Ευφυή και Προσαρμοστικά Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου

Εργασία 2023-2024

Ηλιάνα Κόγια
(AEM: 10090)
ilianakogia@ece.auth.gr

1 Α- ΠΕΜΑ

Δίνεται το σύστημα:

$$M\ddot{q} + Gsin(q) + C\dot{q} = u, \quad x_0 = 0$$

όπου:
$q \in R$ γωνία περιστροφής σε rad
$\dot{q}$ γωνιακή ταχύτητα σε rad/s
$u \in R$ ροπή σε N m
$y = q$ έξοδος του συστήματος
ακόμη γνωρίζουμε ότι M, G, C > 0 σταθερές, όμως άγνωστες

1.1 ερώτημα α - γραμμικοποίηση συστήματος

Γράφουμε, αρχικά, το δοθέν σύστημα με τη μορφή εξισώσεων κατάστασης. Έτσι, θεωρούμε τις καταστάσεις:

$$x_1 = q$$

$$x_2 = \dot{q}$$

και η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y = x_1$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο προκύπτουν:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{M}u - \frac{G}{M}sin(x_1) - \frac{C}{M}x_2$$

Το παραπάνω σύστημα είναι μη γραμμικό
Το σημείο λειτουργίας του συστήματος είναι το 0
Για u = 0:
Για την γραμμικοποίηση του συστήματος στη γειτονιά του 0, θεωρούμε την παρακάτω προσέγγιση για το $sin(x_1)$, η οποία προκύπτει από τη σειρά Taylor και ισχύει για μικρές τιμές του x_1 (γύρω από το μηδέν οι καταστάσεις x λαμβάνουν πολύ μικρές τιμές), άρα:

$$sin(x_1) = x_1$$

τότε το Σύστημα γύρω από το 0 γίνεται:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{M}u - \frac{G}{M}x_1 - \frac{C}{M}x_2$$

και σε μορφή πινάκων:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = C^T x$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{G}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

x: διάνυσμα κατάστασης του συστήματος
u: είσοδος
y: έξοδος

1.2 ερώτημα β - Α-ΠΕΜΑ με ανάδραση εξόδου

Η συνάρτηση μεταφοράς του γραμμικοποιημένου συτήματος είναι:

$$y = G_p(s)u$$

$$y = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} u$$

$$y = \frac{1}{M} \frac{1}{s^2 + \frac{C}{M}s + \frac{G}{M}} u$$

Το μοντέλο αναφοράς που θέλουμε να ακολουθεί το αρχικό σύστημα είναι:

$$\dot{x}_m = A_m x + B_m r, \quad x_m(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = C_m^T x$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς του μοντέλου:

$$y_m = G_m(s)r$$

$$y_m = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} r$$

Επιλέγουμε το μοντέλο αναφοράς τέτοιο ώστε να εμφανίζει φυσική συχνότητα $\omega_n = 1 rad/sec$ και συντελεστή απόσβεσης $\zeta = 0.7$:

$$y_m = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} r = \frac{1}{s^2 + 1.4s + 1} r = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} r$$

Για να επιτύχουμε το στόχο θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τα μετρήσιμα σήματα (y, y_m, u, r)
Οι παρακάτω υποθέσεις πρέπει να πληρούνται απαραίτητα:

Υποθέσεις Ελεγχόμενου Συστήματος Σ1: Το $Z_p(s)$ είναι κανονικό και ευσταθές (Hurwitz) πολυώνυμο.
είναι:

$$Z_p(s) = 1$$

άρα, κανονικό.
Σ2: Ένα άνω φράγμα n του βαθμού n_p του $R_p(s)$ είναι γνωστό.

$$n_p = 2 => n = 2$$

Σ3: Ο σχετικός βαθμός $n^* = n_p - m_p$ της $G_p(s)$ είναι γνωστός, όπου m_p ο βαθμός του $Z_p(s)$

$$n^* = n_p - m_p = 2 - 0 = 2$$

Σ4: Το πρόσημο του κέρδους υψηλής συχνότητας k_p είναι γνωστό.

$$k_p = 1/M > 0$$

Υποθέσεις Μοντέλου Αναφοράς
Μ1: Τα $Z_m(s)$, $R_m(s)$ είναι κανονικά και ευσταθή (Hurwitz) πολυώνυμα, βαθμών q_m, p_m αντίστοιχα και ισχύει $p_m \leq n$.

$$p_m = 2 \leq n(= 2)$$

Μ2: Ο σχετικός βαθμός $n* = p_m - q_m$ της $G_m(s)$ είναι ίδιος μ' αυτόν του $G_p(s)$, δηλαδή $n* = n_m^*$.

$$n_m^* = 2 - 0 = 2$$

Συ,περαίνουμε από τα παραπάνω ότι οι υποθέσεις για το συγκεκριμένο σύστημα και για το επιλεγμένο μοντέλο αναφοράς ισχύουν.
Οι εξισώσεις του ελεγκτή είναι:

$$\begin{cases} u = \theta^T \omega + \dot{\theta}^T \varphi \\ \dot{\omega}_1 = F\omega_1 + gu, \quad \omega_1(0) = 0 \\ \dot{\omega}_2 = F\omega_2 + gy, \quad \omega_2(0) = 0 \\ \dot{\varphi} = -p_o\varphi + \omega, \quad \varphi(0) = 0 \\ \dot{\theta} = -\Gamma\varepsilon\varphi sgn(\frac{k_p}{k_m}) \end{cases} \tag{1.1}$$

όπου:

$$\omega = [\omega_1^T \, \omega_2^T \, y \, r]^T$$

$$\varepsilon = y - y_m$$

$\theta = [\theta_1^T \, \theta_2^T \, \theta_3 \, c_0]^T = [\theta_1 \, \theta_2 \, \theta_3 \, c_0]^T$ και η $(s + p_o)G_m(s)$ είναι αυστηρά θετική πραγματική

Το $\Lambda(s)$ είναι κανονικό και ευσταθές πολυώνυμο τάξεως $n - 1 = 2 - 1 = 1$, που περιέχει το $Z_m(s)$ ως παράγοντα:

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s)Z_m(s) = \Lambda_0(s)1 = \Lambda_0(s) = s + \lambda, \quad \lambda > 0$$

