Université Paris-Est Créteil **M2 IA2S**
2022–2023 **Probabilités**

Fiche n° 4 : Chaînes de Markov Homogènes Finies

Exercice 1. Donner les classes d'états pour les chaînes de Markov homogènes dont les matrices de transition sont les suivantes

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,75 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 9/10 & 1/20 & 1/20 \\ 7/10 & 0 & 3/10 \\ 8/10 & 0 & 2/10 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/16 & 15/16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dire lesquelles sont fermées.

Corrigé 1. ∘ P_1 : l'état 1 mène à 2 qui ne mène pas à 1, aussi 1 mène à 5 qui ne mène pas à 1, donc $\{1\}$ est une classe NON fermée. De même pour les états 2 et 3, donc $\{2\}$ et $\{3\}$ sont des classes NON fermées. L'état 4 ne mène à aucun état, donc $\{4\}$ est une classe fermée. De même, l'état 5 ne mène à aucun état, donc $\{5\}$ est une classe fermée.

∘ P_2 : l'état D mène à M qui mène à D, aussi D mène à R qui mène à D, donc D,R,M sont dans la même classe. La CM est irréductible (une seule classe, donc forcément fermée).

∘ P_3 : l'état 1 mène à 2 qui mène à 1, aussi 1 mène à 3 qui mène à 1, donc 1,2,3 sont dans la même classe. La CM est irréductible (une seule classe, donc forcément fermée).

∘ P_4 : l'etat 1 mène à 2 mais 2 ne mène pas à 1 (car 2 conduit uniquement à 3 et 3 est absorbant), 1 mène à 3 mais 3 ne mène pas à 1, donc $\{1\}$ est une classe NON fermée. Aussi 2 mène à 3 mais 3 ne mène pas à 2, donc $\{2\}$ est une classe NON fermée. $\{3\}$ ne mène à aucun état, c'est une classe fermée.

∘ P_5 : la CM est irréductible. En effet, 1 mène à 2 (en un pas), et aussi 2 mène à 1 (en deux pas) (car 2 mène à 3 et 3 mène à 1), 1 mène à 3 (en deux pas : 1 à 2, et 2 à 3) et 3 mène à 1 (en un pas).

Exercice 2. On considère une chaîne de Markov homogène sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$ avec $p_{1,1} = p_{4,4} = 1$, $p_{2,1} = p_{2,3} = p_{3,2} = p_{3,4} = 1/2$.

1. Donner les classes de cette chaîne de Markov et les caractériser.

2. Donner h_2^1, h_3^1, h_2^4 et h_3^4.
3. Donner k_2 et k_3.

Corrigé 2. 1. La classe $\{2,3\}$ de cette chaîne de Markov est non fermée, donc transiente. Les états $\{1\}$ et $\{4\}$ sont absorbants, donc récurrents. Si la chaîne de Markov commence dans l'état 1, elle y reste pour toujours ; c'est la même chose pour l'état 4. Si la chaîne de Markov commence dans 2 ou 3, elle visite la classe $\{2,3\}$ un nombre fini de fois et au bout d'un temps aléatoire qui est fini *p.s.* elle s'absorbe dans l'état 1 ou l'état 4.

2. Calculons h_2^1 et h_3^1 : On applique le résultat du cours. On écrit $h_2^1 = 1/h_1^1 + 1/2h_3^1$, $h_3^1 = 1/2h_4^1 + 1/2h_2^1$. Comme $h_1^1 = 1$ et $h_4^1 = 0$, on obtient un système linéaire avec deux inconnues, la solution est $h_2^1 = 2/3$, $h_3^1 = 1/3$. Les probabilités $h_2^4 = 1 - h_2^1 = 1 - 2/3 = 1/3$, et $h_3^4 = 1 - h_4^1 = 2/3$.

3. Les temps moyens d'absorption vérifient le système suivant : $k_2 = 1 + 1/2k_1 + 1/2k_3$, $k_3 = 1 + 1/2k_3 + 1/2k_4$. Ici $k_4 = 0$ et $k_1 = 0$. On obtient le système avec deux inconnus, dont on trouve facilement la solution qui est $k_2 = k_3 = 2$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 1)$ dans le cas $p = 1/16$.
2. Calculer la ou les mesures invariantes.
3. Soit ν une loi initiale quelconque. Donner $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i)$ pour $i = 1,2,3$ et justifier bien votre réponse. Donner $\lim_{n\to\infty} P^n$.

