

# **DiffGeo**

Luka Ilić, Johannes Mader, Jakob Deutsch, Fabian Schuh

15. März 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>1 Kurven</b>	<b>4</b>
1.1 Parametrisierung und Bogenlänge . . . . .	4
1.2 Streifen und Rahmen . . . . .	6

## Vorwort

Das folgende Skriptum ist begleitend zur Vorlesung Differentialgeometrie gehalten von Univ.Prof. Hertrich - Jeromin und wird von einigen Studenten (oben angeführt) während der Vorlesung geschrieben und danach auf Fehler kontrolliert und bearbeitet. Natürlich schleichen sich nach Möglichkeit Fehler ein, die übersehen werden, dies ist gerne bei den schreibenden Personen anzumerken. Das Skriptum enthält großteils das Tafelbild der Stunden und keinesfalls die Garantie in irgendeiner Weise vollständig zu sein. (Wir geben unser Bestes.)

**Viel Vergnügen mit DiffGeo!**

**Bemerkung.      Literaturempfehlung** (zusätzlich):

1. Strubecker: Differentialgeometrie I - III; Sammlung Götschen
2. Spivak: A comprehensive Introduction to Differential Geometry I - V; Publisher Perish
3. O'Neil: Semi.Riemannian Geometrie; Acad. Press
4. Hicks: Notes on Differential Geometry (Es gibt (möglicherweise nicht legale) Versionen im Internet.)  
(ersteres ist kompakter, zweiteres eher komplementär gedacht, drittes für Physik-Interessierte, letzteres vergleicht die Methoden der Differentialgeometrie)

# 1 Kurven

## 1.1 Parametrisierung und Bogenlänge

Wiederholung: Ein Euklidischer Raum  $\mathcal{E}$  ist:

1. Ein affiner Raum  $(\mathcal{E}, V, \tau)$
2. über einem Euklid. Vektorraum  $(V, <, >)$ .

Dabei:  $\tau : V \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}; (v, X) \mapsto \tau_v(X) =: X + v$  genügt

1.  $\tau_0 = id_{\mathcal{E}}$  und  $\forall v, w \in V \quad \tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w}$
2.  $\forall X, Y \in \mathcal{E} \exists! v \in V \quad \tau_v(X) = Y$  ((d.h.  $\tau$  ist einfach transitiv)).

**Definition.** Eine (*parametrisierte-*) *Kurve* ist eine Abbildung

$$X : I \rightarrow \mathcal{E}$$

auf einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , die regulär ist (d.h.  $\forall t \in I \quad X'(t) \neq 0$ ). Wir nennen  $X$  auch Parametrisierung der Kurve  $\mathcal{C} = X(I)$ .

**Bemerkung.** Alle Abbildungen in dieser VO sind beliebig oft differenzierbar (d.h.  $C^\infty$ ).

**Beispiel.** Eine (*Kreis-*) *Helix* mit Radius  $r > 0$  und Ganghöhe  $h$  ist die Kurve

$$X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}^3; t \mapsto X(t) := O + e_1 r \cos(t) + e_2 r \sin(t) + e_3 h t.$$

**Definition.** *Umparametrisierung* einer param. Kurve  $X : I \rightarrow \mathcal{E}$  ist eine param. Kurve

$$\tilde{X} : \tilde{I} \rightarrow \mathcal{E}; s \mapsto \tilde{X}(s) = X(t(s)),$$

wobei  $t : \tilde{I} \rightarrow I$  eine surjektive, reguläre Abbildung ist.

Motivation: Für eine Kurve  $t \mapsto X(t)$

1.  $X'(t)$  ist *Geschwindigkeit(-vektor)* ("velocity"),
2.  $|X'(t)|$  ist (skalare) *Geschwindigkeit* ("speed").

