

# **DiffGeo**

Luka Ilić, Johannes Mader, Jakob Deutsch, Fabian Schuh

19. April 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>1 Kurven</b>	<b>4</b>
1.1 Parametrisierung und Bogenlänge . . . . .	4
1.2 Streifen und Rahmen . . . . .	6
1.3 Normalzusammenhang & Paralleltransport . . . . .	10
1.4 Frenet Kurven . . . . .	12
<b>2 Flächen</b>	<b>15</b>
2.1 Parametrisierung & Metrik . . . . .	15

## Vorwort

Das folgende Skriptum ist begleitend zur Vorlesung Differentialgeometrie gehalten von Univ.Prof. Hertrich - Jeromin und wird von einigen Studenten (oben angeführt) während der Vorlesung geschrieben und danach auf Fehler kontrolliert und bearbeitet. Natürlich schleichen sich nach Möglichkeit Fehler ein, die übersehen werden, dies ist gerne bei den schreibenden Personen anzumerken. Das Skriptum enthält großteils das Tafelbild der Stunden und keinesfalls die Garantie in irgendeiner Weise vollständig zu sein. (Wir geben unser Bestes.)

### Viel Vergnügen mit DiffGeo!

**Bemerkung. Literaturempfehlung** (zusätzlich):

1. Strubecker: Differentialgeometrie I - III; Sammlung Göschen
2. Spivak: A comprehensive Introduction to Differential Geometry I - V; Publisher Perish
3. O'Neil: Semi.Riemannian Geometrie; Acad. Press
4. Hicks: Notes on Differential Geometry (Es gibt (möglicherweise nicht legale) Versionen im Internet.)  
(ersteres ist kompakter, zweiteres eher komplementär gedacht, drittes für Physik-Interessierte, letzteres vergleicht die Methoden der Differentialgeometrie)

# 1 Kurven

## 1.1 Parametrisierung und Bogenlänge

Wiederholung: Ein Euklidischer Raum  $\mathcal{E}$  ist:

1. Ein affiner Raum  $(\mathcal{E}, V, \tau)$
2. über einem Euklid. Vektorraum  $(V, <, >)$ .

Dabei:  $\tau : V \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}; (v, X) \mapsto \tau_v(X) =: X + v$  genügt

1.  $\tau_0 = id_{\mathcal{E}}$  und  $\forall v, w \in V \quad \tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w}$
2.  $\forall X, Y \in \mathcal{E} \exists! v \in V \quad \tau_v(X) = Y$  ((d.h.  $\tau$  ist einfach transitiv)).

**Definition. 1.1.** Eine (parametrisierte-) Kurve ist eine Abbildung

$$X : I \rightarrow \mathcal{E}$$

auf einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , die regulär ist (d.h.  $\forall t \in I \quad X'(t) \neq 0$ ). Wir nennen  $X$  auch Parametrisierung der Kurve  $\mathcal{C} = X(I)$ .

**Bemerkung.** Alle Abbildungen in dieser VO sind beliebig oft differenzierbar (d.h.  $C^\infty$ ).

**Beispiel.** Eine (Kreis-) Helix mit Radius  $r > 0$  und Ganghöhe  $h$  ist die Kurve

$$X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}^3; t \mapsto X(t) := O + e_1 r \cos(t) + e_2 r \sin(t) + e_3 h t.$$

**Definition. 1.2.** Umparametrisierung einer param. Kurve  $X : I \rightarrow \mathcal{E}$  ist eine param. Kurve

$$\tilde{X} : \tilde{I} \rightarrow \mathcal{E}; s \mapsto \tilde{X}(s) = X(t(s)),$$

wobei  $t : \tilde{I} \rightarrow I$  eine surjektive, reguläre Abbildung ist.

Motivation: Für eine Kurve  $t \mapsto X(t)$

1.  $X'(t)$  ist *Geschwindigkeit(-svektor)* ("velocity"),
2.  $|X'(t)|$  ist (skalare) Geschwindigkeit ("speed").

Rekonstruktion durch Integration:

$$X(t) = X(o) + \int_o^t X'(t) dt$$

und die Länge des Weges von  $X(0)$  nach  $X(t)$ :

$$s(t) = \int_o^t |X'(t)| dt$$

**Definition. 1.3.** Die *Bogenlänge* einer Kurve  $X : I \rightarrow \mathcal{E}$  ab  $X(o)$  für  $o \in I$ , ist

$$s(t) := \int_o^t |X'(t)| dt$$

(wobei  $\int_o^s |X'(t)| dt$  auch als  $\int_o^s ds$  geschrieben wird)

**Bemerkung.** Dies ist tatsächlich die Länge des Kurvenbogens zwischen  $X(o)$  und  $X(t)$ , wie man z.B. durch polygonale Approximation beweist (s. Ana2 VO) Also: Die Bogenlänge zwischen zwei Punkten ist *invariant* ("ändert sich nicht") unter Umparametrisierung.

umpar

**Lemma und Definition. 1.4.** Jede Kurve  $t \mapsto X(t)$  kann man nach Bogenlänge (um-) parametrisieren, d.h. so, dass sie konstante Geschwindigkeit 1 ( $|X'(t)| \equiv 1$ ) hat. Dies ist die *Bogenlängenparametrisierung* und üblicherweise notiert  $s \mapsto X(s)$  diesen Zusammenhang.

