




Sûreté Aérienne 1

Ilias SAGHIR – Salaheddine ELKADIRI

Introduction

A large white airplane with a red tail is flying in a dark sky. A smaller airplane is visible in the lower left corner. The word "Introduction" is written in white text on the left side of the image.

- Sécurité aérienne et collisions
- Incertitudes et déviations sur la trajectoire
- Evènements rares

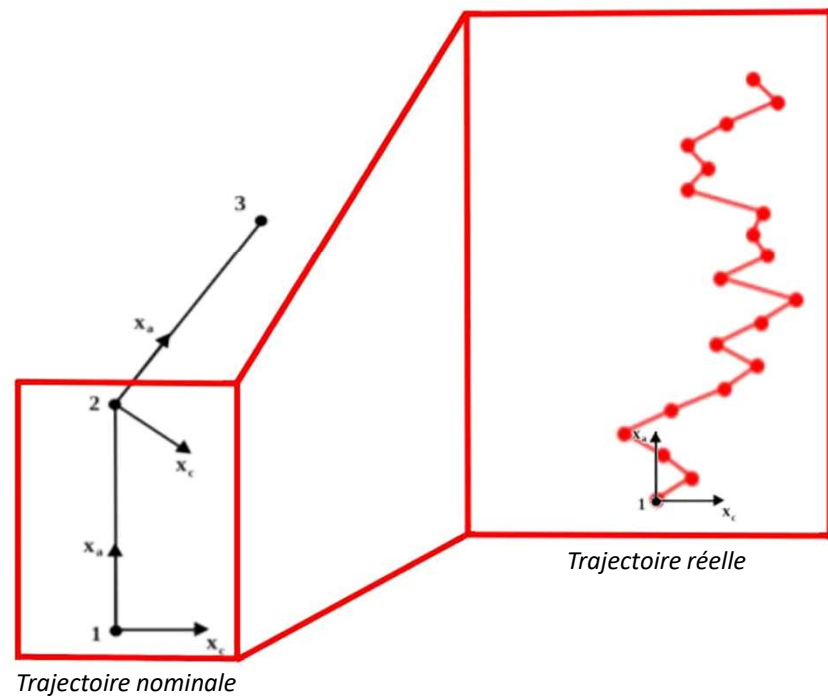
Objectifs

- Probabilité de conflit :
 - Trajectoires parallèles et croisées
 - Avec et sans incertitude *along-track*
- Distribution du temps de conflit
- Distribution de la position de conflit

Modèle

- R.A. Paielli and H. Erzberger (1997)
- Coordonnées along/cross-track
- Processus gaussiens : incertitudes
- Unités et valeurs d'usage
- Trajectoires discrétisées

$$\begin{aligned}x_{a,t} &= vt + M_{a,t}, & x_{c,t} &= M_{c,t}, \\K_a(t, s) &= \text{Cov}(M_{a,t}, M_{a,s}) = r_a^2 t^2, \\K_c(t, s) &= \text{Cov}(M_{c,t}, M_{c,s}) = \sigma_c^2 (1 - e^{-2\frac{r_c}{\sigma_c} vt}) e^{-\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}.\end{aligned}$$

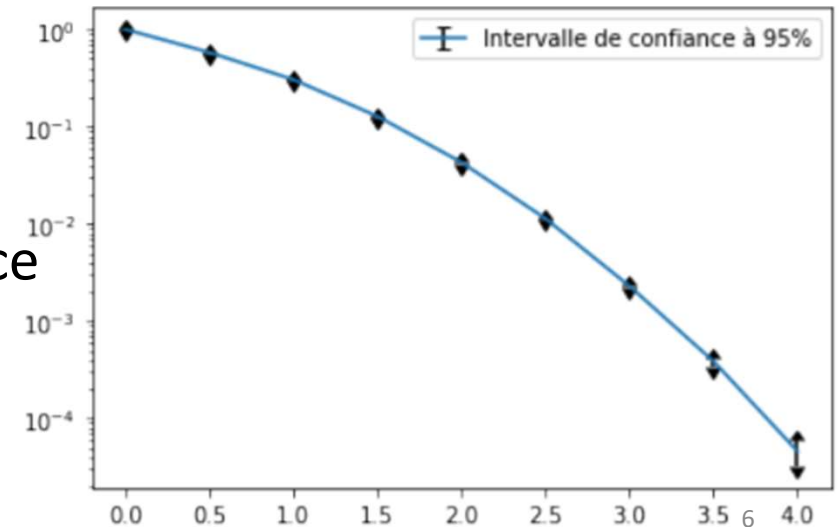
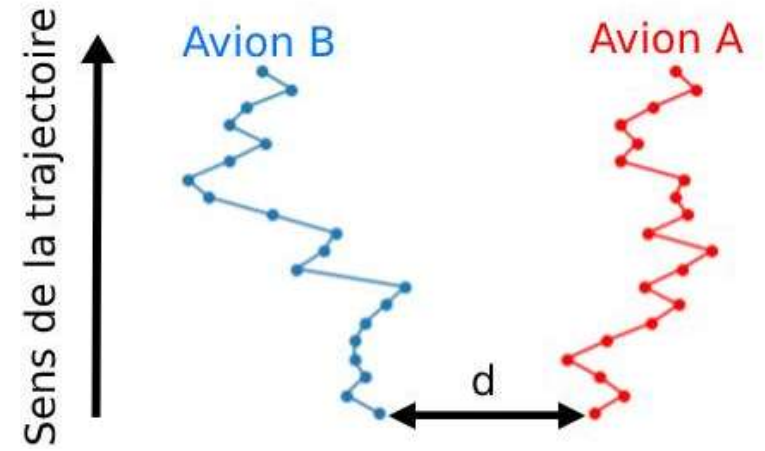


