Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργασία 2

Ηλιάνα Κόγια
(10090)

1 Θέμα $\mathbf{1}^o$

1.1 ερωτήματα α,β - θεωρητική ανάλυση

Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad x_0 = 0$$

όπου:
x: κατάσταση συστήματος
u: είσοδος
a,b : άγνωστες σταθερές παράμετροι
Στόχος αποτελεί η on-line εκτίμηση των παραμέτρων a,b. Με βάση τη Μέθοδο Κλίσης, σχεδιάζεται ένας εκτιμητής πραγματικού χρόνου των παραπάνω αγνώστων παραμέτρων.
Ανάλυση - μέθοδος κλίσης
Το Σύστημα γίνεται:

$$\dot{x} = +\alpha_m x - a_m x - ax + bu, \quad a_m > 0$$

ή

$$\dot{x} + \alpha_m x = (a_m - a)x + bu$$

εφαρμόζοντας Μ/Σ Laplace θα είναι:

$$(s + a_m)x = (a_m - a)x + bu$$

$$x = (a_m - a)\left[\frac{1}{s + a_m}\right]x + b\left[\frac{1}{s + a_m}\right]u$$

$$\theta^* = [a_m - a \quad b]^T$$

$$\varphi = \left[\frac{x}{s + a_m} \quad \frac{u}{s + a_m}\right]^T$$

Το σύστημα πλέον βρίσκεται στη παραμετροποιημένη μορφή:

$$x = \theta^{*T}\varphi$$

Θεωρούμε το σύστημα αναγνώρισης:

$$\hat{x} = \hat{\theta}^{*T}\varphi$$

Το σφάλμα αναγνώρισης είναι:

$$e = x - \hat{x}$$

ή

$$e = x - \hat{\theta}^{*T}\varphi$$

ή

$$e = -(\hat{\theta}^T - \theta^{*T})\varphi$$

ή

$$e = -\tilde{\theta}^T \varphi$$

με παραμετρικό σφάλμα:

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$$

Για την εύρεση της αναδρομικής εκτίμησης $\hat{\vartheta}$ της ϑ* με τη μέθοδο κλίσης απαιτείται η ελαχιστοποίηση ως προς $\hat{\vartheta}$ μιας κατάλληλης συνάρτησης κόστους του e.
Επιλέγουμε τη συνάρτηση κόστους:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2}$$

Θέλουμε να λύσουμε, λοιπόν:

$$\arg\min_{\hat{\theta}} K(\hat{\theta})$$

και καθώς η K($\hat{\vartheta}$) είναι κυρτή κάθε τοπικό ελάχιστο είναι και ολικό. Άρα:

$$\nabla K(\hat{\theta}) = 0$$

$$\nabla K(\hat{\theta}) = (x - \hat{\theta}^{*T} \varphi)(-\varphi) = -e\varphi$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο κλίσης είναι:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \nabla K(\hat{\theta}) = \gamma e \varphi, \quad \gamma > 0$$

Επιπλέον, στο πεδίο του χρόνου θα είναι:

$$\varphi_1 = \frac{x}{s + a_m}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_1 = -a_m \varphi_1 + x$$

$$\varphi_2 = \frac{u}{s + a_m}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_2 = -a_m \varphi_2 + u$$

Άρα, για τη μέθοδο κλίσης αρκεί να λύσουμε το Σύστημα (στο πεδίο του χρόνου):

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = 0 \\ \dot{\varphi}_1 = -a_m \varphi_1 + x \quad \varphi_1(0) = 0 \\ \dot{\varphi}_2 = -a_m \varphi_2 + u \quad \varphi_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_1 \quad \dot{\hat{\theta}}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_2 \quad \dot{\hat{\theta}}_2(0) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Τελικά για τις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων προκύπτει:

$$\hat{\theta}_1 = a_m - a \Rightarrow a = a_m - \hat{\theta}_1$$

$$b = \hat{\theta}_2$$

Ευστάθεια

Το πραγματικό σύστημα είναι ευσταθές, καθώς α > 0 .
Όσον αφορά την ευστάθεια του συστήματος των

$$\hat{x} = \hat{\theta}^{*T}\varphi$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma\nabla K(\hat{\theta}) = \gamma e\varphi$$

θα έχουμε:
παραγωγίζουμε, αρχικά, το παραμετρικό σφάλμα:

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}} - \dot{\theta}^* = \dot{\hat{\theta}} = \gamma e\varphi = -\gamma\tilde{\theta}\varphi^2$$

Έτσι, για την ανάλυση της ευστάθειας χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{\tilde{\theta}^2}{2} \geq 0$$

Η παράγωγος ως προς το χρόνο της V κατά μήκος της λύσης είναι:

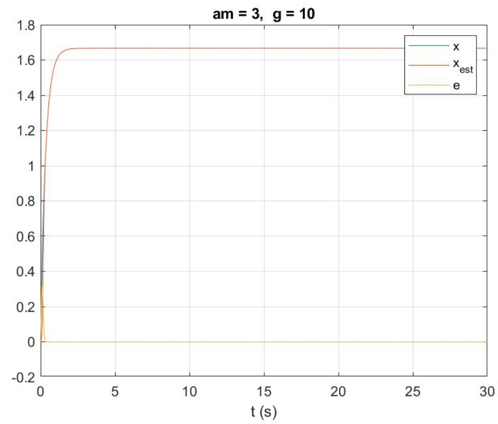
$$\dot{V} = -\gamma\tilde{\theta}^2\varphi^2 = -\gamma e^2 \leq 0$$

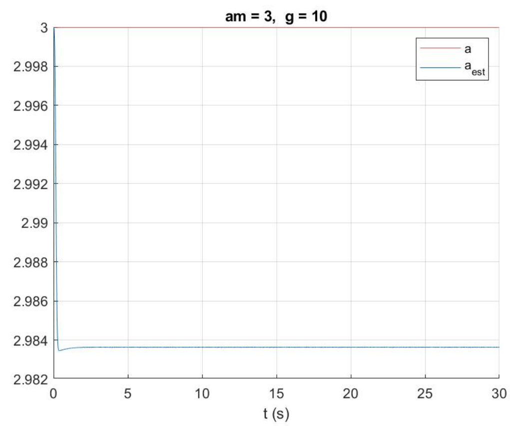
άρα, προκύπτει $\tilde{\theta} \in L_\infty$ και επειδή ϑ* είναι σταθερό θα ισχύει και $\hat{\theta} \in L_\infty$
Η V(t) είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0 και φθίνουσα (διότι η παράγωγος της είναι $\dot{V} \leq 0$). Οπότε, προκύπτει ότι το όριο $\lim_{t\to\infty} V(\tilde{\theta}) = V_\infty$. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της $\dot{V} = -\gamma e^2$ εξάγουμε ότι $e \in L_2$. Ακόμη, επειδή $\hat{\theta}, u, \varphi \in L_\infty \Rightarrow \hat{x} \in L_\infty$ οπότε και $e = x - \hat{x} \in L_\infty$. Επιπλέον, ισχύει $\dot{e} = -\dot{\tilde{\theta}}\varphi - \tilde{\theta}\dot{\varphi} \in L_\infty$ Τελικά, $e \in L_2 \cap L_\infty$ και $\dot{e} \in L_\infty$. Από λήμμα Barbalat, θα έχουμε $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ και συνεπώς θα ισχύει $\lim_{t\to\infty} \dot{\hat{\theta}} = 0$ (λόγω μηδενικής επί φραγμένης).
Η παραπάνω ανάλυση μας διασφαλίζει ότι $\hat{x} \to x$ και ότι ο ρυθμός μεταβολής των παραμέτρων $\dot{\hat{\theta}}(t)$ θα μειώνεται με το χρόνο και θα συγκλίνει ασυμπτωματικά στο 0. Ωστόσο, αυτό δεν εξασφαλίζει οτι $\hat{\theta} \to \theta^*$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει εκθετικά το $\hat{\theta}$ στο θ^* αποτελεί η Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης (ΣΕΔ).

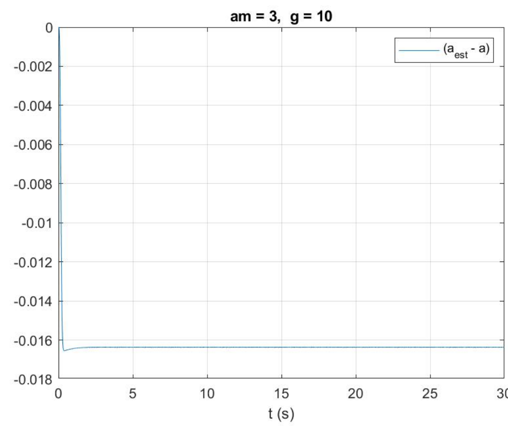
1.2 Προσομοίωση με matlab

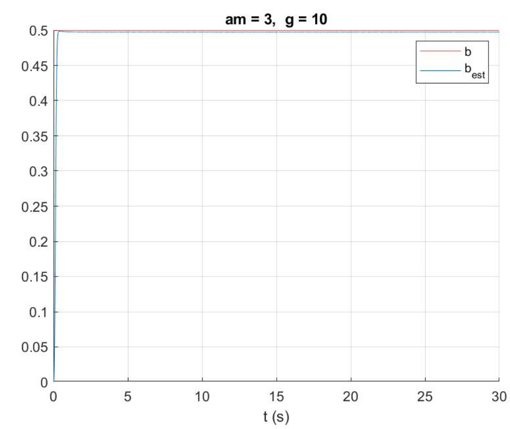
ερώτημα α

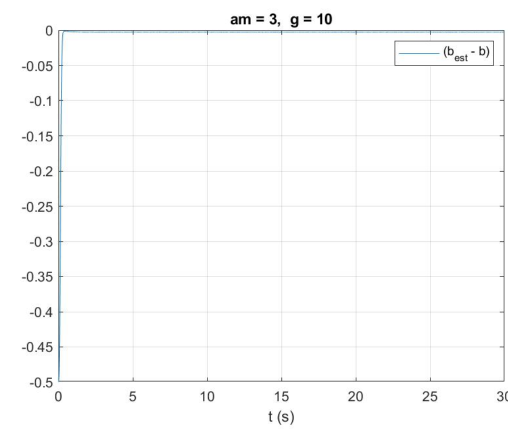
Η είσοδος του συστήματος είναι: u = 10
Αρχικά, επιλέγουμε $a_m = a = 3$ και γ = 10



