# Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

## Εργασία 1

Γραμμική Παραμετροποίηση, Εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων, Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

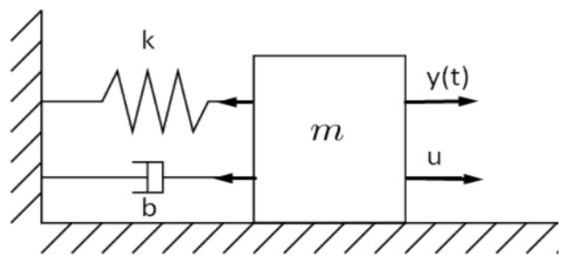
Ηλιάνα Κόγια
10090

# Περιεχόμενα

# 1 Σύστημα μάζα-ελατήριο-αποσβεστήρας - Θέμα 1

## 1.1 Ερώτημα α

Εύρεση μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος:




Από τη φυσική του προβλήματος και θεωρώντας θετική τη φορά της **u** είναι:

$$\Sigma F = u - F_k - F_b$$

όπου η δύναμη που ασκείται στη μάζα από το ελατήριο είναι ίση κατά μέτρο με:

$$F_k = ky$$

και η δύναμη που ασκεί ο αποσβετήρας ισούται κατά μέτρο με:

$$F_b = b\dot{y}$$

ακόμη, ισχύει:

$$\Sigma F = ma = m\ddot{y}$$

άρα,

$$m\ddot{y} = u - b\dot{y} - ky$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u, \quad y_0, \dot{y}_0$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Βρίσκουμε, επιπλέον, τις εξισώσεις κατάστασης. Θέτουμε, δηλαδή:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\dot{x_1} = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x_2} = \ddot{y} = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u$$

Γραμμική Παραμετροποίηση
Είναι:

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} - ky + u$$

ή

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}u$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$y^{(2)} = \theta^{*T}\Delta \quad (1)$$

με

$$\theta^* = [\frac{b}{m} \quad \frac{k}{m} \quad \frac{1}{m}]^T$$

$$\Delta = [-\dot{y} \quad -y \quad u]^T$$

Ωστόσο, η παραπάνω μορφή δεν επιλύει το πρόβλημα, μιας και οι μετρήσεις που είναι διαθέσιμες αφορούν μόνα τα **u, y**.
Επομένως, φιλτράρουμε και τα δύο μέλη της (1) με ένα ευσταθές φίλτρο (επιλέγονται δηλαδή οι πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο) τάξης n = 2 :

$$\frac{1}{\Lambda(s)}$$

όπου

$$\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

ή

$$\Lambda(s) = (s + p_1)(s + p_2) = s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 p_2$$

Δηλαδή,

$$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2]^T$$

$$\lambda_1 = p_1 + p_2$$

$$\lambda_2 = p_1 p_2$$

Άρα, μέσω Μ/Σ **Laplace** προκύπτει η μορφή:

$$z = \frac{s^2}{\Lambda(s)}y = -\frac{b}{m}\frac{s}{\Lambda(s)}y - \frac{k}{m}\frac{1}{\Lambda(s)}y + \frac{1}{m}\frac{1}{\Lambda(s)}u$$

ή

$$z = \theta^{*T}\zeta$$

με

$$\theta^* = \left[\frac{b}{m} \quad \frac{k}{m} \quad \frac{1}{m}\right]^T$$

και

$$\zeta = \left[\frac{-\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}y \quad \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)}u\right]^T$$

$$=> \zeta = \begin{bmatrix} \frac{-s}{\Lambda(s)}y & \frac{-1}{\Lambda(s)}y & \frac{1}{\Lambda(s)}u \end{bmatrix}^T$$

Παρατηρούμε πως το z παράγεται από τις διαθέιμες μετρήσεις της εξωτερικής δύναμης u και της μετατόπισης y.
Επιπλέον ισχύει:

$$\Lambda(s) = s^2 + \lambda^T \Delta_1(s)$$

και

$$z = \frac{s^2}{\Lambda(s)} y = \frac{\Lambda(s) - \lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y$$