Ακόμη,

$$F = -\lambda, \quad g = 1$$

και

$$sgn(\frac{k_p}{k_m}) = +1$$

$$\begin{cases} u = \theta^T \omega + \varphi^T \Gamma \varepsilon \varphi \\ \dot{\omega}_1 = F\omega_1 + gu, \quad \omega_1(0) = 0 \\ \dot{\omega}_2 = F\omega_2 + gy, \quad \omega_2(0) = 0 \\ \dot{\varphi} = -p_o\varphi + \omega, \quad \varphi(0) = 0 \\ \dot{\theta} = -\Gamma\varepsilon\varphi \end{cases} \tag{1.2}$$

Ο προσαρμοστικός έλεγχος του παραπάνω μοντέλου αναφοράς (εφόσον ισχύουν και οι υποθέσεις όπως αποδείξαμε παραπάνω) εγγυάται ότι:
A) Όλα τα σφάλματα στον κλειστό βρόχο είναι φραγμένα και το σφάλμα παρακολούθησης $\varepsilon(t)$ συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.
B) Αν τα $R_p(s)$ και $Z_p(s)$ δεν έχουν κοινούς παράγοντες εκτός ίσως από μία σταθερά και η είσοδος αναφοράς $r(t)$ είναι ικανά πλούσια τάξεως 2n , τότε το παραμετρικό σφάλμα $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$ και το σφάλμα παρακολούθησης $\varepsilon(t)$ θα συγκλίνουν εκθετικά στο μηδέν.

1.3 ερώτημα γ - Α-ΠΕΜΑ με ανάδραση καταστάσεων

$$\dot{x}_m = A_m x + B_m r, \quad x_m(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} r, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

με φυσική συχνότητα $\omega_n = 1rad/sec$ και συντελεστή απόσβεσης $\zeta = 0.7$

Το μη γραμμικό σύστημα είναι:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{M}u - \frac{G}{M}sin(x_1) - \frac{C}{M}x_2$$

και μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{M}(u - Gsin(x_1)), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = Ax + B\Lambda(u + f(x))$$

$$f(x) = \theta\varphi(x) = -Gsin(x_1)$$

δηλαδή: $\theta = -G$, και $\varphi(x) = sin(x_1)$ φραγμένη εισόδου φραγμένη εξόδου γνωστή συνάρτηση

$$\Lambda = \frac{1}{M} > 0$$

i)
Επιπλέον για να είναι εφικτός ο στόχος παρακολούθησης πρέπει το $(A, B\Lambda)$ ελέγξιμο:
Ο πίνακας:

$$[B\Lambda \quad AB\Lambda]$$

πρέπει να έχει rank = n, δηλαδή $det \neq 0$ για να είναι ελέγξιμο

$$B\Lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C}{M} \end{bmatrix}$$

$$AB\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ -\frac{C}{M^2} \end{bmatrix}$$

$$[B\Lambda \quad AB\Lambda] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M} & -\frac{C}{M}^2 \end{bmatrix}$$

$$det([B\Lambda \quad AB\Lambda]) = -\frac{1}{M^2} \neq 0$$

που για φραγμένο M ισχύει, άρα ελέγξιμο.
ii)
Παρατηρούμε ότι οι άγνωστοι στο σύστημα μας είναι οι A, Λ, G.
Έστω, αρχικά, ότι είναι γνωστά:

$$u = -K^*x - L^*r - M^*sin(x_1)$$

$$\dot{x} = Ax + B\Lambda(-K^*x - L^*r - M^*sin(x_1) + (-Gsin(x_1)))$$

$$\dot{x} = (A - B\Lambda K^*)x - B\Lambda L^*r + B\Lambda(-M^*sin(x_1) - Gsin(x_1))$$

$$\dot{x}_m = A_m x + B_m r, \quad x_m(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} B\Lambda K^* = (A - A_m) \\ B\Lambda L^* = -B_m \\ M^* = -G = \theta \end{cases} \tag{1.3}$$

Έστω ότι το παραπάνω σύστημα έχει λύση
Συνεχίζουμε στην περίπτωση που τα A, Λ είναι άγνωστα:

$$u = -Kx - Lr - Msinx_1$$

$$\dot{x} = Ax + B\Lambda(u - Gsinx_1) + (A_m x + B_m r) - (A_m x + B_m r)$$

$$\dot{x} = (A_m x + B_m r) + (A - A_m)x - B_m r + B\Lambda(u - Gsinx_1)$$

αντικαθιστώντας σύμφωνα με την 1.3:

$$\dot{x} = (A_m x + B_m r) + B\Lambda K^* x + B\Lambda L^* r + B\Lambda(u + M^* sinx_1)$$

$$\dot{x} = (A_m x + B_m r) + B\Lambda(K^* x + L^* r + M^* sinx_1 + u)$$
$$\dot{x} = (A_m x + B_m r) + B\Lambda(K^* x + L^* r + M^* sinx_1 - Kx - Lr - Msinx_1)$$
$$\dot{x} = (A_m x + B_m r) + B\Lambda(-\tilde{K}x - \tilde{L}r - \tilde{M}sinx_1)$$
$$\tilde{K} = K - K^*$$
$$\tilde{L} = L - L^*$$
$$\tilde{M} = M - M^*$$

Το σφάλμα παρακολούθησης είναι:

$$e = x - x_m$$

Πραγωγίζοντας:

$$\dot{e} = A_m e + B\Lambda(-\tilde{K}x - \tilde{L}r - \tilde{M}sinx_1)$$

Επιλέγουμε την παρακάτω συνάρτηση Lyapunov:

$$V = e^T Pe + tr\{\frac{1}{\gamma_1}\tilde{K}^T\Lambda\tilde{K}\} + tr\{\frac{1}{\gamma_2}\tilde{L}^T\Lambda\tilde{L}\} + tr\{\frac{1}{\gamma_3}\tilde{M}^T\Lambda\tilde{M}\}$$

Πραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο:

$$\dot{V} = \dot{e}^T Pe + e^T P\dot{e} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_1}\tilde{K}^T\Lambda\dot{K}\} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_2}\tilde{L}^T\Lambda\dot{L}\} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_3}\tilde{M}^T\Lambda\dot{M}\}$$

$$\dot{V} = 2e^T P\dot{e} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_1}\tilde{K}^T\Lambda\dot{K}\} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_2}\tilde{L}^T\Lambda\dot{L}\} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_3}\tilde{M}^T\Lambda\dot{M}\}$$

