Feuille d'exercises 2 :
Séries de Fourier

Espaces de Hilbert

Exercice 1 : Théorème de Pythagore

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient $u_1, \cdots, u_n \in \mathcal{H}$ des vecteurs deux à deux orthogonaux. Montrer que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$$

Séries de Fourier

Exercice 2 :

Montrer que $(e^{in\cdot}, n \in \mathbb{Z})$ est une famille orthonormale de $L^2(0; 2\pi)$ (on admet que la famille est totale).
On note dans la suite $c_n(f)$ les coefficients d'une fonction f dans cette base orthonormale.

Exercice 3 :

Montrer que $\left(\sqrt{2}\cos(n\cdot), n \geq 0; \sqrt{2}\sin(n\cdot), n > 0\right)$ est une famille orthonormale de $L^2(0; 2\pi)$ (on admet que la famille est totale).
On note dans la suite $a_n(f), b_n(f)$ les coefficients d'une fonction f dans cette base orthonormale.

Exercice 4 :

Montrer que pour $f, g \in L^2(0; 2\pi)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $c_n(\lambda f + g) = \lambda c_n(f) + c_n(g)$

Exercice 5 :

Faire le développement en série de Fourier des fonctions suivantes :

1. f, 2π-périodique définie par $f(x) = x$ sur $[-\pi; \pi[$
2. g, 2π-périodique définie par $g(x) = x$ sur $[0; 2\pi[$
3. h, 2π-périodique définie par $h(x) = |x|$ sur $[-\pi; \pi[$

Exercice 6 :

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in [0; 2\pi[$. Développer f en série de Fourier et en déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ , } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 7 :

Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $c_n(f') = inc_n(f)$. En déduire $c_n(f^{(k)})$ pour f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^k$. En déduire un ordre de décroissance des coefficients de Fourier pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 8 :

Soit $u_0 \in L^2(0, 2\pi)$. Utiliser la décomposition en série de Fourier pour montrer qu'il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(0, 2\pi))$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

Exercice 9 :

Soient $f, g \in L^2(0, 2\pi)$. Montrer que pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

Exercice 10 : Phénomène de Gibbs

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{\pi}{4}$ pour $x \in [0, \pi[$ et $f(x) = -\frac{\pi}{4}$ pour $x \in [-\pi; 0[$

1. Développer f en série de Fourier
2. Soit $S_N f$ la somme partielle du développement en série de Fourier de f à l'ordre n. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}f(0)$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}f(\frac{\pi}{2n+1})$.

Transformée de Fourier discrète et rapide

Exercice 11 :

Calculer à la main la TFD de l'échantillon $(1, i, -1, 0)$.

Transformée de Fourier continue

Exercice 12 :

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifier les relations suivantes :

$$\widehat{\lambda f + g} = \lambda \hat{f} + \hat{g}$$

$$\widehat{f(\cdot - a)} = e^{-ia\cdot}\hat{f}$$
$$\widehat{f(\lambda\cdot)} = \frac{1}{|\lambda|}\hat{f}(\cdot/\lambda)$$
$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$
$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$$

Exercice 13 :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ dérivable et telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$$

Réciproquement si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et

$$(\hat{f})' = \widehat{ixf(x)}$$

Exercice 14 :

Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ où $\alpha > 0$ et montrer que $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$.

Exercice 15 :

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

1. Montrer que la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}$ est $\dfrac{2\ \sin\left(\xi\frac{T}{2}\right)}{\xi}$.
2. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[a;b]}$ ($\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = 1$ si $x \in [a;b]$ et $\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = 0$ sinon).
3. (Difficile) La fonction sinus cardinal $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ (la fonction est-elle L^1 ? L^2 ?)

Exercice 16 :

Soient $\mu \in \mathbb{C}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$. Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f_{\mu,\sigma}}(\xi) = \exp\left(-i\mu\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right).$$

On pourra se ramener à $f = f_{0,1}$ puis chercher une équation différentielle dont $\hat{f}$ est solution.

Exercice 17 :

Montrer la forme suivante de la formule de Poisson entre une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ et sa périodisée $\bar{f}$: $c_n(\bar{f}) = \hat{f}(n)$.

Exercice 18 : Principe d'incertitude d'Heisenberg

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ à valeurs réelles, dérivable, telle que $f' \in L^2(\mathbb{R})$ et $x \mapsto xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $2\int_{\mathbb{R}} xf'(x)f(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)^2$
2. En déduire l'inégalité de Heisenberg $D_f D_{\hat{f}} \geq \frac{1}{4}$
3. Etudier le cas d'égalité.

Exercice 19 : Théorème de Shannon

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $supp(\hat{f}) \subset [-T;T]$.

1. Soit g la $2T$-périodisée de $\hat{f}$ montrer que g et $\hat{f}$ coincident sur $[-T;T]$.
2. Ecrire la formule de Poisson pour $\hat{f}$. On fera attention à la période dans le calcul des coefficients de Fourier.
3. En déduire la formule de Shannon $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{T}\right) sinc(Tx - \pi n)$