The background of the slide is dark gray with a series of concentric circles and a dashed line that spirals outwards from the center, creating a ripple effect.

▼ Probabilité de conflit

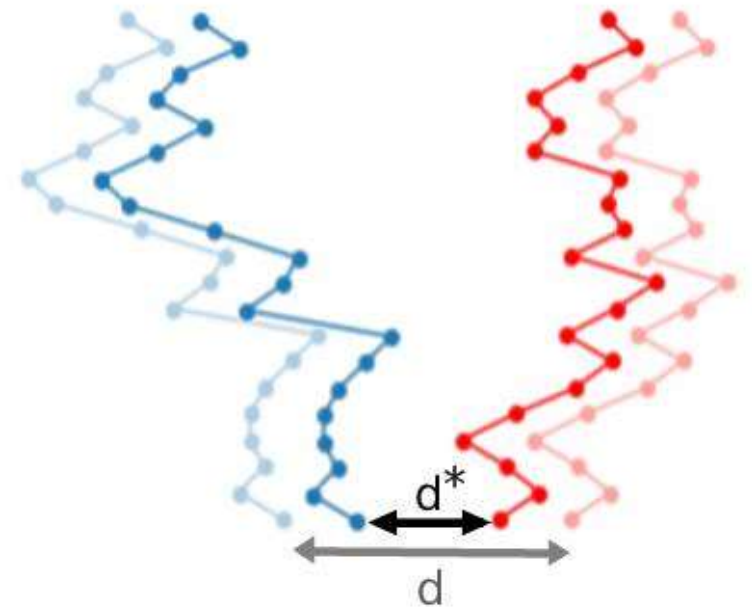
Probabilité de conflit

- Trajectoires parallèles, $r_a = 0$
- $\mathbb{P}(\text{Conflit}) = f(d)$
- Méthode : Monté-Carlo naïf
- Constat : Décroissance **rapide** avec la distance



Echantillonnage préférentiel : Moyenne

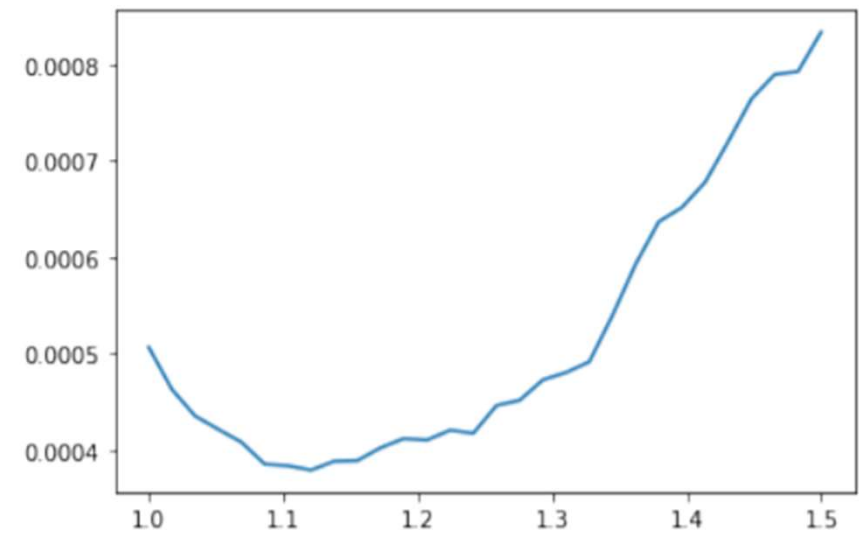
- Changement de probabilité : simulation sous une distance entre trajectoires plus réduite
- Décalage par la même quantité
- Distance plus petite : Probabilité plus élevée
- Monte-Carlo : $\mathbb{P}(A) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(Z^{(i)}) \frac{g(Z^{(i)})}{g^*(Z^{(i)})}$
- Choix de d^* de manière à minimiser la variance



