Chapitre 3

Variables aléatoires continues

3.1 Introduction

Définition 3.1. *Une variable aléatoire X est dite* continue *lorsque l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre $X(\Omega)$, où Ω est l'univers d'une épreuve quelconque, est un ensemble infini non dénombrable. Par exemple $X(\Omega) = \mathbb{R}$ ou des parties de $\mathbb{R}$ (intervalle ou réunion d'intervalles). On considère donc ici une variable aléatoire*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La loi d'une telle variable aléatoire est une loi continue*.*

La description de la loi d'une variable aléatoire continue X diffère de celle d'une loi discrète car la probabilité pour que X prenne une valeur x est nulle :

lorsque X est une variable aléatoire continue, on a $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.1. Supposons que X modélise la durée de vie d'une ampoule éclairée en permanence. L'ensemble des valeurs prises par X est donc l'ensemble $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ des réels strictement positifs, correspondant à un nombre *infini non dénombrable* de valeurs possibles. Si on essaie d'évaluer les chances que l'ampoule grille à un instant x « bien précis » et que tout moment est équiprobable, on se retrouve avec une unique situation favorable sur une infinité non dénombrable de possibilités, soit :

$$\mathbb{P}(X = x) \text{ « } = \text{ » } \frac{\text{Card}(x)}{\text{Card}(X(\Omega))} = \frac{1}{\infty} \text{ « } = \text{ » } 0.$$

Le fait que l'on ait $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout x amène à considérer le calcul intégral pour des *intervalles de valeurs de X*, où le *poids marginal* des valeurs x sera appelé *densité* (dont le rôle est équivalent à celui des probabilités élémentaires pour les variables aléatoires discrètes). Cependant, la probabilité de l'univers doit rester égale à 1, c'est-à-dire que l'intégrale de la densité sur les $x \in X(\Omega)$ doit toujours donner 1.

La notion de fonction de répartition est inchangée par rapport au cas discret (sauf qu'elle sera continue au lieu d'être en escalier). Il s'agit de la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Remarque 3.1. La probabilité de l'événement $\{X = x\}$ étant nulle, on peut aussi écrire $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3.2 Loi d'une variable aléatoire continue, espérance et variance

3.2.1 Densité de probabilité et fonction de répartition

Définition 3.2. *Soit X une variable aléatoire continue de fonction de répartition F_X. Alors la* densité de probabilité de X, *notée f_X, est définie comme étant la* dérivée de la fonction de répartition F_X *:*

$$\begin{array}{rcl} f_X : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & f_X(x) = F'_X(x) \end{array}.$$

Remarque 3.2. Pour obtenir la probabilité d'un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit alors de « sommer » les densités de tous les points de cette partie, cette somme étant une intégrale dans le cas continu. La courbe représentative de f_X est alors la version continue d'un diagramme en bâtons ou d'un histogramme.

La donnée de la densité f_X permet alors de décrire complètement notre variable aléatoire X en caractérisant sa loi. Elle vérifie les propriétés suivantes :

Propriété 3.1.
1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) \geq 0$.
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_X(t)dt = \mathbb{P}(x \in X(\Omega)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\displaystyle\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)dt$.

Remarque 3.3. Comme $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = 0$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(a < X \leq b) & = & \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) \\ & = & F_X(b) - F_X(a) = \displaystyle\int_a^b f_X(t)dt. \end{array}$$

On vient de voir comment définir la densité de probabilité f_X d'une variable aléatoire continue X à partir de sa fonction de répartition F_X. On peut aussi définir la fonction de répartition à partir de la densité. Cette relation est équivalente et toutes deux caractérisent la loi de la variable aléatoire. En fonction du contexte et des énoncés, on pourra donner soit l'une, soit l'autre. Dans tous les cas, on pourra toujours déduire celle qui ne sera pas donnée.

