DiffGeo

Luka Ilić, Johannnes Mader, Jakob Deutsch, Fabian Schuh

4. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das folgende Skriptum ist begleitend zur Vorlesung Differentialgeometrie gehalten von Univ.Prof. Hertrich - Jeromin und wird von einigen Studenten (oben angeführt) während der Vorlesung geschrieben und danach auf Fehler kontrolliert und bearbeitet. Natürlich schleichen sich nach Möglichkeit Fehler ein, die übersehen werden, dies ist gerne bei den schreibenden Personen anzumerken. Das Skriptum enthält großteils das Tafelbild der Stunden und keinenfalls die Garantie in irgendeiner Weise vollständig zu sein. (Wir geben unser Bestes.)

Viel Vergnügen mit DiffGeo!

Bemerkung. **Literaturempfehlung** (zusätzlich):

1. Strubecker: Differentialgeometrie I - III; Sammlung Göschen
2. Spivak: A comprehensive Introduction to Diffenrential Geometry I - V; Publisher Perish
3. O'Neil: Semi.Riemannian Geometrie; Acad. Press
4. Hicks: Notes on Differential Geometry (Es gibt (möglicherweise nicht legale) Versionen im Internet.)
   (ersteres ist kompakter, zweiteres eher komplementär gedacht, drittes für Physik-Interessierte, letzteres vergleicht die Methoden der Differentialgeometrie)

1 Kurven

1.1 Parametrisierung und Bogenlänge

Wiederholung: Ein Euklidischer Raum $\mathcal{E}$ ist:

1. Ein affiner Raum $(\mathcal{E}, V, \tau)$
2. über einem Euklid. Vektorraum $(V, <, >)$.

Dabei: $\tau : V \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \quad (v, X) \mapsto \tau_v(X) =: X + v$ genügt

1. $\tau_0 = id_{\mathcal{E}}$ und $\forall v, w \in V \ \tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w}$
2. $\forall X, Y \in \mathcal{E} \exists! v \in V \ \tau_v(x) = Y$ ((d.h. τ *ist einfach transitiv*)).

Definition. 1.1. Eine *(parametrisierte-) Kurve* ist eine Abbildung

$$X : I \to \mathcal{E}$$

auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, die regulär ist (d.h. $\forall t \in I \ X'(t) \neq 0$). Wir nennen X auch Parametrisierung der Kurve $\mathcal{C} = X(I)$.

Bemerkung. Alle Abbildungen in dieser VO sind beliebig oft differenzierbar (d.h. C^∞).

Beispiel. Eine *(Kreis-) Helix* mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe h ist die Kurve

$$X : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3, \quad t \mapsto X(t) := O + e_1 r\cos(t) + e_2 r sin(t) + e_3 ht.$$

Definition. 1.2. *Umparametrisierung* einer param. Kurve $X : I \to \mathcal{E}$ ist eine param. Kurve

$$\widetilde{X} : \widetilde{I} \to \mathcal{E}, \quad s \mapsto \widetilde{X}(s) = X(t(s)),$$

wobei $t : \widetilde{I} \to I$ eine surjektive, reguläre Abbildung ist.

Motivation: Für eine Kurve $t \mapsto X(t)$

1. X'(t) ist *Geschwindigkeit(-svektor)* ("velocity"),
2. |X'(t)| ist (skalare) Geschwindigkeit ("speed").

Rekonstruktion durch Integration:

$$X(t) = X(o) + \int_o^t X'(t)dt$$

und die Länge des Weges von $X(0)$ nach $X(t)$:

$$s(t) = \int_o^t |X'(t)|dt$$

Definition. 1.3. Die *Bogenlänge* einer Kurve $X : I \to \mathcal{E}$ ab $X(o)$ für $o \in I$, ist

$$s(t) := \int_o^t |X'(t)|dt$$

(wobei $\int_o^s |X'(t)|dt$ auch als $\int_o^t ds$ geschrieben wird)

Bemerkung. Dies ist tatsächlich die Länge des Kurvenbogens zwischen $X(o)$ und $X(t)$, wie man z.B. durch polygonale Approximation beweist (s. Ana2 VO) Also: Die Bogenlänge zwischen zwei Punkten ist *invariant* ("ändert sich nicht") unter Umparametrisierung.

umpar **Lemma und Definition. 1.4.** Jede Kurve $t \mapsto X(t)$ kann man nach Bogenlänge (um-) parametrisieren, d.h. so, dass sie konstante Geschwindigkeit 1 ($|X'(t)| \equiv 1$) hat. Dies ist die *Bogenlängenparametrisierung* und üblicherweise notiert $s \mapsto X(s)$ diesen Zusammenhang.

Beweis. Wähle $o \in I$ und bemerke

$$s'(t) = |X'(t)| > 0.$$

Also ist $t \mapsto s(t)$ streng monoton wachsend, kann also invertiert werden, um $t = t(s)$ zu erhalten: Damit erhält man für

$$\widetilde{X} := X \circ t$$

$$|\widetilde{X}'(s)| = |X'(t(s))| \cdot |t'(s)| = \frac{s'(t)}{s'(t)} = 1,$$

d.h. $\widetilde{X}$ ist nach Bogenlänge parametrisiert. (nämlich durch Division mit der Inversen.) □

Bemerkung. Eine Bogenlängenparametrisierung ist eindeutig bis auf Wahl von o und Orientierung.

Beispiel. Eine Helix

$$t \mapsto X(t) = O + e_1 r \cos(t) + e_2 r \sin(t) + e_3 ht$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2} dt = \sqrt{r^2 + h^2} \cdot t$$

und somit Bogenlängenparametrisierung

$$s \mapsto \widetilde{X}(s) = O + e_1 r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_2 r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_3 \frac{hs}{\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

Bemerkung und Beispiel. Üblicherweise ist es nicht möglich eine Bogenlängenparam. in elem. Funktionen anzugeben: Eine Ellipse

$$t \mapsto O + e_1 a \cos(t) + e_2 b \sin(t) \ (a > b > 0)$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin(t)} dt,$$

dies ist ein elliptisches Integral, also nicht mit elem. Funktionen invertierbar.

1.2 Streifen und Rahmen

Definition. 1.5. Sei $X : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathcal{E}$ eine parametrisierte Kurve. Die *Tangente* an einem Punkt $X(t)$, wird durch den Punkt und seinen *Tangentialvektor* $X'(t)$ beschrieben. $\mathcal{T}(t) = X(t)+[X'(t)]$ notiert diese Gerade. Die Ebene $\mathcal{N}(t) = X(t) + \{X'(t)\}^\perp$ heißt *Normalebene.*

Alternativ können wir sagen: Wir erhalten Tangente, bzw. Normalebene, durch legen des *Tangentialraumes* $[X'(t)]$ bzw. *Normalraumes* $\{X'(t)\}^\perp$ durch den Punkt $X(t)$.

Definition. 1.6. Das *Tangential-* und *Normalbündel* einer Kurve $X : I \to \mathcal{E}^3$ werden durch die folgenden Abbildungen definiert:

$$I \ni t \mapsto T_tX := [X'(t)] \subseteq V \text{ bzw.}$$

$$I \ni t \mapsto N_tX := \{X'(t)\}^\perp.$$

eine Abbildung $Y : I \to V$ heißt

1. *Tangentialfeld* entlang X, falls

$$\forall t \in I : Y(t) \in T_tX$$

2. *Normalenfeld* entlang X, falls

$$\forall t \in I : Y(t) \in N_tX$$

Bemerkung und Definition. 1.7. Jede Kurve hat ein **(und nur ein!)** harmonisches *Einheitstangentenfeld* (ETF)

$$T : I \to V, \quad t \mapsto \frac{X'(t)}{|X'(t)|}$$

Aber – **es gibt haufenweise Normalenfelder.**

Definition. 1.8. Ein *Streifen* (”ribbon”) ist ein Paar (X, N), wobei

$$X : I \to \mathcal{E}$$

eine Kurve und

$$N : I \to V$$

ein *Einheitsnormalenfeld* (ENF) ist, d.h.,

$$N \perp T \text{ und } |N| = 1.$$

Bemerkung und Definition. 1.9. (Im dreidimesionalen Raum können wir folgendes sagen:) Ein Streifen ist also eine Kurve mit einer ”vertikalen Richtung”. Weiters erhält man eine ”seitwärts Richtung” durch die *Binormale*

$$B := T \times N : I \to V.$$

(Hier ist $T \times N$ das ”bekannte” Kreuzprodunkt)

Lemma und Definition. 1.10. Der *(angepasste) Rahmen* eines Streifens $(X,N): I \to \mathcal{E}^3 \times S^2$ ist eine Abbildung

$$F = (T,N,B) : I \to SO(V)$$

seine *Strukturgleichungen* sind von der Form

$$F' = F\phi \text{ mit } \phi = |X'| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

1. κ_n die *Normalkrümmung*
2. κ_g die *geodätische Krümmung*, und
3. τ die *Torsion* des Streifens (X,N)
   bezeichnen.