*Beweis.* Wähle  $o \in I$  und bemerke

$$s'(t) = |X'(t)| > 0.$$

Also ist  $t \mapsto s(t)$  streng monoton wachsend, kann also invertiert werden, um  $t = t(s)$  zu erhalten: Damit erhält man für

$$\begin{aligned}\tilde{X} &:= X \circ t \\ |\tilde{X}'(s)| &= |X'(t(s))| \cdot |t'(s)| = \frac{s'(t)}{s'(t)} = 1,\end{aligned}$$

d.h.  $\tilde{X}$  ist nach Bogenlänge parametrisiert. (nämlich durch Division mit der Inversen.)  $\square$

**Bemerkung.** Eine Bogenlängenparametrisierung ist eindeutig bis auf Wahl von  $o$  und Orientierung.

**Beispiel.** Eine Helix

$$t \mapsto X(t) = O + e_1 r \cos(t) + e_2 r \sin(t) + e_3 h t$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2} dt = \sqrt{r^2 + h^2} \cdot t$$

und somit Bogenlängenparametrisierung

$$s \mapsto \tilde{X}(s) = O + e_1 r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_2 r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_3 \frac{h s}{\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

**Bemerkung und Beispiel.** Üblicherweise ist es nicht möglich eine Bogenlängenparam. in elem. Funktionen anzugeben: Eine Ellipse

$$t \mapsto O + e_1 a \cos(t) + e_2 b \sin(t) \quad (a > b > 0)$$

hat Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2(t)} dt,$$

dies ist ein elliptisches Integral, also nicht mit elem. Funktionen invertierbar.

## 1.2 Streifen und Rahmen

**Definition. 1.5.** Sei  $X : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathcal{E}$  eine parametrisierte Kurve. Die *Tangente* an einem Punkt  $X(t)$ , wird durch den Punkt und seinen *Tangentialvektor*  $X'(t)$  beschrieben.  $\mathcal{T}(t) = X(t) + [X'(t)]$  notiert diese Gerade. Die Ebene  $\mathcal{N}(t) = X(t) + \{X'(t)\}^\perp$  heißt *Normalebene*.

Alternativ können wir sagen: Wir erhalten Tangente, bzw. Normalebene, durch legen des *Tangentialraumes*  $[X'(t)]$  bzw. *Normalraumes*  $\{X'(t)\}^\perp$  durch den Punkt  $X(t)$ .

**Definition. 1.6.** Das *Tangential-* und *Normalbündel* einer Kurve  $X : I \rightarrow \mathcal{E}^3$  werden durch die folgenden Abbildungen definiert:

$$I \ni t \mapsto T_t X := [X'(t)] \subseteq V \text{ bzw.}$$

$$I \ni t \mapsto N_t X := \{X'(t)\}^\perp.$$

eine Abbildung  $Y : I \rightarrow V$  heißt

1. *Tangentialfeld* entlang  $X$ , falls

$$\forall t \in I : Y(t) \in T_t X$$

2. *Normalenfeld* entlang  $X$ , falls

$$\forall t \in I : Y(t) \in N_t X$$

**Bemerkung und Definition. 1.7.** Jede Kurve hat ein (**und nur ein!**) harmonisches *Einheitstangentenfeld* (ETF)

$$T : I \rightarrow V; t \mapsto \frac{X'(t)}{|X'(t)|}$$

Aber – es gibt haufenweise Normalenfelder.

**Definition. 1.8.** Ein *Streifen* ("ribbon") ist ein Paar  $(X, N)$ , wobei

$$X : I \rightarrow \mathcal{E}$$

eine Kurve und

$$N : I \rightarrow V$$

ein *Einheitsnormalenfeld* (ENF) ist, d.h.,

$$N \perp T \text{ und } |N| = 1.$$

**Bemerkung und Definition. 1.9.** (Im dreidimensionalen Raum können wir folgendes sagen:) Ein Streifen ist also eine Kurve mit einer "vertikalen Richtung". Weiters erhält man eine "seitwärts Richtung" durch die *Binormale*

$$B := T \times N : I \rightarrow V.$$

(Hier ist  $T \times N$  das "bekannte" Kreuzprodukt)

**Lemma und Definition. 1.10.** Der (*angepasste*) *Rahmen* eines Streifens  $(X, N) : I \rightarrow \mathcal{E}^3 \times S^2$  ist eine Abbildung

$$F = (T, N, B) : I \rightarrow SO(V)$$

seine *Strukturgleichungen* sind von der Form

$$F' = F\phi \text{ mit } \phi = |X'| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

1.  $\kappa_n$  die *Normalkrümmung*
2.  $\kappa_g$  die *geodätische Krümmung*, und
3.  $\tau$  die *Torsion* des Streifens  $(X, N)$  bezeichnen.