ή

$$z = y - \frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y$$

ή

$$y = z + \frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y$$

Ακόμη, το z μπορεί να γραφεί ως:

$$z = \theta^{*T} \zeta = \theta_1^{*T} \zeta_1 + \theta_2^{*T} \zeta_2,$$

όπου

$$\theta_1^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{\kappa}{m} \end{bmatrix}^T \quad \theta_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T$$

και

$$\zeta_1 = \frac{-\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} y \quad \zeta_2 = \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)} u$$

Τελικά, αντικαθιστώντας το z προκύπτει:

$$y = \theta_1^{*T} \zeta_1 + \theta_2^{*T} \zeta_2 - \lambda^T \zeta_1 = (\theta_1^{*T} - \lambda^T) \zeta_1 + \theta_2^{*T} \zeta_2$$

ή

$$y = \begin{bmatrix} (\theta_1^{*T} - \lambda^T) & \theta_2^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$$

ή

$$y = \theta_\lambda^{*T} \zeta$$

όπου

$$\theta_\lambda^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} - \lambda_1 & \frac{\kappa}{m} - \lambda_2 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

## 1.2 Ερώτημα β

Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων
Θα σχεδιάσουμε τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων m, b, k, όταν υπάρχουν διαθέσιμες οι μέτρησεις μόνο της μετατόπισης y της μάζας και της εξωτερικής δύναμης u που ασκείται σε αυτή.
Καθώς το μοντέλο του συστήματος είναι παραμετροποιημένο γραμμικά, δηλαδή είναι στη μορφή:

$$y = \theta_{\lambda}^{*T}\zeta = \theta^T\varphi$$

με διάνυσμα παραμέτρων και πίνακα οπισθοδρόμησης αντίστοιχα:

$$\theta = \theta_{\lambda}^{*}, \quad \varphi = \zeta$$

είναι δυνατή η εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου εκτίμησης.

Θεωρητική Ανάλυση
σφάλμα πρόβλεψης:

$$e(k,\theta) = y(k) - \hat{y}(k,\theta)$$

από αρχείο μετρήσεων των σημάτων προκύπτει το διάνυσμα:

$$Z_N = [u(1) \quad y(1) \quad \ldots \quad u(N) \quad y(N)]$$

Στόχος αποτελεί η εύρεση του συνολικού σφάλματος πρόβλεψης. Η συνάρτηση που καλούμαστε να ελαχιστοποιήσουμε στις μεθόδους εκτίμησης είναι της μορφής:

$$V_N(\theta, Z_N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} l(e(k,\theta))$$

και συγκεκριμενα για τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων παίρνουμε τη νόρμα:

$$l(e) = \frac{e^2}{2}$$

Επομένως, καλούμαστε να επιλύσουμε την:

$$\theta_0 = \arg\min_{\theta} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{e^2}{2}$$

*Σε αυτό το ερώτημα αγνοούμε το θόρυβο.
Το διάνυσμα του σφάλματος πρόβλεψης είναι:

$$e = y - \theta^T\Phi$$

όπου το y είναι το διάνυσμα των μετρήσεων της μετατόπισης:

$$y = [y(1) \quad y(2) \quad \cdots y(N)]^T$$

και ο πίνακας Φ προκύπτει από τις N μετρήσεις των στοιχείων ζi, i = 1, 2, 3 του πίνακα οπισθοδρόμησης ζ,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$V_N = \frac{e^T e}{2} = \frac{|e|^2}{2}$$

ή

$$V_N = \frac{|y - \Phi\theta|^2}{2}$$

Για την εύρεση του ελαχίστου έχουμε:

$$\frac{\partial V_N(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

ή

$$(y - \Phi\theta_0)^T(-\Phi) = 0$$

ή

$$\theta_0^T(\Phi^T\Phi) = y^T\Phi$$

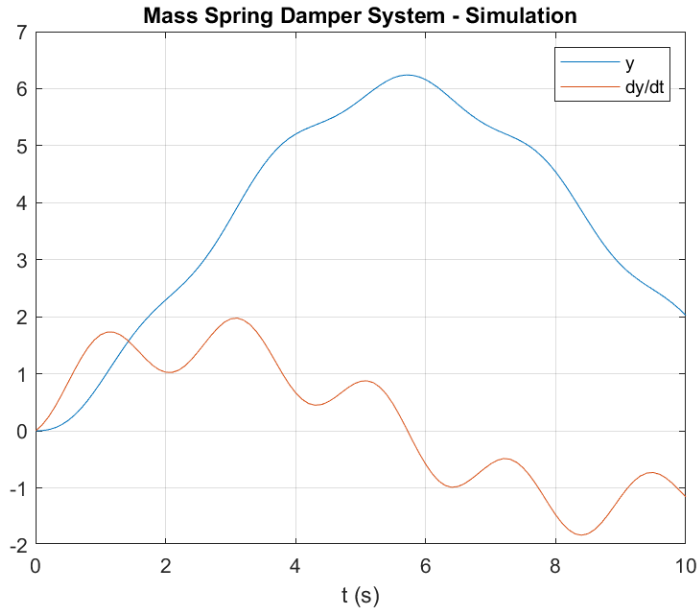
και επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων ϑο Αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος μπορούμε να βρούμε το ϑο μέσω της:

$$\theta_0^T = y^T\Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}$$

Μέσω του ϑο (=ϑλ) και των λi, λοιπόν, μπορούμε να βρούμε το ϑ* και συνεπώς τις ζητούμενες εκτιμήσεις των παραμέτρων m,b,k

## 1.3 Ερώτημα γ

Προσομοίωση σε περιβάλλον MATLAB
Δίνονται οι τιμές των παραμέτρων m = 10, b = 0.5, k = 2.5 και u = 15sin(3t + 8)
Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ode45 για χρονική διάρκεια 10s, βήμα 0.1 και μηδενικές αρχικές συνθήκες για τις καταστάσεις του συστήματος, (οι εξισώσεις κατάστασεις βρέθηκαν σε προηγούμενο ερώτημα) προσομοιώνουμε το σύστημα και παράγουμε τη γραφική παράσταση της μετατόπισης y με το χρόνο:



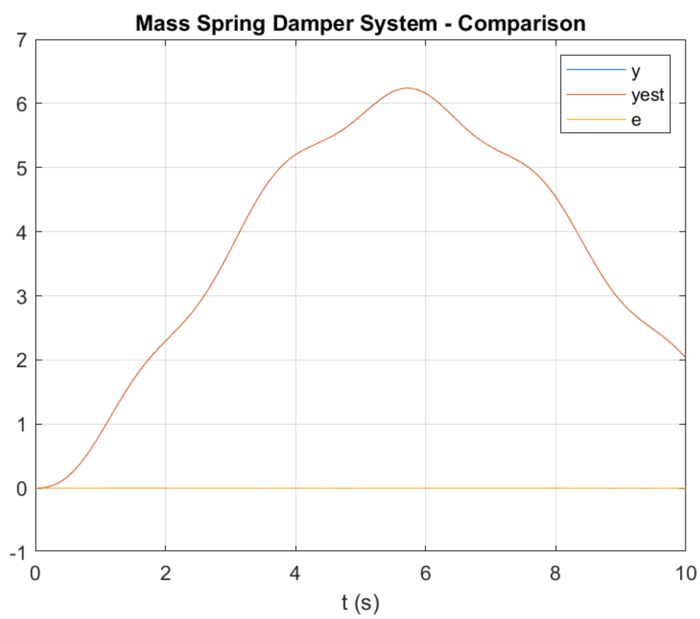

Εφαρμογή αλγορίθμου ελαχίστων τετραγώνων

Μέσω του παρακάτω διαγράμματος γίνεται η σύγκριση του y με την εκτίμηση του, όπως αυτή προκύπτει από τη σχέση:

$$\hat{y} = \Phi\theta$$

επίσης απεικονίζεται και το σφάλμα

$$e = y - \hat{y}$$




Επιλογή πόλων
Οι πόλοι επιλέχθηκαν με trial-error μέθοδο. Οι τελικές τιμές των πόλων, που εξασφαλίζουν

μικρή απόκλιση των εκτιμήσεων των παραμέτρων απο τις πραγματικές είναι:

$$p_1 = 0.7 \quad \kappa\alpha\iota \quad p_2 = 0.7$$

Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων που βρέθηκαν:

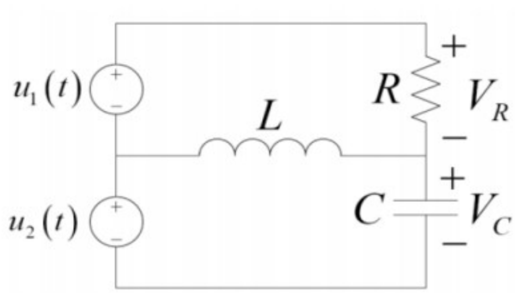
$$m_{est} = 9.9802 \quad k_{est} = 2.4981 \quad b_{est} = 0.4986$$

Παρατήρησεις: Ανάλογα με τις τιμές των πόλων, κάποιες φορές έχουμε μικρότερο σφάλμα σε κάποια μεταβλητή από ότι σε κάποια άλλη. Για τις συγκεκριμένες παραμέτρους προτιμάται, ίσως, το μεγαλύτερο σφάλμα στη τιμή της μεταλητής να είναι στο m μιας και έχει σχετικά μεγαλύτερη τιμή. Επίσης, μπορεί για κάποιες τιμές πόλων να βρίσκουμε ακριβώς τη τιμή του b, αλλά να έχουμε μεγαλύτερο σφάλμα στις υπόλοιπες παραμέτρους.

# 2 Κύκλωμα με **RLC** - Θέμα 2

## 2.1 Ερώτημα α

Κύκλωμα:




Για την εύρεση των εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα έγινε η παρακάτω κυκλωματική ανάλυση:
Στον πάνω βρόχο του κυκλώματος, η εξίσωση βρόχου είναι:

$$u_1 = V_R + L\frac{di_L}{dt} \quad (1)$$

Στον κάτω βρόχο του κυκλώματος, η εξίσωση βρόχου είναι:

$$u_2 = V_R - L\frac{di_L}{dt}$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$u_1 + u_2 = V_R + V_C$$

ή

$$V_R = u_1 + u_2 - V_C$$

Το ρεύμα που διαρρέει την αντίταση είναι:

$$i_1 = \frac{V_R}{R}$$

Το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή είναι:

$$i_2 = C\frac{dV_C}{dt}$$

Το ρεύμα που διέρχεται από το πηνίο είναι: iL και από το νόμο του Kirchhoff στον κόμβο ισχύει:

$$i_L = i_1 - i_2$$

Αντικαθιστώντας το iL στη σχέση (1) προκύπτει:

$$u_1 = V_R + L\frac{di_1}{dt} - L\frac{di_2}{dt}$$

επίσης, με αντικατάσταση των δύο ρευμάτων από τους παραπάνω τύπους θα είναι:

$$u_1 = V_R + \frac{L}{R}\frac{dV_R}{dt} - LC\frac{d^2V_C}{dt}$$

και αντικαθιστώντας το VR έχουμε:

$$u_1 = u_1 + u_2 - V_C + \frac{L}{R}(\frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} - \frac{dV_C}{dt}) - LC\frac{d^2V_C}{dt}$$

ή

$$LC\frac{d^2V_C}{dt} + \frac{L}{R}\frac{dV_C}{dt} + V_C = \frac{L}{R}\frac{du_1}{dt} + \frac{L}{R}\frac{du_2}{dt} + u2$$

ή

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}\dot{u}_1 + \frac{1}{RC}\dot{u}_2 + \frac{1}{LC}u_2$$

Θέτουμε

$$y = Vc$$

Άρα

$$\ddot{y} + \frac{1}{RC}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{RC}\dot{u}_1 + \frac{1}{RC}\dot{u}_2 + \frac{1}{LC}u_2$$

ή

$$\ddot{y} = -\frac{1}{RC}\dot{y} - \frac{1}{LC}y + \frac{1}{RC}\dot{u}_1 + \frac{1}{RC}\dot{u}_2 + \frac{1}{LC}u_2$$

$$y^{(2)} = \theta^{*T}\Delta$$

όπου

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta = [-\dot{y} \quad -y \quad \dot{u_1} \quad u_1 \quad \dot{u_2} \quad u_2]^T$$