Beweis. Da $F: I \to SO(V)$, gilt

$$F^t F \equiv id$$

und daher

$$0 = (F^tF)' = F'^t F + F^t F' = (F\phi)^t F + F^t F\phi = \phi^t F^t F + F^t F \phi = \phi^t + \phi ,$$

d.h., $\phi : I \to o(V)$ ist schiefsymmetrisch. Insbesondere: Es gibt Funktionen κ_n, κ_g, τ, so dass ϕ von der behaupteten Form ist. □

Wiederholung:

$$O(V) = \{A \in End(V) \mid A^t A \equiv id\}$$

$$SO(V) = \{A \in O(V) \mid \det(A) = 1\}$$

$$o(V) = \{B \in End(V) \mid B^t + B \equiv 0\}$$

Bemerkung. Krümmung und Torsion eines Streifens sind *geometrische Invarianten* des Streifens, d.h., sie sind unabhängig von Position und (in gewisser Weise) Parametrisierung des Streifens.

1. ist $(\widetilde{X}, \widetilde{N}) = (\widetilde{O} + A(X-O), AN)$ mit $O, \widetilde{O} \in \mathcal{E}$ und $A \in SO(V)$ eine Euklidsche Bewegung des Streifens (X,N), so sind $\widetilde{T} = AT$ und $\widetilde{B} = AT \times AN = A(T \times N) = AB$, also $\widetilde{F} = AF$ und damit $\widetilde{\phi} = \widetilde{F}^t \widetilde{F}' = F^t A^t A F' = \phi$. (Da $A \in SO(V)$)
2. ist $s \mapsto (\widetilde{X}, \widetilde{N})(s) = (X,N)(t(s))$ eine *orientierungstreue Umparametrisierung*, d.h., $t' > 0$, von $t \mapsto (X,N)(t)$, so gilt

   $$\widetilde{\phi}(s) = \widetilde{F}^t(s)\widetilde{F}'(s) = F^t(t(s))F'(t(s)) \cdot t'(s) = \phi(t(s)) \cdot t'(s)$$

   und

   $$|\widetilde{X}'(s)| = |X'(t(s))| \cdot |t'(s)| = |X'(t(s))| \cdot t'(s)$$

   und damit $\widetilde{\kappa_n}(s) = \kappa_n(t(s))$ usw.

Lemma. 1.11. *Für einen Streifen (X, N) gilt*

$$\kappa_n = -\frac{\langle N', T\rangle}{|X'|} = \frac{\langle N, T'\rangle}{|X'|}, \qquad \kappa_g = -\frac{\langle B, T'\rangle}{|X'|} = \frac{\langle B', T\rangle}{|X'|}, \qquad \tau = -\frac{\langle N, B'\rangle}{|X'|} = \frac{\langle N', B\rangle}{|X'|}.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus der Definition von κ_n, κ_g und τ und aus der Orthonormalität von T, N und B. □

Bemerkung und Definition. 1.12. Ist ein Streifen $(\widetilde{X}, \widetilde{N})$ gegeben durch eine *Normalrotation* eines Streifens (X, N), d.h., $\widetilde{X}, \widetilde{N} = (X, N\cos\varphi + B\sin\varphi)$ mit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\kappa_n} \\ \widetilde{\kappa_g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_n \\ \kappa_g \end{pmatrix}$$

und

$$\widetilde{\tau} = \tau + \frac{\varphi'}{|X'|}.$$

Beispiel.

1. **Helix**: Betrachte den Streifen (X, N) mit

$$t \mapsto X(t) = o + e_1 r\cos t + e_2 r\sin t + e_3 ht$$

und $t \mapsto N(t) = -(e_1\cos t + e_2\sin t)$. Für

$$T(t) = (-e_1 r\sin t + e_2 r\cos t + e_3 h)\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

und

$$B(t) = (e_1 h\sin t - e_2 h\cos t + e_3 r)\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

bekommt man $F = (T, N, B) : \mathbb{R} \to SO(V)$ und damit

$$T' = N \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$N' = T \cdot \frac{-r}{\sqrt{r^2+h^2}} + B \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$B' = \frac{-h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

also (mit $|X'| = \sqrt{r^2+h^2}$),

$$\kappa_n = \frac{r}{r^2+h^2}, \qquad \kappa_g = 0, \qquad \tau = \frac{h}{r^2+h^2}.$$

2. **sphärische Kurve**: Sei $s \mapsto X(s) \in \mathcal{E}^3$ eine bogenlängenparametrisierte Kurve, d.h. mit Mittelpunkt $O \in \mathcal{E}^3$ und Radius $r > 0$, der Sphäre gilt:

$$|X - O|^2 \equiv r^2 \text{ und } |X'|^2 \equiv 1.$$

Bemerke: $\langle X', X - O\rangle = \frac{1}{2}(|X - O|^2)' = 0$. Also liefert $N := (X - O)\frac{1}{r}$ ein ENF. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= -\langle N', T\rangle \equiv \frac{1}{r} \\
\kappa_g &= -\langle B, T'\rangle = -\frac{1}{r}\langle X' \times (X - O), X''\rangle = \frac{det(X - O, X', X'')}{r} \\
\tau &= \langle N', B\rangle = \frac{1}{r^2}\langle X', X' \times (X - O)\rangle \equiv 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung. $\kappa_g \equiv 0$ im ersten Bsp. und $\tau \equiv 0$ im zweiten Bsp.

Satz 1.13 (Fundamentalsatz für Streifen)**.** *Seien*

$$\kappa_n, \kappa_g, \tau : I \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \kappa_n(s), \kappa_g(s), \tau(s)$$

gegeben. Dann gibt es eine bogenlängenparametrisierte Kurve

$$X : I \to \mathcal{E}$$

und ein ENF

$$N : I \to V,$$

so dass κ_n, κ_g, τ Normal- bzw. geodätische Krümmung und Torsion des Streifens (X, N) sind. Dieser Streifen ist bis auf Euklid. Bewegung eindeutig.

Beweis. Wähle $o \in I$ und $F_o \in SO(V)$ beliebig und fest. Nach Satz von Picard-Lindelöf hat das AWP

$$F' = F\phi,\ F(o) = F_o$$

mit

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung $F = (T, N, B) : I \to End(V)$. Nun zeigen wir, dass F ein Rahmen ist:

1. $(FF^t)' = F(\phi + \phi^t)F^t \equiv 0$ also $FF^t \equiv id$, und $F : I \to O(V)$
2. $\det : O(V) \to \{\pm 1\}$ ist stetig, also $\det F : I \to \{\pm 1\}$ konstant und somit

   $$\det F = \det F_o = 1,$$

   also $F : I \to SO(V)$.

Insbesondere $|T| \equiv 1$ und man erhält eine bogenlängenparametrisierte Kurve

$$X : I \to \mathcal{E}^3, t \mapsto O + \int_o^t T(s)ds.$$

(X, N) mit $F = (T, N, B)$ liefert einen Streifen, Krümmung und Torsion wie behauptet. Eindeutigkeit bis auf Euklid. Bewegung folgt aus der Eindeutigkeit in Picard-Lindelöf und jener der Integration. ☐

1.3 Normalzusammenhang & Paralleltransport

Definition. 1.14. Für ein Normalenfeld kann man die Ableitung $N' = N' - \langle N', T\rangle T + \langle N', T\rangle T$ in Normal- und Tangentialanteil zerlegen.

Definition. 1.15. Ein Normalenfeld $N : I \to V$ entlang $X : I \to \mathcal{E}$ heißt *parallel*, falls $\nabla^\perp N := N' - \langle N', T\rangle T = 0$, wobei $\nabla^\perp$ den *Normalzusammenhang* entlang X bezeichnet.

Bemerkung. Hier wird nicht $|N| = 1$ angenommen.

Lemma. 1.16. *Der Normalzshg. ist* metrisch, *d.h.,*

$$\langle N_1, N_2\rangle' = \langle \nabla^\perp N_1, N_2\rangle + \langle N_1, \nabla^\perp N_2\rangle;$$

parallele Normalenfelder haben konstante Länge und schließen konstante Winkel ein.