Définition 3.3. *Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X. Alors la* fonction de répartition de X, *notée F_X, est définie comme étant l'*intégrale de la densité de probabilité f_X *:*

$$\begin{array}{rcl} F_X : \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f_X(t)dt \end{array}.$$

Remarque 3.4. Pour calculer la probabilité que la variable aléatoire X soit supérieure à une valeur $x \in \mathbb{R}$ (*fonction de survie* $\overline{F}_X$), on a toujours

$$\overline{F}_X(x) = \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X \geq x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X < x) = 1 - F_X(x).$$

De même que dans le cas discret, la courbe représentative de la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue est une fonction croissante, à valeurs entre 0 et 1. Elle n'est en revanche plus en escalier mais elle-même continue. En effet, dans le cas discret les sauts correspondaient aux probabilités des événements élémentaires, alors qu'ici l'accumulation de chances est progressive avec une pente plus ou moins grande selon la pente donnée par la densité (qui est la *dérivée* de la fonction de répartition).

Propriété 3.2. *Si X est une variable aléatoire continue de fonction de répartition F_X, alors*

1. F_X *est* continue.
2. F_X *est* croissante.
3. $$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1.$$

À chaque loi continue usuelle correspondra donc une densité, de même qu'il correspondra une fonction de répartition F_X donnée par son intégrale. F_X est donc une primitive de f_X, et $F_X(x)$ correspond à l'aire contenue sous la courbe représentative de f_X entre $-\infty$ et x.

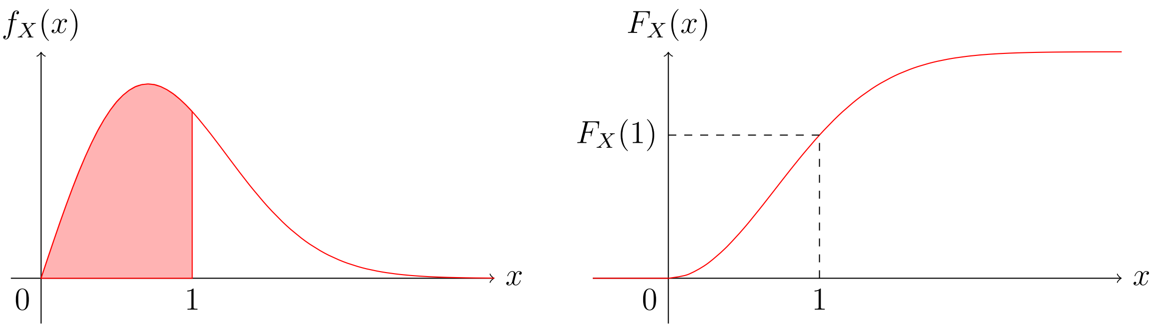
Exemple 3.2.

1. Soit X une variable aléatoire continue de densité $f_X(x) = 2xe^{-x^2}$ pour $x \geq 0$. On a bien que $f_X(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ ($f_X(x) = 0$ pour $x < 0$) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}dx = \left[-e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = 1$. Alors sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x 2te^{-t^2}dt & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \left[-e^{-t^2}\right]_0^x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

2. Réciproquement, si $F_X(x) = 1 - e^{-x^2}$ pour $x \geq 0$ et $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$, alors

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2xe^{-x^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



$$F_X(1) = \int_0^1 f_X(t)dt = 1 - e^{-1}.$$

3.2.2 Espérance et variance en fonction de la densité

Sous réserve que les intégrales généralisées suivantes existent, l'espérance et la variance de X sont définies comme dans le cas discret mais en remplaçant les sommes discrètes par des intégrales

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx, \quad \mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\mathbb{E}[X] - x\big)^2 f_X(x)dx, \ \ \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)},$$

et dans ces conditions la *formule de Koenig* est toujours valable :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx\Big)^2.$$

3.2.3 Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire et $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\Phi(X)$ est encore une variable aléatoire.

Théorème 3.1 (Théorème de transfert)**.**
Si X est une variable aléatoire continue de densité f_X, alors

$$\mathbb{E}[\Phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) f_X(x)dx.$$

3.3 Couple de variables aléatoires continues

3.3.1 Lois jointe et marginales

Définition 3.4. *Si un couple (X, Y) de variables aléatoires a une loi continue, on définit sa* densité jointe *comme la fonction $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$,*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b; c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x, y)dxdy.$$

Remarque 3.5. $f_{X,Y}$ est une densité de probabilité, donc $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dxdy = 1$.

