Машинное обучение.
Домашнее задание №1

Задача 1. Рассмотрим пример, показывающий, что неполное правдоподобие для смеси распределений может иметь особые точки.

Возьмем одномерную выборку, состоящую из первых десяти натуральных точек: $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Будем настраивать на данную выборку смесь из двух нормальных распределений:

$$p(x) = \pi_1 \mathcal{N}(x \,|\, \mu_1, \sigma_1^2) + \pi_2 \mathcal{N}(x \,|\, \mu_2, \sigma_2^2).$$

Первую гауссиану выберем произвольным образом и зафиксируем. Центр второй гауссианы разместим в одном из объектов обучающей выборки, а дисперсию устремим к нулю: $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$, $\mu_1 = 5.5$, $\sigma_1^2 = 1$, $\mu_2 = 1$, $\sigma_2^2 \to 0$. Покажите, что в этом случае правдоподобие будет стремиться к бесконечности.

Задача 2. Рассмотрим смесь двух одномерных нормальных распределений:

$$p(x) = \pi_1 \mathcal{N}(x \,|\, \mu_1, \sigma_1^2) + \pi_2 \mathcal{N}(x \,|\, \mu_2, \sigma_2^2).$$

Дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 известны.

Пусть дана выборка $X^\ell = \{x_1, \dots, x_\ell\}$. Введите в модель скрытые переменные и выведите формулы шагов EM-алгоритма для настройки параметров $\pi_1, \pi_2, \mu_1, \mu_2$.

Задача 3. Пусть $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — такие распределения, что

$$p(x, y) = p_1(x) p_2(y);$$
$$q(x, y) = q_1(x) q_2(y).$$

Докажите, что

$$\mathrm{KL}\,(q \,\|\, p) = \mathrm{KL}\,(q_1 \,\|\, p_1) + \mathrm{KL}\,(q_2 \,\|\, p_2)\,.$$

Задача 4. Рассмотрим два d-мерных нормальных распределения с единичными ковариационными матрицами:

$$p(x) = \mathcal{N}(x \,|\, 0, I);$$
$$q(x) = \mathcal{N}(x \,|\, \mu, I).$$

Докажите, что

$$\mathrm{KL}\,(q \,\|\, p) = \frac{\|\mu\|^2}{2}.$$