Beweis. Für Normalenfelder $N_1, N_2 : I \to V$ entlang $X : I \to \mathcal{E}$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle \nabla^\perp N_1, N_2\rangle + \langle N_1, \nabla^\perp N_2\rangle &= \langle N_1' - \langle N_1, T\rangle T, N_2\rangle + \langle N_1, N_2' - \langle N_2', T\rangle T\rangle \\ &= \langle N_1', N_2\rangle + \langle N_1, N_2'\rangle = \langle N_1, N_2\rangle'.\end{aligned}$$

Insbesondere sind N_1, N_2 parallel, so ist $\langle N_1, N_2\rangle' = 0$

Damit:

1. ist N parallel, so gilt
$$(|N|^2)' = 2\langle N, \nabla^\perp N\rangle = 0$$
2. sind N_1, N_2 parallel, so ist der Winkel α zwischen N_1, N_2
$$\alpha = \arccos \frac{\langle N_1, N_2\rangle}{|N_1||N_2|} = const.$$

□

Beispiel. Für einen Kreis $t \mapsto X(t) = O + (e_1 \cos t + e_2 \sin t)r$ ist $t \mapsto N(t) := e_1 \cos t + e_2 \sin t$ ein paralleles Normalenfeld.

Bemerkung. Ist (X, N) ein Krümmungsstreifen, $\tau \equiv 0$, so ist N parallel. Aus $N' = (-\kappa_n T + \tau B)\,|X'|$ folgt
$$\nabla^\perp N = (-\kappa_n T + \tau B)\,|X'| + \kappa_n T = B\tau\,|X'| = 0.$$
Andererseits: Ist $N : I \to V$ parallel entlang $X : I \to \mathcal{E}$, so ist $(X, \frac{N}{|N|})$ Krümmungsstreifen (falls $N \neq 0$).

Bemerkung. Ist N parallel längs X, so auch $B = T \times N$.

Bemerkung. Ist (X, N) durch eine Normalrotation von $(X, \widetilde{N})$ gegeben, d.h.

$$(X, N) = (X, \widetilde{N} \cos\varphi + \widetilde{B} \sin\varphi)$$

mit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\tau = \widetilde{\tau} + \frac{\varphi'}{|X'|};$$

folglich: Man erhält einen Krümmungsstreifen bzw. ENF $N : I \to V$ einer Kurve $X : I \to \mathcal{E}$ durch

$$N = \widetilde{N} \cos\varphi + \widetilde{B} \sin\varphi \text{ mit } \varphi(t) = \varphi_o - \int_o^t \tau(t) ds.$$

Wobei φ_o eine Integrationskonstante ist und eine konstante Normaldrehung liefert und ds für $|X'|dt$ – das Bogenlängenelement – steht.

Da konstante Skalierungen eines parallelen Normalenfeldes parallel ist, folgt:

Lemma. 1.17. *Sei $X : I \to \mathcal{E}$ eine Kurve, $o \in I$ und $N_o \in N_oX$. Dann existiert ein eindeutiges paralleles Normalenfeld $N : I \to V$ mit $N(o) = N_o$*

Beweis. der Beweis folgt aus der Bemerkung darüber. Allerdings nur für Dimension 3. Der Beweis gilt auch sonst, dann braucht man allerdings Picard-Lindelöf □

Beispiel. Für das "radikale" ENF $\widetilde{N} = -(e_1 \cos t + e_2 \sin t)$ der Helix

$$X = O + e_1 r \cos t + e_2 r \sin t + e_3 ht$$

ist $\widetilde{\tau} = \frac{h}{r^2+h^2}$. Also liefert

$$N(t) := \widetilde{N}(t) \cos(\frac{ht}{\sqrt{r^2 + h^2}}) + \widetilde{B}(t) \sin(-\frac{ht}{\sqrt{r^2 + h^2}})$$

ein paralleles Normalenfeld.

Lemma und Definition. 1.18. Parallele Normalenfelder entlang $X : I \to \mathcal{E}$ definieren eine lineare Isometrie von N_oX nach N_tX. Diese Isometrie heißt *Paralleltransport* entlang X.

Bemerkung. Dies erklärt den Begriff "Zusammenhang" für $\nabla^\perp$:$\nabla^\perp$ liefert einen Zusammenhang zwischen Normalräumen einer Kurve.

Beweis. Wähle $N_o \in N_oX$; nach Lemma vorher gibt es ein eindeutiges(!) paralleles NF $N : I \to V$ entlang X mit $N(o) = N_o$; also definiere durch

$$\pi_t : N_oX \to N_tX, \ N_o \mapsto N(t)$$

eine wohldefinierte Abbildung. Da die Gleichung $\nabla^\perp N = 0$ linear ist, sind konstante(!) Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen – also ist π_t linear. □

1.4 Frenet Kurven

Wir diskutieren $\kappa_g \equiv 0$ (vorheriger Abschnitt $\tau \equiv 0$).

Bemerke: ist $(\widetilde{X}, \widetilde{N}) = (X, N\cos\varphi + B\sin\varphi)$ Normalrotation eines Streifens (X, N), so gilt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\kappa_n} \\ \widetilde{\kappa_g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_n \\ \kappa_g \end{pmatrix}$$

insbesondere $\widetilde{\kappa}_n = -\kappa_g$ und $\widetilde{\kappa}_g = \kappa_n$ für $(\widetilde{X}, \widetilde{N}) = (X, B)$.

Definition. 1.19. $X : I \to \mathcal{E}^3$ heißt *Frenet Kurve*, falls

$$\forall t \in I : (X' \times X'')(t) \neq 0.$$

Bemerkung. In diesem Kapitel wird stets der 3-dimensionale Raum angenommen.

Bemerkung. Die Frenet-Bedingung ist invariant unter Umparametrisierung.

Lemma und Definition. 1.20. Ist $X : I \to \mathcal{E}^3$ Frenet, so gilt

$$\forall t \in I : T'(t) \neq 0$$

und $\frac{T'}{|T'|} =: N$ definiert ein ENF: Dies ist die *Hauptnormale* von X.

Beweis. Mit der Frenet-Bedingung:

$$0 \neq X' \times X'' = X' \times (T|X'|)' = X' \times T|X'|' + X' \times T'|X'| \Rightarrow T' \neq 0$$

Weiters:

$$0 = (1)' = (|T|^2)' = 2\langle T, T'\rangle,$$

also definiert $N = \frac{T'}{|T'|}$ ein ENF. □

Lemma und Definition. 1.21. Ist $X : I \to \mathcal{E}^3$ Frenet mit Hauptnormale $N : I \to V$, so sind die Strukturgleichungen des *Frenet Rahmens* $F = (T, N, B)$ der Kurve die *Frenet-Serret Gleichungen* $F' = F\phi$ mit $\phi = |X'| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$ mit der *Krümmung* $\kappa > 0$ und *Torsion* τ der Frenet Kurve X.

Bemerkung. Für eine Frenet Kurve (mit Hauptnormale) gilt also $\kappa_n = \kappa > 0$ und $\kappa_g = 0$.

Beweis. Für einen Frenet Rahmen gilt

$$\kappa_g = -\frac{\langle T', B\rangle}{|X'|} = -\frac{\langle N, B\rangle |T'|}{|X'|} = 0,$$

$$\kappa_n = \frac{\langle T', N\rangle}{|X'|} = \frac{\langle N, N\rangle |T'|}{|X'|} > 0.$$

□

Beispiel. Eine Helix

$$X = O + e_1 r \cos t + e_2 r \sin t + e_3 h$$

hat Hauptnormalenfeld (s. Kapitel 1.2)

$$t \mapsto N(t) = -(e_1 \cos t + e_2 \sin t)$$

und Krümmung und Torsion

$$\kappa \equiv \frac{r}{r^2 + h^2} \text{ bzw. } \tau \equiv \frac{h}{r^2 + h^2}.$$

Bemerkung. Krümmung und Torsion einer Frenet Kurve sind

$$\kappa = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3} \text{ bzw. } \tau = \frac{\det(X', X'', X''')}{|X' \times X''|^2}$$

Insbesondere: Krümmung und Torsion hängen nur von der Kurve ab (daher: "Krümmung" und "Torsion der Kurve").

Satz 1.22 (Fundamentalsatz für Frenet Kurven)**.** *Für zwei Funktionen*

$$s \mapsto \kappa(s), \tau(s) \text{ mit } \forall s \in I : \kappa(s) > 0$$

gibt es eine Bogenlängenparametrisierte Frenet Kurve $X : I \to \mathcal{E}^3$ mit Krümmung κ und Torsion τ. Weiters: X ist eindeutig bis auf Euklid. Bewegung.

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz für Streifen existiert bogenlängen-parametrisierte Kurve $X : I \to \mathcal{E}^3$ und ENF $N : I \to V$ so dass der Streifen (X, N) Krümmung und Torsion

$$\kappa_n = \kappa, \kappa_g = 0, \tau = \tau,$$

d.h.

$$F' = F\phi \text{ mit } \phi = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Insbesondere $T' = N\kappa \neq 0$, daher:

1. X ist Frenet, da
$$X' \times X'' = T \times T' = T \times N\kappa \neq 0$$
und
2. N ist Hauptnormalenfeld, da
$$N = T' \frac{1}{\kappa} = \frac{T'}{|T'|}.$$

□

Bemerkung. Einen einfacheren Fundamentalsatz gibt es für ebene Kurven. (Aufgabe: Formulieren und – ohne Picard-Lindelöf– beweisen!)