*Beweis.* Da  $F : I \rightarrow SO(V)$ , gilt

$$F^t F \equiv id$$

und daher

$$0 = (F^t F)' = F'^t F + F^t F' = (F\phi)^t F + F^t F\phi = \phi^t F^t F + F^t F\phi = \phi^t + \phi,$$

d.h.,  $\phi : I \rightarrow o(V)$  ist schiefsymmetrisch. Insbesondere: Es gibt Funktionen  $\kappa_n, \kappa_g, \tau$ , so dass  $\phi$  von der behaupteten Form ist.  $\square$

**Wiederholung:**

$$O(V) = \{A \in \text{End}(V) \mid A^t A \equiv id\}$$

$$SO(V) = \{A \in O(V) \mid \det(A) = 1\}$$

$$o(V) = \{B \in \text{End}(V) \mid B^t + B \equiv 0\}$$

**Bemerkung.** Krümmung und Torsion eines Streifens sind *geometrische Invarianten* des Streifens, d.h., sie sind unabhängig von Position und (in gewisser Weise) Parametrisierung des Streifens.

1. ist  $(\tilde{X}, \tilde{N}) = (\tilde{O} + A(X - O), AN)$  mit  $O, \tilde{O} \in \mathcal{E}$  und  $A \in SO(V)$  eine Euklidische Bewegung des Streifens  $(X, N)$ , so sind  $\tilde{T} = AT$  und  $\tilde{B} = AT \times AN = A(T \times N) = AB$ , also  $\tilde{F} = AF$  und damit  $\tilde{\phi} = \tilde{F}^t \tilde{F}' = F^t A^t A F' = \phi$ . (Da  $A \in SO(V)$ )
2. ist  $s \mapsto (\tilde{X}, \tilde{N})(s) = (X, N)(t(s))$  eine *orientierungstreue Umparametrisierung*, d.h.,  $t' > 0$ , von  $t \mapsto (X, N)(t)$ , so gilt

$$\tilde{\phi}(s) = \tilde{F}^t(s) \tilde{F}'(s) = F^t(t(s)) F'(t(s)) \cdot t'(s) = \phi(t(s)) \cdot t'(s)$$

und

$$|\tilde{X}'(s)| = |X'(t(s))| \cdot |t'(s)| = |X'(t(s))| \cdot t'(s)$$

und damit  $\tilde{\kappa}_n(s) = \kappa_n(t(s))$  usw.

**Lemma. 1.11.** Für einen Streifen  $(X, N)$  gilt

$$\kappa_n = -\frac{1}{|X'|} \langle N', T \rangle, \quad \kappa_g = -\frac{1}{|x'|} \langle B, T' \rangle, \quad \tau = \frac{1}{|X'|} \langle N', B \rangle.$$

*Beweis.* Dies folgt sofort aus der Definition von  $\kappa_n, \kappa_g$  und  $\tau$  und aus der Orthonormalität von  $T, N$  und  $B$ .  $\square$

**Bemerkung und Definition. 1.12.** Ist ein Streifen  $(\tilde{X}, \tilde{N})$  gegeben durch eine *Normalrotation* eines Streifens  $(X, N)$ , d.h.,  $\tilde{X}, \tilde{N} = (X, N \cos \varphi + B \sin \varphi)$  mit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so gilt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\kappa_n} \\ \widetilde{\kappa_g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_n \\ \kappa_g \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{\tau} = \tau + \frac{\varphi'}{|X'|}.$$

**Beispiel.** 1. **Helix:** Betrachte den Streifen  $(X, N)$  mit

$$t \mapsto X(t) = o + e_1 r \cos t + e_2 r \sin t + e_3 h t$$

und  $t \mapsto N(t) = -(e_1 \cos t + e_2 \sin t)$ . Für

$$T(t) = (-e_1 r \sin t + e_2 r \cos t + e_3 h) \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

und

$$B(t) = (e_1 h \sin t - e_2 h \cos t + e_3 r) \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

bekommt man  $F = (T, N, B) : \mathbb{R} \rightarrow SO(V)$  und damit

$$T' = N \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$N' = T \cdot \frac{-r}{\sqrt{r^2 + h^2}} + B \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$B' = \frac{-h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

also (mit  $|X'| = \sqrt{r^2 + h^2}$ ),

$$\kappa_n = \frac{r}{r^2 + h^2}, \quad \kappa_g = 0, \quad \tau = \frac{h}{r^2 + h^2}.$$

