DiffGeo

Luka Ilić, Johannnes Mader, Jakob Deutsch, Fabian Schuh

21. Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das folgende Skriptum ist begleitend zur Vorlesung Differentialgeometrie gehalten von Univ.Prof. Hertrich - Jeromin und wird von einigen Studenten (oben angeführt) während der Vorlesung geschrieben und danach auf Fehler kontrolliert und bearbeitet. Natürlich schleichen sich nach Möglichkeit Fehler ein, die übersehen werden, dies ist gerne bei den schreibenden Personen anzumerken. Das Skriptum enthält großteils das Tafelbild der Stunden und keinenfalls die Garantie in irgendeiner Weise vollständig zu sein. (Wir geben unser Bestes.)

Viel Vergnügen mit DiffGeo!

Bemerkung. **Literaturempfehlung** (zusätzlich):

1. Strubecker: Differentialgeometrie I - III; Sammlung Göschen
2. Spivak: A comprehensive Introduction to Diffenrential Geometry I - V; Publisher Perish
3. O'Neil: Semi.Riemannian Geometrie; Acad. Press
4. Hicks: Notes on Differential Geometry (Es gibt (möglicherweise nicht legale) Versionen im Internet.)
   (ersteres ist kompakter, zweiteres eher komplementär gedacht, drittes für Physik-Interessierte, letzteres vergleicht die Methoden der Differentialgeometrie)

1 Kurven

1.1 Parametrisierung und Bogenlänge

Wiederholung: Ein Euklidischer Raum $\mathcal{E}$ ist:

1. Ein affiner Raum $(\mathcal{E}, V, \tau)$
2. über einem Euklid. Vektorraum $(V, <,>)$.

Dabei: $\tau : V \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \quad (v, X) \mapsto \tau_v(X) =: X + v$ genügt

1. $\tau_0 = id_{\mathcal{E}}$ und $\forall v, w \in V \ \tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w}$
2. $\forall X, Y \in \mathcal{E} \exists! v \in V \ \tau_v(x) = Y$ ((d.h. τ *ist einfach transitiv*)).

Definition. 1.1. Eine *(parametrisierte-) Kurve* ist eine Abbildung

$$X : I \to \mathcal{E}$$

auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, die regulär ist (d.h. $\forall t \in I \ X'(t) \neq 0$). Wir nennen X auch Parametrisierung der Kurve $\mathcal{C} = X(I)$.

Bemerkung. Alle Abbildungen in dieser VO sind beliebig oft differenzierbar (d.h. C^∞).

Beispiel. Eine *(Kreis-) Helix* mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe h ist die Kurve

$$X : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3, \quad t \mapsto X(t) := O + e_1 r \cos(t) + e_2 r sin(t) + e_3 ht.$$

Definition. 1.2. *Umparametrisierung* einer param. Kurve $X : I \to \mathcal{E}$ ist eine param. Kurve

$$\widetilde{X} : \widetilde{I} \to \mathcal{E}, \quad s \mapsto \widetilde{X}(s) = X(t(s)),$$

wobei $t : \widetilde{I} \to I$ eine surjektive, reguläre Abbildung ist.

Motivation: Für eine Kurve $t \mapsto X(t)$

1. X'(t) ist *Geschwindigkeit(-svektor)* ("velocity"),
2. |X'(t)| ist (skalare) Geschwindigkeit ("speed").

Rekonstruktion durch Integration:

$$X(t) = X(o) + \int_o^t X'(t)dt$$

und die Länge des Weges von $X(0)$ nach $X(t)$:

$$s(t) = \int_o^t |X'(t)|dt$$

Definition. 1.3. Die *Bogenlänge* einer Kurve $X : I \to \mathcal{E}$ ab $X(o)$ für $o \in I$, ist

$$s(t) := \int_o^t |X'(t)|dt$$

(wobei $\int_o^s |X'(t)|dt$ auch als $\int_o^t ds$ geschrieben wird)

Bemerkung. Dies ist tatsächlich die Länge des Kurvenbogens zwischen $X(o)$ und $X(t)$, wie man z.B. durch polygonale Approximation beweist (s. Ana2 VO) Also: Die Bogenlänge zwischen zwei Punkten ist *invariant* ("ändert sich nicht") unter Umparametrisierung.

umpar **Lemma und Definition. 1.4.** Jede Kurve $t \mapsto X(t)$ kann man nach Bogenlänge (um-) parametrisieren, d.h. so, dass sie konstante Geschwindigkeit 1 ($|X'(t)| \equiv 1$) hat. Dies ist die *Bogenlängenparametrisierung* und üblicherweise notiert $s \mapsto X(s)$ diesen Zusammenhang.

Beweis. Wähle $o \in I$ und bemerke

$$s'(t) = |X'(t)| > 0.$$

Also ist $t \mapsto s(t)$ streng monoton wachsend, kann also invertiert werden, um $t = t(s)$ zu erhalten: Damit erhält man für

$$\widetilde{X} := X \circ t$$

$$|\widetilde{X}'(s)| = |X'(t(s))| \cdot |t'(s)| = \frac{s'(t)}{s'(t)} = 1,$$

d.h. $\widetilde{X}$ ist nach Bogenlänge parametrisiert. (nämlich durch Division mit der Inversen.) □

Bemerkung. Eine Bogenlängenparametrisierung ist eindeutig bis auf Wahl von o und Orientierung.

Beispiel. Eine Helix

$$t \mapsto X(t) = O + e_1 r\cos(t) + e_2 r\sin(t) + e_3 ht$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2}dt = \sqrt{r^2+h^2} \cdot t$$

und somit Bogenlängenparametrisierung

$$s \mapsto \widetilde{X}(s) = O + e_1 r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} + e_2 r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} + e_3\frac{hs}{\sqrt{r^2+h^2}}.$$

Bemerkung und Beispiel. Üblicherweise ist es nicht möglich eine Bogenlängenparam. in elem. Funktionen anzugeben: Eine Ellipse

$$t \mapsto O + e_1 a\cos(t) + e_2 b\sin(t) \;\; (a > b > 0)$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin(t)}dt,$$

dies ist ein elliptisches Integral, also nicht mit elem. Funktionen invertierbar.

1.2 Streifen und Rahmen

Definition. 1.5. Sei $X : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathcal{E}$ eine parametrisierte Kurve. Die *Tangente* an einem Punkt $X(t)$, wird durch den Punkt und seinen *Tangentialvektor* $X'(t)$ beschrieben. $\mathcal{T}(t) = X(t)+[X'(t)]$ notiert diese Gerade. Die Ebene $\mathcal{N}(t) = X(t) + \{X'(t)\}^{\perp}$ heißt *Normalebene*.

Alternativ können wir sagen: Wir erhalten Tangente, bzw. Normalebene, durch legen des *Tangentialraumes* $[X'(t)]$ bzw. *Normalraumes* $\{X'(t)\}^{\perp}$ durch den Punkt $X(t)$.

Definition. 1.6. Das *Tangential-* und *Normalbündel* einer Kurve $X : I \to \mathcal{E}^3$ werden durch die folgenden Abbildungen definiert:

$$I \ni t \mapsto T_tX := [X'(t)] \subseteq V \text{ bzw.}$$

$$I \ni t \mapsto N_tX := \{X'(t)\}^{\perp}.$$

eine Abbildung $Y : I \to V$ heißt

1. *Tangentialfeld* entlang X, falls

$$\forall t \in I : Y(t) \in T_tX$$

2. *Normalenfeld* entlang X, falls

$$\forall t \in I : Y(t) \in N_tX$$

Bemerkung und Definition. 1.7. Jede Kurve hat ein **(und nur ein!)** harmonisches *Einheitstangentenfeld* (ETF)

$$T : I \to V, \quad t \mapsto \frac{X'(t)}{|X'(t)|}$$

Aber – **es gibt haufenweise Normalenfelder.**

Definition. 1.8. Ein *Streifen* (”ribbon”) ist ein Paar (X, N), wobei

$$X : I \to \mathcal{E}$$

eine Kurve und

$$N : I \to V$$

ein *Einheitsnormalenfeld* (ENF) ist, d.h.,

$$N \perp T \text{ und } |N| = 1.$$

Bemerkung und Definition. 1.9. (Im dreidimensionalen Raum können wir folgendes sagen:) Ein Streifen ist also eine Kurve mit einer ”vertikalen Richtung”. Weiters erhält man eine ”seitwärts Richtung” durch die *Binormale*

$$B := T \times N : I \to V.$$

(Hier ist $T \times N$ das ”bekannte” Kreuzprodunkt)

Lemma und Definition. 1.10. Der *(angepasste) Rahmen* eines Streifens $(X, N) : I \to \mathcal{E}^3 \times S^2$ ist eine Abbildung

$$F = (T, N, B) : I \to SO(V)$$

seine *Strukturgleichungen* sind von der Form

$$F' = F\phi \text{ mit } \phi = |X'| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

1. κ_n die *Normalkrümmung*
2. κ_g die *geodätische Krümmung*, und
3. τ die *Torsion* des Streifens (X, N)
   bezeichnen.

Beweis. Da $F : I \to SO(V)$, gilt

$$F^t F \equiv id$$

und daher

$$0 = (F^t F)' = F'^t F + F^t F' = (F\phi)^t F + F^t F\phi = \phi^t F^t F + F^t F\phi = \phi^t + \phi\ ,$$

d.h., $\phi : I \to o(V)$ ist schiefsymmetrisch. Insbesondere: Es gibt Funktionen κ_n, κ_g, τ, so dass ϕ von der behaupteten Form ist. □

Wiederholung:

$$O(V) = \{A \in End(V) \mid A^t A \equiv id\}$$

$$SO(V) = \{A \in O(V) \mid \det(A) = 1\}$$

$$o(V) = \{B \in End(V) \mid B^t + B \equiv 0\}$$

Bemerkung. Krümmung und Torsion eines Streifens sind *geometrische Invarianten* des Streifens, d.h., sie sind unabhängig von Position und (in gewisser Weise) Parametrisierung des Streifens.

1. ist $(\widetilde{X}, \widetilde{N}) = (\widetilde{O} + A(X - O), AN)$ mit $O, \widetilde{O} \in \mathcal{E}$ und $A \in SO(V)$ eine Euklidsche Bewegung des Streifens (X, N), so sind $\widetilde{T} = AT$ und $\widetilde{B} = AT \times AN = A(T \times N) = AB$, also $\widetilde{F} = AF$ und damit $\widetilde{\phi} = \widetilde{F}^t \widetilde{F}' = F^t A^t A F' = \phi$. (Da $A \in SO(V)$)
2. ist $s \mapsto (\widetilde{X}, \widetilde{N})(s) = (X, N)(t(s))$ eine *orientierungstreue Umparametrisierung*, d.h., $t' > 0$, von $t \mapsto (X, N)(t)$, so gilt

   $$\widetilde{\phi}(s) = \widetilde{F}^t(s)\widetilde{F}'(s) = F^t(t(s))F'(t(s)) \cdot t'(s) = \phi(t(s)) \cdot t'(s)$$

   und

   $$|\widetilde{X}'(s)| = |X'(t(s))| \cdot |t'(s)| = |X'(t(s))| \cdot t'(s)$$

   und damit $\widetilde{\kappa_n}(s) = \kappa_n(t(s))$ usw.

Lemma. 1.11. *Für einen Streifen (X, N) gilt*

$$\kappa_n = -\frac{\langle N', T\rangle}{|X'|} = \frac{\langle N, T'\rangle}{|X'|}, \qquad \kappa_g = -\frac{\langle B, T'\rangle}{|X'|} = \frac{\langle B', T\rangle}{|X'|}, \qquad \tau = -\frac{\langle N, B'\rangle}{|X'|} = \frac{\langle N', B\rangle}{|X'|}.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus der Definition von κ_n, κ_g und τ und aus der Orthonormalität von T, N und B. □

Bemerkung und Definition. 1.12. Ist ein Streifen $(\widetilde{X}, \widetilde{N})$ gegeben durch eine *Normalrotation* eines Streifens (X, N), d.h., $\widetilde{X}, \widetilde{N} = (X, N\cos\varphi + B\sin\varphi)$ mit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\kappa_n} \\ \widetilde{\kappa_g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_n \\ \kappa_g \end{pmatrix}$$

und

$$\widetilde{\tau} = \tau + \frac{\varphi'}{|X'|}.$$

Beispiel.

1. **Helix**: Betrachte den Streifen (X, N) mit

$$t \mapsto X(t) = o + e_1 r\cos t + e_2 r\sin t + e_3 ht$$

und $t \mapsto N(t) = -(e_1\cos t + e_2\sin t)$. Für

$$T(t) = (-e_1 r\sin t + e_2 r\cos t + e_3 h)\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

und

$$B(t) = (e_1 h\sin t - e_2 h\cos t + e_3 r)\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

bekommt man $F = (T, N, B) : \mathbb{R} \to SO(V)$ und damit

$$T' = N \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$N' = T \cdot \frac{-r}{\sqrt{r^2 + h^2}} + B \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$B' = \frac{-h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

also (mit $|X'| = \sqrt{r^2 + h^2}$),

$$\kappa_n = \frac{r}{r^2 + h^2}, \qquad \kappa_g = 0, \qquad \tau = \frac{h}{r^2 + h^2}.$$

2. **sphärische Kurve**: Sei $s \mapsto X(s) \in \mathcal{E}^3$ eine bogenlängenparametrisierte Kurve, d.h. mit Mittelpunkt $O \in \mathcal{E}^3$ und Radius $r > 0$, der Sphäre gilt:

$$|X - O|^2 \equiv r^2 \text{ und } |X'|^2 \equiv 1.$$

Bemerke: $\langle X', X - O\rangle = \frac{1}{2}(|X-O|^2)' = 0$. Also liefert $N := (X-O)\frac{1}{r}$ ein ENF. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= -\langle N', T\rangle \equiv \frac{1}{r} \\
\kappa_g &= -\langle B, T'\rangle = -\frac{1}{r}\langle X' \times (X-O), X''\rangle = \frac{det(X-O, X', X'')}{r} \\
\tau &= \langle N', B\rangle = \frac{1}{r^2}\langle X', X' \times (X-O)\rangle \equiv 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung. $\kappa_g \equiv 0$ im ersten Bsp. und $\tau \equiv 0$ im zweiten Bsp.

Satz 1.13 (Fundamentalsatz für Streifen)**.** *Seien*

$$\kappa_n, \kappa_g, \tau : I \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \kappa_n(s), \kappa_g(s), \tau(s)$$

gegeben. Dann gibt es eine bogenlängenparametrisierte Kurve

$$X : I \to \mathcal{E}$$

und ein ENF

$$N : I \to V,$$

so dass κ_n, κ_g, τ Normal- bzw. geodätische Krümmung und Torsion des Streifens (X, N) sind. Dieser Streifen ist bis auf Euklid. Bewegung eindeutig.

Beweis. Wähle $o \in I$ und $F_o \in SO(V)$ beliebig und fest. Nach Satz von Picard-Lindelöf hat das AWP

$$F' = F\phi,\ F(o) = F_o$$

mit

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung $F = (T, N, B) : I \to End(V)$. Nun zeigen wir, dass F ein Rahmen ist:

1. $(FF^t)' = F(\phi + \phi^t)F^t \equiv 0$ also $FF^t \equiv id$, und $F : I \to O(V)$
2. $\det : O(V) \to \{\pm 1\}$ ist stetig, also $\det F : I \to \{\pm 1\}$ konstant und somit

   $$\det F = \det F_o = 1,$$

   also $F : I \to SO(V)$.