Echantillonnage préférentiel : Variance

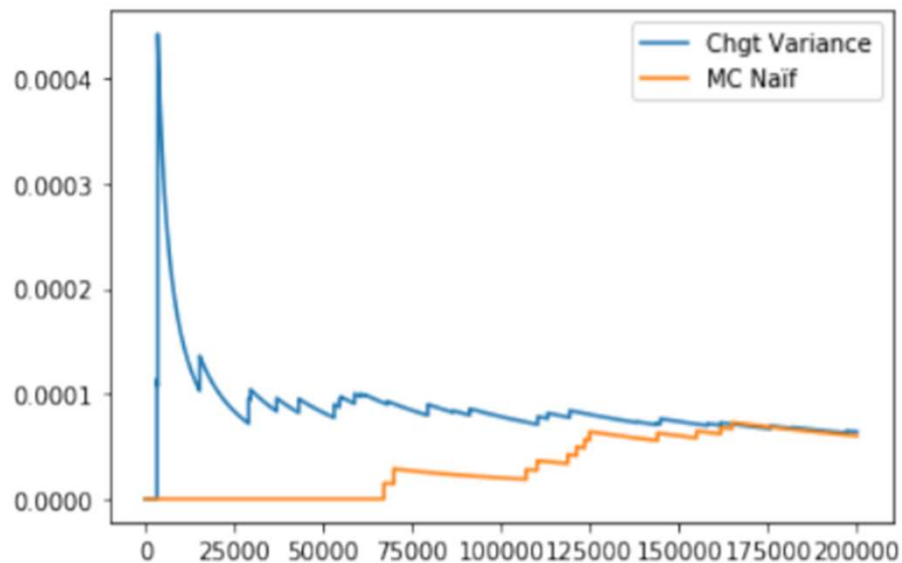
- Changement de probabilité : simulation sous un variance plus élevée
- Multiplication par la même quantité α
- Variance plus élevée : incertitude plus importante
- Choix de α de manière à minimiser la variance

$$\mathbb{C}ov_c \rightarrow \alpha \mathbb{C}ov_c$$



Courbe de variance en fonction de α

Résultats préliminaires



- Plus performant qu'un Monté-Carlo classique
- Mais **limité** :
 - Agir uniformément (\neq localement) entraîne une variance élevée
 - Potentiel d'amélioration de l'implémentation

Changement de moyenne adaptatif

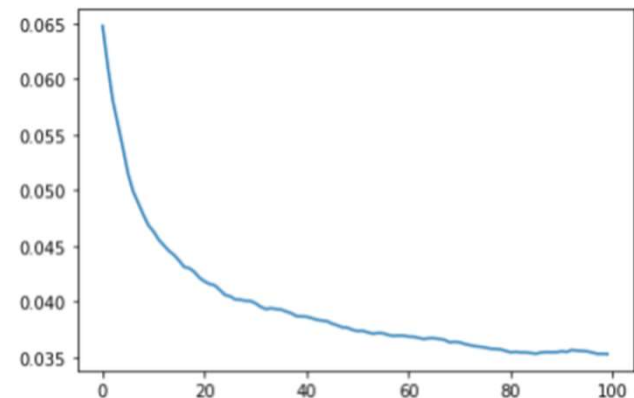
- Changement gaussien standard
- Estimation du changement optimal
- Algorithme de Lelong et Jourdain
- Implémentation effective pour $d \leq 3$
- Peu utile pour les distances plus grandes

$$\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E} \left[h(X + \theta) e^{-\langle \theta, X \rangle - \|\theta\|^2/2} \right]$$

$$G_n(\theta) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^2(X_k)(\theta - X_k) e^{-\langle \theta, X_k \rangle + \|\theta\|^2/2},$$

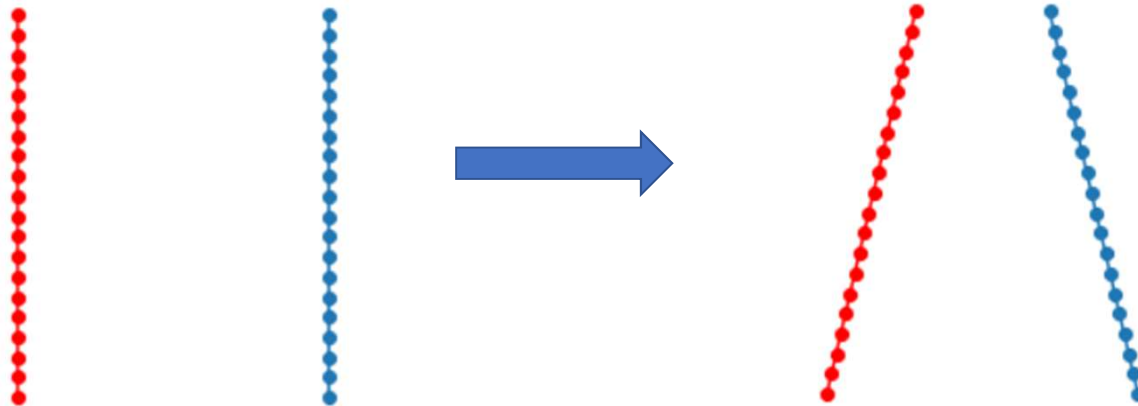
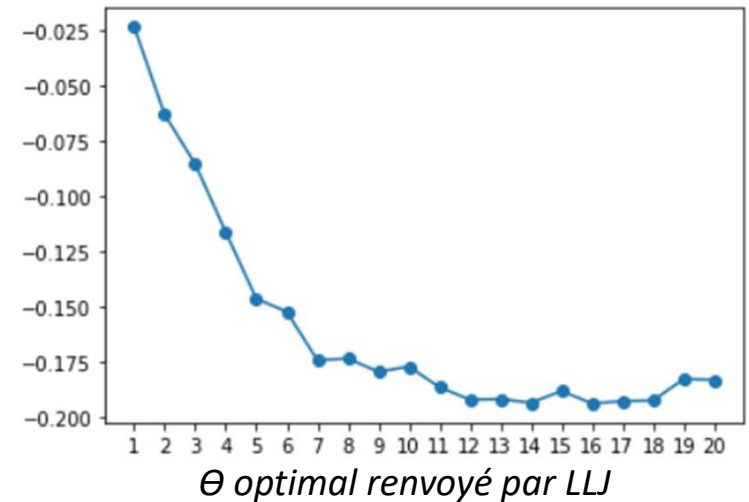
$$H_n(\theta) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^2(X_k) (I_d + (\theta - X_k)(\theta - X_k)') e^{-\langle \theta, X_k \rangle + \|\theta\|^2/2}$$