2. **sphärische Kurve:** Sei  $s \mapsto X(s) \in \mathcal{E}^3$  eine bogenlängenparametrisierte Kurve, d.h. mit Mittelpunkt  $O \in \mathcal{E}^3$  und Radius  $r > 0$ , der Sphäre gilt:

$$|X - O|^2 \equiv r^2 \text{ und } |X'|^2 \equiv 1.$$



Bemerkung:  $\langle X', X - O \rangle = \frac{1}{2}(|X - O|^2)' = 0$ . Also liefert  $N := (X - O)\frac{1}{r}$  ein ENF. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}\kappa_n &= -\langle N', T \rangle \equiv \frac{1}{r} \\ \kappa_g &= -\langle B, T' \rangle = -\frac{1}{r} \langle X' \times (X - O), X'' \rangle = \frac{\det(X - O, X', X'')}{r} \\ \tau &= \langle N', B \rangle = \frac{1}{r^2} \langle X', X' \times (X - O) \rangle \equiv 0.\end{aligned}$$

**Bemerkung.**  $\kappa_g \equiv 0$  im ersten Bsp. und  $\tau \equiv 0$  im zweiten Bsp.

**Satz 1.13** (Fundamentalsatz für Streifen). *Seien*

$$\kappa_n, \kappa_g, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}; s \mapsto \kappa_n(s), \kappa_g(s), \tau(s)$$

*gegeben. Dann gibt es eine bogenlängenparametrisierte Kurve*

$$X : I \rightarrow \mathcal{E}$$

*und ein ENF*

$$N : I \rightarrow V,$$

*so dass  $\kappa_n, \kappa_g, \tau$  Normal- bzw. geodätische Krümmung und Torsion des Streifens  $(X, N)$  sind. Dieser Streifen ist bis auf Euklid. Bewegung eindeutig.*

*Beweis.* Wähle  $o \in I$  und  $F_o \in SO(V)$  beliebig und fest. Nach Satz von Picard-Lindelöf hat das AWP

$$F' = F\phi, \quad F(o) = F_o$$

mit

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung  $F = (T, N, B) : I \rightarrow \text{End}(V)$ . Nun zeigen wir, dass  $F$  ein Rahmen ist:

1.  $(FF^t)' = F(\phi + \phi^t)F^t \equiv 0$  also  $FF^t \equiv \text{id}$ , und  $F : I \rightarrow O(V)$
2.  $\det : O(V) \rightarrow \{\pm 1\}$  ist stetig, also  $\det F : I \rightarrow \{\pm 1\}$  konstant und somit

$$\det F = \det F_o = 1,$$

also  $F : I \rightarrow SO(V)$ .

Insbesondere  $|T| \equiv 1$  und man erhält eine bogenlängenparametrisierte Kurve

$$X : I \rightarrow \mathcal{E}^3, t \mapsto O + \int_o^t T(s) ds.$$

$(X, N)$  mit  $F = (T, N, B)$  liefert einen Streifen, Krümmung und Torsion wie behauptet. Eindeutigkeit bis auf Euklid. Bewegung folgt aus der Eindeutigkeit in Picard-Lindelöf und jener der Integration.  $\square$

### 1.3 Normalzusammenhang & Paralleltransport

**Definition. 1.14.** Für ein Normalenfeld kann man die Ableitung  $N' = N' - \langle N', T \rangle T + \langle N', T \rangle T$  in **Normal-** und **Tangentialanteil** zerlegen.

**Definition. 1.15.** Ein Normalenfeld  $N : I \rightarrow V$  entlang  $X : I \rightarrow \mathcal{E}$  heißt *parallel*, falls  $\nabla^\perp N := N' - \langle N', T \rangle T = 0$ , wobei  $\nabla^\perp$  den *Normalzusammenhang* entlang  $X$  bezeichnet.

**Bemerkung.** Hier wird nicht  $|N| = 1$  angenommen.

**Lemma. 1.16.** Der Normalzshg. ist metrisch, d.h.,

$$\langle N_1, N_2 \rangle' = \langle \nabla^\perp N_1, N_2 \rangle + \langle N_1, \nabla^\perp N_2 \rangle;$$

parallele Normalenfelder haben konstante Länge und schließen konstante Winkel ein.

