



Réplication d'options digitales à l'aide d'un portefeuille d'options vanilles

Executive Summary

GROUPE 30

Réalisé par :

MAAROUFI Ilias
ABOUELAZ Youssef
BOUDHAS Aya
FAQHAOUI Hiba
RGUIEG Aymen

Encadré par :

M. SIBARI Anass
ELAAMMARI Mouad
BENSALAH Abderazake

1 Contexte et opportunité de marché

1.1 Contexte : Le monde du trading et les options

Le trading est un pilier central des marchés financiers, jouant un rôle clé dans la gestion des risques et la spéculation. Les produits dérivés, tels que les options, occupent une place particulière en raison de leur flexibilité et de leur capacité à répondre à des besoins variés. Dans un environnement de marchés de plus en plus complexe et volatile, les options permettent :

- De gérer les risques : Les entreprises et les investisseurs utilisent les options pour se protéger contre les fluctuations imprévues des prix.
- D'améliorer les rendements : Grâce à leur structure flexible, les options permettent de tirer parti des variations des marchés financiers sans avoir à posséder l'actif sous-jacent.
- D'innover dans les stratégies financières : Avec l'évolution des outils technologiques, les acteurs du trading utilisent les options pour construire des portefeuilles complexes et personnalisés.

Cependant, dans cette industrie en constante évolution, la conception et la valorisation de certains produits complexes, comme les options digitales, restent un défi. D'où l'intérêt de les simplifier ou de les répliquer à l'aide d'options classiques (vanilles).

1.2 État actuel de l'industrie et principaux défis:

Les marchés financiers sont de plus en plus sophistiqués, avec une demande croissante pour des produits dérivés permettant à la fois de se couvrir contre les risques et de spéculer. Les options digitales occupent une place particulière grâce à leur simplicité apparente et leur payoff prédéterminé (type "cash-or-nothing"). Cependant, ces options sont difficiles à trader directement en raison :

- leur faible liquidité ;
- la discontinuité de leur payoff, qui complique leur pricing et leur utilisation efficace.

1.3 Tendances qui créent une opportunité d'innovation:

- Technologie financière : L'essor des fintechs et des outils numériques facilite le développement de solutions innovantes, accessibles et performantes pour modéliser des instruments financiers complexes.
- Éducation quantitative : Les écoles et formations en ingénierie quantitative, comme celles proposées par des institutions comme la vôtre, poussent à l'innovation dans les approches analytiques et pratiques.
- Régulations croissantes : Les cadres réglementaires sur les marchés financiers encouragent l'utilisation d'approches transparentes, standardisées et économiquement viables.

1.4 Taille du marché et perspectives de croissance:

Le marché mondial des produits dérivés est colossal, représentant plusieurs milliers de milliards de dollars en termes de volume. L'utilisation d'options vanilles pour répliquer des options digitales offre une opportunité unique pour :

- réduire les coûts liés aux produits exotiques ;
- démocratiser l'accès à des outils d'investissement sophistiqués.

1.5 Parties prenantes et bénéficiaires du projet:

- Institutions financières : réduction des coûts et de la complexification des stratégies de couverture en utilisant des portefeuilles d'options vanilles
- Étudiants et professionnels en formation: Compréhension approfondie des dérivés exotiques à travers des outils pédagogiques.
- Fournisseurs de logiciels financiers : Opportunité de concevoir des outils pratiques pour la réplication et l'analyse.

2 Préliminaire sur les options et leurs types

2.1 Qu'est-ce qu'une Option ?

Une option est un contrat financier qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix fixé (strike) avant ou à une date donnée (maturité). En contrepartie de ce droit, l'acheteur paie une prime au vendeur.

2.2 Les principaux types d'options:

2.2.1 Options Vanilles (Classiques):

Les options vanilles, ou classiques, sont les plus simples et les plus courants; ils offrent des moyens très flexibles pour couvrir ou spéculer. La perte maximale est la prime.