Corrigé 3. 1. On cherche ici à calculer $\mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 1) = p_{11}^{(n)}$. Si $p = 1/16$, les valeurs propres de cette matrice sont 1, $-1/12$ et $-1/4$. Donc $P = RDR^{-1}$ avec D la matrice diagonale d'éléments 1, $-1/12$ et $-1/4$ sur la diagonale, et R une matrice inversible. Alors $P^n = RD^nR^{-1}$. On pourrait rechercher R à partir des vecteurs propres. Mais voici une autre méthode.

On a forcément

$$p_{11}^{(n)} = \alpha + \beta(-1/12)^n + \gamma(-1/4)^n$$

avec certains coefficients α, β, γ inconnus. On sait que $p_{1,1}^{(1)} = 0$, et par le calcul, on a

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/48 & 109/144 & 2/9 \\ 0 & 11/16 & 5/16 \end{pmatrix},$$

on obtient alors que $p_{1,1}^{(2)} = 0$. On a aussi $P^0 = Id$, donc $p_{1,1}^{(0)} = 1$.

On résout alors le système suivants pour trouver les coefficients α, β et γ

$$\left\{\begin{array}{l} p_{11}^{(0)} = 1 = \alpha + \beta + \gamma \\ p_{11}^{(1)} = 0 = \alpha - \beta/12 - \gamma/4 \\ p_{11}^{(2)} = 0 = \alpha + \beta/144 + \gamma/16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = \beta/12 + \gamma/4 \\ 13/12\beta + 5/4\gamma = 1 \\ \gamma = -13/45\beta \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = \beta/90 \\ \beta = 18/13 \\ \gamma = -13/45\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1/65 \\ \beta = 18/13 \\ \gamma = -2/5 \end{array}\right.$$

Donc $p_{11}^{(n)} = 1/65 + 18/13(-1/12)^n - 2/5(-1/4)^n$.

2. On résout $\pi = \pi P$. On obtient alors le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_1 = p\pi_3 \\ \pi_2 = \pi_1 + (2/3)\pi_2 + (1-p)\pi_3 \\ \pi_3 = 1/3\pi_2 \end{array}\right. \iff \pi = c(p, 3, 1).$$

On prend $c = (p + 3 + 1)^{-1}$.

3. On a une chaîne de Markov irréductible et comme $P_{2,2} > 0$, l'état 2 et donc toute la chaîne est apériodique. Alors les limites demandées valent $p(p+3+1)^{-1}$, $3(p+3+1)^{-1}$ et $(p+3+1)^{-1}$ pour $i = 1, 2, 3$ respectivement.
La matrice limite $\lim_{n\to\infty} P^n = D$ se compose de $D_{i,1} = p(p+3+1)^{-1}$ pour $i = 1, 2, 3$, de $D_{i,2} = 3(p+3+1)^{-1}$ pour $i = 1, 2, 3$ et de $D_{i,3} = (p+3+1)^{-1}$ pour $i = 1, 2, 3$.

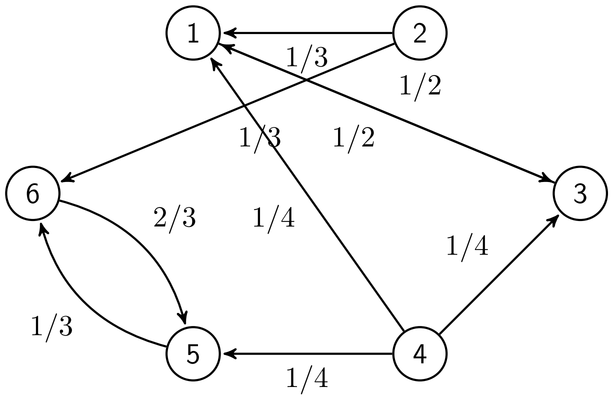
Exercice 4. Considérons la matrice stochastique suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

et on désigne par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov de matrice de transition P.

1. Précisez l'espace des états E. Identifiez les classes d'états de la chaîne (X_n), et justifiez pour chacune s'il s'agit d'une classe fermée ou non-fermée.
2. Quelles classes sont récurrentes ? La chaîne est-elle irréductible ?
3. Donnez la définition d'une probabilité invariante (ou stationnaire). Prouvez qu'il existe une probabilité stationnaire.
4. Calculez la ou les mesures invariantes.
5. Supposons que la loi initiale de $(X_n)_n$ soit $\lambda = (0, 0, 0, 0, 2/3, 1/3)$. En justifiant soigneusement votre réponse, calculez $\mathbb{P}(X_{9876} = 5)$.
6. Déterminez les probabilités d'absorption de la chaîne pour chaque(s) classe(s) récurrente(s).