Beispiel. Seien $\kappa > 0, \tau \in \mathbb{R}$ Zahlen. Nach dem Fundamentalsatz existiert (eind. bis auf Eukl. Bewegung) eine bogenlängenparametrisierte Frenet Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ. Andererseits:

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto X(s) = O + e_1 r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_2 r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_3 \frac{hs}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

ist bogenlängenparam. Frenet Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ für

$$r = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \text{ und } h = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}.$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz 1.23 (Klassifikation der Helices)**.** *Eine Frenet Kurve ist genau dann Helix, wenn sie konstante Krümmung und Torsion hat.*

Beispiel. Falls $(u, v) \mapsto X(u, v)$ Werte in einer (festen) Ebene annimmt,

$$\pi = \{X \in \mathcal{E}^3 \mid \langle X - 0, n \rangle = d\}$$

d.h., $\langle dX, n \rangle = 0$, so ist $N \equiv \pm n$, demnach also $\S \equiv 0$ und jeder Punkt der Fläche ist Flachpunkt.

2 Flächen

2.1 Parametrisierung & Metrik

Definition. 2.1. Eine Abbildung

$$X : \mathbb{R}^2 \supseteq M \to \mathcal{E}$$

heißt *parametrisierte Fläche*, falls M offen und zusammenhängend ist und X regulär ist, d.h., $\forall (u,v) \in M \; : \; d_{(u,v)}X : \mathbb{R}^2 \to V$ ist injektiv. Wir sagen auch: X ist eine *Parametrisierung* der *Fläche* $X(M) \subseteq \mathcal{E}$. Wobei $d_{(u,v)}$ definiert ist über:

$$d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = X_u(u,v) \cdot x + X_v(u,v) \cdot y.$$

Bemerkung. Äquivalent zur letzten Forderung ist die Forderung, dass die Jacobi-Matrix maximalen Rang hat. Diese braucht aber eine Festgelegte Basis, was oft zu Schwierigkeiten bei Berechnungen führt und wird daher von Prof. Jeromin nicht empfohlen.

Bemerkung. Einmal mehr sind alle geforderten Abbildungen so oft differenzierbar, wie wir das wünschen.

Bemerkung. $d_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to V$ ist die Ableitung am Punkt $(u,v) \in M$,

$$X(u+x, v+y) \approx X(u,v) + d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = X(u,v) + X_u(u,v) \cdot x + X_v(u,v) \cdot y,$$

wir können also identifizieren:

$$d_{(u,v)}X \cong (X_u, X_v)(u,v),$$

bzw., nach Wahl einer Basis von V, mit der Jacobi-Matrix am Punkt (u,v).

Beispiel. Ein *Helicoid* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{E}^3$ ist die *(Regel-)Fläche*

$$\mathbb{R}^2 \ni (r,v) \mapsto O + e_1 r \cos(v) + e_2 r \sin(v) + e_3 v \in \mathcal{E}^3.$$

Wir zeigen, dass $(X_r, X_v)(r,v)$ linear unabhängig für alle $(r,v) \in \mathbb{R}^2$ sind:

$$X_r(r,v) = e_1 \cos(v) + e_2 \sin(v) \neq 0$$
$$X_v(r,v) = -e_1 r \sin(v) + e_2 r \cos(v) + e_3 \neq 0$$

und da $X_v(r,v)$ von $e_3 \neq 0$ abhängt sind die beiden linear unabhängig.

Beispiel. Eine übliche Parametrisierung von $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{E}^3$ (mit Mittelpunkt $O \in \mathcal{E}^3$) ist

$$(u,v) \mapsto O + e_1 \cos(u)\cos(v) + e_2 \cos(u)\sin(v) + e_3 \sin(u)$$

liefert keine parametrisierte Fläche, da die Sphäre an den Polen nicht regulär ist. Dies ist also nur eine Parametrisierung auf $M = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$

Insbesondere kann man sogar zeigen, dass es keine (reguläre) Parametrisierung der (ganzen) Sphäre gibt ("Hairy Ball Theorem" bzw. "Satz vom Igel").

$\mathbb{S}^2$ ist also **keine** Fläche im Sinne der Definition. Dieses "Problem" wird später gelöst.

Lemma und Definition. 2.2. Die *induzierte Metrik* oder *erste Fundamentalform* einer parametrisierten Fläche $X : M \to \mathcal{E}$ ist definiert durch

$$\mathrm{I} := \langle dX, dX \rangle.$$

Für jeden Punkt $(u, v) \in M$ liefert

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \mathrm{I}\big|_{(u,v)}(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) := \left\langle d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}), d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) \right\rangle$$

eine positiv definite, symmetrische Bilinearform.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $I\big|_{(u,v)}$ für jeden Punkt $(u, v) \in M$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform ist.

Weil $I\big|_{(u,v)}$ eine Komposition aus linearen Funktionen und einer Bilinearform ist, ist auch $I\big|_{(u,v)}$ linear. Die Symmetrie ist ebenfalls leicht ersichtlich. Fehlt noch die positive Definitheit.

Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ beliebig, so gilt

$$I\big|_{(u,v)}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \left\langle d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}), d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \right\rangle > 0.$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $d_{(u,v)}X$ injektiv und linear ist, daher bildet nur 0 auf 0 ab. Also ist $d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \neq 0$. Der Rest folgt, weil $\langle ., . \rangle$ positiv definit ist. □

Bemerkung. I wird oft mit Hilfe der *Gramschen Matrix* notiert:

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

mit

$$E = |X_u|^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = |X_v|^2.$$

Dann gilt für $(u, v) \in M$:

$$\begin{aligned} I\big|_{(u,v)}(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) &:= \left\langle d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}), d_{(u,v)}X(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) \right\rangle \\ &= \langle X_u(u,v)x_1 + X_v(u,v)y_1, X_u(u,v)x_2 + X_v(u,v)y_2 \rangle \\ &= E(u,v)x_1x_2 + F(u,v)(x_1y_2 + x_2y_1) + G(u,v)y_1y_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\Bigg|_{(u,v)} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel. 1. Ein *Zylinder*

$$(u,v) \mapsto X(u,v) := O + e_1 x(u) + e_2 y(u) + e_3 v$$

hat induzierte Metrik

$$I = (x'^2 + y'^2)du^2 + dv^2.$$

Insbesondere: Ist $u \mapsto O + e_1 x(u) + e_2 y(u)$ bogenlängenparametrisiert, so ist X *isometrisch*,

$$I = du^2 + dv^2$$

2. Das *Helicioid*

$$(r,v) \mapsto O + e_1 r\cos(v) + e_2 r\sin(v) + e_3 v$$

hat Metrik

$$I\big|_{(r,v)} = dr^2 + (1+r^2)dv^2.$$

Mit einer Umparametrisierung $r = r(u) = \sinh(u)$ erhält man

$$I\big|_{(u,v)} = \cosh^2(u)(du^2 + dv^2),$$

d.h., X wird *konform* (winkeltreu).

Definition. 2.3. Eine Parametrisierte Fläche $X : M \to \mathcal{E}$ heißt

1. *konform*, falls $E = G, F = 0$
2. *isometrisch*, falls $E = G = 1, F = 0$.

Bemerkung. Für Kurven: Jede Kurve kann isometrisch/nach Bogenlänge umparametrisiert werden(1.4). Für Flächen: Im Allgemeinen gibt es keine isometrische (Um-)Parametrisierung.

Satz 2.4. *Jede Fläche kann lokal konform (um-)parametrisiert werden.*

Beweis. Ist echt cool laut Jeromin (braucht bissi so Fana und so ...). Falls der Leser Zeit hat, wird ihm nahegelegt den Beweis nachzuschauen. Hier ein Link zu einem Beweis dieser Tatsache:

Link zu PDF hier klicken.

□

Bemerkung. Dieser Satz ist die Grundlage, um (reelle) Flächen als komplexe Kurve zu intepretieren. Eine weitreichende Betrachtungsweise ...

Bemerkung. Um den Satz zu verstehen:
"lokal" heißt, dass – für jeden Punkt $(u,v) \in M$ – der Definitionsbereich M so eingeschränkt werden kann – auf eine Umgebung des Punktes(u,v) – dass die Behauptung wahr ist; "Umparametrisierung" wie für Kurven definiert:

Definition. 2.5. Eine *Umparametrisierung* einer parametrisierten Fläche $X : M \to \mathcal{E}$ ist eine neue parametrisierte Fläche

$$\widetilde{X} = X \circ (u,v), \quad \widetilde{M} \to \mathcal{E},$$

mit einem *Diffeomorphismus*:

$$(u,v) : \widetilde{M} \to M,$$

d.h., eine glatte (C^∞) Bijektion mit glatter Inverser $(u,v)^{-1} : M \to \widetilde{M}$.

