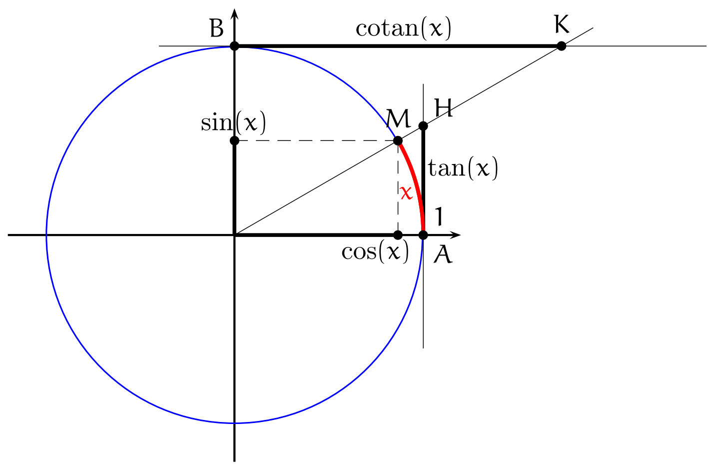
Formulaire de trigonométrie circulaire



$\cos(x) =$ abscisse de M

$\sin(x) =$ ordonnée de M

$\tan(x) = \overline{AH}$

$\text{cotan}(x) = \overline{BK}$

$e^{ix} = z_M$

Pour $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Enfin pour $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $\text{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Valeurs usuelles.

x en °	0	30	45	60	90
x en rd	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\text{cotan}(x)$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\forall x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z},\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
$$\forall x \notin \pi\mathbb{Z},\ 1 + \text{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

addition d'un tour

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\tan(x + 2\pi) = \tan x$
$\text{cotan}(x + 2\pi) = \text{cotan}\, x$

addition d'un demi-tour

$\cos(x + \pi) = -\cos x$
$\sin(x + \pi) = -\sin x$
$\tan(x + \pi) = \tan x$
$\text{cotan}(x + \pi) = \text{cotan}\, x$

angle opposé

$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$
$\text{cotan}(-x) = -\text{cotan}\, x$

angle supplémentaire

$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$
$\text{cotan}(\pi - x) = -\text{cotan}\, x$

angle complémentaire

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \text{cotan}\, x$
$\text{cotan}(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$

quart de tour direct

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
$\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\text{cotan}\, x$
$\text{cotan}(x + \frac{\pi}{2}) = -\tan x$

quart de tour indirect

$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$
$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$
$\tan(x - \frac{\pi}{2}) = -\text{cotan}\, x$
$\text{cotan}(x - \frac{\pi}{2}) = -\tan x$

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Formules de linéarisation

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Formules de factorisation

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

cos x, sin x et tan x en fonction de t=tan(x/2)

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Divers

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

Résolution d'équations

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow$
$\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = a + 2k\pi$
ou
$\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -a + 2k\pi$

$\sin x = \sin a \Leftrightarrow$
$\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = a + 2k\pi$
ou
$\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi - a + 2k\pi$

$\tan x = \tan a \Leftrightarrow$
$\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = a + k\pi$

Exponentielle complexe

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{ix} = \cos x + i \sin x.$

Valeurs usuelles

$$e^0 = 1,\ e^{i\pi/2} = i,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{-i\pi/2} = -i,\ e^{2i\pi/3} = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i.$$

Propriétés algébriques

$\forall x \in \mathbb{R},\ |e^{ix}| = 1.$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)},\quad \frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)},\quad \frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$$

Formules d'Euler

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ et } e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x.$$

Formule de Moivre

$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^{ix})^n = e^{inx}.$

Développements limités usuels

Les développements limités ci-dessous sont valables quand **x tend vers 0** et uniquement dans ce cas.

Formule de Taylor-Young en 0. $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$.

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\text{ch}x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+1}) \text{ et même } O(x^{2n+2}))$$

$$\text{sh}x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3}))$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+1}) \text{ ou } O(x^{2n+2}))$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3}))$$

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\text{Arctan}x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3}))$$

$$\text{Argth}\, x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3}))$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n) \quad (\alpha \text{ réel donné}) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + \ldots (n+1)x^n + o(x^n)$$

On obtient un développement de Arcsin x (resp. argsh x) en intégrant un développement de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$ (resp. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$).

Formulaire : Dérivées et primitives usuelles

Dans tout le formulaire, les quantitées situées au dénominateur sont supposées non nulles

Dérivées des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, f' est la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

$f(x)$	I	$f'(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Opérations et dérivées

$(f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$, λ désignant une constante

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$\boxed{(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$

$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$ $(n \in N,\ n \geqslant 1)$

$(e^u)' = u'e^u$

$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

En particulier,si $u > 0$: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\boxed{(u^a)' = \alpha u' u^{a-1}}$

1. $\forall x \in]-1;1[$, $\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.
2. $\forall x \in]-1;1[$, $\boxed{\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$.

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est **une** primitive de f sur l'intervalle I. Ces primitives sont **uniques à une constante près** notée C.

$f(x)$	I	$F(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	$\lambda x + C$
x	$\mathbb{R}$	$\frac{x^2}{2} + C$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$\ln\|x\| + C$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$x\ln x - x + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + C$

Opérations et primitives

On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Une primitive de $u'u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
- Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ sur I est $-\frac{1}{u}$.
- Une primitive de $\frac{u'}{u^n}$ sur I est $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$.$(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.
- Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ (En supposant $u > 0$ sur I.)
- Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.
- Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u.

En particulier, si $u > 0$ sur I et si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, une primitive de $u'u^a$ sur I est :

$$\boxed{\int u'u^a = \begin{cases} \frac{1}{a+1}u^{a+1} + C & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln u \ + C & \text{si } a = -1 \end{cases}}$$