$$t_{k+1} = t_k - (H_n(t_k))^{-1} G_n(t_k)$$



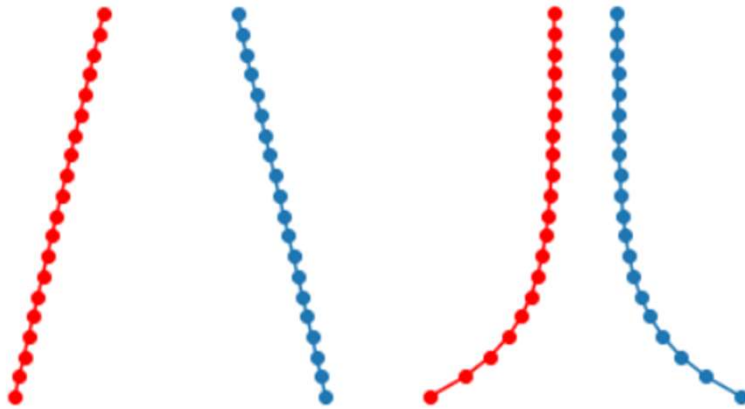
Changement de moyenne amélioré

- Constat de l'algorithme Lelong-Joudain :
- Changement plus accentué vers la fin de trajectoire
- Où les collisions sont plus probables ?

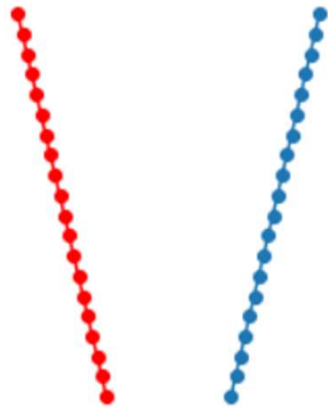


Changement de moyenne amélioré

- $r_a = 0$



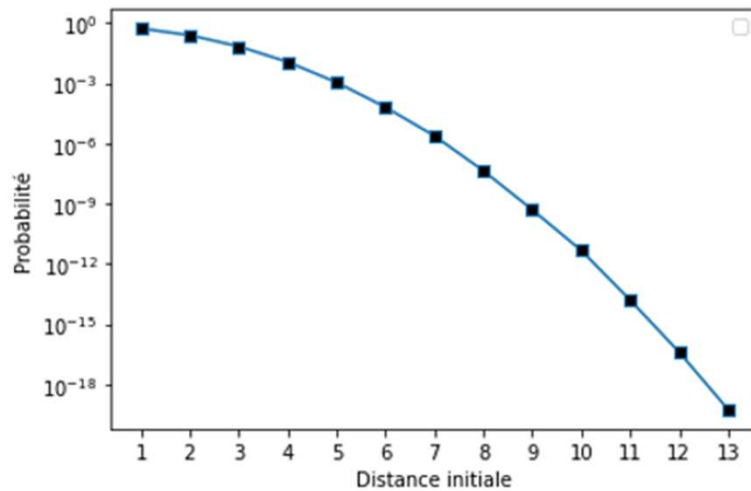
- $r_a \neq 0$



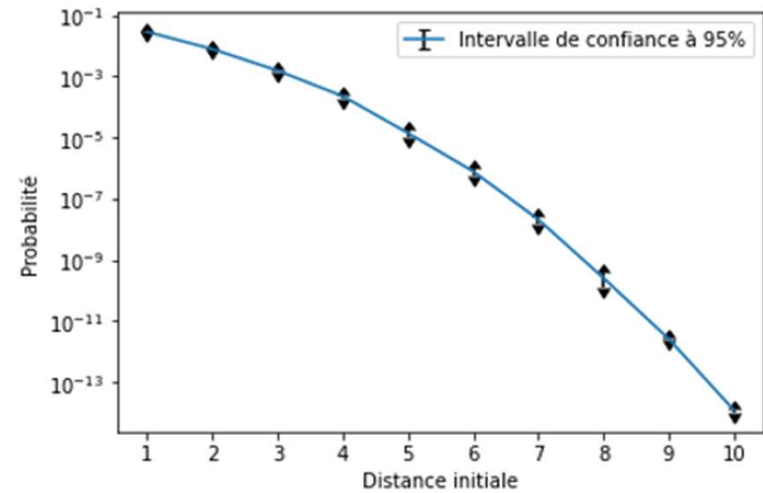
- Lien avec la distribution du temps de conflit
- Privilégier les conflits là où ils sont fréquents
- Moindre variance