*Beweis.* Für Normalenfelder  $N_1, N_2 : I \rightarrow V$  entlang  $X : I \rightarrow \mathcal{E}$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle \nabla^\perp N_1, N_2 \rangle + \langle N_1, \nabla^\perp N_2 \rangle &= \langle N_1' - \langle N_1, T \rangle T, N_2 \rangle + \langle N_1, N_2' - \langle N_2', T \rangle T \rangle \\ &= \langle N_1', N_2 \rangle + \langle N_1, N_2' \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle'. \end{aligned}$$

Insbesondere sind  $N_1, N_2$  parallel, so ist  $\langle N_1, N_2 \rangle' = 0$

Damit:

1. ist  $N$  parallel, so gilt

$$(|N|^2)' = 2\langle N, \nabla^\perp N \rangle = 0$$

2. sind  $N_1, N_2$  parallel, so ist der Winkel  $\alpha$  zwischen  $N_1, N_2$

$$\alpha = \arccos \frac{\langle N_1, N_2 \rangle}{|N_1||N_2|} = \text{const.}$$

□

**Beispiel.** Für einen Kreis  $t \mapsto X(t) = O + (e_1 \cos t + e_2 \sin t)r$  ist  $t \mapsto N(t) := e_1 \cos t + e_2 \sin t$  ein paralleles Normalenfeld.

**Bemerkung.** Ist  $(X, N)$  ein Krümmungsstreifen,  $\tau \equiv 0$ , so ist  $N$  parallel. Aus  $N' = (-\kappa_n T + \tau B) |X'|$  folgt

$$\nabla^\perp N = (-\kappa_n T + \tau B) |X'| + \kappa_n T = B\tau |X'| = 0.$$

Andererseits: Ist  $N : I \rightarrow V$  parallel entlang  $X : I \rightarrow \mathcal{E}$ , so ist  $(X, \frac{N}{|N|})$  Krümmungsstreifen (falls  $N \neq 0$ ).

**Bemerkung.** Ist  $N$  parallel längs  $X$ , so auch  $B = T \times N$ .

**Bemerkung.** Ist  $(X, N)$  durch eine Normalrotation von  $(X, \tilde{N})$  gegeben, d.h.

$$(X, N) = (X, \tilde{N} \cos \varphi + \tilde{B} \sin \varphi)$$

mit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so gilt

$$\tau = \tilde{\tau} + \frac{\varphi'}{|X'|};$$

folglich: Man erhält einen Krümmungsstreifen bzw. ENF  $N : I \rightarrow V$  einer Kurve  $X : I \rightarrow \mathcal{E}$  durch

$$N = \tilde{N} \cos \varphi + \tilde{B} \sin \varphi \text{ mit } \varphi(t) = \varphi_o - \int_o^t \tau(s) ds.$$

Wobei  $\varphi_o$  eine Integrationskonstante ist und eine konstante Normaldrehung liefert und  $ds$  für  $|X'|dt$  – das Bogenlängenelement – steht.

Da konstante Skalierungen eines parallelen Normalenfeldes parallel ist, folgt:

**Lemma. 1.17.** Sei  $X : I \rightarrow \mathcal{E}$  eine Kurve,  $o \in I$  und  $N_o \in N_o X$ . Dann existiert ein eindeutiges paralleles Normalenfeld  $N : I \rightarrow V$  mit  $N(o) = N_o$

*Beweis.* der Beweis folgt aus der Bemerkung darüber. Allerdings nur für Dimension 3. Der Beweis gilt auch sonst, dann braucht man allerdings Picard-Lindelöf  $\square$

**Beispiel.** Für das "radikale" ENF  $\tilde{N} = -(e_1 \cos t + e_2 \sin t)$  der Helix

$$X = O + e_1 r \cos t + e_2 r \sin t + e_3 h t$$

ist  $\tilde{\tau} = \frac{h}{r^2 + h^2}$ . Also liefert

$$N(t) := \tilde{N}(t) \cos\left(\frac{ht}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right) + \tilde{B}(t) \sin\left(-\frac{ht}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right)$$

ein paralleles Normalenfeld.

**Lemma und Definition. 1.18.** Parallele Normalenfelder entlang  $X : I \rightarrow \mathcal{E}$  definieren eine lineare Isometrie von  $N_o X$  nach  $N_t X$ . Diese Isometrie heißt *Paralleltransport* entlang  $X$ .

**Bemerkung.** Dies erklärt den Begriff "Zusammenhang" für  $\nabla^\perp : \nabla^\perp$  liefert einen Zusammenhang zwischen Normalräumen einer Kurve.

*Beweis.* Wähle  $N_o \in N_o X$ ; nach Lemma vorher gibt es ein eindeutiges(!) paralleles NF  $N : I \rightarrow V$  entlang  $X$  mit  $N(o) = N_o$ ; also definiere durch

$$\pi_t : N_o X \rightarrow N_t X, N_o \mapsto N(t)$$

eine wohldefinierte Abbildung. Da die Gleichung  $\nabla^\perp N = 0$  linear ist, sind konstante(!) Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen – also ist  $\pi_t$  linear.  $\square$

## 1.4 Frenet Kurven

Wir diskutieren  $\kappa_g \equiv 0$  (vorheriger Abschnitt  $\tau \equiv 0$ ).

