

Atividade 2

Essa atividade foi realizada em linguagem R, utilizando o software R Studio. Pacotes FrF2, unrepx, ggplot2, ggpubr e rsm.

Atividade 1

Executei o planejamento fatorial 2<sup>2</sup> sem replicação (Tabela 1) com 4 experimentos e obtive os valores dos coeficientes utilizando regressão linear de acordo com a Figura 1.

	A	B	y
1	-1	-1	20
2	1	-1	40
3	-1	1	30
4	1	1	52

Tabela 1 – Planejamento fatorial 2<sup>2</sup>

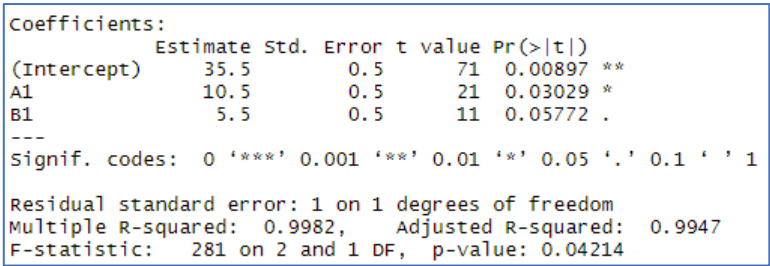


Figura 1 – Coeficientes de regressão

Considerando significância de 10% (p-value < 0.1) obtive a seguinte equação.

$$y = 35,5 + 10,5_{x1} + 5,5_{x2}$$

Após essa etapa, conseguimos observar os gráficos de superfície na Figura 2 e de contorno na Figura 3, que demonstram que o efeito de interação entre A e B.

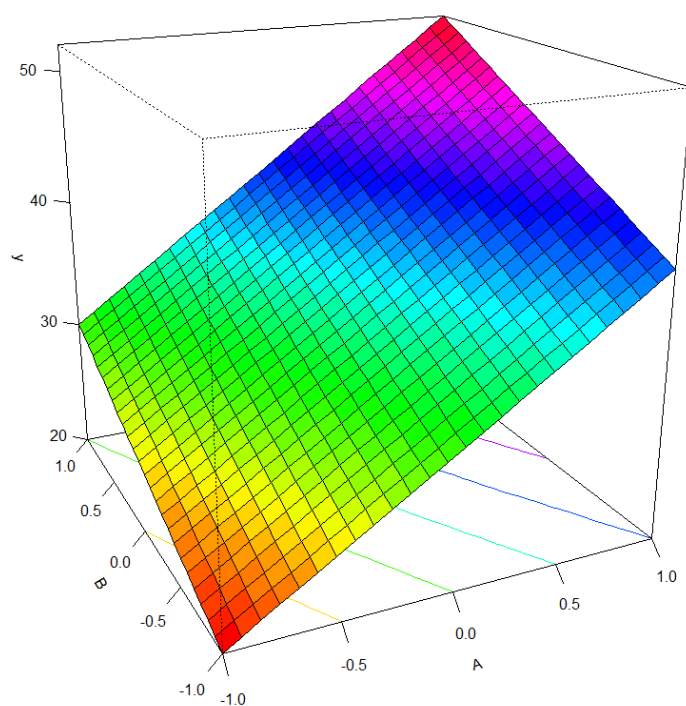


Figura 2 – Gráfico de superfície com interação AB

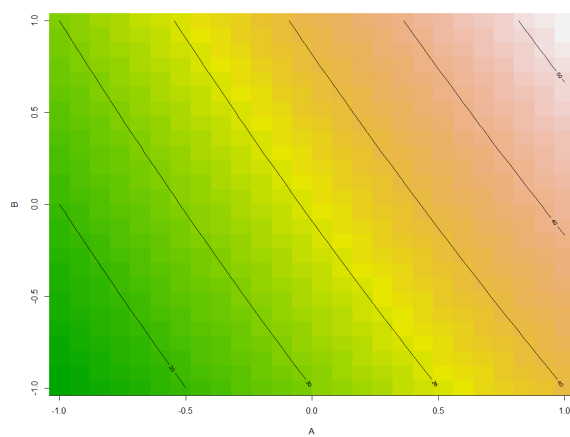


Figura 3 – Gráfico de contorno com interação AB

Assumindo que a interação AB não seja desprezível e possua valor 8, obtemos a seguinte equação.

$$y = 35,5 + 10,5x_1 + 5,5x_2 + 8x_1x_2$$

Após essa etapa, observamos novamente os gráficos de superfície na Figura 4 e de contorno na Figura 5, que demonstram o efeito de interação entre A e B, dessa vez sob influência da nova equação com um termo de interação  $x_1x_2$  adicional.

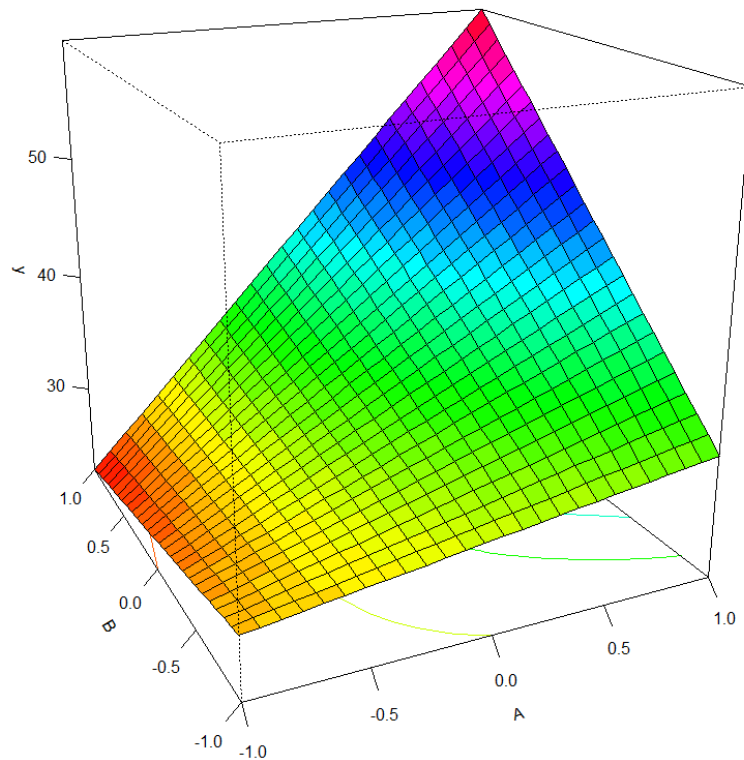


Figura 4 – Gráfico de superfície com interação AB

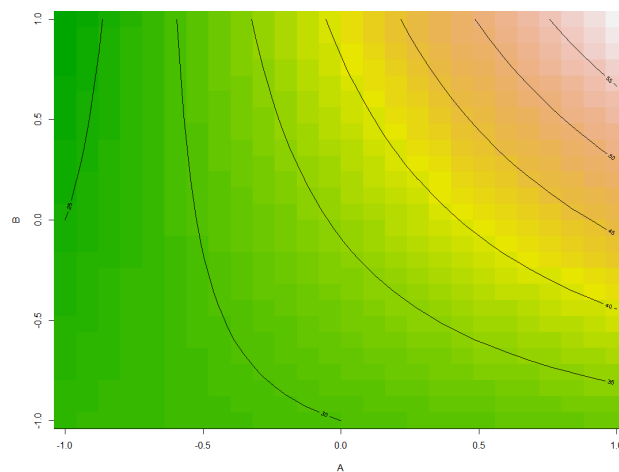


Figura 5 – Gráfico de contorno com interação AB

Agora percebemos que há uma diferença notável entre a curvatura das linhas da interação AB, que nas Figuras 2 e 3 não existiam. Quando assumimos que a interação AB é significativa, automaticamente existe forte influência dos efeitos de A em B.

Atividade 2

A princípio fiz o planejamento fatorial  $2^2$  com 3 réplicas e 12 corridas, de maneira codificada, onde  $C = \text{concentração de um reagente}$  e  $T = \text{temperatura}$ . A Tabela 1 demonstra a organização do planejamento, contendo os valores da resposta.

	C	T	Blocks	y
1	-1	-1	.1	26.6
2	1	-1	.1	40.9
3	-1	1	.1	11.8
4	1	1	.1	34.0
5	-1	-1	.2	22.0
6	1	-1	.2	36.4
7	-1	1	.2	15.9
8	1	1	.2	29.0
9	-1	-1	.3	22.8
10	1	-1	.3	36.7
11	-1	1	.3	14.3
12	1	1	.3	33.6

Tabela 1 – Planejamento fatorial codificado replicado

Para analisarmos os efeitos, temos os gráficos das Figuras 1 que demonstram os efeitos das variáveis C e T e da Figura 2 com os efeitos da interação CT. A princípio observamos que não há interação.

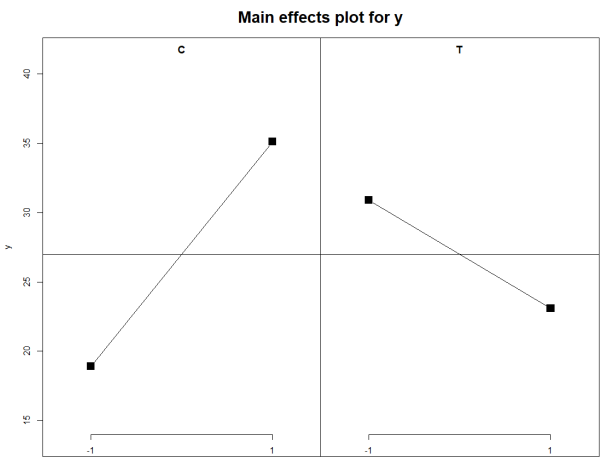


Figura 1 – Gráficos de efeitos principais C e T

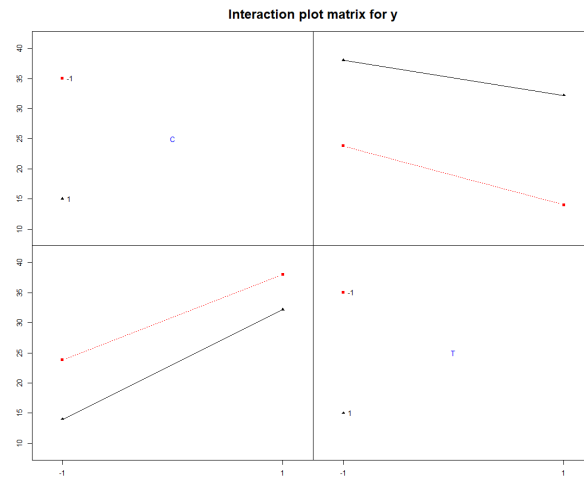


Figura 2 – Gráficos de interação CT

Ao efetuar a **análise de variância (ANOVA)**, obtive os valores de p informados na Figura 3. Observa-se que os valores de C e T são significativos considerando 5% (p-value < 0,05) e a interação CT não é significativa.

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
C	1	787.3	787.3	129.28	3.23e-06	***
T	1	182.5	182.5	29.97	0.000591	***
C:T	1	12.0	12.0	1.97	0.198007	
Residuals	8	48.7	6.1			

---  
 signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Figura 3 – ANOVA

Efetuando a regressão linear, observamos na Figura 4 que os coeficientes C e T são significativos, considerando 5% (p-value < 0,05) e, portanto, não rejeitamos a hipótese nula. Porém a interação CT será rejeitada, devido ao seu p-value > 0,05. Após essa breve análise, teremos o modelo representado na seguinte equação.

$$y = 27 + 8,1x_1 + -3,9x_2$$

Coefficients:					
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	27.0000	0.7124	37.901	2.58e-10	***
C1	8.1000	0.7124	11.370	3.23e-06	***
T1	-3.9000	0.7124	-5.475	0.000591	***
C1:T1	1.0000	0.7124	1.404	0.198007	

---  
 Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.468 on 8 degrees of freedom  
 Multiple R-squared: 0.9527, Adjusted R-squared: 0.935  
 F-statistic: 53.74 on 3 and 8 DF, p-value: 1.206e-05

Figura 4 – Coeficientes de regressão

Visualizamos na Figura 5, o gráfico de normalidade dos resíduos e com isso concluir que os dados estão normalmente distribuídos em torno da reta. Também foi realizado o teste de Shapiro-wilk com valor de 0,2956 ( $p\text{-value} > 0,05$ ), portanto, atendendo a premissa de que os dados são normalmente distribuídos.