Bemerkung. Für

$$(x,y) \mapsto \widetilde{X}(x,y) = X(u(x,y), v(x,y)) \in \mathcal{E}^3$$

gilt (Kettenregel)

$$\widetilde{X}_x = (X_u \circ (u,v)) \cdot u_x + (X_v \circ (u,v)) \cdot v_x$$
$$\widetilde{X}_y = (X_u \circ (u,v)) \cdot u_y + (Y_v \circ (u,v)) \cdot v_y$$

und somit

$$\widetilde{X}_x \times \widetilde{X}_y = ((X_u \times X_v) \circ (u,v)) \cdot (u_x v_y - u_y v_x),$$

d.h., $\widetilde{X}$ ist regulär.

2.2 Gaußabbildung und Weingartentensor

Definition. 2.6. Eine Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ hat an jedem Punkt $X(u,v)$ eine *Tangentialebene* und eine *Normalgerade*:

$$\mathcal{T}(u,v) := X(u,v) + [\{X_u(u,v), X_v(u,v)\}],$$

$$\mathcal{N}(u,v) := X(u,v) + [\{(X_u \times X_v)(u,v)\}];$$

dies entspricht einer orthogonalen Zerlegung

$$V = [\{X_u(u,v), X_v(u,v)\}] \oplus_\perp [\{(X_u \times X_v)(u,v)\}]$$

von V in einen *Tangentialraum* und einen *Normalraum* von X am Punkt $X(u,v)$.

Definition. 2.7. Das *Tangential-* bzw. *Normalenbündel* einer Fläche $X : M \to \mathcal{E}$ ist gegeben durch die Abbildung

$$(u,v) \mapsto T_{(u,v)}X := [\{X_u(u,v), X_v(u,v)\}],$$
$$(u,v) \mapsto N_{(u,v)}X := \{X_u(u,v), X_v(u,v)\}^\perp.$$

Eine Abbildung $Y : M \to V$ heißt

- *Tangentialfeld* entlang X, falls

  $$\forall (u,v) \in M : \; Y(u,v) \in T_{(u,v)}X$$

  ,

- *Normalenfeld* entlang X, falls

  $$\forall (u,v) \in M : \; Y(u,v) \in N_{(u,v)}X.$$

Die *Gaußabbildung* einer Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ ist das Einheitsnormalenfeld (ENF):

$$N := \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} : M \to V.$$

Beispiel. **Roationsfläche:** Für jede Rotationsfläche

$$(u,v) \mapsto X(u,v) := O + e_1 r(u)\cos(v) + e_2 r(u)\sin(v) + e_3 h(u)$$

ist jede Profilkurve $v \equiv \text{const}$ der orthogonale Schnitt der Fläche mit der Ebene $x\sin(v) = y\cos(v)$ der Meridiankurve; die Gaußabbildung erhält man also durch $\frac{\pi}{2}$ Drehung des ETFs ("Einheitstangentialfeldes") in der Ebene der Kurve

$$N(u,v) = \{-(e_1\cos(v) + e_2\sin(v))h'(u) + e_3 r'(u)\}\frac{1}{\sqrt{(r'^2+h'^2)(u)}}.$$

Überprüfung des Vorzeichens:

$$\det\begin{pmatrix} r'\cos & -r\sin & -h'\cos \\ r'\sin & r\cos & -h'\sin \\ h' & 0 & r' \end{pmatrix} = h'^2 r + r'^2 r = r(r'^2+h'^2) > 0.$$

Bemerkung. Die Gaußabbildung einer Fläche ist ein geometrisches Objekt, d.h., nach einer Euklid. Bewegung $\widetilde{X} = \widetilde{O} + A(X-O)$, liefert

$$\widetilde{N} = \frac{\widetilde{X}_u \times \widetilde{X}_v}{|\widetilde{X}_u \times \widetilde{X}_v|} = \frac{AX_u \times AX_v}{|AX_u \times AX_v|} = \frac{A(X_u \times X_v)}{|A(X_u \times X_v)|} = A\frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = AN.$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, weil für $A \in \mathrm{SO}(3)$ gilt $|A| = 1$. Eine Spiegelung liefert $\widetilde{N} = -AN$, d.h., wechselt das Vorzeichen – was auch eine (ordnungsumkehrende) Umparametrisierung tut, z.B.: $(u,v) \mapsto (v,u)$. Demnach ist N "geometrisch" bis auf Vorzeichen.

Bemerkung. Ordnungsprobleme tauchen in unserem Setting mit parametrisierten (!) Flächen nicht auf: Die Gaußabbildung einer parametrisierten Fläche ist wohldefiniert; eine nicht-orientierbare Fläche (e.g. Möbiusband) kann durch eine doppelt überlagerte Parametrisierung beschrieben werden.

Erinnerung: Die Normalkrümmung κ_n eines Streifens (X,N) ist definiert durch

$$0 = N'^T + T\,|X'|\,\kappa_n = N'^T + X'\kappa_n,$$

wobei $t \mapsto N'^T(t) \in T_t X$ den Tangentialanteil von N' bezeichnet, i.e.

$$N'^T = N' - \nabla^\perp N = T\,\langle T, N'\rangle\,.$$

Lemma und Definition. 2.8. Die Ableitung der Gaußabbildung ist tangentialwertig,

$$\forall (u,v) \in M:\ d_{(u,v)}N : \mathbb{R}^2 \to T_{(u,v)}X.$$

Damit können wir den *Formoperator* von X am Punkt $(u,v) \in M$ definieren:

$$\mathcal{S}|_{(u,v)} := -d_{(u,v)}N \circ (d_{(u,v)}X)^{-1} \in \mathrm{End}(\mathrm{T_{(u,v)}X}).$$

Beweis. 1. Die Ableitung von N ist tangentialwertig. Nämlich:

$$1 \equiv |N|^2 \Rightarrow 0 = 2\,\langle N, dN\rangle \Rightarrow \forall (u,v) \in M \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : d_{(u,v)}N(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \in T_{(u,v)X}.$$

2. $\mathcal{S}$ ist wohldefiniert: Da für $(u,v) \in M, d_{(u,v)}X : \mathbb{R}^2 \to V$ injektiv ist, liefert dies einen Isomorphismus
$$d_{(u,v)}X : \mathbb{R}^2 \to T_{(u,v)}X \subseteq V,$$
der invertiert werden kann, um eine lineare Abbildung
$$(d_{(u,v)}X)^{-1} : T_{(u,v)}X \to \mathbb{R}^2$$
zu erhalten.

3. $\mathcal{S}|_{(u,v)}$ ist Endomorphismus: Als Verkettung linearer Abbildungen
$$T_{(u,v)}X \xrightarrow{(d_{(u,v)}X)^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{-d_{(u,v)}N} T_{(u,v)}X$$

□

Bemerkung. Die Abbildung $\mapsto \mathcal{S}|_{(u,v)} \in End(T_{(u,v)}X)$ liefert ein Endomorphismenfeld $\mathcal{S}$, welches man auch *Weingartentensorfeld* nennt.

Bemerkung. Da $(X_u(u,v), X_v(u,v))$ eine Basis von $T_{(u,v)}X$ ist, kann $\mathcal{S}|_{(u,v)}$ durch die Werte auf der Basis bestimmt werden:
$$\mathcal{S}X_u = -dN \circ (dX)^{-1}(X_u) = -dN \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -N_u$$
und
$$\mathcal{S}X_v = -N_v.$$

Lemma. 2.9. $\mathcal{S}|_{(u,v)} \in End(T_{(u,v)}X)$ *ist symmetrisch für jedes* $(u,v) \in M$.

Beweis. Wir verifizieren Symmetrie auf der Basis $(X_u(u,v), X_v(u,v))$ von $T_{(u,v)}X$:
Da $N \perp X_u, X_v$ erhalten wir
$$0 = \langle X_u, N \rangle_v = \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle = \langle X_{vu}, N \rangle - \langle X_u, \mathcal{S}X_v \rangle .$$
Ebenfalls
$$0 = \langle X_v, N \rangle_u = \langle X_{vu}, N \rangle - \langle X_v, \mathcal{S}X_u \rangle .$$
Also
$$\langle X_u, \mathcal{S}X_v \rangle = \langle \mathcal{S}X_u, X_v \rangle .$$

□

Bemerkung. Wie bei Streifen kann der Formoperator analog zu κ_n durch die Gleichung
$$0 = dN + \mathcal{S} \circ dX = dN^T + S \circ dX$$
beschrieben werden. Der Formoperator "kodiert" also die Krümmung einer Fläche.