Bemerkung: ist  $(\tilde{X}, \tilde{N}) = (X, N \cos \varphi + B \sin \varphi)$  Normalrotation eines Streifens  $(X, N)$ , so gilt

$$\begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_n \\ \tilde{\kappa}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_n \\ \kappa_g \end{pmatrix}$$

insbesondere  $\tilde{\kappa}_n = -\kappa_g$  und  $\tilde{\kappa}_g = \kappa_n$  fpr  $(\tilde{X}, \tilde{N}) = (X, N)$ .

**Definition. 1.19.**  $X : I \rightarrow \mathcal{E}^3$  heißt *Frenet Kurve*, falls

$$\forall t \in I : (X' \times X'')(t) \neq 0.$$

**Bemerkung.** In diesem Kapitel wird stets der 3-dimensionale Raum angenommen.

**Bemerkung.** Die Frenet-Bedingung ist invariant unter Upparametrisierung.

**Lemma und Definition. 1.20.** Ist  $X : I \rightarrow \mathcal{E}^3$  Frenet, so gilt

$$\forall t \in I : T'(t) \neq 0$$

und  $\frac{T'}{|T'|} =: N$  definiert ein ENF: Dies ist die *Hauptnormale* von  $X$ .

*Beweis.* Mit der Frenet-Bedingung:

$$0 \neq X' \times X'' = X' \times (T|X'|)' = X' \times T|X'|' + X' \times T'|X'| \Rightarrow T' \neq 0$$

Weiters:

$$0 = (1)' = (|T|^2)' = 2\langle T, T' \rangle,$$

also definiert  $N = \frac{T'}{|T'|}$  ein ENF. □

**Lemma und Definition. 1.21.** Ist  $X : I \rightarrow \mathcal{E}^3$  Frenet mit Hauptnormale  $N : I \rightarrow V$ , so sind die Strukturgleichungen des *Frenet Rahmens*  $F = (T, N, B)$  der Kurve die *Frenet-Serret*

Gleichungen  $F' = F\phi$  mit  $\mathcal{C} = |X'| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$  mit der *Krümmung*  $\kappa > 0$  und *Torsion*  $\tau$

der Frenet Kurve  $X$ .

**Bemerkung.** Für eine Frenet Kurve (mit Hauptnormale) gilt also  $\kappa_n = \kappa > 0$  und  $\kappa_g = 0$ .

*Beweis.* Für einen Frenet Rahmen gilt

$$\kappa_g = -\frac{\langle T', B \rangle}{|X'|} = -\frac{\langle N, B \rangle |T'|}{|X'|} = 0,$$

$$\kappa_g = \frac{\langle T', N \rangle}{|X'|} = \frac{\langle N, N \rangle |T'|}{|X'|} > 0.$$

□

**Beispiel.** Eine Helix

$$X = O + e_1 r \cos t + e_2 r \sin t + e_3 h$$

hat Hauptnormalenfeld (s. Kapitel 1.2)

$$t \mapsto N(t) = -(e_1 \cos t + e_2 \sin t)$$

und Krümmung und Torsion

$$\kappa \equiv \frac{r}{r^2 + h^2} \text{ bzw. } \tau \equiv \frac{h}{r^2 + h^2}.$$

**Bemerkung.** Krümmung und Torsion einer Frenet Kurve sind

$$\kappa = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3} \text{ bzw. } \tau = \frac{\det(X', X'', X''')}{|X' \times X''|^2}$$

Insbesondere: Krümmung und Torsion hängen nur von der Kurve ab (daher: "Krümmung" und "Torsion der Kurve").

**Satz 1.22** (Fundamentalsatz für Frenet Kurven). *Für zwei Funktionen*

$$s \mapsto \kappa(s), \tau(s) \text{ mit } \forall s \in I : \kappa(s) > 0$$

*gibt es eine Bogenlängenparametrisierte Frenet Kurve  $X : I \rightarrow \mathcal{E}^3$  mit Krümmung  $\kappa$  und Torsion  $\tau$ . Weiters:  $X$  ist eindeutig bis auf Euklid. Bewegung.*

*Beweis.* Nach dem Fundamentalsatz für Streifen existiert bogenlängen-parametrisierte Kurve  $X : I \rightarrow \mathcal{E}^3$  und ENF  $N : I \rightarrow V$  so dass der Streifen  $(X, N)$  Krümmung und Torsion

$$\kappa_n = \kappa, \kappa_g = 0, \tau = \tau,$$

d.h.

$$F' = F\phi \text{ mit } \phi = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Insbesondere  $T' = N\kappa \neq 0$ , daher:

1.  $X$  ist Frenet, da

$$X' \times X'' = T \times T' = T \times N\kappa \neq 0$$

und

2.  $N$  ist Hauptnormalenfeld, da

$$N = T' \frac{1}{\kappa} = \frac{T'}{|T'|}.$$

□

**Bemerkung.** Einen einfacheren Fundamentalsatz gibt es für ebene Kurven. (Aufgabe: Formulieren und – ohne Picard-Lindelöf– beweisen!)