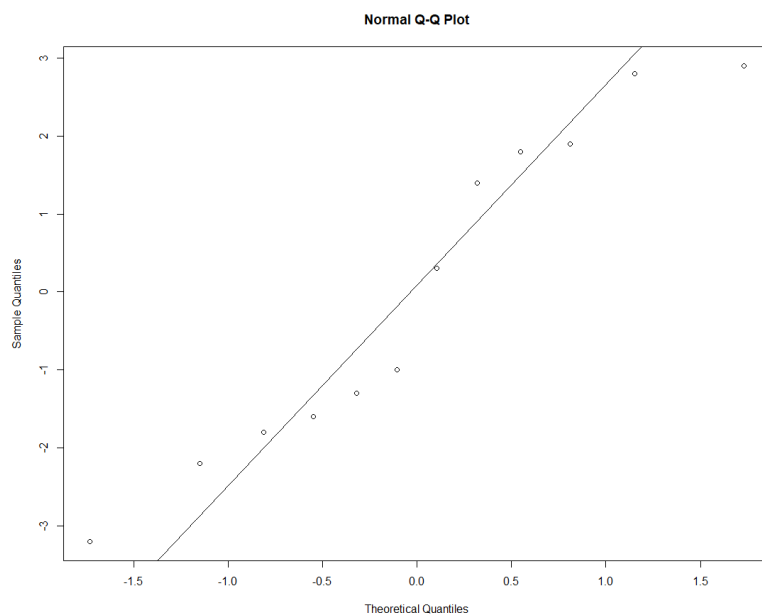


Figura 5 – Normalidade dos resíduos

### **Exercício 3**

#### Exercício 4

A princípio fiz o planejamento fatorial  $2^4$  sem replicação com 16 corridas, de maneira codificada. A Tabela 1 demonstra a organização do planejamento, contendo os valores da resposta.

	tA	pB	cC	vD	y
1	-1	-1	-1	-1	45
2	1	-1	-1	-1	71
3	-1	1	-1	-1	48
4	1	1	-1	-1	65
5	-1	-1	1	-1	68
6	1	-1	1	-1	60
7	-1	1	1	-1	80
8	1	1	1	-1	65
9	-1	-1	-1	1	43
10	1	-1	-1	1	100
11	-1	1	-1	1	45
12	1	1	-1	1	104
13	-1	-1	1	1	75
14	1	-1	1	1	86
15	-1	1	1	1	70
16	1	1	1	1	96

Tabela 1 – Planejamento fatorial codificado

Utilizei o método Lenth para cálculo dos efeitos, proposto pelo professor Russel V. Lenth e em seguida, calculei os efeitos de cada variável para obter os valores informados na Tabela 2, na coluna V1.



	V1
(Intercept)	140.125
tA1	21.625
pB1	3.125
cC1	9.875
vD1	14.625
tA1:pB1	0.125
tA1:cC1	-18.125
pB1:cC1	2.375
tA1:vD1	16.625
pB1:vD1	-0.375
cC1:vD1	-1.125
tA1:pB1:cC1	1.875
tA1:pB1:vD1	4.125
tA1:cC1:vD1	-1.625
pB1:cC1:vD1	-2.625
tA1:pB1:cC1:vD1	1.375

Tabela 2 – Efeitos nas variáveis

Os efeitos mais importantes são A, C, D e as interações AC e AD, e por isso poucas variáveis são influentes e a maioria são insignificantes, de acordo com a Figura 1.

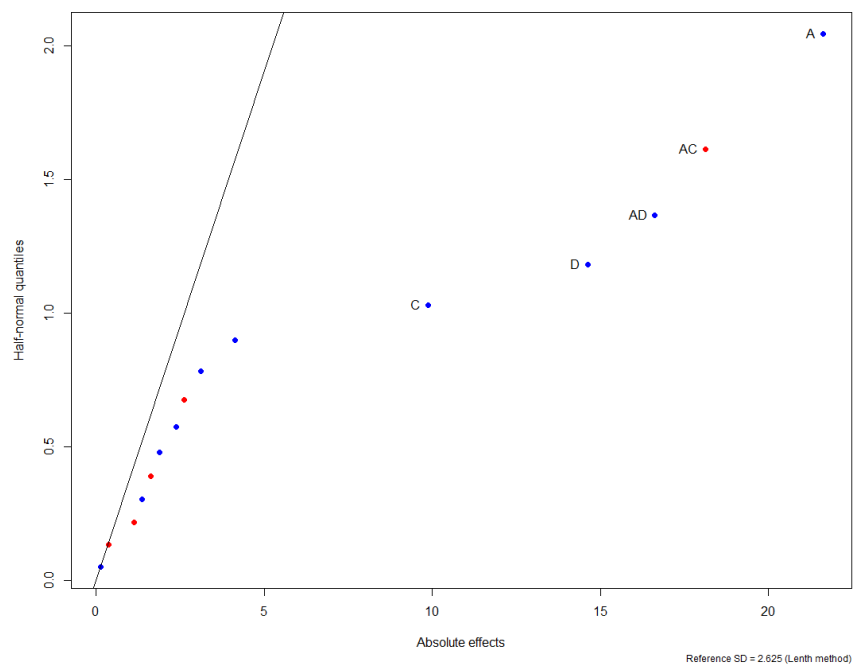


Figura 1 – Half normal dos principais efeitos nas variáveis

Em seguida, podemos observar o mesmo método, usando a medida ME (Erro Marginal), e o teste de significância dos efeitos, também utilizando o método de Lenth, observados na Figura 2 e Tabela 3, considerando 5% (p-value < 0,05).

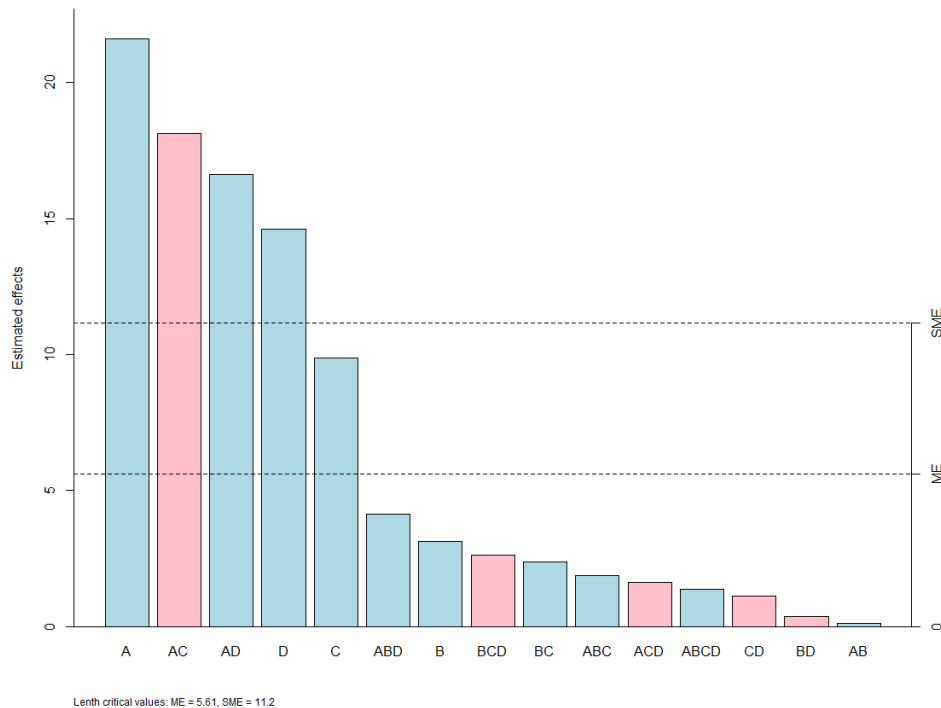


Figura 2 – Pareto dos principais efeitos nas variáveis

	effect	Lenth_PSE	t.ratio	p.value	simult.pval
A	21.625	2.625	8.238	0.0005	0.0034
AC	-18.125	2.625	-6.905	0.0008	0.0060
AD	16.625	2.625	6.333	0.0011	0.0090
D	14.625	2.625	5.571	0.0018	0.0157
C	9.875	2.625	3.762	0.0090	0.0791
ABD	4.125	2.625	1.571	0.1252	0.7608
B	3.125	2.625	1.190	0.2243	0.9633
BCD	-2.625	2.625	-1.000	0.2973	0.9929
BC	2.375	2.625	0.905	0.3406	0.9989
ABC	1.875	2.625	0.714	0.4503	1.0000
ACD	-1.625	2.625	-0.619	0.5718	1.0000
ABCD	1.375	2.625	0.524	0.6311	1.0000
CD	-1.125	2.625	-0.429	0.6939	1.0000
BD	-0.375	2.625	-0.143	0.8945	1.0000
AB	0.125	2.625	0.048	0.9652	1.0000

Tabela 3 – Principais efeitos nas variáveis usando teste t

Os gráficos da Figura 3 demonstram que A, C e D possuem efeitos significativos e os gráficos da Figura 4 demonstram que AC e AD possuem interações significativas, e poderão ser considerados na análise.

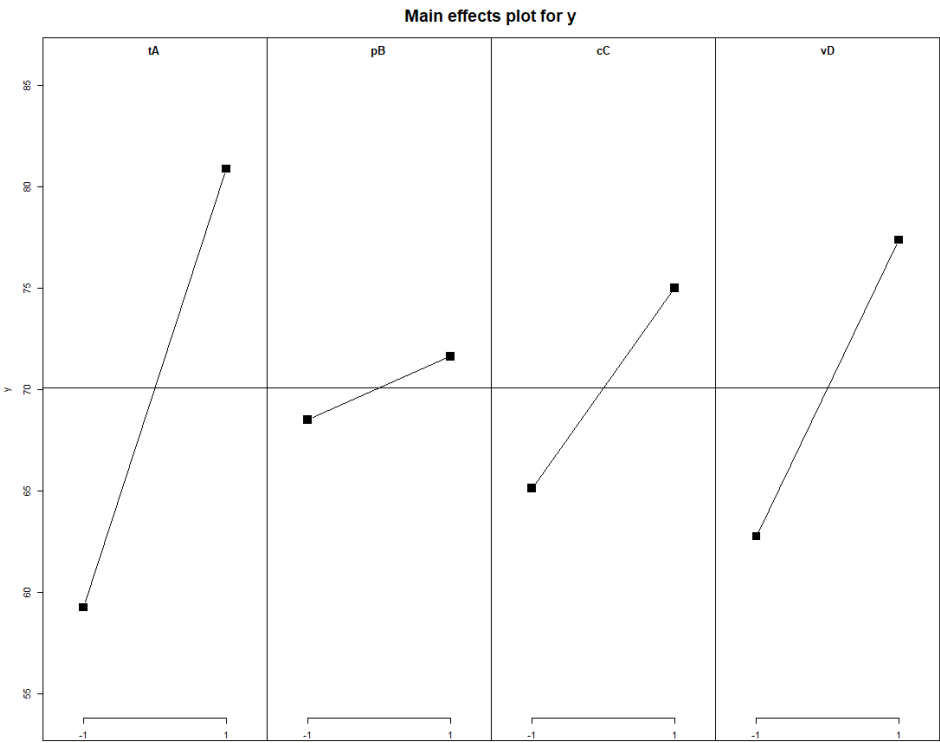


Figura 3 – Gráficos de efeitos principais

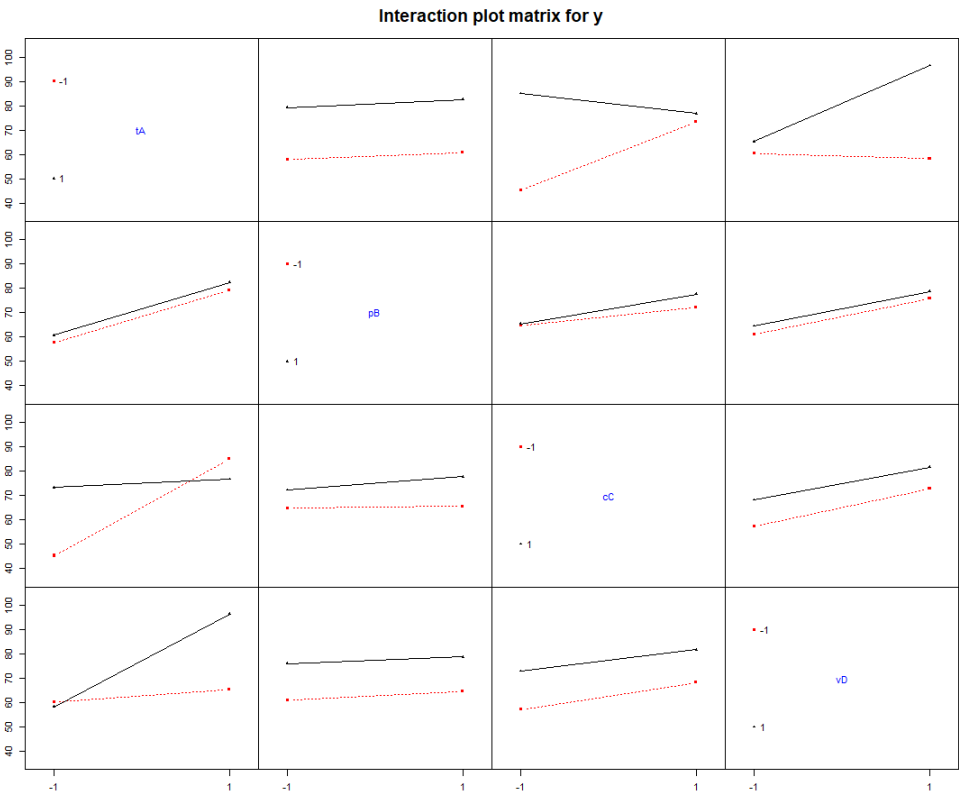


Figura 4 – Gráficos de interação entre as variáveis

O gráfico de cubo demonstra a previsão em cada combinação dos níveis experimentais e **um ponto ótimo de 102**, de acordo com a Figura 5.

