

Cours Fourier et Ondelette

Quentin Rible

Table des matières

1	Fourier	5
1.1	Séries de Fourier	5
1.1.1	Base de Fourier	6
1.1.2	Régularité , décroissance et autres propriétés	8
1.2	Transformée de Fourier	9
1.3	Trnsformée de Fourier Discrète (TFD) et Fast Fourier Transform (FFT)	11
1.3.1	Définition et propriété	11
1.3.2	Filtrage de signaux numériques	12
2	Ondelette	15
2.1	Ondelette	15
2.1.1	Base de Haar	15
2.1.2	Propriété de la transformée	19
2.1.3	Analyse multirésolution	20
2.2	Aspects algorithmiques	22

Introduction

Le but de ce cours est de fournir des méthodes pour la modélisation et l'échantillonnage de signaux afin de savoir quelles informations conserver et comment reconstruire le signal par la suite.

Le traitement du signal développe et étudie les techniques de traitement (filtrage, amplification...), d'analyse et d'interprétation des signaux. Les signaux à traiter sont de provenance diverses, mais la plupart sont des signaux électriques ou devenus électriques à l'aide de capteurs et transducteurs (microphones, rétines, senseurs thermiques, optiques, de pression, de position, de vitesse, d'accélération et en général de toutes les grandeurs physiques et chimiques).

On distingue essentiellement les signaux analogiques qui sont produits par divers capteurs, amplificateurs, convertisseurs numérique-analogique ; les signaux numériques issus d'ordinateurs, de terminaux, de la lecture d'un support numérique ou d'une numérisation par un convertisseur analogique-numérique. Le traitement peut être fait, sans numériser les signaux, par des circuits électroniques analogiques ou aussi des systèmes optiques (traitement du signal optique). Il est de plus en plus souvent réalisé par traitement numérique du signal, à l'aide d'ordinateurs, de microprocesseurs embarqués, de microprocesseurs spécialisés nommés DSP, de circuits reconfigurables (FPGA) ou de composants numériques dédiés (ASIC). Il existe plusieurs branches particulières du traitement du signal, en fonction de la nature des signaux considérés. En particulier :

- Traitement de la parole (ou plus généralement du son) - pour l'analyse, la compression et la reconnaissance de la parole
- Traitement d'images - pour l'analyse, la restauration et la compression d'images fixes
- Traitement de la vidéo - pour l'analyse et la compression de séquences vidéo
- Traitement de signaux en dimensions supérieures, ou "mixtes", tels que les signaux produits par les nouvelles technologies en biologie ou neurosciences par exemple. Le traitement du signal peut avoir différentes finalités :
 - la détection d'un signal
 - l'estimation de grandeurs à mesurer sur un signal
 - le codage, la compression du signal pour son stockage et sa transmission

- l'amélioration de sa qualité (restauration) selon des critères physiologiques (pour l'écoute et la visualisation). Le traitement d'un signal effectué dépend du but poursuivi. En particulier, les notions de signal et de bruit sont subjectives, elles dépendent de ce qui intéresse l'utilisateur. On utilise différentes mesures représentatives de la qualité d'un signal et de l'information contenue :
- Le rapport signal sur bruit, notion utilisée très fréquemment mais équivoque puisque tout dépend de ce qui est considéré comme signal et comme bruit.
- Le nombre de bits effectifs Effective Number of Bits (ENOB) qui est une mesure de la qualité de conversion analogique-numérique.
- L'information de Fisher, utile en particulier en estimation de paramètres. C'est l'information relative à un paramètre ou à un couple de paramètres (matrice d'information de Fisher).
- L'entropie, grandeur issue de la physique statistique et de la théorie de l'information (travaux de Shannon), utilisée dans les opérations de codage. Elle est une mesure de l'information "intrinsèque" du signal.

Parce qu'elles s'appliquent à toutes les étapes d'une chaîne d'acquisition, d'analyse, de transfert et de restitution des données, les techniques du traitement du signal trouvent des applications dans pratiquement tous les domaines de la technologie :

- dans les télécommunications : que ce soit dans le domaine de la téléphonie ou dans le transfert de données numériques terrestre ou via satellite, la compression des données est primordiale pour exploiter au mieux la bande passante disponible, et minimiser les pertes. La suppression d'échos est un autre domaine d'application.
- en audio : on cherche à améliorer les techniques d'enregistrement et de compression pour obtenir la plus grande qualité sonore possible. Les techniques de correction d'écho permettent de réduire les effets de réflexions acoustiques dans la pièce. Le traitement du son s'est largement amélioré grâce aux ordinateurs. Toutefois, certains musiciens parlent davantage d'un son de nature différente que d'une simple amélioration qualitative (de même que le CD ne "sonne" pas comme le vinyl, et que certains groupes, par exemple Genesis, ont particulièrement profité du "nouveau son" offert par le nouveau support). La synthèse sonore permet en outre de créer des sons artificiels ou de recréer les sons d'instruments naturels. Elle a été à l'origine de nombreux bouleversements en musique.
- l'analyse des échos permet d'obtenir des informations sur le milieu sur lequel les ondes se sont réfléchies. Cette technique est exploitée dans le domaine de l'imagerie radar ou sonar. En géophysique, en analysant les réflexions d'ondes acoustiques, on peut déterminer l'épaisseur et la nature des strates du sous-sol. Cette technique est utilisée dans le domaine de la prospection minière et dans la prédiction des tremblements de terre.
- en imagerie : on trouve des applications dans le domaine médical (reconstruction tomographique, imagerie par résonance magnétique - IRM), dans le spatial (traitement de photos satellite ou d'images radar). Ce domaine inclut aussi les techniques de reconnaissance de formes et de compression.