Changement de moyenne amélioré

$r_a = 0$



$r_a \neq 0$



- Meilleurs résultats
- À grande distance pour $r_a \neq 0$, moins de probabilité de collision (Incertitude *along-track*)

La méthode de Monte Carlo par Chaîne de Markov

- Renouvellement d'un instant à l'autre

$$X_{ki}^A := \begin{cases} \rho(X_{k(i-1)}^A - 2\mu_k) + \sqrt{1-\rho^2}(Y_{ki} - 2\mu_k) + 2\mu_k & \text{si dans } A \\ X_{k(i-1)}^A & \text{sinon} \end{cases}$$

- Le théorème Ergodique
- Les niveaux de splitting

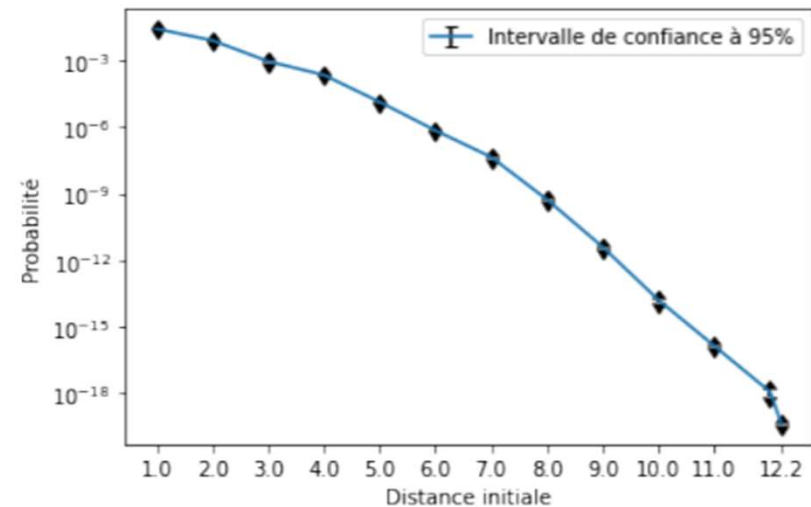
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{X_{ki}^A \in B} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z \in B \mid Z \in A)$$

$$\text{seuil} = a_0 < a_1 < \dots < a_m = \text{distance initiale}$$

$$\mathbb{P}(Z \in A) = \prod_{\ell=1}^k \mathbb{P}(Z \in A_\ell \mid Z \in A_{\ell-1})$$

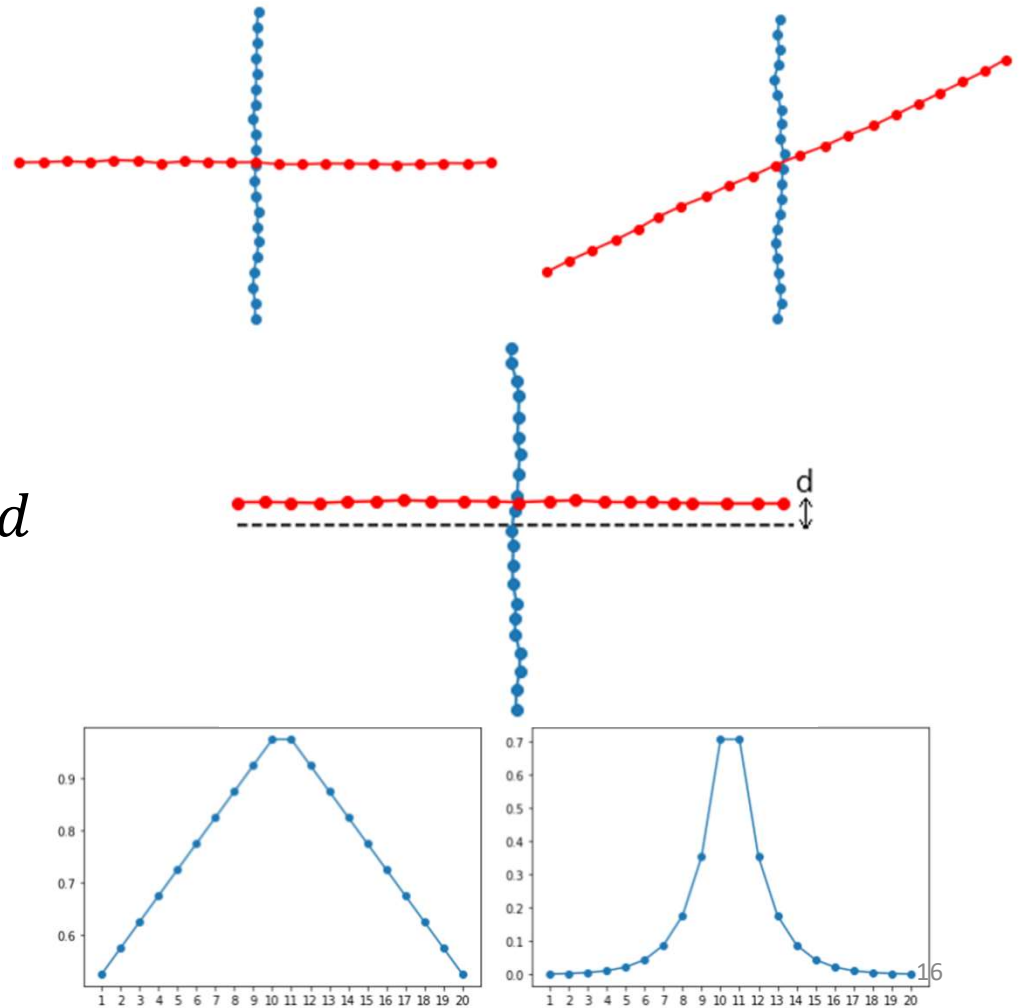
Probabilités avec MCMC pour $r_a = 0,25$