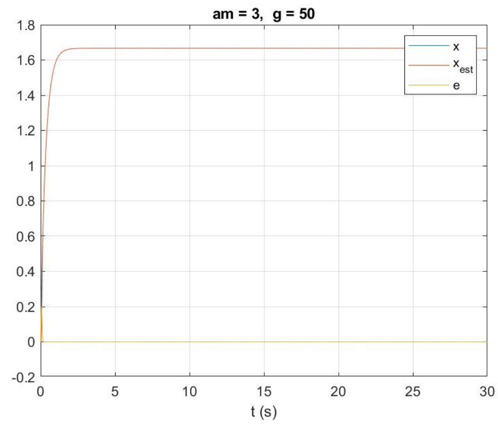


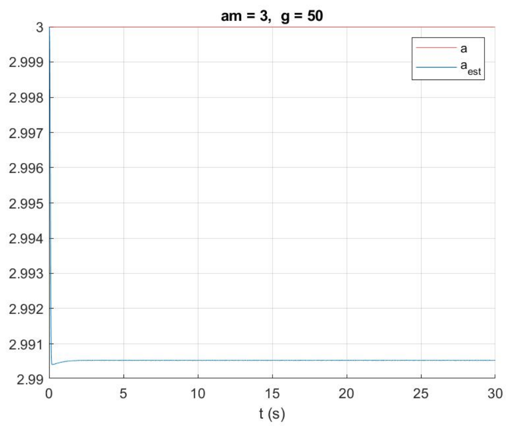


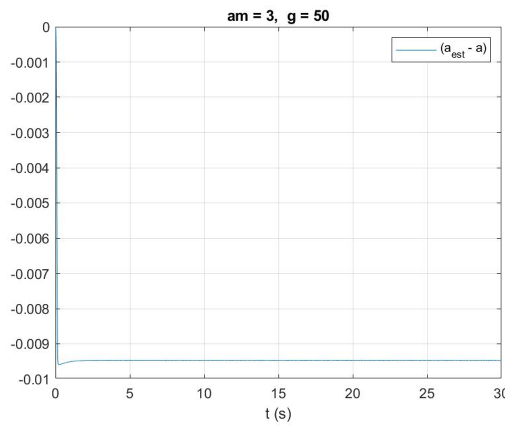


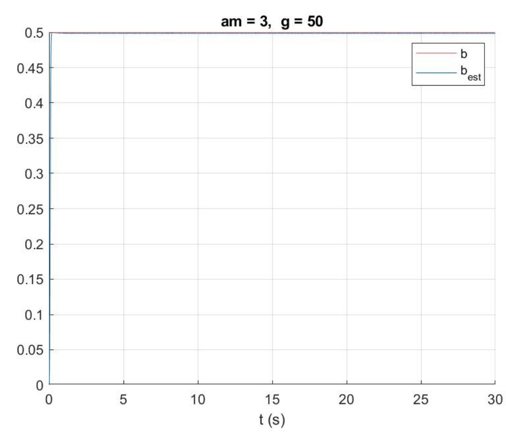


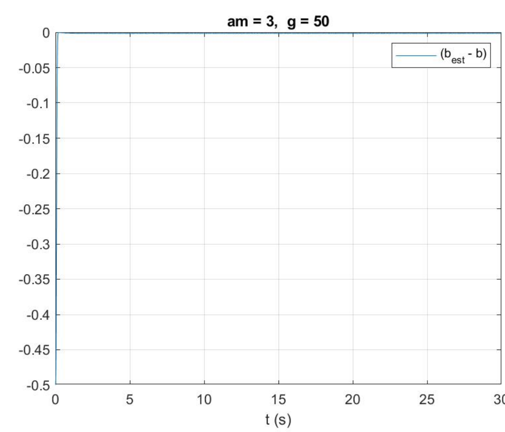
Στα παραπάνω διαγράμματα είναι φανερή η σύγκλιση των εκτιμήσεων των δύο παραμέτρων a,b στις πραγματικές τους τιμές.
Αυξάνουμε τη τιμή του γ:





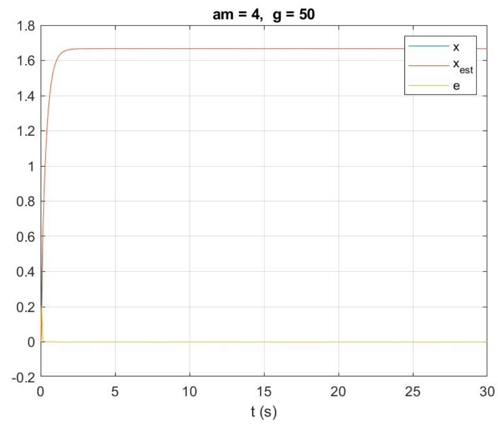


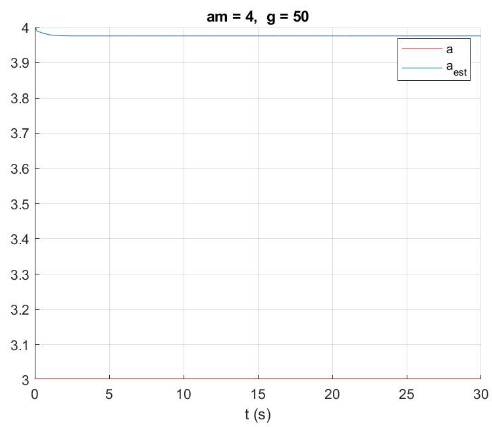


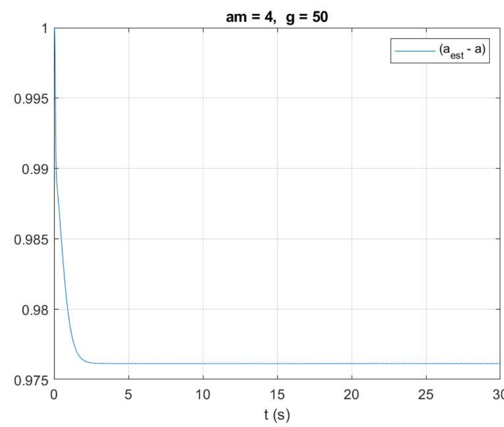


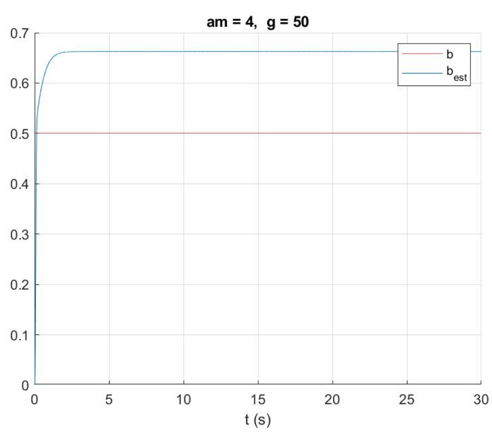
Παρατηρούμε ότι για $a_m = a = 3$ και u = 10 βρίσκουμε, με κάποια ακρίβεια, τις πραγματικές παραμέτρους και η αύξηση του γ από 10 σε 50 δεν επέφερε κάποια εμφανή αλλαγή στη σύγκλιση.

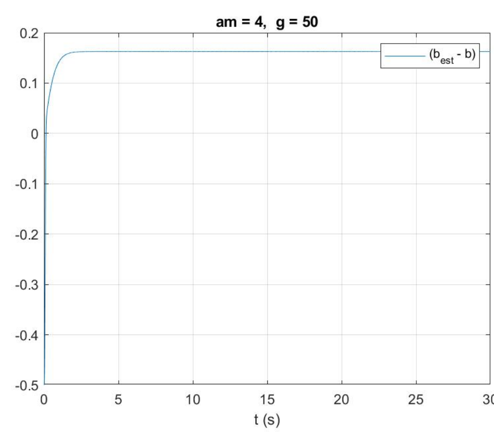
Μεταβάλλουμε τη τιμή του a_m ώστε να μην ισούται με το α:



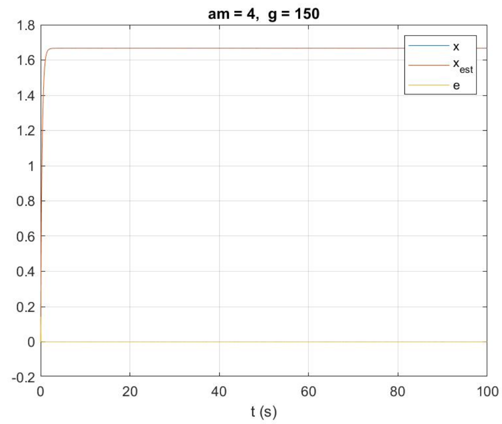


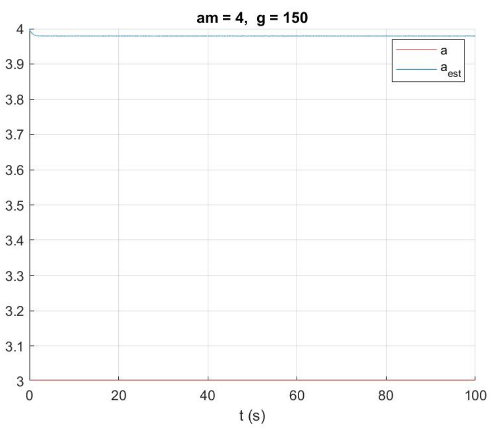


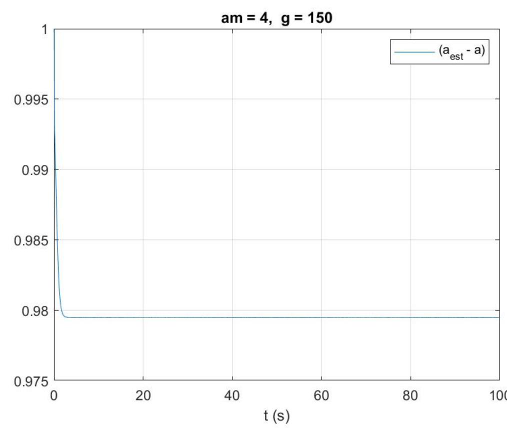


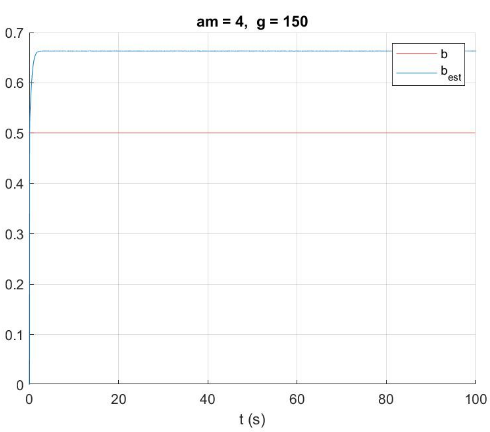


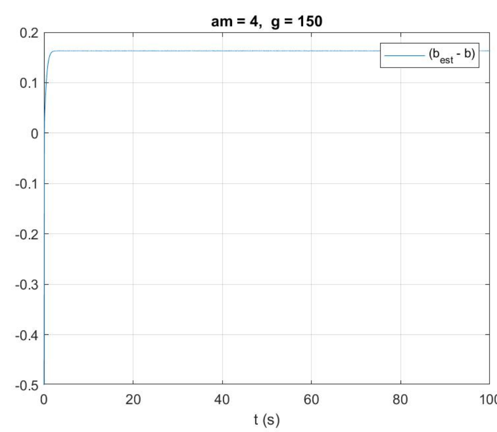
Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι δεν συγκλίνουν στις σωστές τιμές, αλλά υπάρχει αρκετή απόκλιση.Αυξάνουμε τη τιμή του γ και τον τελικό χρόνο της προσομοίωσης στα 100s:







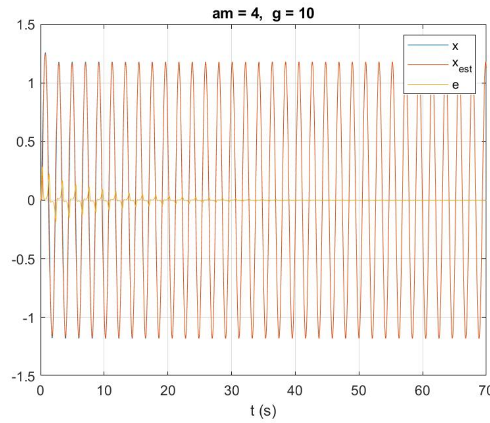


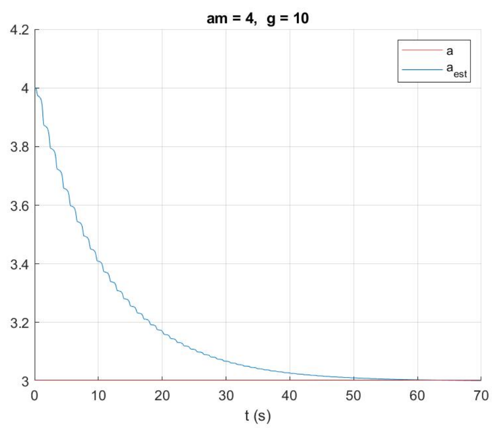


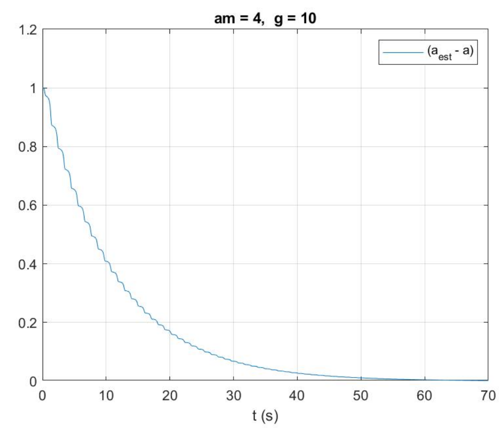
Παρατηρούμε πως και σε αυτή την περίπτωση δεν πετυχαίνουμε $\hat{a} \to a$ και $\hat{b} \to b$, καθώς και τα δύο παραμετρικά σφάλματα δεν είναι αρκετά κοντά στο 0, μάλιστα δεν παρατηρείται μεγάλη διαφορά για $\gamma = 50$ και $\gamma = 150$.
Συνολικά, συμπεραίνουμε πως για $a_m \neq a$ και για u = 10 δεν πετυχαίνουμε το στόχο μας όσο και αν αυξήσουμε τη τιμή του γ έχοντας είσοδο στο σύστημα u = 10.

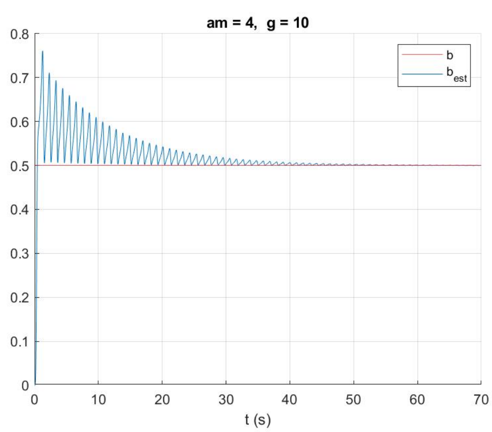
ερώτημα β

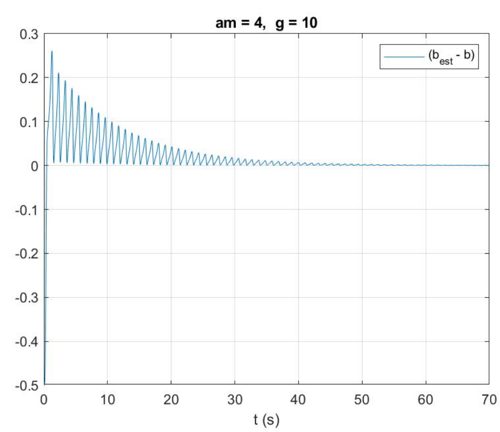
Η είσοδος του συστήματος είναι: u = 10sin(3t)
Δοκιμάζουμε, πρώτα, τις παρακάτω τιμές για τα a_m και γ



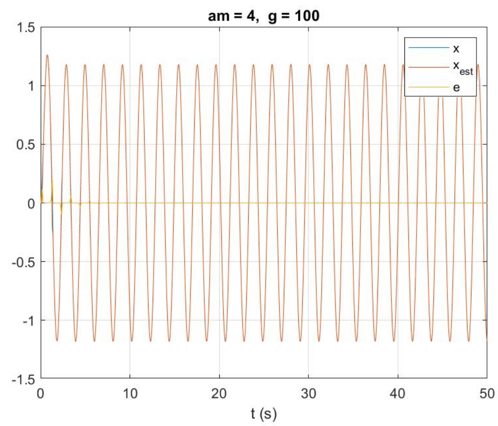


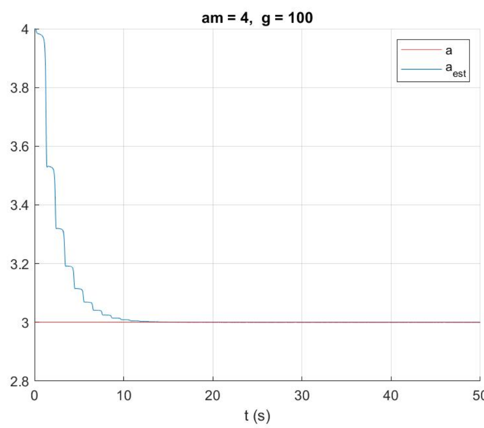


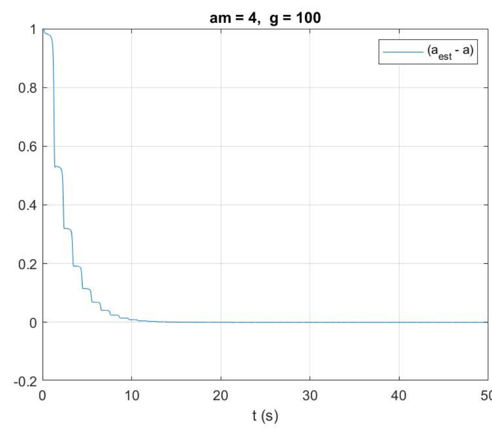


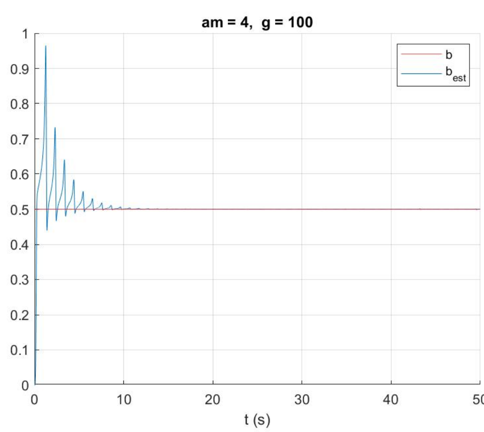


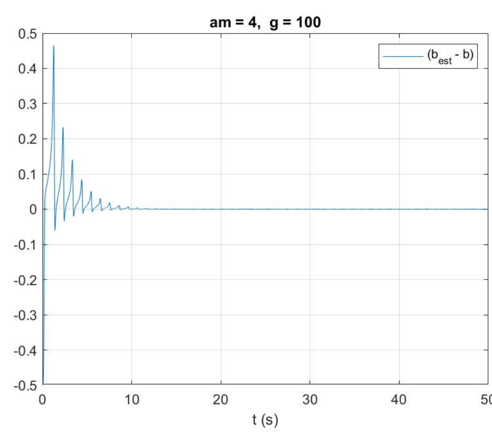
Σε αντίθεση με την περίπτωση σταθερής εισόδου, για ημιτονοειδή είσοδο παρατηρούμε ότι για $a_m \neq a$ τα παραμετρικά σφάλματα συγκλίνουν στο 0 και οι παραμέτροι στις σωστές τιμές (με αρκούντος μικρό σφάλμα). Η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτάται από την τιμή του γ. Έτσι, αυξάνουμε την τιμή του γ, ώστε να αυξήσουμε και τον ρυθμό σύγκλισης στο ϑ*