Corrigé 4. 1. L'espace des états est $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On a le diagramme suivant



On a alors les classes $\{1, 3\}$ et $\{5, 6\}$ qui sont fermées (elles ne mènent à aucun autre états) et les classes $\{2\}$ et $\{4\}$ qui sont non fermées.

2. Comme l'espace d'états E est fini, les classes fermées sont récurrentes et les classes non fermées sont transientes. On a donc deux classes récurrentes et deux classes transientes. La chaîne n'est pas irréductible puisque l'on a 4 classes.
3. Une mesure π sur l'ensemble E est invariante pour la matrice P si et seulement si $\pi = \pi P$. Comme $|E| < \infty$, la chaîne admet au moins une probabilité invariante (cf. cours).
4. On remarque d'abord que $\pi_2 = \pi_4 = 0$ car les états sont transients. Il faut ici écrire le système d'équations $\pi = \pi P$ pour chaque classe récurrente et le résoudre. Pour $\{1, 3\}$, on a
$$\mathcal{S}_1 \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 1/2\pi_1 + 1/2\pi_3 \\ \pi_3 = 1/2\pi_1 + 1/2\pi_3 \end{array} \right. \iff \pi_1 = \pi_3 = c_1 \in \mathbb{R}_+,$$
pour $\{5, 6\}$, on a
$$\mathcal{S}_2 \left\{ \begin{array}{l} \pi_5 = 2/3\pi_5 + 2/3\pi_6 \\ \pi_6 = 1/3\pi_5 + 1/3\pi_6 \end{array} \right. \iff \pi_5 = 2\pi_6 = c_2 \in \mathbb{R}_+.$$
Pour avoir une probabilité, on doit avoir $\sum_{i\in E} \pi_i = 1$, donc
$$c_1 + c_1 + c_2 + \frac{c_2}{2} = 1 \iff 2c_1 + \frac{3}{2}c_2 = 1 \iff c_2 = \frac{2(1-2c_1)}{3}.$$
D'où
$$\mathcal{S}_\pi = \left\{ \left(c_1, 0, c_1, 0, \frac{2(1-2c_1)}{3}, \frac{(1-2c_1)}{3} \right); c_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\}.$$
5. On a $\lambda \in \mathcal{S}_\pi$ (pour $c_1 = 0$). Comme λ est une mesure invariante, la loi de la chaîne sera toujours la même
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in E, \quad \mathbb{P}(X_n = i) = \lambda_i.$$
Ainsi $\mathbb{P}(X_{9876} = 5) = \lambda_5 = 2/3$.
6. On doit calculer les probabilités d'absorption suivantes : $h_2^{\{1,3\}}$, $h_4^{\{1,3\}}$, $h_2^{\{5,6\}}$ et $h_4^{\{5,6\}}$. On a $h_2^1 = h_2^3 = 1 - h_2^5$, $h_4^1 = h_4^3 = 1 - h_4^5$, $h_2^5 = h_2^6$ et $h_4^5 = h_4^6$. Il suffit donc de résoudre

le système pour h_2^1 et h_4^1 pour connaître toutes les probabilités. De plus, pour les états récurrents, on a $h_1^1 = h_3^1 = 1$ et $h_5^1 = h_6^1 = 0$. D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} h_2^1 = p_{21}h_1^1 + p_{22}h_2^1 + p_{23}h_3^1 + p_{24}h_4^1 + p_{25}h_5^1 + p_{26}h_6^1 = 1/3 + 1/3h_2^1 \\ h_4^1 = p_{41}h_1^1 + p_{42}h_2^1 + p_{43}h_3^1 + p_{44}h_4^1 + p_{45}h_5^1 + p_{46}h_6^1 = 1/4 + 1/4 + 1/4h_4^1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} h_2^1 = 1/2 \\ h_4^1 = 2/3 \end{array} \right. .$$

D'où $h_2^{\{1,3\}} = 1/2$, $h_4^{\{1,3\}} = 2/3$, $h_2^{\{5,6\}} = 1/2$ et $h_4^{\{5,6\}} = 1/3$.