- Call (Option d'achat) : Le droit d'acheter un actif au prix d'exercice.
- Put (Option de vente) : Le droit de vendre un actif au prix d'exercice.
- Caractéristiques : Ces options sont simples, liquides et très utilisées pour des stratégies de couverture ou de spéculation.

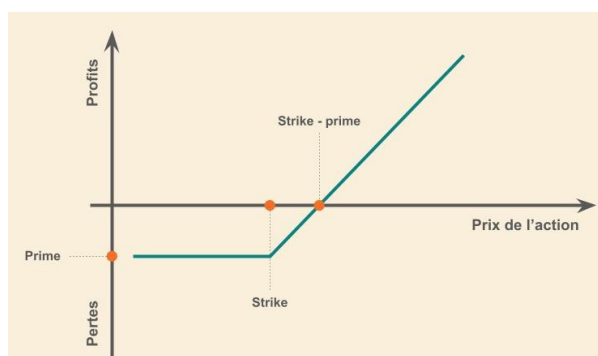


Figure 1: Illustration des payoff des options vanilles (call et put).

2.2.2 Options Digitales :

Les options digitales s'agit de produits dérivés plus formellement connus sous le nom d'options cash-or-nothing. Elles impliquent un paiement fixe si une condition spécifique est remplie.

- **Payoff** : Contrairement aux options classiques, le payoff d'une option digitale est binaire : Si la condition est remplie (par exemple, le prix du sous-jacent dépasse le strike), l'option paie un montant fixe prédéfini. Sinon, l'option n'a aucune valeur.
- **Utilité** : Ces options sont particulièrement utiles pour les traders cherchant des stratégies directionnelles simples.