Insbesondere $|T| \equiv 1$ und man erhält eine bogenlängenparametrisierte Kurve

$$X : I \to \mathcal{E}^3, t \mapsto O + \int_o^t T(s)ds.$$

(X, N) mit $F = (T, N, B)$ liefert einen Streifen, Krümmung und Torsion wie behauptet. Eindeutigkeit bis auf Euklid. Bewegung folgt aus der Eindeutigkeit in Picard-Lindelöf und jener der Integration. □

1.3 Normalzusammenhang & Paralleltransport

Definition. 1.14. Für ein Normalenfeld kann man die Ableitung $N' = N' - \langle N', T\rangle T + \langle N', T\rangle T$ in Normal- und Tangentialanteil zerlegen.

Definition. 1.15. Ein Normalenfeld $N : I \to V$ entlang $X : I \to \mathcal{E}$ heißt *parallel*, falls $\nabla^\perp N := N' - \langle N', T\rangle T = 0$, wobei $\nabla^\perp$ den *Normalzusammenhang* entlang X bezeichnet.

Bemerkung. Hier wird <u>nicht</u> $|N| = 1$ angenommen.

Lemma. 1.16. *Der Normalzshg. ist* metrisch*, d.h.,*

$$\langle N_1, N_2\rangle' = \langle \nabla^\perp N_1, N_2\rangle + \langle N_1, \nabla^\perp N_2\rangle;$$

parallele Normalenfelder haben konstante Länge und schließen konstante Winkel ein.

Beweis. Für Normalenfelder $N_1, N_2 : I \to V$ entlang $X : I \to \mathcal{E}$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle \nabla^\perp N_1, N_2\rangle + \langle N_1, \nabla^\perp N_2\rangle &= \langle N_1' - \langle N_1, T\rangle T, N_2\rangle + \langle N_1, N_2' - \langle N_2', T\rangle T\rangle \\ &= \langle N_1', N_2\rangle + \langle N_1, N_2'\rangle = \langle N_1, N_2\rangle'.\end{aligned}$$

Insbesondere sind N_1, N_2 parallel, so ist $\langle N_1, N_2\rangle' = 0$

Damit:

1. ist N parallel, so gilt
$$(|N|^2)' = 2\langle N, \nabla^\perp N\rangle = 0$$
2. sind N_1, N_2 parallel, so ist der Winkel α zwischen N_1, N_2
$$\alpha = \arccos \frac{\langle N_1, N_2\rangle}{|N_1||N_2|} = const.$$

□

Beispiel. Für einen Kreis $t \mapsto X(t) = O + (e_1 \cos t + e_2 \sin t)r$ ist $t \mapsto N(t) := e_1 \cos t + e_2 \sin t$ ein paralleles Normalenfeld.

Bemerkung. Ist (X, N) ein Krümmungsstreifen, $\tau \equiv 0$, so ist N parallel. Aus $N' = (-\kappa_n T + \tau B)\,|X'|$ folgt

$$\nabla^\perp N = (-\kappa_n T + \tau B)\,|X'| + \kappa_n T = B\tau\,|X'| = 0.$$

Andererseits: Ist $N : I \to V$ parallel entlang $X : I \to \mathcal{E}$, so ist $(X, \frac{N}{|N|})$ Krümmungsstreifen (falls $N \neq 0$).

Bemerkung. Ist N parallel längs X, so auch $B = T \times N$.

Bemerkung. Ist (X, N) durch eine Normalrotation von $(X, \widetilde{N})$ gegeben, d.h.

$$(X, N) = (X, \widetilde{N} \cos \varphi + \widetilde{B} \sin \varphi)$$

mit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\tau = \widetilde{\tau} + \frac{\varphi'}{|X'|};$$

folglich: Man erhält einen Krümmungsstreifen bzw. ENF $N : I \to V$ einer Kurve $X : I \to \mathcal{E}$ durch

$$N = \widetilde{N} \cos \varphi + \widetilde{B} \sin \varphi \text{ mit } \varphi(t) = \varphi_o - \int_o^t \tau(t) ds.$$

Wobei φ_o eine Integrationskonstante ist und eine konstante Normaldrehung liefert und ds für $|X'|dt$ – das Bogenlängenelement – steht.

Da konstante Skalierungen eines parallelen Normalenfeldes parallel ist, folgt:

Lemma. 1.17. *Sei $X : I \to \mathcal{E}$ eine Kurve, $o \in I$ und $N_o \in N_o X$. Dann existiert ein eindeutiges paralleles Normalenfeld $N : I \to V$ mit $N(o) = N_o$*

Beweis. der Beweis folgt aus der Bemerkung darüber. Allerdings nur für Dimension 3. Der Beweis gilt auch sonst, dann braucht man allerdings Picard-Lindelöf □

Beispiel. Für das "radikale" ENF $\widetilde{N} = -(e_1 \cos t + e_2 \sin t)$ der Helix

$$X = O + e_1 r \cos t + e_2 r \sin t + e_3 ht$$

ist $\widetilde{\tau} = \frac{h}{r^2+h^2}$. Also liefert

$$N(t) := \widetilde{N}(t) \cos(\frac{ht}{\sqrt{r^2 + h^2}}) + \widetilde{B}(t) \sin(-\frac{ht}{\sqrt{r^2 + h^2}})$$

ein paralleles Normalenfeld.

Lemma und Definition. 1.18. Parallele Normalenfelder entlang $X : I \to \mathcal{E}$ definieren eine lineare Isometrie von $N_o X$ nach $N_t X$. Diese Isometrie heißt *Paralleltransport* entlang X.

Bemerkung. Dies erklärt den Begriff "Zusammenhang" für $\nabla^\perp$:$\nabla^\perp$ liefert einen Zusammenhang zwischen Normalräumen einer Kurve.

Beweis. Wähle $N_o \in N_o X$; nach Lemma vorher gibt es ein eindeutiges(!) paralleles NF $N : I \to V$ entlang X mit $N(o) = N_o$; also definiere durch

$$\pi_t : N_o X \to N_t X, \; N_o \mapsto N(t)$$

eine wohldefinierte Abbildung. Da die Gleichung $\nabla^\perp N = 0$ linear ist, sind konstante(!) Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen – also ist π_t linear. □

1.4 Frenet Kurven

Wir diskutieren $\kappa_g \equiv 0$ (vorheriger Abschnitt $\tau \equiv 0$).

Bemerke: ist $(\widetilde{X}, \widetilde{N}) = (X, N\cos\varphi + B\sin\varphi)$ Normalrotation eines Streifens (X, N), so gilt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\kappa_n} \\ \widetilde{\kappa_g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_n \\ \kappa_g \end{pmatrix}$$

insbesondere $\widetilde{\kappa}_n = -\kappa_g$ und $\widetilde{\kappa}_g = \kappa_n$ für $(\widetilde{X}, \widetilde{N}) = (X, B)$.

Definition. 1.19. $X : I \to \mathcal{E}^3$ heißt *Frenet Kurve*, falls

$$\forall t \in I : (X' \times X'')(t) \neq 0.$$

Bemerkung. In diesem Kapitel wird stets der 3-dimensionale Raum angenommen.

Bemerkung. Die Frenet-Bedingung ist invariant unter Umparametrisierung.

Lemma und Definition. 1.20. Ist $X : I \to \mathcal{E}^3$ Frenet, so gilt

$$\forall t \in I : T'(t) \neq 0$$

und $\frac{T'}{|T'|} =: N$ definiert ein ENF: Dies ist die *Hauptnormale* von X.

Beweis. Mit der Frenet-Bedingung:

$$0 \neq X' \times X'' = X' \times (T|X'|)' = X' \times T|X'|' + X' \times T'|X'| \Rightarrow T' \neq 0$$

Weiters:

$$0 = (1)' = (|T|^2)' = 2\langle T, T'\rangle,$$

also definiert $N = \frac{T'}{|T'|}$ ein ENF. □

Lemma und Definition. 1.21. Ist $X : I \to \mathcal{E}^3$ Frenet mit Hauptnormale $N : I \to V$, so sind die Strukturgleichungen des *Frenet Rahmens* $F = (T, N, B)$ der Kurve die *Frenet-Serret Gleichungen* $F' = F\phi$ mit $\phi = |X'| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$ mit der *Krümmung* $\kappa > 0$ und *Torsion* τ der Frenet Kurve X.

Bemerkung. Für eine Frenet Kurve (mit Hauptnormale) gilt also $\kappa_n = \kappa > 0$ und $\kappa_g = 0$.

Beweis. Für einen Frenet Rahmen gilt

$$\kappa_g = -\frac{\langle T', B\rangle}{|X'|} = -\frac{\langle N, B\rangle |T'|}{|X'|} = 0,$$

$$\kappa_n = \frac{\langle T', N\rangle}{|X'|} = \frac{\langle N, N\rangle |T'|}{|X'|} > 0.$$

□

Beispiel. Eine Helix

$$X = O + e_1 r \cos t + e_2 r \sin t + e_3 h$$

hat Hauptnormalenfeld (s. Kapitel 1.2)

$$t \mapsto N(t) = -(e_1 \cos t + e_2 \sin t)$$

und Krümmung und Torsion

$$\kappa \equiv \frac{r}{r^2 + h^2} \text{ bzw. } \tau \equiv \frac{h}{r^2 + h^2}.$$

Bemerkung. Krümmung und Torsion einer Frenet Kurve sind

$$\kappa = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3} \text{ bzw. } \tau = \frac{\det(X', X'', X''')}{|X' \times X''|^2}$$

Insbesondere: Krümmung und Torsion hängen nur von der Kurve ab (daher: "Krümmung" und "Torsion der Kurve").

Satz 1.22 (Fundamentalsatz für Frenet Kurven)**.** *Für zwei Funktionen*

$$s \mapsto \kappa(s), \tau(s) \text{ mit } \forall s \in I : \kappa(s) > 0$$

gibt es eine Bogenlängenparametrisierte Frenet Kurve $X : I \to \mathcal{E}^3$ mit Krümmung κ und Torsion τ. Weiters: X ist eindeutig bis auf Euklid. Bewegung.

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz für Streifen existiert bogenlängen-parametrisierte Kurve $X : I \to \mathcal{E}^3$ und ENF $N : I \to V$ so dass der Streifen (X, N) Krümmung und Torsion

$$\kappa_n = \kappa, \kappa_g = 0, \tau = \tau,$$

d.h.

$$F' = F\phi \text{ mit } \phi = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Insbesondere $T' = N\kappa \neq 0$, daher:

1. X ist Frenet, da
$$X' \times X'' = T \times T' = T \times N\kappa \neq 0$$
und
2. N ist Hauptnormalenfeld, da
$$N = T' \frac{1}{\kappa} = \frac{T'}{|T'|}.$$

□

Bemerkung. Einen einfacheren Fundamentalsatz gibt es für ebene Kurven. (Aufgabe: Formulieren und – ohne Picard-Lindelöf– beweisen!)

Beispiel. Seien $\kappa > 0, \tau \in \mathbb{R}$ Zahlen. Nach dem Fundamentalsatz existiert (eind. bis auf Eukl. Bewegung) eine bogenlängenparametrisierte Frenet Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ. Andererseits:

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto X(s) = O + e_1 r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_2 r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_3 \frac{hs}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

ist bogenlängenparam. Frenet Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ für

$$r = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \text{ und } h = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}.$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz 1.23 (Klassifikation der Helices)**.** *Eine Frenet Kurve ist genau dann Helix, wenn sie konstante Krümmung und Torsion hat.*

Beispiel. Falls $(u, v) \mapsto X(u, v)$ Werte in einer (festen) Ebene annimmt,

$$\pi = \{X \in \mathcal{E}^3 \mid \langle X - 0, n \rangle = d\}$$

d.h., $\langle dX, n \rangle = 0$, so ist $N \equiv \pm n$, demnach also $\mathcal{S} \equiv 0$ und jeder Punkt der Fläche ist Flachpunkt.

2 Flächen

2.1 Parametrisierung & Metrik

Definition. 2.1. Eine Abbildung

$$X : \mathbb{R}^2 \supseteq M \to \mathcal{E}$$

heißt *parametrisierte Fläche*, falls M offen und zusammenhängend ist und X regulär ist, d.h., $\forall (u,v) \in M \ : \ d_{(u,v)}X : \mathbb{R}^2 \to V$ ist injektiv. Wir sagen auch: X ist eine *Parametrisierung* der *Fläche* $X(M) \subseteq \mathcal{E}$. Wobei $d_{(u,v)}$ definiert ist über:

$$d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = X_u(u,v) \cdot x + X_v(u,v) \cdot y.$$

Bemerkung. Äquivalent zur letzten Forderung ist die Forderung, dass die Jacobi-Matrix maximalen Rang hat. Diese braucht aber eine Festgelegte Basis, was oft zu Schwierigkeiten bei Berechnungen führt und wird daher von Prof. Jeromin nicht empfohlen.

Bemerkung. Einmal mehr sind alle geforderten Abbildungen so oft differenzierbar, wie wir das wünschen.

Bemerkung. $d_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to V$ ist die Ableitung am Punkt $(u,v) \in M$,

$$X(u+x, v+y) \approx X(u,v) + d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = X(u,v) + X_u(u,v) \cdot x + X_v(u,v) \cdot y,$$

wir können also identifizieren:

$$d_{(u,v)}X \cong (X_u, X_v)(u,v),$$

bzw., nach Wahl einer Basis von V, mit der Jacobi-Matrix am Punkt (u,v).

Beispiel. Ein *Helicoid* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{E}^3$ ist die *(Regel-)Fläche*

$$\mathbb{R}^2 \ni (r,v) \mapsto O + e_1 r\cos(v) + e_2 r\sin(v) + e_3 v \in \mathcal{E}^3.$$

Wir zeigen, dass $(X_r, X_v)(r,v)$ linear unabhängig für alle $(r,v) \in \mathbb{R}^2$ sind:

$$X_r(r,v) = e_1\cos(v) + e_2\sin(v) \neq 0$$
$$X_v(r,v) = -e_1 r\sin(v) + e_2 r\cos(v) + e_3 \neq 0$$

und da $X_v(r,v)$ von $e_3 \neq 0$ abhängt sind die beiden linear unabhängig.

Beispiel. Eine übliche Parametrisierung von $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{E}^3$ (mit Mittelpunkt $O \in \mathcal{E}^3$) ist

$$(u,v) \mapsto O + e_1\cos(u)\cos(v) + e_2\cos(u)\sin(v) + e_3\sin(u)$$

liefert keine parametrisierte Fläche, da die Sphäre an den Polen nicht regulär ist. Dies ist also nur eine Parametrisierung auf $M = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$

Insbesondere kann man sogar zeigen, dass es keine (reguläre) Parametrisierung der (ganzen) Sphäre gibt ("Hairy Ball Theorem" bzw. "Satz vom Igel").

$\mathbb{S}^2$ ist also **keine** Fläche im Sinne der Definition. Dieses "Problem" wird später gelöst.

Lemma und Definition. 2.2. Die *induzierte Metrik* oder *erste Fundamentalform* einer parametrisierten Fläche $X : M \to \mathcal{E}$ ist definiert durch

$$\mathrm{I} := \langle dX, dX \rangle.$$

Für jeden Punkt $(u, v) \in M$ liefert

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \mathrm{I}\big|_{(u,v)}(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) := \left\langle d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}), d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) \right\rangle$$

eine positiv definite, symmetrische Bilinearform.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $I\big|_{(u,v)}$ für jeden Punkt $(u, v) \in M$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform ist.

