Université Paris-Est Créteil **M2 IA2S**
2023–2024 **Probabilités**

Fiche n° 3 : Variables Aléatoires Continues

Exercice 1. Soit $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2}\left(1 + \frac{x}{2}\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

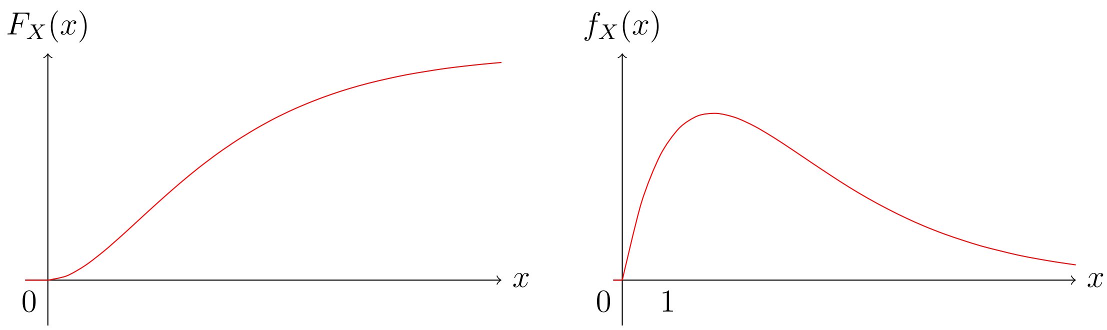
Montrer que F_X est la fonction de répartition d'une loi de probabilité dont on déterminera la densité si elle existe.

Corrigé 1. F_X est croissante continue sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. Vérifions si elle est continue en 0. On a

$$\lim_{x \to 0^-} F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} F_X(x) = 0.$$

Donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et 1, c'est donc la fonction de répartition d'une loi de probabilité.

De plus comme F_X est nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue en 0 et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est la fonction de répartition d'une loi de densité $f_X(x) = F_X'(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, c'est-à-dire $f_X(x) = \dfrac{x}{4}e^{-x/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.



Exercice 2. Soit X une v.a. réelle de fonction de répartition F_X.
Trouver en fonction de F_X les fonctions de répartition de X^2, X^3, $aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $\exp(X)$.

Corrigé 2.
- ∘ $\forall t < 0$, $\mathbb{P}(X^2 \leq t) = 0$ et $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{t}) - \mathbb{P}(X < -\sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X((-\sqrt{t})_-)$.
- ∘ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X^3 \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^{1/3}) = F_X(t^{1/3})$.

- $\triangleright$ *Cas* $a > 0$: $\mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}(X \leq (t-b)/a) = F_X((t-b)/a)$.

  $\triangleright$ *Cas* $a < 0$: $\mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}(X \geq (t-b)/a) = 1 - \mathbb{P}(X < (t-b)/a) = 1 - F_X(((t-b)/a)))$.

  $\triangleright$ *Cas* $a = 0$: $\mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{1}_{[b,+\infty[}(t)$.
- $\forall t \leq 0$, $\mathbb{P}(\exp X \leq t) = 0$, $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(\exp X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \ln t) = F_X(\ln t)$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de densité

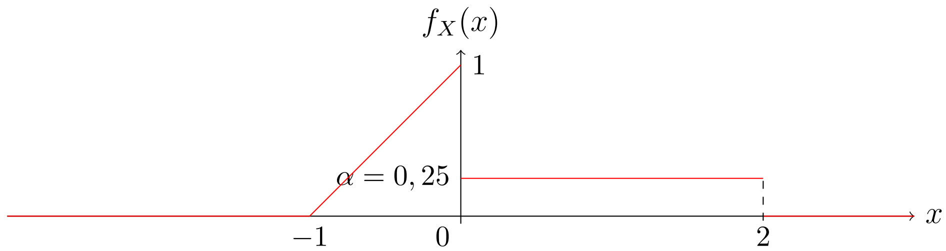
$$f_X(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si} \quad t \in [-1,0] \\ \alpha & \text{si} \quad t \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Représenter la densité de X et déterminer α, ainsi que la fonction de répartition de X.
2. Calculer $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2})$ puis $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$.

Corrigé 3. 1. On détermine α tel que l'intégrale de la densité fasse 1.

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(t)dt = \int_{-1}^{0} (1+t)dt + \int_0^2 \alpha dt = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\alpha t\right]_0^2 = 1 - \frac{1}{2} + 2\alpha = 2\alpha + \frac{1}{2}.$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(t)dt = 1 \iff 2\alpha + \frac{1}{2} = 1 \iff \alpha = \frac{1}{4}.$$



Pour la fonction de répartition F_X, comme f_X est nulle sur $]-\infty,-1]$, alors pour tout $x \in]-\infty,-1[$, $F_X(x) = 0$. De plus, pour tout $x \in]2,+\infty[$, $F_X(x) = 1$.
Pour tout $x \in [-1,0[$,

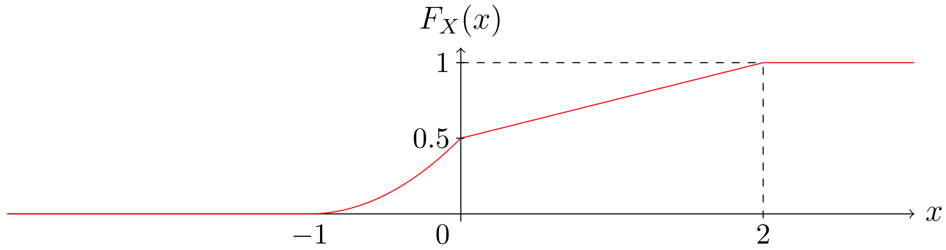
$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} f_X(t)dt = \int_{-1}^{x} (1+t)dt = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Pour tout $x \in [0,2[$,

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} f_X(t)dt = \int_{-1}^{x} (1+t)dt = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \int_0^x \frac{1}{4}dt = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}.$$

En résumé, on a donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4} & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}.$$



2.
$$\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}.$$
$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_0^2 \frac{x}{4}dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^2 = \frac{1}{3}.$$

Puis
$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_0^2 \frac{x^2}{4}dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{3}{4}.$$

D'où $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{23}{36}.$

Exercice 4. Soit X la variable aléatoire dont la densité est définie dans l'exercice précédent.

1. Déterminer la fonction de répartition $Y := X^2$, en déduire sa densité.
2. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Corrigé 4. 1. La variable Y étant positive, on a, pour tout $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$. Pour $y > 0$, d'après l'exercice 2, on a

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

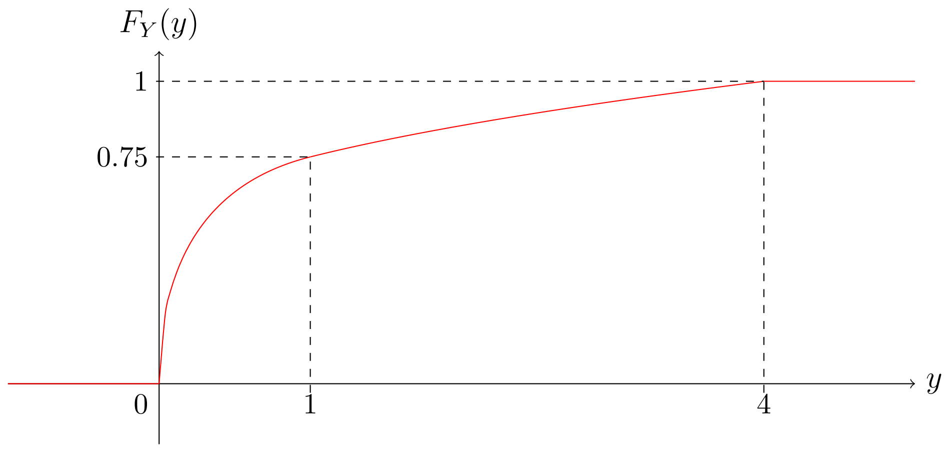
Pour $y \in]0,1[$, on a alors

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{y}}{4} - \left(\frac{y}{2} - \sqrt{y} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{y}}{4} - \frac{y}{2}.$$

Pour $y \in [1,4[$, on a
$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{y}}{4}.$$

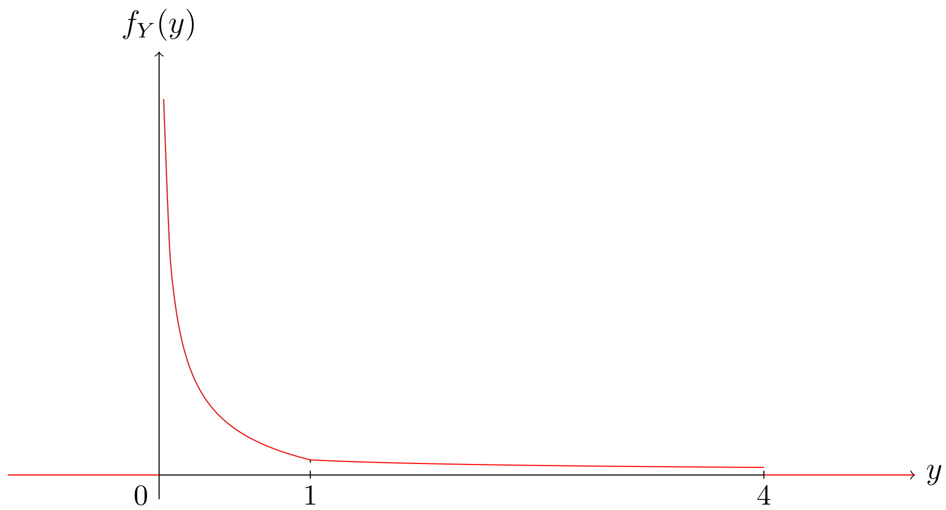
Pour $y \in [4,+\infty[$, $F_Y(y) = 1$. En résumé, on a alors

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leq 0 \\ \frac{5\sqrt{y}}{4} - \frac{y}{2} & \text{si} \quad 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{y}}{4} & \text{si} \quad 1 \leq y < 4 \\ 1 & \text{si} \quad y \geq 4 \end{cases}.$$



On en déduit la densité de Y

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{5}{8\sqrt{y}} - \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 < y < 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}} & \text{si} \quad 1 \leq y < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$



2. Le calcul de l'espérance de Y à partir de la densité f_Y donne

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 \left(\frac{5\sqrt{y}}{8} - \frac{y}{2} \right) dy + \int_1^4 \frac{\sqrt{y}}{8} dy = \left[\frac{5}{8} \frac{y^{3/2}}{3/2} - \frac{y^2}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{8} \frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 = \frac{3}{4}.$$

À partir de la densité de X, on a

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2] = \int_{-1}^2 x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 x^2(1+x) dx + \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^2 = \frac{3}{4}.$$

Exercice 5. La densité de probabilité f_X d'une variable aléatoire X est donnée par

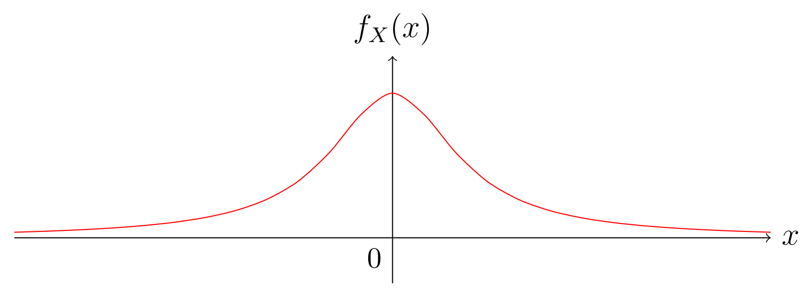
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{c}{1+x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer c et représenter la densité de X.
2. Calculer et représenter la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X > \sqrt{3})$ puis $\mathbb{E}[X]$.
4. Calculer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire $Y = X^2$. En déduire sa densité f_Y. Les représenter.
5. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ à l'aide de f_Y. Déterminer h tel que $\mathbb{P}(Y < h) = 1/3$.

Corrigé 5.

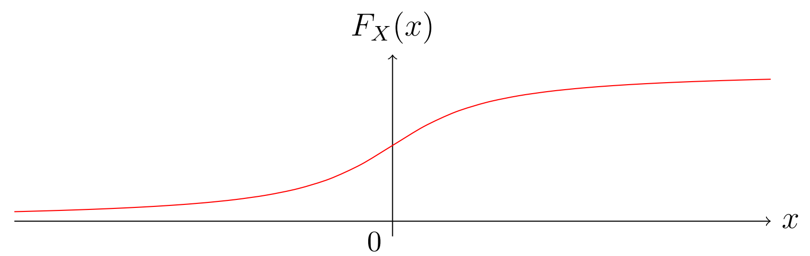
1. On cherche c telle que l'intégrale de la densité sur $\mathbb{R}$ soit égale à 1, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{c}{1+x^2} dx = 1 \iff c\left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1 \iff c\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 \iff c = \frac{1}{\pi}.$$



2. La fonction de répartition de X est définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}.$$



3.
$$\mathbb{P}(X > \sqrt{3}) = 1 - F_X(\sqrt{3}) = 1 - \left(\frac{1}{\pi}\arctan(\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{6}.$$

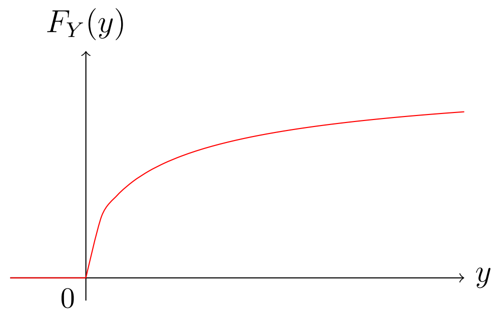
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_{-\infty}^{+\infty},$$

donc l'espérance de X n'existe pas.

4. Comme $Y = X^2$, on a $F_Y(y) = 0$ pour $y \leq 0$. Pour $y > 0$, on a

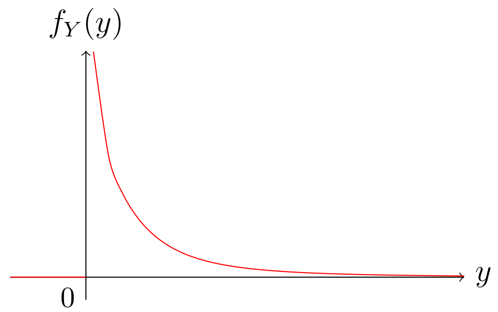
$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(\sqrt{y}) - \arctan(-\sqrt{y})\right) = \frac{2}{\pi}\arctan(\sqrt{y}),$$

car $x \mapsto \arctan(x)$ est une fonction impaire.



En utilisant la formule de la dérivée d'une fonction composée, soit $(g(h(y)))' = h'(y)\times g'(h(y))$, on en déduit, en posant $g(y) = \arctan(y)$ et $h(y) = \sqrt{y}$, que

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leq 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{1}{1+y} & \text{si} \quad y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leq 0 \\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{y}(1+y)} & \text{si} \quad y > 0 \end{cases}.$$



5. On a

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_0^{+\infty} \frac{y}{\pi\sqrt{y}(1+y)}dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{y}}{1+y}dy.$$

On pose $y = x^2$ et on se ramène à la densité de X,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{\pi(1+x^2)}dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\pi(1+x^2)}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left[x-\arctan(x)\right]_0^{+\infty} = +\infty. \end{aligned}$$

Cette intégrale ne converge pas, donc l'espérance de Y n'existe pas (ainsi que le moment d'ordre 2 de X).

Déterminons $h \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(Y < h) = 1/3$. Or, on a

$$\mathbb{P}(Y < h) = F_Y(h) = \mathbb{P}(X^2 < h) = \mathbb{P}(-\sqrt{h} < X < \sqrt{h}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

En utilisant F_Y, on obtient

$$F_Y(h) = 1/3 \iff \frac{2}{\pi}\arctan(\sqrt{y}) = 1/3 \iff \arctan(\sqrt{y}) = \frac{\pi}{6} \iff \sqrt{y} = 1/\sqrt{3} \iff y = 1/3.$$

Exercice 6. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues de densité jointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k \cdot xy & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la constante k.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé 6.

1. Pour déterminer la constante k, on doit intégrer sur les ensemble des x et y où la fonction est définie et l'égaler à 1, soit

$$\int_0^2 \int_0^3 k\,xy\,dxdy = k \int_0^2 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_0^3 dx = k \int_0^2 \frac{9}{2} x dx = k\frac{9}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 9k = 1 \Longleftrightarrow k = \frac{1}{9}.$$

2. Les lois marginales sont données par

$$f_X(x) = \frac{1}{9}\int_0^3 xydy = \begin{cases} \frac{1}{9}\left[x\frac{y^2}{2}\right]_0^3 = \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et

$$f_Y(y) = \frac{1}{9}\int_0^2 xydx = \begin{cases} \frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_0^2 = \frac{2}{9}y & \text{si } 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. Comme X et Y ont même loi, on a

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3},$$

et

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{9}\int_0^3 y^2 dy = \frac{2}{9}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 2.$$

Or $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{xy}{9} \neq f_X(x)f_Y(y) = \dfrac{1}{9}xy$, donc les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 7. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues de densité jointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot (x^2 + y^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la constante c.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Déterminer les lois conditionnelles.

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer leur covariance.

Corrigé 7. 1. Pour déterminer la constante c, on doit intégrer sur les ensemble des x et y où la fonction est définie et l'égaler à 1, soit

$$\int_0^1 \int_0^1 c(x^2+y^2)dxdy = c\int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx = c\int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx = c\left[\frac{x^3+1}{3}\right]_0^1 \Longleftrightarrow c = \frac{3}{2}.$$

2. Les lois marginales sont données par

$$f_X(x) = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2+y^2)dy = \begin{cases} \frac{3}{2}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et de façon analogue

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2} & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. On a pour $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le 1$,

$$f_X(x|Y=y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x^2+y^2}{3y^2/2+1/2}, \quad f_Y(y|X=x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x^2+y^2}{3x^2/2+1/2}.$$

4. Comme, pour $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le 1$,

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{2}(x^2+y^2) \neq f_X(x)f_Y(y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{(3y^2/2+1/2)(3x^2/2+1/2)},$$

donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Comme X et Y ont même loi, on a

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}\int_0^1 x(3x^2+1)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{5}{8}.$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1 xy(x^2+y^2)dxdy\frac{3}{2}\int_0^1\left(\int_0^1 (x^3y+xy^3)dy\right)dx = \\ &= \frac{3}{2}\int_0^1 \left[x^3\frac{y^2}{2}+x\frac{y^4}{4})\right]_0^1 dx = \frac{3}{2}\int_0^1\left(\frac{x^3}{2}+\frac{x}{4})\right)dx \\ &= \frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{8}+\frac{x^2}{8})\right]_0^1 = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \dfrac{3}{8} - \left(\dfrac{5}{8}\right)^2 = -\dfrac{1}{64}.$

Exercice 8. On suppose que Z suit une loi $\mathcal{N}(0;1)$. Évaluer

$$\mathbb{P}(Z<0,5),\quad \mathbb{P}(-0,5<Z<0,5),\quad \mathbb{P}(Z>2),\quad \mathbb{P}(Z<-3),$$

$$\mathbb{P}(-3<Z<-2),\quad \mathbb{P}(-2<Z<-1),\quad \mathbb{P}(-1<Z<0),\quad \mathbb{P}(0<Z<1),$$
$$\mathbb{P}(1<Z<2),\quad \mathbb{P}(2<Z<3),\quad \mathbb{P}(N>3).$$

Corrigé 8. On utilise la table de la loi normale centrée réduite et on note Φ sa fonction de répartition.
$\mathbb{P}(Z<0,5)=\Phi(0,5)=0,6915$; $\mathbb{P}(-0,5<Z<0,5)=2\Phi(0,5)-1$; $\mathbb{P}(Z>2)=1-\Phi(2)=0,0228$; $\mathbb{P}(Z<-3)=\mathbb{P}(Z>3)=1-\Phi(3)=0,0014$; $\mathbb{P}(-3<Z<-2)=\Phi(-2)-\Phi(-3)=\Phi(3)-\Phi(2)=\mathbb{P}(2<Z<3)=0,0215$; $\mathbb{P}(-2<Z<-1)=\mathbb{P}(1<Z<2)=\Phi(2)-\phi(1)=0,1359$; $\mathbb{P}(0<Z<1)=\Phi(1)-\Phi(0)=0,3413$.

Exercice 9. On considère des v.a. X, de loi $\mathcal{N}(20;7)$, et Y de loi $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$

1. Donner p,q,r tels que $\mathbb{P}(X\leq 15)=p$, $\mathbb{P}(X\geq 30)=q$ et $\mathbb{P}(15\leq X\leq 30)=r$.
2. Trouver u,v,w avec $\mathbb{P}[X\leq u]=0,75$, $\mathbb{P}(X\leq v)=0,1$ et $\mathbb{P}(1\leq X\leq w)=0,6$.
3. Donner m si $\sigma^2=2$ et $\mathbb{P}(Y\leq 8)=0,6915$.
4. Donner m et σ^2 si $\mathbb{P}(Y\leq 8)=0,5$ et $\mathbb{P}(Y\geq 9)=0,0786$.

Corrigé 9.

1. $$\mathbb{P}(X\leq 15)=\Phi(-5/\sqrt{7})=1-\Phi(5/\sqrt{7})=0,0294,$$
$$\mathbb{P}(X\geq 30)=1-\mathbb{P}(X<30)=1-\Phi(10/\sqrt{7})\approx 0,$$
$$\mathbb{P}(15\leq X\leq 30)=\mathbb{P}(X\leq 30)-\mathbb{P}(X\leq 15)=1-0,0294=0,9706.$$

2. $$\mathbb{P}(X\leq u)=0,75\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{u-20}{\sqrt{7}}\right)=0,75\Leftrightarrow u=\sqrt{7}\Phi^{-1}(0,75)+20=21,785882.$$
$$\mathbb{P}(X\leq v)=0,1\Leftrightarrow v=\sqrt{7}\Phi^{-1}(0,1)+20=-\sqrt{7}\Phi^{-1}(0,9)+20=16,613438.$$
$$\mathbb{P}(1\leq X\leq w)=0,6\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{w-20}{\sqrt{7}}\right)-\Phi\left(\frac{-19}{\sqrt{7}}\right)=0,6\Leftrightarrow w=\sqrt{7}\Phi^{-1}(0,6)+20=20,674667.$$

3. On cherche m tel que
$$\mathbb{P}(Y\leq 8)=0,69146\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{8-m}{\sqrt{2}}\right)=0,69146\Leftrightarrow m=8-\sqrt{2}\Phi^{-1}(0,69146)=7,2928932.$$

4. Comme $\mathbb{P}(Y\leq 8)=0,5$, on a que $m=8$ par symétrie de la densité gaussienne par rapport à sa moyenne. On cherche alors σ tel que
$$\mathbb{P}(Y\geq 9)=0,0764\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)=0,9236\Leftrightarrow \sigma=\frac{1}{\Phi^{-1}(0,9236)}=0,6993.$$

Exercice 10. Les notes d'un examen suivent une loi normale $\mathcal{N}(8,5;4)$.

1. Quelle est la proportion d'étudiants ayant la moyenne.
2. On modifie les notes par $Y = aX + b$. Déterminer a, b pour que 50% des étudiants aient la moyenne et 75% aient une note supérieure à 8.
3. Comment garder la même moyenne et avoir 80% d'étudiants entre 5 et 15 ?

Corrigé 10. 1. On cherche la probabilité suivante

$$\mathbb{P}(X \geq 10) = 1 - \mathbb{P}(X < 10) = 1 - \Phi(0,75) \approx 0,2266.$$

2. On a $\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b = 8,5a + b$ et $\mathbb{V}(Y) = a^2\mathbb{V}(X) =' a^2$. On cherche a et b tels que

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Y \geq 10) = 0,5 \\ \mathbb{P}(Y \geq 8) = 0,75 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbb{P}(aX + b \geq 10) = 0,5 \\ \mathbb{P}(aX + b \geq 8) = 0,75 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - \Phi\left(\dfrac{10 - 8,5a - b}{2a}\right) = 0,5 \\ 1 - \Phi\left(\dfrac{8 - 8,5a - b}{2a}\right) = 0,75 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{10 - 8,5a - b}{2a}\right) = 0,5 \\ \Phi\left(\dfrac{8 - 8,5a - b}{2a}\right) = 0,25 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{10 - 8,5a - b}{2a} = \Phi^{-1}(0,5) = 0 \\ \dfrac{8 - 8,5a - b}{2a} = \Phi^{-1}(0,25) = -\Phi^{-1}(0,75) = -0,675 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 10 - 8,5a \\ 1/a = 0,675 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -2,5885 \\ a = 1,481 \end{cases}$$

3. La moyenne de Y est de 10. On cherche alors à modifier sa variance pour avoir

$$\mathbb{P}(5 \leq Y \leq 15) = 0,8 \iff 2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1 = 0,8 \iff \frac{5}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,9) = 1,28$$

$$\iff \sigma = \frac{5}{1,28} = 3,90625.$$

Exercice 11. Face au danger de transmission de la dengue, un fabricant d'insecticide garantie que son produit tue les moustiques en moins de 4 minutes avec une probabilité de 95%. La durée de vie d'un moustique traité par l'insecticide est supposée être une variable aléatoire (notée X) de loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$, $\mu > 0$.

1. Rappeler l'expression de la densité de X ainsi que sa moyenne et sa variance.
2. En déduire la fonction de répartition de X, ainsi que $\mathbb{P}(X > t)$ pour $t \geq 0$.
3. Quelle est la plus petite valeur de μ telle que l'affirmation du fabricant soit vraie ?
4. Dans ce cas, après combien de temps 99% des moustiques traités sont éliminés ?

Corrigé 11. 1. La densité de X s'écrit

$$\forall x > 0, \quad f_X(x) = \mu e^{-\mu x},$$

avec $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\mu}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\mu^2}$.

2. Pour $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a

$$F_X(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu t} dt = 1 - e^{-\mu t}.$$

On en déduit la fonction de survie $\overline{F}_X(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(X) = e^{-\mu x}$ pour $x \geq 0$.

3. On cherche μ tel que

$$\mathbb{P}(X \leq 4) = 0,95 \Longleftrightarrow \mathbb{P}(X > 4) = e^{-4\mu} = 0,05 \Longleftrightarrow \mu = \frac{\ln(0,05)}{-4} \approx 0,748933.$$

4. On cherche le temps t tel que

$$\mathbb{P}(X \leq t) = 0,99 \Longleftrightarrow \mathbb{P}(X > t) = e^{-\mu t} = 0,01 \Longleftrightarrow t = \frac{\ln(0,01)}{-\mu} = \frac{4\ln(0,01)}{\ln(0,05)} \approx 6,148974.$$

Exercice 12. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles admettant la densité de probabilité suivante

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2 - 2\rho xy + y^2\right)\right), \quad \rho \in [0, 1[.$$

1. Vérifier que $f_{X,Y}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ et trouver les densités marginales de X et Y.
2. À quelle condition les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On pose $\rho = 0$, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $\Theta \in [0, 2\pi[$ définie par

$$\cos\Theta = \frac{X}{R} \quad \text{et} \quad \sin\Theta = \frac{Y}{R}.$$

Déterminer la densité du couple (R, Θ).

4. En déduire les densités marginales de R et de Θ.

Corrigé 12. 1. $f_{X,Y}$ est définie et positive sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions que son intégrale sur $\mathbb{R}^2$ fait 1. Pour ce faire, nous allons d'abord intégrer $f_{X,Y}$ par rapport à x, puis par rapport à y. Cela nous permettra par la même occasion d'en déduire les densités marginales. Remarquons également que la densité est symétrique par rapport aux variables : $f_{X,Y}(x, y) = f_{X,Y}(y, x)$. Cela implique que les densités marginales seront les mêmes pour X et Y. Intégrons donc $f_{X,Y}$ par rapport à x.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2 - 2\rho xy + y^2\right)\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((x-\rho y)^2 + (1-\rho^2)y^2\right)\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx.
\end{aligned}$$

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\dfrac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right)$ est la densité d'une loi normale de moyenne ρy et de variance $1-\rho^2$, son intégrale par rapport à x fait donc 1. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

et on en déduit que $\displaystyle\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$, puisque $y \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{y^2}{2}\right)$ est la densité de la loi normale centrée réduite.

On a donc montrer que $f_{X,Y}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ et les densités marginales de X et de Y sont toutes deux égales à celle de la loi normale centrée réduite : $X \sim \mathcal{N}(0;1)$, $Y \sim \mathcal{N}(0;1)$.

2. X et Y sont indépendantes si et seulement si la densité jointe $f_{X,Y}$ est le produit des densités marginales de X et de Y. Or

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right),$$

donc X et Y sont indépendantes si $\rho = 0$.

3. R est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et Θ dans $[0,2\pi[$. Comme $\rho = 0$, la densité jointe de X et Y est

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right).$$

Nous allons donc faire un changement de variables pour passer de (X,Y) à (R,Θ) : il s'agit du passage de coordonnées cartésiennes à coordonnées polaires. La transformation Φ est alors définie par

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta) \end{array}$$

et sa matrice jacobienne est

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \det J_\Phi = r \geq 0.$$

Ainsi

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \theta \in [0,2\pi[, \quad f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_{X,Y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\det J_\Phi| = \frac{1}{2\pi} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right).$$

4. La densité marginale de R vaut

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R,\Theta}(r,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) d\theta = r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right),$$

donc R suit une loi de Rayleigh de paramètre 1, et celle de Θ vaut

$$\forall \theta \in [0,2\pi[, \quad f_\Theta(\theta) = \int_{\mathbb{R}_+} f_{R,\Theta}(r,\theta)dr = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{2\pi} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr = \frac{1}{2\pi},$$

donc $\Theta \sim \mathcal{U}[0,2\pi]$.