- Ordre de grandeur de 1E-20
- Difficultés pour calculer l'erreur
- Difficulté pour les trajectoires croisées
- Accord avec les probabilités calculées précédemment



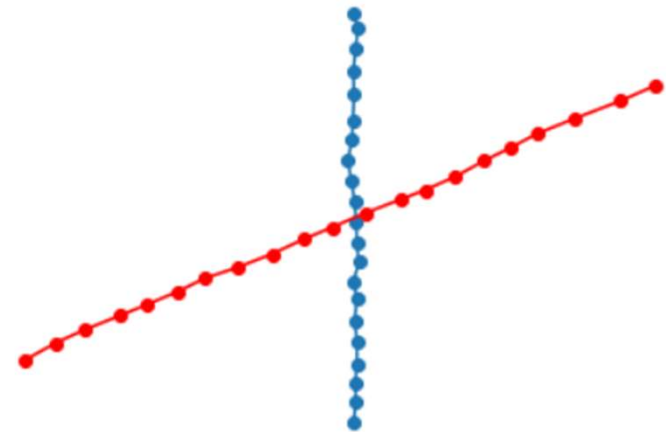
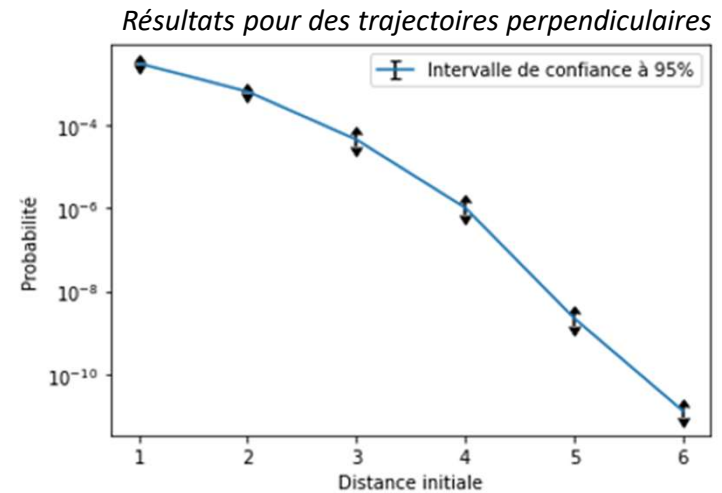
Trajectoires croisées

- Perpendiculaires et inclinées :
- Distance de séparation minimale d
- Changement de moyenne localement accentué



Trajectoires croisées

- $r_a = 0$:
 - Le changement demeure efficace
 - Limité pour des trajectoires inclinées
- $r_a \neq 0$:
 - Beaucoup moins efficace.
 - Rapprochement local inefficace à cause des incertitudes *along-track*