Exercice 5. Une souris effectue une suite de déplacements aléatoires, indépendants les uns des autres entre quatre trous numérotés de 1 à 4 situés le long d'un même mur. Pour passer d'un trou à l'autre, elle doit passer par une pièce où un chat monte la garde. À chaque changement de trou, la souris a une chance sur deux de se faire capturer par le chat. Si elle en échappe, elle passe dans un des trous voisins choisis au hasard s'il est au milieu de la rangée de trous et au seul trou voisin s'il est au bout de rangée.

1. Justifier que la trajectoire de cette souris est une chaîne de Markov homogène dont vous préciserez le nombre d'états et dont vous donnerez la matrice de transition.
2. Identifier les classes d'états. Quelles sont les classes fermées ? Transientes ? Récurrentes ? La chaîne est-elle irréductible ?
3. Décrire la ou les mesures invariantes.
4. Déterminer le temps moyen avant que le chat ne capture la souris.

Corrigé 5. 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite aléatoire telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $X_k = i$ si et seulement si, après le k-ème déplacement, la souris est dans la pièce n$^\circ$ i avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $X_k = 5$ si et seulement si le chat l'a capturée. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une chaîne de Markov homogène car la loi de X_{n+1} sachant tous les X_k avec $k \leq n$ ne dépend que de la valeur de X_n puisque la position de la souris ne dépend que de l'endroit où elle était à l'instant précédent. La matrice de transition est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Il y a deux classes : $\{1, 2, 3, 4\}$ et $\{5\}$ car la souris peut atteindre n'importe quelle pièce en partant de n'importe laquelle mais le chat ne peut pas la libérer. Seule la classe $\{5\}$ est fermée. Elle est même absorbante.

   L'espace d'états est fini donc les classes récurrentes sont exactement les classes fermées : la classe $\{5\}$ est récurrente, la classe $\{1, 2, 3, 4\}$ transiente.

   La chaîne n'est pas irréductible car elle possède plus d'une classe.

3. Il y a une unique classe récurrente fermée donc il n'y a qu'une mesure invariante. L'état 5 étant absorbant, on vérifie que

$$\pi = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

satisfait trivialement $\pi P = \pi$. Elle est donc l'unique mesure invariante.

4. Soit la variable aléatoire

$$T = \inf \{n > 0; X_n = 5\}.$$

C'est le temps de retour à l'unique classe récurrente 5. Soit les nombres

$$k_i = \mathbb{E}[T|X_0 = i] = 1 + \sum_{j \in E} p_{ij} k_j, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad k_5 = 0.$$

On a le système d'équation

$$\begin{cases} k_1 & = 1 + \dfrac{1}{2} k_2 \\ \\ k_2 & = 1 + \dfrac{1}{4}(k_1 + k_3) \\ \\ k_3 & = 1 + \dfrac{1}{4}(k_2 + k_4) \\ \\ k_4 & = 1 + \dfrac{1}{2} k_3 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne directement

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2.$$

En moyenne, au bout de deux déplacements, le chat aura capturé la souris.

Exercice 6.

1. On considère la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit ν une loi initiale quelconque. Donner $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et justifier bien votre réponse.

2. On considère la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit ν une loi initiale quelconque. Donner $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et justifier bien votre réponse.

Corrigé 6. 1. Cette chaîne de Markov est irréductible. On a $p_{1,1}^{(2)} \geq p_{1,2}p_{2,1} = (1/2)(1/2) > 0$ et aussi $p_{1,1}^{(3)} \geq p_{1,2}p_{2,3}p_{3,1} = (1/2)^3 > 0$. Alors l'ensemble $\{i \geq 0 : p_{1,1}^{(i)} > 0\}$ inclut 2 et 3. Donc son PGCD est 1, et donc l'état 1 est apériodique. Alors toute la chaîne de Markov est apériodique.

Par le Théorème de convergence vers la loi stationnaire d'une chaîne de Markov finie irréductible et apériodique, les limites demandées valent la loi de probabilité stationnaire $\pi_i = 1/3$ pour $i = 1, 2, 3$.

2. Les classes $\{1\}$ et $\{2\}$ sont transientes, donc la limite demandée vaut 0 pour $i = 1, 2$. La chaîne de Markov va aboutir dans l'état 3 avec probabilité 1. Donc la limite demandée vaut 1 pour $i = 3$.