αντικαθιστούμε το $\dot{e}$

$$\dot{V} = 2e^T P(A_m e + B\Lambda(-\tilde{K}x - \tilde{L}r - \tilde{M}sinx_1)) + 2tr\{\frac{1}{\gamma_1}\tilde{K}^T\Lambda\dot{K}\} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_2}\tilde{L}^T\Lambda\dot{L}\} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_3}\tilde{M}^T\Lambda\dot{M}\}$$

$$\dot{V} = e^T(PA_m)e + e^T(A_m^T P)e + 2tr\{\frac{1}{\gamma_1}\tilde{K}^T\Lambda\dot{K} - B\Lambda\tilde{K}x\} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_2}\tilde{L}^T\Lambda\dot{L} - B\Lambda\tilde{L}r\} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_3}\tilde{M}^T\Lambda\dot{M} - B\Lambda\tilde{M}sinx_1\}$$

Επειδή A_m ευσταθής ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov:

$$A_m^T P + PA_m = -Q$$
$$P = P^T, \quad Q = Q^T$$

$$\dot{V} = -e^T Qe + 2tr\{\frac{1}{\gamma_1}\tilde{K}^T\Lambda\dot{K} - B\Lambda\tilde{K}x\} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_2}\tilde{L}^T\Lambda\dot{L} - B\Lambda\tilde{L}r\} + 2tr\{\frac{1}{\gamma_3}\tilde{M}^T\Lambda\dot{M} - B\Lambda\tilde{M}sinx_1\}$$

Επιλέγουμε:

$$\dot{K} = \gamma_1 B^T Pex^T$$
$$\dot{L} = \gamma_2 B^T Per$$
$$\dot{M} = \gamma_2 B^T Pesin(x_1)$$

Επομένως, προκύπτει

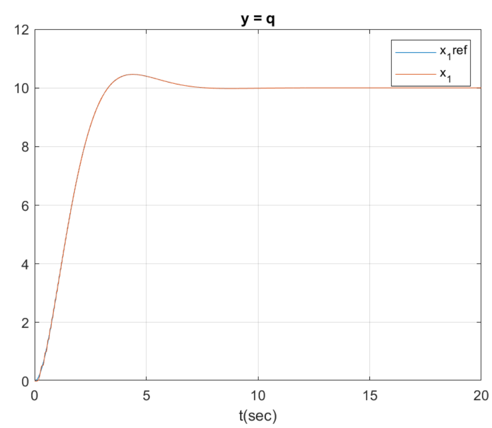
$$\dot{V} = -e^T Qe \leq 0$$

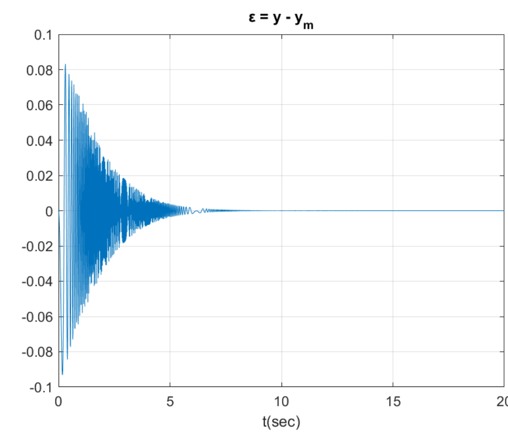
Και έτσι όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου είναι φραγμένα και από λήμμα Barbalat τα σφάλματα $e(t)->0, \quad \dot{K}(t)->0, \quad \dot{L}->0 \quad \dot{M}(t)->0$

1.4 ερώτημα δ - Προσομοίωση

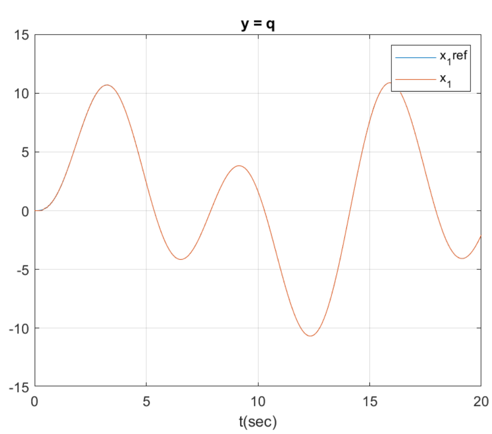
Α-ΠΕΜΑ ανάδρασης εξόδου
Δοκιμάζουμε διαφορετικά σήματα r:

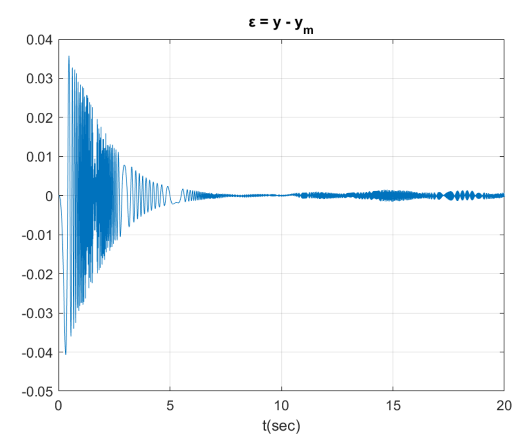
$$r = 10, \quad \gamma_i = 100, \quad p_0 = 0.2, \lambda = 0.5$$



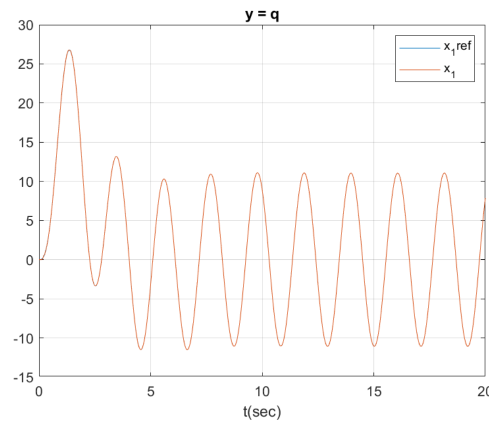


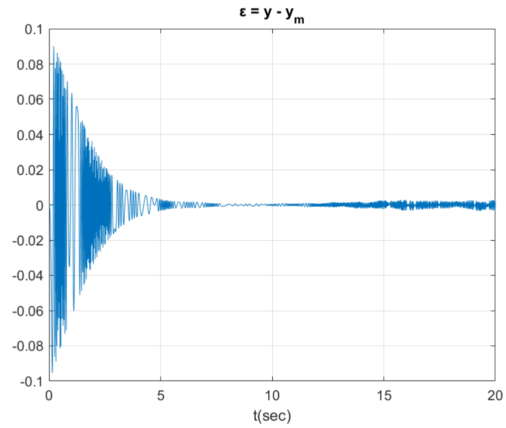
$$r = 5sin(0.5t) + 10sin(t), \quad \gamma_i = 500, \quad p_0 = 0.2, \lambda = 1$$