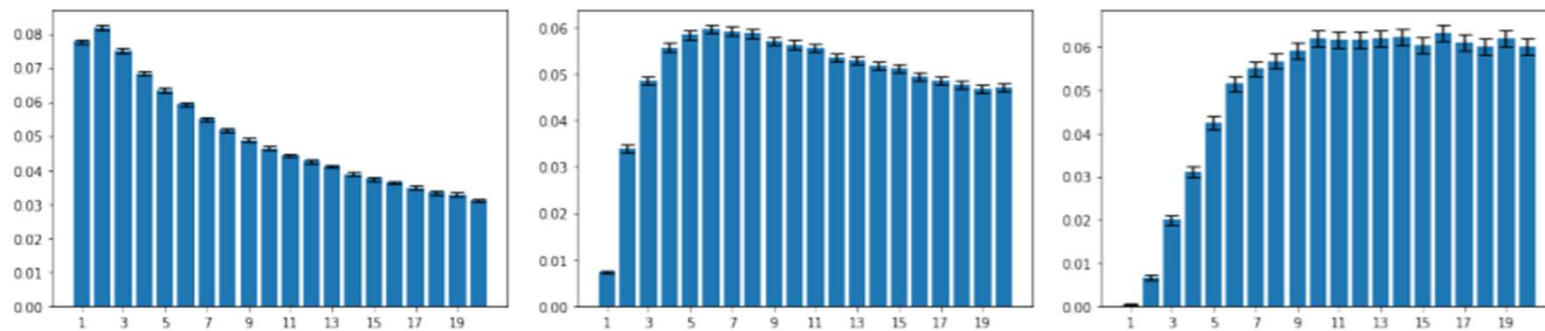
▼ Distribution conditionnelle

Temps de conflit

- Trajectoires parallèles
- Probabilité conditionnelle
- $r_a = 0$ et $r_a = 0.25$
- Distribution du temps de conflit en fonction de d

$$\frac{\mathbb{P}(T = k)}{\mathbb{P}(T \leq 20)} = \mathbb{P}(T = k | T \leq 20)$$

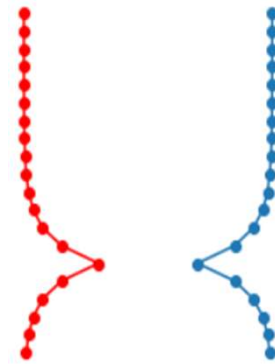
Temps de conflit $r_a = 0$



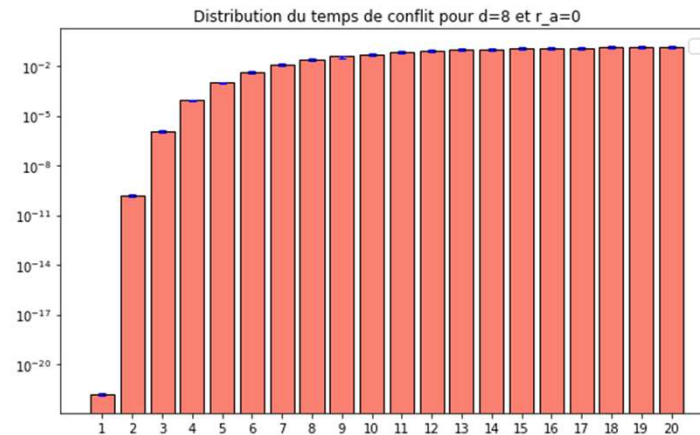
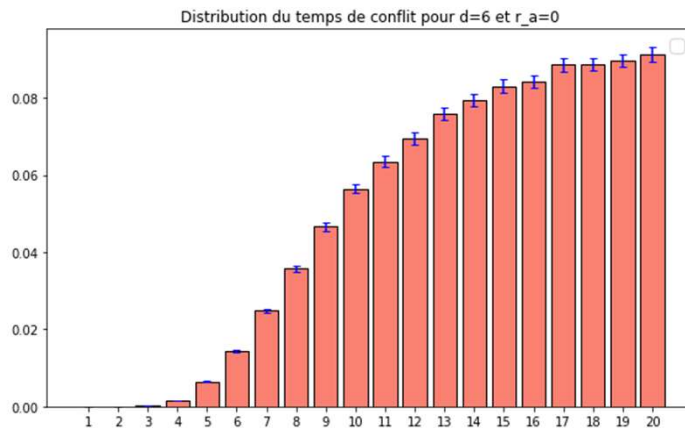
- Pour les petites distances la probabilité est importante au début
- Dépendance de la distance initiale

Temps de conflit $r_a = 0$

- Grandes distances :Echantillonnage d'importance
- Distributions :



Changement de moyenne (k=5)



Temps de conflit $r_a = 0,25$

- Petites distances (MC Naïf) :