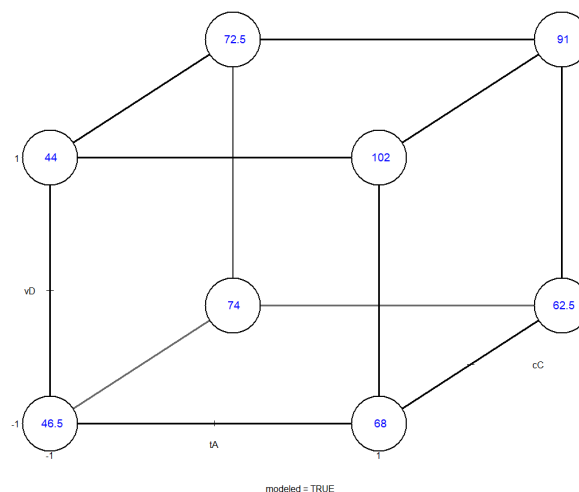


Figura 5 – Valores para otimização do modelo

Gerando o modelo linear completo, não consegui os valores dos erros porque não há réplicas no experimento. Portanto modifiquei a regressão para um modelo reduzido, utilizando uma equação de terceira ordem e obtive o modelo  $y = 70 + 10,81x_1 - 9,06x_1x_3$  levando em conta o nível de significância de 5% ( $p\text{-value} < 0,05$ ) ou  $y = 70 + 10,81x_1 + 4,94x_3 + 7,3x_4 - 9,06x_1x_3 + 8,3x_1x_4$ , levando em conta o nível de significância de 10% ( $p\text{-value} < 0,10$ ).

Coefficients:				
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	70.0625	0.6875	101.909	0.00625 **
tA1	10.8125	0.6875	15.727	0.04042 *
pB1	1.5625	0.6875	2.273	0.26388
cC1	4.9375	0.6875	7.182	0.08808 .
vD1	7.3125	0.6875	10.636	0.05968 .
tA1:pB1	0.0625	0.6875	0.091	0.94228
tA1:cC1	-9.0625	0.6875	-13.182	0.04820 *
tA1:vD1	8.3125	0.6875	12.091	0.05253 .
pB1:cC1	1.1875	0.6875	1.727	0.33410
pB1:vD1	-0.1875	0.6875	-0.273	0.83050
cC1:vD1	-0.5625	0.6875	-0.818	0.56345
tA1:pB1:cC1	0.9375	0.6875	1.364	0.40282
tA1:pB1:vD1	2.0625	0.6875	3.000	0.20483
tA1:cC1:vD1	-0.8125	0.6875	-1.182	0.44707
pB1:cC1:vD1	-1.3125	0.6875	-1.909	0.30718
---				
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1				
Residual standard error: 2.75 on 1 degrees of freedom				
Multiple R-squared: 0.9987, Adjusted R-squared: 0.9802				
F-statistic: 54.06 on 14 and 1 DF, p-value: 0.1063				

Figura 6 – Coeficientes de regressão

Após realizar a análise de variância desse modelo, obtive os mesmos resultados, demonstrando novamente que a variável A e a interação AC são as mais significativas considerando significância de 5% (p-value < 0,05) para o modelo, observados na Figura 7.

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
tA	1	1870.6	1870.6	247.347	0.0404	*
pB	1	39.1	39.1	5.165	0.2639	
cC	1	390.1	390.1	51.579	0.0881	.
vD	1	855.6	855.6	113.132	0.0597	.
tA:pB	1	0.1	0.1	0.008	0.9423	
tA:cC	1	1314.1	1314.1	173.760	0.0482	*
tA:vD	1	1105.6	1105.6	146.190	0.0525	.
pB:cC	1	22.6	22.6	2.983	0.3341	
pB:vD	1	0.6	0.6	0.074	0.8305	
cC:vD	1	5.1	5.1	0.669	0.5635	
tA:pB:cC	1	14.1	14.1	1.860	0.4028	
tA:pB:vD	1	68.1	68.1	9.000	0.2048	
tA:cC:vD	1	10.6	10.6	1.397	0.4471	
pB:cC:vD	1	27.6	27.6	3.645	0.3072	
Residuals	1	7.6	7.6			

---  
 signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Figura 7 – ANOVA

Agora podemos visualizar os gráficos de contorno e de superfície nas Figuras 8 e 9, que mostram as interações AD, e o ponto de otimização máxima que já foi informado antes.

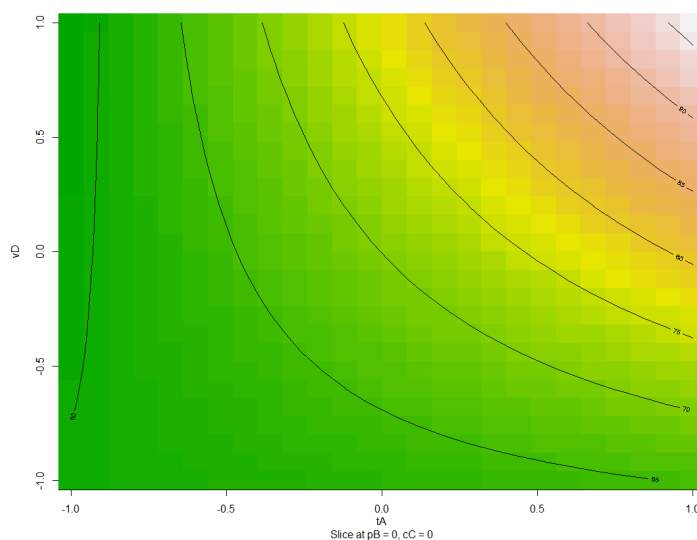
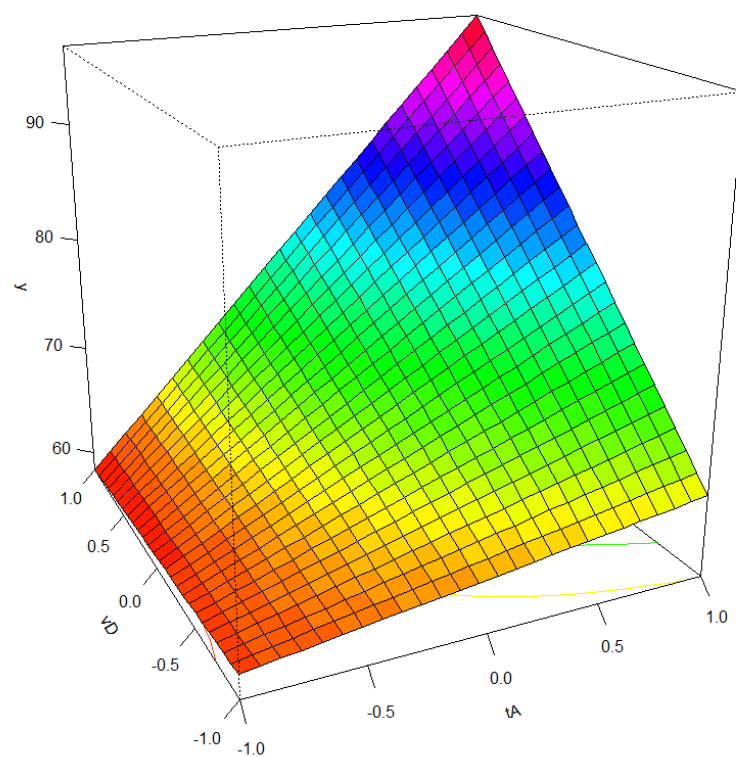


Figura 8 – Gráfico de contorno com interação AD



Slice at  $pB = 0$ ,  $cC = 0$

Figura 9 – Gráfico de superfície com interação AD

### Exercício 5

Conforme solicitado, fiz o planejamento fracionário com meia fração  $2^{4-1}$ , e isso significa que teremos apenas 8 corridas para simplificação do experimento. A Tabela 1 demonstra a organização do planejamento codificado, contendo os valores da resposta.

	tA	pB	cC	vD	y
1	-1	-1	-1	-1	45
2	1	-1	-1	1	100
3	-1	1	-1	1	45
4	1	1	-1	-1	65
5	-1	-1	1	1	75
6	1	-1	1	-1	60
7	-1	1	1	-1	80
8	1	1	1	1	96

Tabela 1 – Planejamento fracionário codificado

Após submeter os dados ao planejamento, percebemos que nossa constante é  $I = AA = BB = CC = DD$  e o gerador é  $D = ABC$ . A partir da constante e do gerador, podemos definir a estrutura de confundimento completa, multiplicando o gerador por D para conseguirmos a **relação definidora**  $I = ABCD$ , que é a constante confundida com a interação de quarta ordem.

A constante e termos principais estão confundidos com interações de terceira ordem, ou seja,  $A+BCD$  é igual a  $1+3 = 4$ , e os efeitos de segunda ordem confundidos com interações de segunda ordem, ou seja,  $AB+CD$  é igual a  $2+2 = 4$ . Portanto, **a resolução é de IV** ou  $2^{4-1}_{IV}$ . A Figura 1 demonstra a estrutura de confundimento comentada.

```

Design generating information:
$legend
[1] A=tA B=pB C=cC D=vD

$generators
[1] D=ABC

Alias structure:
$main
[1] A=BCD B=ACD C=ABD D=ABC

$fi2
[1] AB=CD AC=BD AD=BC

```

tA = pB:cC:vD
pB = tA:cC:vD
cC = tA:pB:vD
vD = tA:pB:cC
tA:pB = cC:vD
tA:cC = pB:vD
tA:vD = pB:cC

Figura 1 – Estrutura de confundimento completa

Os gráficos da Figura 2 demonstram que A, C e D possuem efeitos significativos e os gráficos da Figura 3 demonstram que AC e AD possuem interações significativas, e poderão ser considerados na análise.

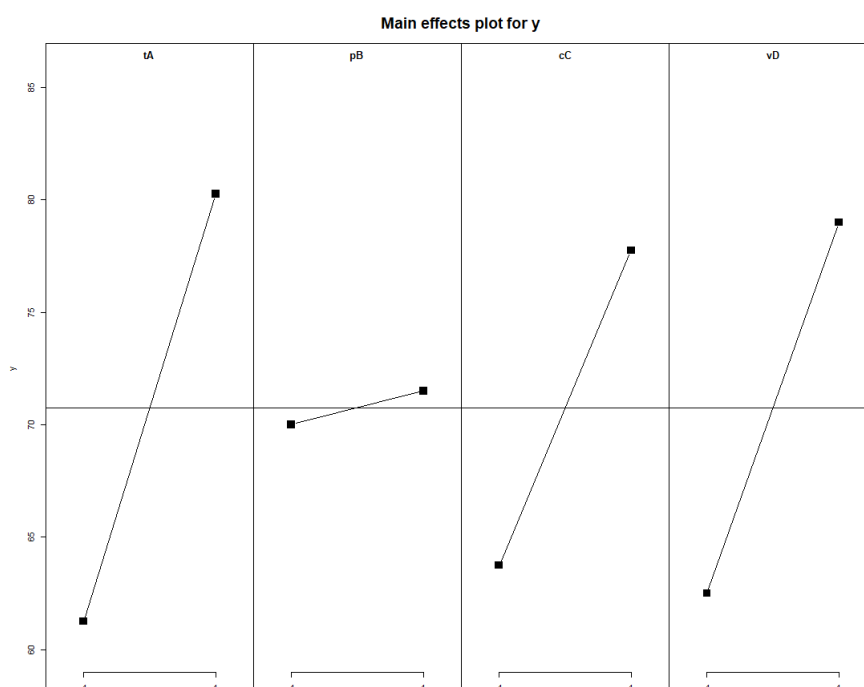


Figura 2 – Gráficos de efeitos principais



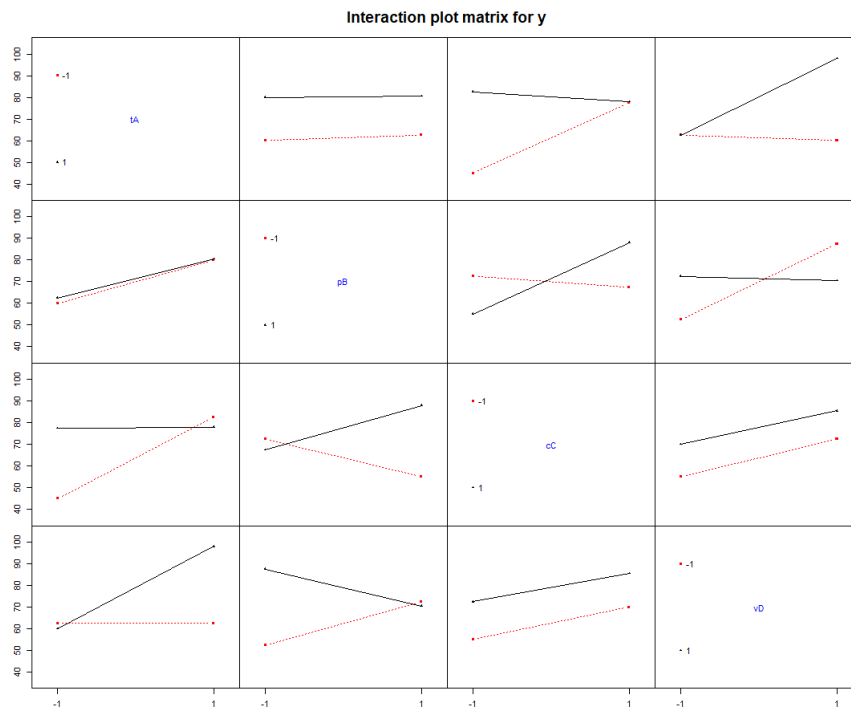


Figura 3 – Gráficos de interação entre as variáveis

O gráfico de cubo demonstra a previsão em cada combinação dos níveis experimentais e **um ponto ótimo de 100** em sua otimização, de acordo com a Figura 4.