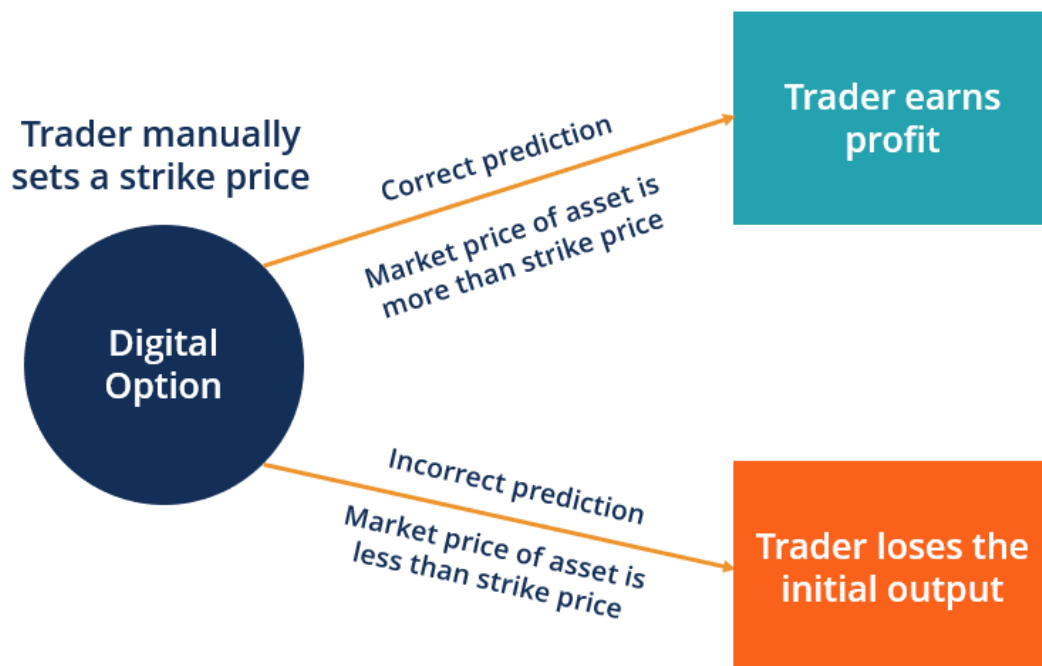


Figure 2: schéma explicatif de l'option digitale

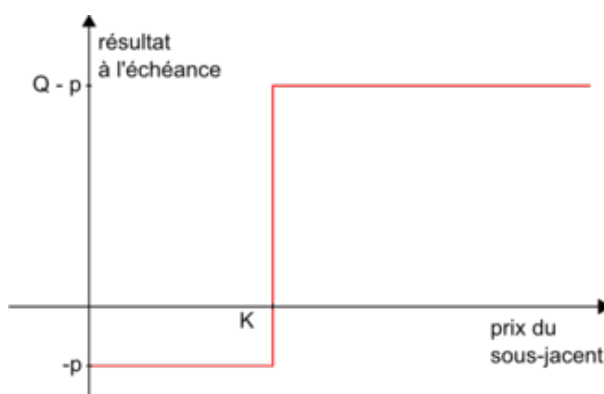


Figure 3: Illustration des payoff des options vanilles digitale.

3 Énoncé du problème

3.1 Principaux problèmes rencontrés par le public cible ou l'industrie:

- Complexité et accessibilité : Les options digitales, bien qu'efficaces pour certains usages comme les stratégies de couverture précises, restent difficiles à modéliser et à trader directement en raison de leur payoff discontinu.
- Coût élevé : les modèles actuels de pricing pour ces options créent une charge de calcul et de données importante, les réservant en tant que produit uniquement disponible pour certaines structures.
- Manque d'alternatives éducatives : Il n'existe presque pas d'approches simplifiées pour que les étudiants et les jeunes analystes aient une compréhension plus précise des mécanismes des options exotiques.

3.2 Conséquences de ne pas résoudre ces problèmes:

- Pour les institutions financières : Les coûts opérationnels augmentent et restreignent leur compétitivité.
- Pour les étudiants et professionnels : Une opportunité manquée d'acquérir des compétences pratiques essentielles dans un secteur en forte demande.
- Pour le marché global : Une inefficacité persistante qui freine l'innovation et l'optimisation des stratégies de couverture.

3.3 Évolution et persistance du problème:

La globalisation des marchés financiers, associée à des périodes de forte volatilité (crises économiques, pandémies, etc.), a amplifié ces défis.

- Les méthodes traditionnelles de tarification ne suffisent plus face à la rapidité des fluctuations du marché.
- Le manque d'initiatives éducatives sur le terrain crée une barrière entre les ingénieurs financiers expérimentés et les novices.

3.4 Problématique:

Compte tenu des défis complexes et interdépendants de la complexité, de l'accessibilité et des coûts associés aux outils digitaux, ainsi qu'en tenant compte des tendances modernes du marché des dérivés, la question de recherche suivante peut être proposée :

Comment peut-on répliquer le payoff d'une option digitale "cash-or-nothing" en utilisant un portefeuille d'options vanille ?

4 Solution proposée

Nous proposons une approche novatrice de la **réplication dynamique** basée sur la manière de réagir aux fluctuations du coût de l'actif dans le marché. Le concept est enraciné dans un ensemble de principes rigoureux ayant pour but d'optimiser la précision de la réplication tout en réduisant l'erreur de la solution.

4.1 Description de la solution

Notre approche repose sur deux fonctionnalités clés :

1. **Prédiction précise du prix de l'actif sous-jacent** Grâce à des modèles avancés, notre solution anticipe avec précision les fluctuations du prix de l'actif sous-jacent, ce qui permet d'ajuster dynamiquement la stratégie de réplication.
2. **Création d'un portefeuille qui imite le payoff de l'option digitale** Notre solution détermine les combinaisons optimales de calls disponibles sur le marché pour reproduire le payoff souhaité. En entrant le payoff cible, notre algorithme identifie automatiquement les positions nécessaires pour une réplication efficace.