Εισάγουμε ξανά ευσταθές φίλτρο $1/\Lambda(s)$ στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης και καταλήγουμε στη μορφή:

$$z = \theta^{*T}\zeta = \frac{s^2}{\Lambda(s)}y = y - \frac{\lambda^T\Delta_1(s)}{\Lambda(s)}y, \quad \Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \frac{-s}{\Lambda(s)}y & \frac{-1}{\Lambda(s)}y & \frac{s}{\Lambda(s)}u_1 & \frac{1}{\Lambda(s)}u_1 & \frac{s}{\Lambda(s)}u_2 & \frac{1}{\Lambda(s)}u_2 \end{bmatrix}^T$$

θεωρώντας,

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} \frac{-s}{\Lambda(s)}y & \frac{-1}{\Lambda(s)}y \end{bmatrix}^T$$

$$\zeta_2 = \begin{bmatrix} \frac{s}{\Lambda(s)}u_1 & \frac{1}{\Lambda(s)}u_1 \end{bmatrix}^T$$

$$\zeta_3 = \begin{bmatrix} \frac{s}{\Lambda(s)}u_2 & \frac{1}{\Lambda(s)}u_2 \end{bmatrix}^T$$

και

$$\theta_1^* = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{RC} & \tfrac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

$$\theta_2^* = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{RC} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\theta_3^* = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{RC} & \tfrac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

Παρομοίως, με την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει:

$$z = \theta^{*T}\zeta = \theta_1^{*T}\zeta_1 + \theta_2^{*T}\zeta_2 + \theta_3^{*T}\zeta_3$$

και για το y θα ισχύει:

$$y = z + \frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y$$

$$y = \theta_1^{*T}\zeta_1 + \theta_2^{*T}\zeta_2 + \theta_3^{*T}\zeta_3 - \lambda^T\zeta_1$$

$$y = \theta_1^{*T}\zeta_1 - \lambda^T\zeta_1 + \theta_2^{*T}\zeta_2 + \theta_3^{*T}\zeta_3$$

ή

$$y = (\theta_1^{*T} - \lambda^T)\zeta_1 + \theta_2^{*T}\zeta_2 + \theta_3^{*T}\zeta_3$$

ή

$$y = \begin{bmatrix} (\theta_1^{*T} - \lambda^T) & \theta_2^{*T} & \theta_3^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \theta_\lambda^{*T}\zeta$$

άρα η γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή είναι:

$$y = \theta_\lambda^{*T}\zeta$$

όπου

$$\theta_\lambda^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - \lambda_1 & \frac{1}{LC} - \lambda_2 & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}$$

Αφού, λοιπόν, το σύστημα είναι σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή μπορούμε να εφαρμόσουμε (κατά τον ίδιο τρόπο με το Θέμα 1) τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για την εύρεση του $\vartheta\lambda$ και έπειτα του $\vartheta$. Επομένως, θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους 1/RC και 1/LC.

Εύρεση Πίνακα Μεταφοράς κυκλώματος
Στην διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}\dot{u}_1 + \frac{1}{RC}\dot{u}_2 + \frac{1}{LC}u_2$$

εφαρμόζοντας Μ/Σ Laplace προκύπτει:

$$V_C(s)(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}) = \frac{s}{RC}U_1(s) + (\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC})U_2(s)$$

Για να βρούμε τα εκάστοτε στοιχεία του πίνακα μεταφοράς μηδενίζουμε τη μία εισόδο του συστήματος και βρίσκουμε το λόγο εξόδου/εισόδου.
Συγκεκριμένα:

$$G_{C1} = \frac{V_C(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}, \quad \gamma\iota\alpha \quad U_2(s) = 0$$

$$G_{C2} = \frac{V_C(s)}{U_2(s)} = \frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}, \quad \gamma\iota\alpha \quad U_1(s) = 0$$