**Beispiel.** Seien  $\kappa > 0, \tau \in \mathbb{R}$  Zahlen. Nach dem Fundamentalsatz existiert (eind. bis auf Eukl. Bewegung) eine bogenlängenparametrisierte Frenet Kurve mit Krümmung  $\kappa$  und Torsion  $\tau$ . Andererseits:

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto X(s) = O + e_1 r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_2 r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} + e_3 \frac{hs}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

ist bogenlängenparam. Frenet Kurve mit Krümmung  $\kappa$  und Torsion  $\tau$  für

$$r = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \text{ und } h = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}.$$

Damit haben wir bewiesen:

**Satz 1.23** (Klassifikation der Helices). *Eine Frenet Kurve ist genau dann Helix, wenn sie konstante Krümmung und Torsion hat.*

## 2 Flächen

### 2.1 Parametrisierung & Metrik

**Definition. 2.1.** Eine Abbildung

$$X : \mathbb{R}^2 \supseteq M \rightarrow \mathcal{E}$$

heißt *parametrisierte Fläche*, falls  $M$  ein offen und zusammenhängend ist und  $X$  regulär ist, d.h.,  $\forall (u, v) \in M : d_{(u,v)}X : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$  ist injektiv. Wir sagen auch:  $X$  ist *Parametrisierung* der Fläche  $X(M) \subseteq \mathcal{E}$

**Bemerkung.** Äquivalent zur letzten Forderung ist die Forderung, dass die Jacobi-Matrix maximalen Rang hat. Diese braucht aber eine festgelegte Basis, was oft zu Schwierigkeiten bei Berechnungen führt und wird daher von Prof. Jeromin nicht empfohlen.

**Bemerkung.** Einmal mehr sind alle geforderten Abbildungen so oft differenzierbar, wie wir das wünschen

**Bemerkung.**  $d_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$  ist die Ableitung am Punkt  $(u, v) \in M$ ,

$$X(u+x, v+y) \doteq X(u, v) + d_{(u,v)}X\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = X(u, v) + X_u(u, v) \cdot x + X_v(u, v) \cdot y,$$

wir können also identifizieren:

$$d_{(u,v)}X \cong (X_u, X_v)(u, v),$$

bzw., nach Wahl einer Basis von  $V$ , mit der Jacobi-Matrix am Punkt  $(u, v)$ .

**Beispiel.** Ein *Helicoid*  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{E}^3$  ist die (*Regel*-)Fläche

$$\mathbb{R}^2 \supseteq (r, v) \mapsto O + e_1 r \cos(v) + e_2 r \sin(v) + e_3 v \in \mathcal{E}^3.$$

Wir zeigen, dass  $(X_r, X_v)(r, v)$  linear unabhängig für alle  $(r, v) \in \mathbb{R}^2$  sind:

$$X_r(r, v) = e_1 \cos(v) + e_2 \sin(v) \neq 0$$

$$X_v(r, v) = -e_1 r \sin(v) + e_2 r \cos(v) + e_3 \neq 0$$

und da  $X_r(r, v)$  von  $e_3 \neq 0$  abhängt sind die beiden linear unabhängig.

**Beispiel.** Eine übliche Parametrisierung von  $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathcal{E}^3$  (mit Mittelpunkt  $O \in \mathcal{E}^3$ ) ist

$$(u, v) \mapsto O + e_1 \cos(u) \cos(v) + e_2 \cos(u) \sin(v) + e_3 \sin(u)$$

liefert keine parametrisierte Fläche, da die Sphäre an den Polen nicht regulär ist. Dies ist also nur eine Parametrisierung auf  $M = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$

Insbesondere kann man sogar zeigen, dass es keine (reguläre) Parametrisierung der (ganzen) Sphäre gibt ("Hairy Ball Theorem" bzw. "Satz vom Igel").

$\mathbb{S}^2$  ist also **keine** Fläche im Sinne der Def. Dieses "Problem" wird später gelöst.

**Lemma und Definition. 2.2.** Die *induzierte Metrik* oder *erste Fundamentalform* einer parametrisierten Fläche  $X : M \rightarrow \mathcal{E}$  ist definiert durch

$$I := \langle dX, dX \rangle$$

für jeden Punkt  $(u, v) \in M$  liefert

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto I|_{(u,v)} \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) := \left\langle d_{(u,v)}X \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right), d_{(u,v)}X \left( \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$$

eine positiv definite symmetrische Bilinearform.

*Beweis.* Zuzeugen ist, dass  $I|_{(u,v)}$  für jeden Punkt  $(u, v) \in M$  eine positiv definite symmetrische Bilinearform ist.

Weil  $I|_{(u,v)}$  eine komposition aus linearen Funktionen und einer Bilinearform ist, ist auch  $I|_{(u,v)}$  linear. Die Symmetrie ist ebenfalls leicht ersichtlich. Fehlt noch die positiv Definitheit.