- le traitement de séquences vidéo concerne la compression, la restauration, la réalisation d'effets spéciaux, et l'extraction de descripteurs (reconnaissance de formes et textures, suivi de mouvements, caractérisation etc.) afin de produire des annotations automatiques dans une perspective de bases de données (recherche par le contenu).

L'objectif de ce cours est de donner une introduction à un certain nombre de problèmes du traitement du signal, en insistant sur les aspects mathématiques. Les trois domaines des mathématiques auxquels fera principalement appel ce cours sont l'analyse harmonique (analyse de Fourier), l'analyse fonctionnelle, et les probabilités. On s'intéressera en particulier à la modélisation mathématique des signaux, notamment les modèles déterministes (fonctions ou suites) et les modèles de signaux aléatoires (processus stochastiques). Les points essentiels traités dans ce cours seront :

- La représentation "spectrale" des signaux.
- Le filtrage des signaux, dans sa version numérique et sa version analogique.
- La conversion "analogique \rightarrow numérique", notamment le théorème d'échantillonnage et les opérations préalables à l'échantillonnage.
- Les modèles de signaux aléatoires stationnaires en moyenne d'ordre deux, et les opérations correspondantes. Un certain nombre d'applications spécifiques seront traitées plus en détails, prises par exemple parmi la liste suivante
- la détection optimale de signaux connus plongés dans un bruit Gaussien coloré,
- la compression des sons et/ou des images, avec par exemple l'application aux codeurs MP3 pour les sons, ou JPEG2000 pour les images.
- l'analyse temps-fréquence et l'analyse par ondelettes,
- le codage de la parole (par exemple avec un codeur par prédiction linéaire),
- les codes correcteurs d'erreur
- La séparation aveugle de sources,
- ...

Certains des aspects développés dans le cours seront également étudiés dans le cadre de travaux pratiques sous MATLAB.

Chapitre 1

Fourier

1.1 Séries de Fourier

Soit a, b deux réels et $T = b - a \in \mathbb{R}$. On considère

$$L^2(0, T) = \{f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^2} < +\infty\}$$

avec

$$\|f\|_{L^2} = \left(\frac{1}{T} \int_{[0, T]} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$L^2(0, T)$ peut être muni d'un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{[0, T]} f(x) \overline{g(x)} dx$$

de sorte que $\langle f, f \rangle = \|f\|_{L^2}^2$ et $L^2(0, T)$ est un espace hilbertien.

Rappel 1.1.1.

Un espace hilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la convergence associée. Ainsi ici, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[0, T]} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Un espace complet est un espace dans lequel toute suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction f de l'espace.

Les séries de Fourier ont pour but d'étudier les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -périodiques afin de les décomposer en briques simples sur une base dans l'optique de lire les propriétés de f sur les "coordonnées" de f dans la base.

On identifie les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ T -périodiques aux fonctions de $L^2(0, T)$ ou $L^2(-T/2, T/2)$ selon le cas.

Notation.

On écrira toujours

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \quad \text{ou} \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

avec

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_a^b f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx, \end{aligned} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} dx.$$

On notera souvent $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$ pour distinguer les coefficients quand il y a plusieurs fonctions.

Exercice 1.1.2. Vérifier que pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}). \end{aligned}$$

Exercice 1.1.3. Montrer que $(f \text{ paire}) \Leftrightarrow (\forall n, b_n = 0)$.

Montrer que $(f \text{ impaire}) \Leftrightarrow (\forall n, a_n = 0)$.

Exercice 1.1.4. Démontrer que $c_n(f) + c_n(g) = c_n(f + g)$.

Notation.

Les sommes partielles sont notées

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \quad \text{ou} \quad f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

1.1.1 Base de Fourier

Théorème 1.1.5. (Fourier)

Les familles $\left(\sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}n\cdot\right), \sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}n\cdot\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\exp\left(i\frac{2\pi}{T}n\cdot\right)\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ forment des bases orthonormales de $L^2(0, T)$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)^2 dx &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)^2 dx = 1, \\ \text{pour } n, m \in \mathbb{N} \text{ avec } n \neq m, \frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}mx\right) dx &= 0 \end{aligned}$$

et également

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}nx} e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} dx = 1,$$

pour $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq m$, $\frac{1}{T} \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}nx} e^{-i\frac{2\pi}{T}mx} dx = 0$.

Théorème 1.1.6. (Parseval)

Si $f \stackrel{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$, alors

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \\ &= |a_0|^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \right). \end{aligned}$$

Question : Est-ce que l'hypothèse $f \in L^2(0, T)$ est suffisante pour que l'on puisse décomposer f sur l'une des deux familles, et écrire pour tout $x \in [0, T]$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \quad \text{ou} \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \quad ?$$

Exemple 1.1.7. Soit $f(x) = x$ sur $] -\pi, \pi]$ et f est 2π -périodique.

f est impaire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = 0$. Puis

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\pi \frac{\cos(n\pi)}{n} - \pi \frac{\cos(-n\pi)}{n} \right) + \frac{1}{n\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} - \frac{\cos(-n\pi)}{n} \right) + \frac{1}{n^2\pi} (\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)) \\ &= \left(-\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \right) + \frac{1}{n^2\pi} (0 - 0) \\ &= 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

On pourrait croire que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$ mais on a $f(\pi) = \pi \neq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi) = 0$. C'est en fait beaucoup plus général que ça.

Théorème 1.1.8. (Du Bois Reymond, 1873)

Il existe une fonction continue f , 2π -périodique, telle que les sommes partielles $f_N(x)$ de la "série de Fourier" de f ne convergent pas vers $f(x)$ en certains points x .

