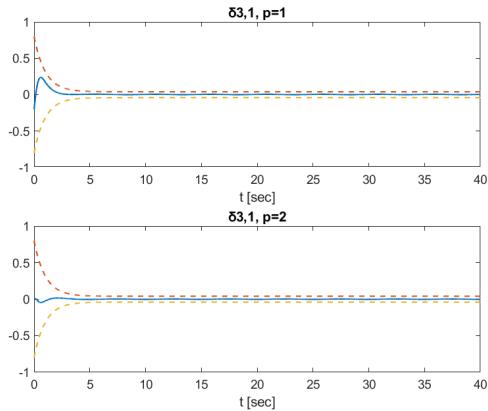
Σχήμα 3.28: σήμα ελέγχου πράκτορας 4



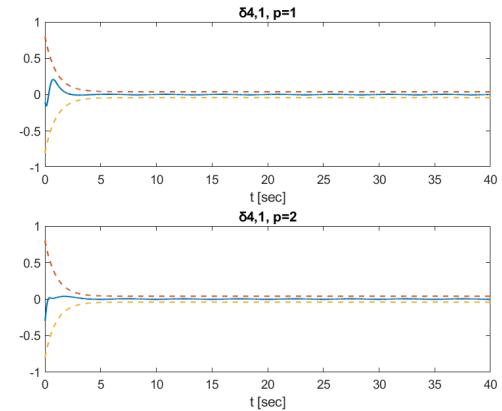
Σχήμα 3.29: δ1 πράκτορας 1



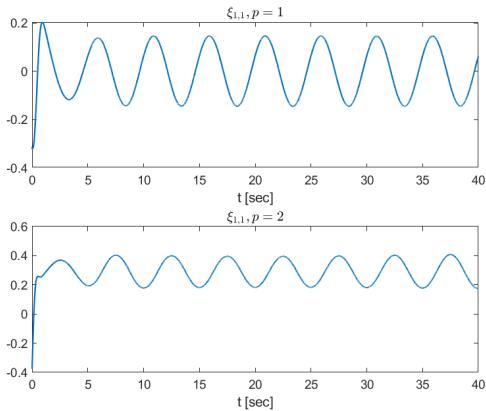
Σχήμα 3.30: δ1 πράκτορας 2



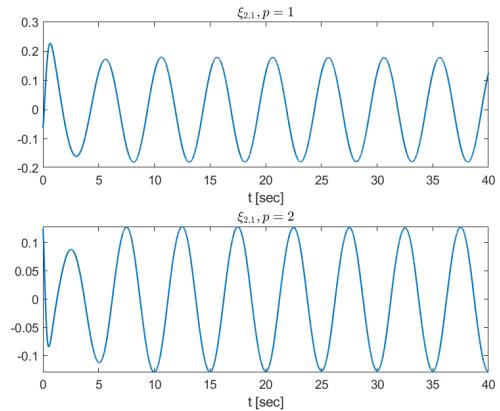
Σχήμα 3.31: δ1 πράκτορας 3



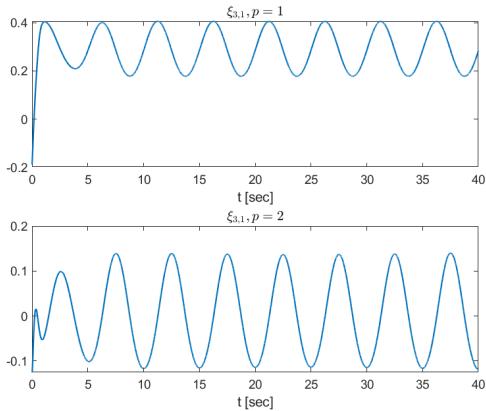
Σχήμα 3.32: δ1 πράκτορας 4



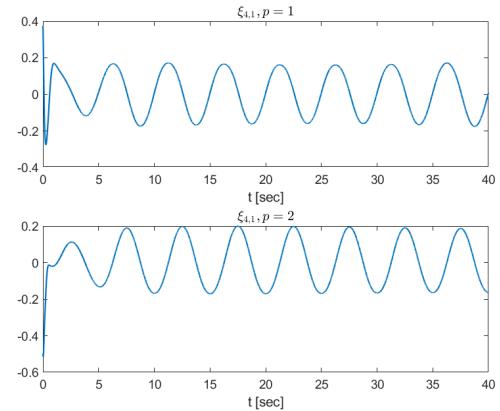
Σχήμα 3.33: ξ_1 πράκτορας 1



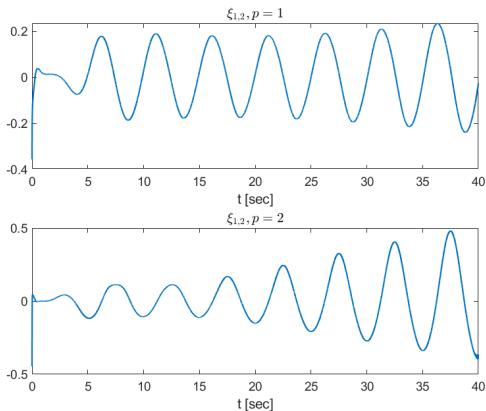
Σχήμα 3.34: ξ_1 πράκτορας 2



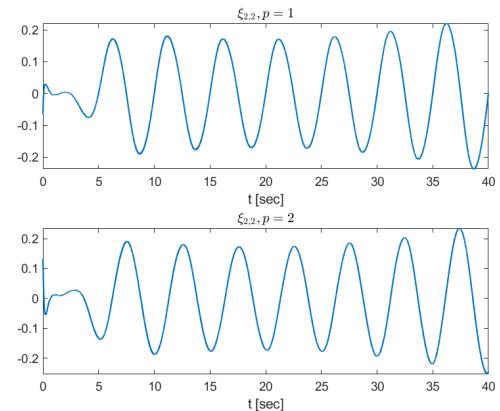
Σχήμα 3.35: ξ_1 πράκτορας 3



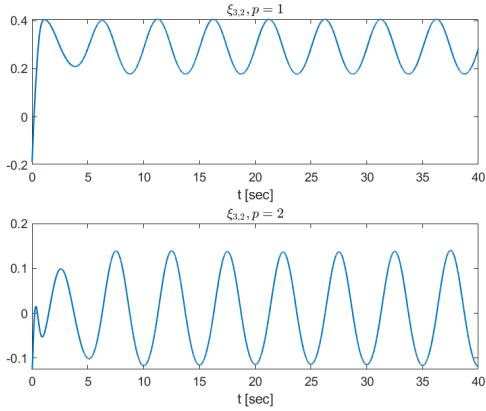
Σχήμα 3.36: ξ_1 πράκτορας 4



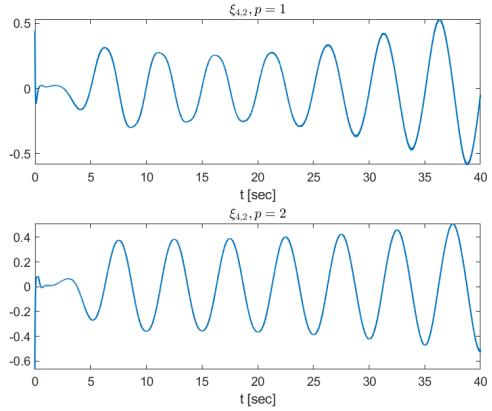
Σχήμα 3.37: ξ_2 πράκτορας 1



Σχήμα 3.38: ξ_2 πράκτορας 2



Σχήμα 3.39: ξ2 πράκτορας 3



Σχήμα 3.40: ξ2 πράκτορας 4

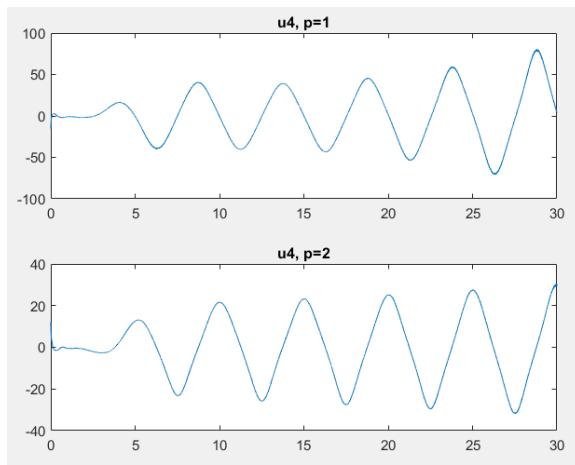
Παρατήρηση 6: Για $T_s = 0.004\text{sec}$ παρατηρούμε ότι τα σήματα ελέγχου λαμβάνουν μεγαλύτερες τιμές, διάγραμμα (3.25-3.28) και ιδιαίτερα στον πράκτορα 4 (3.28), ο οποίος όπως βρέθηκε και από τους υπολογισμούς είναι και εκείνος που καθορίζει το t_{mati} για το ολικό πολυπράκτορικό σύστημα.

Παρατήρηση 7: Υπάρχουν διαφορετικές τιμές για κάθε διάσταση $p = 1, 2$ στον ίδιο πράκτορα, διότι από τους πίνακες υπολογισμού του t_{mati} είναι φανερό ότι δεν λαμβάνουν τις ίδιες τιμές τα φράγματα $\bar{f}_{i,1}^p$ για $p = 1, 2$, τα οποία επηρεάζουν τα σήματα ξ , ψ_1 , u_1 .

3.1.4 Αλλαγή Κερδών

Μειώνουμε στο μισό το κέρδος του πράκτορα 4, ο οποίος επικοινωνεί με 2 πράκτορες, και συγκεκριμένα:

$$K_{4,1} = [1, 1]^T$$



Σχήμα 3.41: σήμα ελέγχου u4

Παρατήρηση: Διαπιστώνουμε ότι μειώνοντας το κέρδος (διατηρώντας τις άλλες παραμέτρους αμετάβλητες), το πλάτος του σήματος ελέγχου μειώνεται και δεν εμφανίζεται πλέον αστάθεια.

Αυξάνουμε το $\rho_{i,1,\infty}$, διατηρώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές.

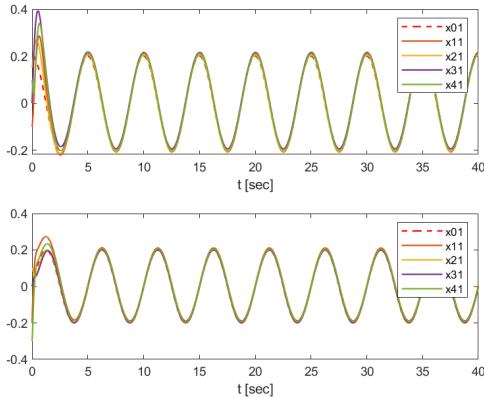
Παρατίθεται ο παρακάτω πίνακας ώστε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα :

t_{mati}	Step 1	Πράκτορας 1	Πράκτορας 2	Πράκτορας 3	Πράκτορας 4
$\rho_{i,1,\infty} = 0.01$		$6.55e - 7$	$6.88e - 6$	$2.8737e - 7$	$5e - 8$
$\rho_{i,1,\infty} = 0.04$		$2.62e - 6$	$2.75e - 5$	$1.14e - 6$	$2e - 7$
$\rho_{i,1,\infty} = 0.1$		$6.55e - 6$	$6.88e - 5$	$2.8737e - 6$	$5e - 7$

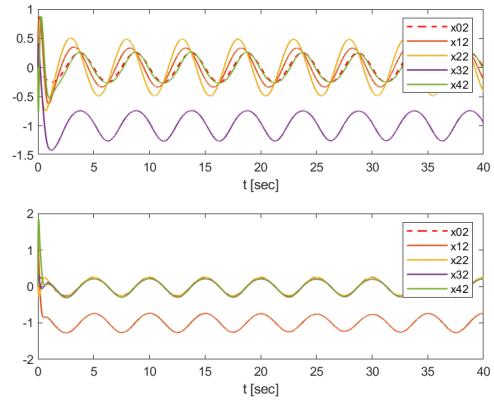
Παρατήρηση 8: Παρατηρούμε ότι αυξάνοντας το $\rho_{i,1,\infty}$ λαμβάνουμε μεγαλύτερο t_{mati} στο step 1 (και κατ' επέκταση στο step 2), για την εγγύηση της ευστάθειας των πρακτόρων, το οποίο είναι επιθυμητό για τη διακριτή επικοινωνία. Πιο συγκεκριμένα, αυξάνεται περίπου το t_{mati} κατά μία τάξη μεγέθους, αν αυξηθεί το $\rho_{i,1,\infty}$ κατά μία τάξη.