Στην εξίσωση:

$$u_1 + u_2 = V_R + V_C$$

εφαρμόζουμε επίσης Μ/Σ Laplace και έχουμε:

$$U_1(s) + U_2(s) = V_R(s) + V_C(s)$$

$$V_C(s) = U_1(s) + U_2(s) - V_R(s)$$

Αντικαθιστώντας το Vc(s):

$$(U_1(s) + U_2(s) - V_R(s))(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}) = \frac{s}{RC}U_1(s) + (\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC})U_2(s)$$

$$V_R(s)(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}) = U_1(s)(s^2 + \frac{1}{LC}) + U_2(s)s^2$$

Μηδενίζοντας κάθε φορά τη μία από τις εισόδους έχουμε:

$$G_{R1} = \frac{V_R(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}, \quad \gamma\iota\alpha \quad U_2(s) = 0$$

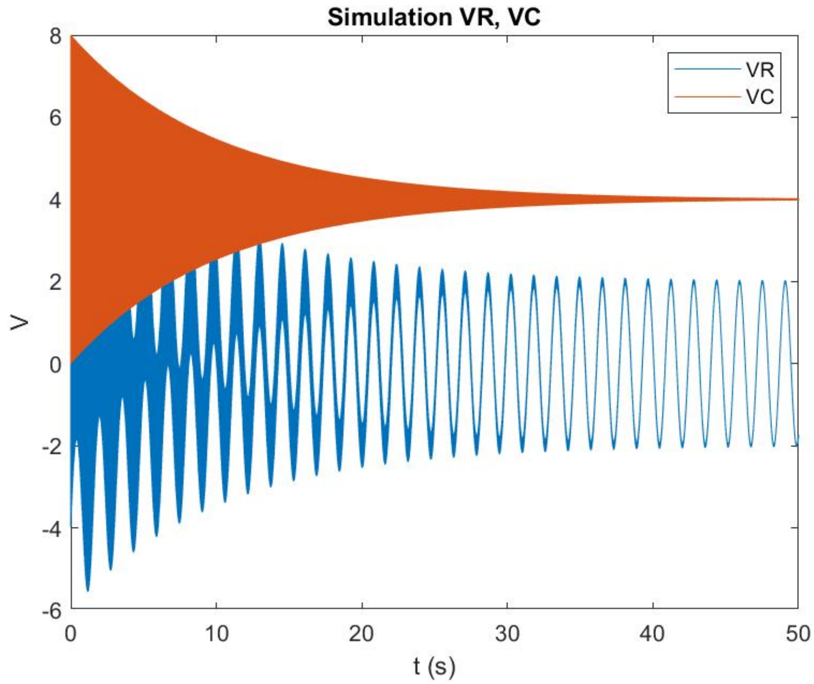
$$G_{R2} = \frac{V_R(s)}{U_2(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}, \quad \gamma\iota\alpha \quad U_1(s) = 0$$

Επομένως, ο πίνακας μεταφοράς που προκύπτει για το δοθέν κύκλωμα είναι:

$$\begin{bmatrix} V_R \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{R1} & G_{R2} \\ G_{C1} & G_{C2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$=> \begin{bmatrix} V_R \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} & \frac{s^2}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} \\ \frac{\frac{s}{RC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} & \frac{\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι για τον προσδιορισμό του πίνακα μεταφοράς απαιτείται η εύρεση των 1/RC και 1/LC, η εκτίμηση των οποίων πραγματοποιείται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω.
Από τις μετρήσεις που λαμβάνουμε μέσω του v.p δημιουργούμε τις γραφικές παραστάσεις των VR και VC




Έπειτα, μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων βρίσκουμε το ϑο (=ϑλ) και στη συνέχεια το ϑ*. Η εκτίμηση της τάσης VC προκύπτει μέσω της σχέσης:

$$\hat{V}_C = \Phi\theta_0$$

ενώ για την τάση VR χρησιμοποιούμε τον τύπο:

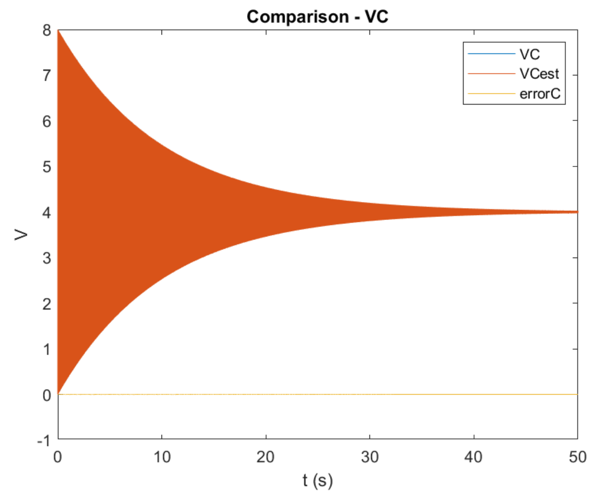
$$\hat{V}_R = u_1 + u_2 - \hat{V}_C$$

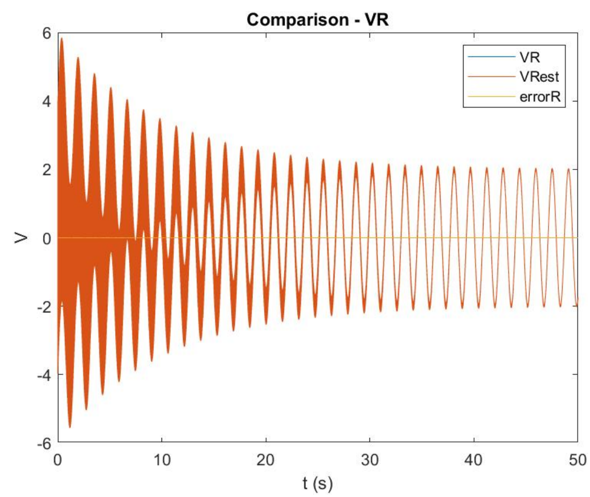
Όσον αφορά τα σφάλματα της εκτίμησης βρίσκονται μέσω των:

$$e_{VR} = V_R - \hat{V}_R$$

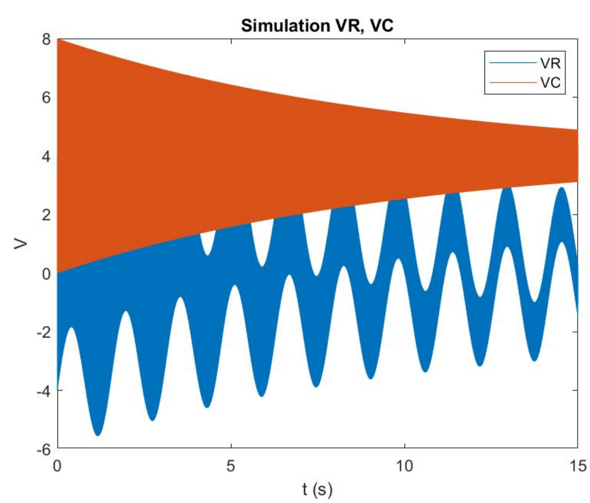
$$e_{VC} = V_C - \hat{V}_C$$

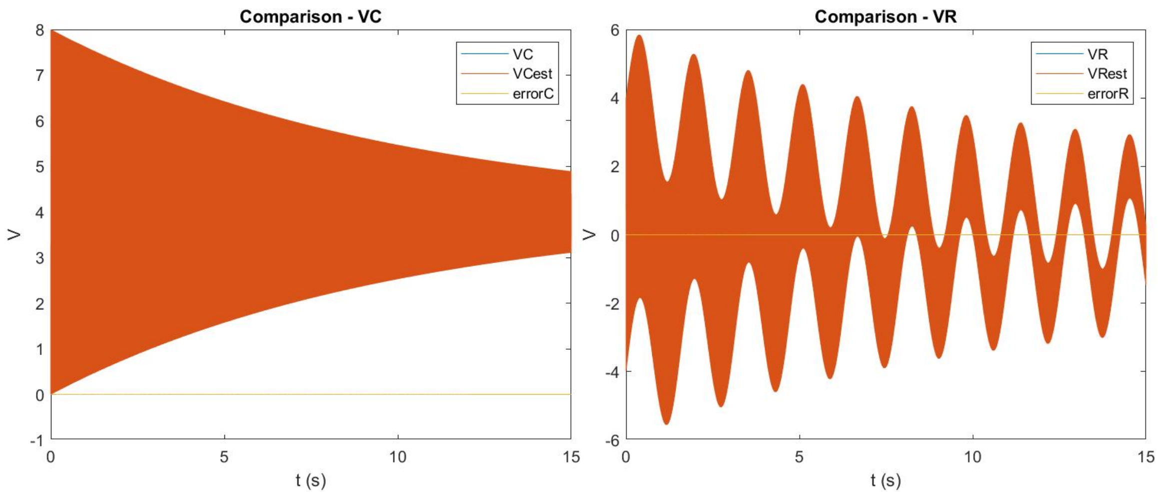
Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις των τάσεων, καθώς και των αντίστοιχων σφαλμάτων φαίνονται στα επόμενα διαγράμματα.