$$r = 100sin(3t), \quad \gamma_i = 100, \quad p_0 = 0.2, \lambda = 0.2$$

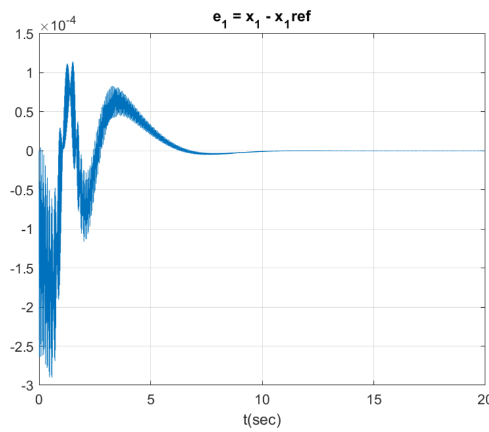


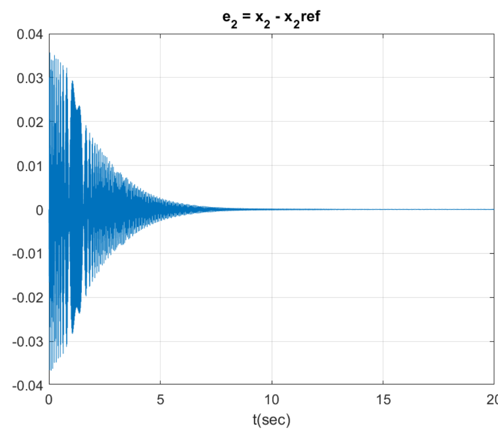


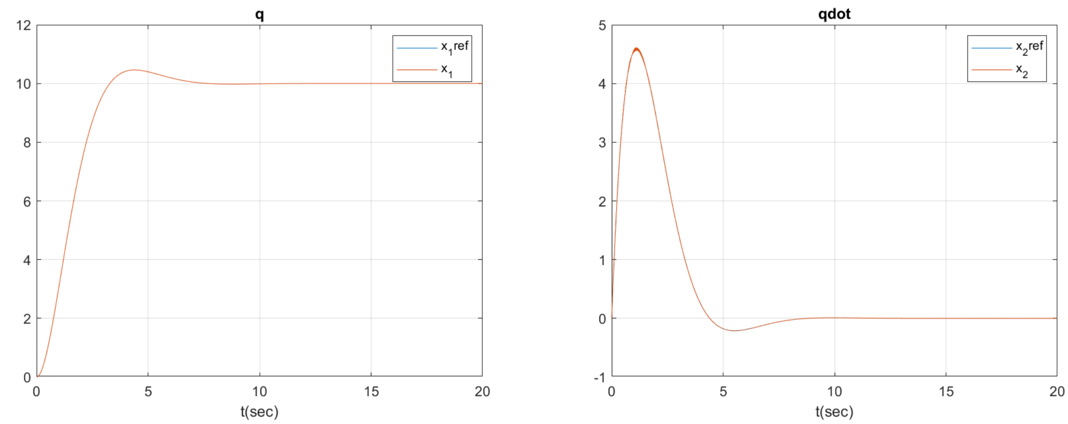
Παρατηρούμε ότι με κατάλληλες τιμές των σχεδιαστικών παραμέτρων επιτυγχάνεται ο στόχος ελέγχου ακόμα και αν δεν ισχύει η ΣΕΔ, όπως συμβαίνει για σταθερό r = 10 (2/2 = 1 τουλάχιστον συχνότητα)