3.1.5 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 0.003 \text{ sec}$, $\rho_{1,\infty} = 0.04$

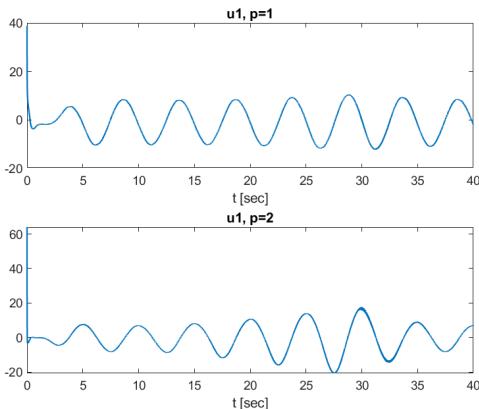
Για $T_s = 0.003\text{s}$ και $\rho_{i,1,\infty} = 0.04$ επιτυγχάνεται ευστάθεια του ολικού πολυπρακτορικού συστήματος. Παρατίθενται παρακάτω τα διαγράμματα :



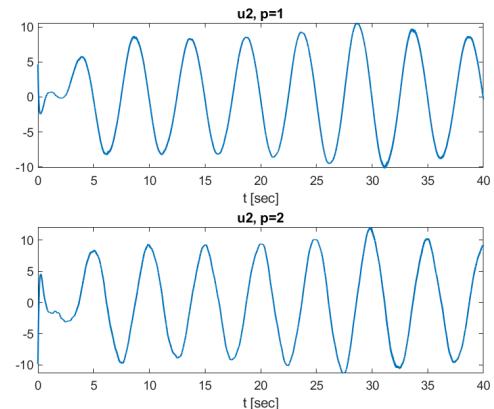
Σχήμα 3.42: κατάσταση $x_{i,1}$

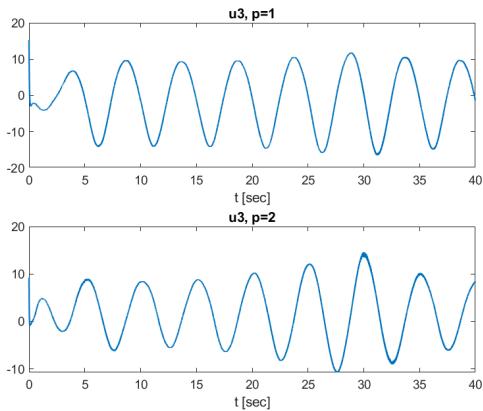


Σχήμα 3.43: κατάσταση $x_{i,2}$

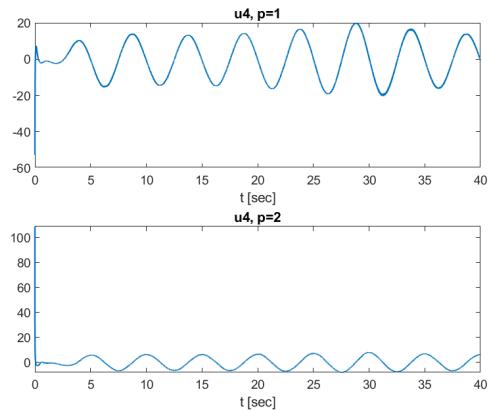


Σχήμα 3.44: σήμα ελέγχου πράκτορας 1 Σχήμα 3.45: σήμα ελέγχου πράκτορας 2

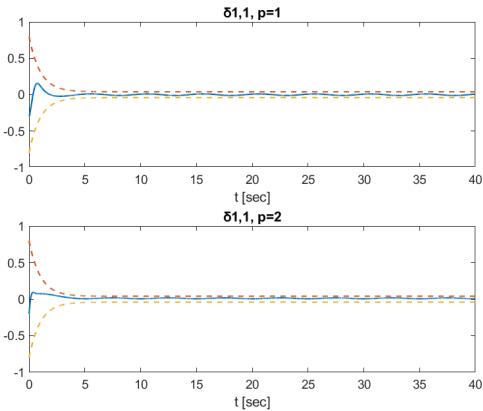




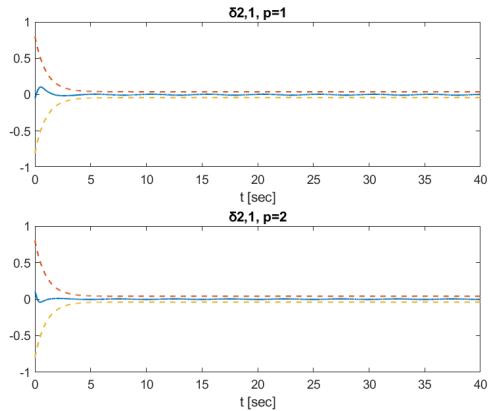
Σχήμα 3.46: σήμα ελέγχου πράκτορας 3



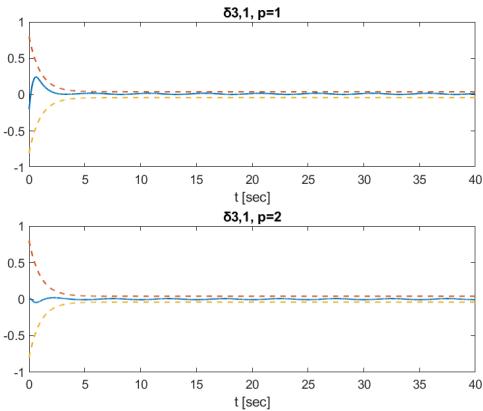
Σχήμα 3.47: σήμα ελέγχου πράκτορας 4



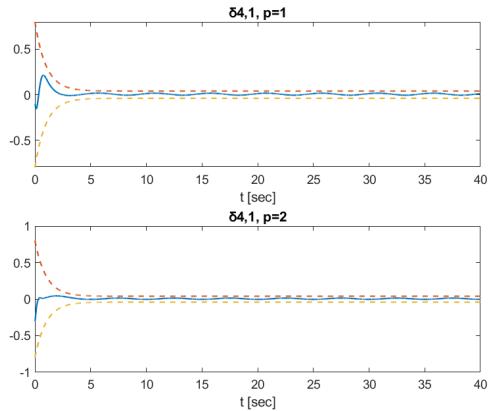
Σχήμα 3.48: δ1 πράκτορας 1



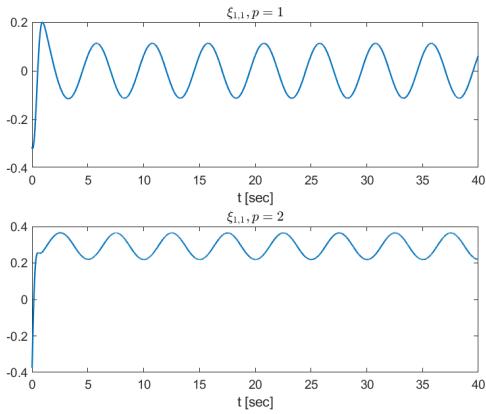
Σχήμα 3.49: δ1 πράκτορας 2



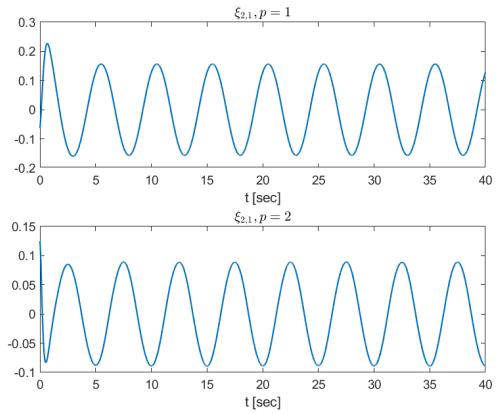
Σχήμα 3.50: δ1 πράκτορας 3



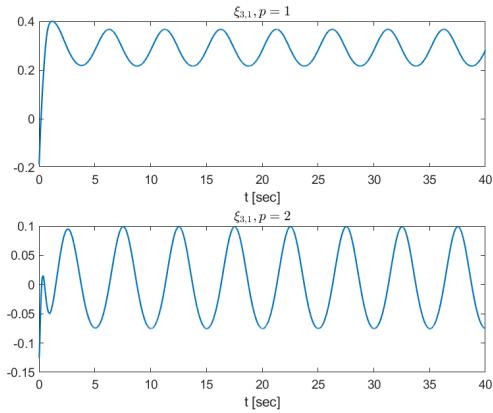
Σχήμα 3.51: δ1 πράκτορας 4



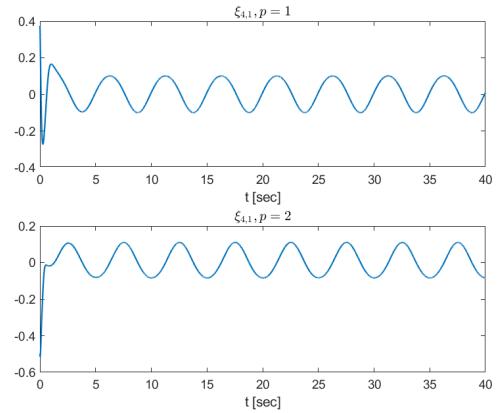
Σχήμα 3.52: ξ_1 πράκτορας 1



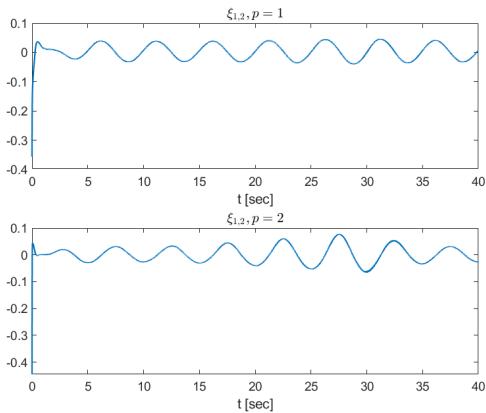
Σχήμα 3.53: ξ_1 πράκτορας 2



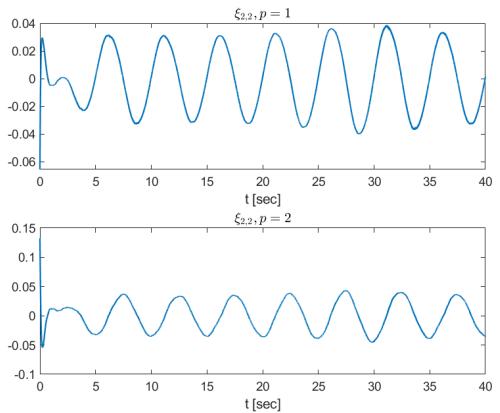
Σχήμα 3.54: ξ_1 πράκτορας 3



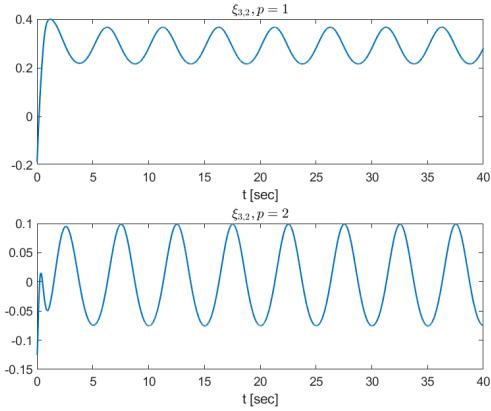
Σχήμα 3.55: ξ_1 πράκτορας 4



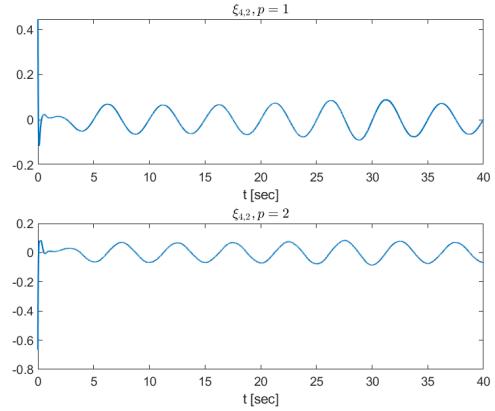
Σχήμα 3.56: ξ_2 πράκτορας 1



Σχήμα 3.57: ξ_2 πράκτορας 2



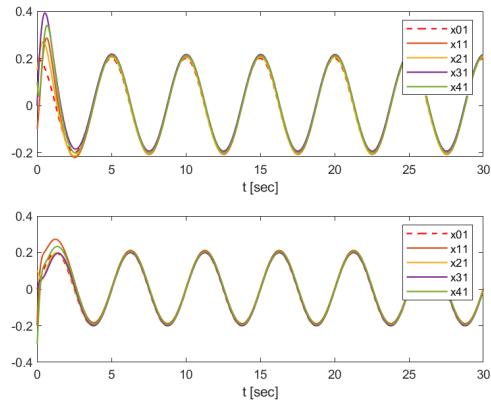
Σχήμα 3.58: ξ2 πράκτορας 3



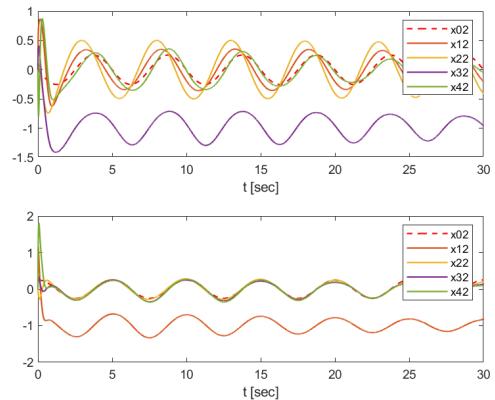
Σχήμα 3.59: ξ2 πράκτορας 4

3.1.6 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 0.01\text{sec}$, $\rho_{1,\infty} = 0.04$

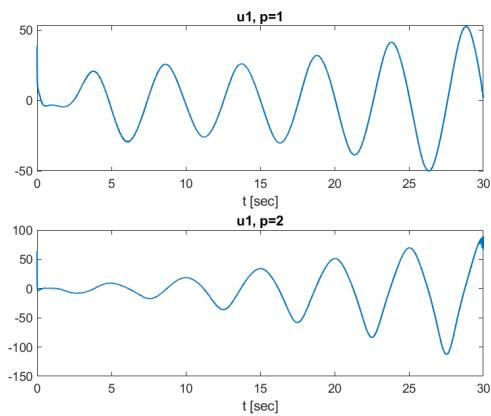
Για $T_s = 0.01\text{s}$ και $\rho_{i,1,\infty} = 0.04$ εμφανίζεται αστάθεια στα σήματα ελέγχου. Παρατίθενται παρακάτω τα διαγράμματα:



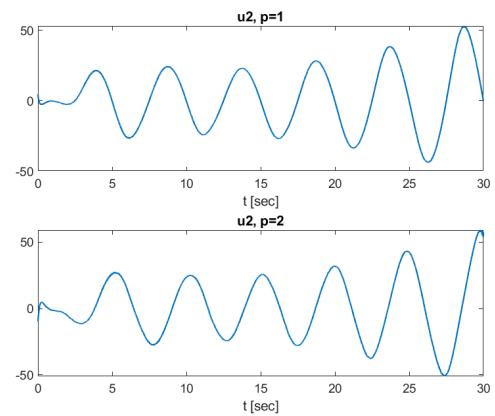
Σχήμα 3.60: κατάσταση $x_{i,1}$

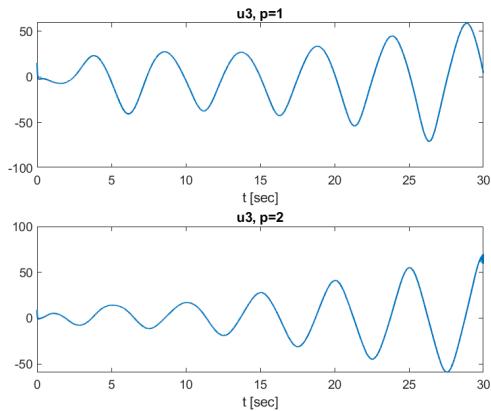


Σχήμα 3.61: κατάσταση $x_{i,2}$

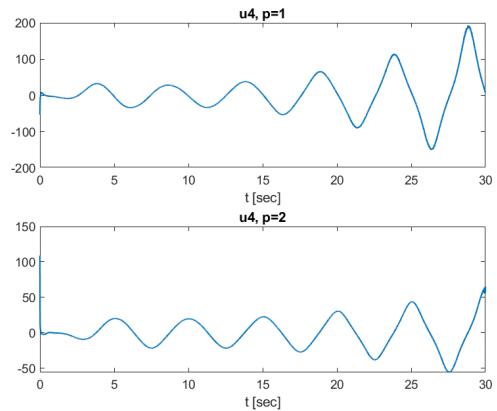


Σχήμα 3.62: σήμα ελέγχου πράκτορας 1 Σχήμα 3.63: σήμα ελέγχου πράκτορας 2

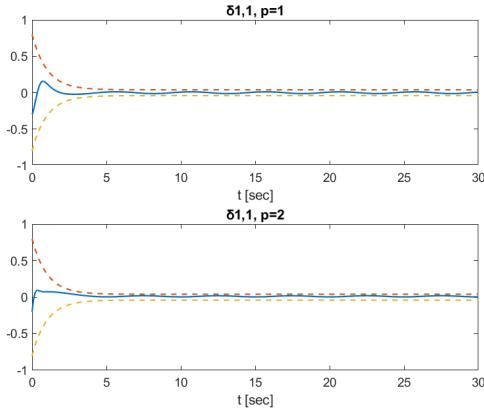




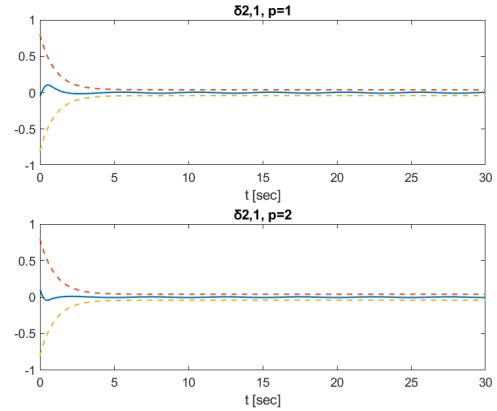
Σχήμα 3.64: σήμα ελέγχου πράκτορας 3



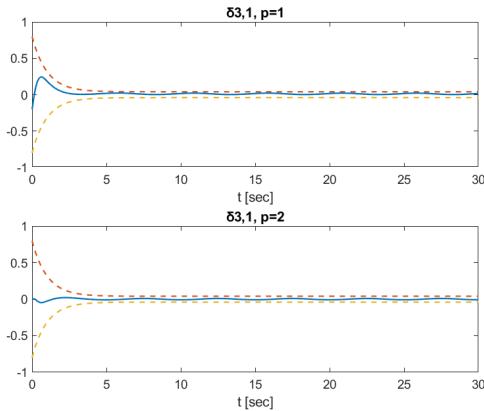
Σχήμα 3.65: σήμα ελέγχου πράκτορας 4



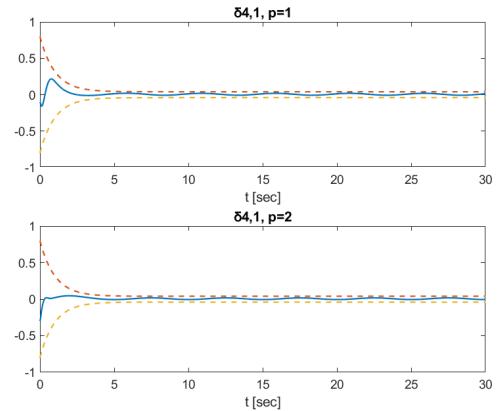
Σχήμα 3.66: δ1 πράκτορας 1



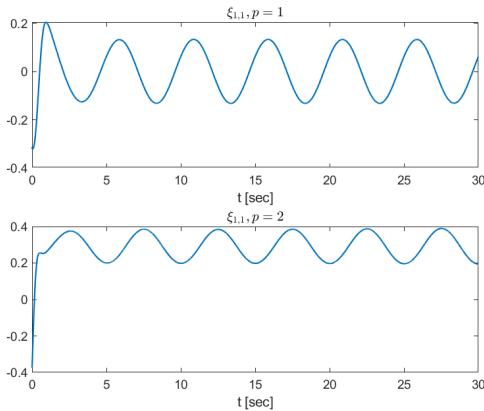
Σχήμα 3.67: δ1 πράκτορας 2



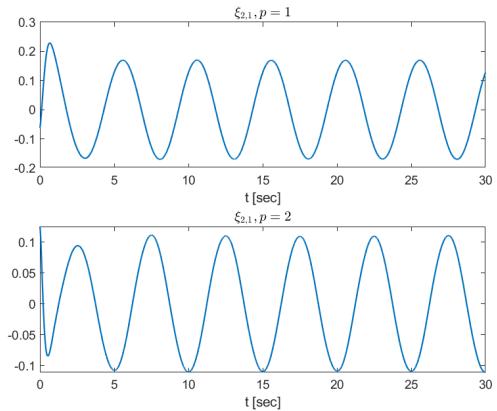
Σχήμα 3.68: δ1 πράκτορας 3



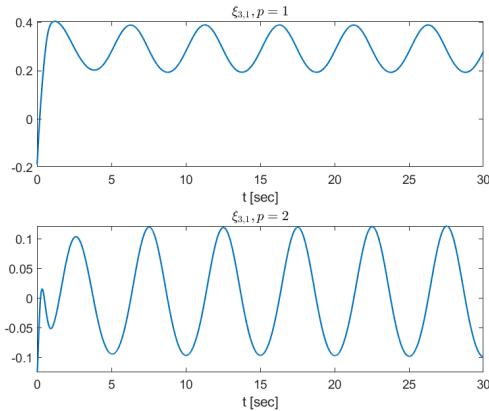
Σχήμα 3.69: δ1 πράκτορας 4



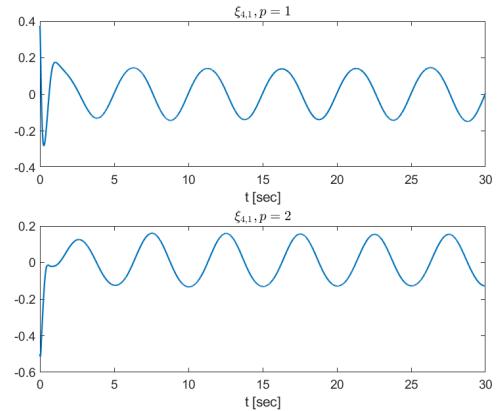
Σχήμα 3.70: ξ1 πράκτορας 1



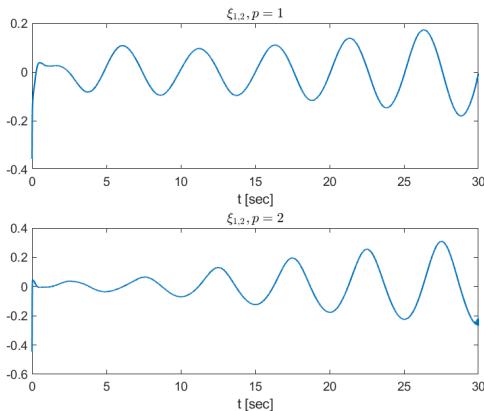
Σχήμα 3.71: ξ1 πράκτορας 2



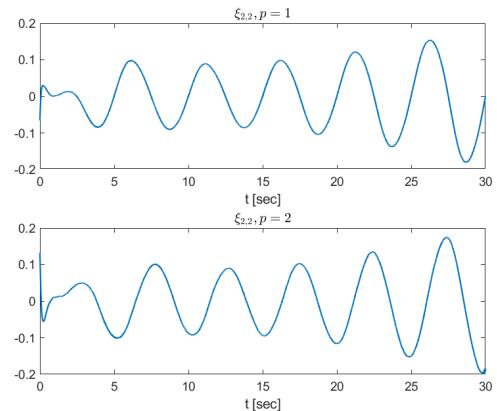
Σχήμα 3.72: ξ1 πράκτορας 3



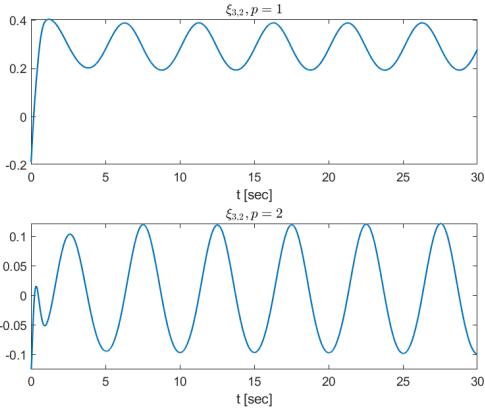
Σχήμα 3.73: ξ1 πράκτορας 4



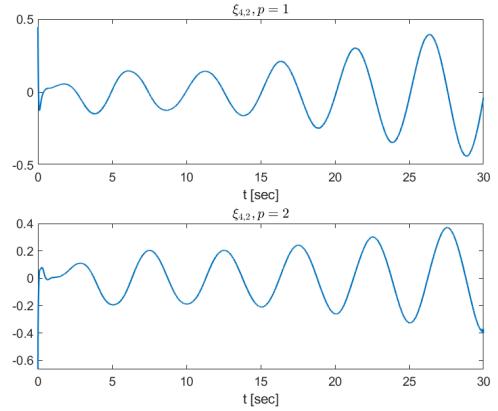
Σχήμα 3.74: ξ2 πράκτορας 1



Σχήμα 3.75: ξ2 πράκτορας 2



Σχήμα 3.76: ξ_2 πράκτορας 3

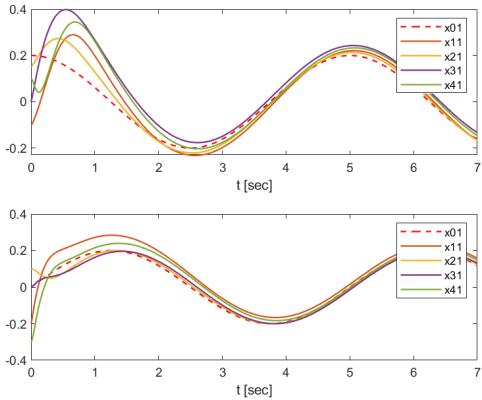


Σχήμα 3.77: ξ_2 πράκτορας 4

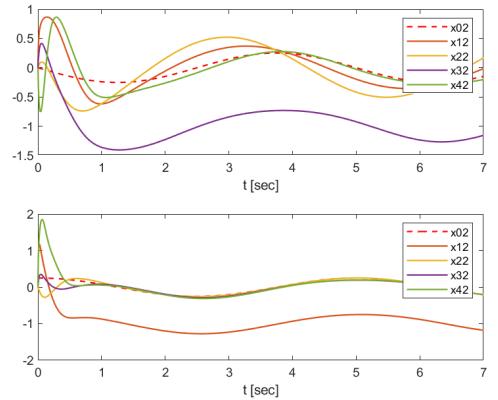
Παρατήρηση 9: Προκύπτει από τα παραπάνω διαγράμματα ότι σημάδια αστάθειας στα σήματα $u_{i,1}$ και $\xi_{i,2}$ παρουσιάζονται για $T_s = 0.01\text{sec} > 0.04\text{sec}$, γεγονός που οφείλεται στην αύξηση του $\rho_{i,1,\infty}$. Επίσης, παρατηρούμε ότι για $\rho_{i,1,\infty} = 0.04$ έχουμε ευστάθεια χωρίς να αυξάνονται τα σήματα ελέγχου στη μόνιμη κατάσταση για περίοδο $T_s = 0.003\text{sec}$, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το $T_s = 0.001$ σταν επιλέχθηκε $\rho_{i,1,\infty} = 0.01 < 0.04$. Επομένως, επαληθεύονται τα θεωρητικά συμπεράσματα.

3.1.7 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 5e - 7$, $\rho_{1,\infty} = 0.1$

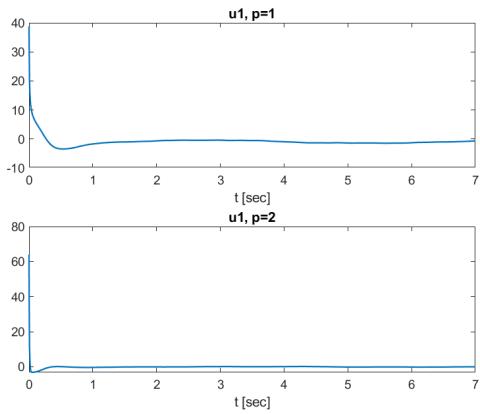
Παρατίθενται, ακόμη, τα διαγράμματα για $T_s = 5e^{-7}\text{s}$:



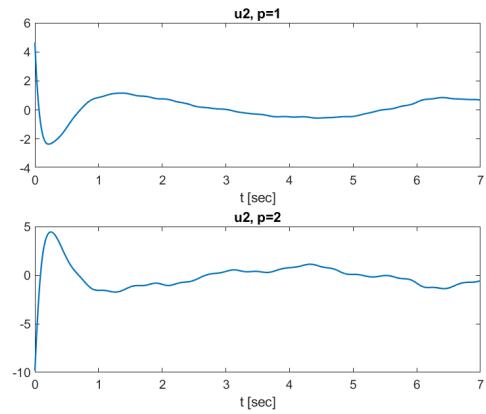
Σχήμα 3.78: κατάσταση $x_{i,1}$



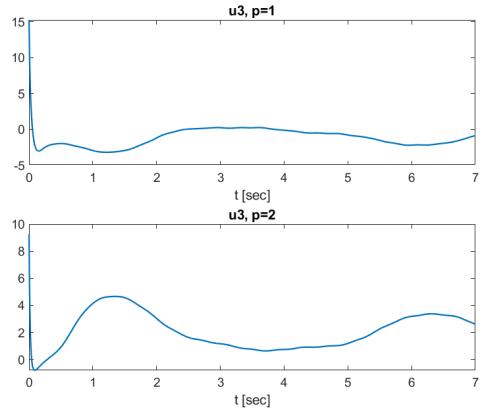
Σχήμα 3.79: κατάσταση $x_{i,2}$



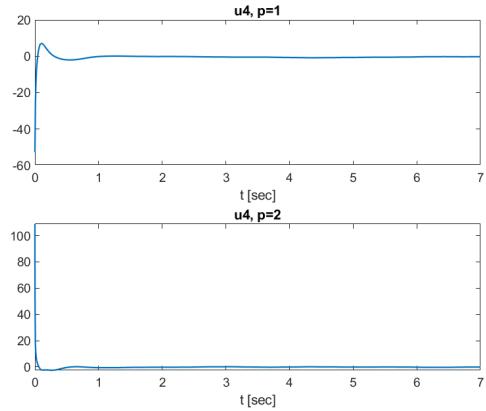
Σχήμα 3.80: σήμα ελέγχου πράκτορας 1



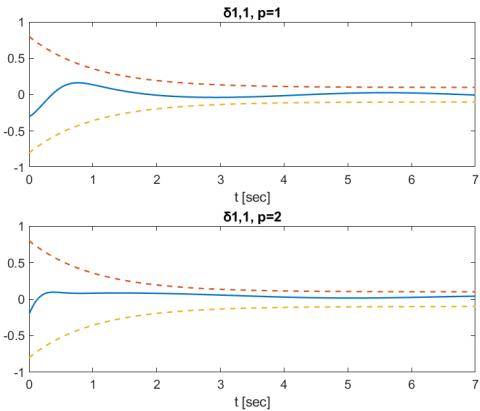
Σχήμα 3.81: σήμα ελέγχου πράκτορας 2



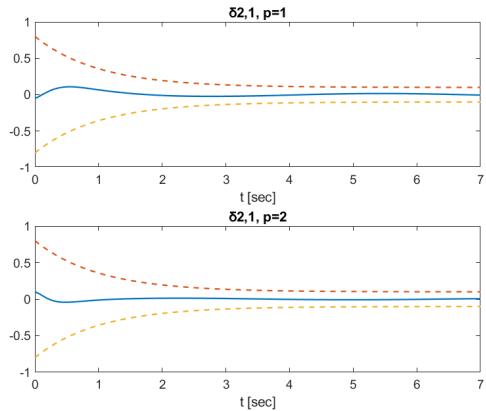
Σχήμα 3.82: σήμα ελέγχου πράκτορας 3



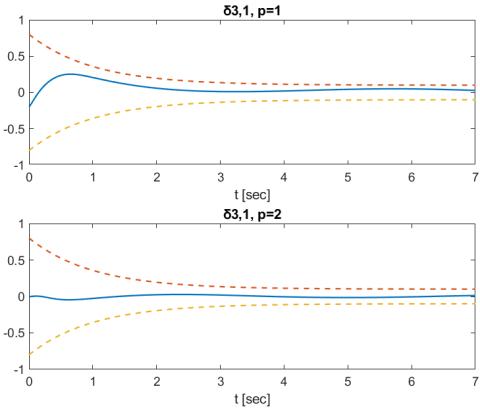
Σχήμα 3.83: σήμα ελέγχου πράκτορας 4



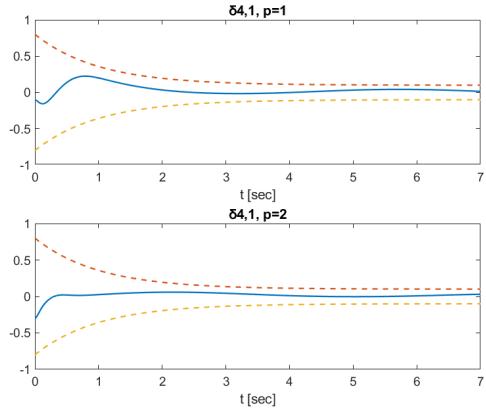
Σχήμα 3.84: δ1 πράκτορας 1



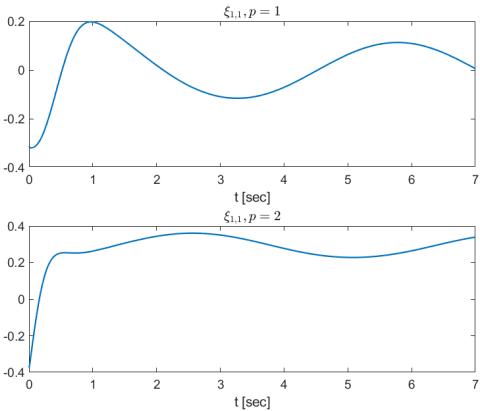
Σχήμα 3.85: δ1 πράκτορας 2



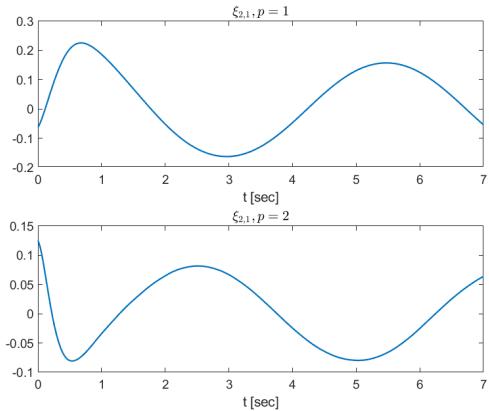
Σχήμα 3.86: δ1 πράκτορας 3



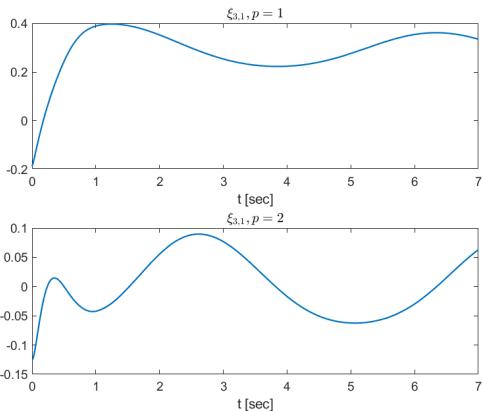
Σχήμα 3.87: δ1 πράκτορας 4



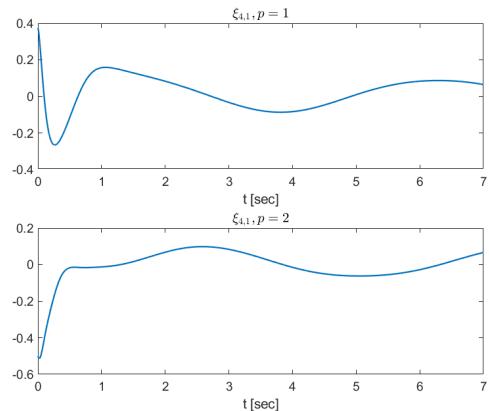
Σχήμα 3.88: ξ1 πράκτορας 1



Σχήμα 3.89: ξ1 πράκτορας 2



Σχήμα 3.90: ξ1 πράκτορας 3

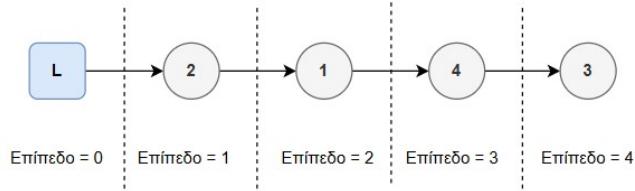


Σχήμα 3.91: ξ1 πράκτορας 4

Παρατήρηση 10: Παρατηρούμε για $T_s = t_{mati}|step1$ ευστάθεια του πολυπρακτορικού συστήματος. Μάλιστα από τα παραπάνω διαγράμματα είναι φανερό ότι οι ελεγκτές διακριτού χρόνου προσεγγίζουν το συνεχή χρόνο, καθώς τα σήματα ελέγχου u_i λαμβάνουν μικές τιμές (< 5). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο υπολογισμός του μέγιστου επιτρεπόμενου διαστήματος μετάδοσης βασίζεται σε ανάλυση χειρότερου σεναρίου, η οποία

παρατηρούμε ότι στην πράξη δεν συναντάται, αλλά βρισκόμαστε σε καλύτερα σενάρια όσον αφορά τα σήματα κλειστού βρόχου.

3.1.8 Υπολογισμός t_{mati} - Γράφος αλυσίδα



Σχήμα 3.92: Γράφος Πολυπρακτορικού Συστήματος

Για το συγκεκριμένο γράφο επικοινωνίας έχουμε:

$$\sigma_{min}(L + B) = 0.35$$

Επομένως, θα μεταβληθούν τα όρια των πρώτων καταστάσεων των πρακτόρων και επομένως και τα άνω όρια των μη γραμμικοτήτων $\bar{f}_{i,1}$ των πρακτόρων. Επομένως, στη συγκεκριμένη περίπτωση οι πρώτες καταστάσεις των πρακτόρων φράσσονται από:

$$\bar{x}_{i,1}(t) = \begin{bmatrix} 0.8/0.35 + 0.2 \\ 0.8/0.35 + 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4857 \\ 2.4857 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Δεν μεταβάλλουμε τις εξισώσεις των συστημάτων και τις μεταβλητές, παραμόνο το γράφο επικοινωνίας.

Παρατίθενται και για την περίπτωση του γράφου αλυσίδα οι υπολογισμοί των $t_{mati}(i)$

Βήμα $q = 1$:

Πράκτορας 2 : Όμοιο επίπεδο στο γράφο με προηγούμενως.

Πράκτορας 2 $q = 1$	dimension $p = 1$	dimension $p = 2$
$K_{i,1}$	2	2
$\bar{f}_{i,1}$	4.9714	15.358
$\rho_{i,2}(0)$	3	3
$\dot{\rho}_{i,1}(0)$	0.79	0.79
$\bar{x}_{0,1}$	0.2513	0.2513
$\bar{F}_{i,1}$	9.012	16.399
$\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}}$	4.505	8.1995
$T^{-1}\left(\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}}\right)$	0.8609	0.92274
$\bar{\xi}_{i,1}$	0.9365	0.9365
$\bar{\varepsilon}_{i,1}$	10	10
$\rho_{i,1}^\infty$	0.01	0.01
t_{mati}	$2.6e - 5$	$3.79e - 6$
$\bar{\psi}_{i,1}$	20	20