4.2 Processus et méthodologie

Le principe de la réplication dynamique consiste à ajuster en temps réel les composantes du portefeuille en fonction des variations de l'actif sous-jacent. Cette méthode utilise des modèles analytiques et numériques pour identifier les facteurs qui influencent la précision de la réplication et réduire les erreurs. Des analyses approfondies des erreurs de réplication ont été réalisées pour identifier les paramètres critiques et améliorer continuellement la stratégie. Notre solution repose sur une approche en trois étapes clés:

Étape 1: Construction du modèle de prédiction Dans cette étape, nous avons développé un modèle basé sur un réseau de neurones **LSTM** pour prédire les prix futurs de l'actif sous-jacent. Ce modèle exploite les dépendances temporelles présentes dans les données financières.

Étapes principales

1. Prétraitement :

- Normalisation des données dans l'intervalle $[0, 1]$ à l'aide d'un *MinMaxScaler*.
- Construction de séquences glissantes sur 60 pas de temps pour capturer les tendances historiques.

2. Architecture du modèle :

- Deux couches LSTM, chacune composée de 50 unités, pour capter les dépendances temporelles.
- Une couche dense (*Dense*) pour générer une prédiction univariée.
- Fonction de perte : *Mean Squared Error (MSE)*. Optimiseur : *Adam*.

3. Résultats :

- Les prédictions susmentionnées ont été effectuées sur les données de validation, et un bon ajustement avec les données réelles a été trouvé.
- Les prix prédites ont ensuite été ajoutés en tant que colonne *Predictions* dans notre jeu de données pour les mentions et les prochaines étapes.

Visualisation des métriques

Une analyse détaillée des performances du modèle peut être effectuée en utilisant des métriques comme l'erreur quadratique moyenne (MSE), le coefficient de corrélation (R^2) et d'autres indicateurs. La figure ci-dessous montre une comparaison des métriques du modèle sur les données de validation.

```
Mean Absolute Error (MAE): 3.79
Mean Squared Error (MSE): 36.05
Root Mean Squared Error (RMSE): 6.00
R-squared (R²): 1.00
```

Figure 4: Comparaison des métriques du modèle LSTM sur les données de validation.

Etape 2: Construction du marché des options La deuxième étape de notre approche consiste à créer un marché fictif d'options basé sur les prix prévus de l'actif sous-jacent. Ce marché comprend des options d'achat (*calls*) et des options de vente (*puts*), dont les prix sont déterminés à l'aide du modèle de Black-Scholes. Ce modèle est largement reconnu pour son efficacité dans l'évaluation des produits dérivés, grâce à sa simplicité et à ses fondements mathématiques robustes.

Formulation mathématique du modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes permet de calculer le prix des options en fonction des paramètres suivants :

- S : Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- K : Prix d'exercice (*strike price*) de l'option.
- T : Temps jusqu'à l'échéance de l'option (en années).
- r : Taux d'intérêt sans risque.
- σ : Volatilité implicite de l'actif sous-jacent.

Les formules pour le prix d'une option d'achat (*call*) et d'une option de vente (*put*) sont données par :

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2),$$

$$P = K \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1),$$

où $N(x)$ représente la fonction de répartition de la loi normale cumulée. Les termes d_1 et d_2 sont définis comme suit :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Calcul des sensibilités (Delta)

La sensibilité du prix de l'option par rapport au prix de l'actif sous-jacent est mesurée par le *delta*, défini comme suit :

$$\Delta_{\text{call}} = N(d_1), \quad \Delta_{\text{put}} = N(d_1) - 1.$$

Construction du marché

Nous avons généré un marché fictif d'options comportant des prix d'exercice aléatoires dans l'intervalle $[80, 150]$. Les prix des options sont calculés à l'aide des formules ci-dessus. Le marché est organisé sous forme de dictionnaire avec deux catégories :

- **Calls** : Options d'achat avec leurs prix respectifs.
- **Puts** : Options de vente avec leurs prix respectifs.

Étape 3 : L'innovation dans la réplication dynamique Notre troisième étape repose sur une forme d'innovation quant à la réplication dynamique, où nous essayons de construire un portefeuille qui reflète le rendement d'une option digitale. Contrairement à la réplication statique, nous utilisons les prévisions du modèle LSTM pour balancer les options d'achat ou de vente dans notre portefeuille. De plus, nous changeons les poids des calls dynamiquement en suivant la prévision faite pour le prix de l'actif.