Il y a plusieurs réponses à apporter :

- $f \in \mathcal{C}^1$ par morceaux
- f absolument continue
- pourrait-on utiliser d'autre base ? → **ondelettes** à voir dans le chapitre 2.

1.1.2 Régularité , décroissance et autres propriétés

Proposition 1.1.9. (Lemme Riemann-Lebesgue)

Si $f \in L^2(0, T)$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$

Remarque 1.1.10. On a la décroissance en p des $L^p(0, T)$, c'est-à-dire $L^\infty(0, T) \subset \dots \subset L^2(0, T) \subset L^1(0, T)$.

Définition 1.1.11.

Soient $f, g \in L^1(0, 2\pi)$. La convolution entre deux fonctions f et g est définie par

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Proposition 1.1.12.

Si $f, g \in L^1(0, 2\pi)$ alors $f * g \in L^1(0, 2\pi)$.

Si $f \in L^1(0, 2\pi)$ et $g \in L^2(0, 2\pi)$ alors $f * g \in L^2(0, 2\pi)$.

Si $f, g \in L^2(0, 2\pi)$ alors $f * g \in L^\infty(0, 2\pi)$.

Propriété 1.1.13.

Nous avons les propriétés suivantes :

(i) Si $f \in C_{\text{per}}^k(0, 2\pi)$, alors on a $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.

(ii) Si $f, g \in L^1(0, 2\pi)$, alors $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

Proposition 1.1.14.

Appelons $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ le **noyau de Dirichlet**.

Alors pour tout $f \in L^1(0, 2\pi)$,

$$f_N(x) = f * D_N(x).$$

Proposition 1.1.15.

Si $f, g \in L^1(0, 2\pi)$ et si $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f(x) = g(x)$ pour presque tout point $x \in [0, 2\pi]$.

Théorème 1.1.16. (Dirichlet)

Si f est \mathcal{C}^1 par morceaux, alors pour tout point $x \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{\lim_{t \rightarrow x^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)}{2} : \text{la régularisée de } f.$$

Phénomènes de Gibbs : aux discontinuités, la limite ponctuelle des approximations de Fourier ne tend pas vers la bonne limite

IMAGE

Plus précisément si $f(x_0^+) - f(x_0^-) = \delta > 0$ alors

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N f\left(x_0 + \frac{T}{2N}\right) = f(x_0^+) + \delta C \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N f\left(x_0 - \frac{T}{2N}\right) = f(x_0^-) - \delta C \end{cases}$$

où $C = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt - \frac{1}{2} \approx 0,0895$.

1.2 Transformée de Fourier

On souhaite étendre la théorie des séries de Fourier quand la période T tend vers $+\infty$ donc quand les fonctions ne sont plus périodiques. Pour cela, la transformation de Fourier est un bon outil. Elle permet de transformer certaines équations comme des équations aux dérivées partielles (EDP) en équations plus simples à résoudre et apparaît naturellement en probabilités avec la fonction caractéristique.

Mais elle permet aussi une visualisation et interprétation fréquentielle d'un signal. Certains phénomènes physique agissent sur la transformée de Fourier (lumière, électronique). De plus, elle se calcule bien informatiquement par la transformée de Fourier rapide (FFT).

Définition 1.2.1.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. la formule de la transformée de Fourier d'une fonction f est définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Il existe d'autres conventions équivalentes

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad \text{ou} \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

On a $\widehat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$.

Propriété 1.2.2.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. La transformation de Fourier possède les propriétés suivantes :

- (i) On a $\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$;
- (ii) \widehat{f} est continue et tend vers 0 à l'infini ;
- (iii) $\widehat{f(\cdot - \lambda)}(\xi) = e^{-i\xi\lambda} \widehat{f}(\xi)$;
- (iv) $\widehat{f(\lambda \cdot)}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$;
- (v) $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi)$;

(vi) $f \rightarrow \widehat{f}$ est linéaire, donc on a $\widehat{f + \lambda g} = \widehat{f} + \lambda \widehat{g}$;

(vii) $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$

Théorème 1.2.3. (Formule de sommatoire de Poisson)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\max(|f|, |f'|) \leq \frac{C}{1+|x|^{1+\epsilon}}$.

Alors la fonction

$$\bar{f}(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$$

appartient à $L^1(0, 2\pi)$, est 2π -périodique avec $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) dx$. De plus, $c_n(\bar{f}) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(n)$ et ainsi on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}.$$

Démonstration. (Partielle)

On a $\bar{f} \in \mathcal{C}^1$ et 2π -périodique, donc par le théorème de Dirichlet (théorème 1.1.16), on a $\bar{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\bar{f}) e^{inx}$.

Puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_m(\bar{f}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) e^{-imx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) e^{-imx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x + 2\pi n) e^{-imx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(u) e^{-im(u-2\pi n)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(u) e^{-imu} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-imu} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(m) \end{aligned}$$

puisque $e^{2i\pi mn} = 1$. □

Théorème 1.2.4. (Inversion de Fourier)

Si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

On peut donc reconstruire f à partir de \widehat{f} .

Théorème 1.2.5. (Formule de Plancherel)

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

Mais il vient de la physique qu'on ne peut pas mesurer simultanément avec une précision infinie la vitesse et la position d'une particule."

Définition 1.2.6.

La dispersion d'une fonction f est la quantité

$$D_f := \frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx}.$$

C'est un analogue de la variance "normalisée" d'une variable aléatoire.