Sei  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$  beliebig, so gilt

$$I|_{(u,v)} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left\langle d_{(u,v)}X \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right), d_{(u,v)}X \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right\rangle > 0.$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil  $d_{(u,v)}X$  injektiv in linear ist, daher bildet nur 0 auf 0 ab. Also ist  $d_{(u,v)}X \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \neq 0$ . Der Rest folgt, weil  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  positiv defint ist.  $\square$

**Bemerkung.**  $I$  wird oft notiert mit Hilfe der *Gramschen Matrix*,

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

mit

$$E = |X_u|^2, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = |X_v|^2$$

Dann gilt für  $(u, v) \in M$  :

$$\begin{aligned} I|_{(u,v)} \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &:= \langle d_{(u,v)}X \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right), d_{(u,v)}X \left( \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \rangle \\ &= \langle X_u(u, v)x_1 + X_v(u, v)y_1, X_u(u, v)x_2 + X_v(u, v)y_2 \rangle \\ &= E(u, v)x_1x_2 + F(u, v)(x_1y_2 + x_2y_1) + G(u, v)y_1y_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \Big|_{(u,v)} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



**Beispiel.** 1. Ein Zylinder

$$(u, v) \mapsto X(u, v) := O + e_1 x(u) + e_2 y(u) + e_3$$

hat induzierte Metrik

$$I = (x'^2 + y'^2)du^2 + dv^2.$$

Insbesondere: Ist  $u \mapsto O + e_1 x(u) + e_2 y(u)$  bogenlängenparametrisiert, so ist  $X$  *isometrisch*,

$$I = du^2 + dv^2$$

2. Das Helicoid

$$(r, v) \mapsto O + e_1 r \cos(v) + e_2 r \sin(v) + e_3 v$$

hat Metrik

$$I|_{(r,v)} = dr^2 + (1 + r^2)dv^2.$$

Mit einer Umparametrisierung  $r = r(u) = \sinh(u)$  erhält man

$$I|_{(u,v)} = \cosh^2(u)(du^2 + dv^2),$$

d.h.,  $X$  wird *konform* (winkeltreu).

**Definition. 2.3.** Eine Parametrisierte Fläche  $X : M \rightarrow \mathcal{E}$  heißt

1. *konform*, falls  $E = G, F = 0$
2. *isometrisch*, falls  $E = G = 1, F = 0$ .

**Bemerkung.** Für Kurven: Jede Kurve kann isometrisch/nach Bogenlänge <sup>umpar</sup>umparametrisiert werden (I.4). Für Flächen: Im Allgemeinen gibt es keine isometrische (Um-)Parametrisierung.

**Satz 2.4.** Jede Fläche kann lokal konform (um-)parametrisiert werden.

*Beweis.* Ist echt cool laut Jeromin (braucht bissi so Fana und so..) Falls der Leser Zeit hat, wird ihm nahegelegt den Beweis nachzuschauen.

□

**Bemerkung.** Dieser Satz ist die Grundlage, um (reelle) Flächen als komplexe Kurve zu interpretieren. Eine weitreichende Betrachtungsweise..

**Bemerkung.** Um den Satz zu verstehen:

”lokal” heißt, dass – für jeden Punkt  $(u, v) \in M$  – der Definitionsbereich  $M$  so eingeschränkt werden kann – auf eine Umgebung des Punktes  $(u, v)$  – dass die Behauptung wahr ist; ”Umparametrisierung” wie für Kurven definiert:

**Definition. 2.5.** Eine *Umparametrisierung* einer parametrisierten Fläche  $X : M \rightarrow \mathcal{E}$  ist eine neue parametrisierte Fläche

$$\tilde{X} = X \circ (u, v) ; \tilde{M} \rightarrow \mathcal{E}$$

mit einem *Diffeomorphismus*:

$$(u, v) : \tilde{M} \rightarrow M,$$

d.h., eine glatte ( $C^\infty$ ) Bijektion mit glatter Inverser  $(u, v)^{-1} : M \rightarrow \tilde{M}$

**Bemerkung.** Für

$$(x, y) \mapsto \tilde{X}(x, y) = X(u(x, y), v(x, y)) \in \mathcal{E}^3$$

gilt (Kettenregel)

$$\tilde{X}_x = (X_u \circ (u, v)) \cdot u_x + (X_v \circ (u, v)) \cdot v_x$$

$$\tilde{X}_y = (X_u \circ (u, v)) \cdot u_y + (X_v \circ (u, v)) \cdot v_y$$

und somit

$$\tilde{X}_x \times \tilde{X}_y = ((X_u \times X_v) \circ (u, v)) \cdot (u_x v_y - u_y v_x)$$

d.h.,  $\tilde{X}$  ist regulär.