Πράκτορας 1 : Όμοιο επίπεδο στο γράφο με προηγούμενως.

Πράκτορας 1 $q = 1$	dimension $p = 1$	dimension $p = 2$
$K_{i,1}$	2	2
$\bar{f}_{i,1}$	0.8707	0.4918
$\rho_{i,2}(0)$	3	3
$\dot{\rho}_{i,1}(0)$	0.79	0.79
$\bar{F}_{i,1}$	32.632	43.68
$\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}}$	16.316	21.84
$T^{-1}(\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}})$	0.961	0.9708
$\bar{\xi}_{i,1}$	0.9735	0.9735
$\bar{\varepsilon}_{i,1}$	24	24
$\rho_{i,1}^\infty$	0.01	0.01
t_{mati}	$1.54e - 6$	$2.82e - 7$
$\bar{\psi}_{i,1}$	48	48

Πράκτορας 4 : Ο πράκτορας 4 βρίσκεται στο επίπεδο 3, ωστόσο πλέον λαμβάνει το σήμα αναφοράς μόνο από έναν γειτονικό πράκτορα, τον πράκτορα 1.

$$d_i + b_i = 1 + 0 = 1$$

$$N_i = \{1\}$$

$$\bar{F}_{i,1}^p = (\bar{f}_{i,1}^p + \rho_{i,2}^p(0)) + (\bar{f}_{1,1}^p + \rho_{1,2}^p(0) + |\psi_{1,1}^p|) + |\dot{\rho}_{i,1}^p|$$

Πράκτορας 4 $q = 1$	dimension $p = 1$	dimension $p = 2$
$K_{i,1}$	2	2
$\bar{f}_{i,1}$	0.7581	6.179
$\rho_{i,2}(0)$	3	3
$\dot{\rho}_{i,1}(0)$	0.79	0.79
$\bar{F}_{i,1}$	56.418	64.46
$\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}}$	28.209	32.23
$T^{-1}(\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}})$	0.977	0.98
$\bar{\xi}_{i,1}$	0.9818	0.9818
$\bar{\varepsilon}_{i,1}$	35	35
$\rho_{i,1}^\infty$	0.01	0.01
t_{mati}	$3.44e - 7$	$1.19e - 7$
$\bar{\psi}_{i,1}$	70	70

Πράκτορας 3 : Ο πράκτορας 3 πλέον βρίσκεται σε επομένο επίπεδο πιο μακριά από τον ηγέτη, δηλαδή στο επίπεδο 4 σε αντίθεση με προηγουμένως που βρισκόταν στο επίπεδο 2 του γράφου επικοινωνίας.

$d_i + b_i = 1 + 0 = 1$
$N_i = \{4\}$
$\bar{F}_{i,1}^p = (\bar{f}_{i,1}^p + \rho_{i,2}^p(0)) + (\bar{f}_{4,1}^p + \rho_{4,2}^p(0) + \psi_{4,1}^p) + \dot{\rho}_{i,1}^p $

Πράκτορας 3 $q = 1$	<i>dimension</i> $p = 1$	<i>dimension</i> $p = 2$
$K_{i,1}$	2	2
$\bar{f}_{i,1}$	0.6274	6.1787
$\rho_{i,2}(0)$	3	3
$\dot{\rho}_{i,1}(0)$	0.79	0.79
$\bar{F}_{i,1}$	78.1984	92.1477
$\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}}$	39.099	46.07
$T^{-1}\left(\frac{F_{i,1}}{K_{i,1}}\right)$	0.9837	0.9862
$\xi_{i,1}$	0.9867	0.9867
$\bar{\varepsilon}_{i,1}$	48	48
$\rho_{i,1}^\infty$	0.01	0.01
t_{mati}	$1.7331e - 7$	$2.87e - 8$
$\bar{\psi}_{i,1}$	96	96

Βήμα $q = 2$:

Παρομοίως, γίνονται οι αντίστοιχοι υπολογισμοί. Ο πράκτορας 3 καθορίζει το $t_{mati} = e^{-26}$.

Ολικό Πολυπρακτορικό Σύστημα:

Το μέγιστο επιτρεπόμενο διάστημα μετάδοσης των σημάτων αναφοράς για την περίπτωση ανάλυσης χειρότερου σεναρίου είναι:

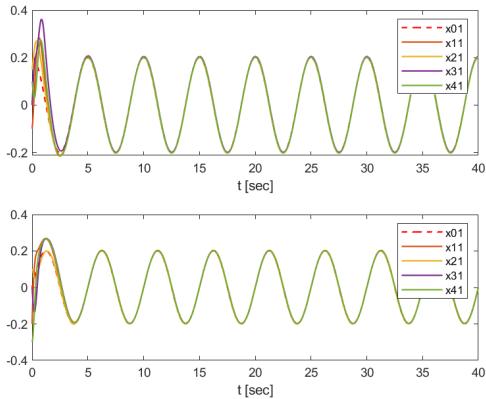
$$t_{mati}|step1 = \min_i t_{mati}(i) = e^{-8}$$

$$t_{mati}|step2 = \min_i t_{mati}(i) = e^{-26}$$

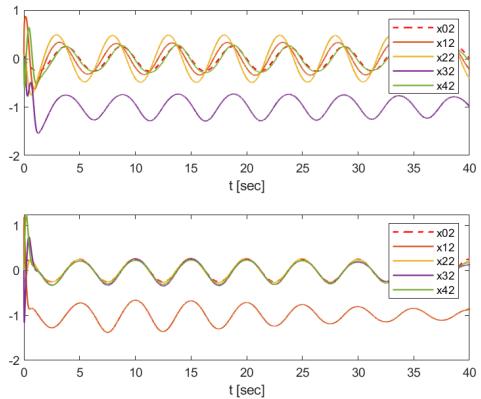
Παρατήρηση 11: Το t_{mati} που προκύπτει είναι της ίδιας τάξης με τον προηγούμενο γράφο (λίγο μικρότερη τιμή). Οπότε δεν αναμένουμε μεγάλες διαφοροποιήσεις όσον αφορά την ευστάθεια και τα αντίστοιχα T_s . Επίσης, το t_{mati} καθορίζει πλέον ο πράκτορας 3 που βρίσκεται και στο τελευταίο επίπεδο 4.