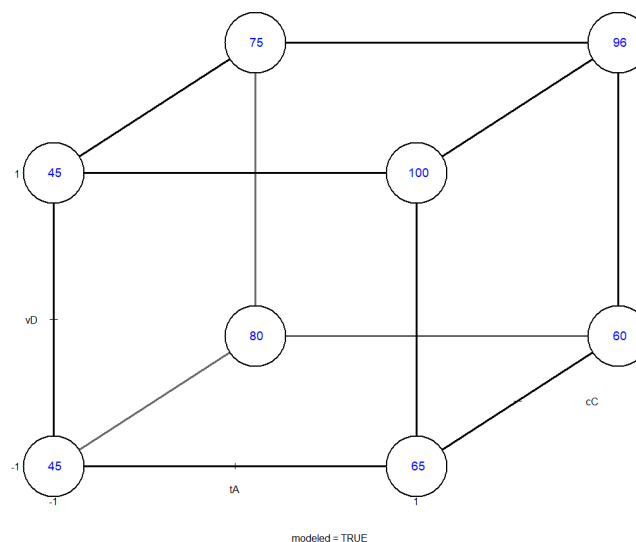


Figura 4 – Valores para otimização do modelo

Nessa etapa, utilizei novamente o método de Lenth, e consegui os valores dos efeitos similares aos já encontrados e observamos que as variáveis A, C, D e as interações entre AC e AD possuem valores mais significativos, de acordo com a Tabela 2.

	V1
(Intercept)	141.5
tA1	19.0
cC1	14.0
vD1	16.5
tA1:cC1	-18.5
tA1:vD1	19.0
cC1:vD1	-1.0
tA1:cC1:vD1	1.5

Tabela 2 – Efeitos usando o método Lenth

Ao plotar os gráficos conforme a Figura 5, percebi que o método de Lenth demonstrou apenas a variável A como significativa e todo o restante desprezíveis. Talvez por esse método ser mais rigoroso, obtive a equação  $y = 70 + 9,5_{x1}$ . Para escolha dos coeficientes, decidi que trabalharia com a regressão linear para obter uma equação mais conservadora.

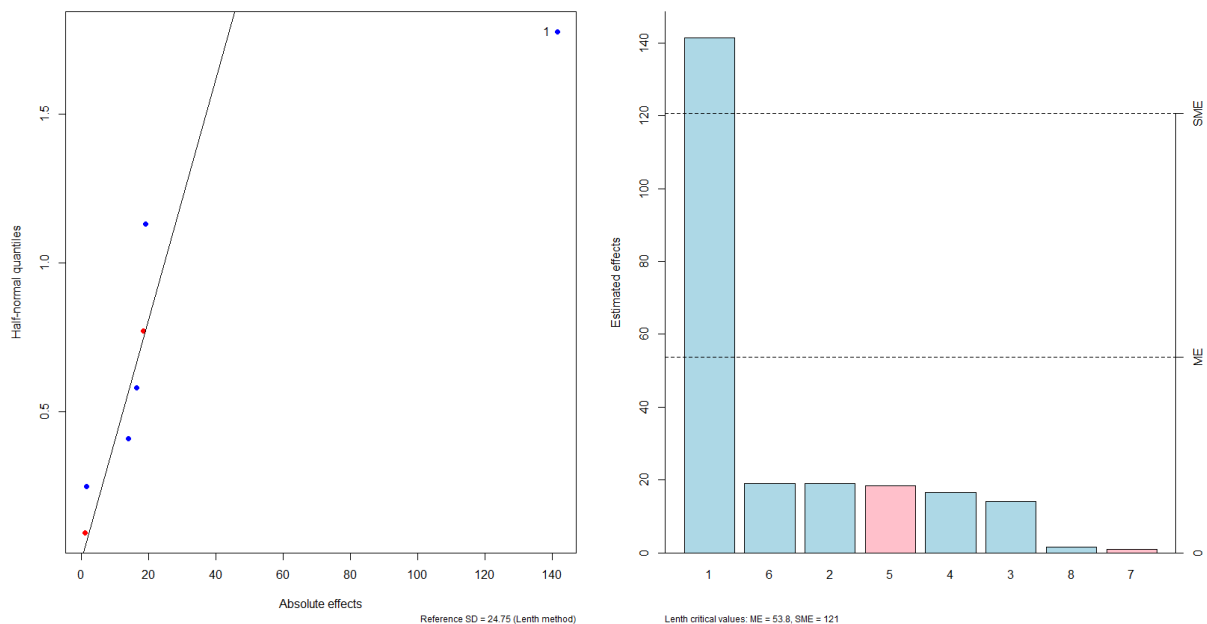


Figura 5 – Half normal (esquerda) e Pareto (direita) dos principais efeitos das variáveis

Finalmente para diversificar a análise, fiz a regressão em um modelo completo e obtive os coeficientes sem o erro, e limitei os termos para até segunda ordem. Com isso consegui encontrar os erros padrão e percebi que todos os coeficientes eram insignificantes considerando 5% de acordo com a Figura 6, apenas se considerarmos 10% eles entrariam.

```

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    70.75      0.75    94.333  0.00675 **
tA1             9.50      0.75    12.667  0.05016 .
cC1             7.00      0.75     9.333  0.06795 .
vD1            8.25      0.75    11.000  0.05772 .
tA1:cC1        -9.25      0.75   -12.333  0.05151 .
tA1:vD1         9.50      0.75    12.667  0.05016 .
cC1:vD1        -0.50      0.75    -0.667  0.62567
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.121 on 1 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9985,    Adjusted R-squared:  0.9897
F-statistic: 113.6 on 6 and 1 DF,  p-value: 0.0717

```

Figura 6 – Regressão linear limitada até segunda ordem

Após essa análise, reduzi o modelo utilizando abordagem de retirada de termos de forma hierárquica, observando quais termos tinham menor relevância, que nessa análise era a interação CD, visto na Figura 7. Percebemos que agora poderemos usar os coeficientes A, C, D, AC e AD que se ajustam a uma taxa de 99% em  $R^2_{ajustado}$  e a realização da análise de variância também comprovam esses valores conforme a Figura 8. Com isso temos a equação  $y = 70 + 9,5x_1 + 7x_3 + 8.25x_4 - 9.25x_{1x3} + 9.5x_{1x4}$ .

```

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  70.7500    0.6374   111.00 8.11e-05 ***
tA1           9.5000    0.6374    14.90 0.00447 **
cC1           7.0000    0.6374    10.98 0.00819 **
vD1           8.2500    0.6374    12.94 0.00592 **
tA1:cC1       -9.2500    0.6374   -14.51 0.00471 **
tA1:vD1        9.5000    0.6374    14.90 0.00447 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.803 on 2 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9979,    Adjusted R-squared:  0.9926
F-statistic: 188.6 on 5 and 2 DF,  p-value: 0.005282

```

Figura 7 – Regressão linear reduzida de forma hierárquica

```

              Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
tA             1  722.0   722.0   222.2 0.00447 **
cC             1  392.0   392.0   120.6 0.00819 **
vD             1  544.5   544.5   167.5 0.00592 **
tA:cC          1  684.5   684.5   210.6 0.00471 **
tA:vD          1  722.0   722.0   222.2 0.00447 **
Residuals      2     6.5     3.3
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Figura 8 – ANOVA

Visualizamos na Figura 9, o gráfico de normalidade dos resíduos e com isso concluir que os dados estão normalmente distribuídos em torno da reta. Também foi realizado o teste de Shapiro-wilk com valor de 0,2913 (p-value > 0,05), portanto, atendendo a premissa de que os dados são normalmente distribuídos.

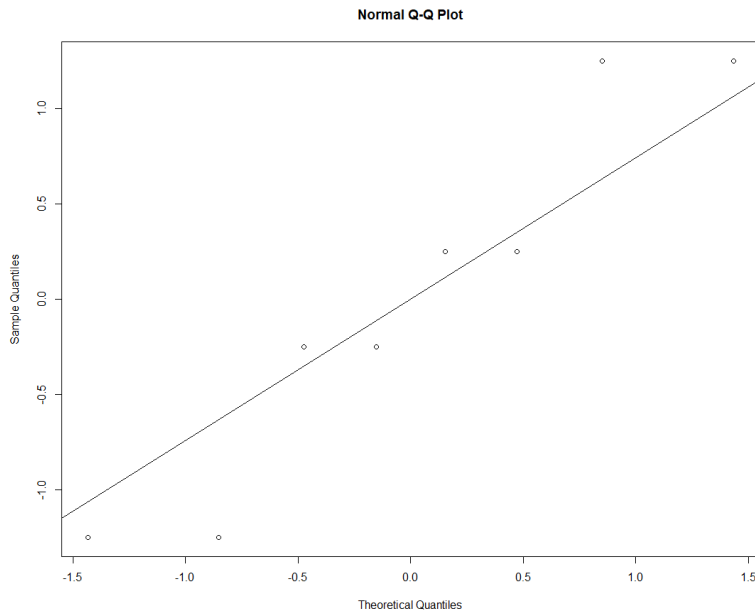


Figura 9 – Normalidade dos resíduos

Com isso, nosso modelo se ajustou em 99,3% considerando  $R^2$  ajustado.

Portanto, se compararmos esse modelo de regressão reduzido, ele parece ser melhor que o modelo do exercício 4, que tem ajuste de 98%. Mas o que diferencia os modelos de forma interessante, são os números de variáveis que serão utilizadas, e a princípio o método de Lenth nos mostrou bem mais simplificado e isso pode ser um problema. Posteriormente, a regressão usando planejamento fracionário foi mais conservadora, aumentando bastante o número de termos.

Acredito que o modelo utilizando fatorial do exercício 4, seja mais eficiente, pois apesar do ajuste ser um pouco menor, nossa **resolução IV** acarretará em muita perda de informação.

### Exercício 6-A

Conforme solicitado, fiz o planejamento fracionário com meia fração  $2^{5-1}$ , e isso significa que teremos 16 corridas para simplificação do experimento. A Tabela 1 demonstra a organização do planejamento codificado, contendo os valores da resposta.

	A	B	C	D	E	y
1	-1	-1	-1	-1	1	8
2	1	-1	-1	-1	-1	9
3	-1	1	-1	-1	-1	34
4	1	1	-1	-1	1	52
5	-1	-1	1	-1	-1	16
6	1	-1	1	-1	1	22
7	-1	1	1	-1	1	45
8	1	1	1	-1	-1	60
9	-1	-1	-1	1	-1	6
10	1	-1	-1	1	1	10
11	-1	1	-1	1	1	30
12	1	1	-1	1	-1	50
13	-1	-1	1	1	1	15
14	1	-1	1	1	-1	21
15	-1	1	1	1	-1	44
16	1	1	1	1	1	63

Tabela 1 – Planejamento fracionário codificado

Após submeter os dados ao planejamento, percebemos que nossa constante é  $I = AA = BB = CC = DD = EE$  e o gerador é  $E = ABCD$ . A partir da constante e do gerador, podemos definir a estrutura de confundimento completa, multiplicando o gerador por D para conseguirmos a **relação definidora**  $I = ABCDE$ , que é a constante confundida com a interação de quinta ordem.

A constante e termos principais estão confundidos com interações de quarta ordem, ou seja,  $A+BCDE$  é igual a  $1+4 = 5$ , e os efeitos de segunda ordem confundidos com interações de terceira ordem, ou seja,  $AB+CDE$  é igual a  $2+3 = 5$ . Portanto, a **resolução é de V** ou  $2^{5-1}_V$ . A Figura 1 demonstra a estrutura de confundimento comentada.