Definition. 2.10. Sei $\mathcal{S}$ der Formoperator der Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$, dann heißt

- $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathcal{S}$ die *mittlere Krümmung* von X,
- $K = \det S$ die *Gauß Krümmung* von X und
- die Eigenwerte $\kappa^\pm = H \pm \sqrt{H^2 - K}$ und die *Eigenrichtungen* von $\mathcal{S}$ sind die *Hauptkrümmungen* bzw. *Hauptrichtungen* von X.

Bemerkung. Es gilt $H = \frac{1}{2}(\kappa^+ + \kappa^-)$ – daher auch der Name *mittlere Krümmung.*

Beispiel. Eine Rotationsfläche parametrisiert nach Bogenlänge ist

$$X(u,v) = O + e_1 r(u)\cos v + e_2 r(u)\sin v + e_3 h(v),$$

mit $r'^2 + h'^2 = 1$. Damit folgt $r'r'' + h'h'' = 0$. Mit der Gaußabbildung

$$N(u,v) = -e_1 h'(u)\cos v - e_2 h'(u)\sin v + e_3 v'(u)$$

bekommt man

$$N_v + X_v \frac{h'}{r} = (e_1 \sin v - e_2 \cos v)\left(h' - r\frac{h'}{r}\right) = 0,$$

$$N_u + X_u\,(r'h'' - r''h')$$
$$= (e_1\cos v + e_2 \sin v)\left(h'' + r'(r'h'' - r''h')\right) + e_3(r'' + h'(r'h'' - r''h')) = 0.$$

Also liefern X_u und X_v Krümmungsrichtungen zu Hauptrichtungen

$$\kappa^+ = r'h'' - r''h' \quad \text{und} \quad \kappa^- = \frac{h'}{r}.$$

Bemerkung. Formoperatoren und Krümmungen sind geometrische Objekte:

- Ist $\tilde{X} = X \circ (u,v)$ eine Umparametrisierung und $\tilde{N} = N \circ (u,v)$ so ist

  $$\tilde{\mathcal{S}} = -d\tilde{N} \circ (d\tilde{X})^{-1} = -\Big(d_{(u,v)}N \circ d(u,v)\Big) \circ \Big(d_{(u,v)X} \circ d(u,v)\Big)^{-1}$$

  $$= -d_{(u,v)}N \circ d(u,v) \circ d(u,v)^{-1} \circ \Big(d_{(u,v)}X\Big)^{-1} = \mathcal{S}\big|_{(u,v)},$$

  also insbesondere

  $$\tilde{H} = H \circ (u,v), \quad \text{und} \quad \tilde{K} = K \circ (u,v), \quad \text{etc.}$$

- Ist $\tilde{X} = \tilde{O} + A(X - O)$ mit $A \in SO(3)$ so bekommt man

  $$\tilde{\mathcal{S}} = -d\tilde{N} \circ \Big(d\tilde{X}\Big)^{-1} = -A \circ dN \circ (dX)^{-1} \circ A^{-1} = A \circ \mathcal{S} \circ A^{-1},$$

  insbesondere also

  $$\tilde{H} = H, \quad \text{und} \quad \tilde{K} = K, \quad \text{etc.}$$

  Die Krümmungsrichtungen werden mit der Fläche gedreht:

  $$\ker(\mathrm{id}\kappa^\pm - \tilde{\mathcal{S}}) = A\ker(\mathrm{id}\kappa^\pm - \mathcal{S}).$$

Definition. 2.11. Ein Punkt $X(u,v)$ einer Fläche heißt

- *Nabelpunkt* (umbilic), falls $\kappa^+(u,v) = \kappa^-(u,v) \quad (\iff (H^2 - K)(u,v) = 0)$,
- *Flachpunkt* (flatpoint), falls $\kappa^+(u,v) = \kappa^-(u,v) = 0$.

Bemerkung. Ein Punkt $X(u,v)$ ist Nabelpunkt bzw. Flachpunkt, falls

$$\mathcal{S}|_{(u,v)} = H(u,v)\mathrm{id}_{T_{(u,v)}X} \text{ bzw. } \mathcal{S}|(u,v) = 0.$$

:Flachpunkt ***Beispiel.*** Falls $(u,v) \mapsto X(u,v)$ Werte in einer (festen) Ebene

$$\pi = \{X \in \mathcal{E}^3 \mid \langle X - 0, n\rangle = d\}$$

annimmt, d.h., $\langle dX, n\rangle = 0$. Also ist $N \equiv \pm n$, weshalb $\mathcal{S} \equiv 0$ und jeder Punkt der Fläche ist ein Flachpunkt.
Umgekehrt: Ist jeder Punkt einer Fläche X ein Flachpunkt, $\mathcal{S} \equiv 0$, so folgt $N \equiv$ const., also nimmt X Werte in einer (festen) Ebene an: Mit $O \in \mathcal{E}^3$ beliebig

$$0 = \langle dX, N\rangle = d\,\langle X - O, N\rangle - \langle X - O, dN\rangle \Rightarrow \text{const.} \equiv \langle X - O, N\rangle\,,$$

wobei $\langle dX, N\rangle$ eine Abbildung $((u,v), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \mapsto \left\langle d_{(u,v)}X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, N(u,v) \right\rangle$ ist.

Matrixdarstellung: Mit (X_u, X_v) als tangentiales Basisfeld kann der Weingartentensor als Matrix geschrieben werden: $(\mathcal{S}X_u, \mathcal{S}X_v) = (-N_u, -N_v) = (X_u, X_v)\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$

also, vermittels der Skalarprodukte der Basisvektoren X_u, X_v,

$$\begin{pmatrix} -\langle X_u, N_u\rangle & -\langle X_u, N_v\rangle \\ -\langle X_v, N_u\rangle & -\langle X_v, N_v\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix},$$

d.h., als die Gram Matrix der zweiten Fundamentalform:

Lemma und Definition. 2.12. Die *zweite Fundamentalform* einer Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ ist definiert als

$$\mathrm{II} := \langle dX, dN\rangle\,,$$

wobei $\mathrm{II} : ((u,v), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}) \mapsto \left\langle d_{(u,v)}X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, d_{(u,v)}N \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\rangle$; an jedem Punkt (u,v) erhält man so eine symmetrische Bilinearform

$$\mathrm{II}|_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) \mapsto -\left\langle d_{(u,v)}X \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, d_{(u,v)}N \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Beweis. Dass $\mathrm{II}|_{(u,v)}$ Bilinearform ist, ist klar. Weiters gilt mit der Leibniz-Regel:

$$\mathrm{II}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = -\langle X_u, N_v\rangle = \langle X_{uv}, N\rangle = \langle X_{vu}, N\rangle = -\langle X_v, N_u\rangle = \mathrm{II}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}),$$

also ist II symmetrisch an jedem Punkt. $\square$

Bemerkung. Ist die erste Fundamentalform gegeben, so kann die zweite Fundamentalform aus dem Weingartentensor berechnet werden - und umgekehrt.

Warnung: Obwohl der Weingartentensor symmetrisch ist, ist seine Darstellungsmatrix (bzgl. (X_u, X_v)) normalerweise **nicht** symmetrisch:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Die Gauß-Krümmung ist gegeben durch:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

2.3 Kovariante Ableitung und Krümmungstensor

Definition. 2.13. Die *kovariante Ableitung* eines Tangentialfeldes $Y : M \to V$ entlang $X : M \to \mathcal{E}$ ist der Tangentialteil seiner Ableitung

$$\nabla Y := (dY)^T = dY - \langle dY, N \rangle N,$$

wobei ∇ den *Levi-Civita Zusammenhang* entlang X bezeichnet.

Bemerkung. Wegen $\langle X_{uu}, N \rangle = - \langle X_u, N_u \rangle = e$ usw. bekommt man

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u = X_{uu} - Ne \text{ und } \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} = X_{uv} - Nf$$
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_v = X_{vv} - Ng \text{ und } \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} = X_{uv} - Nf$$

Wobei

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y := Y_u - \langle Y_u, N \rangle N$$

Lemma. 2.14. *Der L-C Zusammenhang erfüllt die Leibniz-Regel,*

$$\nabla(Yx) = (\nabla Y)x + Y dx \text{ für } x \in C^\infty(M)$$

und ist metrisch*, d.h.,*

$$d \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla Z \rangle$$

Beweis. Die Leibniz-Regel gilt, da für $x \in C^\infty(M)$:

$$\nabla(Yx) = dYx + Y dx - \langle dYx, N \rangle N - \langle Y dx, N \rangle N = (\nabla Y)x + Y dx,$$

weil Y ein Tangentialfeld ist, ist $\langle Y dx, N \rangle = 0$.