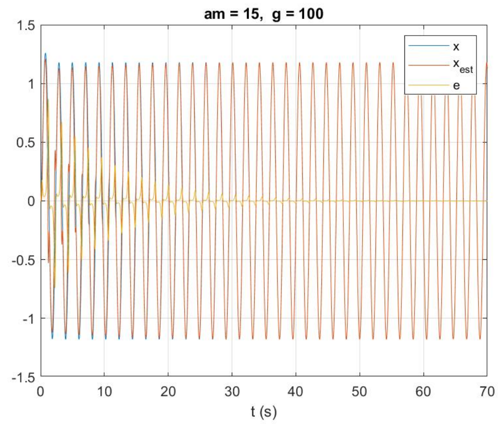


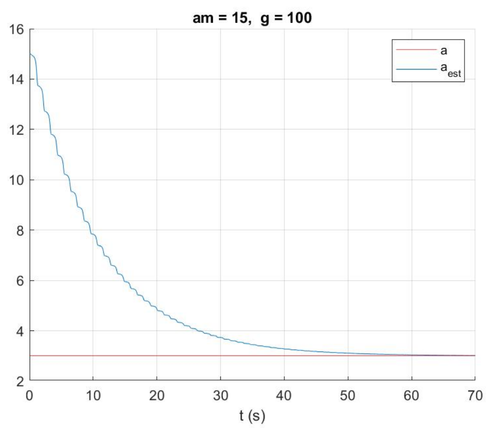


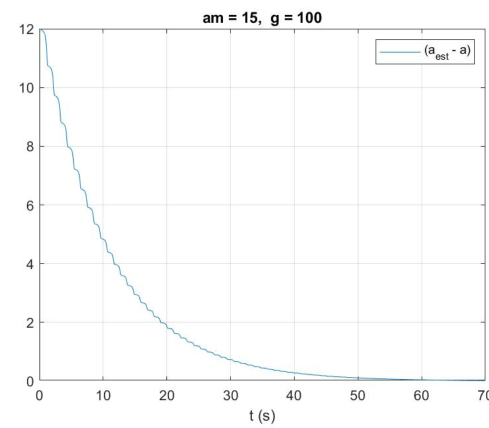


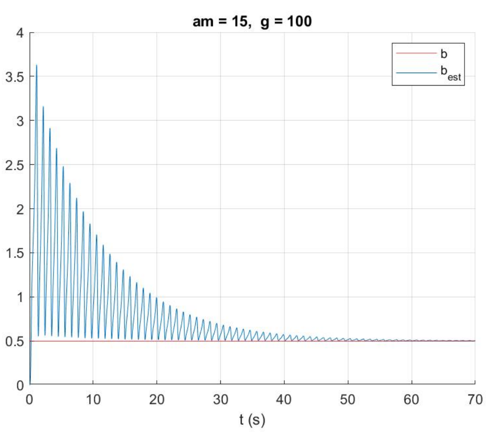


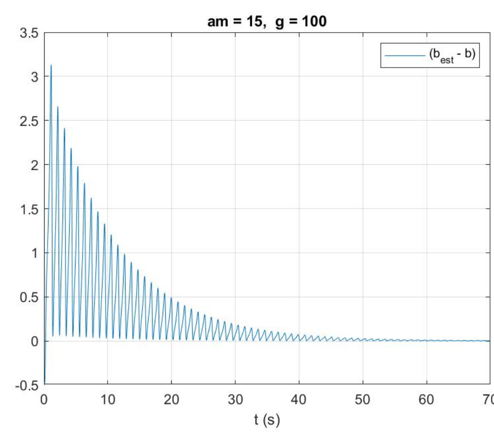
Επαληθεύεται, λοιπόν, ότι για σταθερό a_m και για τη συγκεκριμένη είσοδο u, όσο αυξάνουμε την τιμή του γ βλέπουμε βελτίωση στο ρυθμό σύγκλισης.
Μεταβάλλουμε, τώρα την τιμή του a_m :





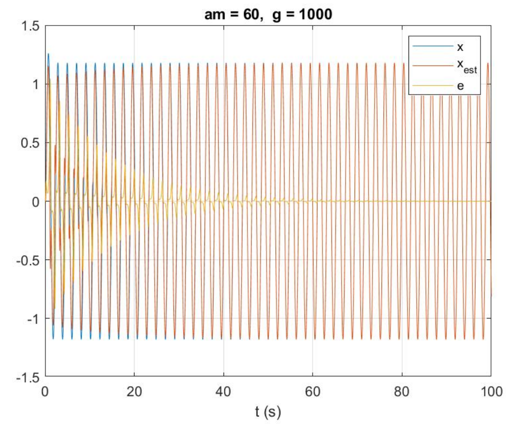


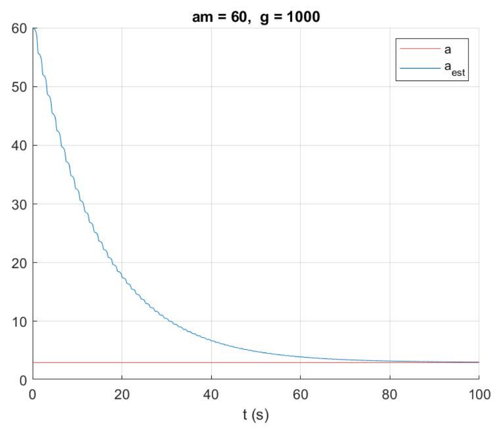


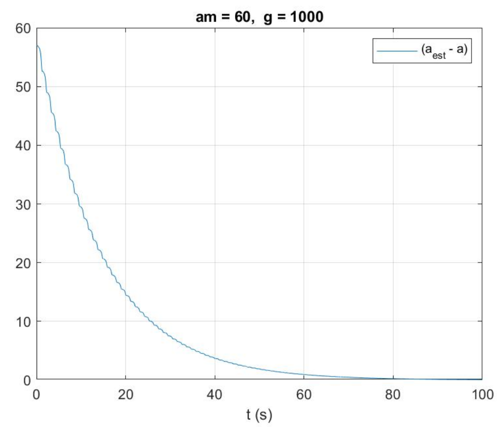


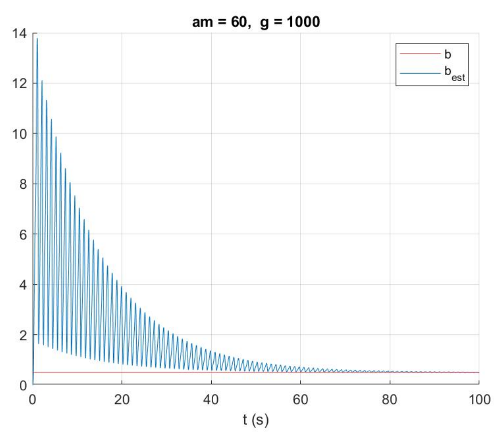
Παρατηρούμε ότι για γ = 100 και $a_m = 15$ συγκλίνουν ξανά οι εκτιμήσεις των παραμέτρων στις αντίστοιχες πραγματικές τιμές, αλλά πιο αργά σε σχέση με γ = 100 και $a_m = 4$.
Έτσι, συμπεραίνουμε ότι όσο πιο πολύ απέχει η τιμή του a_m από το 3, απαιτείται και μεγαλύτερη τιμή του γ, ώστε να συγκλίνει ο αλγόριθμος στο ϑ^* σε κατάλληλο χρόνο.
Για παράδειγμα, αν έχουμε $a_m = 60$ το οποίο απέχει αρκετά από το 3, τότε απαιτείται σχετικά

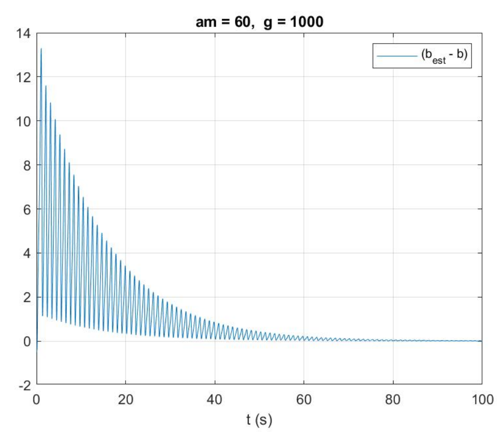
μεγάλο γ ώστε να συγκλίνει εντός 100s. Τα διαγράμματα το επαληθεύουν:



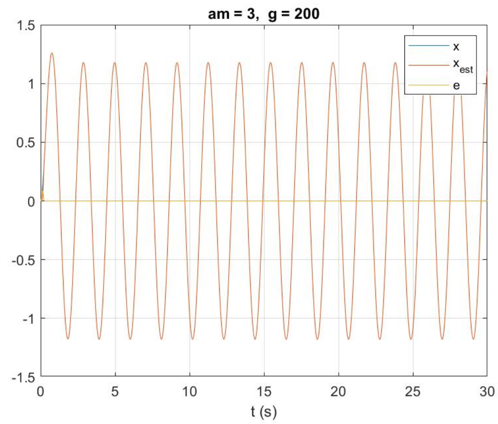


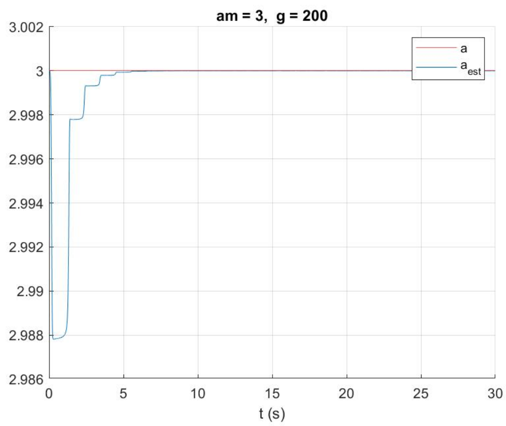


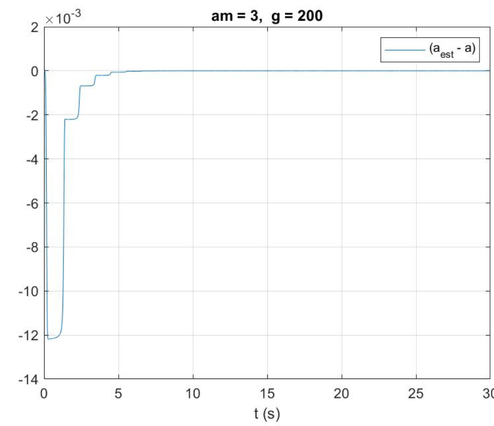


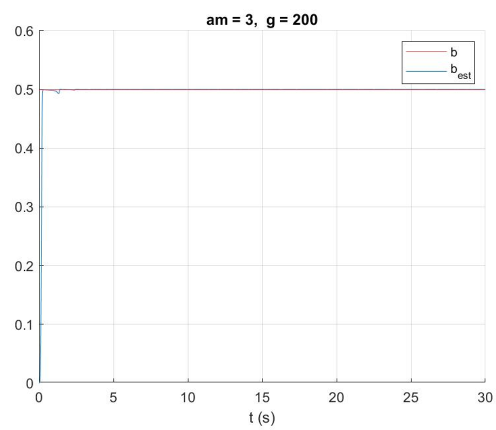


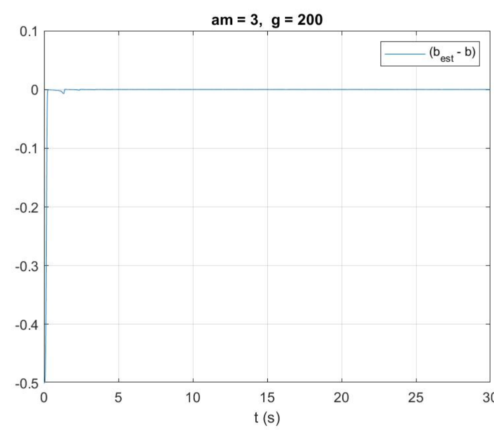
Τέλος, ο καλύτερος ρυθμός σύγκλισης στις πραγματικές τιμές των παραμέτρων που βρέθηκε επιτυγχάνεται για $a_m = 3$ και γ = 200:











Σύνοψη

Συμπεραίνουμε από όλα τα παραπάνω ότι για u = 10 δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε σωστά τις παραμέτρους για $a_m \neq a$, για κανένα γ, το οποίο θα ισχύει και πάντα στην πραγματικότητα, καθώς δεν γνωρίζουμε προφανώς την άγνωστη τιμή του α.
Αντίθετα, για είσοδο u = 10sin3t είναι εφικτό να καταλήξουμε στις πραγματικές τιμές των παραμέτρων

και για $a_m \neq a$ σε κατάλληλο χρόνο. (Ισχύει η ΣΕΔ). Επίσης, όσο πιο κοντά είναι το a_m στο α και το γ αρκούντος μεγάλο, πετυχαίνουμε ταχεία, σχετικά, σύγκλιση στο ϑ^*. Όταν, το a_m έχει μεγάλη απόκλιση από το α, τότε χρειάζονται μεγαλύτερες τιμές του γ για τη σύγκλιση.