```
Design generating information:
$legend
[1] A=A B=B C=C D=D E=E

$generators
[1] E=ABCD

Alias structure:
$fi2
[1] AB=CDE AC=BDE AD=BCE AE=BCD BC=ADE BD=ACE BE=ACD CD=ABE CE=ABD DE=ABC
```

Figura 1 – Estrutura de confundimento completa

Os gráficos da Figura 2 demonstram que A, B e C possuem efeitos significativos e os gráficos da Figura 3 demonstra que AB possui interação significativa, e poderão ser considerados na análise.

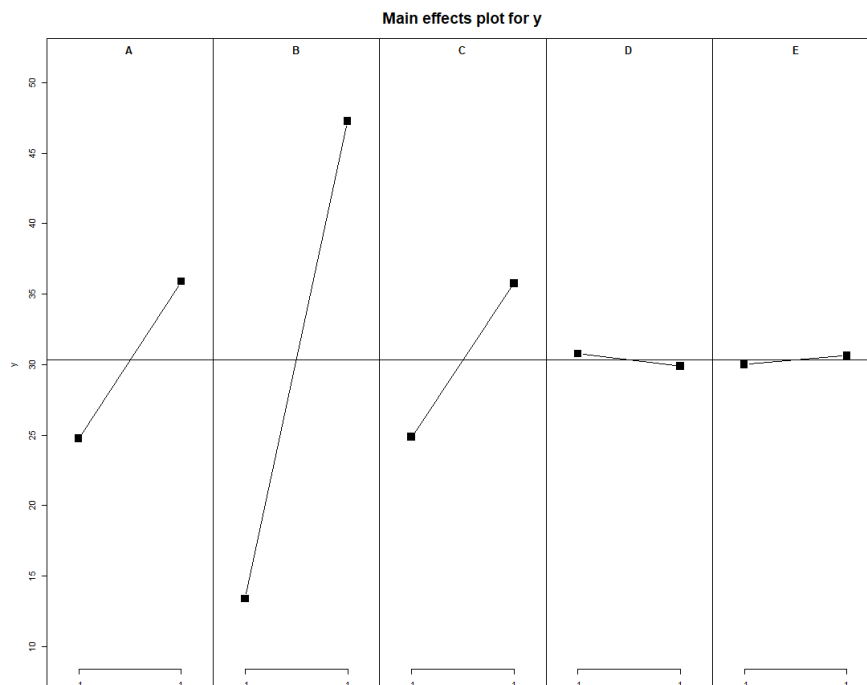


Figura 2 – Gráficos de efeitos principais

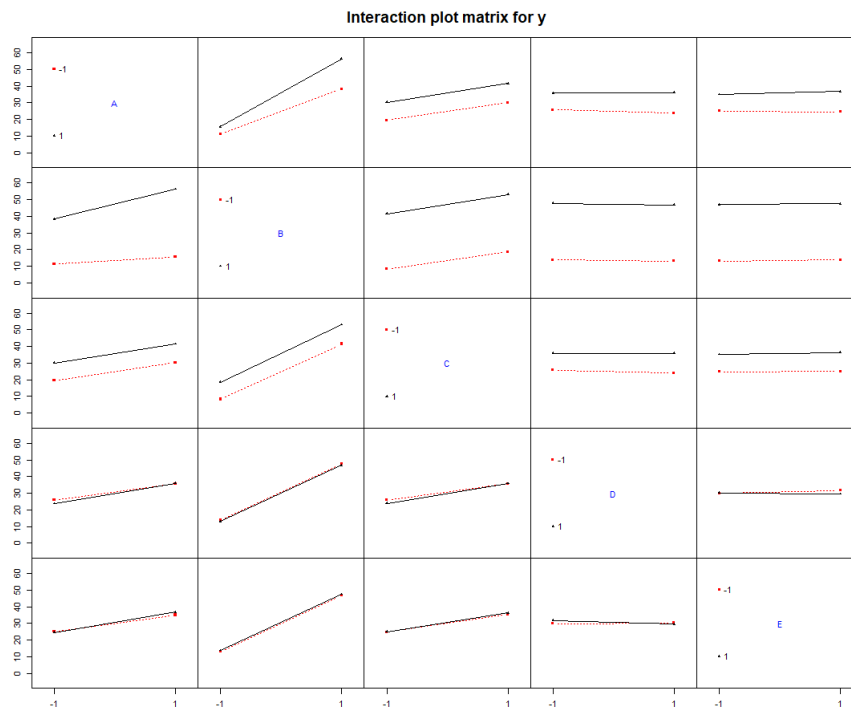


Figura 3 – Gráficos de interação entre as variáveis

O gráfico de cubo demonstra a previsão em cada combinação dos níveis experimentais e **um ponto ótimo de 61,5** em sua otimização, de acordo com a Figura 4.

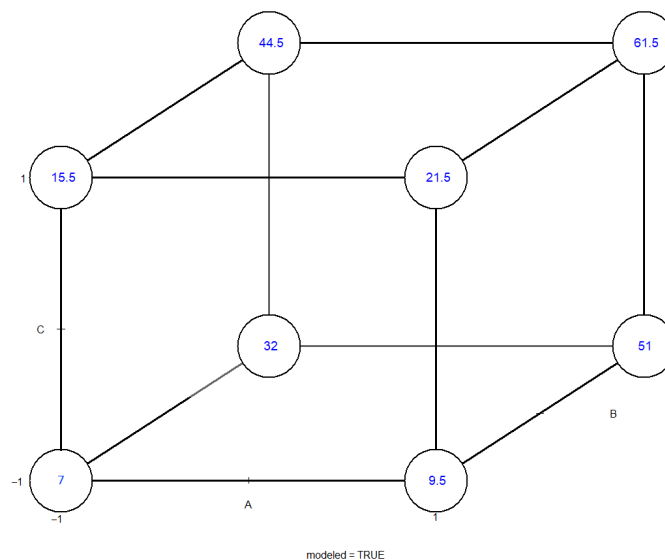


Figura 4 – Valores para otimização do modelo

Nessa etapa, utilizei novamente o método de Lenth, e consegui os valores dos efeitos similares aos já encontrados e observamos que as variáveis A, B, C e a interação entre AB possuem valores mais significativos, de acordo com a Tabela 2.

	V1
(Intercept)	60.625
A1	11.125
B1	33.875
C1	10.875
D1	-0.875
E1	0.625
A1:B1	6.875
A1:C1	0.375
B1:C1	0.625
A1:D1	1.125
B1:D1	-0.125
C1:D1	0.875
A1:E1	1.125
B1:E1	-0.125
C1:E1	0.375
D1:E1	-1.375

Tabela 2 – Efeitos usando o método Lenth

Ao plotar os gráficos conforme a Figura 5, percebi que o método de Lenth demonstrou as variáveis A, B, C e interação AB como significativas, e todo o restante desprezíveis. Talvez por esse método ser mais rigoroso, decidi que trabalharia com a regressão linear para obter a equação, mas nesse momento poderíamos obter a equação  $y = 70 + 9,5x_1$ .

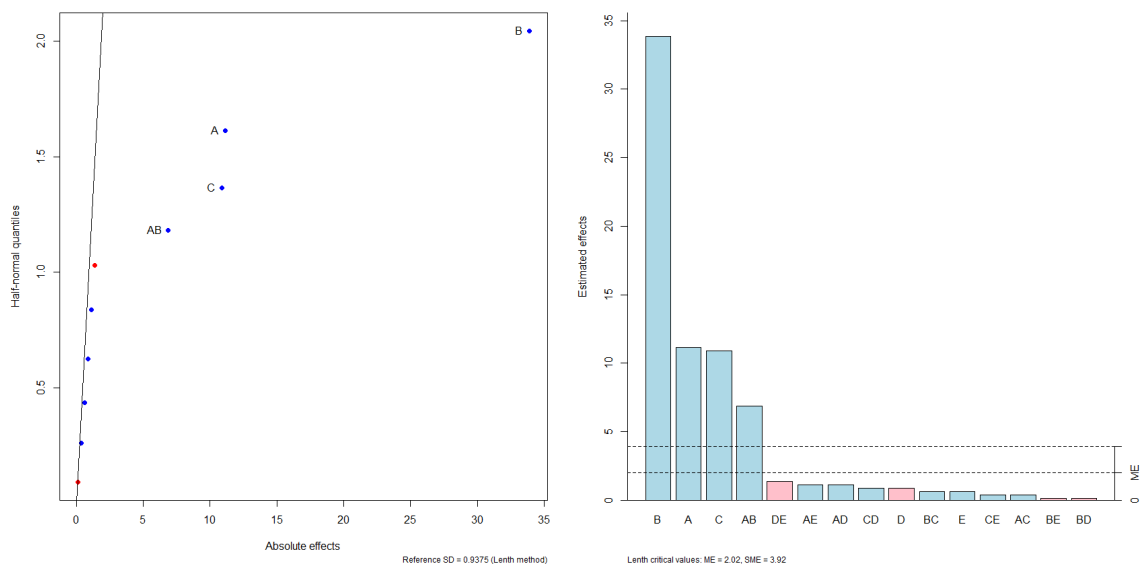


Figura 5 – Half normal (esquerda) e Pareto (direita) dos principais efeitos das variáveis



Finalmente para diversificar a análise, fiz a regressão em um modelo completo e obtive os coeficientes sem o erro, e limitei os termos para até segunda ordem. Com isso consegui encontrar os erros padrão e percebi que a maioria dos coeficientes eram significantes considerando 5% (p-value < 0,05) de acordo com a Figura 6.

Coefficients:					
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	30.3125	0.0625	485	4.25e-06	***
A1	5.5625	0.0625	89	0.000126	***
B1	16.9375	0.0625	271	1.36e-05	***
C1	5.4375	0.0625	87	0.000132	***
D1	-0.4375	0.0625	-7	0.019804	*
E1	0.3125	0.0625	5	0.037750	*
A1:B1	3.4375	0.0625	55	0.000330	***
A1:C1	0.1875	0.0625	3	0.095466	.
A1:D1	0.5625	0.0625	9	0.012122	*
A1:E1	0.5625	0.0625	9	0.012122	*
B1:C1	0.3125	0.0625	5	0.037750	*
C1:D1	0.4375	0.0625	7	0.019804	*
C1:E1	0.1875	0.0625	3	0.095466	.
D1:E1	-0.6875	0.0625	-11	0.008163	**
---					
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1					
Residual standard error: 0.25 on 2 degrees of freedom					
Multiple R-squared: 1, Adjusted R-squared: 0.9998					
F-statistic: 7108 on 13 and 2 DF, p-value: 0.0001407					

Figura 6 – Regressão linear limitada até segunda ordem

Após essa análise, reduzi o modelo utilizando abordagem de retirada de termos de forma hierárquica, observando quais termos tinham menor relevância, que nessa análise eram as variáveis D e E, e as interações AC, AD, AE, BC, CD, CE, DE, visto na Figura 7. Percebe-se que agora poderemos usar os coeficientes A, B, C e AB considerando uma significância de 99% (p-value < 0,01) conforme mostra a análise de variância na Figura 8. Com isso temos a equação  $y = 30,31 + 5,56x_1 + 16,94x_2 + 5,44x_3 + 3,44x_1x_2$  e com ajuste de 99% considerando o  $R^2$  ajustado.

Coefficients:					
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	30.3125	0.4045	74.936	6.79e-14	***
A1	5.5625	0.4045	13.751	2.39e-07	***
B1	16.9375	0.4045	41.872	1.26e-11	***
C1	5.4375	0.4045	13.442	2.91e-07	***
D1	-0.4375	0.4045	-1.082	0.308	
E1	0.3125	0.4045	0.773	0.460	
A1:B1	3.4375	0.4045	8.498	1.36e-05	***
---					
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1					
Residual standard error: 1.618 on 9 degrees of freedom					
Multiple R-squared: 0.9959, Adjusted R-squared: 0.9932					
F-statistic: 366.2 on 6 and 9 DF, p-value: 3.142e-10					

Figura 7 – Regressão linear reduzida de forma hierárquica

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
A	1	495	495	189.095	2.39e-07	***
B	1	4590	4590	1753.233	1.26e-11	***
C	1	473	473	180.692	2.91e-07	***
D	1	3	3	1.170	0.308	
E	1	2	2	0.597	0.460	
A:B	1	189	189	72.215	1.36e-05	***
Residuals	9	24	3			
---						
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1						

Figura 8 – ANOVA

Visualizamos na Figura 9, o gráfico de normalidade dos resíduos e com isso concluir que os dados estão normalmente distribuídos em torno da reta. Também foi realizado o teste de Shapiro-wilk com valor de 0,1093 ( $p\text{-value} > 0,05$ ), portanto, atendendo a premissa de que os dados são normalmente distribuídos.

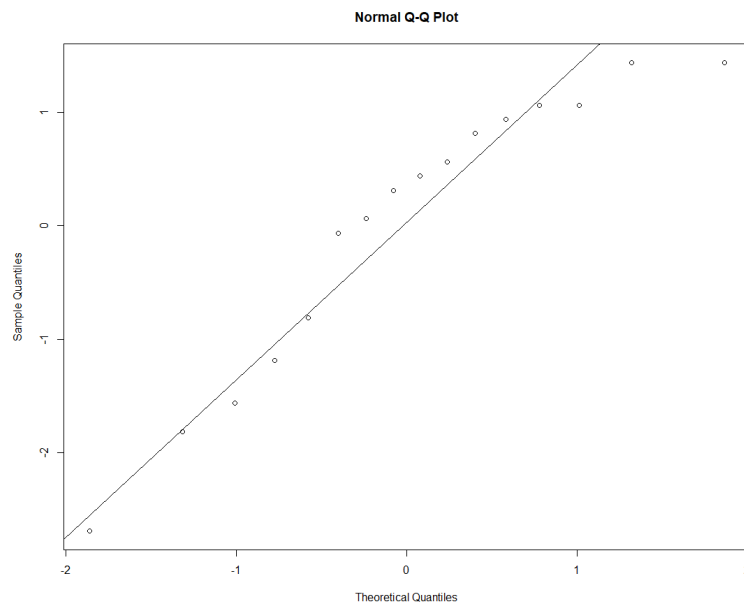


Figura 9 – Normalidade dos resíduos

Agora podemos visualizar os gráficos de contorno e de superfície nas Figuras 10 e 11, que mostram as interações da temperatura e da velocidade de agitação, e o ponto de otimização máxima que já foi informado antes.

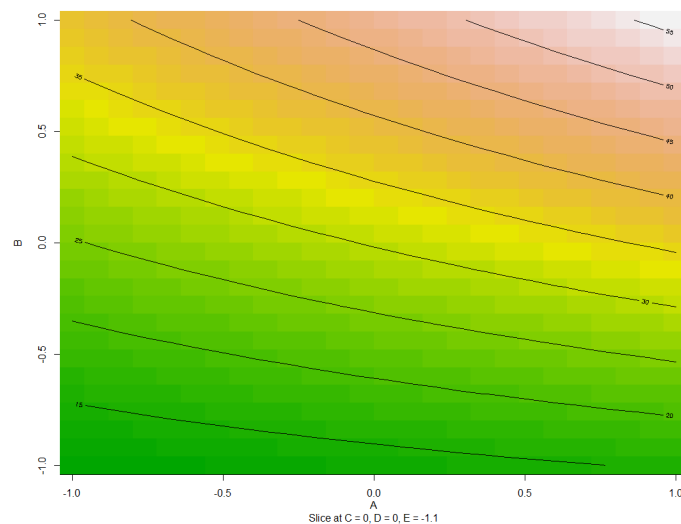
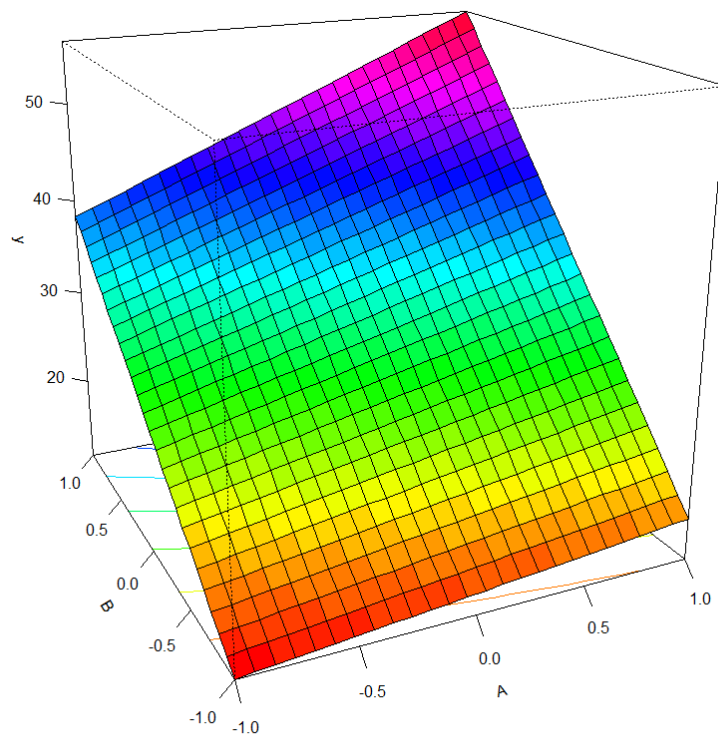


Figura 10 – Gráfico de contorno com interação AB



Slice at C = 0, D = 0, E = -1.1

Figura 11 – Gráfico de superfície com interação AB

## Exercício 6-B

Sim, é possível simplificar o fatorial em duas replicadas de um fatorial  $2^3$ , e seguiremos com o planejamento considerando apenas as variáveis A, B e C que foram mais significativas no planejamento  $2^{5-1}$ . Com 16 corridas. A Tabela 1 demonstra a organização do planejamento, contendo os valores da resposta. A coluna “Blocks” é gerada de forma automática pelo R, e não utilizaremos blocagem nesse estudo.