3.1.9 Διακριτός Χρόνος, $T_s = 0.004sec$, $\rho_{1,\infty} = 0.01$ γράφος αλυσίδα

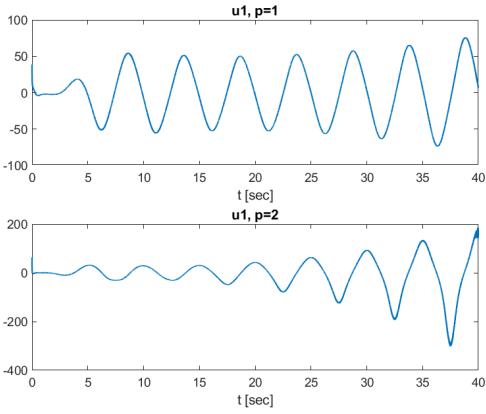
Επιλέχθηκαν οι ίδιες παράμετροι, ώστε να συγκρίνουμε πως επηρεάζει ο γράφος επικοινωνίας το αντικείμενο ελέγχου στο διακριτό χρόνο.



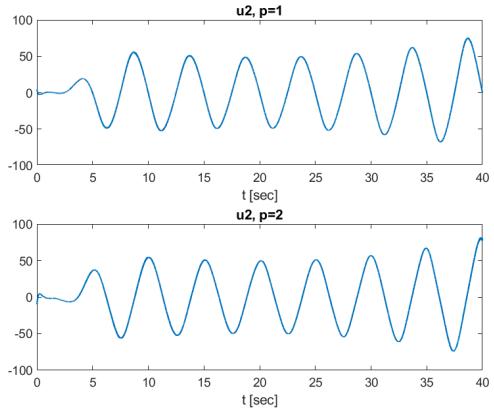
Σχήμα 3.93: κατάσταση $x_{i,1}$



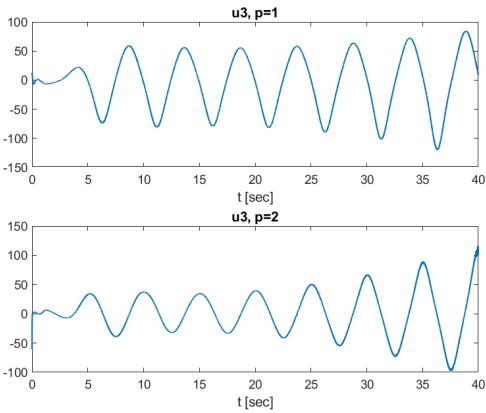
Σχήμα 3.94: κατάσταση $x_{i,2}$



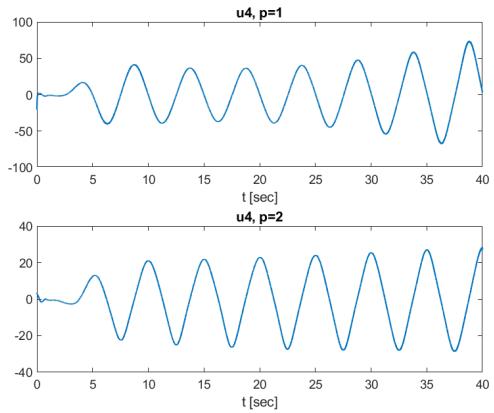
Σχήμα 3.95: σήμα ελέγχου πράκτορας 1



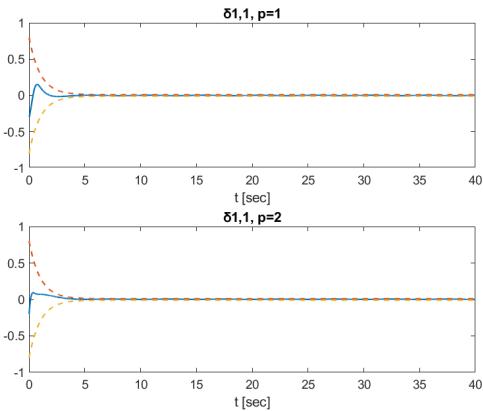
Σχήμα 3.96: σήμα ελέγχου πράκτορας 2



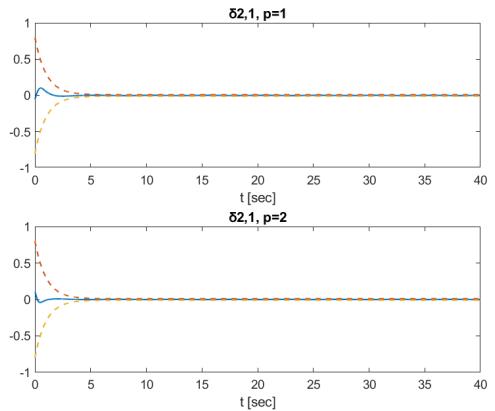
Σχήμα 3.97: σήμα ελέγχου πράκτορας 3



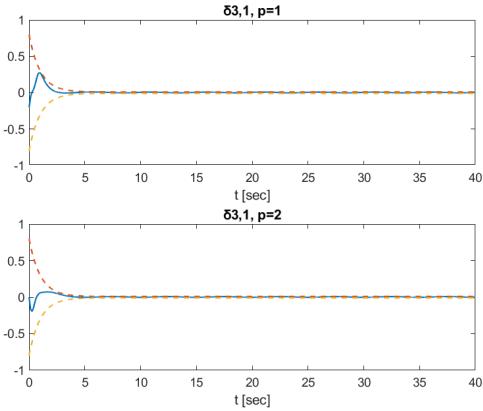
Σχήμα 3.98: σήμα ελέγχου πράκτορας 4



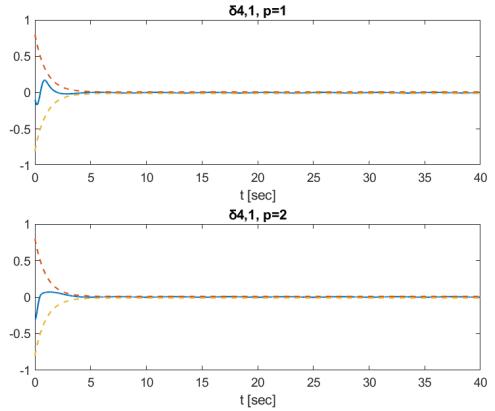
Σχήμα 3.99: δ1 πράκτορας 1



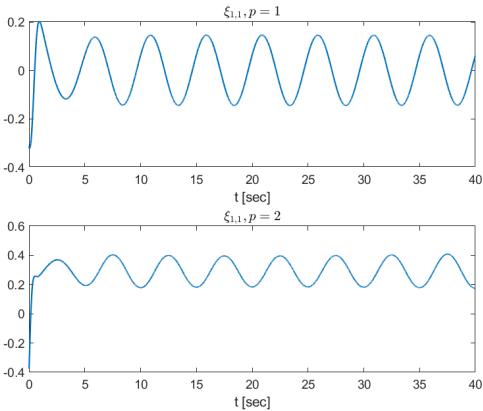
Σχήμα 3.100: δ1 πράκτορας 2



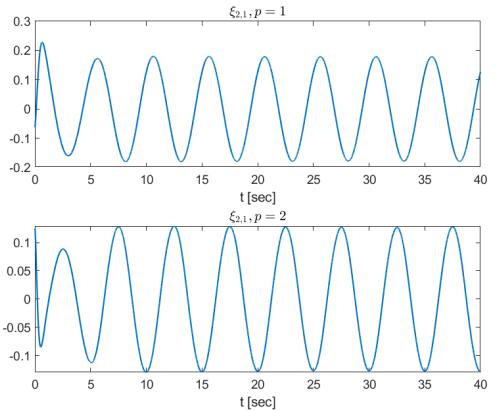
Σχήμα 3.101: δ1 πράκτορας 3



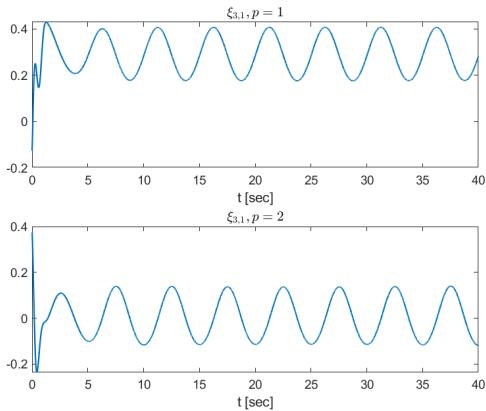
Σχήμα 3.102: δ1 πράκτορας 4



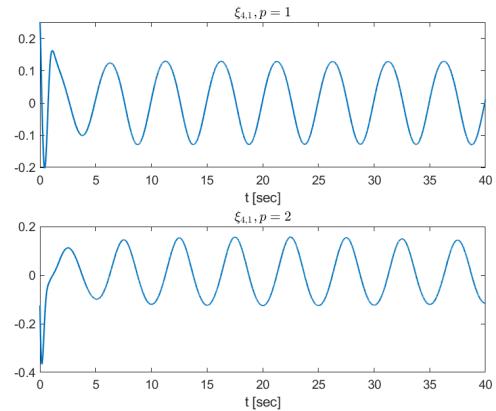
Σχήμα 3.103: ξ1 πράκτορας 1



Σχήμα 3.104: ξ1 πράκτορας 2



Σχήμα 3.105: ξ1 πράκτορας 3



Σχήμα 3.106: ξ1 πράκτορας 4

Παρατήρηση 12: Από το σχήμα (3.100) διαπιστώνουμε ότι ο πράκτορας 3, που πλέον βρίσκεται στο τελευταίο επίπεδο, το σφάλμα δ_1 με τον ηγέτη βρίσκεται πιο κοντά στη συνάρτηση απόδοσης ρ κατά τη μεταβατική κατάσταση.

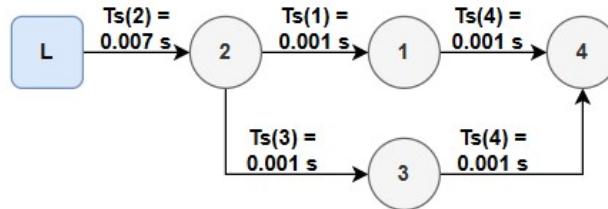
Παρατήρηση 13: Επίσης, συνολικά για ίδιες παραμέτρους παρατηρείται παρόμοια συμπεριφορά των ελεγκτών συγκριτικά με τον κυκλικό γράφο επικοινωνίας (διαγράμματα 3.23 - 3.40).

Παρατήρηση 14: Ο πράκτορας 4 που πλέον λαμβάνει σήμα αναφοράς μόνο από έναν πράκτορα εμφανίζει καλύτερη συμπεριφορά (σχήμα 3.97).

3.1.10 Υλοποίηση με διαφορετικά $T_s(i)$

Κάθε πράκτορας λαμβάνει το εκάστοτε σήμα αναφοράς από γειτονικούς πράκτορες σε διαφορετική περίοδο $T_s(i)$, για την οποία πρέπει να ισχύει για την εγγύηση της ευστάθειας $T_s(i) \leq t_{mat}(i)$. Χρησιμοποιούμε ξανά το κυκλικό γράφο επικοινωνίας.

Διακριτός Χρόνος, $\rho_{1,\infty} = 0.01$

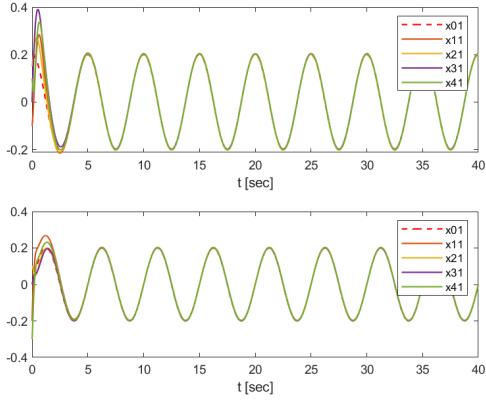


Σχήμα 3.107: Γράφος Πολυπρακτορικού Συστήματος

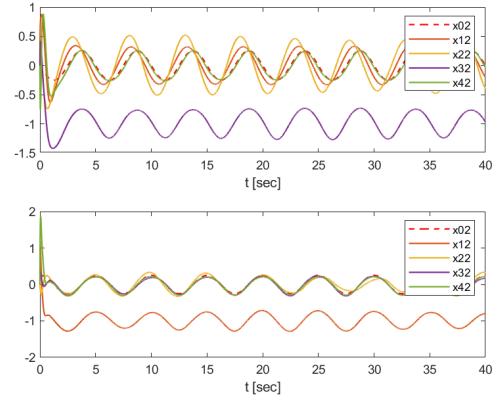
Προηγουμένως, με βάση τις προσομοιώσεις για όμοιο T_s , παρατηρήθηκε ότι για $\rho_{1,\infty} = 0.01$ και $T_s = 0.001 \text{ sec}$ διατηρούνταν η ευστάθεια του ολικού πολυπρακτορικού συστήματος και επιτυγχάνονταν ο στόχος ελέγχου, η οποία επιβάλλεται ουσιαστικά από τον πράκτορα 4 (μεγαλύτερο επίπεδο), όπως αποδείχτηκε από τους υπολογισμούς μέσω

ανάλυσης χειρότερου σεναρίου. Επιπλέον, διαπιστώθηκε και με βάση τη θεωρητική ανάλυση ότι για τους πράκτορες που βρίσκονται σε πιο κοντικό στον ηγέτη επίπεδο προκύπτουν μεγαλύτερα t_{mati} για την εγγύηση της ευστάθειας, άρα και μεγαλύτερα T_s .

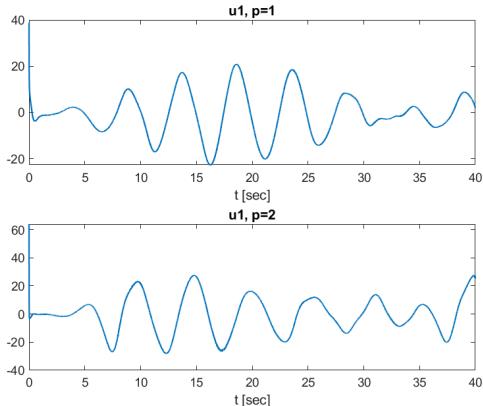
Επομένως, αν θεωρήσουμε διαφορετική περίοδο $T_s(i)$ με την οποία λαμβάνει ο κάθε πράκτορας τα σήματα αναφοράς του από τους γειτονικούς του πράκτορες, για το συγκεκριμένο γράφο επικοινωνίας διαπιστώνουμε ότι για $T_s(\text{agent}_2) = 0.007 \text{ sec} > 0.001$ και $T_s(\text{agent}_i) = 0.001 \text{ sec}, i = 1, 3, 4$, επιτυγχάνεται ευστάθεια :



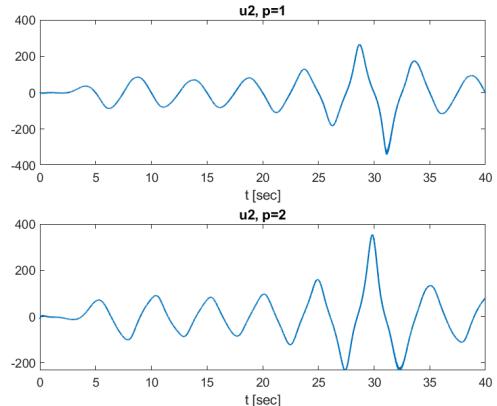
Σχήμα 3.108: κατάσταση $x_{i,1}$

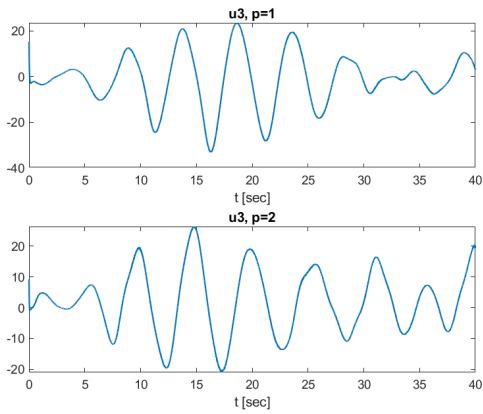


Σχήμα 3.109: κατάσταση $x_{i,2}$

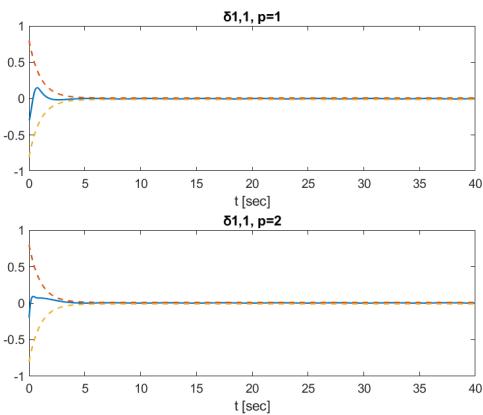
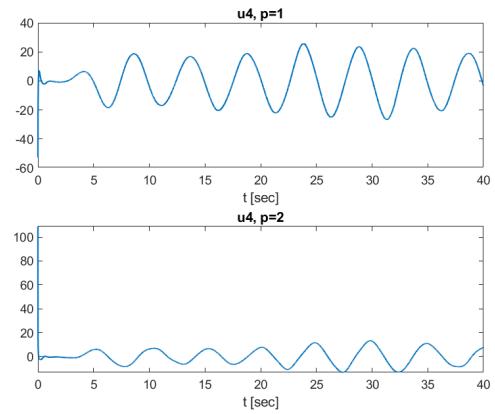


Σχήμα 3.110: σήμα ελέγχου πράκτορας 1 Σχήμα 3.111: σήμα ελέγχου πράκτορας 2

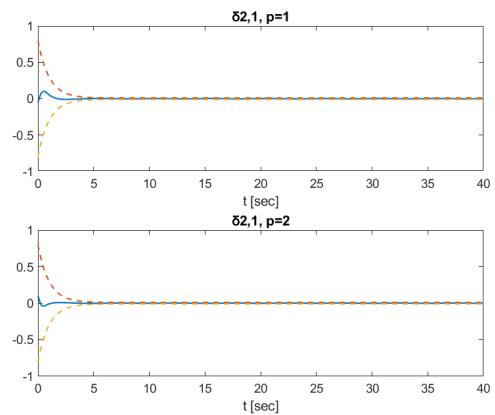




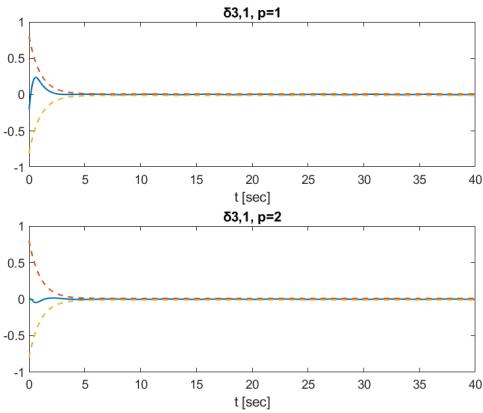
Σχήμα 3.112: σήμα ελέγχου πράκτορας 3 Σχήμα 3.113: σήμα ελέγχου πράκτορας 4



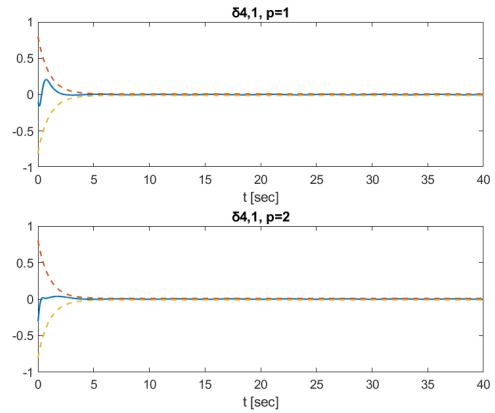
Σχήμα 3.114: $\delta 1$ πράκτορας 1



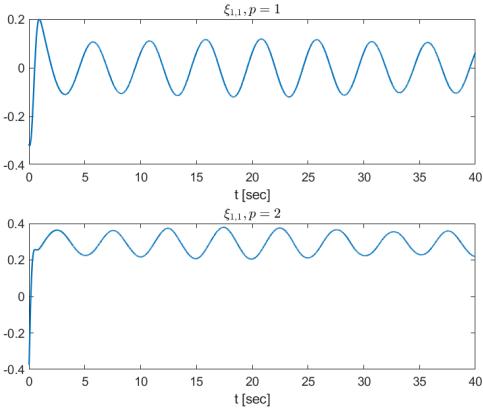
Σχήμα 3.115: $\delta 1$ πράκτορας 2



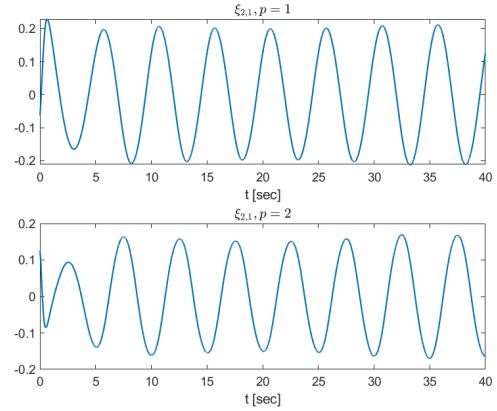
Σχήμα 3.116: $\delta 1$ πράκτορας 3



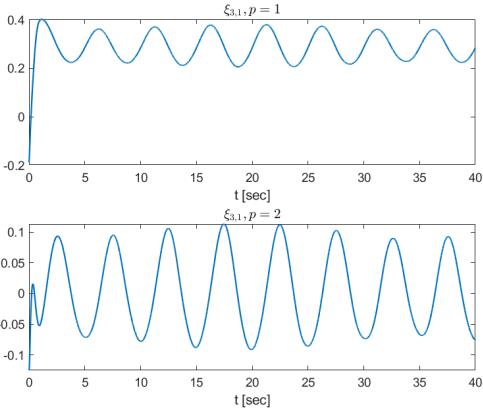
Σχήμα 3.117: $\delta 1$ πράκτορας 4



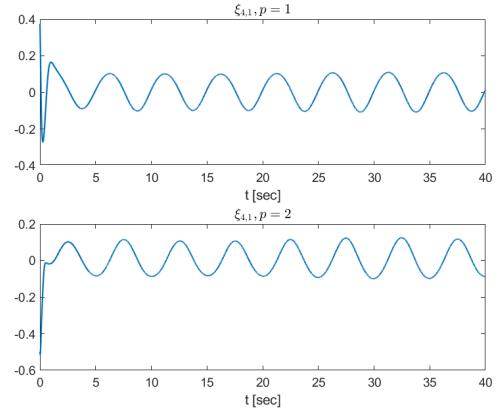
Σχήμα 3.118: ξ_1 πράκτορας 1



Σχήμα 3.119: ξ_1 πράκτορας 2



Σχήμα 3.120: ξ_1 πράκτορας 3



Σχήμα 3.121: ξ_1 πράκτορας 4

Παρατήρηση 15: Διαπιστώνουμε ότι παρόλο που οι πράκτορες 1,3,4 θα βρίσκονταν σε αστάθεια με βάσει προηγούμενες προσομοιώσεις για $T_s = 0.007\text{s}$, ο πράκτορας 2 μπορεί να λειτουργήσει για αυτή τη τιμή περιόδου και δεν επηρεάζει τη συνολική ευστάθεια του πολυπρακτορικού συστήματος. Εξάλλου, όπως διατυπώθηκε και στη θεωρητική ανάλυση, κάθε πράκτορας απαιτεί για την επίτευξη του στόχου ελέγχου του οι πράκτορες στα προηγούμενα επίπεδα, που στέλνουν την έξοδό τους σαν σήμα αναφοράς να βρίσκονται σε ευστάθεια και επιπλέον να πληρείται και η δική του συνθήκη ευστάθειας. Ο πράκτορας 2 λαμβάνει σήμα αναφοράς μόνο από τον ηγέτη.

Κεφάλαιο 4

Επίλογος

4.1 Σύνοψη - Συμπεράσματα

Για τον συγκεκριμένο ελεγκτή χαμηλής πολυπλοκότητας για τα πολυπρακτορικά συστήματα διακριτού χρόνου διαπιστώνουμε τα εξής:

- Όσο προχωράμε επίπεδα layers στον γράφο επικοινωνίας για να μπορούμε να εγγυηθούμε ευστάθεια και προκαθορισμένα χαρακτηριστικά απόκρισης απαιτείται μικρότερο T_s κατά τη λήψη των σημάτων αναφοράς των πρακτόρων.
- Οι πράκτορες που επικοινωνούν απευθείας με τον ηγέτη και όχι με γειτονικό πράκτορα μπορούν να ελέγχονται με μεγαλύτερα T_s . Επομένως, για αυτούς τους πράκτορες μπορούμε να θέτουμε πιο αυστηρές συναρτήσεις απόδοσης.
- Οι πράκτορες που λαμβάνουν σήμα αναφοράς από παραπάνω από έναν πράκτορα παρουσιάζουν μικρότερο τ_{mati} , κάτι το οποίο βελτιώνεται με μικρότερα κέρδη στον ελεγκτή.
- Τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου $\psi_{i,1}$ και οι μη γραμμικότητες των συναρτήσεων $f_{i,1}$ ενός πράκτορα επηρεάζουν τους πράκτορες που βρίσκονται σε επόμενα επίπεδα και λαμβάνουν ως σήμα αναφοράς τους την έξοδο αυτών.
- Στην πράξη επιτυγχάνονται $T_s > t_{mati}$, για τα οποία ο στόχος ελέγχου πληρείται. Αυτό οφείλεται στο ότι η θεωρητική ανάλυση βασίζεται σε ανάλυση χειρότερου σεναρίου, ενώ στη πράξη συναντώνται καλύτερα σενάρια.
- Παρόλο που οι θεωρητικοί υπολογισμοί για την εκ των προτέρων εγγύηση της ευστάθειας είναι αρκετά αυστηροί (conservative), συγκριτικά με τους πραγματικούς για το τ_{mati} , η θεωρητική ανάλυση αποδεικνύει ότι είναι εφικτή η μετάβαση του συγκεκριμένου προτεινόμενου ελεγκτή στο διακριτό χρόνο. Συνεισφέρει, επίσης, στο να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για το πως οι διάφορες σχεδιαστικές παράμετροι επηρεάζουν το διακριτό χρόνο και τέλος πως επηρεάζει η φύση του γράφου επικοινωνίας των πρακτόρων το T_s του σήματος αναφοράς.

Παράρτημα Α'

Ακρωνύμια και συντομογραφίες

PPC Prescribed Performance Control/Έλεγχος Προδιαγεγραμένης Απόκρισης

mati maximum allowable transmission interval/μέγιστο επιτρεπόμενο διάστημα μετάδοσης

MIMO Multi Input Multi Output/ Πολλαπλών Εισόδων Πολλαπλών Εξόδων

SISO Single Input Single Output/ Μιας Εισόδου Μιας Εξόδου

Bibliography

- [1] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” *Proc. IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, Jan. 2007.
- [2] Y. Su and J. Huang, “Cooperative output regulation with application to multi-agent consensus under switching network,” *IEEE Trans Syst., Man, Cybern., Part B*, vol. 42, no. 3, pp. 864–875, Jun. 2012.
- [3] Y. Su, Y. Hong, and J. Huang, “A general result on the robust cooperative output regulation for linear uncertain multi-agent systems,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 58, no. 5, pp. 1275–1279, May 2013.
- [4] Z. Ding, “Distributed adaptive consensus output regulation of network-connected heterogeneous unknown linear systems on directed graphs,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 62, no. 9, pp. 4683–4690, Sep. 2017.
- [5] E. Franco, L. Magni, T. Parisini, M. M. Polycarpou, and D. M. Raimondo, “Cooperative constrained control of distributed agents with nonlinear dynamics and delayed information exchange: A stabilizing receding-horizon approach,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 53, no. 1, pp. 324–338, Feb. 2008.
- [6] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and M. Fu, “Consensus of multi-agent systems with general linear and lipschitz nonlinear dynamics using distributed adaptive protocols,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 58, no. 7, pp. 1786–1791, Jul. 2013.
- [7] T. Liu and Z.-P. Jiang, “Distributed output-feedback control of nonlinear multi-agent systems,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 58, no. 11, pp. 2912–2917, Nov. 2013.
- [8] Y. Su and J. Huang, “Cooperative global robust output regulation for nonlinear uncertain multi-agent systems in lower triangular form,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 60, no. 9, pp. 2378–2389, Sep. 2015.
- [9] K. Chen, J. Wang, Y. Zhang, and Z. Liu, “Leader-following consensus for a class of nonlinear strict-feedback multiagent systems with state time-delays,” *IEEE Trans Syst., Man, Cybern.: Syst.*, vol. 50, no. 7, pp. 2351–2361, Jul. 2020.
- [10] Q. Shen and P. Shi, “Distributed command filtered backstepping consensus tracking control of nonlinear multiple-agent systems in strict-feedback form,” *Automatica*, vol. 53, pp. 120–124, 2015.

- [11] W. Wang, C. Wen, and J. Huang, “Distributed adaptive asymptotically consensus tracking control of nonlinear multi-agent systems with unknown parameters and uncertain disturbances,” *Automatica*, vol. 77, pp. 133–142, 2017.
- [12] Y. Su, “Semi-global output feedback cooperative control for nonlinear multi-agent systems via internal model approach,” *Automatica*, vol. 103, pp. 200–207, 2019.
- [13] H. Modares, F. L. Lewis, W. Kang, and A. Davoudi, “Optimal synchronization of heterogeneous nonlinear systems with unknown dynamics,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 63, no. 1, pp. 117–131, Jan. 2018.
- [14] W. Wang, D. Wang, Z. Peng, and T. Li, “Prescribed performance consensus of uncertain nonlinear strict-feedback systems with unknown control directions,” *IEEE Trans Syst., Man, Cybern.: Syst.*, vol. 46, no. 9, pp. 1279–1286, Sep. 2016.
- [15] H. Liang, Y. Zhang, T. Huang, and H. Ma, “Prescribed performance cooperative control for multi-agent systems with input quantization,” *IEEE Trans Cybern.*, vol. 50, no. 5, pp. 1810–1819, May 2020.
- [16] H. A. Hashim, S. El-Ferik, and F. L. Lewis, “Neuro-adaptive cooperative tracking control with prescribed performance of unknown higher-order nonlinear multi-agent systems,” *Int. J. Control*, vol. 92, no. 2, pp. 445–460, 2019.
- [17] C. P. Bechlioulis and G. A. Rovithakis, “Robust adaptive control of feedback linearizable mimo nonlinear systems with prescribed performance,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 9, pp. 2090–2099, Oct. 2008.
- [18] ——, “Prescribed performance adaptive control for multi-input multi-output affine in the control nonlinear systems,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 55, no. 5, pp. 1220–1226, May 2010.
- [19] ——, “Robust partial-state feedback prescribed performance control of cascade systems with unknown nonlinearities,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 56, no. 9, pp. 2224–2230, Sep. 2011.
- [20] A. Theodorakopoulos and G. A. Rovithakis, “Low-complexity prescribed performance control of uncertain mimo feedback linearizable systems,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 61, no. 7, pp. 1946–1952, Jul. 2016.
- [21] G. S. Kanakis and G. A. Rovithakis, “Guaranteeing global asymptotic stability and prescribed transient and steady-state attributes via uniting control,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 65, no. 5, pp. 1956–1968, May 2020.
- [22] L. Zhang, C. Hua, and X. Guan, “Distributed output feedback consensus tracking prescribed performance control for a class of non-linear multi-agent systems with unknown disturbances,” *IET Control Theory Appl.*, vol. 10, no. 8, pp. 877–883, 2016.
- [23] M. Shahvali and J. Askari, “Cooperative adaptive neural partial tracking errors constrained control for nonlinear multi-agent systems,” *Int. J. Adaptive Control Signal Process.*, vol. 30, no. 7, pp. 1019–1042, 2016.
- [24] C. P. Bechlioulis and G. A. Rovithakis, “Decentralized robust synchronization of unknown high-order nonlinear multi-agent systems with prescribed transient

and steady-state performance,” *IEEE Trans Autom. Control*, vol. 62, no. 1, pp. 123–134, Jan. 2017.

- [25] I. Katsoukis and G. A. Rovithakis, “Low complexity robust output synchronization protocol with prescribed performance for high-order heterogeneous uncertain mimo nonlinear multiagent systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 6, pp. 3128–3133, 2022.
- [26] D. Nesic and A. Teel, “Input-output stability properties of networked control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 10, pp. 1650–1667, 2004.
- [27] ——, “Input-to-state stability of networked control systems,” *Automatica*, vol. 40, no. 12, pp. 2121–2128, 2004.
- [28] M. Tabbara, D. Nesic, and A. Teel, “Stability of wireless and wireline networked control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 9, pp. 1615–1630, 2007.
- [29] L. Montestruque and P. Antsaklis, “Stability of model-based networked control systems with time-varying transmission times,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1562–1572, 2004.
- [30] W. Heemels, A. Teel, N. van de Wouw, and D. Nesic, “Networked control systems with communication constraints: Tradeoffs between transmission intervals, delays and performance,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 8, pp. 1781–1796, 2010.
- [31] D. Tolic and S. Hirche, “Stabilizing transmission intervals for nonlinear delayed networked control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 1, pp. 488–494, 2017.
- [32] S. Heijmans, R. Postoyan, D. Nesic, and W. Heemels, “Computing minimal and maximal allowable transmission intervals for networked control systems using the hybrid systems approach,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 1, no. 1, pp. 56–61, 2017.
- [33] D. Carnevale, A. Teel, and D. Nesic, “A lyapunov proof of an improved maximum allowable transfer interval for networked control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 5, pp. 892–897, 2007.
- [34] S. Heijmans, R. Postoyan, D. Nesic, and W. Heemels, “An average allowable transmission interval condition for the stability of networked control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 6, pp. 2526–2541, 2021.
- [35] M. Hertneck and F. Allgower, “A simple approach to increase the maximum allowable transmission interval,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 54, no. 14, pp. 418–423, 2021.
- [36] W. Wu, S. Reimann, and S. Liu, “Event-triggered control for linear systems subject to actuator saturation,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 47, no. 3, pp. 9492–9497, 2014.

- [37] R. Postoyan, P. Tabuada, D. Nesic, and A. Anta, “A framework for the event-triggered stabilization of nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 4, pp. 982–996, 2015.
- [38] V. Dolk and W. Heemels, “Event-triggered control systems under packet losses,” *Automatica*, vol. 80, no. 6, pp. 143–155, 2017.
- [39] T. Liu and Z. Jiang, “Event-triggered control of nonlinear systems with state quantization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 64, no. 2, pp. 797–803, 2019.
- [40] L. N. Bikas and G. A. Rovithakis, “Discrete-time prescribed performance control and maximum allowable transmission interval,” in *Proceedings of the European Control Conference (ECC)*, 2024, pp. 1159–1164.
- [41] Z. Zhou, D. Liu, and X. Yang, “Prescribed performance model-free adaptive control for multi agent systems,” in *2021 International Conference on Security, Pattern Analysis, and Cybernetics*, 2021, pp. 550–554.
- [42] L. Lanza, D. Dennstädt, K. Worthmann, P. Schmitz, G. D. Şen, S. Trenn, and M. Schaller, “Sampled-data funnel control and its use for safe continual learning,” *Systems Control Letters*, vol. 192, p. 105892, 2024.
- [43] Y. Hong and C.-T. Pan, “A lower bound for the smallest singular value,” *Linear Algebra Appl.*, vol. 172, pp. 27–32, 1992.