Théorème 1.2.7. (Heisenberg)

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, Alors

$$D_f \cdot D_{\hat{f}} \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

De plus, si l'on souhaite reconstruire f à partir d'échantillons mesurés $f(n)$, on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 1.2.8. (Shanon)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ a un support compact inclus dans $[-T, T]$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2T}\right) \operatorname{sinc}\left(\pi T \left(x - \frac{n}{2T}\right)\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2T}\right) \frac{\sin\left(\pi T \left(x - \frac{n}{2T}\right)\right)}{\pi T \left(x - \frac{n}{2T}\right)}. \end{aligned}$$

1.3 Transformée de Fourier Discrète (TFD) et Fast Fourier Transform (FFT)

1.3.1 Définition et propriété

Voir DM

Pour utiliser la FFT dans python, elle existe dans `numpy`.

```
1 import numpy as np
2 # Pour la transformée de Fourier rapide d'un signal 1d et son inverse
3 Signal_FFT_1d = numpy.fft.fft(Signal_1d)
4 Signal_1d = numpy.fft.ifft(Signal_FFT_1d)
5
```

```

6  # Pour la transformée de Fourier rapide d'un signal 2d et son inverse
7  Signal_FFT_2d = numpy.fft.fft(Signal_2d)
8  Signal_2d = numpy.fft.ifft(Signal_FFT_2d)
9
10 # Pour la transformée de Fourier rapide d'un signal 1d REEL et son inverse
11 Signal_rFFT_1d = numpy.fft.rfft(Signal_1d)
12 Signal_1d = numpy.fft.irfft(Signal_rFFT_1d)

```

1.3.2 Filtrage de signaux numériques

On appelle signal numérique (ou digital) une suite $s = \{s_n\}_n$ de nombres réels. Les opérations de filtrage sont les opérations de base du traitement du signal. Le filtrage est utilisée pour modifier le “contenu fréquentiel” des signaux.

Définition 1.3.1.

Un filtre numérique est un opérateur linéaire notée K_h , associant à un signal numérique s , un autre signal $K_h s$, appelé signal filtré, de la forme

$$(K_h s)_n = h * s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k s_{n-k},$$

pour tout n tel que la série soit convergente. La suite $h = \{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est appelé réponse impulsionnelle du filtre.

Le filtre est dit causal si $h_n = 0$ pour tout $n < 0$. Il est dit stable si $K_h f$ est borné pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$ (c'est-à-dire si $K_h f$ est continu de $l^\infty(\mathbb{Z})$ sur $l^\infty(\mathbb{Z})$). il est réalisable s'il est causal et stable.

Il est immédiat qu'un tel opérateur commute avec les translations entières : pour $s \in l^2(\mathbb{Z})$, si on note s' une translatée :

$$s'_n = s_{n-n_0},$$

il vient que

$$(K_h s')_n = (K_h s)_{n-n_0}$$

Remarque 1.3.2. Si $h \in l^1(\mathbb{Z})$, le filtre K_h est automatiquement stable et continu de $l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$.

Propriété 1.3.3.

La TFD simplifie les opérations de filtrage numérique puisque si $h \in l^1(\mathbb{Z})$,

$$\widehat{K_h s}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m s_{n-m} e^{-in\omega} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m e^{-im\omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k e^{-ik\omega} = \widehat{h}(\omega) \widehat{s}(\omega).$$

Définition 1.3.4.

La fonction $m = \widehat{h}$ est appelée la fonction de transfert du filtre K_h .

L'exemple le plus simple est celui du filtre *passse-bas idéal*, qui force à zéro toutes les fréquences supérieures (en valeur absolue) à une certaine fréquence de coupure $\omega_0 < \pi$. Un tel filtre est défini par sa fonction de transfert

$$m(\omega) = \mathbb{1}_{[-\omega_0, \omega_0]}(\omega).$$

Après TFD inverse, on obtient la réponse impulsionnelle suivante

$$h_n = \frac{\omega_0}{\pi} \frac{\sin(n\omega_0)}{n\omega_0}.$$

Néanmoins, la réponse impulsionnelle de ce filtre n'est pas dans $l^1(\mathbb{Z})$. Mais ce filtre n'est pas *réalisable* et ne peut pas être utilisé de façon exacte en pratique car on doit tronquer les sommes infinies.

Les exemples les plus simples de filtres sont les *filtres à réponses impulsionnelle finie* (filtres FIR) c'est-à-dire tels que la suite h soit de support fini : $h_n \neq 0$ si et seulement si $n \in \{n_1, \dots, n_p\}$. la fonction de transfert est alors un polynôme trigonométrique

$$m(\omega) = \sum_{i=1}^p h_{n_i} e^{-in_i\omega}.$$

L'exemple le plus simple est le filtre passe-bas élémentaire qui consiste simplement à effectuer des "moyennes" locales du signal d'entrée. Il est défini par $h_0 = h_1 = 1/2$ et $h_k = 0$ sinon. La fonction de transfert de ce filtre est $\omega \mapsto e^{-i\omega/2} \cos(\omega/2)$ et ainsi $|m(\omega)|^2 = \cos^2(\omega)$. Multiplier la transformée de Fourier d'un signal par une telle fonction revient à l'atténuer au voisinage de $\omega = \pm\pi$ tout en la préservant au voisinage de $\omega = 0$.

De même, le choix $h_0 = -h_1 = 1/2$ et $h_k = 0$ sinon, donne un filtre de fonction de transfert $\omega \mapsto e^{-i\omega/2} \sin(\omega/2)$ et $|m(\omega)|^2 = \sin^2(\omega)$ ce qui donne un filtre passe-haut.

Les filtres FIR ne sont en général pas suffisants en pratique et nécessite l'utilisation de *filtres à réponse impulsionnelle infinie* (filtres IIR) mais comme il est impossible d'implémenter des convolutions discrètes de longueur infinie, on a recours à un "filtrage récursif".

On associe à un signal d'entrée s , la suite de sortie s' définie par

$$s'_n = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{m=0}^M \beta_m s_{n-m} - \sum_{m=0}^N \alpha_m s'_{n-m} \right)$$

avec $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$.