Α-ΠΕΜΑ ανάδρασης καταστάσεων

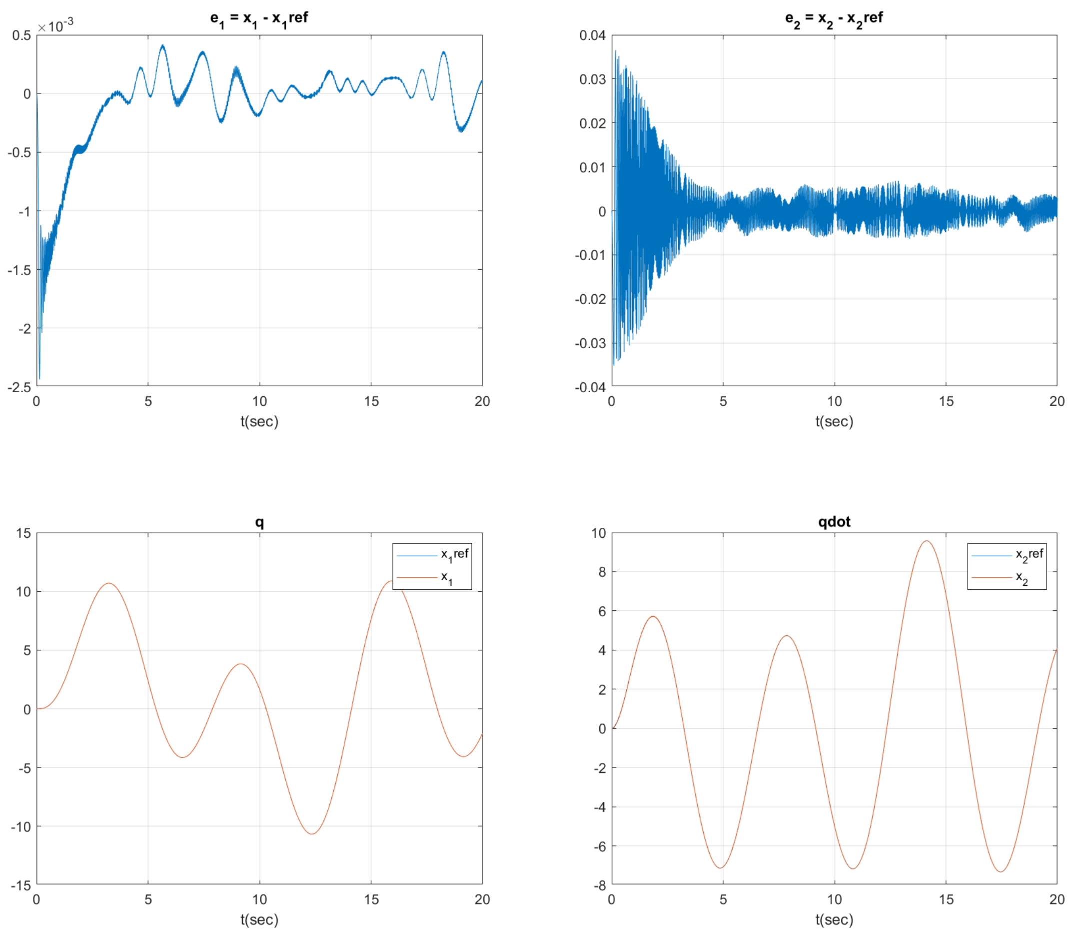
$$r = 10, \quad \gamma_i = 100$$



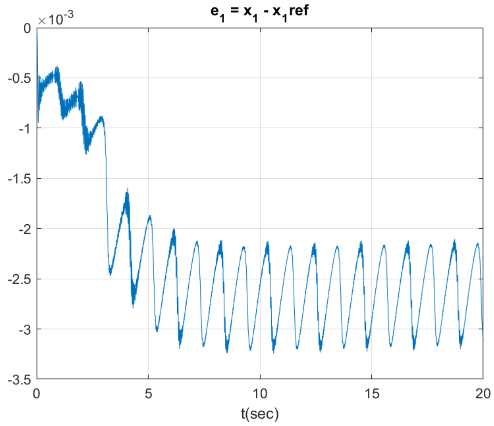


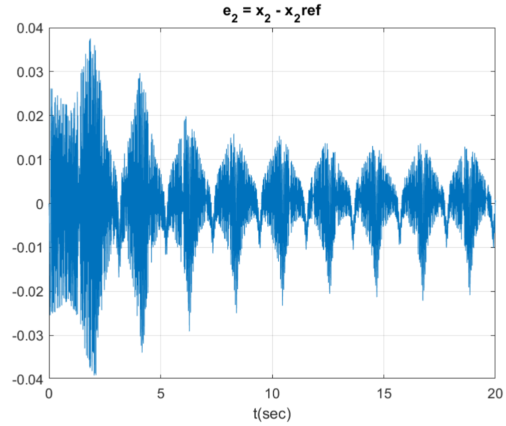


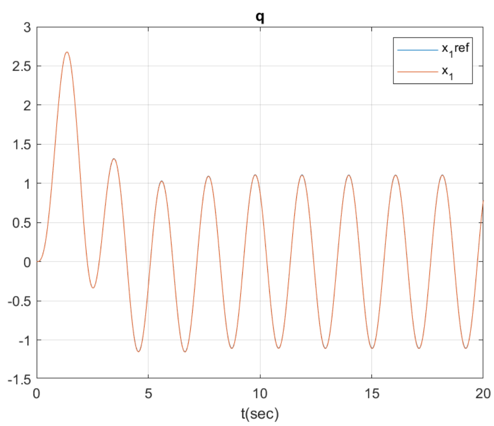
$$r = 5sin(0.5t) + 10sin(t), \quad \gamma_i = 100$$