Exemple 3.3. Supposons qu'un couple (X, Y) ait pour densité jointe la fonction $f_{X,Y}(x, y) = x + y$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$; et 0 sinon. Vérifions qu'il s'agit bien d'une densité : $f_{X,Y}$ est une fonction positive sur $[0, 1]^2$ et son intégrale doit faire 1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (x + y)dxdy &= \int_0^1 \left[\int_0^1 (x + y)dx\right] dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Calculons $\mathbb{P}(X \leq 0,5; Y \leq 0,5)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 0,5; Y \leq 0,5) &= \int_0^{0,5} \int_0^{0,5} (x+y)dxdy = \int_0^{0,5} \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^{0,5} dy \\
&= \int_0^{0,5} \left(\frac{1}{8} + \frac{y}{2}\right) dy = \left[\frac{y}{8} + \frac{y^2}{4}\right]_0^{0,5} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Proposition 3.1. *Si un couple (X, Y) a pour densité jointe la fonction $f_{X,Y}$, alors on peut retrouver les densités respectives des variables X et Y en intégrant par rapport à y (pour X) ou par rapport à x (pour Y) :*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy,$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx.$$

Exemple 3.4. Reprenons l'exemple précédent et calculons la densité de la variable aléatoire X.

$$\forall x \in [0,1], \quad f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}.$$

De façon analogue, on obtient pour la variable Y la densité

$$\forall y \in [0,1], \quad f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^1 = \frac{1}{2} + y.$$

3.3.2 Loi conditionnelle et indépendance

Les probabilités conditionnelles peuvent être étendues aux variables aléatoires continues à l'aide des densités conditionnelles.

Définition 3.5. *Soient (X, Y) un couple aléatoire continu de densité jointe $f_{X,Y}$ et f_X, f_Y les densités marginales de X et Y respectivement. On définit la* densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ *par*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f_X(x) \neq 0, \quad f_Y(y|X=x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}.$$

De façon analogue, on définit la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \text{ tel que } f_Y(y) \neq 0, \quad f_X(x|Y=y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

On en déduit alors deux expressions de la densité jointe en fonction de chacune des densités conditionnelles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y|X=x)f_X(x) = f_X(x|Y=y)f_Y(y).$$

Proposition 3.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux variables soient indépendantes est que leur densité jointe s'écrive*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

On a alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f_Y(y|X = x) = f_Y(y)$, $f_X(x|Y = y) = f_X(x)$ *et* $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Exemple 3.5. Poursuivons notre exemple et calculons cette fois-ci les densités conditionnelles.

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad f_Y(y|X = x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{x + y}{x + \frac{1}{2}}, \quad f_X(x|Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{x + y}{\frac{1}{2} + y}.$$

Comme $f_X(x)f_Y(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) \neq f_{X,Y}(x, y) = x + y$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

3.3.3 Loi d'une somme de variables continues indépendantes

Proposition 3.3. *Soient X et Y deux variables indépendantes admettant des densités f_X et f_Y respectivement, et $Z = X + Y$. Alors Z est une variable à densité et f_Z se calcule à partir de f_X et f_Y via la formule :*

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_X(z - y) f_Y(y) dy.$$

On dit que f_Z est le produit de convolution *de f_X et f_Y.*

Exemple 3.6. Soient X et Y deux variables aléatoires continues indépendantes de densités

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si } y \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vérifions qu'il s'agit bien de densités de probabilité : $f_X(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f_Y(y) \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = \int_0^1 dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{dy}{2\sqrt{y}} = [\sqrt{y}]_0^1 = 1.$$

Déterminons la loi de $Z = X + Y$ en utilisant le produit de convolution de f_X et f_Y : on a $Z(\Omega) =]0, 2[$ donc $f_Z(z) = 0$ si $z \leq 0$ ou si $z \geq 2$. De plus, $f_X(x) \neq 0$ pour $x \in [0, 1]$, $f_Y(z - x) \neq 0$ pour $0 < z - x < 1$ à z fixé, c'est-à-dire $z - 1 < x < z$ et $0 \leq x \leq 1$: si $0 < z \leq 1$, alors $0 \leq x \leq z$; si $1 < z < 2$, alors $z - 1 \leq x \leq 1$. D'où

$$\forall z \in]0, 1], \quad f_Z(z) = \int_0^z \frac{dx}{2\sqrt{z - x}} = \left[-\sqrt{z - x}\right]_0^z = \sqrt{z}$$

et

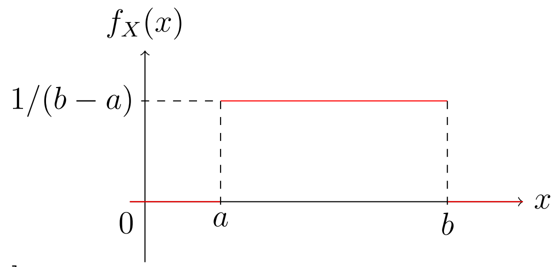
$$\forall z \in]1, 2[, \quad f_Z(z) = \int_{z-1}^1 \frac{dx}{2\sqrt{z - x}} = \left[-\sqrt{z - x}\right]_{z-1}^1 = 1 - \sqrt{z - 1}$$

3.4 Lois usuelles continues

3.4.1 Loi uniforme sur $[a,b]$

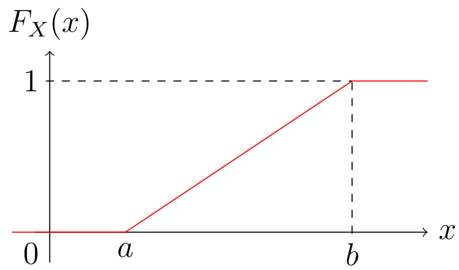
Il s'agit de l'équivalent de la loi uniforme de variables aléatoires discrètes où $x \in \{1,\dots,n\}$ mais sur un intervalle continu $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. L'intervalle $[a,b]$ est de probabilité 1 et tous les sous-intervalles de même longueur vont avoir la même probabilité. Pour ce faire, on considère la densité $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$



ou via la fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$



On le note $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$.

Espérance et variance.

$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{2(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

et

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4(a^2+ab+b^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemple 3.7. Si $a = 0$ et $b = 1$, $F_X(x) = x$ et $f_X(x) = 1$ si $x \in [0,1]$, et 0 sinon.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{V}[X] = \frac{1}{12}.$$

Il s'agit de modéliser l'équiprobabilité pour des variables pouvant prendre toutes les valeurs entre 0 et 1. La fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Somme de deux variables uniformes sur $[0,1]$ indépendantes. Soient X et Y deux variables indépendantes de lois uniformes sur $[0,1]$. Calculons la loi de $Z = X + Y$.

X et Y sont des variables à densité et $f_X(x) = f_Y(y) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$, et 0 sinon. Z est donc une variable à densité à valeurs dans $[0,2]$.

Or $f_X(x)f_Y(z-x)$ vaut 1 lorsque $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq z-x \leq 1$, soit $0 \leq x \leq 1$ et $z-1 \leq x \leq z$, soit encore $x \in [0,1] \cap [z-1,z]$. $f_X(x) = 0$ sinon. L'intersection $x \in [0,1] \cap [z-1,z]$ est parfois vide. On a en fait plusieurs cas

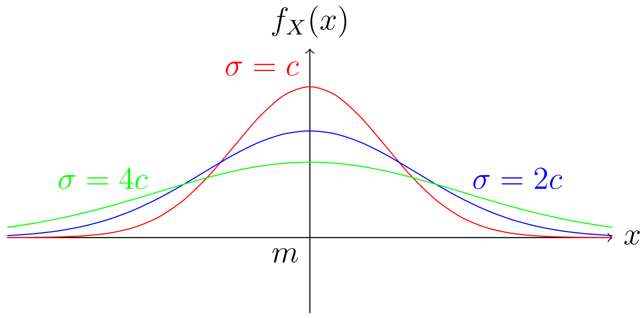
- Si $z < 0$, alors l'intersection est vide, donc $f_Z(z) = 0$.
- Si $0 \leq z < 1$, alors $[0,1] \cap [z-1,z] = [0,z]$ donc $f_Z(z) = \int_0^z 1dx = z$.
- Si $1 \leq z \leq 2$, alors $[[0,1] \cap [z-1,z] = [z-1,1]$, donc $f_Z(z) = \int_{z-1}^1 1dx = 1-(z-1) = 2-z$.
- Si $z \geq 2$, alors l'intersection est vide, donc $f_Z(z) = 0$.

3.4.2 Loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$

Il s'agit de la plus connue des lois de probabilités, parfois sous le vocable de *loi de Laplace-Gauss*, et caractérisée par sa célèbre « courbe en cloche » autour de sa moyenne. Son importance est due à son apparition naturelle comme loi asymptotique de nombreux phénomènes dans le *Théorème Central Limite* (TCL) qui sera vu dans le Chapitre 4 : par exemple, si on lance une infinité de fois une pièce et qu'on regarde le nombre moyen de piles obtenus, la loi asymptotique sera une loi normale. Ce théorème permet d'approcher de nombreuses lois discrètes ou continues par des lois normales, lorsque l'on a un nombre « important » de réalisations de l'expérience.

Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $m \in \mathbb{R}$ et de variance σ^2 (ou encore d'écart-type $\sigma > 0$), noté $X \sim \mathcal{N}(m;\sigma^2)$, si sa densité s'écrit

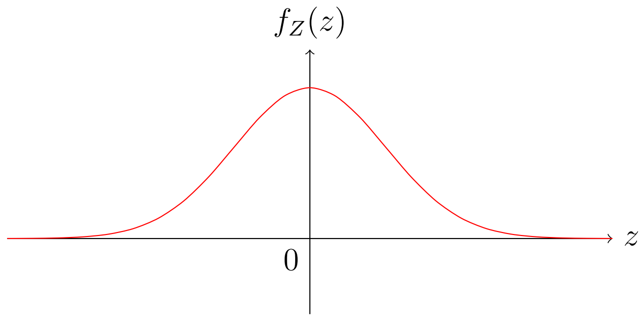
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



et $\mathbb{E}[X] = m$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ (les paramètres de la loi sont les espérance et variance de X, donc pas besoin de les calculer explicitement, même si on peut les retrouver en faisant les calculs). Comme la loi normale est symétrique par rapport à sa moyenne m, alors la médiane est elle aussi égale à m.

Il n'existe pas d'expression analytique simple de la fonction de répartition pour tout $m \in \mathbb{R}$ ou $\sigma > 0$ (on a seulement des approximations numériques). En pratique, on utilise une table statistique dite *usuelle* qui est définie pour un cas particulier de la loi normale : le cas où $m = 0$ et $\sigma = 1$, appelée loi normale *centrée réduite*. Si $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$, alors

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{z^2}{2}}$$



et on notera Φ sa fonction de répartition définie par

$$\forall z \ \in \mathbb{R}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Voyons maintenant le lien entre la loi $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ (pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$) et la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Propriété 3.3. *1. Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Alors*

$$Z := \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1).$$

2. Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Alors

$$X := m + \sigma Z \sim \mathcal{N}(m;\sigma^2).$$

Ainsi, pour étudier une loi normale quelconque (soit pour n'importe quel $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$), il suffit de connaître la loi normale centrée réduite.

Regardons comment déduire la fonction de répartition de $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ à partir de Φ la fonction de répartition de $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

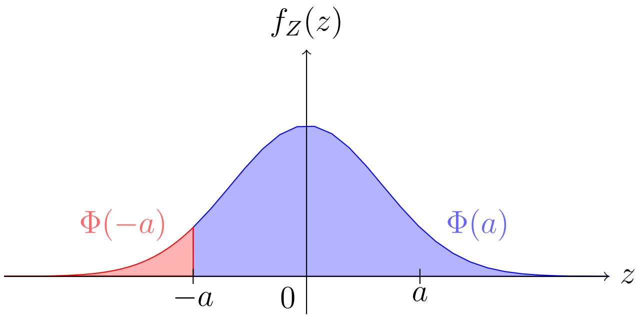
Par conséquent, quelque soient les valeurs de m et σ, l'étude de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ se ramène à celle de $\mathcal{N}(0;1)$. Étudions donc les propriétés de la loi normale centrée réduite.

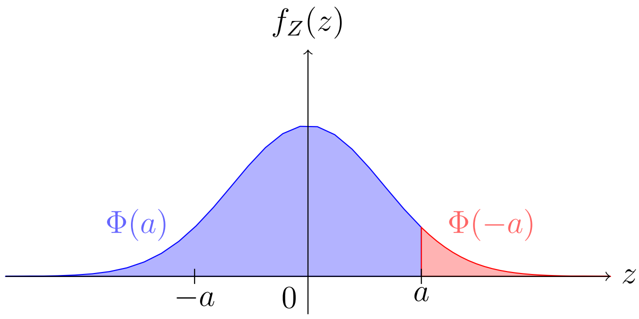
Proposition 3.4. *Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On a alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$*

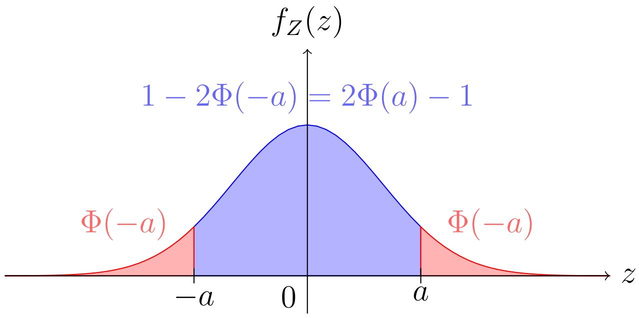
$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

et en particulier $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$. On a par ailleurs

$$\mathbb{P}(|Z| \leq a) = 2 \cdot \Phi(a) - 1.$$







Remarque 3.6. Les valeurs de $\Phi(a)$ pour $0 \leq a \leq 4$ se trouvent dans une table statistique dite de la loi normale (centrée réduite). On déduit celle pour $-a$ en utilisant $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$.

On notera que $\Phi(0,5) = 0,6915$, $\Phi(1) = 0,8413$, $\Phi(1,5) = 0,9332$, $\Phi(2) = 0,9772$, $\Phi(2,5) = 0,9938$ et $\Phi(3) \approx 1$. Ainsi $\Phi(-1) = 0,1587$, $\Phi(-2) = 0,0228$, etc.

Exemple 3.8. Soit X de loi $\mathcal{N}(6;4)$. On peut ainsi calculer par exemple

$$\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}\left(\frac{X-6}{2} > \frac{1-6}{2}\right) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{-5}{2}\right) = 1 - \Phi(-2,5) = \Phi(2,5) = 0,9938,$$

ou encore

$$\mathbb{P}(4 \leq X \leq 8) = \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1) = \mathbb{P}(|Z| \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0,6826.$$

3.4.2.a Somme de variables normales indépendantes

On a les propriétés suivantes que l'on admet sans démonstration.

Proposition 3.5. *1. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes suivant des lois gaussiennes $\mathcal{N}(m_1;\sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2;\sigma_2^2)$ respectivement. Alors, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX_1 + bX_2$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(am_1 + bm_2; a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$.*

2. Si on somme n variables gaussiennes indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de même loi $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi $\mathcal{N}(nm; n\sigma^2)$.

3.4.2.b Approximation de lois binomiales par une loi normale

La loi normale permet d'approcher la loi binomiale lorsque l'approximation par une loi de Poisson n'est pas valide, *i.e.* lorsque p n'est proche ni de 0 ni de 1 (voir Chapitre 2). En pratique on l'utilisera pour des probabilités de succès p relativement centrales, pour $\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{3}{4}$ lorsque n n'est pas très grand (mais aussi pour des valeurs de p moins centrales pour n suffisamment grand).

Une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut-être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(n \cdot p, np(1-p))$ lorsque $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $np(1-p) \geq 5$.

D'autres critères existent selon la précision voulue.

Exemple 3.9 (*Surréservation d'une compagnie aérienne)*.
Une compagnie utilise des avions d'une capacité de 320 passagers. Une étude statistique montre que 5 passagers sur 100 ayant réservé ne se présente pas à l'embarquement et on considèrera donc que la probabilité qu'un passager ayant réservé ne se présente pas à l'embarquement est $p = 0,05$.

1. La compagnie accepte 327 réservations sur un vol. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.
   (a) Quelle est la loi suivie par X ?
   $X \sim \mathcal{B}(327; 0,95)$.
   (b) Par quelle loi normale peut-on approcher la loi de X ? Les paramètres de la loi seront déterminés à 10^{-2} près.
   On peut approcher la loi de X par une loi normale $\mathcal{N}(np; np(1-p))$ car $n \geq 30$, $np = 310,65 \geq 15$ et $np(1-p) = 15,5325 \geq 5$.
   (c) En utilisant l'approximation par la loi normale, calculer $\mathbb{P}(X \leq 320,5)$. Pensez-vous que le risque pris par la compagnie en acceptant 327 réservations est important ?
   $\mathbb{P}(X \leq 320,5) = \Phi\left(\frac{320,5-310,65}{\sqrt{15,5325}}\right) = \Phi(2,5) = 0,9938$. Il y a donc un risque de 0,62% de surbooking.
2. Serait-il raisonnable pour la compagnie d'accepter sur ce même vol 330 réservations ? 335 réservations ? 340 réservations ?

   ▷ Si $n = 330$, alors $np = 313,5$, $np(1-p) = 15,675$ et $\mathbb{P}(X \leq 320,5) = \Phi(1,77) = 0,9616$.

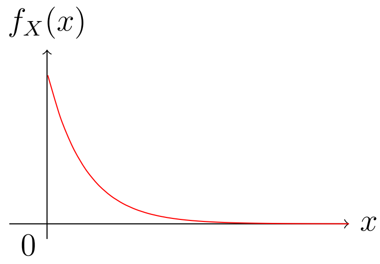
   ▷ Si $n = 335$, alors $np = 318,25$, $np(1-p) = 15,9125$ et $\mathbb{P}(X \leq 320,5) = \Phi(0,56) = 0,7123$.

   ▷ Si $n = 340$, alors $np = 323$, $np(1-p) = 16,15$ et $\mathbb{P}(X \leq 320,5) = \Phi(-0,62) = 1 - \Phi(0,62) = 1 - 0,7324 = 0,2676$.

3.4.3 Loi exponentielle

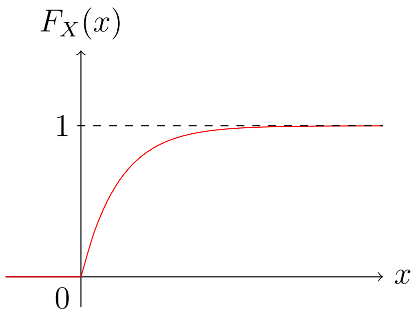
La loi exponentielle est utile pour modéliser des durées de vie ou des temps : elle ne prend donc que des valeurs positives. Lorsqu'une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$, notée $X \sim \mathcal{E}(\mu)$, sa densité est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \mu e^{-\mu x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$



On en déduit alors sa fonction de répartition

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^x \mu e^{-\mu t} dt = \left[-e^{-\mu t}\right]_0^x = 1 - e^{-\mu x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



Espérance et variance. L'espérance de X est obtenue par intégration par parties en posant $u(x) = x$ et $v(x) = \mu e^{-\mu x}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} \mu x e^{-\mu x} dx = \left[-x e^{-\mu x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\mu x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\mu} e^{-\mu x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Pour le calcul de la variance, calculons d'abord l'espérance de X^2. À l'aide d'une intégration par parties en posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \mu e^{-\mu x}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_0^{+\infty} \mu x^2 e^{-\mu x} dx = \left[-x^2 e^{-\mu x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-\mu x} dx \\ &= \frac{2}{\mu} \int_0^{+\infty} \mu x e^{-\mu x} dx = \frac{2}{\mu} \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\mu^2}. \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \dfrac{1}{\mu^2}$.

Propriétés de la loi exponentielle. Une variable aléatoire X est dite *sans mémoire* si

$$\forall s, t \geq 0, \quad \mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s). \tag{3.1}$$

Si l'on pense à X comme la durée de vie en heures d'un certain instrument, alors cette équation (3.1) dit que la probabilité que cet instrument vive pendant au moins $s + t$ heures sachant qu'il a survécu t heures est la même que la probabilité qu'il vive pendant au moins s heures. En d'autres termes, si l'instrument est vivant au temps t, alors la loi du temps qu'il lui reste à vivre est la même que la loi au début de sa vie. En fait, l'instrument ne se rappelle pas qu'il a déjà été utilisé pendant une période t.

La loi exponentielle est la seule famille de loi qui possède la propriété d'être *sans mémoire*.

Somme de deux variables exponentielles indépendantes. Soient X et Y deux variables indépendantes de lois exponentielles de paramètre μ. Calculons la loi de $Z = X + Y$.

On a $f_X(x) = f_Y(x) = \mu e^{-\mu x}$ si $x \geq 0$, et 0 sinon. Or $f_X(x)f_Y(z-x)$ vaut $\mu e^{-\mu x}\mu e^{-\mu(z-x)}$ lorsque $x \geq 0$ et $z - x \geq 0$, soit $x \geq 0$ et $x \leq z$, soit encore $x \in [0, +\infty[\cap] - \infty, z]$. Sinon $f_X(x)f_Y(z-x)$ vaut 0. On a alors deux cas

- Si $z < 0$, alors $[0, +\infty[\cap] - \infty, z] = \emptyset$ donc $f_Z(z) = 0$;
- Si $z \geq 0$, alors $[0, +\infty[\cap] - \infty, z] = [0, z]$, donc

$$f_Z(z) = \mu^2 \int_0^z e^{-\mu x - \mu z + \mu x} dx = \mu^2 \int_0^z e^{-\mu z} dx = \mu^2 z e^{-\mu z}.$$

Ainsi la densité de Z est $f_Z(z) = \mu^2 z e^{-\mu z}$ si $z \geq 0$, et 0 sinon.

Exemple 3.10. On considère deux variables aléatoires exponentielles indépendantes X_1 et X_2 de paramètres μ_1 et μ_2 respectivement.

1. On pose $Y = \min(X_1; X_2)$. Cherchons à déterminer sa loi au travers de sa fonction de répartition. Comme X_1 et X_2 sont positives, leur minimum aussi et donc $\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) \leq x) = 0$ si $x \leq 0$.

   Pour $x > 0$, en passant au complémentaire et en remarquant que si le minimum est supérieur à x, alors les deux variables sont supérieures à x, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) \leq x) &= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x) = 1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)x} \end{aligned}$$

   où la seconde ligne est obtenue par indépendance des variables. Ainsi la densité de Y est $f_Y(y) = (\mu_1 + \mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)y}$ si $y > 0$ et 0 sinon. On en déduit que $Y \sim \mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$.

2. On pose $Z = \max(X_1; X_2)$. Cherchons à déterminer sa loi au travers de sa fonction de répartition. De façon analogue, on a $\mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \leq x) = 0$ pour $x \leq 0$. Pour $x > 0$, en remarquant que si le maximum est inférieur à x, alors les deux variables sont inférieures à x, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \leq x) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) = \left(1 - e^{-\mu_1 x}\right)\left(1 - e^{-\mu_2 x}\right) \end{aligned}$$

   où la seconde ligne est obtenue par indépendance des variables. Ainsi la densité de Z s'écrit $f_Z(z) = (1 - e^{-\mu_1 z})(1 - e^{-\mu_2 z})$ si $z > 0$ et 0 sinon.