On peut alors mettre la relation sous la forme

$$\sum_{m=0}^N \alpha_m s'_{n-m} = \sum_{m=0}^M \beta_m s_{n-m}$$

qui avec une transformation de Fourier discrète donne une relation du type

$$\left(\sum_{m=0}^N \alpha_m e^{-im\omega} \right) \hat{s}'(\omega) = \left(\sum_{m=0}^M \beta_m e^{-im\omega} \right) \hat{s}(\omega).$$

de sorte que la fonction de transfert m du filtre correspondant prend la forme d'une fraction rationnelle de deux polynômes trigonométriques

$$m(\omega) = \frac{\sum_{m=0}^M \beta_m e^{-im\omega}}{\sum_{m=0}^N \alpha_m e^{-im\omega}} = H(e^{i\omega}).$$

(De manière très synthétique, les fréquences au numérateur vont atténuer ces fréquences du signal et celle du dénominateur vont être amplifiées.)

Chapitre 2

Ondelette

Rappel 2.0.1.

$L^2(\mathbb{R})$ peut être muni d'un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

2.1 Ondelette

2.1.1 Base de Haar

On fixe $j \in \mathbb{Z}$. On considère alors les *intervalles dyadiques*

$$I_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[.$$

On remarque que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_{j,k}.$$

Définition 2.1.1.

Posons $\varphi(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$. Pour tous entiers $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $\varphi_{j,k}(t) := 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$.

Proposition 2.1.2.

On a alors

- i) $\text{supp}(\varphi_{j,k}) = I_{j,k}$,
- ii) pour tout $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$, $\|\varphi_{j,k}\|_{L^2} = 1$,
- iii) pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et $k, k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k \neq k'$, $\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,k'} \rangle_{L^2} = 0$

Donc pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la famille $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2.1.3. Prouver les propriétés.

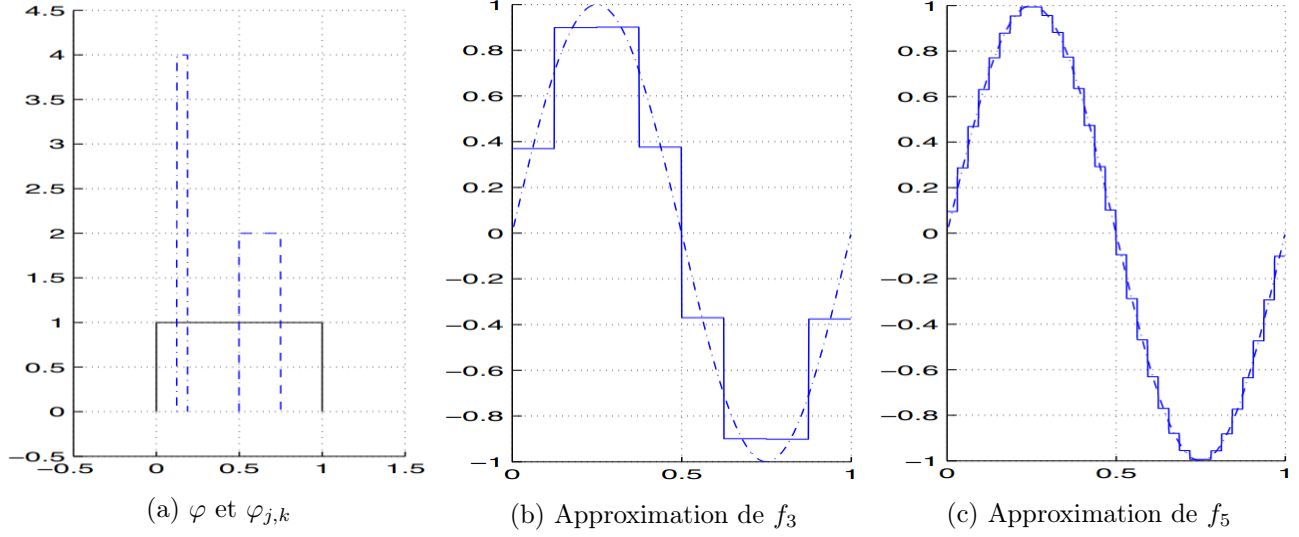


FIGURE 2.1.1 – Approximation de f_3 et f_5

On va approcher une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ par des fonctions constantes par morceaux, constantes sur chaque $I_{j,k}$. On écrit donc $f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \mathbf{1}_{I_{j,k}}(x)$. Comment choisir au mieux $\alpha_{j,k}$?

Il est naturel de prendre la moyenne de f sur $I_{j,k}$: $\alpha_{j,k} = \frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(x) dx$.

Or $|I_{j,k}| = 2^{-j}$ donc $\alpha_{j,k} = 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_{j,k} dx := 2^{j/2} c_{j,k}$.

Ainsi

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{j/2} c_{j,k} \mathbf{1}_{I_{j,k}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \varphi_{j,k}$$

On pose

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ s'écrit } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \varphi_{j,k} \text{ avec } \alpha_{j,k} \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\{(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}\}.$$

Proposition 2.1.4.

Le projeté de f sur V_j est

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \varphi_{j,k} \quad \text{avec} \quad c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle.$$

Remarque 2.1.5. On améliore l'approximation de f en augmentant j dans la projection et f_{j+1} est un raffinement de f_j .

Proposition 2.1.6.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors

$$(i) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} f_j = f \text{ et } \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}),$$

$$(ii) \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} f_j = 0 \text{ et } \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0.$$

Mais cela ne donne pas une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ puisqu'on ne peut pas décomposer f sur une base constituer des $\varphi_{j,k}$.