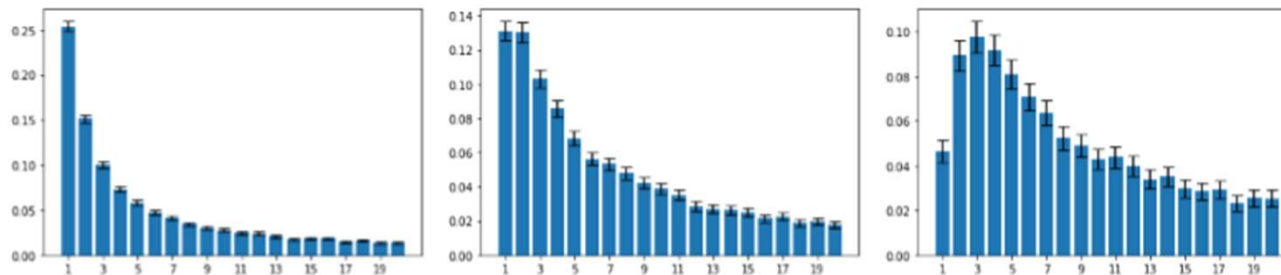
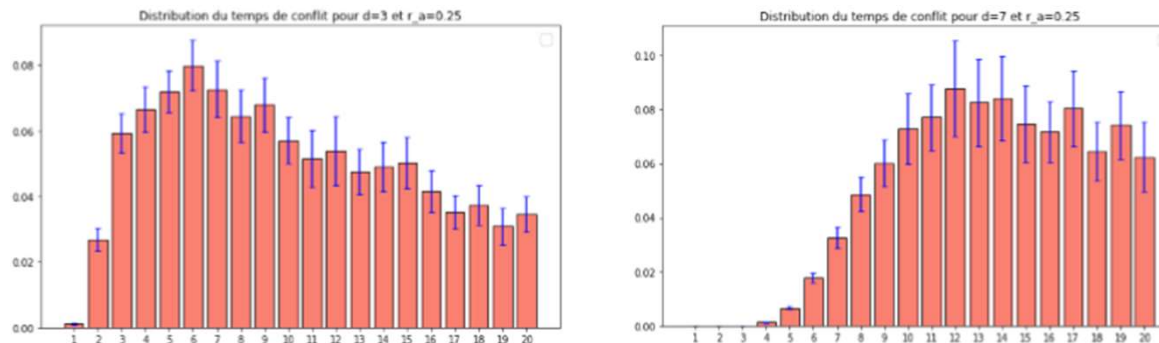


FIGURE 18 – Distribution conditionnelle du temps de conflit, de gauche à droite : $d = 1$, $d = 1.5$, $d = 2$

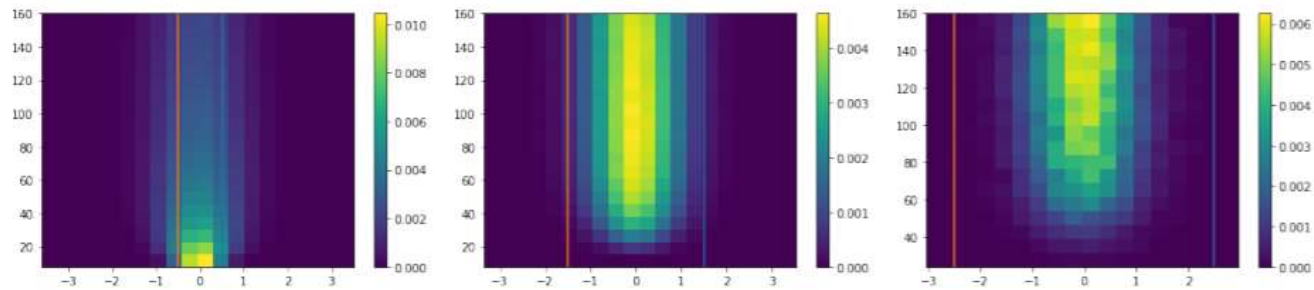
- Grandes distances (Echantillonnage d'importance) :



➤ Présence d'un
maximum

Position du conflit

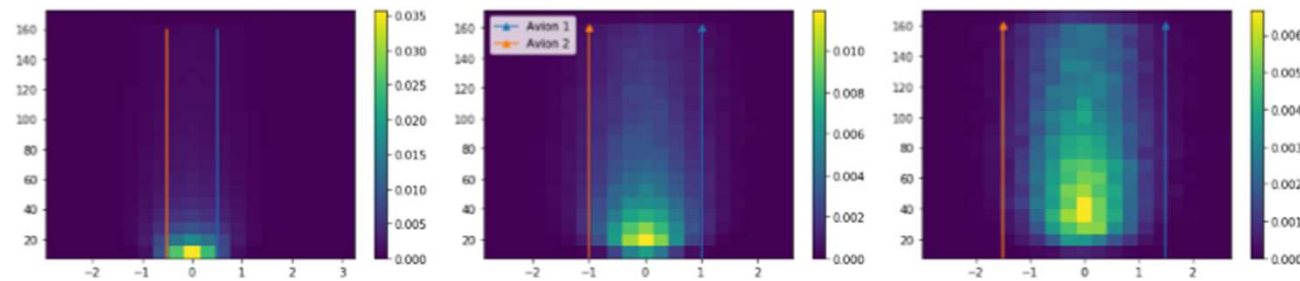
$r_a = 0$:



Collisions
concentrées en
fin de trajectoire

FIGURE 21 – Distribution conditionnelle de la position du conflit, de gauche à droite : $d = 1$, $d = 3$, $d = 5$ ($r_a = 0$), les traits représentent les trajectoires nominales des avions.

$r_a \neq 0$:



Présence d'un
maximum

FIGURE 22 – Distribution conditionnelle de la position du conflit, de gauche à droite : $d = 1$, $d = 2$, $d = 3$ ($r_a = 0.25$), les traits représentent les trajectoires nominales des avions.

Conclusion

**Efficacité
numérique**

**Intuition vis-
à-vis du
modèle**

Améliorations