2 Θέμα 2^o

Μέθοδος Lyapunov

2.1 Παράλληλη Δομή

Το πραγματικό σύστημα είναι:

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad x_0 = 0$$

ή

$$\dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u, \quad x_0 = 0$$

Η παράλληλη δομή περιγράφεται από διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, \quad \hat{x}_0 = 0$$

Το σφάλμα αναγνώρισης ορίζεται ως:

$$e = x - \hat{x}$$

και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο έχουμε:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\dot{e} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u + \hat{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u$$

$$\dot{e} = -\theta_1^* x + \hat{\theta}_1 \hat{x} + (\theta_2^* - \hat{\theta}_2) u$$

$$\dot{e} = -\theta_1^* x + \hat{\theta}_1 \hat{x} - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*) u$$

$$\dot{e} = -\theta_1^* x + \hat{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u$$

προσθαφαιρούμε τον όρο $\pm\theta_1$* x̂ και έτσι προκύπτει:

$$\dot{e} = -\theta_1^* (x - \hat{x}) + (\hat{\theta}_1 - \theta_1^*)\hat{x} - \tilde{\theta}_2 u$$

$$\dot{e} = -\theta_1^* e + \tilde{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u$$

Ευστάθεια

Θεωρούμε τη συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 > 0, \quad \gamma_1,\ \gamma_2 > 0$$

παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο έχουμε:

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{\tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2}{\gamma_2}$$

$$\dot{V} = -\theta_1^* e^2 + e\tilde{\theta}_1 \hat{x} - e\tilde{\theta}_2 u + \frac{\tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2}{\gamma_2}$$

Επιλέγονται:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x}$$

και

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\dot{V} = -\theta_1^* e^2 \leq 0$$

Με παρόμοια θεωρητική ανάλυση ευστάθειας που έγινε στο θέμα 1 καταλήγουμε στο ότι $\lim_{t\to\infty} \dot{\hat{\theta}} = 0$. Ωστόσο, για να συγκλίνουν οι εκτιμήσεις εκθετικά στο ϑ*, ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι η ΣΕΔ.

Επομένως, αρκεί να λύσουμε το Σύστημα στο πεδίο του χρόνου:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x} \quad \dot{\hat{\theta}}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_2 e u \quad \dot{\hat{\theta}}_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, \quad \hat{x}_0 = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\hat{\theta}_1 = \hat{a}$$

$$\hat{\theta}_2 = \hat{b}$$

2.2 Μικτή Δομή

Η μικτή δομή περιγράφεται από διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m (x - \hat{x}), \quad \hat{x}_0 = 0, \quad \theta_m > 0$$

Ομοίως με την ανάλυση της παραπάνω (Π) δομής θα έχουμε για το σφάλμα αναγνώρισης στη μικτή δομή:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\dot{e} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u + \hat{\theta}_1 x - \hat{\theta}_2 u - \theta_m (x - \hat{x})$$

$$\dot{e} = (\hat{\theta}_1 - \theta_1^*) x - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*) u - \theta_m (x - \hat{x})$$

$$\dot{e} = \tilde{\theta}_1 x - \tilde{\theta}_2 u - \theta_m (x - \hat{x})$$

$$\dot{e} = -\theta_m e + \tilde{\theta}_1 x - \tilde{\theta}_2 u$$

Ευστάθεια

Θεωρούμε τη συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_2^2 > 0, \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0$$

παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο έχουμε:

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{\tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2}{\gamma_2}$$

$$\dot{V} = -\theta_m e^2 + e\tilde{\theta}_1 x - e\tilde{\theta}_2 u + \frac{\tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2}{\gamma_2}$$

Επιλέγονται:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 ex$$

και

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 eu$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\dot{V} = -\theta_m e^2 \leq 0$$

Επομένως, αρκεί να λύσουμε το Σύστημα στο πεδίο του χρόνου:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 ex \quad \dot{\hat{\theta}}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_2 eu \quad \dot{\hat{\theta}}_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m(x - \hat{x}), \quad \hat{x}_0 = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\hat{\theta}_1 = \hat{a}$$

$$\hat{\theta}_2 = \hat{b}$$

2.3 Προσομοίωση παρουσία θορύβου

Θεωρητικά:

(Π): $\dot{\hat{\theta}}_1 = -e\hat{x} = \hat{x}^2 - x\hat{x}$

Στην (Π) δομή ο προσθετικός θόρυβος έχει σαν αποτέλεσμα το $\dot{\hat{\theta}}_1$ να εξαρτάται από το η.

(Μ): $\dot{\hat{\theta}}_2 = -ex = x^2 - x\hat{x}$

Στην (Μ) δομή ο προσθετικός θόρυβος έχει σαν αποτέλεσμα το $\dot{\hat{\theta}}_2$ να εξαρτάται από το η^2.

Άρα, αναμένουμε η μικτή δομή να εμφανίζει μεγαλύτερη ευαισθησία στο θόρυβο.

(Π) δομή

Αρχικά, με μέθοδο trial and error επιλέγουμε τιμές:

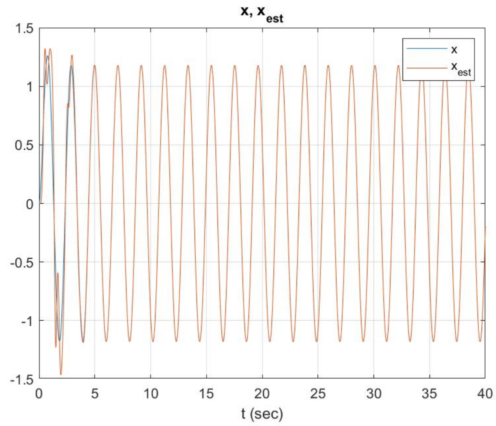
$$\gamma_1 = 6$$

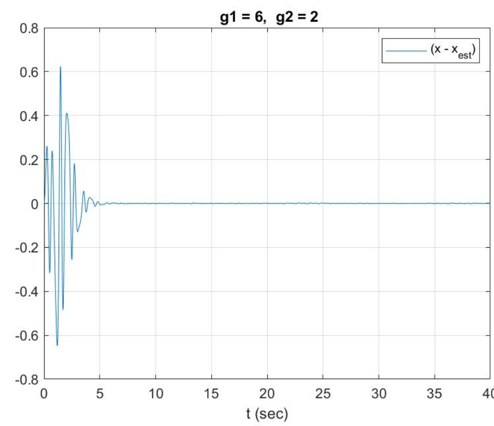
και

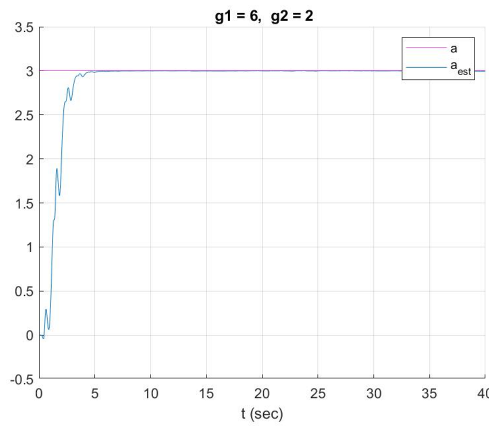
$$\gamma_2 = 2$$

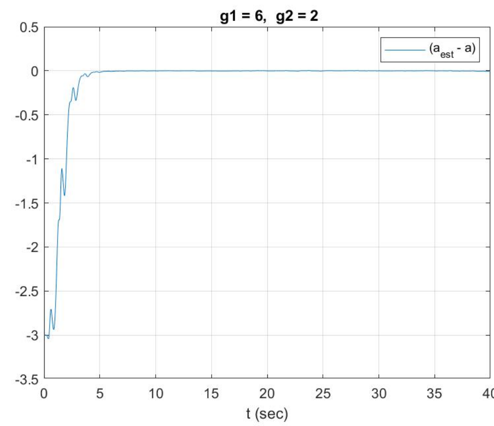
Σημείωση: Μπορεί να μην πετυχαίνουμε πολύ καλό ρυθμό σύγκλισης, αλλά απαφεύγουμε μεγάλες τιμές των $\gamma_{1,2}$ καθώς ο θόρυβος θα αυξανόταν σημαντικά.