Principe de la réplication dynamique

L'objectif principal de la réplication dynamique est de créer un portefeuille d'options vanilles (*calls*) qui reproduit un payoff cible, en l'occurrence celui d'une option digitale. La réplication se fait en ajustant les poids des options dans le portefeuille à chaque instant, en fonction des fluctuations de prix de l'actif sous-jacent.

Problème d'optimisation

Pour minimiser l'écart entre le rendement du portefeuille et le rendement cible, nous avons élaboré un problème d'optimisation visant à déterminer le nombre optimal d'options (n_{calls}) et leurs prix d'exercice (K_i) afin d'obtenir un portefeuille performant. La fonction de coût est définie comme suit :

$$\text{Coût} = |V_{\text{final}} - P_{\text{cible}}|,$$

où :

- V_{final} est la valeur du portefeuille à maturité.
- P_{cible} est le payoff cible, ici fixé à 500.

Les prédictions du modèle LSTM (S_t) sont utilisées pour ajuster dynamiquement les poids des options dans le portefeuille à chaque pas de temps (t), en résolvant :

$$W_{t+1,i} = W_{t,i} + \Delta_t \cdot \Delta_{\text{call},i},$$

où Δ_t est l'ajustement nécessaire pour rapprocher le portefeuille du payoff cible, et $W_{t,i}$ représente le poids de l'option i au temps t .

Résultats et visualisation

Nous avons testé différentes combinaisons d'options pour minimiser la fonction de coût. Le nombre optimal d'options et leurs prix d'exercice ont été déterminés, et le portefeuille construit atteint efficacement le payoff cible.

Valeur cible du payoff de l'option digitale : 500
Payoff final du portefeuille de réplication : 495.3179607193633

Figure 5: Chemin des prix de l'actif sous-jacent avec prédictions et ajustement dynamique du portefeuille.

Étape 4(Bonus): Ajout d'un terme de régularisation de risque Dans le cadre de la réplication dynamique, l'objectif de la réplication dynamique est, enfin, de minimiser la différence entre la cible de payoff et la valeur du portefeuille à la fin de la période déterminée. Néanmoins, le dernier point de vue ignore la possibilité que la valeur du portefeuille puisse fluctuer pendant la période de réplication. Par conséquent, ils peuvent amener davantage de risque pour la stratégie, ce qui est particulièrement gênant pour les investisseurs qui souhaitent réduire leur exposition générale au risque.

Formulation de la fonction de coût avec risque

Pour résoudre ce problème, nous avons modifié la fonction de coût afin d'y inclure un terme de risque mesuré par la variance de la valeur du portefeuille sur toute la période de réplication. La nouvelle fonction de coût est donnée par :

$$\text{Coût} = |V_{\text{final}} - P_{\text{cible}}| + \lambda_{\text{risque}} \cdot \text{Var}(V),$$

où :

- V_{final} est la valeur du portefeuille à la maturité.
- P_{cible} est le payoff cible (ici fixé à 500).
- $\text{Var}(V)$ représente la variance des valeurs du portefeuille durant la période de réplication.
- λ_{risque} est un coefficient de pondération ajustable permettant de contrôler l'importance du risque par rapport à l'écart au payoff cible.

Motivations pour l'ajout du terme de risque

L'inclusion du terme de risque répond à plusieurs préoccupations essentielles :

1. **Stabilité du Portefeuille :** Minimiser la variance diminue la volatilité des valeurs intermédiaires du portefeuille, offrant ainsi une plus grande stabilité durant la période de réplication.
2. **Gestion de l'Exposition :** Une variance élevée peut signifier une exposition excessive aux fluctuations du marché, ce qui pourrait entraîner des pertes significatives en cas de conditions extrêmes.
3. **Réalisme Pratique :** Dans les environnements financiers réels, les investisseurs et les institutions cherchent à trouver un équilibre entre rendement et risque. Cette formulation de la fonction de coût reflète mieux ces considérations.