On se souvient que $\varphi = \mathbb{1}_{[0,1]} = \varphi_{0,0}$. On remarque qu'il y a une équation d'échelle

$$\varphi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1}.$$

Comme $\varphi_{1,0}, \varphi_{1,1} \in V_1$ alors $\varphi_{0,0} \in V_1$. Donc $V_0 \subset V_1$ et $x \mapsto \varphi(2x) \in V_1$.

Lemme 2.1.7.

À l'échelle j et pour tout k , on a

$$\varphi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,2k} + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,2k+1} \in V_{j+1}.$$

Donc $V_j \subset V_{j+1}$ et $x \mapsto \varphi_{j,k}(2x) \in V_{j+1}$.

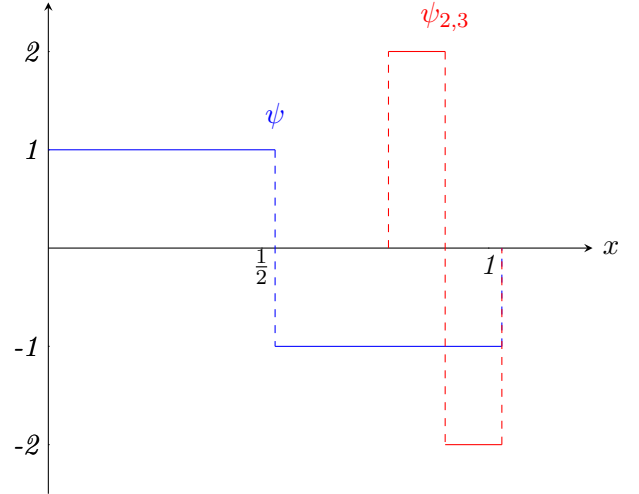
On va faire une manipulation pour pouvoir décomposer f sur une base.

Définition 2.1.8.

On introduit $\psi : t \mapsto \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(t) - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(t)$. Puis pour tout $j, k \in \mathbb{Z}$, on définit

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k).$$

On a $\text{supp}(\psi_{j,k}) = I_{j,k}$.



Propriété 2.1.9. (i) Pour tous $j, k \in \mathbb{Z}$, $\|\psi_{j,k}\|_{L^2} = 1$.

(ii) Pour tous $j, k \in \mathbb{Z}$ et $j', k' \in \mathbb{Z}$ tel que $(j, k) \neq (j', k')$, $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = 0$.

La famille $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une famille libre et orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.

(iii) Pour tous $j, k \in \mathbb{Z}$ et $j', k' \in \mathbb{Z}$, $\langle \psi_{j,k}, \varphi_{j',k'} \rangle = 0$.

La famille $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}} \cup (\psi_{j',k'})_{j' \geq j, k' \in \mathbb{Z}}$ est une famille libre et orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.

Il y a un lien entre φ et ψ :

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1).$$

Autrement dit

$$\psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0} - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1}.$$

Comme $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, on a

$$\psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{(2)}}\varphi_{j+1,2k} - \frac{1}{\sqrt{(2)}}\varphi_{j+1,2k+1} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_{j+1,2k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j,k} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{j,k} \\ \varphi_{j+1,2k+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j,k} - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{j,k} \end{cases}.$$

Donc on a

- $\psi_{j,k} \subset V_{j+1}$,
- comme $\langle \psi_{j,k}, \varphi_{j,k'} \rangle = 0$ pour tout $k' \in \mathbb{Z}$, alors $\psi_{j,k} \notin V_j$ et $\psi_{j,k}$ appartient au supplémentaire de V_j dans V_{j+1} .

Proposition 2.1.10.

Posons

$$W_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k} \text{ pour des } \beta_{j,k} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cet espace vectoriel W_j est le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} , c'est-à-dire

$$V_j \overset{\perp}{\oplus} W_j = V_{j+1}.$$

Définition 2.1.11.

Le projeté de f sur W_j est

$$g_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k} \quad \text{avec} \quad d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$$

Les propriétés précédentes donnent la proposition suivante :

Proposition 2.1.12.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$f_{j+1} = f_j + g_j$$

Autrement dit, on rajoute le "détail" g_j à l'approximation f_j pour obtenir le raffinement f_{j+1} .

On écrit alors

$$\begin{aligned}
f_{j+1} &= f_j + g_j \\
&= (f_{j-1} + g_{j-1}) + g_j \\
&\vdots \\
&= f_0 + g_0 + \dots + g_j \\
&\vdots \\
&= f_{-j} + g_{-j} + \dots + g_0 + \dots + g_j \\
&= f_{-j} + \sum_{l=-j}^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{l,k} \psi_{l,k}.
\end{aligned}$$

On se souvient que $\lim_{j \rightarrow +\infty} f_j \stackrel{L^2}{=} f$ et $\lim_{j \rightarrow -\infty} f_j \stackrel{L^2}{=} 0$.

Théorème 2.1.13.

Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ s'écrit

$$f \stackrel{L^2}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \quad \text{où } d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

Comme la famille $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale et permet de décomposer toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ donc on en déduit que $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ et s'appelle la base de Haar.

Les $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ sont les coefficients d'ondelettes de f , c'est-à-dire les coordonnées de f dans la base de Haar.

2.1.2 Propriété de la transformée

Heuristiquement, on a

- $d_{j,k}$ reflète le comportement de f sur $I_{j,k}$.
- $|d_{j,k}|$ est grand ssi f "ressemble" à $\psi_{j,k}$ donc si f oscille à la fréquence 2^j sur $I_{j,k}$.
- C'est donc une décomposition "temps-fréquence" (ou "temps-échelle") qui donne des informations locales sur le comportement de la fonction, contrairement à la transformée de Fourier.