Weil $I\big|_{(u,v)}$ eine Komposition aus linearen Funktionen und einer Bilinearform ist, ist auch $I\big|_{(u,v)}$ linear. Die Symmetrie ist ebenfalls leicht ersichtlich. Fehlt noch die positive Definitheit.

Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ beliebig, so gilt

$$I\big|_{(u,v)}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \left\langle d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}), d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \right\rangle > 0.$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $d_{(u,v)}X$ injektiv und linear ist, daher bildet nur 0 auf 0 ab. Also ist $d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \neq 0$. Der Rest folgt, weil $\langle ., . \rangle$ positiv definit ist. □

Bemerkung. I wird oft mit Hilfe der *Gramschen Matrix* notiert:

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

mit

$$E = |X_u|^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = |X_v|^2.$$

Dann gilt für $(u, v) \in M$:

$$\begin{aligned} I\big|_{(u,v)}(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) &:= \left\langle d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}), d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) \right\rangle \\ &= \langle X_u(u,v)x_1 + X_v(u,v)y_1, X_u(u,v)x_2 + X_v(u,v)y_2 \rangle \\ &= E(u,v)x_1x_2 + F(u,v)(x_1y_2 + x_2y_1) + G(u,v)y_1y_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\Bigg|_{(u,v)} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel. 1. Ein *Zylinder*

$$(u, v) \mapsto X(u, v) := O + e_1 x(u) + e_2 y(u) + e_3 v$$

hat induzierte Metrik

$$I = (x'^2 + y'^2) du^2 + dv^2.$$

Insbesondere: Ist $u \mapsto O + e_1 x(u) + e_2 y(u)$ bogenlängenparametrisiert, so ist X *isometrisch*,

$$I = du^2 + dv^2$$

2. Das *Helicioid*

$$(r, v) \mapsto O + e_1 r \cos(v) + e_2 r \sin(v) + e_3 v$$

hat Metrik

$$I\big|_{(r,v)} = dr^2 + (1 + r^2) dv^2.$$

Mit einer Umparametrisierung $r = r(u) = \sinh(u)$ erhält man

$$I\big|_{(u,v)} = \cosh^2(u)(du^2 + dv^2),$$

d.h., X wird *konform* (winkeltreu).

Definition. 2.3. Eine Parametrisierte Fläche $X : M \to \mathcal{E}$ heißt

1. *konform*, falls $E = G, F = 0$
2. *isometrisch*, falls $E = G = 1, F = 0$.

Bemerkung. Für Kurven: Jede Kurve kann isometrisch/nach Bogenlänge umparametrisiert werden(1.4). Für Flächen: Im Allgemeinen gibt es keine isometrische (Um-)Parametrisierung.

Satz 2.4. *Jede Fläche kann lokal konform (um-)parametrisiert werden.*

Beweis. Ist echt cool laut Jeromin (braucht bissi so Fana und so ...). Falls der Leser Zeit hat, wird ihm nahegelegt den Beweis nachzuschauen. Hier ein Link zu einem Beweis dieser Tatsache:

Link zu PDF hier klicken.

□

Bemerkung. Dieser Satz ist die Grundlage, um (reelle) Flächen als komplexe Kurve zu intepretieren. Eine weitreichende Betrachtungsweise ...

Bemerkung. Um den Satz zu verstehen:
"lokal" heißt, dass – für jeden Punkt $(u, v) \in M$ – der Definitionsbereich M so eingeschränkt werden kann – auf eine Umgebung des Punktes(u, v) – dass die Behauptung wahr ist; "Umparametrisierung" wie für Kurven definiert:

Definition. 2.5. Eine *Umparametrisierung* einer parametrisierten Fläche $X : M \to \mathcal{E}$ ist eine neue parametrisierte Fläche

$$\widetilde{X} = X \circ (u, v), \quad \widetilde{M} \to \mathcal{E},$$

mit einem *Diffeomorphismus*:

$$(u, v) : \widetilde{M} \to M,$$

d.h., eine glatte (C^∞) Bijektion mit glatter Inverser $(u, v)^{-1} : M \to \widetilde{M}$.

Bemerkung. Für

$$(x, y) \mapsto \widetilde{X}(x, y) = X(u(x, y), v(x, y)) \in \mathcal{E}^3$$

gilt (Kettenregel)

$$\widetilde{X}_x = (X_u \circ (u, v)) \cdot u_x + (X_v \circ (u, v)) \cdot v_x$$
$$\widetilde{X}_y = (X_u \circ (u, v)) \cdot u_y + (Y_v \circ (u, v)) \cdot v_y$$

und somit

$$\widetilde{X}_x \times \widetilde{X}_y = ((X_u \times X_v) \circ (u, v)) \cdot (u_x v_y - u_y v_x),$$

d.h., $\widetilde{X}$ ist regulär.

2.2 Gaußabbildung und Weingartentensor

Definition. 2.6. Eine Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ hat an jedem Punkt $X(u, v)$ eine *Tangentialebene* und eine *Normalgerade*:

$$\mathcal{T}(u, v) := X(u, v) + [\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}],$$

$$\mathcal{N}(u, v) := X(u, v) + [\{(X_u \times X_v)(u, v)\}];$$

dies entspricht einer orthogonalen Zerlegung

$$V = [\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}] \oplus_\perp [\{(X_u \times X_v)(u, v)\}]$$

von V in einen *Tangentialraum* und einen *Normalraum* von X am Punkt $X(u, v)$.

Definition. 2.7. Das *Tangential-* bzw. *Normalenbündel* einer Fläche $X : M \to \mathcal{E}$ ist gegeben durch die Abbildung

$$(u, v) \mapsto T_{(u,v)}X := [\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}],$$
$$(u, v) \mapsto N_{(u,v)}X := \{X_u(u, v), X_v(u, v)\}^\perp.$$

Eine Abbildung $Y : M \to V$ heißt

- *Tangentialfeld* entlang X, falls

$$\forall (u, v) \in M : \ Y(u, v) \in T_{(u,v)}X$$

  ,

- *Normalenfeld* entlang X, falls

$$\forall (u, v) \in M : \ Y(u, v) \in N_{(u,v)}X.$$

Die *Gaußabbildung* einer Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ ist das Einheitsnormalenfeld (ENF):

$$N := \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} : M \to V.$$

Beispiel. **Rotationsfläche:** Für jede Rotationsfläche

$$(u,v) \mapsto X(u,v) := O + e_1 r(u)\cos(v) + e_2 r(u)\sin(v) + e_3 h(u)$$

ist jede Profilkurve $v \equiv \text{const}$ der orthogonale Schnitt der Fläche mit der Ebene $x\sin(v) = y\cos(v)$ der Meridiankurve; die Gaußabbildung erhält man also durch $\frac{\pi}{2}$ Drehung des ETFs ("Einheitstangentialfeldes") in der Ebene der Kurve

$$N(u,v) = \{-(e_1\cos(v) + e_2\sin(v))h'(u) + e_3 r'(u)\}\frac{1}{\sqrt{(r'^2+h'^2)(u)}}.$$

Überprüfung des Vorzeichens:

$$\det\begin{pmatrix} r'\cos & -r\sin & -h'\cos \\ r'\sin & r\cos & -h'\sin \\ h' & 0 & r' \end{pmatrix} = h'^2 r + r'^2 r = r(r'^2+h'^2) > 0.$$

Bemerkung. Die Gaußabbildung einer Fläche ist ein geometrisches Objekt, d.h., nach einer Euklid. Bewegung $\widetilde{X} = \widetilde{O} + A(X - O)$, liefert

$$\widetilde{N} = \frac{\widetilde{X}_u \times \widetilde{X}_v}{|\widetilde{X}_u \times \widetilde{X}_v|} = \frac{AX_u \times AX_v}{|AX_u \times AX_v|} = \frac{A(X_u \times X_v)}{|A(X_u \times X_v)|} = A\frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = AN.$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, weil für $A \in \mathrm{SO}(3)$ gilt $|A| = 1$. Eine Spiegelung liefert $\widetilde{N} = -AN$, d.h., wechselt das Vorzeichen – was auch eine (ordnungsumkehrende) Umparametrisierung tut, z.B.: $(u,v) \mapsto (v,u)$. Demnach ist N "geometrisch" bis auf Vorzeichen.

Bemerkung. Ordnungsprobleme tauchen in unserem Setting mit parametrisierten (!) Flächen nicht auf: Die Gaußabbildung einer parametrisierten Fläche ist wohldefiniert; eine nicht-orientierbare Fläche (e.g. Möbiusband) kann durch eine doppelt überlagerte Parametrisierung beschrieben werden.

Erinnerung: Die Normalkrümmung κ_n eines Streifens (X,N) ist definiert durch

$$0 = N'^T + T\,|X'|\,\kappa_n = N'^T + X'\kappa_n,$$

wobei $t \mapsto N'^T(t) \in T_t X$ den Tangentialanteil von N' bezeichnet, i.e.

$$N'^T = N' - \nabla^\perp N = T\,\langle T, N'\rangle\,.$$

Lemma und Definition. 2.8. Die Ableitung der Gaußabbildung ist tangentialwertig,

$$\forall (u,v) \in M: \; d_{(u,v)}N : \mathbb{R}^2 \to T_{(u,v)}X.$$

Damit können wir den *Formoperator* von X am Punkt $(u,v) \in M$ definieren:

$$\mathcal{S}|_{(u,v)} := -d_{(u,v)}N \circ (d_{(u,v)}X)^{-1} \in \mathrm{End}(\mathrm{T}_{(u,v)}\mathrm{X}).$$

Beweis. 1. Die Ableitung von N ist tangentialwertig. Nämlich:

$$1 \equiv |N|^2 \Rightarrow 0 = 2\,\langle N, dN\rangle \Rightarrow \forall (u,v) \in M \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : d_{(u,v)}N(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \in T_{(u,v)X}.$$

2. $\mathcal{S}$ ist wohldefiniert: Da für $(u,v) \in M, d_{(u,v)}X : \mathbb{R}^2 \to V$ injektiv ist, liefert dies einen Isomorphismus
$$d_{(u,v)}X : \mathbb{R}^2 \to T_{(u,v)}X \subseteq V,$$
der invertiert werden kann, um eine lineare Abbildung
$$(d_{(u,v)}X)^{-1} : T_{(u,v)}X \to \mathbb{R}^2$$
zu erhalten.

3. $\mathcal{S}\big|_{(u,v)}$ ist Endomorphismus: Als Verkettung linearer Abbildungen
$$T_{(u,v)}X \xrightarrow{(d_{(u,v)}X)^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{-d_{(u,v)}N} T_{(u,v)}X$$

□

Bemerkung. Die Abbildung $\mapsto \mathcal{S}\big|_{(u,v)} \in End(T_{(u,v)}X)$ liefert ein Endomorphismenfeld $\mathcal{S}$, welches man auch *Weingartentensorfeld* nennt.

Bemerkung. Da $(X_u(u,v), X_v(u,v))$ eine Basis von $T_{(u,v)}X$ ist, kann $\mathcal{S}\big|_{(u,v)}$ durch die Werte auf der Basis bestimmt werden:
$$\mathcal{S}X_u = -dN \circ (dX)^{-1}(X_u) = -dN \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -N_u$$
und
$$\mathcal{S}X_v = -N_v.$$

Lemma. 2.9. *$\mathcal{S}\big|_{(u,v)} \in End(T_{(u,v)}X)$ ist symmetrisch für jedes $(u,v) \in M$.*

Beweis. Wir verifizieren Symmetrie auf der Basis $(X_u(u,v), X_v(u,v))$ von $T_{(u,v)}X$:

Da $N \perp X_u, X_v$ erhalten wir
$$0 = \langle X_u, N \rangle_v = \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle = \langle X_{vu}, N \rangle - \langle X_u, \mathcal{S}X_v \rangle .$$
Ebenfalls
$$0 = \langle X_v, N \rangle_u = \langle X_{vu}, N \rangle - \langle X_v, \mathcal{S}X_u \rangle .$$
Also
$$\langle X_u, \mathcal{S}X_v \rangle = \langle \mathcal{S}X_u, X_v \rangle .$$

□

Bemerkung. Wie bei Streifen kann der Formoperator analog zu κ_n durch die Gleichung
$$0 = dN + \mathcal{S} \circ dX = dN^T + S \circ dX$$
beschrieben werden. Der Formoperator "kodiert" also die Krümmung einer Fläche.

Definition. 2.10. Sei $\mathcal{S}$ der Formoperator der Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$, dann heißt

- $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathcal{S}$ die *mittlere Krümmung* von X,
- $K = \det S$ die *Gauß Krümmung* von X und
- die Eigenwerte $\kappa^{\pm} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$ und die *Eigenrichtungen* von $\mathcal{S}$ sind die *Hauptkrümmungen* bzw. *Hauptrichtungen* von X.

Bemerkung. Es gilt $H = \frac{1}{2}(\kappa^+ + \kappa^-)$ – daher auch der Name *mittlere Krümmung.*

Beispiel. Eine Rotationsfläche parametrisiert nach Bogenlänge ist

$$X(u,v) = O + e_1 r(u)\cos v + e_2 r(u)\sin v + e_3 h(v),$$

mit $r'^2 + h'^2 = 1$. Damit folgt $r'r'' + h'h'' = 0$. Mit der Gaußabbildung

$$N(u,v) = -e_1 h'(u)\cos v - e_2 h'(u)\sin v + e_3 v'(u)$$

bekommt man

$$N_v + X_v \frac{h'}{r} = (e_1 \sin v - e_2 \cos v)\left(h' - r\frac{h'}{r}\right) = 0,$$

$$N_u + X_u\left(r'h'' - r''h'\right)$$

$$= (e_1\cos v + e_2 \sin v)\left(h'' + r'(r'h'' - r''h')\right) + e_3(r'' + h'(r'h'' - r''h')) = 0.$$

Also liefern X_u und X_v Krümmungsrichtungen zu Hauptrichtungen

$$\kappa^+ = r'h'' - r''h' \quad \text{und} \quad \kappa^- = \frac{h'}{r}.$$

Bemerkung. Formoperatoren und Krümmungen sind geometrische Objekte:

- Ist $\tilde{X} = X \circ (u,v)$ eine Umparametrisierung und $\tilde{N} = N \circ (u,v)$ so ist

$$\tilde{\mathcal{S}} = -d\tilde{N} \circ (d\tilde{X})^{-1} = -\left(d_{(u,v)}N \circ d(u,v)\right) \circ \left(d_{(u,v)X} \circ d(u,v)\right)^{-1}$$

$$= -d_{(u,v)}N \circ d(u,v) \circ d(u,v)^{-1} \circ \left(d_{(u,v)}X\right)^{-1} = \mathcal{S}|_{(u,v)},$$

  also insbesondere

$$\tilde{H} = H \circ (u,v), \quad \text{und} \quad \tilde{K} = K \circ (u,v), \quad \text{etc.}$$

- Ist $\tilde{X} = \tilde{O} + A(X - O)$ mit $A \in SO(3)$ so bekommt man

$$\tilde{\mathcal{S}} = -d\tilde{N} \circ \left(d\tilde{X}\right)^{-1} = -A \circ dN \circ (dX)^{-1} \circ A^{-1} = A \circ \mathcal{S} \circ A^{-1},$$

  insbesondere also

$$\tilde{H} = H, \quad \text{und} \quad \tilde{K} = K, \quad \text{etc.}$$

  Die Krümmungsrichtungen werden mit der Fläche gedreht:

$$\ker(\mathrm{id}\kappa^{\pm} - \tilde{\mathcal{S}}) = A\ker(\mathrm{id}\kappa^{\pm} - \mathcal{S}).$$

Definition. 2.11. Ein Punkt $X(u,v)$ einer Fläche heißt

- *Nabelpunkt* (umbilic), falls $\kappa^+(u,v) = \kappa^-(u,v) \quad (\Longleftrightarrow (H^2-K)(u,v)=0)$,
- *Flachpunkt* (flatpoint), falls $\kappa^+(u,v) = \kappa^-(u,v) = 0$.
- *parabolischer Punkt* (parabolic point), falls nur ein $\kappa^\pm(u,v) = 0$ ist.