Résultats de l'optimisation avec risque

En testant différentes combinaisons d'options, nous avons identifié un portefeuille optimal qui minimise la nouvelle fonction de coût. Les principaux résultats incluent :

- Une réduction significative de la variance du portefeuille, garantissant une meilleure stabilité.
- Un écart minimal par rapport au payoff cible, confirmant l'efficacité de la stratégie.
- Une sélection optimisée des options vanilles (*calls*) en termes de nombre et de prix d'exercice (*strikes*).

Visualisation des effets du terme de risque

La figure ci-dessous illustre une comparaison de la valeur cible avec la nouvelle valeur du portefeuille de réplication.

Valeur cible du payoff de l'option digitale : 500
Payoff final du portefeuille de réplication : 351.0504626156535

Figure 6: Évolution de la valeur du portefeuille avec gestion du risque .

4.3 Avantages

- **Optimisation des coûts** : La réplication aide à diminuer les dépenses liées à l'utilisation directe des options digitales.
- **Flexibilité des stratégies** : En utilisant des options vanilles, les desks financiers peuvent créer des portefeuilles plus adaptés aux fluctuations du marché.
- **Approche pédagogique et pratique** : La solution offre un cadre à la fois théorique et pratique pour former les analystes financiers à des stratégies complexes mais réalisables.
- **Analyse quantitative poussée** : La mesure précise des erreurs de réplication et des effets des variables de marché renforce la solidité des résultats.

4.4 Objectifs à long terme

Les aspirations à long terme visent à faire de cette solution une référence sur les marchés financiers, en intégrant des évolutions technologiques et en maximisant l'impact pour toutes les parties prenantes :

1. **Adoption généralisée de la solution** : Établir notre stratégie comme un standard de référence dans les marchés financiers globaux.
2. **Expansion fonctionnelle** : Intégrer des options financières supplémentaires (par exemple, des options exotiques) pour élargir le champ d'application de la solution.
3. **Amélioration continue via l'intelligence artificielle (IA)** : Incorporer des modèles d'IA et de machine learning pour optimiser en permanence la précision et l'efficacité des prédictions.
4. **Impact ESG et durabilité** : Aligner la solution avec des pratiques responsables, en favorisant une transparence accrue et une efficacité énergétique des processus.

5 Innovation et durabilité

5.1 Aspects innovants du projet

Notre solution repose sur une approche révolutionnaire de **réplication dynamique**, intégrant des concepts mathématiques avancés et des technologies modernes pour transformer les stratégies de gestion des options digitales.

5.1.1 Réplication dynamique traditionnelle

La réplication dynamique classique repose sur des simulations stochastiques, notamment à l'aide de mouvements browniens pour modéliser les fluctuations des prix de l'actif sous-jacent. Cette méthode, bien que largement utilisée, présente des limitations :

- Elle repose sur des hypothèses idéalisées, telles que la distribution normale des rendements.
- Elle peut manquer de précision dans des contextes réels où les prix suivent des trajectoires plus complexes.

5.1.2 Notre approche basée sur le machine learning

Nous proposons une approche novatrice en utilisant le **machine learning** pour prédire le prix de l'actif sous-jacent avec une grande précision.

- **Simulation des chemins** : Grâce à un modèle d'apprentissage automatique, nous créons des trajectoires prédictives sur une période d'un an. Ces trajectoires reflètent les fluctuations réelles des prix en tenant compte des facteurs de marché dynamiques et des données historiques.
- **Utilisation dans la réplication dynamique** : Ces prédictions remplacent les modèles stochastiques classiques, permettant d'obtenir un chemin de prix plus réaliste et précis. Ainsi, les traders peuvent prendre des décisions éclairées (acheter ou vendre) en anticipant les variations de prix.
- **Création de portefeuille de réplication** : Une fois la prédiction du prix de l'actif sous-jacent établie, l'utilisateur indique la valeur cible qu'il souhaite atteindre pour le payoff de l'option. L'algorithme résout alors un problème d'optimisation pour déterminer la meilleure combinaison d'options disponibles sur le marché afin de répliquer ce payoff de manière optimale.
- **Réduction des erreurs** : En s'appuyant sur les trajectoires prédictives, la réplication dynamique est améliorée, ce qui réduit considérablement les erreurs associées. Nous identifions également les paramètres clés qui influencent ces erreurs et proposons des recommandations stratégiques pour les minimiser.