Théorème 2.1.14. (Parseval)

On a également par l'inégalité de Parseval que

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |d_{j,k}|^2.$$

Théorème 2.1.15.

Si $f \in C^0(\mathbb{R})$, alors la somme partielle

$$F_J := \sum_{j=-J}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}$$

converge uniformément vers f lorsque J tend vers $+\infty$.

Donc il n'y a **pas de phénomène de Gibbs**. Mais avec la base de Haar, les approximations sont discontinues car constantes par morceaux.

2.1.3 Analyse multirésolution

Plus généralement, on veut construire des bases sur le même modèle de translation-dilatation d'un fonction qui auront de meilleures propriétés. Pour cela, on introduit l'*analyse multi-résolution*.

Définition 2.1.16.

Une **analyse multi-résolution** (AMR) est une suite croissante (pour l'inclusion) d'espaces vectoriels $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ et une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tels que

- (i) $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormale de V_0 ,
- (ii) $f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1} \Leftrightarrow f(2^{-j} \cdot) \in V_0$,
- (iii) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$,
- (iv) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

Définition 2.1.17.

La fonction φ est appelée la **fonction d'échelle** de l'AMR.

Si on se donne φ , alors on a V_0 par le 1^{er} point. D'après le 2^e point, les fonctions de V_1 sont les fonction de V_0 qu'on a "contractées" : si $f \in V_0$, alors $f(2 \cdot) \in V_1$. Donc se donner V_0 équivaut à se donner V_1 . En itérant, on peut même obtenir tout les V_j pour $j \in \mathbb{Z}$.

Comme $V_0 \subset V_1$ alors $\varphi \in V_1 = \text{Vect}(\{\varphi(2 \cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}})$. Donc la fonction φ se décompose sur cette base.

Définition 2.1.18.

La fonction d'échelle d'une AMR vérifie une équation d'échelle : il existe une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \underbrace{\varphi(2t - k)}_{2^{-j/2} \varphi_{j,k}} \quad \text{où} \quad \varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot - k).$$

Exemple 2.1.19. Pour la base de Haar, on prend $\varphi = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $a_0 = a_1 = 1$ et $a_k = 0$ sinon.

Cherchons des conditions sur les $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ pour que φ engendre une AMR. On rappelle que $2^{j/2} \varphi(2^j \cdot - k)$ est une base hilbertienne de V_j .

Propriété 2.1.20.

On a les propriétés suivantes

(i) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a_k = 2 \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle_{L^2}$.

(ii) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 = 2$.

(iii) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \overline{a_{l+2k}} = 2 \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(k) = \begin{cases} 2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$.

En prenant la transformée de Fourier de l'équation d'échelle de φ , on obtient

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \widehat{\varphi(2 \cdot -k)}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik \frac{\xi}{2}} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \cdot m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

où $m_0(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi}$ puisque

$$\widehat{\varphi(2 \cdot -k)}(\xi) = \widehat{\varphi\left(2\left(\cdot - \frac{k}{2}\right)\right)}(\xi) = \frac{1}{2} \widehat{\varphi\left(\cdot - \frac{k}{2}\right)}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-ik \frac{\xi}{2}} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Définition 2.1.21.

La fonction m_0 est appelée le **filtre associé à la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$** (ou associé à φ).

C'est une série de Fourier et les $(a_k/2)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont les coefficients de Fourier de m_0 .

Proposition 2.1.22.

Si φ satisfait une équation d'échelle, alors

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \cdot m_0\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Théorème 2.1.23.

Soit une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) la famille $(\varphi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormale,

(ii) il existe une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \underbrace{\varphi(2t - k)}_{2^{-j/2} \varphi_{1,k}} \quad \text{où} \quad \varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot -k),$$

(iii) $\widehat{\varphi}$ est une fonction continue en 0 et $\widehat{\varphi}(0) = 1$.

Alors φ définit une AMR.

On veut alors l'équivalent pour ψ afin d'obtenir une base orthonormale $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$. On a que $W_0 = \text{Vect}(\psi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ avec $V_0 \overset{\perp}{\oplus} W_0 = V_1$. Puisque $\psi \in V_1$ cela force $\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi(2 \cdot - k)$. Donc comme $\psi \perp V_0$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $\langle \psi, \varphi(\cdot - k) \rangle = 0$.

On obtient que $\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)$ avec $m_1(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-ik\xi}$ qui est appelée le **filtre d'ondelette**.

Proposition 2.1.24. (Filtre miroir quadratiques)

Supposons que φ engendre une AMR, et que ψ est une ondelette satisfaisant les propriétés précédentes. Alors les relations suivantes sont vérifiées :

$$(R1) \quad |m_0(\xi)|^2 + \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1,$$

$$(R2) \quad |m_1(\xi)|^2 + \left| m_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1,$$

$$(R3) \quad m_0(\xi) \overline{m_1(\xi)} + m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \overline{m_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} = 0.$$

Proposition 2.1.25.

En posant que $m_1(\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)}$, on obtient que m_1 a pour coefficient $b_k = (-1)^k \overline{a_{1-k}}$.

Soit φ qui engendre une AMR avec les coefficients de filtres $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Alors l'ondelette définie par

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{a_{1-k}} \varphi(2x - k)$$

satisfait les conditions de filtres miroir quadratique.

Exemple 2.1.26. (Base de Haar) Soit $\varphi = \mathbb{1}_{[0,1]}$.

On a $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x + 1)$ donc $a_0 = a_1 = 1$ et $a_k = 0$ sinon.

Ainsi $\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x + 1)$.