Bemerkung. Ein Punkt $X(u,v)$ ist Nabelpunkt bzw. Flachpunkt, falls

$$\mathcal{S}|_{(u,v)} = H(u,v)\mathrm{id}_{T_{(u,v)}X} \text{ bzw. } \mathcal{S}|(u,v) = 0.$$

:Flachpunkt ***Beispiel.*** Falls $(u,v) \mapsto X(u,v)$ Werte in einer (festen) Ebene

$$\pi = \{X \in \mathcal{E}^3 \mid \langle X-0, n\rangle = d\}$$

annimmt, d.h., $\langle dX, n\rangle = 0$. Also ist $N \equiv \pm n$, weshalb $\mathcal{S} \equiv 0$ und jeder Punkt der Fläche ist ein Flachpunkt.
Umgekehrt: Ist jeder Punkt einer Fläche X ein Flachpunkt, $\mathcal{S} \equiv 0$, so folgt $N \equiv$ const., also nimmt X Werte in einer (festen) Ebene an: Mit $O \in \mathcal{E}^3$ beliebig

$$0 = \langle dX, N\rangle = d\langle X-O, N\rangle - \langle X-O, dN\rangle \Rightarrow \text{const.} \equiv \langle X-O, N\rangle,$$

wobei $\langle dX, N\rangle$ eine Abbildung $((u,v), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \mapsto \left\langle d_{(u,v)}X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, N(u,v)\right\rangle$ ist.

Matrixdarstellung: Mit (X_u, X_v) als tangentiales Basisfeld kann der Weingartentensor als Matrix geschrieben werden: $(\mathcal{S}X_u, \mathcal{S}X_v) = (-N_u, -N_v) = (X_u, X_v)\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$

also, vermittels der Skalarprodukte der Basisvektoren X_u, X_v,

$$\begin{pmatrix} -\langle X_u, N_u\rangle & -\langle X_u, N_v\rangle \\ -\langle X_v, N_u\rangle & -\langle X_v, N_v\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix},$$

d.h., als die Gram Matrix der zweiten Fundamentalform:

Lemma und Definition. 2.12. Die *zweite Fundamentalform* einer Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ ist definiert als

$$\mathrm{II} := -\langle dX, dN\rangle,$$

wobei $\mathrm{II} : ((u,v), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}) \mapsto -\left\langle d_{(u,v)}X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, d_{(u,v)}N\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}\right\rangle$; an jedem Punkt (u,v) erhält man so eine symmetrische Bilinearform

$$\mathrm{II}|_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) \mapsto -\left\langle d_{(u,v)}X\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, d_{(u,v)}N\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\rangle.$$

Beweis. Dass $\mathrm{II}|_{(u,v)}$ Bilinearform ist, ist klar. Weiters gilt mit der Leibniz-Regel:

$$\mathrm{II}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = -\langle X_u, N_v\rangle = \langle X_{uv}, N\rangle = \langle X_{vu}, N\rangle = -\langle X_v, N_u\rangle = \mathrm{II}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}),$$

also ist II symmetrisch an jedem Punkt. □

Bemerkung. Ist die erste Fundamentalform gegeben, so kann die zweite Fundamentalform aus dem Weingartentensor berechnet werden - und umgekehrt.

Warnung: Obwohl der Weingartentensor symmetrisch ist, ist seine Darstellungsmatrix (bzgl. (X_u, X_v)) normalerweise **nicht** symmetrisch:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Die Gauß-Krümmung ist gegeben durch:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

2.3 Kovariante Ableitung und Krümmungstensor

Definition. 2.13. Die *kovariante Ableitung* eines Tangentialfeldes $Y : M \to V$ entlang $X : M \to \mathcal{E}$ ist der Tangentialteil seiner Ableitung

$$\nabla Y := (dY)^T = dY - \langle dY, N \rangle N,$$

wobei ∇ den *Levi-Civita Zusammenhang* entlang X bezeichnet.

Bemerkung. Wegen $\langle X_{uu}, N \rangle = - \langle X_u, N_u \rangle = e$ usw. bekommt man

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u = X_{uu} - Ne \text{ und } \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} = X_{uv} - Nf$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_v = X_{vv} - Ng \text{ und } \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} = X_{uv} - Nf$$

Wobei

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y := Y_u - \langle Y_u, N \rangle N$$

Lemma. 2.14. *Der L-C Zusammenhang erfüllt die Leibniz-Regel,*

$$\nabla(Yx) = (\nabla Y)x + Ydx \text{ für } x \in C^\infty(M)$$

und ist metrisch*, d.h.,*

$$d \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla Z \rangle$$

Beweis. Die Leibniz-Regel gilt, da für $x \in C^\infty(M)$:

$$\nabla(Yx) = dYx + Ydx - \langle dYx, N \rangle N - \langle Ydx, N \rangle N = (\nabla Y)x + Ydx,$$

weil Y ein Tangentialfeld ist, ist $\langle Ydx, N \rangle = 0$.

Er ist metrisch, da:

$$\begin{aligned} \langle \nabla Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla Z \rangle &= \langle dY, Z \rangle - \langle dY, N \rangle \langle N, Z \rangle + \langle Y, dZ \rangle - \langle Y, N \rangle \langle dZ, N \rangle \\ &= \langle dY, Z \rangle + \langle Y, dZ \rangle = d \langle Y, Z \rangle . \end{aligned}$$

□

Matrixdarstellung: Da die kovariante Ableitung eines TVFs Y tangential ist, erhält man für $Y = X_v$:

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_v\right) &= (X_u, X_v)\Gamma_1 \\ \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_v\right) &= (X_u, X_v)\Gamma_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Eq:Gamma

mit

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \Gamma_{i1}^1 & \Gamma_{i2}^1 \\ \Gamma_{i1}^2 & \Gamma_{i2}^2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt für ein allgemeines TVF $Y = X_u x + X_v y = dX \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \left((X_u, X_v) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_v\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + X_u, X_v \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

$$= (X_u, X_v)\, \Gamma_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (X_u, X_v) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (X_u, X_v) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_1 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{und ebenso} \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y &= (X_u, X_v) \left(\frac{\partial}{\partial v} + \Gamma_2 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2}$$

Eq:Gammaall

oder, anders gesagt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \circ dX = dX \circ \left(\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_1 \right)$$

und genauso

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \circ dX = dX \circ \left(\frac{\partial}{\partial v} + \Gamma_2 \right).$$

Man bemerke: mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cong \dfrac{\partial}{\partial u}$ erhält man

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \left((X_u, X_v) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u = X_u \Gamma_{11}^1 + X_v \Gamma_{11}^2 = (X_u, X_v)\, \Gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \left((X_u, X_v) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u = (X_u, X_v)\, \Gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ebenso für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cong \dfrac{\partial}{\partial v}$, also ist 1 ein Spezialfall von 2

Bemerkung. **WARNUNG:** $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}$ und $\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}$ sind *Differentialoperatoren* (keine Endomorphismen) - trotzdem benutzen wir Matrizen, um sie zu beschreiben.

Lemma und Definition. 2.15. Γ_{ij}^k heißen die *Christoffel-Symbole* von X; sie sind symmetrisch:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

Beweis.

$$X_u\Gamma_{12}^1 + X_v\Gamma_{12}^2 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_v = (X_{vu})^T = (X_{uv})^T = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u = X_u\Gamma_{21}^1 + X_v\Gamma_{21}^2$$

also $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ und $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$. □

Satz 2.16 (Koszul's Formeln)**.** *Mit Matrizen*

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \text{ und } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\frac{1}{2}\mathrm{I}_u - \frac{E_v - F_u}{2}J = \mathrm{I}\Gamma_1,$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{I}_v + \frac{G_u - F_v}{2}J = \mathrm{I}\Gamma_2.$$

Beweis. Multipliziere $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u = X_u\Gamma_{11}^1 + X_v\Gamma_{11}^2$ mit Y_u und X_v, um zu erhalten:

$$E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \left\langle X_u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle X_u, X_u\right\rangle_u = \frac{1}{2}E$$

$$F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = \left\langle X_v, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u \right\rangle = \left\langle X_v, X_u\right\rangle_u - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_v, X_u \right\rangle = \left\langle X_v, X_u\right\rangle_u - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u, X_u \right\rangle$$
$$= F_u - \frac{1}{2}E_v.$$

Insgesamt also

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_u \\ F_u \end{pmatrix} - \frac{E_v - F_u}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} - \frac{E_v - F_u}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Die anderen Teile der Gleichung folgen ebenso.

□

Korollar. 2.17. *Die Christoffel - Symbole Γ_{ij}^k hängen nur von der induzierten Metrik ab.*

Beispiel. Für eine isometrische Parametrisierung, $E = G = 1$ und $F = 0$, erhält man mit den Konszul-Formeln $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Definition. 2.18. Für ein TVf $Y : M \to V$ entlang $X : M \to \mathcal{E}$ definieren wir den *(Riemannschen) Krümmungstensor* R von X durch

$$RY := \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y.$$

Bemerkung. Dies ist eine vereinfachte Form, für Flächen, des "wahren" Krümmungstensors.

Lemma. 2.19. *R ist ein schiefsymmetrischer Tensor des Tangentialbündels TX, d.h., $R\big|_{(u,v)} \in \mathrm{End}(T_{(u,v)}X)$ ist schiefsymmetrisch für jedes $(u,v) \in M$, und*

$$R(Yx) = (RY)x \text{ für } x \in C^\infty(M).$$

Beweis. $R\big|_{(u,v)} \in \mathrm{End}(\mathrm{T}_{(\mathrm{u,v})}\mathrm{X})$ ist klar. Schiefsymmetrie:

$$\frac{1}{2}(|Y|^2)_{uv} = \left\langle Y \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y \right\rangle_v = \left\langle Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y \right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y \right\rangle$$

$$= \left\langle Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y \right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y \right\rangle = \frac{1}{2}\left(|Y|^2\right)$$

$$\Rightarrow \langle Y, RY \rangle = \frac{1}{2}\left(|Y|^2\right)_{vu} - \frac{1}{2}\left(|Y|^2\right)_{uv} = 0$$

Tensoreigenschaft:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} (Yx) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \left(\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y \right) x + Y x_v \right)$$

$$= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y \right) x + \underbrace{\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y \right) x_u + \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y \right) x_v + Y x_{uv}}_{\text{symmetrisch in } \frac{\partial}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial}{\partial v}}$$

also

$$R(Yx) = (RY)x.$$

$\square$

Matrixdarstellung:

Wir arbeiten mit (X_u, X_v) als tangentiales Basisfeld. Damit erhält man

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \circ dX = dX \circ \left(\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_1 \right)$$

und

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \circ dX = dX \circ \left(\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_2 \right)$$

und somit, für $X_u = dX(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ und $X_v = dX(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$,

$$RX_u = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} dX(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} dX(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} dX \left((\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} + \Gamma_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} dX \left((\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} + \Gamma_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= dX \left((\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} + \Gamma_1)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} + \Gamma_2) - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} + \Gamma_2)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} + \Gamma_1) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= dX \left(\Gamma_{2u} + \Gamma_1\Gamma_2 - \Gamma_{1u} - \Gamma_2\Gamma_1 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= dX(\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2]) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

wobei

$$[\Gamma_1, \Gamma_2] := \Gamma_1\Gamma_2 - \Gamma_2\Gamma_1$$

der Kommutator von Γ_1 und Γ_2 ist.

Weil die vorige Rechnung unabhängig von $(1,0)^t$ ist, erhalten wir analog

$$RX_v = dX(\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2]) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also:

$$(RX_u, RX_v) = (X_u, X_v)(\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2]).$$

Andererseits ist R schiefsymmetrisch, weshalb ein $\rho \in C^\infty(M)$ existiert, sodass

$$\begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle X_u, RX_u \rangle & \langle X_u, RX_v \rangle \\ \langle X_v, RX_u \rangle & \langle X_v, RX_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} (\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2]).$$

Man bemerke: ρ hängt nur von der induzierten Metrik ab.

2.4 Die Gauß-Codazzi Gleichungen

Benutze $(X_u, X_v, N) =: F$ als Rahmen, um die Geometrie einer Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ zu untersuchen.

Lemma und Definition. 2.20. Der *(angepasste-) Rahmen* einer Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ ist die Abbildung

$$F = (X_u, X_v, N) : M \to \mathrm{Gl}(3);$$

ihre Strukturgleichungen sind von der Form:

$$
\begin{aligned}
F_u &= F\phi \\
F_v &= F\psi
\end{aligned}
\tag{3}
$$

wobei

$$\phi = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & -s_{11} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & -s_{21} \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -s_{12} \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -s_{22} \\ f & g & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies sind *Gauß-Weingarten Gleichungen* der Fläche $X :\to \mathcal{E}^3$.

Warunung: Im Allgemeinen $F : M \not\to O(3)$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus den Definitionen der

- Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k,
- Komponenten der zweiten Fundamentalform II $\sim \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$,
- Komponenten des Weingartentensors $\mathcal{S} \sim \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$

□

Bemerkung. Klassischer werden die Gauß-Weingarten Gleichungen ausgeschrieben:

$$X_{uu} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u + N_e = X_u\Gamma_{11}^1 + X_v\Gamma_{11}^2 + N_e$$

$$X_{uv} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u + Nf = X_u\Gamma_{12}^1 + X_v\Gamma_{12}^2 + Nf$$

$$X_{vv} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_v + Ng = X_u\Gamma_{22}^1 + X_v\Gamma_{22}^2 + Ng$$

und

$$\begin{aligned} N_u &= -\mathcal{S}X_u = -\left(X_u s_{11} + X_v s_{21}\right) \\ N_v &= -\mathcal{S}X_v - \left(X_u s_{12} + X_v s_{22}\right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - fF & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}.$$

Die Integrierbarkeitsbedingung $F_{uv} = F_{vu}$ liefert die zentralen Gleichungen der Flächentheorie:

Definition. 2.21. Die *Gauß-Codazzi Gleichungen* sind folgende Gleichungen für eine parametrisierte Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$

- $\langle X_u, RX_v \rangle = K(EG - F^2)$ die *Gauß-Gleichung*;
- $(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \mathcal{S})X_v = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \mathcal{S})X_u$ die *Codazzi -Gleichung.*

Hierbei ist $\nabla\mathcal{S}$ die *kovariante Ableitung des Weingartentensorfeldes*; für ein tangentiales Vektorfeld Y gilt:

$$(\nabla\mathcal{S})Y := \nabla(\mathcal{S}Y) - \mathcal{S}(\nabla Y).$$

Bemerkung. Die *partiellen kovarianten Ableitungen* $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S}$ und $\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\mathcal{S}$ sind Tensorfelder, e.g.,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S}\big|_{(u,v)} \in \mathrm{End}(\mathrm{T}_{(\mathrm{u,v})}\mathrm{X})$$

und

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S})(Y_x) = ((\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S})(Y))x \text{ für } x \in C^\infty(M)$$

Beweis. Mit $f = -\langle N_v, X_u\rangle$ und $e = -\langle N_u, X_u\rangle$ berechnen wir

$$\begin{aligned}(X_u)_{vu} &= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}X_u + Nf)_u\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}X_u + N_u f + N\left(f_u + \left\langle N, (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}X_u)_u\right\rangle\right)\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}X_u + N_u f + N\left(f_u - \left\langle N_u, (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}X_u)\right\rangle\right)\end{aligned}$$

und genauso

$$(X_u)_{uv} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}X_u + N_v e + N\left(e_v - \left\langle N_v, (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}X_u)\right\rangle\right).$$

Insgesamt also,

$$\begin{aligned}0 = (X_u)_{vu} - (X_u)_{uv} &= (RX_u - (N_v e - N_u f)) = N((f_u + \left\langle N_v, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}X_u\right\rangle) - (e_v + \left\langle N_u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}X_u\right\rangle)\\
&= (RX_u - (N_v e - N_u f)) + N\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}N_u - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}N_v, X_u\right\rangle.\end{aligned}$$

Skalarprodukt mit X_u und X_v liefert:

$$\langle X_u, RX_u\rangle = \underbrace{\langle X_u, N_v\rangle}_{-f} e - \underbrace{\langle X_u, N_u\rangle}_{-e} f = 0$$

$$\langle X_v, RX_u\rangle = -eg + f^2 = -K(EG - F^2),$$

wobei die erste Gleichung trivial ist (Schiefsymmetrie von R) und die zweite Gleichung liefert uns die Gauß-Gleichung.

Der Normalteil liefert

$$\begin{aligned}0 &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}(\mathcal{S}X_u) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}(\mathcal{S}X_v), X_u\right\rangle\\
&= -\left\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\mathcal{S})X_u - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S})X_v, X_u\right\rangle - \underbrace{\left\langle \mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}X_u - \mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}X_v, X_u\right\rangle}_{=0}\\
&= -\left\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\mathcal{S})X_u - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S})X_v, X_u\right\rangle.\end{aligned}$$

Genauso reproduziert $(X_v)_{vu} = (X_v)_{uv}$ die Gauß-Gleichung (tangentialer Teil) und liefert zusätzlich (normaler Teil):

$$0 = \left\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S})X_v - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\mathcal{S})X_u, X_v\right\rangle.$$

Damit folgt

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S})X_v - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\mathcal{S})X_u$$

und aus $\perp X_u, X_v$ folgt

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S})X_u - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\mathcal{S})X_u = 0,$$

also die Codazzi-Gleichung.

□

Bemerkung. Die Integrierbarkeit $F_{uv} = F_{vu}$ liefert **keine** weiteren Gleichungen : $N_{uv} = N_{vu}$ reproduziert die Codazzi-Gleichung

Matrixdarstellung: Mit

$$(RX_u, RX_v) = (X_u, X_v)(\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2])$$

erhält man für die Gauß-Gleichung

$$K(EG - F^2) = \langle X_u, RX_v \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} (\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2]) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\rho.$$

Die Codazzi-Gleichungen kann man schreiben als

$$\sigma_{2u} + \Gamma_1\sigma_2 = \sigma_{1v} + \Gamma_2\sigma_1$$

mit den Spalten $(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}$ der Matrix des Weingartentensors.

Satz 2.22 (Gauß Theorema egregium). *K hängt nur von* I *ab.*

Beweis. Mit der Gauß-Gleichung folgt

$$K = -\frac{\rho}{EG - F^2},$$

wobei ρ nur von I abhängt.

□

Korollar. 2.23. *Falls eine Fläche eine isometrische (Um-)Parametrisierung besitzt, so ist notwendigerweise $K \equiv 0$.*

Beweis. Für eine isometrische Parametrisierung $\Gamma_{ij}^k = 0$, also $R = 0$ und somit $K \equiv 0$. Da die Gauß-Krümmung eine geometrischen Invariante ist – $\widetilde{K} = K \circ (u, v)$ für eine Umparametrisierung $\widetilde{X} = X \circ (u, v)$ – muss notwendigerweise $K \equiv 0$, falls eine isometrische Parametrisierung existiert. □

Beispiel. Eine Sphäre von Radius $r > 0$ mit Gauß-Krümmung $\dfrac{1}{r^2} \neq 0$ erlaubt also keine isometrische Parametrisierung.

Beispiel. Falls eine Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ Werte in einer Ebene oder Sphäre hat, so sing alle Punkte Nabelpunkte.

Definition. 2.24. Eine Fläche heißt *total nabelsch*, falls jeder Punkt ein Nabelpunkt ist.

Satz 2.25. *Jede total nabelsche Fläche ist Teil einer Sphäre oder einer Ebene.*

Beweis. Ist X total nabelsch, so gilt:

$$\mathcal{S}\big|_{(u,v)} = H(u,v)\mathrm{id}_{T_{(u,v)}X};$$

damit liefert die Codazzi-Gleichung

$$0 = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S})X_v - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\mathcal{S})X_v = H_u X_v - H_v X_u.$$

Insgesamt also,

$$H_u = H_v = 0, \text{ also ist } H \equiv \text{const.}$$

1. Fall, $H \equiv 0$:
   Dann ist $N \equiv$ const. und X ist Teil einer Ebene (siehe 2.2)
2. Fall, $H \equiv$ const. $\neq 0$:
   Dann ist $Z := X + \frac{1}{H}N \equiv$ const., da

$$dZ = dX + \frac{1}{H}dN = dX - \frac{1}{H}\mathcal{S} \circ dX = dX - dX = 0.$$

Also parametrisiert X Teil einer Sphäre mit Zentrum Z und Radius $\frac{1}{H}$,

$$||X - Z||^2 \equiv \frac{1}{H^2}$$

□

Zur Erinnerung: Die Gauß-Codazzi-Gleichungen sind die Integrierbarkeitsbedingungen der Gauß-Weingarten Gleichungen

$$F_u = F\phi, F_v = F\psi \text{ für } F = (X_u, X_v, N), \tag{4}$$ Eq:GausWein

wobei ϕ, ψ und von erster und zweiter Fundamentalform abhängen. Die Gauß-Codazzi Gleichungen lassen sich dann schreiben als:

$$0 = F_{uv} - F_{vu} = (F\phi)_v - (F\psi)_u = F(\phi_v + \psi\phi - \psi_u - \phi\psi) = (\phi_v - \psi_u - [\phi, \psi]).$$

Das heißt, da $F : M \to \mathrm{Gl}(3)$,

$$0 = \psi_u - \phi_v + [\phi, \psi] \tag{5}$$ Eq:GausWein

Damit kann man den Fundamentalsatz von Bounet formulieren:

Satz 2.26. *Gegeben seien zwei Bilinearformen*

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

wobei I *positiv definit ist und* I *und* II *die Gauß-Codazzi Gleichungen erfüllen; dann existiert (lokal) eine parametrisierte Fläche X mit* I *und* II *also erst und zweite Fundamentalform.*

Bemerkung. Im Gegensatz zu den Fundamentalsätzen für Kurven bzw. Streifen benötigen wir hier die Gauß-Codazzi Gleichungen als notwendige und auch hinreichende Bedingungen.

Beweis. Beweis wird im den Notizen des Prof. Jeromin zu finden sein. Er ist ähnlich zu jenem von Streifen und Kurven, aber Gleichungssysteme von partiellen Differentialgleichungen sind zu lösen. Daher reicht Picard-Lindelöff nicht und wir müssen "schwerere Geschütze auffahren". □

3 Curves on surfaces

3.1 Natural ribbon & special lines on surfaces

Definition. 3.1. Let $X : \mathbb{R}^2 \supset M \to \mathcal{E}^3$ a surface and $I \ni t \mapsto X(u(t), v(t))$ with a map $(u, v) : I \to M$ defines a curve on the surface X as soon as $X \circ (u, v)$ is regular:

$$\forall t \in I : (X_u u' + X_v v')(t) \neq 0 \quad \iff \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}(t) \neq 0$$

since $d_{(u,v)}X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injects.

Beispiel. The parameter lines of a surface are the curves

$$t \mapsto X(u, v + t), t \mapsto X(u + t, v).$$

Bemerkung und Definition. 3.2. If $t \mapsto X(u(t), v(t))$ is a curve on a surface $X : M \to \mathcal{E}^3$ than $T_t(X \circ (u, v)) \subset T_{(u(t),v(t))}X$ or equivalently, the unit tangent field is always tangential to the surface

$$T = \frac{X_u u' + X_v v'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}}.$$

Thus the Gauss map N of X yields a unit normal vectorfield for $X_0(u, v)$

$$I \ni t \mapsto N(u(t), v(t)).$$

Hence this defines the *natural ribbon* of the curve. The corresponding frame is called the *Darboux frame.*

Definition. 3.3. A curve $t \mapsto X(u(t), v(t))$ on a surface $X : M \to \mathcal{E}^3$ is called

- a *curvature line* if its natural ribbon is a curvature ribbon, i.e., $\tau = 0$,
- an *asymptotic line* if its natural ribbon is an asymtotic ribbon, i.e., $\kappa_n = 0$.
- an *pre-geodesic line* if its natural ribbon is a geodesic ribbon, i.e., $\kappa_g = 0$.

Bemerkung. A curve is a curvature line iff the Gauss map of X is parallel along the curve.

Satz 3.4 (Joachimsthal's theorem)**.** *Suppose two surfaces intersect along a curve that is a curvature line for one of the two surfaces. Then it is a curvature line for the other surface iff the two surfaces intersect at a constant angle.*

Beweis. Exercise. □

Definition. 3.5. Rodriges' equation: The curve $t \mapsto X(u(t), v(t))$ is a curvature line iff

$$0 = (dN + \kappa dX) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

where κ is a principle curvature of X at $(u, v) = (u(t), v(t))$ and $dX \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ is the corresponding curve direction.

Beweis. The structure equation of the natural ribbon yield

$$\nabla^{\perp}(N \circ (u,v)) = (N \circ (u,v))' - \langle N \circ (u,v)', T\rangle T = N_u u' + N_v v' + \kappa_n \circ (u,v)(X_u u' + X_v v')$$
$$= (dN + \kappa_n dX) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Therefore $t \mapsto (X,N)(u(t),v(t))$ is a curvature ribbon iff $(dN + \kappa_n dX) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$. On the other hand $dN = -\mathcal{S} \circ dX$. Therefore

$$(dN + \kappa_n dX) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = (-\mathcal{S} + \kappa_n id) \circ dX \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$$

iff κ_n is a principle curvature and $dX \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ is the corresponding curve direction. □

Beispiel. Let X be a surface of revolution with Gauss map N (sec 2.2)

$$X(u,v) = O + e_1 r(u)\cos v + e_2 r(u) \sin v + e_3 h(u).$$

and

$$N(u,v) = -e_1 h'(u)\cos v - e_2 h'(u) \sin v + e_3 r'(u)$$

we deduce

$$N_u || X_u \textit{ and } N_v || X_v$$

Hence the parameter line of X are curvature lines.

Satz und Definition. 3.6. $X : M \to \mathcal{E}^3$ is a *curvature line parametrisation* if all parameter lines are curvature lines. Any surface admits locally away form umbilics, a curvature line (re-)parametrisation.

Bemerkung. Suppose X is a curvature line parametrisation then (X_u, X_v) diagonalizes the shape operator, cause these are the Eigenvalues,

$$\mathcal{S}X_u || X_u \quad \mathcal{S}X_v || X_v.$$

Hence, as $\mathcal{S}$ is symmetric, $X_u \perp X_v$ and $N_u = -\mathcal{S}X_u \perp X_v$, or equivalently, $F = f = 0$ where

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

and

$$II = e du^2 + 2f du dv + g dv^2.$$

Conversely, if $f = F = 0$, then X is a curvature line parametrisation. Look at the matrix representation of $\mathcal{S}$.

Lemma. 3.7. *The normal curvature of a curve $t \mapsto X(u(t), v(t))$ on a surface is given by*

$$\kappa_n = \frac{II(\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix})}{I(\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix})}.$$

Beweis. The normal curvature of a ribbon (X, N) is given by

$$\kappa_n = \frac{1}{|X'|} \langle T', N \rangle = \frac{1}{|X'|^2} \langle X'', N \rangle = -\frac{1}{|X'|^2} \langle X', N' \rangle .$$

Applying the chain rule yields the result

$$X' = X_u u' + X_v v', \quad N' = N_u u' + N_v v'.$$

□

Bemerkung und Definition. 3.8. The normal curvature κ_n for a curve on a surface depends only on the tangent direction (and not on u'', v''). Thus we also call it the "normal curvature κ_n of a tangent direction".

Satz 3.9 (Euler's theorem)**.** *The normal curvatures κ_n at a point on a surface satisfy*

$$\min\{\kappa^+, \kappa^-\} \leq \kappa_n(\theta) = \kappa^+ \cos^2\theta + \kappa^- \sin^2\theta \leq \max\{\kappa^+, \kappa^-\},$$

where $\kappa^\pm$ are the principle curvatures and θ is the angle between the tangent direction of $\kappa_n(\theta)$ and the curvature direction of κ^+.

Beweis. Exercise. □

Korollar. 3.10. *The principle curvatures can be characterised as the extremal values of the normal curvature at a point on a surface.*

Korollar. 3.11. *If $t \mapsto (\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix})$ is an asymptotic line, i.e. $\kappa_n = 0$, of X iff*

$$eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 0.$$

Beispiel. The helicoid

$$X(u, v) = O + e_1 \sinh u \cos v + e_2 \sinh u \sin v + e_3 v.$$

Then

$$II = -2dudv.$$

Hence the parameter lines of X are asymptotic lines

$$(II(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})) = II(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 0$$

$$t \mapsto X(u, t) = O + e_1 r \cos t + e_2 r \sin t + e_3 t,$$

where $r = \sinh u$.

Lemma. 3.12. *Fix a point $X(u, v)$ on a parametrised surface that an asymptotic line passes through $X(u, v)$ in two, one or no directions, depending on the sign of the Gauss curvature $K(u, v)$*

3.2 Geodesic and exponential map

Definition. 3.13. The *covariant derivative* of a tangent field $Y : I \to R^3$ along a curve $t \mapsto X(u(t), v(t))$ on a surface $X : M \to \mathcal{E}^3$ is the tangential part of its derivative

$$\frac{D}{dt}Y := Y' - N\langle Y', N\rangle.$$

A geodesic is an acceleration free curve $t \mapsto C(t) = X(u(t), v(t))$ on a surface ,i.e,

$$\frac{D}{dt}C' = 0$$

Beispiel. Circular helices as geodesies a circular cylinders

$$t \mapsto C(t) = O + e_1 r\cos t + e_2 r\sin t + e_3 ht = X(ht, t)$$

is a geodesic on the cylinder of radius $r > 0$, $h \in \mathbb{R}$ constant.

$$C'(t) = -e_1 r\sin t + e_2 r\cos t + e_3 h$$
$$C''(t) = -e_1 r\cos t - e_2 r\sin t \perp X_u(ht, t), X_v(ht, t)$$

Therefore

$$\frac{D}{dt}C' = 0$$

Satz 3.14. *Geodesics are the constant speed pre-geodesic lines ($\kappa_g \equiv 0$)*

Beweis. Firstly, every geodesic has constant speed by the Leibniz' rule.

$$\langle C', C'\rangle' = 2\langle C'', C'\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}C', C'\right\rangle \equiv 0.$$

Secondly, assume $|C'| = \text{const.}$, then

$$\frac{C''}{|C'|^2} = \frac{T'}{|C'|} = \frac{1}{|C'|}(|C'|\kappa_n N - |C'|\kappa_g B)||N \Leftrightarrow \kappa_g = 0 \Leftrightarrow C \text{ is pre-geodesic line.}$$

□

Satz 3.15 (Clairaut's theorem)**.** *For a geodesic on a surface of revolution the quantity* $r\sin(\theta) \equiv$ const. *where $r = r(s)$ is the distance from the axis and $\theta(s)$ is the angle the geodesic makes with the profile curves.*

Beweis. Consider the surface of revolution:

$$X(u, v) = O + e_1 r(u)\cos(v) + e_2 r(u)\sin(v) + e_3 h(u);$$

$$N(u, v) = -e_1 g'(u)\cos(v) - e_2 h'(u)\sin(v) + e_3 r'(u)$$

$C(s) = X(u(s), v(s))$ be a geodesic on a surface of revolution , w.l.o.g., arc length parametrized. Set $C_t(s) = O + A(t)(C(s) - O) = X(u(s), v(s) + t)$ where $A(t)$ is given in matrix form by

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(3).$$

Note that $\forall t \in \mathbb{R}, C_t$ is an arclength parametrized geodesic and

$$\frac{\partial}{\partial t} C_t(s) = \frac{\partial}{\partial t} X(u(s), v(s) + t) = X_v(u(s), v(s) + t$$

and the normal of the normal ribbon for C_t is $s \mapsto N(u(s), v(s) + t$. Set $Y(s) := \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} C_t(s) = X_v(u(s), v(s))$.

$$|Y(s)| = \widetilde{r}(u(s)) = r(s).$$

Therefore the angle $\theta = \theta(s)$ between C and the profile curve satisfies

$$r\sin(\phi) = r\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = r\frac{\langle C', Y\rangle}{|C'||Y|} = \langle C', Y\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial s} C_t, \frac{\partial}{\partial t} C_t \right\rangle \Big|_{t=0}.$$

We want to show $\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial}{\partial s} C_t, \frac{\partial}{\partial t} C_t \right\rangle = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial}{\partial s} C_t, \frac{\partial}{\partial t} C_t \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial^2 s} C_t, \frac{\partial}{\partial t} C_t \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial s} C_t, \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} C_t \right\rangle$$

C_t is geodesic and thus $\frac{\partial^2}{\partial^2 s} C_t || N(u(s), v(s) + t)$ and $\frac{\partial}{\partial t} C_t(s) = X_v(u(s), v(s) + t)$. Hence

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial^2 s} C_t, \frac{\partial}{\partial t} C_t \right\rangle = 0$$

and furthermore

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial}{\partial s} C_t, \frac{\partial}{\partial t} C_t \right\rangle = 0 \text{ fot all } t \in \mathbb{R}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial s}(r\sin(\theta)) = 0.$$

□

Bemerkung. The proof can be generalized for surfaces invariant with respect to 1-parameter families of isometries.

Bemerkung und Beispiel. Clairaut's theorem only provides a necessary condition for a geodesic, not a sufficient one. For example: one sheeted hyperboloid

$$(u, v) \mapsto O + e_1\cosh(u)\cos(v) + e_2\cosh(u)\sin(v) + e_3\sinh(u)$$

Straight line $C(t) = O + e_1 + (e_2 + e_3)t$ is a geodesic in X

$$r\sin(\theta) = \left\langle \frac{C'}{|C'|}, Y \right\rangle = \frac{\cosh(u)\cos(v)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$Y(s) = (-e_1\sin(v(s)) + e_2\cos(v(s)))\cosh(u)$ On the other hand, every circle of latitude in X satisfies $r\sin(\theta) \equiv \cosh(u) \equiv$ const. but in general these are not geodesic.

Differential equations of a geodesic:

Let $Y(t) = X_u(u(t), v(t))x(t) + X_v(u(t), v(t))y(t)$ be a tangent field along a curve $t \mapsto C(t) = X(u(t), v(t))$. Compute the covariant derivative

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial t} Y &= X_u x' + (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u u' + \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u v')x + X_v y' + (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_v u' + \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_v v')y \\
&= X_u x' + (X_u \Gamma^1_{11} u' + X_v \Gamma^2_{11} u' + X_u \Gamma^1_{21} v' + X_v \Gamma^2_{21} v')x \\
&\quad + X_v y' + (X_u \Gamma^1_{12} u' + X_v \Gamma^2_{12} u' + X_u \Gamma^1_{22} v' + X_v \Gamma^1_{22} v')y \\
&= X_u(x' + (\Gamma^1_{11} u' + \Gamma^1_{21} v')x + (\Gamma^1_{12} u' + \Gamma^2_{22} v')y) + X_v(y' + (\Gamma^2_{11} u' + \Gamma^2_{21} v')x + (\Gamma^2_{12} u' + \Gamma^2_{22} v')y)
\end{aligned}$$

Now, let $Y = C' = X_u u' + X_v v'$, we get

$$\frac{D}{\partial t} C' = X_u(u'' + \Gamma^1_{11} u'^2 + 2\Gamma^1_{12} u'v' + \Gamma^1_{22} v'^2) + X_v(v'' + \Gamma^2_{11} u'^2 + 2\Gamma^2_{12} u'v' + \Gamma^2_{22} v'^2).$$

Then we learn that:

eq: geodesic

Definition. 3.16. *Geodesic Equation:* $t \mapsto C(t) = X(u(t), v(t))$ is a geodesic if and only if

$$0 = u'' + \Gamma^1_{11} u'^2 + 2\Gamma^1_{12} u'v' + \Gamma^1_{22} v'^2$$

and

$$0 = v'' + \Gamma^2_{11} u'^2 + 2\Gamma^2_{12} u'v' + \Gamma^2_{22} v'^2.$$

We can also write as

$$0 = u'' + (u', v')\Gamma^1 \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

$$0 = v'' + (u', v')\Gamma^2 \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

with

$$\Gamma^i = \begin{pmatrix} \Gamma^i_{11} & \Gamma^i_{12} \\ \Gamma^i_{21} & \Gamma^i_{22} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. For a geodesic curve $t \mapsto C(t) = X(u(t), v(t))$ we can compute the geodesic curvature of the Darboux frame

$$\frac{d}{\partial t} \frac{C'}{|C'|} = -B|C'|\kappa_g.$$

Take the cross product of this with $T = \dfrac{C'}{|C'|}$

$$-N|C'|\kappa_g = \frac{D}{\partial t}\left(\frac{C'}{|C'|}\right) \times \frac{C'}{|C'|} = \frac{1}{|C'|^2} \frac{D}{\partial t} C' \times C'$$

and thus

$$N\kappa_g = -\frac{1}{|C'|^3} \frac{D}{\partial t} C' \times C'.$$

Comparing $X_u \times X_v$ terms

$$\kappa_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} \det \begin{pmatrix} u' & u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 \\ v' & v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 \end{pmatrix}.$$

Korollar. 3.17. *Geodesics can be determined by the induced metric* I *alone.*

Beispiel. Geodesics on a circular cylinder are the straight lines after developing onto a plane: circular helices. I.e. 3.16 holds for exactly those curves.

Korollar. 3.18. *Given a point* $(u_0, v_0) \in M$ *and a direction* $Y = d_{(u_0,v_0)}X(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix})$ *There exists a unique (maximal) geodesic* $t \mapsto C_Y(t) = X(u(t), v(t))$ *on* $X : M \to \mathcal{E}^3$ *such that*

$$(u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \text{ and } (u'(0), v'(0)) = (x_0, y_0).$$

Bemerkung. The initial conditions 3.18 say that an initial point and a tangential direction are given on the surface, if $X(u_0, v_0)$ is a double point 3.18 also specifies which leaf of the surface $C_Y(t)$ lives on.

Beweis. We are going to use Picard-Lindelöf. Let $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (u, v, u', v')$. Thus we have the system

$$w_1' = w_3$$
$$w_2' = w_4$$

And because of 3.16

$$w_3' = -\Gamma_{11}^1 w_3^2 - 2\Gamma_{12}^1 w_3 w_4 - \Gamma_{22}^1 w_4^2$$
$$w_4' = -\Gamma_{11}^2 w_3^2 - 2\Gamma_{12}^2 w_3 w_4 - \Gamma_{22}^2 w_4^2.$$

So, the initial conditions 3.18 imply that $(w_1, w_2, w_3, w_4)(0) = (u_0, v_0, x_0, y_0)$ and we can use Picard-Lindelöf theorem by which the result follows.

□

lemma:I

Lemma. 3.19. $C_{Ys}(t) = C_Y(st)$ *for* $s \in (0, 1)$

Beweis. Suppose $C_Y : I \to \mathcal{E}^3$ is the geodesic satisfying 3.18, then (for an interval around 0)

$$\frac{D}{\partial t}(C_Y(st)' = \frac{D}{\partial t} C_Y'(st)s = (\frac{D}{\partial t} C')(st)s^2 = 0$$

and also

$$(C_Y(st))'(0) = C_Y'(s0)s = Ys$$

while

$$C_Y(S0) = C_Y(0).$$

By the uniqueness, $C_{Ys}(t) = C_Y(st)$ for $t \in I$ □

Bemerkung. By the smooth dependence of solutions C_Y of the initial value problem, we obtain a smooth map

$$R \times T_{(u_0,v_0)}X \ni (t,Y) \mapsto C_Y(t) \in \mathcal{E}^3,$$

which is defined on an open neighbourhood $I \times U$ of $(0,0) \in R \times T_{(u_0,v_0)}X$ with star shaped U and , w.l.o.g., $I \supset [0,1]$.

Consider all unit tangent vectors $Y \in T_{(u_0,v_0)}X$. Then by Picard-Lindelöf theorem there exists a $\varepsilon_Y > 0$ such that C_Y is defined on $(-\varepsilon_Y, \varepsilon_Y)$. Let Y_{min} be the direction for witch $\varepsilon_{Y_{min}}$ is the smallest possible ε_Y.

If $\varepsilon_{Y_{min}} < 1$, then $C_{Y\frac{\varepsilon_{min}}{2}} = C_Y(\frac{\varepsilon_{min}}{2}t)$ is defined on $[0,1]$, for all Y. let $U \subset B_{\frac{\varepsilon_{min}}{2}}(0)$.

Lemma und Definition. 3.20. Given a point $X(u_0,v_0)$ on a surface $X : M \to \mathcal{E}^3$

$$Y \mapsto \exp(Y) := C_Y(1)$$

defines a smooth map on an open neighbourhood U of $O \in T_{(u_0,v_0)}X$ with

$$d_0 \exp = id_{T_{(u_0,v_0)}X},$$

with $d_0 = \frac{d}{dt}|_{t=0}$. exp is called the exponential map of X at $X(u_0,v_0)$.

Beweis. exp is a smooth dependence of solutions of IVPs. Now we compute $d_0 \exp$ using directional derivatives. Let $Y \in T_{(u_0,v_0)}X$

$$d_0 \exp(Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tY) = \frac{d}{dt}|_{t=0} C_{Yt}(1) = \frac{d}{dt}|_{t=0} C_Y(t) = Y.$$

Therefore $d_0 \exp = id_{T_{(u_0,v_0)}X}$. □

Bemerkung. Thus $\exp : T_{(u_0,v_0)}X \supset U \to X(M)$ yields a local diffeomorphism and in particular a reparametrisation of X around $X(u_0,v_0)$.

3.3 Geodesic polar coordinates and Minding's Theorem

Definition. 3.21. A reparametrisation of a surface by geodesic polar coordinates (r,θ) around a point $X(0,0)$ of a surface is given by the map

$$(r,\theta) \mapsto \exp(e_1 r\cos\theta + e_2 r\sin\theta) = C_{e_1 r\cos\theta + e_2 r\sin\theta}(1),$$

where (e_1, e_2) form an orthonormal basis of $T_{(0,0)}X$.

For fixed θ, $r \mapsto X(r,\theta) = C_{e_1 r\cos\theta + e_2 r\sin\theta}(1) = C_{e_1\cos\theta + e_2\sin\theta}(r)$ and $r \leq 1$. So parameter lines $\theta = const$ are geodesic.

We let $r \leq 1$ in contrast to the Lemma lemma:I 3.19 cause we expect $[0,1] \subset I$.

Bemerkung. This parametrisation is regular at $r = 0$, however it is regular on $(0,\varepsilon) \times \mathbb{R}$ for some $\varepsilon > 0$.

Lemma. 3.22. *In geodesic polar coordinates* (r,θ) *the induced metric is given by*

$$\mathrm{I} = dr^2 + Gd\theta^2$$

where

$$\sqrt{G}|_{r=0} = 0 \text{ and } \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}|_{r=0} = 1.$$

Beweis. This proof is technical, see the notes. □

Beispiel. In geodesic polar coordinates (r,θ) the Gauss curvature is

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}.$$

Korollar. 3.23. *Geodesics are locally the shortest distance between two points.*

Beweis. Let $X : M \to \mathcal{E}^3$ parametrised by geodesic polar coordinates around $X(0,0)$. Let $c(t) = X(r(t),\theta(t))$ be a curve between $X(0,0)$ and $X(r(0),\theta(1))$. Then

$$\int_0^1 |C'(\tilde{t})| \ d\tilde{t} = \int_0^1 \sqrt{r'^2 + G(r,\theta)\theta'^2} \ d\tilde{t} \geq \int_0^1 r' \ d\tilde{t} = r(1).$$

Equality holds iff $\theta' = 0$ or $\theta = const.$

Therefore C is a parameter line of geodesic polar coordinates and thus geodesic (up to reparametrisation of the function r). □

Bemerkung. The surface $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ is an example of why we need locality in the corollary above. Cause there is no shortest distance on that surface between $(1,0)$ and $(-1,0)$.

Satz 3.24 (Minding's theorem)**.** *Any two surfaces with the same* constant *Gauss curvature are locally isometric, i.e., there exists local parametrisations* X_1 *and* X_2 *such that* $I_1 = I_2$.

Beweis. For surface $X : M \to \mathcal{E}^3$ parametrised by geodesic polar coordinates around $X(0,0)$ we have

$$I = dr^2 + Gd\theta^2 \text{ with } \sqrt{G}|_{r=0} \text{ and } \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}|_{r=0} = 1$$

and $K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$. Therefore $\sqrt{G}_{rr} + K\sqrt{G} = 0$ and K is constant. Hence we have an initial value problem (for fixed θ)

$$(\sqrt{G})_{rr} + K\sqrt{G} = 0, \quad \sqrt{G}|_{r=0} = 0, \ \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}|_{r=0} = 1.$$

The unique solution is

$$\sqrt{G} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}r), & K > 0 \\ r, & K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-K}}\sinh(\sqrt{-K}r), & K < 0. \end{cases}$$

Thus G is determined by K and thus so is I. Thus any two surfaces with the same constant Gauss curvature have the same induced metric.

□

4 Manifolds

Motivation: Some problems occur with our definition of curves and surfaces:

- The sphere is not a surface because no regular parametrisation (harry (Potter? WTF Jojo?) ball theorem)
- The hyperbola is no a surface, because it has two components thus it can not be parametrised by a single regular map on an open interval.

The notion of a submanifold resolves these problems at the expense of imposing other restrictions.

4.1 Submanifolds of $\mathcal{E}^n$

There are several equivalent characterisations of submanifolds in $\mathcal{E}^n$.

Definition. 4.1 (1. A submanifols can be locally flattened)**.** $M \subset \mathcal{E}^n$ is called a k-dimensional submanifold of $\mathcal{E}^n$ if for all $p \in M$ there exists a diffeomorphism $\phi : U \to \tilde{U}$, where $U \subset \mathcal{E}^n$ is an open neighbourhood of p and $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ is an open neighbourhood of 0 such that

$$\phi(M \cap U) = \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}),$$

where $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$.

Definition. 4.2 (2. A submanifold is locally a level set)**.** $M \subset \mathcal{E}^n$ is a k-dimensional submanifold of $\mathcal{E}^n$ if for all $p \in M$ there exist open neighbourhood $U \subset \mathcal{E}^n$ of p and a submersion $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ such that

$$M \cap U = F^{-1}\{0\}.$$

Where $dpF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjects for all $p \in U$.

Bemerkung. In the definition above th is sufficient to require that $dpF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjects: if dpF surjects then since $p \mapsto dpF$ is continuous, dpF surjects by the inertia principle on some open neighbourhood $\tilde{U} \subset U$ of p.

Definition. 4.3 (3. A submanifold can be locally parametrised)**.** $M \subset \mathcal{E}^n$ is a k-dimensional submanifold of $\mathcal{E}^n$ if for all $p \in M$ there exists an immersion $X : V \to U$ from an open neighbourhood $V \subset \mathbb{R}^k$ of 0 to an open neighbourhood $U \subset \mathcal{E}^n$ of p such that

$$M \cap U = X(V)$$

and $X : V \to M \cap U$ is a homeomorphism (with respect to the induced topology on $M \cap U$).

A homeomorphism is continuous and bijective.

Bemerkung. We get the following exlusions:

- X being an immersion excludes ”kinks” such as the singularity of the nilparabola.
- X being injective excludes self intersections.
- Continuity of X^{-1} excludes ”T-junctions”.

Beweis. Proof of equivalence of these definitions:

For $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ we define the submersions

$$\pi_1 : \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k, (x,y) \mapsto x,$$

$$\pi_2 : \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}, (x,y) \mapsto y.$$

First we proof 1. implies 2.:

Let $F := \pi_2 \circ \phi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$. F is a submersion.

Secondly we proof 1. implies 3.:

With $V = \pi_1(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^k$ we can have

$$X := \phi^{-1}\big|_v : V \to U$$

is the necessary map. If you are bored, you can check that this is an homeomorphism.

Now we proof 3. implies 1.:

Let $X : \mathbb{R}^k \supset V \to \mathcal{E}^n$ parametrisation of $M \cap U = X(V)$. Assume that $X(0) = p$. Let $(t_1, \ldots, t_{n-k})$ be an orthonormal basis of $d_0 X(\mathbb{R}^k)^\perp \subset \mathbb{R}^n$. Define

$$C \times \mathbb{R}^{n-k} : (x,y) \mapsto \psi(x,y) = X(x) + \sum_{i=1}^{n-k} t_i y_i, \quad y = (y_1, \ldots, y_{n-k}).$$

Then

$$d_0\psi(v,w) = \underbrace{d_0X(v)}_{\in d_0X(\mathbb{R}^k)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-k} t_i w_i}_{\in (d_0X(\mathbb{R}^k))^\perp} = 0$$

iff $w_i = 0$ for all i and $v = 0$ or $(v,w) = 0$.

Then we use the inverse mapping theorem, ψ has a smooth local inverse

$$\phi = (\psi|_{\tilde{U}})^{-1} : \psi(\tilde{U}) \to \tilde{U}$$

where $\tilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^k$ open neighbourhood of 0. Without loss of generality, assume that $\psi(\tilde{U}) \subset U$ (otherwise take the intersection with U). Now, $q \in M \cap \psi(\tilde{U})$ implies there exists a $x \in V$ such that $q = X(x) = \psi(x,0) \in \psi(\tilde{U})$. On the other hand

$$(x,0) \in \tilde{U} \Rightarrow \psi(x,0) = X(x) \in M$$

with means that $q = X(x) \in M \cap \psi(\tilde{U})$.

After replacing $\psi(\tilde{U})$ with U, then $\phi(U \cap M) = \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$.

2. $\Rightarrow$ 1. $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ submersion. Let $t_1, \ldots, t_n$ be an orthonormal basis of $\mathbb{R}^n$ such that $t_1, \ldots, t_k$ is an orthonormal basis of $\ker d_pF$. Write $\mathbb{R}^n = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ then $q \in U \Rightarrow q = p + \sum_{i=1}^n t_i q_i$ and

$$\phi : U \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \phi(q) = \sum_{i=1}^k e_i q_i + F(q)$$

$$d_p\phi(v) = \sum_{i=1}^{k} e_i v_i + d_p F(v) = 0 \text{ for } v = \sum_{i=1}^{k} t_i v_i$$

is equivalent to $d_p F(v) = 0$ and thus $v \in \ker d_p F$ and also to

$$\sum_{i=1}^{k} e_i v_i = 0 \text{ thus } \forall i v_i = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Thus $d_p\phi$ is invertable and by the Inverse Mapping Theorem

$$\phi : U \to \phi(U) \text{ is a diffeomorphism (maybe after shrinking } U).$$

Now, $q \in M \cap U \Leftrightarrow F(q) = 0 \Leftrightarrow \phi(q) \in \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Thus $\phi(M \cap U) = \phi(U) \cap (R^k \times \{0\})$ □

Beispiel. The following are manifolds:

1. Plane: $\pi = \{p \in \mathcal{E}^3 : \langle p - O, n \rangle = d\}$, $F : \mathcal{E}^3 \to \mathbb{R}, F(q) = \langle p - O, n \rangle - d$ then $\pi = F^{-1}(\{0\})$. Also, $d_p F(v) = \langle v, n \rangle$ and hence $d_p F \not\equiv 0$. Thus $d_p F$ surjects and F is a submersion.
2. Sphere: $S = \{p \in \mathcal{E}^3 \mid \langle p - O, p - O \rangle = r^2\}$ and S is implicitly given by the function $F : \mathcal{E}^3 \to \mathbb{R}, F(p) = \langle p - O, p - O \rangle - r^2$. Here $d_p F(v) = 2\langle v, p - O \rangle$ and $d_p F$ surjects as long as $p \not\equiv 0$ which does not happen in S. $F\big|_{\mathcal{E}^3 \setminus \{0\}}$ is a submersion.
3. Hyperboloids: $O + e_1 x + e_2 y + e_3 z$ such that $F_\pm(O + e_1 x + e_2 y + e_3 z) = 0$ where

$$F_\pm(O + e_1 x + e_2 y + e_3 z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \pm 1$$

and

$$\nabla F = 2\left(e_1 \frac{x}{a^2} + e_2 \frac{y}{b^2} + e_3 \frac{z}{c^2}\right).$$

Then $\nabla F = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = 0$. Therefore $F\big|_{\mathcal{E}^3 \setminus \{0\}}$ is a submersion with $\langle \nabla F, v \rangle = dF(v)$.

Beispiel. A counterexample is the following *Lemniscate*. $O + e_1 x + e_2 y$, where $x^4 - x^2 + y^2 = 0$. A regular parametrization is given by $t \mapsto O + e_1 x(t) + e_2 y(t) = O + e_1 \sin(t) + e_2 \sin(t)\cos(t)$. The curve has a self-intersection at $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ which is equivalent to $\forall k \in \mathbb{Z} t = k\pi$. Hence this is not a 1-Dimensional submanifold.

Definition. 4.4. The tangent space of a k-dimensional submanifold $M \subset \mathcal{E}^n$ of $p \in M$ is the k-dimensional subspace

$$T_p M = d_o X(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$$

where $X : \mathbb{R}^k \supset V \to \mathcal{E}^n$ is a parametrisation of M around $p = X(o)$.

Bemerkung. $T_p M$ is independent of the parametrisation X.

Let $\tilde{X} = X_o \mu$ around $p = \tilde{X}(\tilde{o})$ where $\mu : \tilde{V} \to V$ is a diffeomorphism with $\mu(\tilde{o}) = o$. Then

$$d_o \tilde{X} = d_{\tilde{o}}(X \circ \mu) = (d_o X) \circ d_{\tilde{o}} \mu.$$

Therefore

$$d_{\tilde{o}} \tilde{X}(\mathbb{R}^k) = (d_o X)(d_{\tilde{o}} \mu(\mathbb{R}^k)) = d_o X(\mathbb{R}^k).$$

Bemerkung. If we have $M = F^{-1}(\{0\})$ is defined as the level set of a submersion $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ then

$$T_pM = \ker d_pF.$$

This follows from the following: $F \circ X = 0$ for any parametrisation $X : V \to \mathcal{E}^n$ around $p = X(o)$. Then the chain rule gives us

$$0 = d_o(F \circ X) = (d_oF) \circ d_oX.$$

$$0 = (d_pF) \circ (d_oX(\mathbb{R}^k)) = (d_pF)(T_pM).$$

Therefore $T_pM \subset \ker d_pF$. But since F is a submersion $\dim(\ker d_pF) = k$ and $\dim(T_pM) = k$.

Beispiel. Lets consider the set of orthogonal maps

$$O(3) = \{A \in \mathrm{GL}(3) : AA^T = id\} = \{A \in \mathrm{GL}(3) : F(A) = 0\}$$

where $F : \mathrm{GL}(3) \to \mathrm{Sym}(3), F(A) = AA^T - id$. Sym(3) is a 6-dimensional vector space.

$$d_AF : \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \to \mathrm{Sym}(3), d_AF(B) = BA^T + AB^T.$$

This surjects since any element of Sym(3) can be written as $Y + Y^T$ so let $B = YA$. Hence F is a submersion and $O(3)$ is a 3-dimensional submanifold of $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \approx M_{3\times 3}$.

$$d_AF(B) = 0 \iff BA^T + AB^T = 0 \iff BA^T \in \square(3),$$

where $\square(3)$ is the skew-symmetric-endomorphisms. Therefore

$$T_AO(3) = \{B \in \mathrm{GL}(3) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) | BA^T \in \square(3)\}$$

with is 3-dimensional and

$$T_ASO(3) = T_AO(3), \quad A \in SO(3).$$

This is an example of a Lie-group

Aufgabe. Think about $\mathrm{GL}(n)$ and $\mathrm{SL}(3)$.

Fun-fact:

$$\mathrm{End}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Sym}(n) \oplus \square(n).$$

4.2 Functions on submanifolds

Perviosly functions, vector fields etc. were defined on open sets of affine spaces, where notions of differentiability makes sense. Now we want to consider functions on domains that are submanifolds of $\mathcal{E}^n$. To do this we define derivatives so that the chain rule holds.

Definition. 4.5. A function $\phi : M \to \mathcal{E}$ on a submanifold $M \subset \mathbb{R}^n$ is said to be differentiable at $p \in M$ with derivative

$$d_p\phi := d_0(\phi \circ X) \circ (d_oX)^{-1} : T_pM \to \mathbb{R}$$

if $\phi_oX : \mathbb{R}^k \supset V \to \mathcal{E}$ is differentiable at o for some local parametrisation $X : V \to M$ of M around p with $X(o) = p$.

Bemerkung. This definition makes sense as it does not depend on our choice of parametrisation X.

Let $\tilde{X} = X \circ \psi$ is a reparametrisation at $p \in M$ for some diffeomorphism ψ then $\phi \circ \tilde{X} = \phi \circ X \circ \psi$ is differentiable as soon as $\phi \circ X$ is differentiable. Moreover, if we assume $\psi(o) = o$ then

$$d_o(\phi \circ \tilde{X}) \circ (d_o\tilde{X})^{-1} = d_o(\phi \circ X \circ \psi) \circ (d_o(X \circ \psi))^{-1}$$
$$= d_o(\phi \circ X) \circ d_o\psi \circ (d_o\psi)^{-1} \circ (d_oX)^{-1} = d_o(\phi \circ X) \circ (d_oX)^{-1}.$$

This definition can be easily generalised to $\mathcal{E}^n$-valued maps and thus to maps between submanifolds.

Bemerkung. Suppose that $\Phi : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}$ is differentiable and M is a submanifold of $\mathcal{E}^n$. Thus $\phi := \Phi\big|_M : M \to \mathcal{E}$ is differentiable with

$$d_p\phi = d_p\Phi\big|_{T_pM} : T_pM \to \mathbb{R}, \quad p \in M.$$

Let $X : V \to M$ be a parametrisation of M around $p = X(o)$, then $\phi \circ X = \Phi \circ X$ is differentiable and for $\xi = d_oX(x)$ then

$$d_p\phi(\xi) = d_o(\phi \circ X) \circ (d_oX)^{-1}(\xi) = d_0(\Phi \circ X)(x) = (d_{X(o)}\Phi) \circ d_oX(x) = d_p\Phi(\xi).$$

Definition. 4.6. Let $\phi : M \to \mathcal{E}$ be differentiable. Then the gradient of ϕ at $p \in M$ is the unique vector field $\operatorname{grad}\phi(p) \in T_pM$ with

$$d_p\phi(\xi) = \langle \xi, \operatorname{grad}\phi(p) \rangle, \quad \forall \xi \in T_pM.$$

Since $d_p\phi : T_pM \to \mathbb{R}$, $d_p\phi \in (T_pM)^*$, with Riesz-Fischer $\exists!$ vector $v \in T_pM$ such that $d_p\phi = \langle ., v \rangle$

Beispiel. Suppose $\mathbb{R}^2 \supset V \in (u,v) \mapsto X(u,v) \in \mathcal{E}^3$ is a parametrised surface with $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$. Let

$$X_u^* := \frac{1}{EG - F^2}(GX_u - FX_v), \quad X_v^* := \frac{1}{EG - F^2}(-FX_u + EX_v) \in T_{(u,v)}X.$$

Cause

$$\langle X_u^*, X_u \rangle = \langle X_v^*, X_v \rangle = 1, \quad \langle X_u^*, X_v \rangle = \langle X_v^*, X_u \rangle = 0$$

X_u^*, X_v^* is a dual basis.

Now let $\phi : M = X(V) \to \mathcal{E}$ be a differentiable function and define $\psi := \phi \circ X$. Then $\xi = d_{(u,v)}X(x) \in T_{X(u,v)}M$ and

$$\langle \operatorname{grad}\phi(X(u,v)), \xi \rangle = d_{X(u,v)}\phi(\xi) = (d_{(u,v)}\psi)(x).$$

Thus

$$\langle \operatorname{grad}\phi \circ X, X_u \rangle = \psi_u, \quad \langle \operatorname{grad}\phi \circ X, X_v \rangle = \psi_v.$$

Hence

$$\operatorname{grad}\phi \circ X = X_u^*\psi_u + X_v^*\psi_v = \frac{G\psi_u - F\psi_v}{EG - F^2}X_u + \frac{E\psi_v - F\psi_u}{EG - F^2}X_v,$$

where

$$\operatorname{grad}\phi \circ X = V \to TM.$$

Now we know how to differentiate functions on submanifolds : we can find analogues of notions such as I & II, shape operator, covariant derivative.