	A	B	C	Blocks	y
1	-1	-1	-1	.1	8
2	1	-1	-1	.1	9
3	-1	1	-1	.1	34
4	1	1	-1	.1	52
5	-1	-1	1	.1	16
6	1	-1	1	.1	22
7	-1	1	1	.1	45
8	1	1	1	.1	60
9	-1	-1	-1	.2	6
10	1	-1	-1	.2	10
11	-1	1	-1	.2	30
12	1	1	-1	.2	50
13	-1	-1	1	.2	15
14	1	-1	1	.2	21
15	-1	1	1	.2	44
16	1	1	1	.2	63

Tabela 1 – Planejamento fatorial codificado

Ao plotar os gráficos conforme a Figura 1, percebi que o método de Lenth, que utiliza a medida ME (Erro Marginal) demonstraram que as variáveis A, B, C e a interação AB são significativas considerando 5% ( $p\text{-value} < 0,05$ ), e todo o restante são desprezíveis.

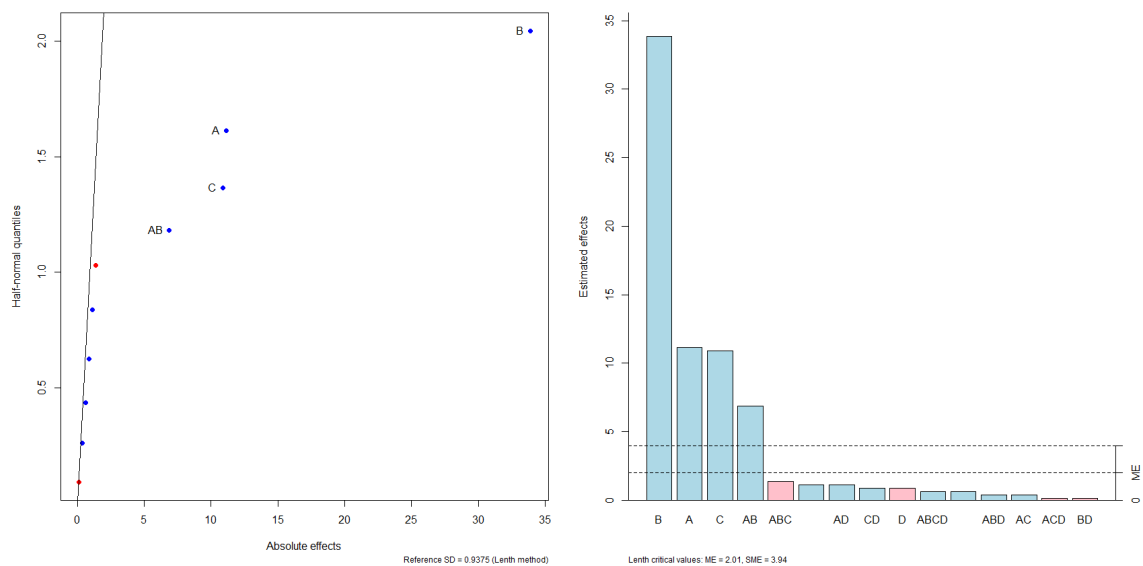


Figura 1 – Half normal (esquerda) e Pareto (direita) dos principais efeitos das variáveis

Utilizei o método Lenth para cálculo dos efeitos, proposto pelo professor Russel V. Lenth e em seguida, calculei os efeitos de cada variável para obter os valores informados na Tabela 2, na coluna V1.

	V1
(Intercept)	60.625
A1	11.125
B1	33.875
C1	10.875
A1:B1	6.875
A1:C1	0.375
B1:C1	0.625
A1:B1:C1	-1.375

Tabela 2 – Efeitos nas variáveis

Os gráficos da Figura 2 demonstram que as variáveis A, B e C possuem efeitos significativos e os gráficos da Figura 3 demonstram que AB possui interação significativa, e poderão ser considerados na análise.

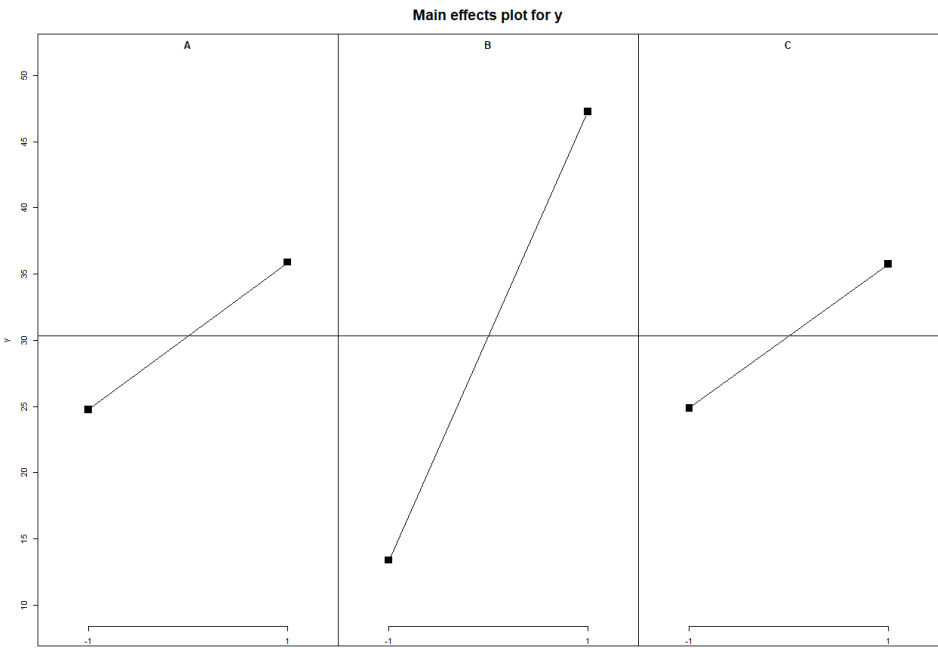


Figura 2 – Gráficos de efeitos principais

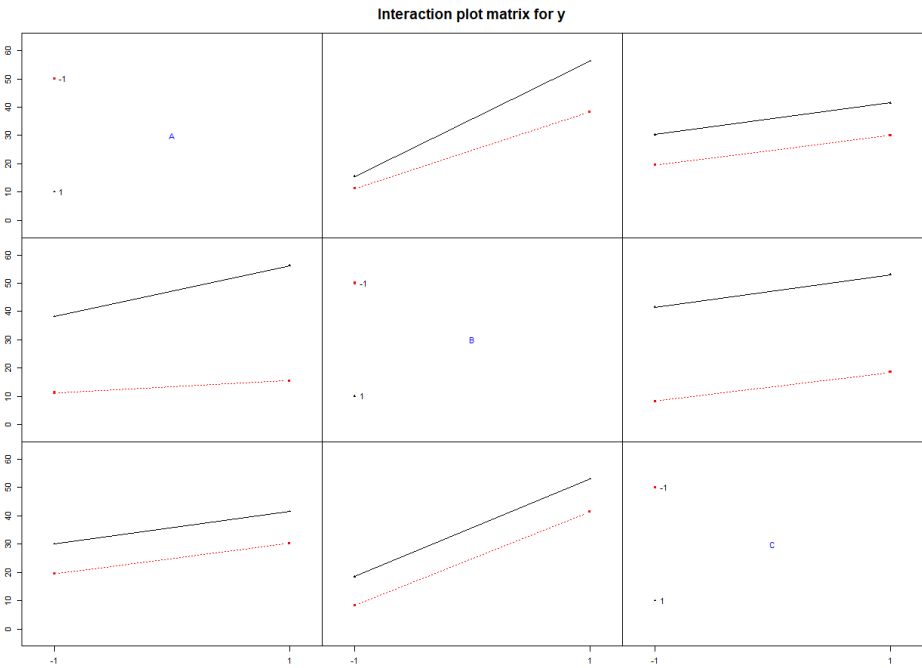


Figura 3 – Gráficos de interação entre as variáveis

O gráfico de cubo demonstra a previsão em cada combinação dos níveis experimentais e **um ponto ótimo de 61,5** em sua otimização, de acordo com a Figura 4.

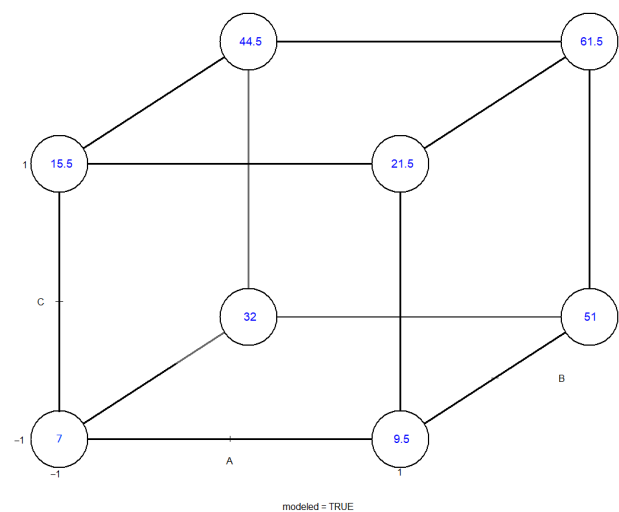


Figura 4 – Valores para otimização do modelo

Gerando o modelo linear completo e reduzido posteriormente, ambos trouxeram os mesmos coeficientes. Com isso, obtive o modelo  $y = 30,31 + 5,56x_1 + 16,94x_2 + 5,44x_3 + 3,44x_1x_2$  levando em conta o nível de significância de 5% (p-value < 0,05) com ajuste de 99% considerando  $R^2$  ajustado de acordo coma Figura 5.

Coefficients:					
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	30.3125	0.3802	79.734	6.83e-13	***
A1	5.5625	0.3802	14.632	4.67e-07	***
B1	16.9375	0.3802	44.552	7.11e-11	***
C1	5.4375	0.3802	14.303	5.57e-07	***
A1:B1	3.4375	0.3802	9.042	1.79e-05	***
A1:C1	0.1875	0.3802	0.493	0.635	
B1:C1	0.3125	0.3802	0.822	0.435	
A1:B1:C1	-0.6875	0.3802	-1.808	0.108	
---					
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1					
Residual standard error: 1.521 on 8 degrees of freedom					
Multiple R-squared: 0.9968, Adjusted R-squared: 0.994					
F-statistic: 355.6 on 7 and 8 DF, p-value: 2.454e-09					

Figura 5 – Coeficientes de regressão

Após realizar a análise de variância desse modelo, obtive os mesmos resultados, demonstrando novamente que a variável A, B, C e a interação AB são as mais significativas considerando 5% (p-value < 0,05) para o modelo, observados na Figura 6.

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
A	1	495	495	214.081	4.67e-07	***
B	1	4590	4590	1984.892	7.11e-11	***
C	1	473	473	204.568	5.57e-07	***
A:B	1	189	189	81.757	1.79e-05	***
A:C	1	1	1	0.243	0.635	
B:C	1	2	2	0.676	0.435	
A:B:C	1	8	8	3.270	0.108	
Residuals	8	18	2			
---						
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1						

Figura 6 – ANOVA

Visualizamos na Figura 7, o gráfico de normalidade dos resíduos e com isso conclui-se que os dados estão normalmente distribuídos em torno da reta. Também foi realizado o teste de Shapiro-wilk com valor de 0,7583 ( $p\text{-value} > 0,05$ ), portanto, atendendo a premissa de que os dados são normalmente distribuídos.

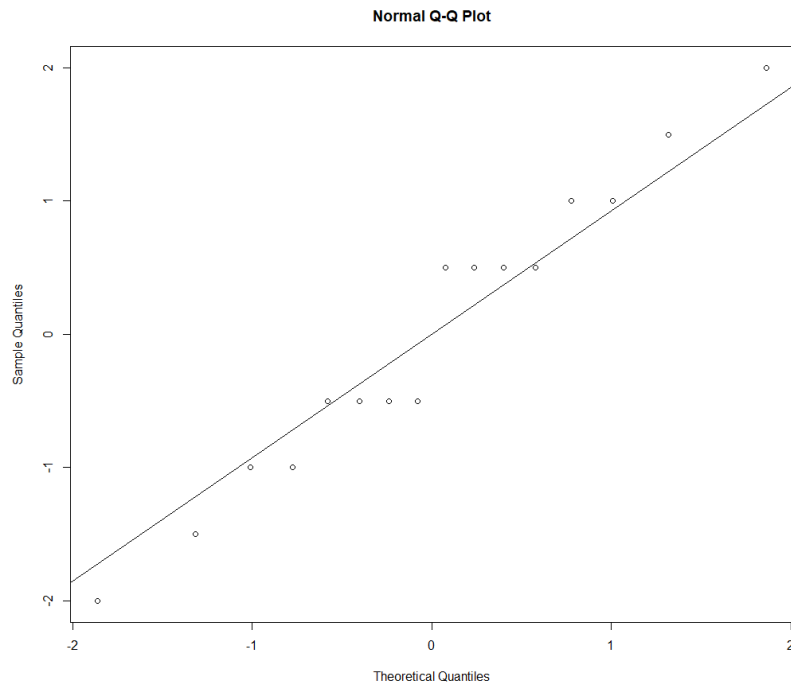


Figura 7 – Normalidade dos resíduos

Agora podemos visualizar os gráficos de contorno e de superfície nas Figuras 8 e 9, que mostram as interações AB, e o ponto de otimização máxima que já foi informado antes.

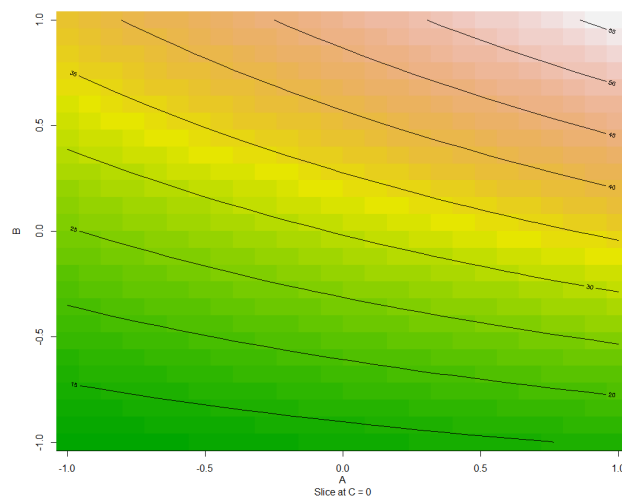
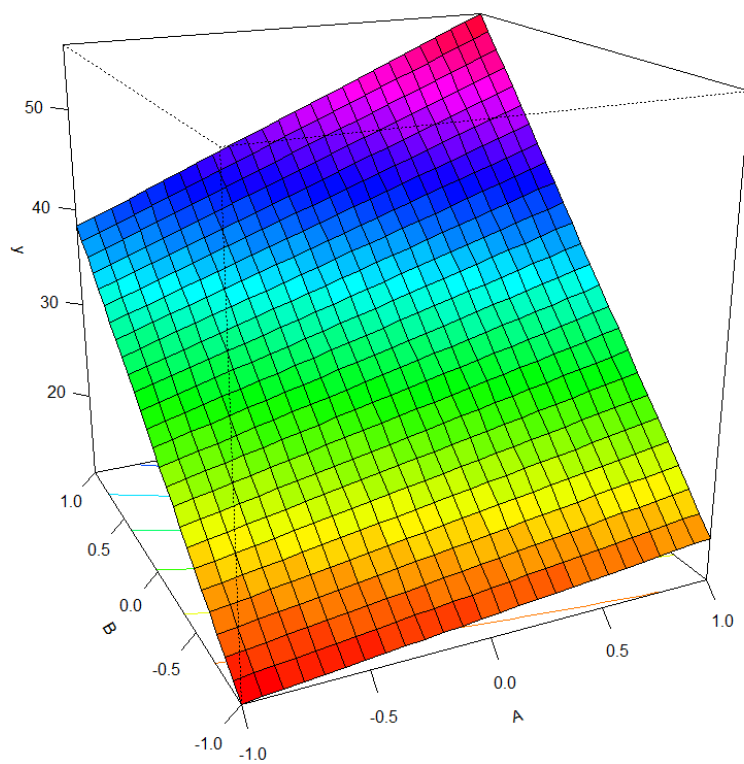


Figura 8 – Gráfico de contorno com interação AB





Slice at C = 0

Figura 9 – Gráfico de superfície com interação AB

## Exercício 7

Conforme solicitado, adicionei 4 pontos centrais ao planejamento fatorial completo de maneira codificada em valores de 0. Ficamos com um total de 20 experimentos devido ao acréscimo dos pontos centrais, de acordo com a Tabela 1.

	tA	pB	cC	vD	y
1	-1	-1	-1	-1	45
2	1	-1	-1	-1	71
3	-1	1	-1	-1	48
4	1	1	-1	-1	65
5	-1	-1	1	-1	68
6	1	-1	1	-1	60
7	-1	1	1	-1	80
8	1	1	1	-1	65
9	-1	-1	-1	1	43
10	1	-1	-1	1	100
11	-1	1	-1	1	45
12	1	1	-1	1	104
13	-1	-1	1	1	75
14	1	-1	1	1	86
15	-1	1	1	1	70
16	1	1	1	1	96
17	0	0	0	0	73
18	0	0	0	0	75
19	0	0	0	0	66
20	0	0	0	0	69

Tabela 1 – Planejamento fatorial completo com pontos centrais

Realizando a regressão e a análise de variância, observei que as variáveis A, B e C e as interações AC e AD são significativas considerando 5% ( $p\text{-value} < 0,05$ ), e que **não há curvatura** em consideração aos pontos centrais (marcado em vermelho), conforme vistos na Figura 1 e Figura 2.

Coefficients:					
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	70.0625	1.1745	59.654	6.93e-12	***
tA	10.8125	1.1745	9.206	1.57e-05	***
pB	1.5625	1.1745	1.330	0.220066	
cC	4.9375	1.1745	4.204	0.002980	**
vD	7.3125	1.1745	6.226	0.000252	***
curvatura	0.6875	2.6262	0.262	0.800102	
tA:pB	0.0625	1.1745	0.053	0.958865	
tA:cC	-9.0625	1.1745	-7.716	5.66e-05	***
tA:vD	8.3125	1.1745	7.078	0.000104	***
pB:cC	1.1875	1.1745	1.011	0.341574	
pB:vD	-0.1875	1.1745	-0.160	0.877117	
