Εργασία στην Δειγματοληψία
Μαζαράκης Ηλίας
3112017123
Επι-ΠΤΥΧΙΟ
Μαθηματικό

ΘΕΜΑ 1

α) ΜΕΘΟΔΟΣ 1

$$\tilde{x}_{ΜΑΙΟΥ} = \frac{5,82+5,33+5,76+5,89+5,68+5,55+5,69+5,81}{10}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_{ΜΑΙΟΥ} = 5,771$$

$$\tilde{x}_{ΙΟΥΝΗ} = \frac{5,89+5,34+5,92+6,05+6,20+6,00+5,79+5,63+5,78+5,84}{10}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_{ΙΟΥΝΗ} = 5,844$$

$$\Delta\tilde{x} = x_M - x_I = 5,844 - 5,771 = 0,073.$$

Διακύμανση Μαΐου.

$$S_M^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_{i(M)} - \tilde{x}_M)^2}{n-1}$$

Έχουμε:

$(5,82-5,771)^2 = 0,002401$

$(5,33-5,771)^2 = 0,194481$

$(5,76-5,771)^2 = 0,000121$

$(5,98-5,771)^2 = 0,043641$

$(6,20-5,771)^2 = 0,184041$

$(5,89-5,771)^2 = 0,014241$

$(5,68-5,771)^2 = 0,008281$

$(5,55-5,771)^2 = 0,048841$

$(5,69-5,771)^2 = 0,006561$

$(5,81-5,771)^2 = 0,001521$

$\Sigma(\hat{x}_{i(M)} - \tilde{x}_M)^2 = 0,50413$

Άρα $S^2_M = \frac{0,50413}{9} = 0,056015$

Διακύμανση Ιούνη $\quad S^2_{IOYN} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (\tilde{x}_{i,I} - \tilde{x}_{IOYN.})^2}{n-1}$

$(5,89 - 5,844)^2 = 0,002116$
$(5,34 - 5,844)^2 = 0,255025$
$(5,92 - 5,844)^2 = 0,005776$
$(6,05 - 5,844)^2 = 0,042564$
$(6,20 - 5,844)^2 = 0,126736$
$(6 - 5,844)^2 = 0,024336$
$(5,79 - 5,844)^2 = 0,002916$
$(5,63 - 5,844)^2 = 0,045856$
$(5,78 - 5,844)^2 = 0,004096$

$\Sigma(x_{i,I} - \tilde{x}_I)^2 = 0,509456.$

$S^2_I = \frac{0,509456}{9} = 0,056606$

Επομένως η τυπική απόκλιση διαφοράς των μέσων τιμών αν επιλέξω $n<10$ το 5 για τον Μάιο και $n=100$ για τον Ιούνη.

$S_{\Delta X} = \sqrt{\frac{0,056015}{5} + \frac{0,056606}{100}} = \sqrt{0,011203 + 0,00056606}$

$= 0,1085$

$df = \min(4, 99) = 4$

Για 4 βαθμούς ελευθερίας και 95% επίπεδο εμπιστοσύνης το $t \simeq 2{,}776$.

Το διάστημα της εμπιστοσύνης που ψάχνουμε για την διαφορά των μέσων τιμών δίνεται από: $\Delta\tilde{x} \pm t \cdot S_{\Delta\tilde{x}} = 0{,}073 \pm 2.776 \cdot 0{,}1085$

$= 0{,}073 \pm 0{,}301$

$\Rightarrow [-0{,}228, 0{,}374]$.

Μεθοδος 2

Έχουμε εξαρτημένα δείγματα.