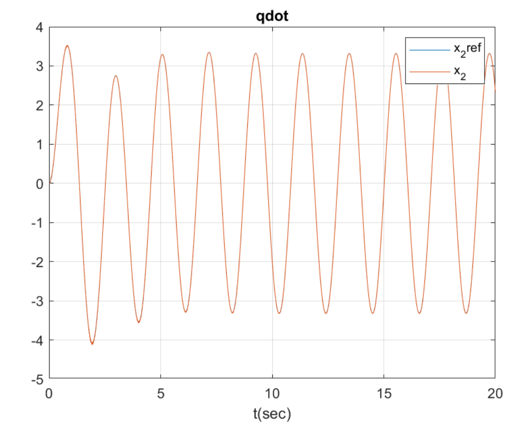


$$r = 10sin(3t), \quad \gamma_i = 200$$

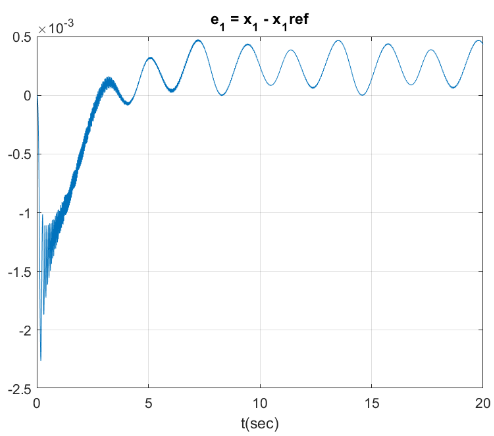


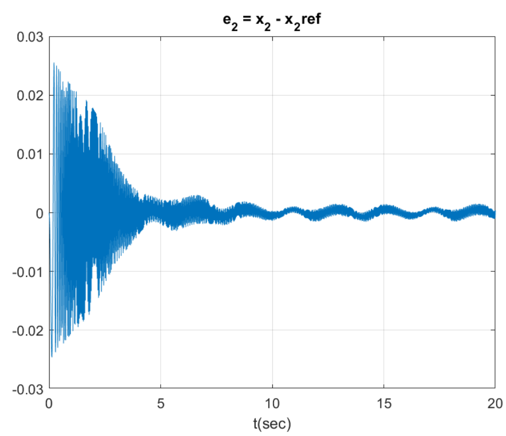


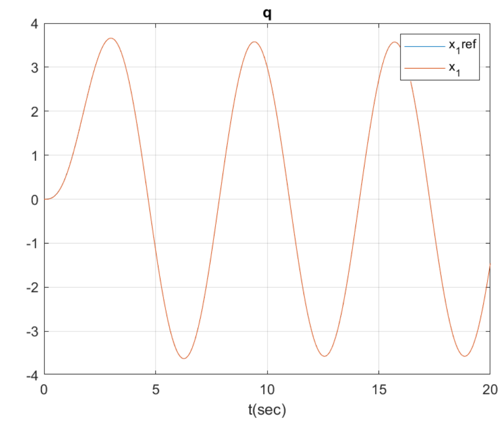


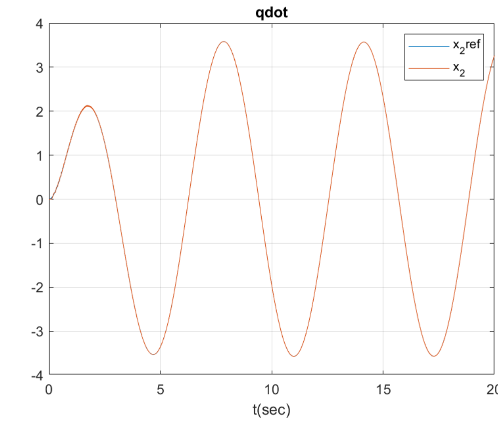


$$r = 5sin(t), \quad \gamma_i = 200$$







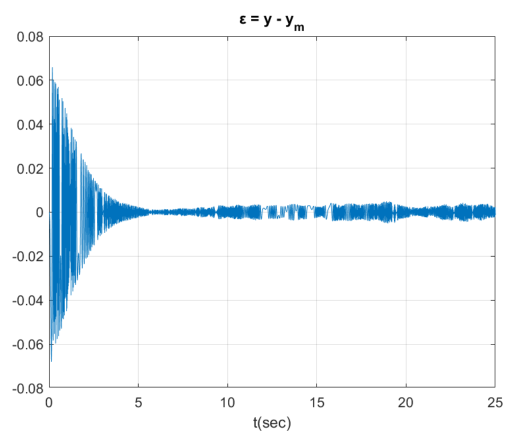


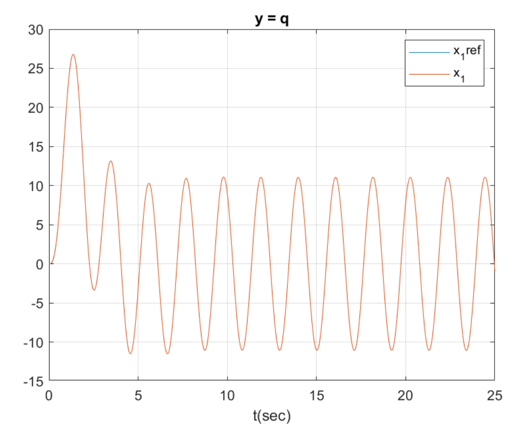
1.5 ερώτημα ε - Προσομοίωση με διαταραχές

Α-ΠΕΜΑ (β) Διαταραχή ενός παλμού πλάτους d από 6 έως 11 sec. Παρατίθενται οι προσομοιώσεις για d από 10 έως 10^5

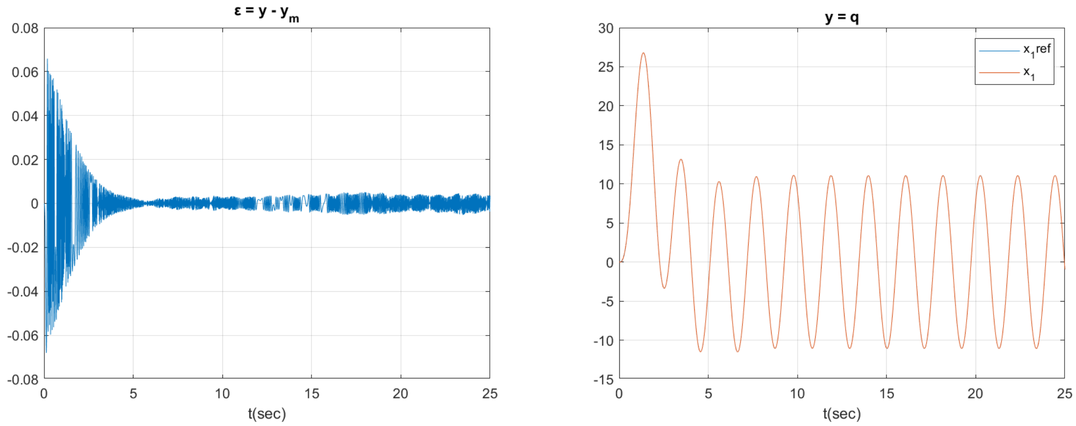
$$r = 100sin(3t), \quad \gamma_i = 200 \quad p_0 = 0.2, \lambda = 0.2$$

$$d = 10$$

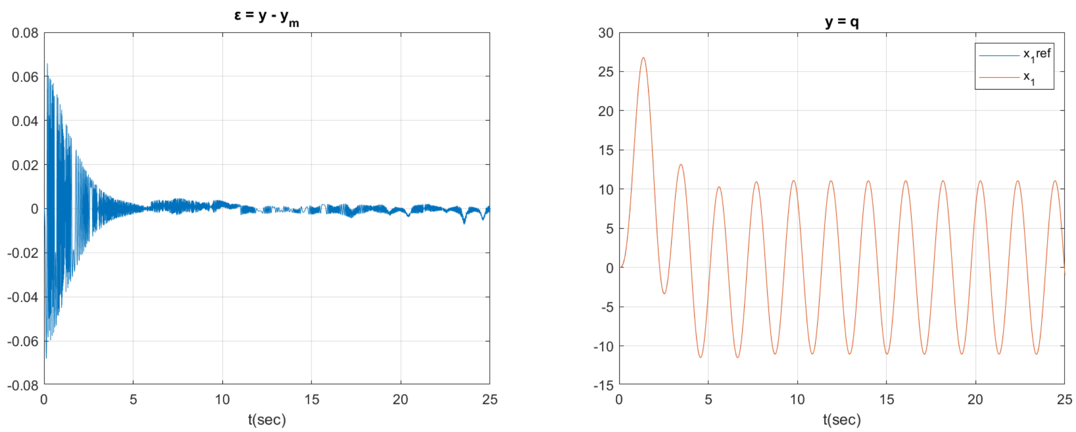




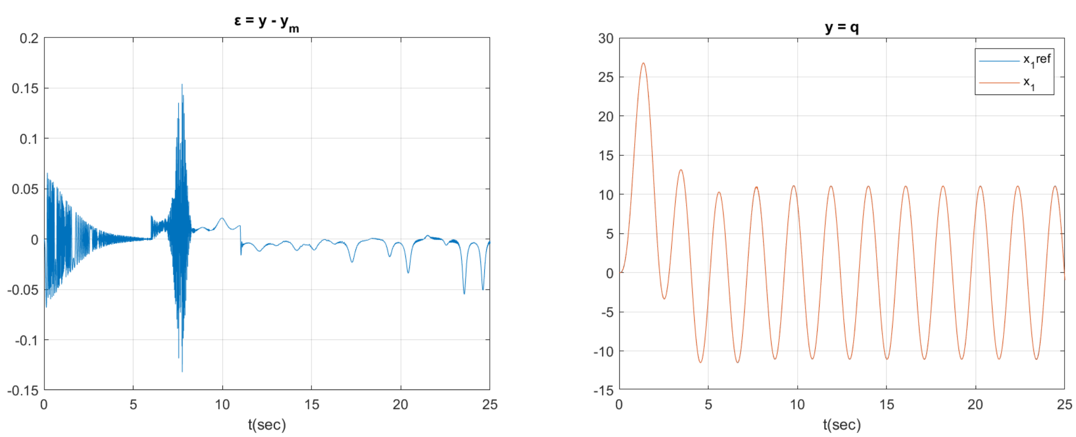
$$d = 100$$



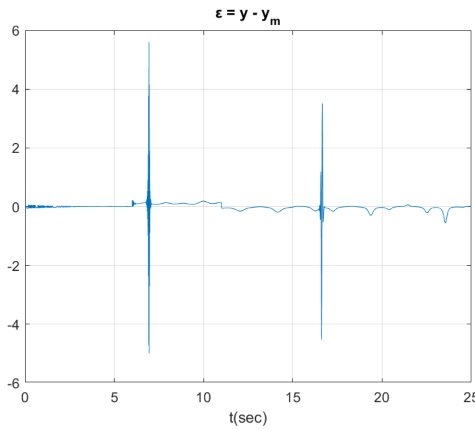
$$d = 1000$$

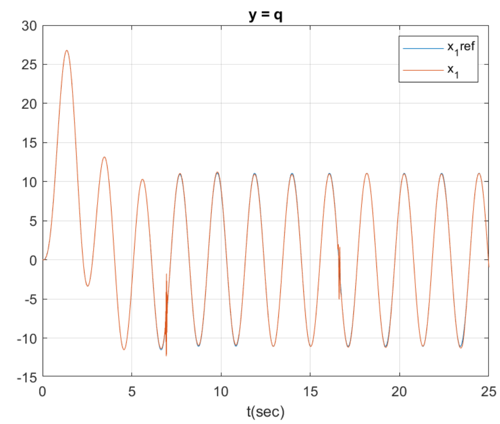


$$d = 10000$$



$$d = 100000$$

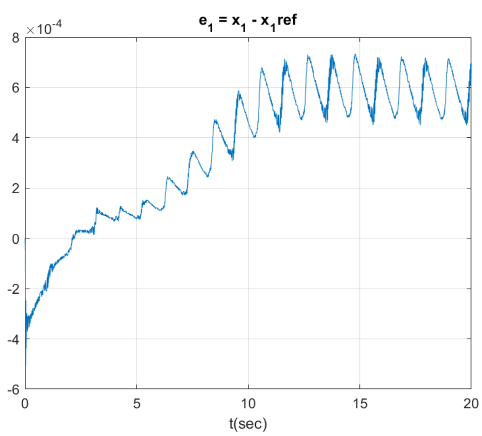


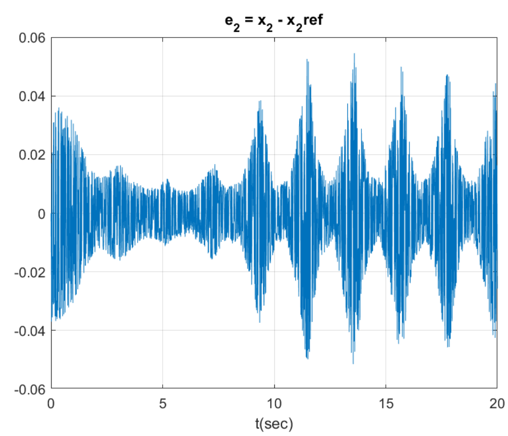


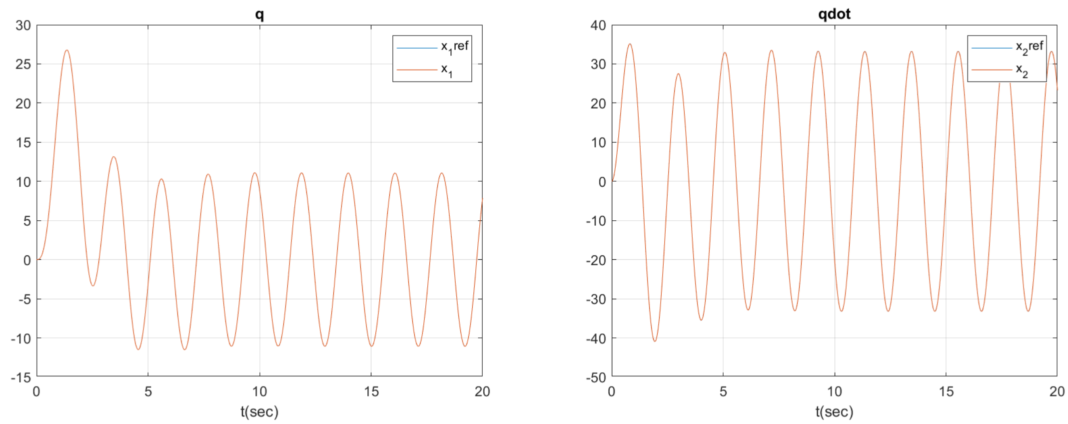
Παρατηρούμε ότι ο ελεγκτής είναι αρκετά εύρωστος καθώς αντέχει διαταραχές της τάξης των 10^4, ενώ για 10^5 παρατηρείται παραμόρφωση της εξόδου.
Α-ΠΕΜΑ (γ)
Διαταραχή ενός παλμού πλάτους d από 5 έως 10 sec.