Er ist metrisch, da:

$$\begin{aligned} \langle \nabla Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla Z \rangle &= \langle dY, Z \rangle - \langle dY, N \rangle \langle N, Z \rangle + \langle Y, dZ \rangle - \langle Y, N \rangle \langle dZ, N \rangle \\ &= \langle dY, Z \rangle + \langle Y, dZ \rangle = d \langle Y, Z \rangle . \end{aligned}$$

□

Matrixdarstellung: Da die kovariante Ableitung eines TVFs Y tangential ist, erhält man für $Y = X_v$:

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_v\right) &= (X_u, X_v)\Gamma_1 \\ \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_v\right) &= (X_u, X_v)\Gamma_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Eq:Gamma

mit

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{i1} & \Gamma^1_{i2} \\ \Gamma^2_{i1} & \Gamma^2_{i2} \end{pmatrix}.$$

Also gilt für eine allgemeine TVF $Y = X_u x + X_v y = dX \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \left((X_u, X_v) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_v\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + X_u, X_v \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

$$= (X_u, X_v)\,\Gamma_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (X_u, X_v) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (X_u, X_v) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_1 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{und ebenso} \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y &= (X_u, X_v) \left(\frac{\partial}{\partial v} + \Gamma_2 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2}$$

Eq:Gammaall

oder, anders gesagt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \circ dX = dX \circ \left(\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_1 \right)$$

und genauso

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \circ dX = dX \circ \left(\frac{\partial}{\partial v} + \Gamma_2 \right).$$

Man bemerke: mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cong \frac{\partial}{\partial u}$ erhält man

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \left((X_u, X_v) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u = X_u \Gamma^1_{11} + X_v \Gamma^2_{11} = (X_u, X_v)\,\Gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \left((X_u, X_v) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u = (X_u, X_v)\,\Gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ebenso für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cong \frac{\partial}{\partial v}$, also ist 1 ein Spezialfall von 2

Bemerkung. **WARUNUNG:** $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}$ und $\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}$ sind *Differentialoperatoren* (keine Endomorphismen) - trotzdem benutzen wir Matrizen, um sie zu beschreiben.

Lemma und Definition. 2.15. Γ_{ij}^k heißen die *Christoffel-Symbole* von X; sie sind symmetrisch:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

Beweis.

$$X_u\Gamma_{12}^1 + X_v\Gamma_{12}^2 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_v = (X_{vu})^T = (X_{uv})^T = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u = X_u\Gamma_{21}^1 + X_v\Gamma_{21}^2$$

also $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ und $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$. □

Satz 2.16 (Koszul's Formeln)**.** *Mit Matrizen*

$$I = \begin{pmatrix} E & f \\ F & G \end{pmatrix} \text{ und } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I_u - \frac{E_v - F_u}{2}J &= I\Gamma_1, \\ \frac{1}{2}I_v + \frac{G_u - F_v}{2}J &= I\Gamma_2. \end{aligned}$$

Beweis. Multipliziere $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u = X_u\Gamma_{11}^1 + X_v\Gamma_{11}^2$ mit Y_u und X_v, um zu erhalten:

$$E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \left\langle X_u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle X_u, X_u \right\rangle_u = \frac{1}{2}E$$

$$\begin{aligned} F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = \left\langle X_v, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u \right\rangle = \left\langle X_v, X_u \right\rangle_u - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_v, X_u \right\rangle = \left\langle X_v, X_u \right\rangle_u - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u, X_u \right\rangle \\ = F_u - \frac{1}{2}E_v. \end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_u \\ F_u \end{pmatrix} - \frac{E_v - F_u}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} - \frac{E_v - F_u}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Die anderen Teile der Gleichung folgen ebenso.

□

Korollar. 2.17. *Die Christoffel - Symbole Γ_{ij}^k hängen nur von der induzierten Metrik ab.*

Beispiel. Für eine isometrische Parametrisierung, $E = G = 1$ und $F = 0$, erhält man mit den Konszul-Formeln $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Definition. 2.18. Für ein TVf $Y : M \to V$ entlang $X : M \to \mathcal{E}$ definieren wir den *(Riemannschen) Krümmungstensor* R von X durch

$$RY := \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y.$$

Bemerkung. Dies ist eine vereinfachte Form, für Flächen, des "wahren" Krümmungstensors.

Lemma. 2.19. *R ist ein schiefsymmetrischer Tensor des Tangentialbündels TX, d.h., $R\big|_{(u,v)} \in \mathrm{End}(T_{(u,v)}X)$ ist schiefsymmetrisch für jedes $(u,v) \in M$, und*

$$R(Yx) = (RY)x \text{ für } x \in C^\infty(M).$$

Beweis. $R\big|_{(u,v)} \in \mathrm{End}(\mathrm{T}_{(\mathrm{u,v})}\mathrm{X})$ ist klar. Schiefsymmetrie:

$$\frac{1}{2}(|Y|^2)_{uv} = \left\langle Y \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y \right\rangle_v = \left\langle Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y \right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y \right\rangle$$

$$= \left\langle Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y \right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y \right\rangle = \frac{1}{2}\left(|Y|^2\right)$$

$$\Rightarrow \langle Y, RY \rangle = \frac{1}{2}\left(|Y|^2\right)_{vu} - \frac{1}{2}\left(|Y|^2\right)_{uv} = 0$$

Tensoreigenschaft:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} (Yx) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \left(\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y\right) x + Yx_v\right)$$

$$= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y\right) x + \underbrace{\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} Y\right) x_u + \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} Y\right) x_v + Yx_{uv}}_{\text{symmetrisch in } \frac{\partial}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial}{\partial v}}$$

also

$$R(Yx) = (RY)x.$$

□

Matrixdarstellung:

Wir arbeiten mit (X_u, X_v) als tangentiales Basisfeld. Damit erhält man

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \circ dX = dX \circ \left(\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_1\right)$$

und

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \circ dX = dX \circ \left(\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_2\right)$$

und somit, für $X_u = dX(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$ und $X_v = dX(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$,

$$RX_u = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} dX(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} dX(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$$

$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} dX \left((\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} + \Gamma_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} dX \left((\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} + \Gamma_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= dX \left((\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} + \Gamma_1)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} + \Gamma_2) - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} + \Gamma_2)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} + \Gamma_1) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= dX \left(\Gamma_{2u} + \Gamma_1\Gamma_2 - \Gamma_{1u} - \Gamma_2\Gamma_1 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= dX(\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2]) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei

$$[\Gamma_1, \Gamma_2] := \Gamma_1\Gamma_2 - \Gamma_2\Gamma_1$$

der Kommutator von Γ_1 und Γ_2 ist.

Weil die vorige Rechnung unabhängig von $(1,0)^t$ ist, erhalten wir analog

$$RX_v = X(\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2]) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also:

$$(RX_u, RX_v) = (X_U, X_v)(\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2]).$$

Andererseits ist R schiefsymmetrisch, weshalb ein $\rho \in C^\infty(M)$ existiert, sodass

$$\begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle X_u, RX_u \rangle & \langle X_u, RX_v \rangle \\ \langle X_v, RX_u \rangle & \langle X_v, RX_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} (\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2]).$$

Man bemerke: ρ hängt nur von der induzierten Metrik ab.

2.4 Die Gauß-Codazzi Gleichungen

Benutze $(X_u, X_v, N) =: F$ als Rahmen, um die Geometrie einer Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ zu untersuchen.

Lemma und Definition. 2.20. Der *(angepasste-) Rahmen* einer Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ ist die Abbildung

$$F = (X_u, X_v, N) : M \to \mathrm{Gl}(3);$$

ihre Strukturgleichungen sind von der Form:

$$\begin{aligned} F_u &= F\phi \\ F_v &= F\psi \end{aligned} \qquad (3)$$

wobei

$$\phi = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & -s_{11} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & -s_{21} \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -s_{12} \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -s_{22} \\ f & g & 0 \end{pmatrix}$$

Dies sind *Gauß-Weingarten Gleichungen* der Fläche $X :\to \mathcal{E}^3$.

Warunung: Im Allgemeinen $F : M \not\to O(3)$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus den Definitionen der

- Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k,
- Komponenten der zweiten Fundamentalform II $\sim \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$,
- Komponenten des Weingartentensors $\mathcal{S} \sim \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$

□

Bemerkung. Klassischer werden die Gauß-Weingarten Gleichungen ausgeschrieben:

$$X_{uu} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u + N_e = X_u \Gamma_{11}^1 + X_v \Gamma_{11}^2 + N_e$$

$$X_{uv} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u + Nf = X_u \Gamma_{12}^1 + X_v \Gamma_{12}^2 + Nf$$

$$X_{vv} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_v + Ng = X_u \Gamma_{22}^1 + X_v \Gamma_{22}^2 + Ng$$

und

$$\begin{aligned} N_u &= -\mathcal{S}X_u = -\left(X_u s_{11} + X_v s_{21}\right) \\ N_v &= -\mathcal{S}X_v - \left(X_u s_{12} + X_v s_{22}\right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - fF & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}.$$

Die Integrierbarkeitsbedingung $F_{uv} = F_{vu}$ liefert die zentralen Gleichungen der Flächentheorie:

Definition. 2.21. Die *Gauß-Codazzi Gleichungen* sind folgende Gleichungen für eine parametrisierte Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$

- $\langle X_u, RX_v \rangle = K(EG - F^2)$ die *Gauß-Gleichung*;
- $(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \mathcal{S})X_v = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \mathcal{S})X_u$ die *Codazzi -Gleichung*.