Rekonstruktion durch Integration:

$$X(t) = X(o) + \int_o^t X'(t) dt$$

und die Länge des Weges von  $X(0)$  nach  $X(t)$ :

$$s(t) = \int_o^t |X'(t)| dt$$

**Definition.**

Die *Bogenlänge* einer Kurve  $X : I \rightarrow \mathcal{E}$  ab  $X(o)$  für  $o \in I$ , ist

$$s(t) := \int_o^t |X'(t)| dt$$

(wobei  $\int_o^s |X'(t)| dt$  auch als  $\int_o^t ds$  geschrieben wird)

**Bemerkung.** Dies ist tatsächlich die Länge des Kurvenbogens zwischen  $X(o)$  und  $X(t)$ , wie man z.B. durch polygonale Approximation beweist (s. Ana2 VO) Also: Die Bogenlänge zwischen zwei Punkten ist *invariant* ("ändert sich nicht") unter Umparametrisierung.

**Lemma und Definition.** Jede Kurve  $t \mapsto X(t)$  kann man nach Bogenlänge (um-)parametrisieren, d.h. so, dass sie konstante Geschwindigkeit 1 ( $|X'(t)| \equiv 1$ ) hat. Dies ist die *Bogenlängenparametrisierung* und üblicherweise notiert  $s \mapsto X(s)$  diesen Zusammenhang.

*Beweis.* Wähle  $o \in I$  und bemerke

$$s'(t) = |X'(t)| > 0.$$

Also ist  $t \mapsto s(t)$  streng monoton wachsend, kann also invertiert werden, um  $t = t(s)$  zu erhalten: Damit erhält man für

$$\begin{aligned} \tilde{X} &:= X \circ t \\ |\tilde{X}'(s)| &= |X'(t(s))| * |t'(s)| = \frac{s'(t)}{s'(t)} = 1, \end{aligned}$$

d.h.  $\tilde{X}$  ist nach Bogenlänge parametrisiert. (nämlich durch Division mit der Inversen.) □

**Bemerkung.** Eine Bogenlängenparametrisierung ist eindeutig bis auf Wahl von  $o$  und Orientierung.

**Beispiel.** Eine Helix

$$t \mapsto X(t) = O + e_1 r \cos(t) + e_2 r \sin(t) + e_3 h t$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_O^t \sqrt{r^2 + h^2} dt = \sqrt{r^2 + h^2} * t$$

und somit Bogenlängenparametrisierung

$$s \mapsto \tilde{X}(s) = O + e_1 r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_2 r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_3 \frac{h s}{\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

**Bemerkung und Beispiel.**

Üblicherweise ist es nicht möglich eine Bogenlängenparam. in elem. Funktionen anzugeben: Eine Ellipse

$$t \mapsto O + e_1 a \cos(t) + e_2 b \sin(t) (a > b > 0)$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_O^t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2(t)} dt,$$

dies ist ein elliptisches Integral, also nicht mit elem. Funktionen invertierbar.

## 1.2 Streifen und Rahmen

### Definition.

Sei  $X : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathcal{E}$  eine parametrisierte Kurve. Die *Tangente* an einem Punkt  $X(t)$ , wird durch den Punkt und seinen Tangentialvektor  $X'(t)$  beschrieben.  $\mathcal{T}(t) = X(t) + [X'(t)]$  notiert diese Gerade. Die Ebene  $\mathcal{N}(t) = X(t) + \{X'(t)\}^\perp$  heißt *Normalebene*.

Alternativ können wir sagen, wir erhalten Tangente, bzw. Normalebene, durch legen des *Tangentialraumes*  $[X'(t)]$  bzw. *Normalraumes*  $\{X'(t)\}^\perp$  durch den Punkt  $X(t)$ .

**Definition.** Das *Tangential-* und *Normalbündel* einer Kurve  $X : I \rightarrow \mathcal{E}^3$  werden durch die folgenden Abbildungen definiert:

$$I \ni t \mapsto T_t X := [X'(t)] \subseteq V \text{ bzw.}$$

$$I \ni t \mapsto N_t X := \{X'(t)\}^\perp.$$

eine Abbildung  $Y : I \rightarrow V$  heißt

1. ein *Tangentialfeld* entlang  $X$ , falls

$$\forall t \in I : X(t) \in T_t X$$

2. ein *Normalenfeld* entlang  $X$ , falls

$$\forall t \in I : X(t) \in N_t X$$

### Bemerkung und Definition.

Jede Kurve hat ein (und nur ein!) harmonisches *Einheitstangentenfeld* (ETF)

$$T : I \rightarrow V; t \mapsto \frac{X'(t)}{|X'(t)|}$$

Aber – es gibt haufenweise Normalenfelder.

