DiffGeo

Luka Ilić, Johannnes Mader, Jakob Deutsch, Fabian Schuh

8. März 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Kurven **3**
1.1 Parametrisierung und Bogenlänge 3

1 Kurven

1.1 Parametrisierung und Bogenlänge

Wiederholung: Ein Euklidischer Raum $\mathcal{E}$ ist:

1. Ein affiner Raum $(\mathcal{E}, V, \tau)$
2. über einem Euklid. Vektorraum $(V, <, >)$.

Dabei: $\tau : V \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}; (v, X) \mapsto \tau_v(X) =: X + v$ genügt

1. $\tau_0 = id_{\mathcal{E}}$ und $\forall v, w \in V \ \tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w}$
2. $\forall X, Y \in \mathcal{E} \exists! v \in V \ \tau_v(x) = Y$ ((d.h. τ *ist einfach transitiv*)).

Definiton. Eine *(parametrisierte-) Kurve* ist eine Abbildung

$$X : I \to \mathcal{E}$$

auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, die regulär ist (d.h. $\forall t \in I \ X'(t) \neq 0$). Wir nennen X auch Parametrisierung der Kurve $\mathcal{C} = X(I)$.

Bemerkung. Alle Abbildungen in dieser VO sind beliebig oft differenzierbar (d.h. C^∞).

Beispiel. Eine *(Kreis-) Helix* mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe h ist die Kurve

$$X : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3; t \mapsto X(t) := O + e_1 r \cos(t) + e_2 r sin(t) + e_3 ht.$$

Definiton. *Umparametrisierung* einer param. Kurve $X : I \to \mathcal{E}$ ist eine param. Kurve

$$\overline{X} : \overline{I} \to \mathcal{E}; s \mapsto \overline{X}(s) = X(t(s)),$$

wobei $t : \overline{I} \to I$ eine surjektive, reguläre Abbildung ist.

Motivation: Für eine Kurve $t \mapsto X(t)$

1. X'(t) ist *Geschwindigkeit(-svektor)* ("veloicity"),
2. |X'(t)| ist (skalare) Geschwindigkeit ("speed").

Rekonstruktion durch Integration:

$$X(t) = X(o) + \int_o^t X'(t)dt$$

und die Länge des Weges von $X(0)$ nach $X(t)$:

$$s(t) = \int_o^t |X'(t)|dt$$

Definiton.

Die *Bogenlänge* einer Kurve $X : I \to \mathcal{E}$ von $X(0)$ für $o \in I$, ist

$$s(t) := \int_o^t |X'(t)|dt$$

(wobei $\int_o^s |X'(t)|dt$ auch als $\int_o^t ds$ geschrieben wird)

Bemerkung. Dies ist tatsächlich die Länge des Kurvenbogens zwischen $X(o)$ und $X(t)$, wie man z.B. durch polygonale Approximation beweist (s. Ana2 VO) Also: Die Bogenlänge zwischen zwei Punkten ist *invariant* ("ändert sich nicht") unter Umparametrisierung.

Lemma und Definition. Jede Kurve $t \mapsto X(t)$ kann man nach Bogenlänge (um-)parametrisieren, d.h. so, dass sie konstante Geschwindigkeit 1 ($|X'(t)| \equiv 1$) hat. Dies ist die *Bogenlängenparametrisierung* und üblicherweise notiert $s \mapsto X(s)$ diesen Zusammenhang.

Beweis. Wähle $o \in I$ und bemerke

$$s'(t) = |X'(t)| > 0.$$

Also ist $t \mapsto s(t)$ streng monoton wachsend, kann also invertiert werden, um $t = t(s)$ zu erhalten: Damit erhält man für

$$\overline{X} := X \circ t$$

$$|\overline{X}'(s)| = |X'(t(s))| * |t'(s)| = \frac{s'(t)}{s'(t)} = 1,$$

d.h. $\overline{X}$ ist nach Bogenlänge parametrisiert. (nämlich durch Division mit der Inversen.) □

Bemerkung. Eine Bogenlängenparametrisierung ist eindeutig bis auf Wahl von o und Orientierung.

Beispiel. Eine Helix

$$t \mapsto X(t) = O + e_1 r\cos(t) + e_2 r\sin(t) + e_3 ht$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_O^t \sqrt{r^2 + h^2}dt = \sqrt{r^2 + h^2} * t$$

und somit Bogenlängenparametrisierung

$$s \mapsto \overline{X}(s) = O + e_1 r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} + e_2 r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} + e_3\frac{hs}{\sqrt{r^2+h^2}}.$$

Bemerkung und Beispiel.

Üblicherweise ist es nicht möglich eine Bogenlängenparam. in elem. Funktionen anzugeben: Eine Ellipse

$$t \mapsto O + e_1 a\cos(t) + e_2 b\sin(t)(a > b > 0)$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_O^t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin(t)}dt,$$

dies ist ein elliptisches Integral, also nicht mit elem. Funktionen invertierbar.