Παρατίθενται, επιπλέον, για χρονική διάρκεια 15s οι ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:






Παρατηρούμε από τα διαγράμματα ότι τα σφάλματα των εκτιμήσεων τείνουν στο 0 και οι δύο γραφικές παραστάσεις πρακτικά ταυτίζονται.

Αποτελέσματα εκτίμησης παραμέτρων:
Το ϑο που βρίσκουμε με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ισούται με το ϑλ. Επομένως, για να βρούμε το $\vartheta^*$ έχουμε:

$$\theta_0 = \theta_\lambda^{*T} = \left[\frac{1}{RC} - \lambda_1 \quad \frac{1}{LC} - \lambda_2 \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC}\right]$$

και

$$\theta^{*T} = \left[\frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC}\right] = [0.1997 \quad 10^6 \quad 0.2 \quad -5.1910^{-6} - 2.7810^{-4} \quad 10^6]$$

Δηλαδή,

$$\frac{1}{RC} = 0.2$$
$$\frac{1}{LC} = 10^6$$

Σχετικά με την εύρεση των πόλων
Η επιλογή έγινε με τη μέθοδο δοκιμή και σφάλμα. Η καταλληλότητα των πόλων του φίλτρου στηρίζονταν στο αν το διάνυσμα $\vartheta^*$ που βρίσκαμε σαν αποτέλεσμα είχε παρόμοιες τιμές στις θέσεις (1, 3, 5), (2, 6) και τιμή κοντά στο 0 στη θέση 4.

Οι ρίζες του Λ(s) που επιλέχθηκαν είναι:

$$p_1 = 17 \quad \kappa\alpha\iota \quad p_2 = 17$$

Παρατήρηση: Για πολλούς συνδυασμούς των πόλων η τιμή του στοιχείου 5 ήταν κοντά στο 0 και όχι στο 1/RC. Αυτό οφείλεται στο γεγονός οτι η δεύτερη είσοδος στο σύστημα είχε μηδενική παράγωγο, διότι ήταν DC τάση 4V.

$$\dot{u}_2 = 0$$

Οπότε, η τιμή για τη παράμετρο 1/RC επιλέχθηκε από τις τιμές των θέσεων 1 και 3.

## 2.2 Ερώτημα β

Θεωρούμε ότι οι μετρήσεις VR και VC λαμβάνονται εσφαλμένα, προσθέτοντας στα σήματα σε 3 χρονικές στιγμές αριθμούς μεγαλύτερης τάξης μεγέθους από τις κανονικές τιμές τους. Το σφάλμα αυτό στις μετρήσεις έχει ως αποτέλεσμα την λανθασμένη εκτίμηση των παραμέτρων με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και μάλιστα με μεγάλη απόκλιση.
Αυτό συμβαίνει, καθώς οι ακραίες τιμές που προκαλούνται ωθούν τον αλγόριθμο στην εύρεση διαφορετικού σημείου ελαχίστου. Για να αποφευχθεί αυτό θα πρέπει οι ακραίες τιμές να αντιμετωπιστούν εφόσον υποθέτουμε ότι είναι λανθασμένες. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να πραγματοποιήσουμε κάποιου είδους κανονικοποίηση λαμβάνοντας υπόψην τιμές γειτονικών σημείων.
Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις παρουσία θορύβου είναι: