DiffGeo

Luka Ilić, Johannnes Mader, Jakob Deutsch, Fabian Schuh

1. April 2018

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das folgende Skriptum ist begleitend zur Vorlesung Differentialgeometrie gehalten von Univ.Prof. Hertrich - Jeromin und wird von einigen Studenten (oben angeführt) während der Vorlesung geschrieben und danach auf Fehler kontrolliert und bearbeitet. Natürlich schleichen sich nach Möglichkeit Fehler ein, die übersehen werden, dies ist gerne bei den schreibenden Personen anzumerken. Das Skriptum enthält großteils das Tafelbild der Stunden und keinenfalls die Garantie in irgendeiner Weise vollständig zu sein. (Wir geben unser Bestes.)

Viel Vergnügen mit DiffGeo!

Bemerkung. **Literaturempfehlung** (zusätzlich):

1. Strubecker: Differentialgeometrie I - III; Sammlung Göschen
2. Spivak: A comprehensive Introduction to Diffenrential Geometry I - V; Publisher Perish
3. O'Neil: Semi.Riemannian Geometrie; Acad. Press
4. Hicks: Notes on Differential Geometry (Es gibt (möglicherweise nicht legale) Versionen im Internet.)
   (ersteres ist kompakter, zweiteres eher komplementär gedacht, drittes für Physik-Interessierte, letzteres vergleicht die Methoden der Differentialgeometrie)

1 Kurven

1.1 Parametrisierung und Bogenlänge

Wiederholung: Ein Euklidischer Raum $\mathcal{E}$ ist:

1. Ein affiner Raum $(\mathcal{E}, V, \tau)$
2. über einem Euklid. Vektorraum $(V, <, >)$.

Dabei: $\tau : V \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}; (v, X) \mapsto \tau_v(X) =: X + v$ genügt

1. $\tau_0 = id_{\mathcal{E}}$ und $\forall v, w \in V \; \tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w}$
2. $\forall X, Y \in \mathcal{E} \exists! v \in V \; \tau_v(x) = Y$ ((d.h. τ *ist einfach transitiv*)).

Definition. Eine *(parametrisierte-) Kurve* ist eine Abbildung

$$X : I \to \mathcal{E}$$

auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, die regulär ist (d.h. $\forall t \in I \; X'(t) \neq 0$). Wir nennen X auch Parametrisierung der Kurve $\mathcal{C} = X(I)$.

Bemerkung. Alle Abbildungen in dieser VO sind beliebig oft differenzierbar (d.h. C^∞).

Beispiel. Eine *(Kreis-) Helix* mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe h ist die Kurve

$$X : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3; t \mapsto X(t) := O + e_1 r \cos(t) + e_2 r sin(t) + e_3 ht.$$

Definition. *Umparametrisierung* einer param. Kurve $X : I \to \mathcal{E}$ ist eine param. Kurve

$$\widetilde{X} : \widetilde{I} \to \mathcal{E}; s \mapsto \widetilde{X}(s) = X(t(s)),$$

wobei $t : \widetilde{I} \to I$ eine surjektive, reguläre Abbildung ist.

Motivation: Für eine Kurve $t \mapsto X(t)$

1. X'(t) ist *Geschwindigkeit(-svektor)* ("velocity"),
2. |X'(t)| ist (skalare) Geschwindigkeit ("speed").

Rekonstruktion durch Integration:

$$X(t) = X(o) + \int_o^t X'(t)dt$$

und die Länge des Weges von $X(0)$ nach $X(t)$:

$$s(t) = \int_o^t |X'(t)|dt$$

Definition.

Die *Bogenlänge* einer Kurve $X : I \to \mathcal{E}$ ab $X(o)$ für $o \in I$, ist

$$s(t) := \int_o^t |X'(t)|dt$$

(wobei $\int_o^s |X'(t)|dt$ auch als $\int_o^t ds$ geschrieben wird)

Bemerkung. Dies ist tatsächlich die Länge des Kurvenbogens zwischen $X(o)$ und $X(t)$, wie man z.B. durch polygonale Approximation beweist (s. Ana2 VO) Also: Die Bogenlänge zwischen zwei Punkten ist *invariant* ("ändert sich nicht") unter Umparametrisierung.

Lemma und Definition. Jede Kurve $t \mapsto X(t)$ kann man nach Bogenlänge (um-)parametrisieren, d.h. so, dass sie konstante Geschwindigkeit 1 ($|X'(t)| \equiv 1$) hat. Dies ist die *Bogenlängenparametrisierung* und üblicherweise notiert $s \mapsto X(s)$ diesen Zusammenhang.

Beweis. Wähle $o \in I$ und bemerke

$$s'(t) = |X'(t)| > 0.$$

Also ist $t \mapsto s(t)$ streng monoton wachsend, kann also invertiert werden, um $t = t(s)$ zu erhalten: Damit erhält man für

$$\widetilde{X} := X \circ t$$

$$|\widetilde{X}'(s)| = |X'(t(s))| \cdot |t'(s)| = \frac{s'(t)}{s'(t)} = 1,$$

d.h. $\widetilde{X}$ ist nach Bogenlänge parametrisiert. (nämlich durch Division mit der Inversen.) □

Bemerkung. Eine Bogenlängenparametrisierung ist eindeutig bis auf Wahl von o und Orientierung.

Beispiel. Eine Helix

$$t \mapsto X(t) = O + e_1 r\cos(t) + e_2 r\sin(t) + e_3 ht$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2}dt = \sqrt{r^2 + h^2} \cdot t$$

und somit Bogenlängenparametrisierung

$$s \mapsto \widetilde{X}(s) = O + e_1 r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_2 r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_3\frac{hs}{\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

Bemerkung und Beispiel.

Üblicherweise ist es nicht möglich eine Bogenlängenparam. in elem. Funktionen anzugeben: Eine Ellipse

$$t \mapsto O + e_1 a\cos(t) + e_2 b\sin(t) \ (a > b > 0)$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin(t)}dt,$$

dies ist ein elliptisches Integral, also nicht mit elem. Funktionen invertierbar.

1.2 Streifen und Rahmen

Definition.

Sei $X : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathcal{E}$ eine parametrisierte Kurve. Die *Tangente* an einem Punkt $X(t)$, wird durch den Punkt und seinen *Tangentialvektor* $X'(t)$ beschrieben. $\mathcal{T}(t) = X(t) + [X'(t)]$ notiert diese Gerade. Die Ebene $\mathcal{N}(t) = X(t) + \{X'(t)\}^\perp$ heißt *Normalebene*.

Alternativ können wir sagen: Wir erhalten Tangente, bzw. Normalebene, durch legen des *Tangentialraumes* $[X'(t)]$ bzw. *Normalraumes* $\{X'(t)\}^\perp$ durch den Punkt $X(t)$.

Definition. Das *Tangential-* und *Normalbündel* einer Kurve $X : I \to \mathcal{E}^3$ werden durch die folgenden Abbildungen definiert:

$$I \ni t \mapsto T_t X := [X'(t)] \subseteq V \text{ bzw.}$$

$$I \ni t \mapsto N_t X := \{X'(t)\}^\perp.$$

eine Abbildung $Y : I \to V$ heißt

1. *Tangentialfeld* entlang X, falls

$$\forall t \in I : Y(t) \in T_t X$$

2. *Normalenfeld* entlang X, falls

$$\forall t \in I : Y(t) \in N_t X$$

Bemerkung und Definition.

Jede Kurve hat ein **(und nur ein!)** harmonisches *Einheitstangentenfeld* (ETF)

$$T : I \to V; t \mapsto \frac{X'(t)}{|X'(t)|}$$

Aber – **es gibt haufenweise Normalenfelder.**

Definition. Ein *Streifen* ("ribbon") ist ein Paar (X, N), wobei

$$X : I \to \mathcal{E}$$

eine Kurve und

$$N : I \to V$$

ein *Einheitsnormalenfeld* (ENF) ist, d.h.,

$$N \perp T \text{ und } |N| = 1.$$

Bemerkung und Definition. (Im dreidimesionalen Raum können wir folgendes sagen:) Ein Streifen ist also eine Kurve mit einer "vertikalen Richtung". Weiters erhält man eine "seitwärts Richtung" durch die *Binormale*

$$B := T \times N : I \to V.$$

(Hier ist $T \times N$ das "bekannte" Kreuzprodunkt)

Lemma und Definition.

Der *(angepasste) Rahmen* eines Streifens $(X, N) : I \to \mathcal{E}^3 \times S^2$ ist eine Abbildung

$$F = (T, N, B) : I \to SO(V)$$

seine *Strukturgleichungen* sind von der Form

$$F' = F\phi \text{ mit } \phi = |X'| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

1. κ_n die *Normalkrümmung*
2. κ_g die *geodärische Krümmung*, und
3. τ die *Torsion* des Streifens (X, N)
   bezeichnen.

Beweis. Da $F : I \to SO(V)$, gilt

$$F^t F \equiv id$$

und daher

$$0 = (F^t F)' = F'^t F + F^t F' = (F\phi)^t F + F^t F\phi = \phi^t F^t F + F^t F\phi = \phi^t + \phi \ ,$$

d.h., $\phi : I \to o(V)$ ist schiefsymmetrisch. Insbesondere: Es gibt Funktionen κ_n, κ_g, τ, so dass ϕ von der behaupteten Form ist. □

Wiederholung:

$$O(V) = \{A \in End(V) \mid A^t A \equiv id\}$$

$$SO(V) = \{A \in O(V) \mid det(A) = 1\}$$

$$o(V) = \{B \in End(V) \mid B^t + B \equiv 0\}$$

Bemerkung. Krümmung und Torsion eines Streifens sind *geometrische Invarianten* des Streifens, d.h., sie sind unabhängig von Position und (in gewisser Weise) Parametrisierung des Streifens.

1. ist $(\widetilde{X}, \widetilde{N}) = (\widetilde{o} + A(X - o), AN)$ mit $o, \widetilde{o} \in \mathcal{E}$ und $A \in SO(V)$ eine Euklidsche Bewegung des Streifens (X, N), so sind $\widetilde{T} = AT$ und $\widetilde{B} = AT \times AN = A(T \times N)$, also $\widetilde{F} = AF$ und damit $\widetilde{\phi} = \widetilde{F}^t \widetilde{F}' = F^t A^t A F' = \phi$

2. ist $s \mapsto (\widetilde{X}, \widetilde{N})(t(s))$ eine *orientierungstreue Umparametrisierung*, d.h., $t' > 0$, von $t \mapsto (X, N)(t)$, so gilt

$$\widetilde{\phi}(s) = \widetilde{F}^t(s)\widetilde{F}'(s) = F^t(t(s))F'(t(s)) \cdot t'(s)$$

und

$$|\widetilde{X}'(s)| = |X'(t(s))| \cdot |t'(s)| = |X'(t(s))| \cdot t'(s)$$

und damit $\widetilde{\kappa_n}(s) = \kappa_n(t(s))$ usw.

Bemerkung und Definition. Ist ein Streifen $(\widetilde{X}, \widetilde{N})$ gegeben durch eine *Normalrotation* eines Streifens (X, N), d.h., $\widetilde{X}, \widetilde{N} = (X, N \cos\varphi + B \sin\varphi)$ mit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\kappa_n} \\ \widetilde{\kappa_g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_n \\ \kappa_g \end{pmatrix}$$

und

$$\widetilde{\tau} = \tau + \frac{\varphi'}{|X'|}.$$

Beispiel.

1. **Helix**: Betrachte den Streifen (X, N) mit $t \mapsto X(t) = o + e_1 r \cos t + e_2 r \sin t + e_3 ht$ und $t \mapsto N(t) = -(e_1 \cos t + e_2 \sin t)$. Für

$$T(t) = (-e_1 r \sin t + e_2 r \cos t + e_3 h)\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

und

$$N(t) = (e_1 h \sin t - e_2 h \cos t + e_3 r)\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

bekommt man $F = (T, N, B) : \mathbb{R} \to SO(V)$ und damit

$$T' = N \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$N' = T \cdot \frac{-r}{\sqrt{r^2 + h^2}} + B \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$B' = \frac{-h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

also (mit $|X'| = \sqrt{r^2 + h^2}$),

$$\kappa_n = \frac{r}{r^2 + h^2}$$

$$\kappa_g = 0$$

$$\tau = \frac{h}{r^2 + h^2}$$

2. **sphärische Kurve**: Sei $s \mapsto X(s) \in \mathcal{E}^3$ eine bogenlängenparametrisierte Kurve, d.h., mit Mittelpunkt $o \in \mathcal{E}^3$ und Radius $r > 0$, der Sphäre gilt:
$$|X - o|^2 \equiv r^2 \text{ und } |X'|^2 \equiv 1.$$
Bemerke: $\langle X', X - o\rangle = \frac{1}{2}(|X - o|^2)' = 0$. Also liefert $N := (X - o)\frac{1}{r}$ ein ENF. Damit berechnen wir
$$\begin{aligned}\kappa_n &= -\langle N', T\rangle \equiv \frac{1}{r}\\ \kappa_g &= -\langle B, T'\rangle = -\frac{1}{r}\langle X' \times (X - o), X''\rangle = \frac{det(X - o, X', X'')}{r}\\ \tau &= \langle N', B\rangle = \frac{1}{r^2}\langle X', X' \times (X - o)\rangle \equiv 0.\end{aligned}$$

Bemerkung. $\kappa_g \equiv 0$ im ersten Bsp. und $\tau \equiv 0$ im zweiten Bsp.

Satz. Fundamentalsatz für Streifen
Seien
$$\kappa_n, \kappa_g, \tau : I \to \mathbb{R}; s \mapsto \kappa_n(s), \kappa_g(s), \tau(s)$$
gegeben. Dann gibt es eine bogenlängenparametrisierte Kurve
$$X : I \to \mathcal{E}$$
und ein ENF
$$N : I \to V,$$
so dass κ_n, κ_g, τ Normal- bzw. geodätische Kruümmung und Torsion des Streifens (X, N) sind. Dieser Streifen ist bis auf Euklid. Bewegung eindeutig.

Beweis. Wähle $o \in I$ und $F_o \in SO(V)$ beliebig und fest. Nach Satz von Picard-Lindelöf hat das AWP
$$F' = F\phi,\ F(o) = F_o$$
mit
$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix}$$
eine eindeutige Lösung $F = (T, N, B) : I \to End(V)$. Nun zeigen wir, dass F ein Rahmen ist:

1. $(FF^t)' = F(\phi + \phi^t)F^t \equiv 0$ also $FF^t \equiv id$, und $F : I \to O(V)$
2. $det : O(V) \to \{\pm 1\}$ ist stetig, also $detF : I \to \{\pm 1\}$ konstant und somit
$$detF = detF_o = 1,$$
also $F : I \to SO(V)$.

Insbesondere $|T| \equiv 1$ und man erhält eine bogenlängenparametrisierte Kurve
$$X : I \to \mathcal{E}^3, t \mapsto O + \int_o^t T(s)ds.$$
(X, N) mit $F = (T, N, B)$ liefert einen Streifen, Krümmung und Torsion wie behauptet. Eindeutigkeit bis auf Euklid. Bewegung folgt aus der Eindeutigkeit in Picard-Lindelöf und jener der Integration. □

1.3 Normalzusammenhang & Paralleltransport

Definition.

Für ein Normalenfeld kann man die Ableitung $N' = N' - \langle N', T\rangle T + \langle N', T\rangle T$ in Normal- und Tangentialanteil zerlegen.

Definition. Ein Normalenfeld $N : I \to V$ entlang $X : I \to \mathcal{E}$ heißt *parallel*, falls $\nabla^\perp N := N' - \langle N', T\rangle = 0$, wobei $\nabla^\perp$ den *Normalzusammenhang* entlang X bezeichnet.

Bemerkung. Hier wird nicht $|N| = 1$ angenommen.

Lemma. Der Normalzshg. ist *metrisch*, d.h.,

$$\langle N_1, N_2\rangle' = \langle \nabla^\perp N_1, N_2\rangle + \langle N_1, \nabla^\perp N_2\rangle;$$

parallele Normalenfelder haben konstante Länge und schließen konstante Winkel ein.

Beweis. Für Normalenfelder $N_1, N_2 : I \to V$ entlang $X : I \to \mathcal{E}$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle \nabla^\perp N_1, N_2\rangle + \langle N_1, \nabla^\perp N_2\rangle &= \langle N_1' - \langle N_1, T\rangle T, N_2\rangle + \langle N_1, N_2' - \langle N_2', T\rangle T\rangle \\ &= \langle N_1', N_2\rangle + \langle N_1, N_2'\rangle = \langle N_1, N_2\rangle'.\end{aligned}$$

Insbesondere sind N_1, N_2 parallel, so ist $\langle N_1, N_2\rangle' = 0$

Damit:

1. ist N parallel, so gilt
$$(|N|^2)' = 2\langle N, \nabla^\perp N\rangle = 0$$

2. sind N_1, N_2 parallel, so ist der Winkel α zwischen N_1, N_2
$$\alpha = \arccos \frac{\langle N_1, N_2\rangle}{|N_1||N_2|} = const.$$

□

Beispiel. Für einen Kreis $t \mapsto X(t) = O + (e_1 \cos t + e_2 \sin t)r$ ist $t \mapsto N(t) := e_1 \cos t + e_2 \sin t$ ein paralleles Normalenfeld.

Bemerkung. Ist (X, N) ein Krümmungsstreifen, $\tau \equiv 0$, so ist N parallel :

$$N' = (-\kappa_n T + \tau B)|x'| \nabla^\perp N = B\tau|x'| = 0;$$

andererseits: Ist $N : I \to V$ parallel entlang $X : I \to \mathcal{E}$, so ist $(X, \frac{N}{|N|})$ Krümmungsstreifen (falls $N \neq 0$).

Bemerkung. Ist N parallel längs X, so auch $B = T \times N$.

Bemerkung. Ist (X, N) durch eine Normalrotation von $(X, \widetilde{N})$ gegeben, d.h.

$$(X, N) = (X, \widetilde{N} \cos\varphi + \widetilde{B} \sin\varphi)$$

mit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\tau = \widetilde{\tau} + \frac{\varphi'}{|X'|};$$

folglich: Man erhält einen Krümmungsstreifen bzw. ENF $N : I \to V$ einer Kurve $X : I \to \mathcal{E}$ durch

$$N = \widetilde{N} \cos \varphi + \widetilde{B} \sin \varphi \text{ mit } \varphi(t) = \varphi_o - \int_o^t \tau(t) ds.$$

Wobei φ_o eine Integrationskonstante ist und eine konstante Normaldrehung liefert und ds für $|X'|dt$ – das Bogenlängenelement – steht.

Da konstante Skalierungen eines parallelen Normalenfeldes parallel ist, folgt:

Lemma. Sei $X : I \to \mathcal{E}$ eine Kurve, $o \in I$ und $N_o \in N_o X$. Dann existiert ein eindeutiges paralleles Normalenfeld $N : I \to V$ mit $N(o) = N_o$

Beweis. der Beweis folgt aus der Bemerkung darüber. Allerdings nur für Dimension 3. Der Beweis gilt auch sonst, dann braucht man allerdings Picard-Lindelöf □

Beispiel. Für das "radikale" ENF $\widetilde{N} = -(e_1 \cos t + e_2 \sin t)$ der Helix

$$X = O + e_1 r \cos t + e_2 r \sin t + e_3 ht$$

ist $\widetilde{\tau} = \frac{h}{r^2+h^2}$. Also liefert

$$N(t) := \widetilde{N}(t) \cos(\frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}) + \widetilde{B}(t) \sin(-\frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}})$$

ein paralleles Normalenfeld.

Lemma und Definition. Parallele Normalenfelder entlang $X : I \to \mathcal{E}$ definieren eine lineare Isometrie von $N_o X$ nach $N_t X$. Diese Isometrie heiüt *Paralleltransport* entlang X.

Bemerkung. Dies erklärt den Begriff "Zusammenhang" für $\nabla^\perp$:$\nabla^\perp$ liefert einen Zusammenhang zwischen Normalräumen einer Kurve.

Beweis. Wähle $N_o \in N_o X$; nach Lemma vorher gibt es ein eindeutiges(!) paralleles NF $N : I \to V$ entlang X mit $N(o) = N_o$; also definiere durch

$$\pi_t : N_o X \to N_t X, \ N_o \mapsto N(t)$$

eine wohldefinierte Abbildung. Da die Gleichung $\nabla^\perp N = 0$ linear ist, sind konstante(!) Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen – also ist π_t linear. □

1.4 Frenet Kurven

Wir diskutieren $\kappa_g \equiv 0$ (vorheriger Abschnitt $\tau \equiv 0$).

Bemerke: ist $(\widetilde{X}, \widetilde{N}) = (X, N\cos\varphi + B\sin\varphi)$ Normalrotation eines Streifens (X, N), so gilt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\kappa_n} \\ \widetilde{\kappa_g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_n \\ \kappa_g \end{pmatrix}$$

insbesondere $\widetilde{\kappa}_n = -\kappa_g$ und $\widetilde{\kappa}_g = \kappa_n$ fpr $(\widetilde{X}, \widetilde{N}) = (X, N)$.

Definition. $X : I \to \mathcal{E}^3$ heißt *Frenet Kurve*, falls

$$\forall t \in I : (X' \times X'')(t) \neq 0.$$

Bemerkung. In diesem Kapitel wird stets der 3-dimensionale Raum angenommen.

Bemerkung. Die Frenet-Bedingung ist invariant unter Umparametrisierung.

Lemma und Definition. Ist $X : I \to \mathcal{E}^3$ Frenet, so gilt

$$\forall t \in I : T'(t) \neq 0$$

und $\frac{T'}{|T'|} =: N$ definiert ein ENF: Dies ist die *Hauptnormale* von X.

Beweis. Mit der Frenet-Bedingung:

$$0 \neq X' \times X'' = X' \times (T|X'|)' = X' \times T|X'|' + X' \times T'|X'| \Rightarrow T' \neq 0$$

Weiters:

$$0 = (1)' = (|T|^2)' = 2\langle T, T' \rangle,$$

also definiert $N = \frac{T'}{|T'|}$ ein ENF. □

Lemma und Definition. Ist $X : I \to \mathcal{E}^3$ Frenet mit Hauptnormale $N : I \to V$, so sind die Strukturgleichungen des *Frenet Rahmens* $F = (T, N, B)$ der Kurve die *Frenet-Serret Gleichungen* $F' = F\phi$ mit $\mathcal{C} = |X'| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$ mit der *Krümmung* $\kappa > 0$ und *Torsion* τ der Frenet Kurve X.

Bemerkung. Für eine Frenet Kurve (mit Hauptnormale) gilt also $\kappa_n = \kappa > 0$ und $\kappa = 0$.

Beweis. Für einen Frenet Rahmen

$$\kappa_g = -\frac{\langle T', B \rangle}{|X'|} = -\frac{\langle N, B \rangle |T'|}{|X'|} = 0$$

$$\kappa_g = \frac{\langle T', N \rangle}{|X'|} = \frac{\langle N, N \rangle |T'|}{|X'|} = \frac{num}{den} > 0$$

□

Beispiel. Eine Helix

$$X = O + e_1 r\cos t + e_2 r\sin t + e_3 h$$

hat Hauptnormalenfeld (s. Kapitel 1.2)

$$t \mapsto N(t) = -(e_1\cos t + e_2 \sin t)$$

und Krümmung und Torsion

$$\kappa \equiv \frac{r}{r^2+h^2} \text{ bzw. } \tau \equiv \frac{h}{r^2+h^2}$$

Bemerkung. Krümmung und Torsion einer Frenet Kurve sind

$$\kappa = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3} \text{ bzw. } \tau = \frac{\det(X', X'', X''')}{|X' \times X''|^2}$$

Insbesondere: Krümmung und Torsion hängen nur von der Kurve ab (daher: "Krümmung" und "Torsion der Kurve")

Satz. Fundamentalsatz für Frenet Kurven Für zwei Funktionen

$$s \mapsto \kappa(s), \tau(s) \text{ mit } \forall s \in I : \kappa(s) > 0$$

gibt es eine Bogenlängenparametrisierte Frenet Kurve $X : I \to \mathcal{E}^3$ mit Krümmung κ und Torsion τ. Weiters: X ist eindeutig bis auf Euklid. Bewegung.

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz für Streifen existiert bogenlängen-parametrisierte Kurve $X : I \to \mathcal{E}^3$ und ENF $N : I \to V$ so dass der Streifen (X, N) Krümmung und Torsion

$$\kappa_n = \kappa, \kappa_g = 0, \tau = \tau,$$

d.h.

$$F' = F\phi \text{ mit } \phi = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Insbesondere $T' = N\kappa \neq 0$, daher:

1. X ist Frenet, da
$$X' \times X'' = T \times T' = T \times N\kappa \neq 0$$
und
2. N ist Hauptnormalenfeld, da
$$N = T'\frac{1}{\kappa} = \frac{T'}{|T'|}.$$

$\square$

Bemerkung. Einen einfacheren Fundamentalsatz gibt es für ebene Kurven. (Aufgabe: Formulieren und – ohne Picard-Lindelöf– beweisen!)

Beispiel. Seien $\kappa > 0, \tau \in \mathbb{R}$ Zahlen. Nach dem Fundamentalsatz existiert (eind. bis auf Eukl. Bewegung) eine bogenlängenparametrisierte Frenet Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ. Andererseits:

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto X(s) = O + e_1 r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} + e_2 r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} + e_3 \frac{hs}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

ist bogenlängenparam. Frenet Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ für

$$r = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} \text{ und } h = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

.

Damit haben wir bewiesen:

Satz. Klassifikation der Helices Eine Frenet Kurve ist genau dann Helix, wenn sie konstante Krümmung und Torsion hat.