Definition. 4.7. Let ξ be a tangential verctor field, i.e., $\xi : M \to \mathbb{R}^n$ such that $\forall p \in M(\xi(p) \in T_pM)$. Let $\eta \in T_pM$. Then

$$\nabla_\eta \xi\big|_p = (d_p\xi(\eta))^T = (d_o(\xi \circ X)(y))^T$$

where $X : V \to \mathcal{E}^n$ is a local parametrisation of M at p with $p = X(o)$ and $d_oX(y) = \eta$. As usual $(\dots)^T$ denotes the tangential part, i.e., the orthogonal projection $\mathbb{R}^n \to T_pM$. ∇ is called the *Levi-Civita connection.*

Bemerkung. In case of parametrised surfaces $X : V \to \mathcal{E}^3$, $M = X(V)$. Then $Y := xi : V \to \mathcal{E}^3$ tangential vector field in the sense of chaper 2.

$$\nabla_\eta \xi = \nabla_y Y \quad d_{(u,v)}X(y) = \eta \quad X(u,v) = p$$

This yields a notion of second derivatives on surfaces:

Definition. 4.8. The *Hessian* of $\phi : M \to \mathcal{E}$ at $p \in M$

$$T_pM \times T_pM \ni (\xi, \eta) \mapsto (\mathrm{hess}\phi)\big|_p(\xi,\eta) = \left\langle \eta, \nabla_\eta \mathrm{grad}\phi\big|_p \right\rangle$$

is a symmetric tensor.

Beweis. Exercise/technical. □

Bemerkung. The Hessian is the covariant derivative of $d\phi : M \times TM \to \mathbb{R}$, $\xi, \eta : M \to TM$

$$\mathrm{hess}\phi(\xi,\eta) = d(d\phi(\eta)(\xi) - d\phi(\nabla_\xi \eta) ='' (\nabla_\xi d\phi)(\eta)''$$

The Hessian depends on the covariant derivative, hence on the induced metric,not just on the differentiable structure on M.

Lemma. 4.9 (Poincaré Lemma)**.** *A tangential vector field $\xi : M \to \mathbb{R}^n$ has a local potential, i.e., locally $\xi = \mathrm{grad}\phi$, if and only if*

$$(\nu, \eta) \mapsto \langle \eta, \nabla_\nu \xi \rangle$$

is symmetric.

Beweis. We saw in the Lemma above that symmetry of $(\nu,\eta) \mapsto \langle \eta, \nabla : \nu\xi \rangle$ is a necessary condition for $\xi = \mathrm{grad}\phi$. For sufficiency, let $X : V \to M \cap U$ be a local parametrisation. Let $\xi_1, \dots, \xi_k : M \to \mathbb{R}^k$ be a tangential v.f. such that $\xi_i \circ X = \dfrac{\partial X}{\partial x_i} = dX(\dfrac{\partial}{\partial x_i})$. Then given $\xi : M \to \mathbb{R}^n$ we seek a function $\psi : V \to \mathbb{R}$ such that $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} = \langle \xi_i, \xi \rangle \circ X$. Then

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\langle \xi_i, \xi \rangle \circ X) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi : j \circ X), \xi \circ X \right\rangle + \left\langle \xi_j \circ X, \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi \circ X) \right\rangle$$

then by the Leibniz rule:

$$= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\xi_j \circ X), \xi \circ X \right\rangle + \left\langle \xi_j \circ X, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\xi \circ X) \right\rangle = \left[\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi_i}} \xi_j, \xi \right\rangle + \left\langle \xi_j, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi_i}} \xi \right\rangle \right] \circ X$$

LHS is symmetric as soon as $\langle \xi_j, \nabla_{\xi_i}\xi\rangle$ is. (N.B. $\nabla_{\xi_i}\xi_i$ because ∇ is "torsion free".) By Poincaré's Lemma $\exists \psi : V \to \mathbb{R}$ such that $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} = \langle \xi_i, \xi \rangle \circ X$. Now define $\phi = \psi \circ X^{-1} : X(v) \to \mathbb{R}$. Check that $\xi = \mathrm{grad}\phi$. □

Lemma. 4.10. *Suppose that $X : \mathbb{R}^n \supset V \to \mathcal{E}^n$ is a local parametrisation of $M \subset \mathcal{E}^n$. Then*

$$\nabla_{\xi_i}\xi_j - \nabla_{\xi_j}\xi_i = 0,$$

where ξ_i, ξ_j are vector fields so that $\xi_i \circ X = \frac{\partial X}{\partial x_i}, \xi_j \circ X = \frac{\partial X}{\partial x_j} = dX\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$.

Beweis.

$$(\nabla_{\xi_i}\xi_j) \circ X = (d\xi_j(\xi_i) \circ X)^T = \left(d(\xi_j \circ X) dX^{-1}(\xi_i \circ X)\right)^T$$

$$= \left(d\left(\frac{\partial X}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)^T = \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_j \partial x_i}\right)^T.$$

similarly

$$\left(\nabla_{\xi_j}\xi_i\right) \circ X = \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}\right)^T.$$

Since Schwarz the mixed partial derivatives commute, nothing is left to proof. □

4.3 Vector fields and flows

Definition. 4.11. Let $\xi : M \to \mathbb{R}^n$ be a (tangential) vector field on a k-dimensional submanifold $M \subset \mathcal{E}^n$. A curve $C : I \to M$ on an open interval $I \subset \mathbb{R}$ is called an *integral curve of* ξ if

$$C' = \xi \circ C.$$

It is maximal if it cannot be extended as an integral curve.

Bemerkung. We do not require regularity. For example we could have $\xi = 0$. Then all integral curves are constant.

Lemma. 4.12. *Through any point $p \in M$ passes a unique maximal integral curve of a vector field ξ.*

Beweis. Let $X : V \to M$ be a local parametrisation of M around $X(o) = p \in M$ and write $\xi \circ X = dX(y)$, i.e.,

$$\xi \circ X(\tilde{o}) = d_{\tilde{o}}X(y(\tilde{o}))$$

for all $\tilde{o} \in V$ and $y : V \to \mathbb{R}^k$.

The ansatz $C = X \circ \gamma$ yields
$$C' = \xi \circ C$$
iff
$$dX \circ \gamma' = dX(y \circ \gamma).$$
Since $d_{\tilde{o}}X$ is an isomorphism for all $\tilde{o} \in V$, this holds for all $\gamma' = y \circ \gamma$. Then by applying Picard-Lindelöf then the initial-value-problem (IVP)

$$\gamma' = y \circ \gamma, \qquad \gamma(0) = o$$

has a solution $\gamma : J \to V$ on some open interval $J \subset \mathbb{R}$ with $0 \in J$. This is unique up to extension. $\square$

The max integral curves of a vector field ξ can be assembled into a single map.

Satz und Definition. 4.13. Give a smooth tangential vector field ξ on a submanifold M. There exists an unique smooth map called its *maximal flow*

$$\Phi : W \to M, \quad (t, p) \mapsto \Phi_t(p)$$

on an open neighbourhood W of $\{0\} \times M \subset \mathbb{R} \times M$ so that

1. $\Phi_0 = id$
2. $I_p := \{t | (t, p) \in W\}$ is an open interval containing 0 for all $p \in M$
3. $I_p \ni t \mapsto \Phi_i(p)$ is the maximal integral curve of ξ through p.

Beweis. 1),2) and 3) uniquely define Φ.

Check that $W = \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\}$ is an open subset of $\mathbb{R} \times M$ and that Φ is smooth. The smoothness dependence on the initial conditions. $\square$

Bemerkung und Definition. 4.14. If $M \subset \mathcal{E}^n$ is compact (closed and bounded) or more generally, ξ is compactly supported on M, i.e., there exists a compact $V \subset M$ such that $\xi|_{M \setminus V} = 0$, then
$$W = \mathbb{R} \times M, \text{ anf}\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t.$$
Moreover $\Phi_t : M \to M$ is a diffeomorphism for any fixed $t \in \mathbb{R}$ and thus $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ defines a 1-parameter group of diffeomorphisms. This is a subgroup of the group of diffeomorphisms from M to M and is often called *flow*.

Beispiel. Let $M = \{p \in \mathcal{E}^3 : \langle p - O, p - O \rangle = 1\}$ be the unit sphere centred around O. Define $\xi(p) = e_3 \times (p - O)$. This resembles the rotation of the earth.

If we write $p = O + e_1 x + e_2 y + e_3 z$ then

$$\xi(p) = -e_1 y + e_2 x$$

and
$$\Phi_t(p) = e_1(x \cos t - y \sin t) + e_2(x \sin t + y \cos t) + e_3 z.$$

Bemerkung. (c.f., $C_t(s)$ in Clairaut's theorem) resembles the flow $\Phi_t(C(s))$ on a surface of revolution.

WARNING: In the case ξ is not compactly supported there may not be an $\varepsilon > 0$ such that $W \supset (-\varepsilon, \varepsilon) \times M$. For example, with

$$M = \{O + e_1 u + e_2 v : |u| < 1\} \subset \mathcal{E}^2 \text{ and } \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The flow for some fixed $p = O + e_1 u + e_2 v$ is

$$\Phi_t(p) : (-1 - u, 1 - u) \ni t \mapsto O + e_1(u + t) + e_2 v.$$

Therefore we cannot obtain a 1-parameter group of diffeomorphisms $M \to M$.

However, we obtain a *local flow*.

Bemerkung. In general, the maximal flow $\Phi : W \to M$ is a local flow, i.e., There exists an open neighbourhood $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \subset M$ of $(0, p)$ for any point $p \in M$ such that

1. $\Phi_t|_U : U \to \Phi_t(U)$ is a diffeomorphism for all $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
2. $\Phi_{s+t}(q) = (\Phi_s \circ \Phi_t)(q)$ wherever $q \in U$ and $s, t, a + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Beweis.
1. Fix $p \in M$. Since $W \subset \mathbb{R} \times M$ there exists an open neighbourhood U of p and an $\varepsilon > 0$ such that $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \subset E$ (box topology). Since $\Phi_0|_U = id_U$ is a diffeomorphism, by inertia, $\Phi_t|_U$ is a diffeomorphism for all $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Perhaps after shrinking.
2. Suppose $s \mapsto C(s) = \Phi_{s+t}(q)$ for a fixed t. Then

$$C'(s) = \xi \circ C(s) \text{ and } C(0) = \Phi_t(q) \in M,$$

i.e., C is the integral curve of ξ through $\Phi_t(q)$. Hence by uniqueness $C(s) = \Phi_s \circ \Phi_t(q)$.

□

Bemerkung. $\xi : M \to \mathbb{R}^n$ is a tangential vector field and let $\phi : M \to \mathbb{R}$ be a differentiable function. Then we define a new function

$$\xi\phi : M \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto (\xi\phi)(p) := (d_p\phi)(\xi(p)).$$

Thus, we can think of a vector field ξ as a differential operator yielding a directional derivative of ϕ at each point. In particular, $\phi \mapsto \xi\phi$ is linear and the Leibniz-rule

$$\xi(\phi\psi) = (\xi\phi)\psi + \phi(\xi\psi)$$

holds. In abstract definition of manifolds, vector fields are often characterized in this way.

Lemma. 4.15. *If $((\xi\phi)(p) = 0$ for all functions $\phi : M \to \mathbb{R}$ then $\xi(p) = 0$*

Beweis. Let $X : V \to M$ be a local parametrization of M around $p = X(o)$. Consider the "coordinate functions":

$$\phi_i = \pi_i \circ X^{-1} : X(v) \to \mathbb{R}$$

where $\pi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad (y_1, \ldots, y_k)^t \mapsto y_i$. We use these as test functions: Let $y = (y_1, \ldots, y_k)^{\in}\mathbb{R}^k$ such that $\xi(p) = d_oX(y)$. Then $(\xi\phi_i)(p) = (d_o\phi_i)(\xi(p)) = d_o(\phi_i \circ X)(d_oX)^{-1}(d_oX(y)) = d_o\pi_i(y) = y_i$. This holds for all i thus $y = 0 \Rightarrow \xi(p) = 0$.

□

Lemma und Definition. 4.16. Let $\circ, \eta$ ne smooth vector fields on M. Then there is exactly one vetor field $[\xi, \eta]$ on M such that, for every smooth function $\varphi : M \to \mathbb{R}$,

$$[\xi, \eta]\varphi = \xi(\eta\varphi) - \eta(\xi\varphi).$$

$[\xi, \eta]$ is called the *Lie bracket of* ξ *and* η.

Beweis. Let $X : V \to M$ be a parametrisation of M around p. Let ξ_i be a vector field such that $\xi_i \circ X = \frac{\partial X}{\partial x_i}$. Thus

$$(\xi_i\phi) \circ X = (d\phi)(\xi_i) = d(\phi_o X) \circ dX^{-1}(\xi_i \circ X) = d(\phi \circ X)(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi \circ X).$$

Then

$$(\xi_i(\xi_j\phi) - \xi_j(\xi_i\phi)) \circ X = \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_j\phi \circ X) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi_i\phi \circ X) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial(\phi \circ X)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial(\phi \circ X)}{\partial x_i}) = 0$$

since mixed partial derivatives commute.

$\{\xi_1(p), \ldots, \xi_k(p)\}$ for a basis for $T_pM, \forall p \in M$ Write $\xi = \sum_{i=1}^k \alpha_i\xi_i$ and $\eta = \sum_{i=1}^k \beta_i\xi_i$ for some differentiable functions α_i, β_i. Now, by the Leibniz rule

$$\xi(\eta\phi) - \eta(\xi\phi) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\alpha_j(\xi_j\beta_i) - \beta_j(\xi_j\alpha_i))(\xi_i\phi_i).$$

Thus with $[\xi, \eta] := \sum_{j=1}^k (\alpha_j(\xi_j\beta_i) - \beta_j(\xi_j\alpha_i))\xi_i$ we have that

$$[\xi, \eta]\phi = \xi(\eta\phi) - \eta[\xi\phi]$$

for all functions $\phi : M \to \mathbb{R}$. By the previous lemma, this is the unique vector field with this property. □

Bemerkung. Properties of Lie bracket:

- skew symmetric: $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$ and
- Jacobi identity: $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\zeta, [\xi, \eta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] = 0$.

Definition. 4.17. Thus with the Lie bracket as multiplication, the vector space of smooth vector fields is a *Lie algebra*. This defines a Lie algebra.

Bemerkung. We saw in the above proof that $[\xi_i, \xi_j] = 0$. ww know from a previous lemma that

$$\nabla_{\xi_i} \xi_j - \nabla_{\xi_j} \xi_i = 0$$

for ∇ the Levi-Civita connection. One can deduce that

$$[\xi, \eta] = \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi$$

for all vector fields ξ, η on M. This property of ∇ is known as ”torsion free”.

Definition. 4.18. Two vector fields ξ, η *commute* if $[\xi, \eta] = 0$.

Beispiel. Not all vector fields commute. $M = X(V)$, $X : \mathbb{R}^2 \supseteq V \to \mathcal{E}^3$ parametrized surface. Let $\xi_i : V \to \mathbb{R}' \xi_i \circ X = \frac{\partial X}{\partial x_i}$. Let $Y = \xi_1 + a\xi_2$ where a satisfies $a \circ X = \phi_1(x) = x_1$. Since

$$[\xi_1, a\xi_2]\varphi = \xi_1(a\xi_2\varphi) - a\xi_2(\xi_1\varphi) = (\xi_1 a)\xi_2\varphi + a\xi_2(\xi_1\varphi) - a\xi_2(\xi_1\varphi) = (\xi_1 a)\xi_2\varphi$$

we get

$$[\xi_1, Y] = [\xi_1, \xi_1] + [\xi_1, a\xi_2] = (\xi_1 a)\xi_2$$

and

$$(\xi_1 a) \circ X = (da(\xi_1)) \circ X = d(a \circ X) \circ (dX^{-1})(\xi_1) = \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = 1.$$

Hence, $[\xi_1, Y] = \xi_2 \neq 0$.

Das Logbuch ist unter *http://www.geometrie.tuwien.ac.at/hertrich-jeromin/tea/2018dgtm.txt* zu finde.