cC:vD	-0.5625	1.1745	-0.479	0.644800	
---					
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1					
Residual standard error: 4.698 on 8 degrees of freedom					
Multiple R-squared: 0.9695, Adjusted R-squared: 0.9275					
F-statistic: 23.09 on 11 and 8 DF, p-value: 7.393e-05					

Figura 1 – Regressão linear completa

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
tA	1	1870.6	1870.6	84.755	1.57e-05	***
pB	1	39.1	39.1	1.770	0.220066	
cC	1	390.1	390.1	17.674	0.002980	**
vD	1	855.6	855.6	38.765	0.000252	***
curvatura	1	1.5	1.5	0.069	0.800102	
tA:pB	1	0.1	0.1	0.003	0.958865	
tA:cC	1	1314.1	1314.1	59.540	5.66e-05	***
tA:vD	1	1105.6	1105.6	50.093	0.000104	***
pB:cC	1	22.6	22.6	1.022	0.341574	
pB:vD	1	0.6	0.6	0.025	0.877117	
cC:vD	1	5.1	5.1	0.229	0.644800	
Residuals	8	176.6	22.1			
---						
signif. codes:	0	****	0.001	***	0.01	**
					0.05	.
					0.1	'
						1

Figura 2 – ANOVA

Vizualizamos na Figura 3, o gráfico de normalidade dos resíduos e com isso concluir que os dados estão normalmente distribuídos em torno da reta. Também foi realizado o teste de Shapiro-wilk com valor de 0,4915 ( $p\text{-value} > 0,05$ ), portanto, atendendo a premissa de que os dados são normalmente distribuídos.

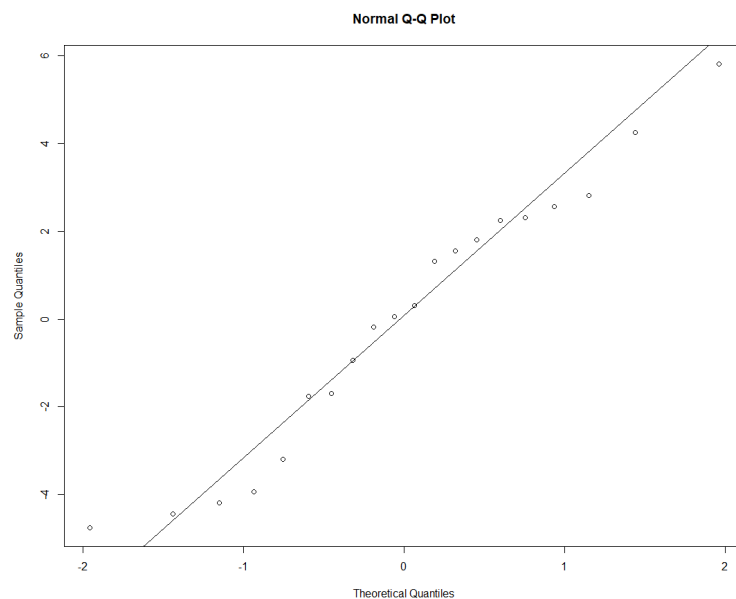


Figura 3 – Normalidade dos resíduos

Finalmente poderemos visualizar na Figura 4 todos os gráficos que comprovam a **falta de curvatura ou uma curvatura bem pequena**. A média dos pontos centrais não difere muito da média dos fatoriais, o que implica que não é importante buscarmos um coeficiente quadrático para modelar a curvatura em função das variáveis que possuímos.

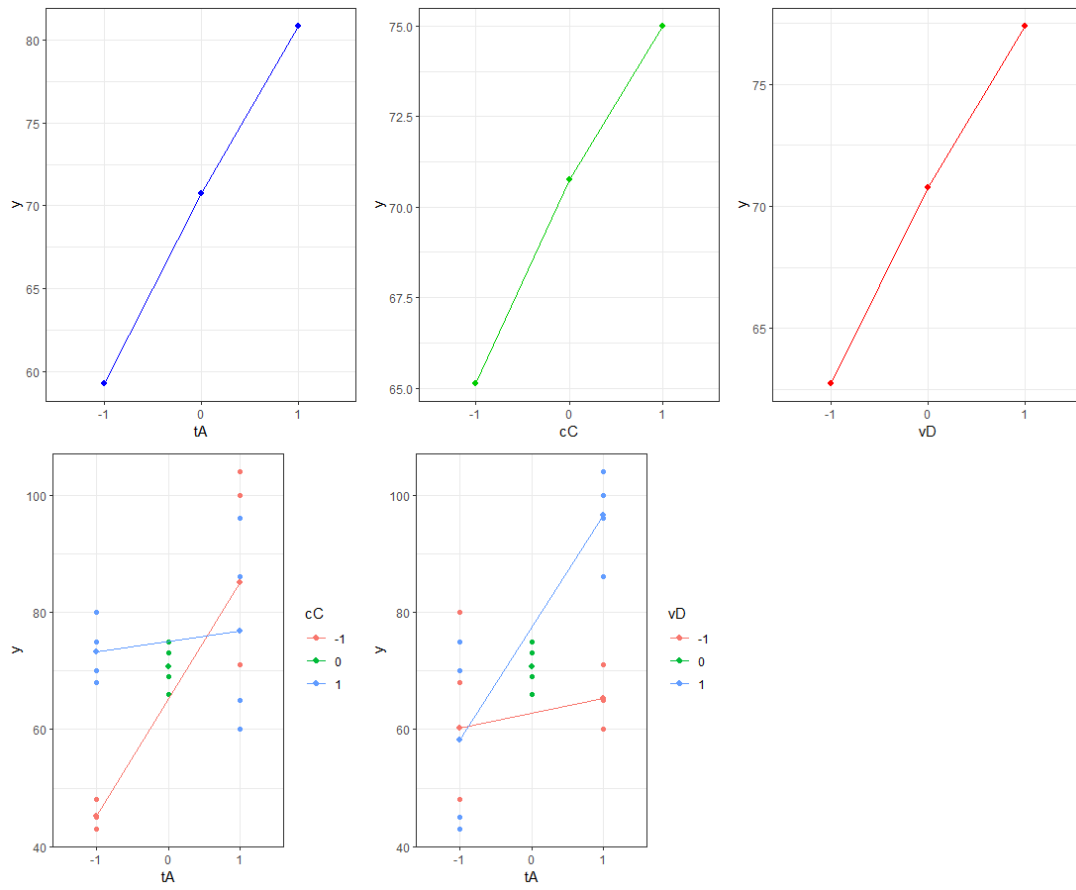


Figura 4 – Análise de curvatura

## Exercício 8

O melhor modelo foi informado no enunciado e seguiremos com seu uso.

$$\hat{y} = 19,8 + 2,0_{x_1} + 5,0_{x_2} + 2,5_{x_3}$$

Para obter o caminho da máxima inclinação escolhi o fator  $x_2(A)$ , pois este possui o maior coeficiente em módulo. Demonstrarei como chegar no valor do passo com o cálculo deste fator em escala codificada ( $x_p$ ).

$$x_i = \frac{t - t_{\text{médio}}}{\frac{t_{\text{interv}}}{2}} \quad A^* = \frac{A - A_{\text{médio}}}{\frac{\Delta_{\text{interv}}}{2}} \quad \Delta A^* = \frac{3-2}{\frac{3-1}{2}} \quad \Delta A^* = 1$$

Agora determinarei o deslocamento dos outros fatores (passo), em unidades codificadas.

Calculando-se  $2\lambda$  a partir da equação para  $\Delta x_p$ , é possível calcular o passo para qualquer variável ( $\Delta x_n$ ),  $\Delta x_p = \frac{\beta_p}{2\lambda}$ .

$$\Delta A^* = \frac{\beta_p}{2\lambda} \quad 1 = \frac{5}{2\lambda} \quad 2\lambda = 5$$

$$\Delta G^* = \frac{\beta_j}{2\lambda} \quad \Delta G^* = \frac{2,0}{5} \quad \Delta G^* = 0,4$$

$$\Delta T^* = \frac{\beta_P}{2\lambda} \quad \Delta T^* = \frac{2,5}{5} \quad \Delta T^* = 0,5$$

Nesse momento, converti os deslocamentos codificados de volta às unidades originais para determinar os novos níveis dos fatores, considerando as variáveis codificadas e variáveis originais. Utilizaremos os valores de origem, o  $\Delta$  e cada adição de passo em uma tabela.

$$\begin{array}{llll} A^* = \frac{A - A_{\text{médio}}}{\frac{\Delta_{\text{interv}}}{2}} & \Delta A^* = \frac{\Delta A}{\frac{3-1}{2}} & 1 = \frac{\Delta A}{\frac{3-1}{2}} & \Delta A = 1 \text{ (g L}^{-1}\text{)} \\ G^* = \frac{G - G_{\text{médio}}}{\frac{\Delta_{\text{interv}}}{2}} & \Delta G^* = \frac{\Delta G}{\frac{60-20}{2}} & 0,4 = \frac{\Delta G}{20} & \Delta G = 8 \text{ (g L}^{-1}\text{)} \\ T^* = \frac{T - T_{\text{médio}}}{\frac{\Delta_{\text{interv}}}{2}} & \Delta T^* = \frac{\Delta T}{\frac{0,08-0,02}{2}} & 0,5 = \frac{\Delta T}{0,03} & \Delta T = 0,015 \text{ (mg L}^{-1}\text{)} \end{array}$$

Nessa etapa calculei os deslocamentos para as variáveis de acordo com a Tabela 1. Para cada passo, andaremos  $1 \text{ g L}^{-1}$  em Asparagina,  $8 \text{ g L}^{-1}$  em Glicose e  $0,015 \text{ mg L}^{-1}$  em Tiamina.

Etapas	variáveis codificadas			variáveis originais		
	G*	A*	T*	G	A	T
Origem	0	0	0	40	2	0,05
$\Delta$	0,4	1	0,5	8	1	0,015
Origem + $\Delta$	0,4	1	0,5	48	3	0,065
Origem + $2\Delta$	0,8	2	1	56	4	0,08
Origem + $3\Delta$	1,2	3	1,5	64	5	0,095
Origem + $4\Delta$	1,6	4	2	72	6	0,11
Origem + $5\Delta$	2	5	2,5	80	7	0,125
Origem + $6\Delta$	2,4	6	3	88	8	0,14
Origem + $7\Delta$	2,8	7	3,5	96	9	0,155
Origem + $8\Delta$	3,2	8	4	104	10	0,17
Origem + $9\Delta$	3,6	9	4,5	112	11	0,185
Origem + $10\Delta$	4	10	5	120	12	0,2
Origem + $11\Delta$	4,4	11	5,5	128	13	0,215
Origem + $12\Delta$	4,8	12	6	136	14	0,23

Tabela 1 – Deslocamentos

## Exercício 9

O melhor modelo foi informado no enunciado e seguiremos com seu uso.

$$\hat{y} = 19,8 + 2,0_{x_1} + 5,0_{x_2} + 2,5_{x_3}$$

Para obter o caminho da máxima inclinação escolhi o fator  $x_1(G)$  por definição do enunciado. Demonstrarei como chegar no valor do passo com o cálculo deste fator em escala codificada ( $x_p$ ). Utilizei o deslocamento inicial como  $\Delta G$  ( $G - G_{medio}$ ).

$$x_i = \frac{t - t_{medio}}{\frac{\Delta_{interv}}{2}} \quad G^* = \frac{G - G_{medio}}{\frac{\Delta_{interv}}{2}} \quad \Delta G^* = \frac{25}{\frac{60-20}{2}} \quad \Delta G^* = 1,25$$

Agora determinarei o deslocamento dos outros fatores (passo), em unidades codificadas.

Calculando-se  $2\lambda$  a partir da equação para  $\Delta x_p$ , é possível calcular o passo para qualquer variável ( $\Delta x_n$ ),  $\Delta x_p = \frac{\beta_p}{2\lambda}$ .

$$\Delta G^* = \frac{\beta_p}{2\lambda} \quad 1,25 = \frac{2,0}{2\lambda} \quad 2\lambda = 1,6$$

$$\Delta A^* = \frac{\beta_j}{2\lambda} \quad \Delta A^* = \frac{5}{1,6} \quad \Delta A^* = 3,125$$