5.2 Bénéfices environnementaux, sociaux et économiques

- **Sociaux** : En rendant accessibles des outils de prédiction avancés, nous favorisons l'égalité des chances pour tous les traders, qu'il s'agisse de petites entreprises ou de grandes institutions.
- **Économiques** : Une précision améliorée et une gestion des erreurs optimisée aident les acteurs du marché à maximiser leurs rendements tout en minimisant les risques.

6 Business Model

6.1 Proposition de valeur

Notre solution de réplication dynamique, alimentée par le machine learning, permet aux traders et aux institutions financières de prédire avec précision les prix des actifs sous-jacents, d'optimiser leurs portefeuilles de réplication, et de réduire les erreurs de prédiction. Grâce à cette approche novatrice, nous transformons la gestion des options digitales et assurons un retour sur investissement optimal tout en améliorant la transparence et la confiance des marchés financiers.

6.2 Sources de revenus

Notre solution adopte un modèle économique basé sur des abonnements mensuels ou annuels, similaire à celui de Netflix, offrant une accessibilité et une flexibilité maximales :

- **Frais d'abonnement récurrents** Les utilisateurs paient un abonnement pour accéder à une plateforme centralisée qui propose des outils prédictifs avancés et des services de gestion de portefeuilles. Différents plans d'abonnement sont proposés en fonction des besoins et du profil des utilisateurs :
 - *Plan Basique* : Inclut des prédictions standards, des outils de simulation et des recommandations génériques.
 - *Plan Avancé* : Offre des fonctionnalités premium, telles que des prédictions enrichies, des analyses détaillées, et la création automatisée de portefeuilles optimisés.
- **Essai gratuit et fidélisation** Une période d'essai gratuite (par exemple, 14 ou 30 jours) est offerte pour inciter les utilisateurs à découvrir la valeur ajoutée de la solution avant de s'abonner.

7 Partenaires et Support

7.1 Partenaire stratégique : Société Générale

Société Générale joue un rôle central dans le succès de ce projet en tant que principal partenaire stratégique. Leur contribution se distingue par :

- **Proposition du sujet**
Société Générale a identifié et proposé ce sujet innovant, mettant en avant une problématique essentielle liée à la gestion des options digitales et à leur réplique dynamique.
- **Expertise et conseils**
 - Grâce à leur expertise approfondie dans le domaine financier, Société Générale a offert des orientations précieuses tout au long du projet.
 - Leurs recommandations ont permis de cibler les défis spécifiques rencontrés dans le cadre des options digitales, guidant ainsi le développement de la solution.
- **Collaboration et retours constructifs**
 - La collaboration active avec les experts de Société Générale a permis de valider les choix méthodologiques et les hypothèses de travail.
 - Les retours réguliers et constructifs ont favorisé une amélioration continue du projet, garantissant la pertinence des résultats.

8 Feuille de route future et prochaines étapes

La feuille de route du projet se compose de plusieurs étapes essentielles, comme le montre la figure ci-dessous. Ces étapes soulignent le développement immédiat, les améliorations continues et les futures expansions.



Figure 7: Plan d'action et feuille de route du projet

9 Références

- <https://finance-heros.fr/produit-derive/>
- <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/derivatives/digital-option/>
- <https://www.captaineconomics.fr/-comment-utiliser-les-options-binaires-pour-profiter-d-un-marche-a-la-baisse>
- <https://www.formation-en-trading.com/comprendre-le-marche-des-options-principes-de-base-et-strategies/>
- <https://devenir-trader.net/comprendre-le-marche-des-options-principes-et-strategies/>
- <http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/option/fr-fr/>