$$r = 100sin(3t), \quad \gamma_i = 100$$

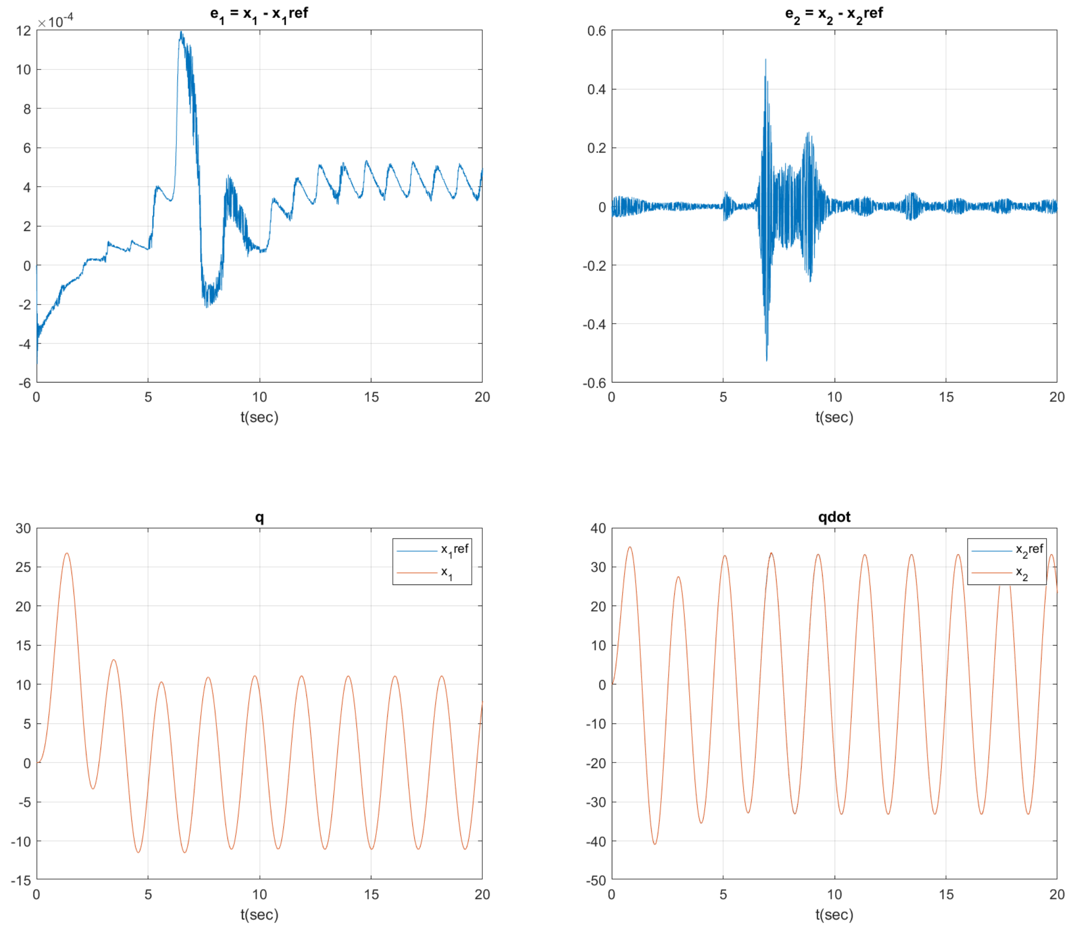
$$d = 10$$



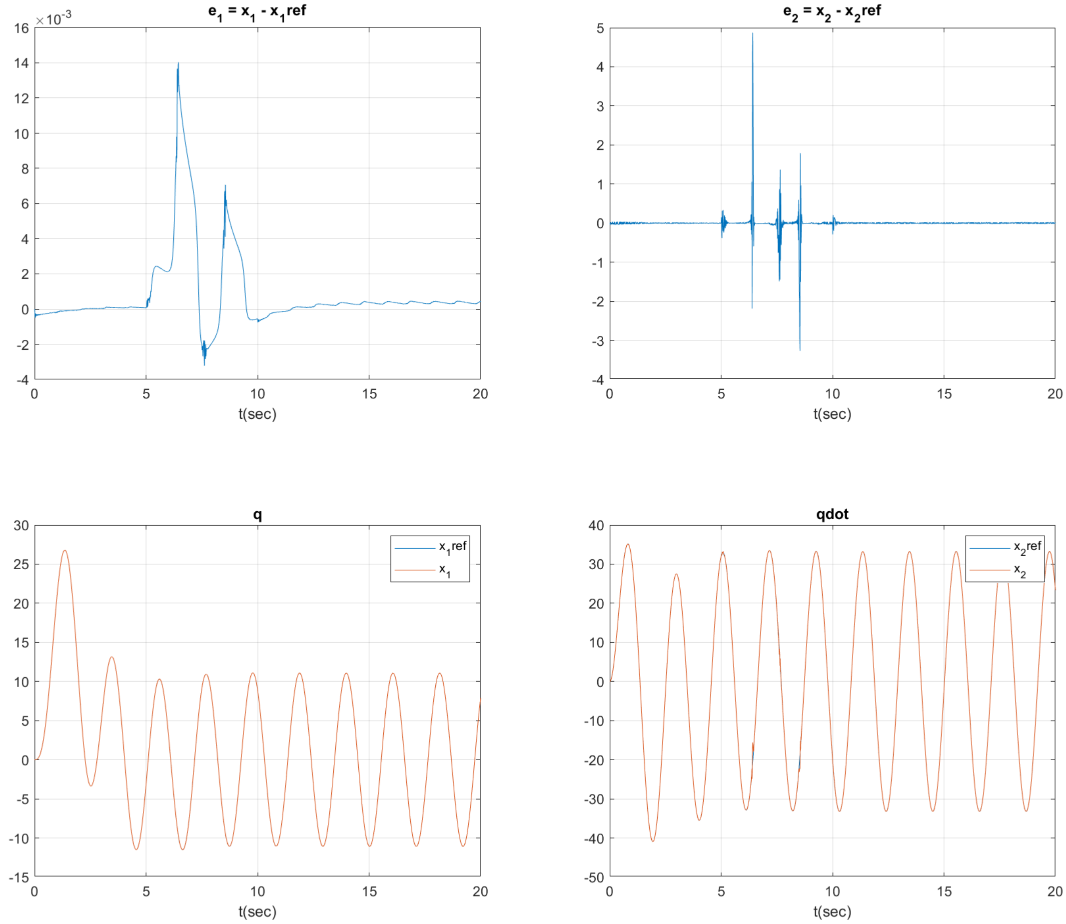



q
$x_1$ref
x_1
t(sec)
qdot
$x_2$ref
x_2
t(sec)

$d = 100$


$e_1 = x_1 - x_1$ref
$\times 10^{-4}$
t(sec)
$e_2 = x_2 - x_2$ref
t(sec)
q
$x_1$ref
x_1
t(sec)
qdot
$x_2$ref
x_2
t(sec)

$d = 1000$



Διαπιστώνουμε ξανά την ευρωστία και αυτού του ελεγκτή, ωστόσο βλέπουμε ότι για $d = 10^3$ έχουμε μια μικρή παραμόρφωση του σήματος $\dot{q}$, χωρίς να σημβαίνει το ίδιο για το σήμα q το οποίο δεν υφίσταται καμία παραμόρφωση.