**Definition.** Ein *Streifen* ("ribbon") ist ein Paar  $(X, N)$ , wobei

$$X : I \rightarrow \mathcal{E}$$

eine Kurve und

$$N : I \rightarrow V$$

ein *Einheitsnormalenfeld* (ENF) ist, d.h.,

$$N \perp T \text{ und } |N| = 1.$$

**Bemerkung und Definition.** (Im dreidimensionalen Raum können wir folgendes sagen:) Ein Streifen ist also eine Kurve mit einer "vertikalen Richtung". Weiters erhält man eine "seitwärts Richtung" durch die *Binormale*

$$B := T \times N : I \rightarrow V.$$

(Hier ist  $T \times N$  das "bekannte" Kreuzprodukt)

**Lemma und Definition.**

Der (*angepasste*) *Rahmen* eines Streifens  $(X, N) : I \rightarrow \mathcal{E}^3 \times S^2$  ist eine Abbildung

$$F = (T, N, B) : I \rightarrow SO(V)$$

seine *Strukturgleichungen* sind von der Form

$$F' = F\phi \text{ mit } |X'| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & \tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

1.  $\kappa_n$  die *Normalkrümmung*
2.  $\kappa_g$  die *geodärische Krümmung*, und
3.  $\tau$  die *Torsion* des Streifens  $(X, N)$  bezeichnen.

*Beweis.* Da  $F : I \rightarrow SO(V)$ , gilt

$$F^t F \equiv id$$

und daher

$$0 = (F^t F)' = F'^t F + F^t F' = (F\phi)^t F + F^t F\phi = \phi^t F^t F + F^t F\phi = \phi^t + \phi, \quad ,$$

d.h.,  $\phi : I \rightarrow o(V)$  ist schiefssymmetrisch. Insbesondere: Es gibt Funktionen  $\kappa_n, \kappa_g, \tau$ , so dass  $\phi$  von der behaupteten Form ist.  $\square$

**Wiederholung:**

$$O(V) = \{A \in \text{End}(V) \mid A^t A \equiv id\}$$

$$SO(V) = \{A \in O(V) \mid \det(A) = 1\}$$

$$o(V) = \{B \in \text{End}(V) \mid B^t + A \equiv 0\}$$

**Bemerkung.** Krümmung und Torsion eines Streifens sind *geometrische Invarianten* des Streifens, d.h., sie sind unabhängig von Position und (in gewisser Weise) Parametrisierung des Streifens.

1. ist  $(\tilde{X}, \tilde{N}) = (\tilde{o} + A(X - o), AN)$  mit  $o, \tilde{o} \in \mathcal{E}$  und  $A \in SO(V)$  eine Euklidische Bewegung des Streifens  $(X, N)$ , so sind  $\tilde{T} = AT$  und  $\tilde{B} = AT \times AN = A(T \times N)$ , also  $\tilde{F} = AF$  und damit  $\tilde{\phi} = \tilde{F}^t \tilde{F}' = F^t A^t A F' = \phi$

2. ist  $s \mapsto (\tilde{X}, \tilde{N})(t(s))$  eine *orientierungstreue Umparametrisierung*, d.h.,  $t' > 0$ , von  $t \mapsto (X, N)(t)$ , so gilt

$$\tilde{\phi}(s) = \tilde{F}^t(s) \tilde{F}'(s) = F^t(t(s)) F'(t(s)) \cdot t'(s)$$

und

$$|\tilde{X}'(s)| = |X'(t(s))| \cdot |t'(s)| = |X'(t(s))| \cdot t'(s)$$

und damit  $\widetilde{\kappa_n}(s) = \kappa_n(t(s))$  usw.