$d_1 = 5{,}89 - 5{,}82 = 0{,}07$

$d_2 = 5{,}34 - 5{,}33 = 0{,}01$

$d_3 = 5{,}92 - 5{,}76 = 0{,}16$

$d_4 = 6{,}05 - 5{,}98 = 0{,}07$

$d_5 = 6{,}20 - 6{,}20 = 0$

$d_6 = 6 - 5{,}89 = 0{,}11$

$d_7 = 5{,}79 - 5{,}68 = 0{,}11$

$d_8 = 5{,}63 - 5{,}55 = 0{,}08$

$d_9 = 5{,}78 - 5{,}69 = 0{,}09$

$d_{10} = 5{,}84 - 5{,}81 = 0{,}03$

$\tilde{d} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{10} = 0{,}073$ (Μέση διαφορά)

$$S^2 d = \frac{\sum_{i=1}^{10} (d_i - \bar{d})^2}{n-1}$$

έχουμε
$$(0{,}07 - 0{,}073)^2 = 0{,}000009$$
$$(0{,}01 - 0{,}073)^2 = 0{,}003969$$
$$(0{,}16 - 0{,}073)^2 = 0{,}007569$$
$$(0{,}07 - 0{,}073)^2 = 0{,}0009$$
$$(0 - 0{,}073)^2 = 0{,}005329$$
$$(0{,}11 - 0{,}073)^2 = 0{,}001369$$
$$(0{,}11 - 0{,}073)^2 = 0{,}001369$$
$$(0{,}08 - 0{,}073)^2 = 0{,}000049$$
$$(0{,}09 - 0{,}073)^2 = 0{,}000289$$
$$(0{,}03 - 0{,}073)^2 = 0{,}001849$$

Άρα $\Sigma (d_i - \bar{d})^2 = 0{,}021971$

$$S^2 d = 0{,}021971 / 9 = 0{,}002441.$$

Για 9 βαθμούς ελευθερίας ~~και~~ 95% επίπεδο εμπιστοσύνης το $t \simeq 2{,}262$.

$$\bar{d} \pm t \cdot S\bar{d} = (1)$$

$$S\bar{d} = \sqrt{\frac{S^2 d}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}002441}{10}} = 0{,}0156.$$ (Τυπική αποκλ. της μέσης διαφοράς)

$(1) \Rightarrow 0{,}073 \pm 2{,}262 \cdot 0{,}0156$

$\Rightarrow 0{,}073 \pm 0{,}0353$

$\Rightarrow [0{,}0377, 0{,}1083]$. (διάστημα εμπιστοσύνης)

Συγκρίνοντας τις 2 μεθόδους εύκολα συμπεραίνουμε πως η δεύτερη είναι πιο ακριβής καθώς το διάστημα της είναι μικρότερο της 1ης.

B) $\bar{x}_{M,I} = \dfrac{\bar{x}_M + \tilde{x}_I}{2} = \dfrac{5,771+5,844}{2} = 5,8075.$

5

ΘΕΜΑ 2

p_1: ποσοστό ψηφ. 1

p_2: ποσοστό ψηφ 2.

$d = p_1 - p_2$: η διαφορά στα ποσοστά.

$\hat{d} = \hat{p_1} - \hat{p_2}$: η διαφοορα δειγματικών ποσοστών.

$\sigma\hat{d} = \sqrt{\frac{\hat{p_1}(1-\hat{p_1})}{n} + \frac{\hat{p_2}(1-\hat{p_2})}{n}}$: Τυπική απόκλιση Διαφοράς.

$\hat{d} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma\hat{d}$ $\quad (z_{\alpha/2} = 1,96)$.

Για να προβλέψουμε με 95% τον νικητή, η διαφορά των ποσοστών d πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την $1,96 \cdot \sigma\hat{d}$

$\Delta = 1.96 \cdot \sigma\hat{d}$

Υποθέτω $\hat{p_1} = \hat{p_2} = 0,5$.

Έχουμε $\sigma\hat{d} = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n} + \frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = \sqrt{\frac{0,5}{n}} = \frac{0,707}{\sqrt{n}}$.

Άρα $\Delta = 1,96 \cdot \frac{0,707}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 0,707}{\sqrt{n}} = \frac{1,386}{\sqrt{n}}$ Η αναγκαία διαφορά.

Για $n < 100$ έστω $n = 81$.

$\Delta = \frac{1,386}{\sqrt{81}} = \frac{1,386}{9} = 0,154$

δηλαδή 15,4%