Hierbei ist $\nabla \mathcal{S}$ die *kovariante Ableitung des Weingartentensorfeldes*; für ein tangentiales Vektorfeld Y gilt:

$$(\nabla \mathcal{S})Y := \nabla(\mathcal{S}Y) - \mathcal{S}(\nabla Y).$$

Bemerkung. Die *partiellen kovarianten Ableitungen* $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \mathcal{S}$ und $\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \mathcal{S}$ sind Tensorfelder, e.g.,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \mathcal{S}\big|_{(u,v)} \in \mathrm{End}(\mathrm{T}_{(\mathrm{u},\mathrm{v})}\mathrm{X})$$

und

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \mathcal{S})(Y_x) = ((\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \mathcal{S})(Y))x \text{ für } x \in C^\infty(M)$$

Beweis. Mit $f = -\langle N_v, X_u\rangle$ und $e = -\langle N_u, X_u\rangle$ berechnen wir

$$(X_u)_{vu} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u + Nf)_u$$

$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u + N_u f + N\left(f_u + \left\langle N, (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u)_u\right\rangle\right)$$
$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u + N_u f + N\left(f_u - \left\langle N_u, (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u)\right\rangle\right)$$

und genauso

$$(X_u)_{uv} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u + N_v e + N\left(e_v - \left\langle N_v, (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u)\right\rangle\right).$$

Insgesamt also,

$$0 = (X_u)_{vu} - (X_u)_{uv} = (RX_u - (N_v e - N_u f)) = N((f_u + \left\langle N_v, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_u\right\rangle) - (e_v + \left\langle N_u, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u\right\rangle)$$

$$= (RX_u - (N_v e - N_u f)) + N\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} N_u - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} N_v, X_u\right\rangle.$$

Skalarprodukt mit X_u und X_v liefert:

$$\langle X_u, RX_u\rangle = \underbrace{\langle X_u, N_v\rangle}_{-f} e - \underbrace{\langle X_u, N_u\rangle}_{-e} f = 0$$

$$\langle X_v, RX_u\rangle = -eg + f^2 = -K(EG - F^2),$$

wobei die erste Gleichung trivial ist (Schiefsymmetrie von R) und die zweite Gleichung liefert uns die Gauß-Gleichung.

Der Normalteil liefert

$$0 = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}(\mathcal{S}X_u) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}(\mathcal{S}X_v), X_u\right\rangle$$

$$= -\left\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \mathcal{S})X_u - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \mathcal{S})X_v, X_u\right\rangle - \underbrace{\left\langle \mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X_u - \mathcal{S}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X_v, X_u\right\rangle}_{=0}$$

$$= -\left\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \mathcal{S})X_u - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \mathcal{S})X_v, X_u\right\rangle.$$

Genauso reproduziert $(X_v)_{vu} = (X_v)_{uv}$ die Gauß-Gleichung (tangentialer Teil) und liefert zusätzlich (normaler Teil):

$$0 = \left\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \mathcal{S})X_v - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \mathcal{S})X_u, X_v\right\rangle.$$

Damit folgt

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \mathcal{S})X_v - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \mathcal{S})X_u$$

und aus $\perp X_u, X_v$ folgt

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S})X_u - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\mathcal{S})X_u = 0,$$

also die Codazzi-Gleichung.

$\square$

Bemerkung. Die Integrierbarkeit $F_{uv} = F_{vu}$ liefert **keine** weiteren Gleichungen : $N_{uv} = N_{vu}$ reproduziert die Codazzi-Gleichung

Matrixdarstellung: Mit

$$(RX_u, RX_v) = (X_u, X_v)(\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2])$$

erhält man für die Gauß-Gleichung

$$K(EG - F^2) = \langle X_u, RX_v\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} (\Gamma_{2u} - \Gamma_{1v} + [\Gamma_1, \Gamma_2]) \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}0 & -\rho\\ \rho & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\rho.$$

Die Codazzi-Gleichungen kann man schreiben als

$$\sigma_{2u} + \Gamma_1\sigma_2 = \sigma_{1v} + \Gamma_2\sigma_1$$

mit den Spalten $(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{pmatrix}s_{11} & s_{21}\\ s_{12} & s_{22}\end{pmatrix}$ der Matrix des Weingartentensors.

Satz 2.22 (Gauß Theorema egregium)**.** *K hängt nur von* I *ab.*

Beweis. Mit der Gauß-Gleichung folgt

$$K = -\frac{\rho}{EG - F^2},$$

wobei ρ nur von I abhängt.

$\square$

Korollar. 2.23. *Falls eine Fläche eine isometrische (Um-)Parametrisierung besitzt, so ist notwendigerweise $K \equiv 0$.*

Beweis. Für eine isometrische Parametrisierung $\Gamma_{ij}^k = 0$, also $R = 0$ und somit $K \equiv 0$. Da die Gauß-Krümmung einer geometrischen Invariante ist – $\widetilde{K} = K \circ (u, v)$ für eine Umparametrisierung $\widetilde{X} = X \circ (u, v)$ – muss notwendigerweise $K \equiv 0$, falls eine isometrische Parametrisierung existiert. $\square$

Beispiel. Eine Sphäre von Radius $r > 0$ mit Gauß-Krümmung $\dfrac{1}{r^2} \neq 0$ erlaubt also keine isometrische Parametrisierung.

Beispiel. Falls eine Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ Werte in einer Ebene oder Sphäre hat, so sing alle Punkte Nabelpunkte.

Definition. 2.24. Eine Fläche heißt *total nabelsch*, falls jeder Punkt ein Nabelpunkt ist.

Satz 2.25. *Jede total nabelsche Fläche ist Teil einer Sphäre oder einer Ebene.*

Beweis. Ist X total nabelsch, so gilt:

$$\mathcal{S}\big|_{(u,v)} = H(u,v)\mathrm{id}_{T_{(u,v)}X};$$

damit liefert die Codazzi-Gleichung

$$0 = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\mathcal{S})X_v - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\mathcal{S})X_v = H_u X_v - H_v X_u.$$

Insgesamt also,

$$H_u = H_v = 0, \text{ also ist } H \equiv \text{const.}$$

1. Fall, $H \equiv 0$:
   Dann ist $N \equiv$ const. und X ist Teil einer Ebene (siehe 2.2)
2. Fall, $H \equiv$ const. $\neq 0$:
   Dann ist $Z := X + \frac{1}{H}N \equiv$ const., da

$$dZ = dX + \frac{1}{H}dN = dX - \frac{1}{H}\mathcal{S} \circ dX = dX - dX = 0.$$

Also parametrisiert X Teil einer Sphäre mit Zentrum Z und Radius $\frac{1}{H}$,

$$||X - Z||^2 \equiv \frac{1}{H^2}$$

□

Zur Erinnerung: Die Gauß-Codazzi-Gleichungen sind die Integrierbarkeitsbedingungen der Gauß-Weingarten Gleichungen

$$F_u = F\phi, F_v = F\psi \text{ für } F = (X_u, X_v, N), \tag{4}$$ Eq:GausWein

wobei ϕ, ψ und von erster und zweiter Fundamentalform abhängen. Die Gauß-Codazzi Gleichungen lassen sich dann schreiben als:

$$0 = F_{uv} - F_{vu} = (F\phi)_v - (F\psi)_u = F(\phi_v + \psi\phi - \psi_u - \phi\psi) = (\phi_v - \psi_u - [\phi, \psi]).$$

Das heißt, da $F : M \to \mathrm{Gl}(3)$,

$$0 = \psi_u - \phi_v + [\phi, \psi] \tag{5}$$ Eq:GausWein

Damit kann man den Fundamentalsatz von Bounet formulieren:

Satz 2.26. *Gegeben seien zwei Bilinearformen*

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

wobei I *positiv definit ist und* I *und* II *die Gauß-Codazzi Gleichungen erfüllen; dann existiert (lokal) eine parametrisierte Fläche X mit* I *und* II *also erst und zweite Fundamentalform.*

Bemerkung. Im Gegensatz zu den Fundamentalsätzen für Kurven bzw. Streifen benötigen wir hier die Gauß-Codazzi Gleichungen als notwendige und auch hinreichende Bedingungen.

Beweis. Beweis wird im den Notizen des Prof. Jeromin zu finden sein. Er ist ähnlich zu jenem von Streifen und Kurven, aber Gleichungssysteme von partiellen Differentialgleichungen sind zu lösen. Daher reicht Picard-Lindelöff nicht und wir müssen "schwerere Geschütze auffahren". □