**Bemerkung und Definition.** Ist ein Streifen  $(\tilde{X}, \tilde{N})$  gegeben durch eine *Normalrotation* eines Streifens  $(X, N)$ , d.h.,  $\tilde{X}, \tilde{N} = (X, N \cos \varphi + B \sin \varphi)$  mit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so gilt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\kappa_n} \\ \widetilde{\kappa_g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_n \\ \kappa_g \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{\tau} = \tau + \frac{\varphi'}{|X'|} \quad .$$

**Beispiel.**

1. **Helix:** Betrachte den Streifen  $(X, N)$  mit  $t \mapsto X(t) = o + e_1 r \cos t + e_2 r \sin t + e_3 h t$  und  $t \mapsto N(t) = -(e_1 \cos t + e_2 \sin t)$ . Für

$$T(t) = (-e_1 r \sin t + e_2 r \cos t + e_3 h) \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

und

$$N(t) = (e_1 h \sin t - e_2 h \cos t + e_3 r) \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

bekommt man  $F = (T, N, B) : \mathbb{R} \rightarrow SO(V)$  und damit

$$T' = N \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$N' = T \cdot \frac{-r}{\sqrt{r^2 + h^2}} + B \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$B' = \frac{-h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

also (mit  $|X'| = \sqrt{r^2 + h^2}$ ),

$$\kappa_n = \frac{r}{r^2 + h^2}$$

$$\kappa_g = 0$$

$$\tau = \frac{h}{r^2 + h^2}$$



2. **sphärische Kurve:** Sei  $s \mapsto X(s) \in \mathcal{E}^3$  eine bogenlängenparametrisierte Kurve, d.h., mit Mittelpunkt  $o \in \mathcal{E}^3$  und Radius  $r > 0$ , der Sphäre gilt:

$$|X - o|^2 \equiv r^2 \text{ und } |X'|^2 \equiv 1 \quad .$$

Bemerke:  $\langle X', X - o \rangle = \frac{1}{2}(|X - o|^2)' = 0 \quad$ . Also liefert  $N := (X - o)\frac{1}{r}$  ein ENF. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \kappa_n &= -\langle N', T \rangle \equiv \frac{1}{r} \\ \kappa_g &= -\langle B, T' \rangle = -\frac{1}{r} \langle X' \times (X - o), X'' \rangle = \frac{\det(X - o, X', X'')}{r} \\ \tau &= \langle N', B \rangle = \frac{1}{r^2} \langle X', X' \times (X - o) \rangle \equiv 0 \quad . \end{aligned}$$

**Bemerkung.**  $\kappa_g \equiv 0$  im ersten Bsp. und  $\tau \equiv 0$  im zweiten Bsp.

**Satz.** Fundamentalsatz für Streifen

Seien

$$\kappa_n, \kappa_g, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}; s \mapsto \kappa_n(s), \kappa_g(s), \tau(s)$$

gegeben. Dann gibt es eine bogenlängenparametrisierte Kurve

$$X : I \rightarrow \mathcal{E}$$

und ein ENF

$$N : I \rightarrow V \quad ,$$

so dass  $\kappa_n, \kappa_g, \tau$  Normal- bzw. geodätische Krümmung und Torsion des Streifens  $(X, N)$  sind. Dieser Streifen ist bis auf Euklid. Bewegung eindeutig.

*Beweis.* Wähle  $o \in I$  und  $F_o \in SO(V)$  beliebig und fest. Nach Satz von Picard-Lindelöf hat das AWP

$$F' = F\phi, \quad F(o) = F_o$$

mit

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung  $F = (T, N, B) : I \rightarrow \text{End}(V)$ . Nun zeigen wir, dass  $F$  ein Rahmen ist:

1.  $(FF^t)' = F(\phi + \phi^t)F^t \equiv 0$  also  $FF^t \equiv id$ , und  $F : I \rightarrow O(V)$
2.  $\det : O(V) \rightarrow \{\pm 1\}$  ist stetig, also  $\det F : I \rightarrow \{\pm 1\}$  konstant und somit

$$\det F = \det F_o = 1 \quad ,$$

also  $F : I \rightarrow SO(V)$ .

Insbesondere  $|T| \equiv 1$  und man erhält eine bogenlängenparametrisierte Kurve

$$X : I \rightarrow \mathcal{E}^3, t \mapsto O + \int_o^t T(s) ds \quad .$$

$(X, N)$  mit  $F = (T, N, B)$  liefert einen Streifen, Krümmung und Torsion wie behauptet. Eindeutigkeit bis auf Euklid. Bewegung folgt aus der Eindeutigkeit in Picard-Lindelöf und jener der Integration.  $\square$