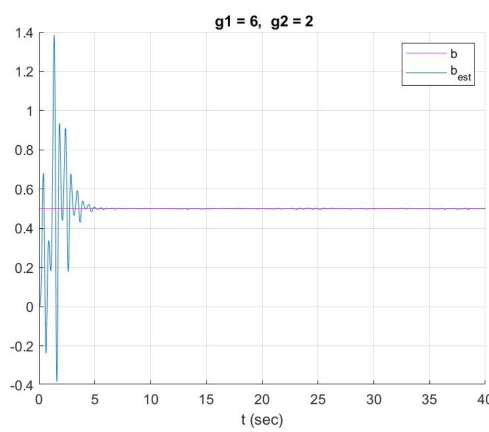
Οι γραφικές παραστάσεις χωρίς ύπαρξη θορύβου είναι:

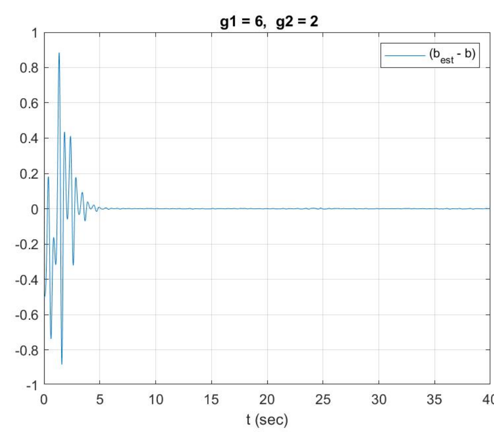






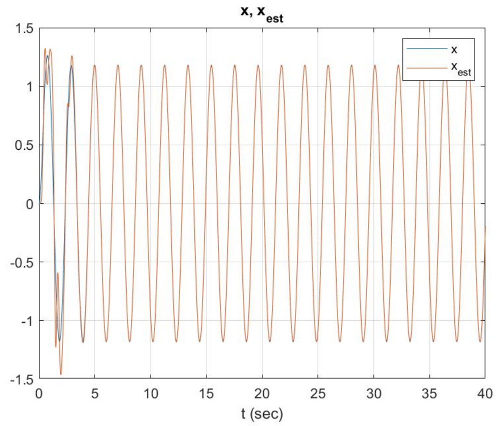


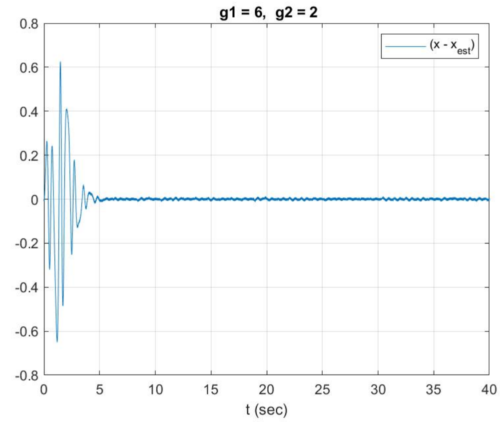


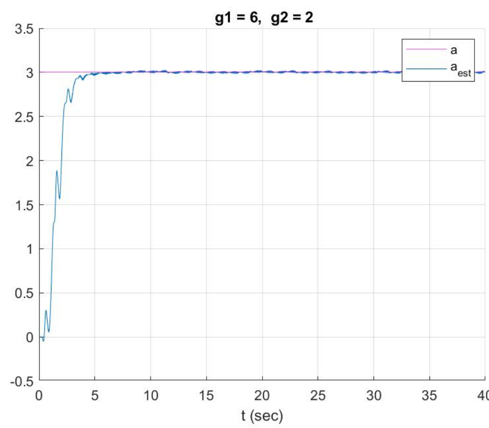


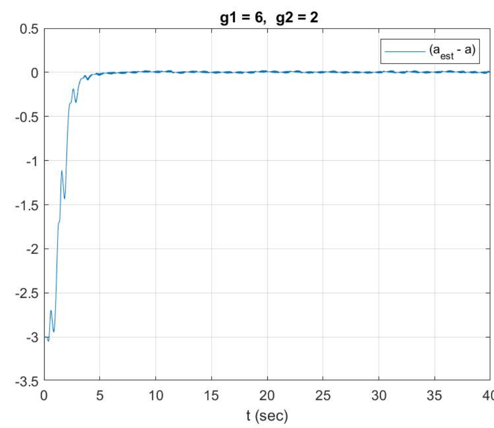
Παρατηρούμε ότι συγκλίνουν τα a,b στις πραγματικές τιμές. Άρα, ισχύει η ΣΕΔ.

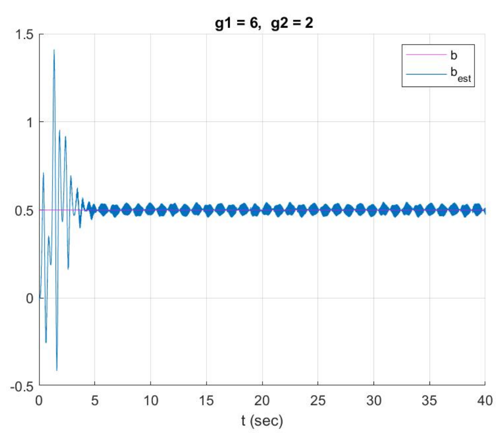
Οι γραφικές παραστάσεις με x = x + n, **f = 40, no = 0.5** είναι:

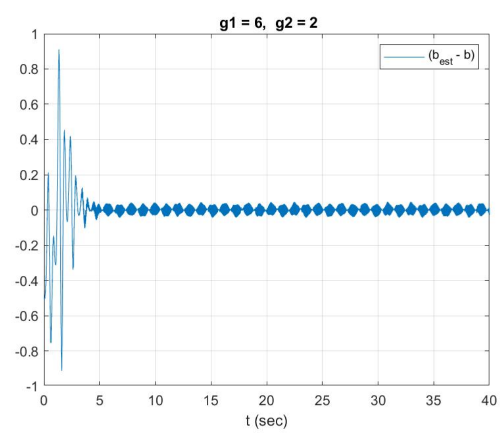




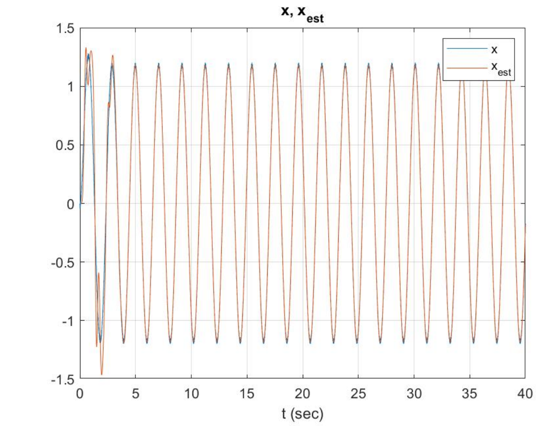


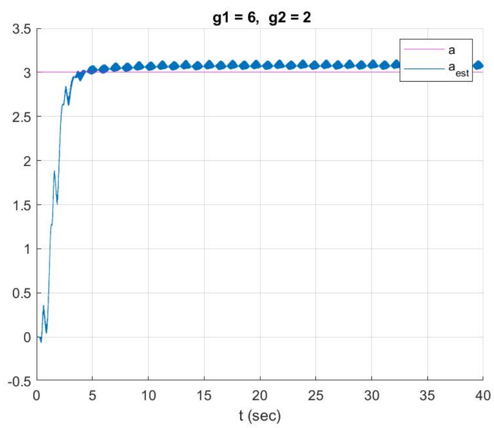


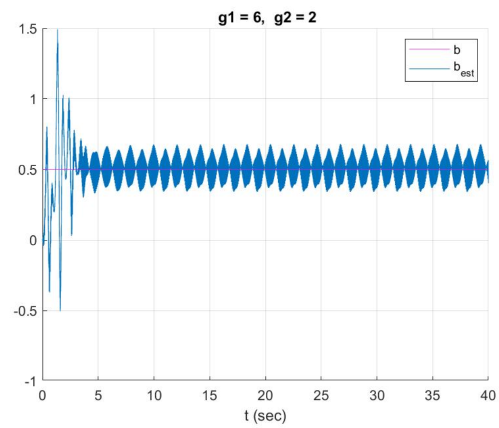




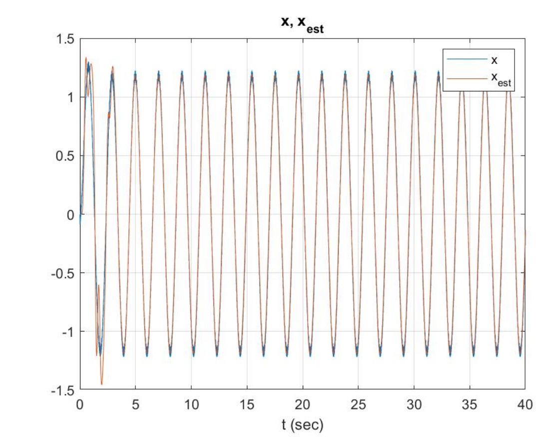
Παρά την προσθήκη θορύβου η (Π) δομή λειτουργεί καλά, καθώς εκτιμώνται σωστά οι παράμετροι με κάποιες ταλαντώσεις στη σύγκλιση γύρω από τη πραγματική τιμή.
Μεταβάλλουμε, τα f και ηο.
Αυξάνουμε,αρχικά, το ηο
Οι γραφικές παραστάσεις με ύπαρξη προσθετικού θορύβου (x = x + n, **f = 40, ηο = 2**) είναι:

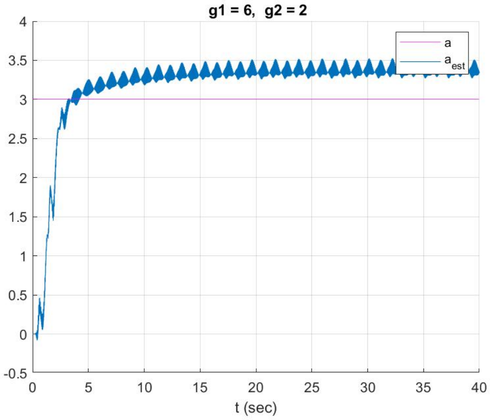


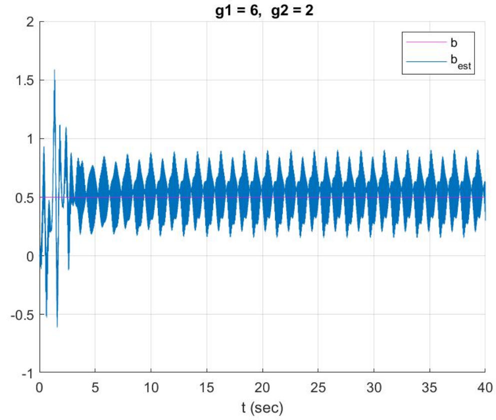




Οι γραφικές παραστάσεις με ύπαρξη προσθετικού θορύβου (x = x + n, **f = 40,** η**o = 4**) είναι:

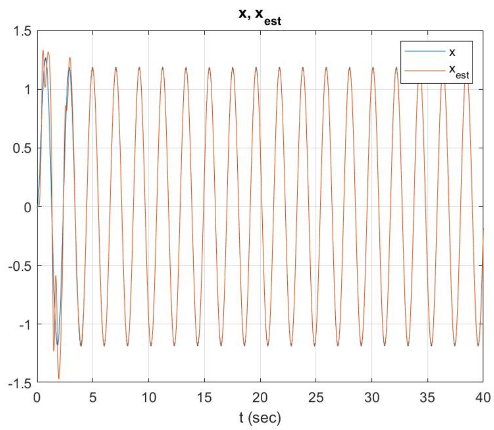


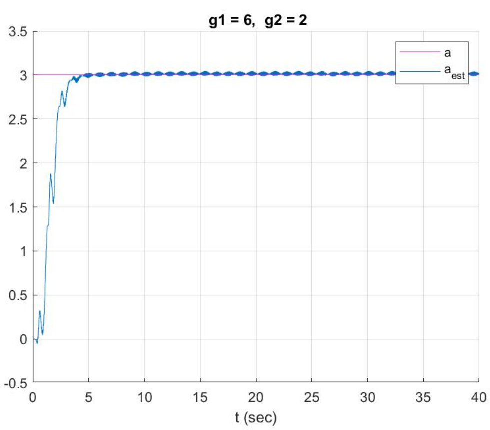


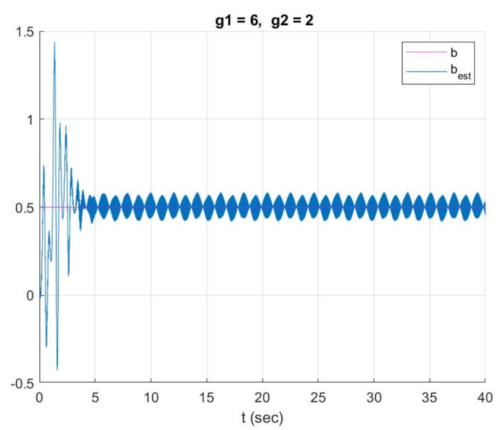


Σύμφωνα με τα παραπάνω διαγράμματα, διαπιστώνουμε ότι όταν η τιμή ηο αυξάνεται, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων παρουσιάζουν σφάλμα. Η εκτίμηση του a εμφανίζει κάποια απόκλιση και η εκτίμηση του b εμφανίζει ταλάντωση γύρω από το 0.5

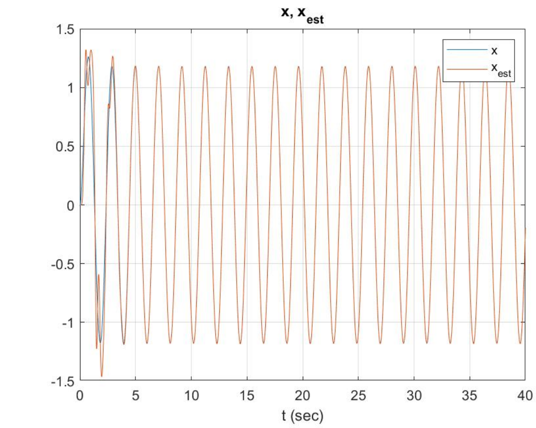
Διατηρούμε σταθερό το ηο και μεταβάλλουμε το f.
Οι γραφικές παραστάσεις με ύπαρξη προσθετικού θορύβου (x = x + n, **f = 20,** η**ο = 0.5**) είναι:

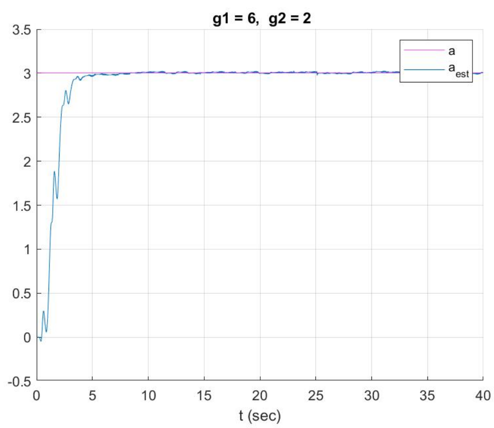


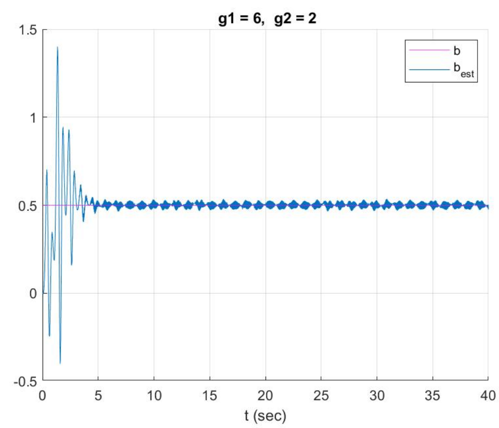




Οι γραφικές παραστάσεις με ύπαρξη προσθετικού θορύβου (x = x + n, **f = 60,** η**o = 0.5**) είναι:







Από τα παραπάνω διαγράμματα, διαπιστώνουμε ότι αυξάνοντας τη συχνότητα f (=60) δεν επηρεάζεται σημαντικά την εκτίμηση των παραμέτρων, ενώ όταν μειώνουμε τη συχνότητα f (=20) οι εκτιμήσεις των a και b παρουσιάζουν πιο έντονες ταλαντώσεις γύρω από τις πραγματικές τιμές.

(M) δομή

Πρώτα, με μέθοδο trial and error επιλέγουμε τιμές:

$$\gamma_1 = 6$$

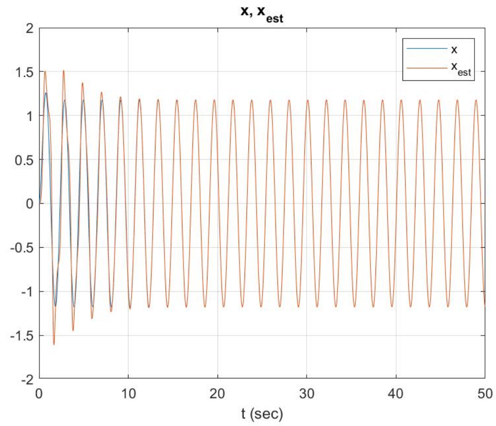
και

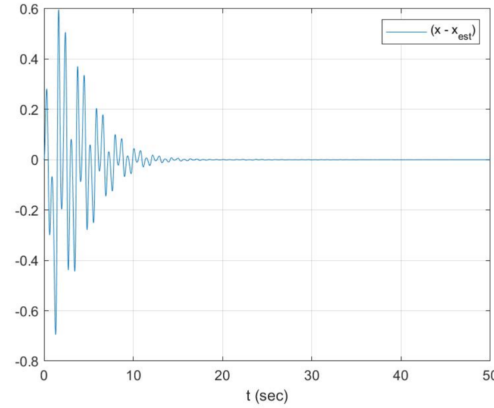
$$\gamma_2 = 1$$

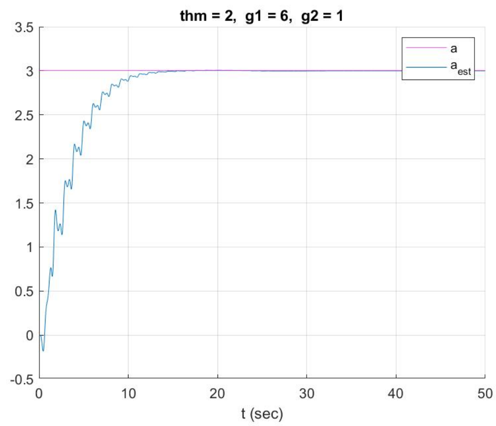
και

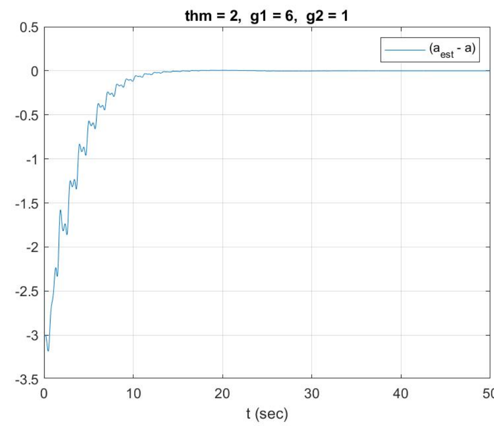
$$\theta_m = 2$$

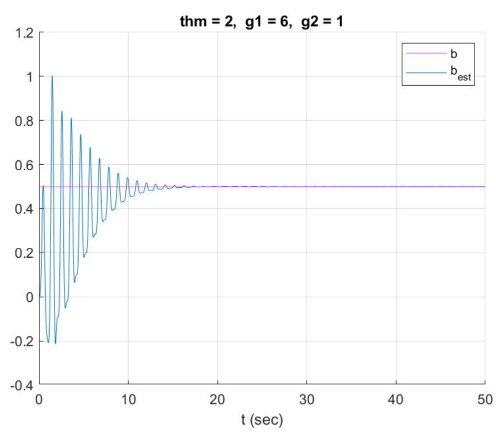
Οι γραφικές παραστάσεις χωρίς ύπαρξη θορύβου είναι:

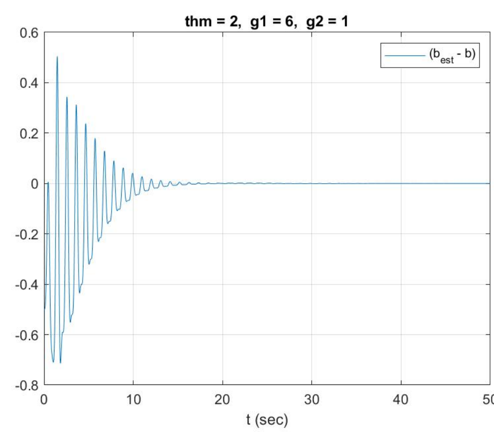




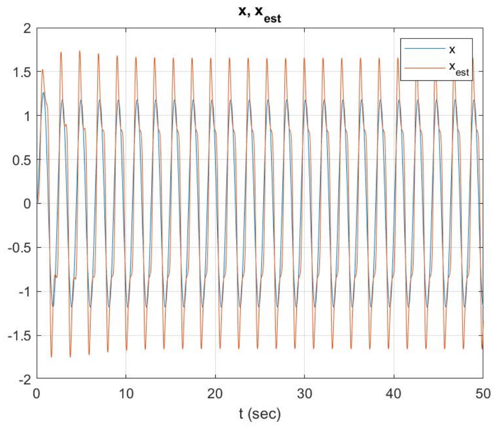


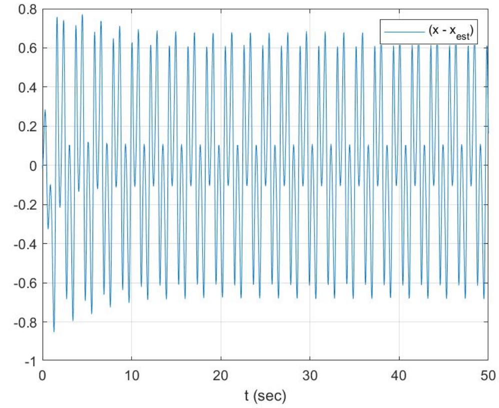


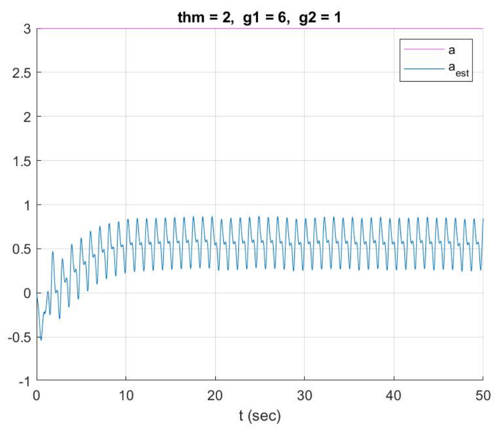


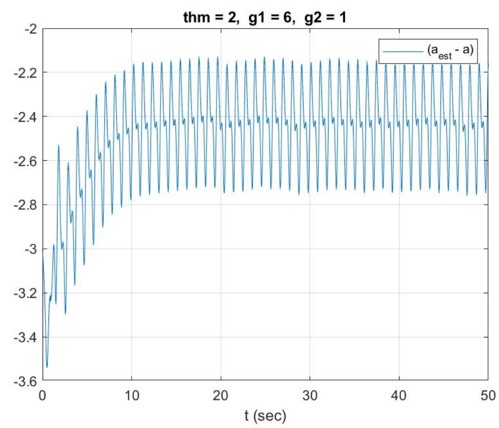


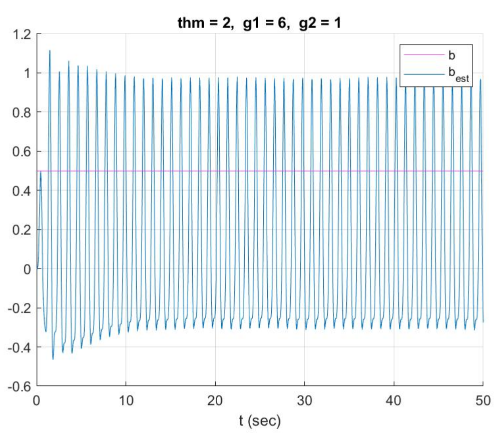
Οι γραφικές παραστάσεις με ύπαρξη προσθετικού θορύβου (x = x + n, **f = 40, no = 0.5**) είναι:

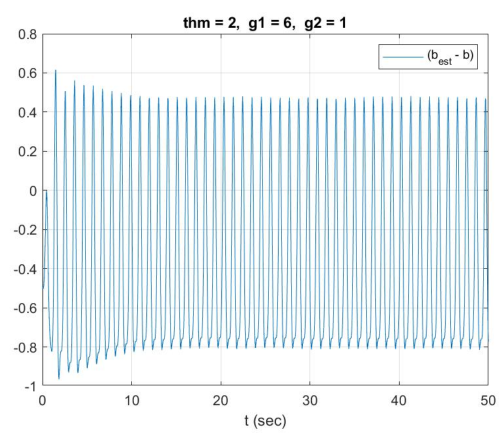












Είναι προφανές, ότι οι ταλαντώσεις κατά τη σύγκλιση στη (Μ) δομή είναι πολύ περισσότερες και μάλιστα στην παράμετρο α, για το δεδομένο θ_m, υπάρχει σχετικά μεγάλη απόκλιση από την τιμή 3, ενώ στο b ταλαντώνει έντονα γύρω από την πραγματική τιμή.Στην περίπτωση της μικτής δομής επιπλέον έχει σημασία και η τιμή του θ_m.

Σύγκριση Δομών

Όπως ήταν αναμενόμενο και από τη θεωρητική ανάλυση, η (Π) δομή υπερτερεί παρουσία θορύβου.

Ωστόσο, όταν μεταβάλλονται τα ηο και f παρατηρούμε και σε αυτή τη δομή επιπλέον ταλαντώσεις κατά τη σύγκλιση.

3 Θέμα 3^o

3.1 Θεωρητική ανάλυση

Μέθοδος Lyapunov (για συστήματα μεγαλύτερης τάξης)

Δίνεται σύστημα δεύτερης τάξης:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x: καταστάσεις συστήματος
u: είσοδος
A<0, B : σταθεροί, άγνωστοι πίνακες
Σχεδιάζεται εκτιμήτης πραγματικού χρόνου μεικτής δομής.
Η διαφορική εξίσωση του συστήματος αναγνώρισης είναι:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}x + \hat{B}u + \Theta_m(x - \hat{x}), \quad \hat{x}_0 = 0$$

όπου Θ_m θετικά ορισμένος πίνακας
Το σφάλμα αναγνώρισης είναι:

$$e = x - \hat{x}$$

και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο έχουμε:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\dot{e} = Ax + Bu - \hat{A}x - \hat{B}u - \Theta_m(x - \hat{x})$$

Παραμετρικά σφάλματα:

$$\tilde{A} = \hat{A} - A, \quad \tilde{B} = \hat{B} - B$$

$$\Rightarrow \dot{e} = -\tilde{A}x - \tilde{B}u - \Theta_m(x - \hat{x})$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}tr\{\tilde{A}^T \Gamma_1^{-1} \tilde{A}\} + \frac{1}{2}tr\{\tilde{B}^T \Gamma_2^{-1} \tilde{B}\}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο έχουμε:

$$\dot{V} = e^T \dot{e} + tr\{\tilde{A}^T \Gamma_1^{-1} \dot{\hat{A}}\} + tr\{\tilde{B}^T \Gamma_2^{-1} \dot{\hat{B}}\}$$

$$\dot{V} = -e^T \tilde{A}x - e^T \tilde{B}u - e^T \Theta_m e + tr\{\tilde{A}^T \Gamma_1^{-1} \dot{\hat{A}}\} + tr\{\tilde{B}^T \Gamma_2^{-1} \dot{\hat{B}}\}$$

Από τις ιδιότητες του ίχνους (trace) έχουμε:

$$e^T \tilde{A}x = tr\{\tilde{A}xe^T\}$$

$$e^T\tilde{B}u = tr\{\tilde{B}ue^T\}$$

άρα,

$$\dot{V} = -e^T\Theta_m e - tr\{\tilde{A}xe^T\} - tr\{\tilde{B}ue^T\} + tr\{\tilde{A}^T\Gamma_1^{-1}\dot{\hat{A}}\} + tr\{\tilde{B}^T\Gamma_2^{-1}\dot{\hat{B}}\}$$

$$\dot{V} = -e^T\Theta_m e - tr\{-\tilde{A}xe^T + \tilde{A}^T\Gamma_1^{-1}\dot{\hat{A}} + \tilde{B}^T\Gamma_2^{-1}\dot{\hat{B}} - \tilde{B}ue^T\}$$

Επιλέγουμε:

$$\dot{\hat{A}} = \Gamma_1 ex^T$$

και

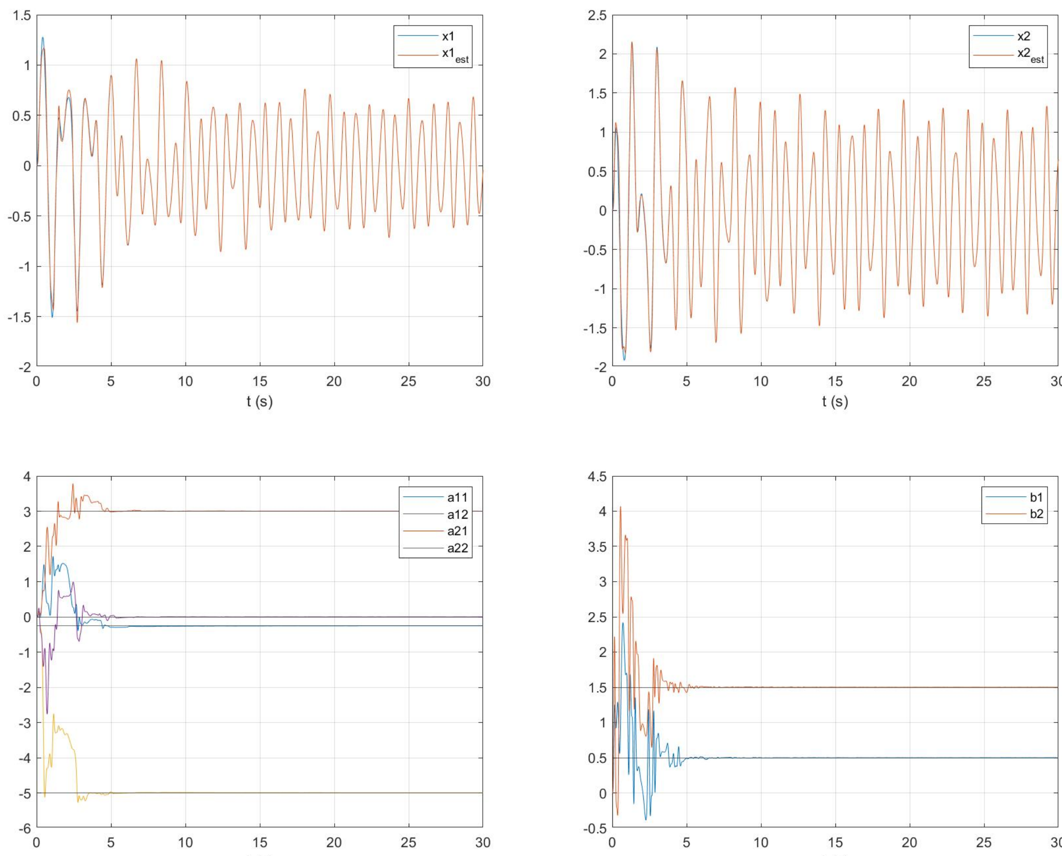
$$\dot{\hat{B}} = \Gamma_2 eu^T$$

Επομένως, αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\dot{V} = -e^T\Theta_m e \leq 0$$

διότι $\Theta_m > 0$

Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις έχουν επιλεχθεί με τη μέθοδο trial and error ο θετικά ορισμένος πίνακας Θ_m και οι τιμές $\gamma_1 = 60, \gamma_2 = 40$ που αποτελούν τα στοιχεία της διαγωνίου των πινάκων Γ1 και Γ2 (θετικά ορισμένοι και διαγώνιοι) αντίστοιχα.
Οι γραφικές παραστάσεις παρουσιάζονται παρακάτω.



Από τις παραπάνω παραστάσεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ΣΕΔ ισχύει, καθώς ο αλγόριθμος βρίσκει τις αναμενόμενες τιμές των αγνώστων παραμέτρων.