$$\Delta T^* = \frac{\beta_P}{2\lambda} \quad \Delta T^* = \frac{2,5}{1,6} \quad \Delta T^* = 1,5625$$

Nesse momento, converti os deslocamentos codificados de volta às unidades originais para determinar os novos níveis dos fatores, considerando as variáveis codificadas e variáveis originais. Utilizaremos os valores de origem, o  $\Delta$  e cada adição de passo em uma tabela.

$$\begin{array}{llll} G^* = \frac{G - G_{medio}}{\frac{\Delta_{interv}}{2}} & \Delta G^* = \frac{\Delta G}{\frac{60-20}{2}} & 1,25 = \frac{\Delta G}{20} & \Delta G = 25 (g L^{-1}) \\ A^* = \frac{A - A_{medio}}{\frac{\Delta_{interv}}{2}} & \Delta A^* = \frac{\Delta A}{\frac{3-1}{2}} & 3,125 = \frac{\Delta A}{1} & \Delta A = 3,125 (g L^{-1}) \\ T^* = \frac{T - T_{medio}}{\frac{\Delta_{interv}}{2}} & \Delta T^* = \frac{\Delta T}{\frac{0,08-0,02}{2}} & 1,5625 = \frac{\Delta T}{0,03} & \Delta T = 0,0469 (mg L^{-1}) \end{array}$$

Nessa etapa calculei os deslocamentos para as variáveis de acordo com a Tabela 1. Para cada passo, andaremos  $25 \text{ g L}^{-1}$  em Glicose,  $3,125 \text{ g L}^{-1}$  em Asparagina e  $0,0469 \text{ mg L}^{-1}$  em Tiamina.

	variáveis codificadas			variáveis originais		
Etapas	G*	A*	T*	G	A	T
Origem	0	0	0	40	2	0,05
$\Delta$	1,25	3,125	1,5625	25	3,125	0,0469
Origem + $\Delta$	1,25	3,125	1,5625	65	5,125	0,0969
Origem + 2 $\Delta$	2,5	6,25	3,125	90	8,25	0,1438
Origem + 3 $\Delta$	3,75	9,375	4,6875	115	11,375	0,1907
Origem + 4 $\Delta$	5	12,5	6,25	140	14,5	0,2376
Origem + 5 $\Delta$	6,25	15,625	7,8125	165	17,625	0,2845
Origem + 6 $\Delta$	7,5	18,75	9,375	190	20,75	0,3314
Origem + 7 $\Delta$	8,75	21,875	10,9375	215	23,875	0,3783
Origem + 8 $\Delta$	10	25	12,5	240	27	0,4252
Origem + 9 $\Delta$	11,25	28,125	14,0625	265	30,125	0,4721
Origem + 10 $\Delta$	12,5	31,25	15,625	290	33,25	0,519
Origem + 11 $\Delta$	13,75	34,375	17,1875	315	36,375	0,5659
Origem + 12 $\Delta$	15	37,5	18,75	340	39,5	0,6128

Tabela 1 – Deslocamentos com destaque no terceiro ponto

Após calcular as coordenadas do terceiro ponto que estão pintadas em amarelo (*Origem* + 3 $\Delta$ ) na Tabela 1, utilizaremos os valores codificados ( $G^* = 3,75$ ,  $A^* = 9,375$  e  $T^* = 4,6875$ ) para calcular a resposta, utilizando a equação fornecida.

$$\hat{y} = 19,8 + (2,0 * 3,75) + (5,0 * 9,375) + (2,5 * 4,6875)$$

Com isso, conclui-se que o rendimento de polissacarídeo, nas condições apresentadas foi de 85,9%.



## Exercício 10

O melhor modelo foi informado no enunciado e seguiremos com seu uso.

$$\hat{y} = 30 + 5x_1 + 2.5x_2 + 3.5x_3$$

Para obter o caminho da máxima inclinação escolhi o fator  $x_1(t)$ , pois este possui o maior coeficiente em módulo. Demonstrarei como chegar no valor do passo com o cálculo deste fator em escala codificada ( $x_p$ ). Utilizei o passo do enunciado como  $\Delta t$  ( $t - t_{medio}$ ).

$$x_i = \frac{t - t_{medio}}{\frac{\Delta_{interv}}{2}} \quad t^* = \frac{t - t_{medio}}{\frac{\Delta_{interv}}{2}} \quad \Delta t^* = \frac{5}{\frac{80-40}{2}} \quad \Delta t^* = 0,25$$

Agora determinarei o deslocamento dos outros fatores (passo), em unidades codificadas.

Calculando-se  $2\lambda$  a partir da equação para  $\Delta x_p$ , é possível calcular o passo para qualquer variável ( $\Delta x_n$ ).

$$\Delta x_p = \frac{\beta_p}{2\lambda} \quad \Delta t^* = \frac{\beta_p}{2\lambda} \quad \Delta t^* = \frac{\beta_p}{2\lambda} \quad 0,25 = \frac{5}{2\lambda} \quad 2\lambda = 20$$

$$\Delta T^* = \frac{\beta_j}{2\lambda} \quad \Delta T^* = \frac{2,5}{20} \quad \Delta T^* = 0,125$$

$$\Delta P^* = \frac{\beta_P}{2\lambda} \quad \Delta P^* = \frac{3,5}{20} \quad \Delta P^* = 0,175$$

Nesse momento, converti os deslocamentos codificados de volta às unidades originais para determinar os novos níveis dos fatores, considerando as variáveis codificadas e variáveis originais. Utilizaremos os valores de origem, o  $\Delta$  e cada adição de passo em uma tabela.

$$x_i = \frac{t - t_{medio}}{\frac{\Delta_{interv}}{2}}$$

$$t^* = \frac{t - t_{medio}}{\frac{\Delta_{interv}}{2}} \quad 0,25 = \frac{\Delta t}{\frac{80-40}{2}} \quad \Delta t = 5 \text{ min}$$

$$T^* = \frac{T - T_{medio}}{\frac{\Delta_{interv}}{2}} \quad \Delta T^* = \frac{\Delta T}{\frac{300-200}{2}} \quad 0,125 = \frac{\Delta T}{50} \quad \Delta T = 6,25^\circ C$$

$$P^* = \frac{P - P_{medio}}{\frac{\Delta_{interv}}{2}} \quad \Delta P^* = \frac{\Delta P}{\frac{50-20}{2}} \quad 0,175 = \frac{\Delta P}{15} \quad \Delta P = 2,625 \text{ psi}$$

Observando os pontos  $t = 85 \text{ min}$ ,  $T = 325^\circ \text{ C}$  e  $P = 60 \text{ psi}$ , podemos afirmar que eles estão no caminho do gradiente ascendente, levando em conta o grau de inclinação que encontramos nos cálculos realizados, de acordo com a Tabela 1. Para cada passo, andaremos  $5 \text{ min}$  em tempo,  $6,25^\circ \text{ C}$  em temperatura e  $2,625$  em psi.

	variáveis codificadas			variáveis originais		
Etapas	$t^*$	$T^*$	$P^*$	$t$	$T$	$P$
Origem	0	0	0	60	250	35
$\Delta$	0,25	0,125	0,175	5	6,25	2,625
Origem + $\Delta$	0,25	0,125	0,175	65	256,25	37,625
Origem + $2\Delta$	0,5	0,25	0,35	70	262,5	40,25
Origem + $3\Delta$	0,75	0,375	0,525	75	268,75	42,875
Origem + $4\Delta$	1	0,5	0,7	80	275	45,5
Origem + $5\Delta$	1,25	0,625	0,875	85	281,25	48,125
Origem + $6\Delta$	1,5	0,75	1,05	90	287,5	50,75
Origem + $7\Delta$	1,75	0,875	1,225	95	293,75	53,375
Origem + $8\Delta$	2	1	1,4	100	300	56
Origem + $9\Delta$	2,25	1,125	1,575	105	306,25	58,625
Origem + $10\Delta$	2,5	1,25	1,75	110	312,5	61,25
Origem + $11\Delta$	2,75	1,375	1,925	115	318,75	63,875
Origem + $12\Delta$	3	1,5	2,1	120	325	66,5

Tabela 1 – Análise de gradiente ascendente