2.2 Aspects algorithmiques

On a vu que pour $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f \stackrel{L^2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{0,k}(f) \varphi_{0,k} + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}(f) \psi_{j,k}.$$

Pour un niveau de détails fini $J \geq 1$, on veut calculer

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{0,k}(f) \varphi_{0,k} + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}(f) \psi_{j,k}.$$

Question : Comment calculer efficacement les $d_{j,k}(f)$ à partir d'une fonction f échantillonné ?

On rappelle que

$$\varphi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p \varphi_{j+1,2k+p}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} a_{p-2k}}_{h[p-2k]} \varphi_{j+1,p}(t),$$

et

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} b_p \varphi_{j+1,2k+p}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} b_{p-2k}}_{g[p-2k]} \varphi_{j+1,p}(t),$$

avec $b_p = (-1)^p \overline{a_{1-p}}$. On a alors

$$\begin{aligned} c_{J,k} &= \langle f, \varphi_{J,k} \rangle = \left\langle f, \sum_{p \in \mathbb{Z}} h[p-2k] \varphi_{J+1,p}(t) \right\rangle \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} h[p-2k] \langle f, \varphi_{J+1,p}(t) \rangle \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} h[p-2k] c_{J+1,p}, \end{aligned}$$

de même,

$$d_{J,k} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} g[p-2k] c_{J+1,p}.$$

On note $\bar{g}(x) := g(-x)$ et $c_{j,k} = c_j[k]$. On a alors l'algorithme de décomposition

$$\begin{cases} c_{J,k} = c_J[k] &= c_{J+1} * \bar{h}[2k] \\ d_{J,k} = d_J[k] &= c_{J+1} * \bar{g}[2k] \end{cases}$$

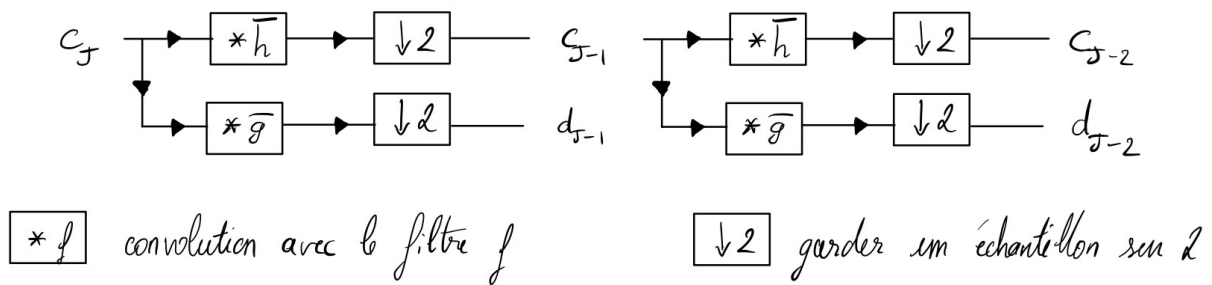


FIGURE 2.2.1 – Algorithme de décomposition d'un signal

Puis de $V_j \overset{\perp}{\oplus} W_j = V_{j+1}$, on en déduit que

$$\varphi_{j,k}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} h[k-2p] \varphi_{j-1,p}(t) + \sum_{p \in \mathbb{Z}} g[k-2p] \psi_{j-1,p}(t)$$

Ainsi on a l'algorithme de reconstruction

$$\begin{aligned}
c_{j,k} &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} h[k-2p] c_{j-1,p} + \sum_{p \in \mathbb{Z}} g[k-2p] d_{j-1,p} \\
c_j[k] &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} h[k-2p] c_{j-1}[p] + \sum_{p \in \mathbb{Z}} g[k-2p] d_{j-1}[p] \\
&= \widetilde{c_{j-1}} * h[k] + \widetilde{d_{j-1}} * g[k]
\end{aligned}$$

où $\check{x}[n] = \begin{cases} x[p] & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \check{x}[2n] = x[n] \\ \check{x}[2n+1] = 0 \end{cases}$

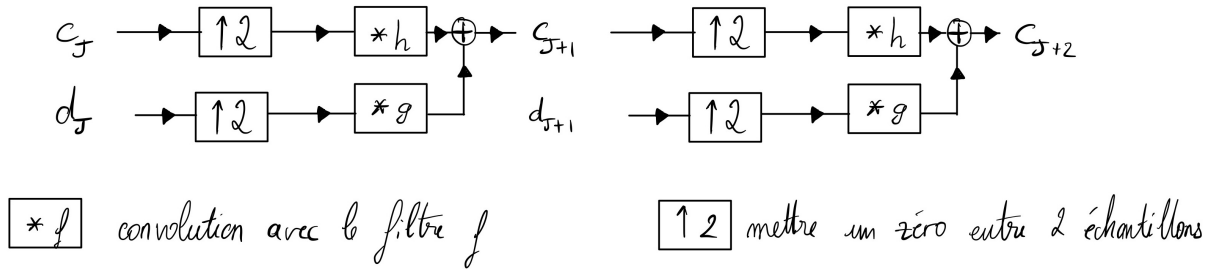


FIGURE 2.2.2 – Algorithme de reconstruction d'un signal

Complexité : Dans les deux algorithmes, pour un filtre de longueur L , on a une complexité de $2NL$ opérations et donc une complexité linéaire en $O(N)$.

Exemple 2.2.1. On suppose qu'on a un signal u que l'on voit comme une fonction constante par morceaux sur les dyadiques. Alors avec l'ondelette de Haar, on peut facilement avoir les coefficients d'ondelette. On suppose que

$$c_3 = [1, 3, 4, 5, 7, 9, 2, -1].$$

Calculons la décomposition et recombinaison de ce signal :

Par les formules précédentes, on a pour la base de Haar

$$c_j[k] = \frac{1}{\sqrt{2}} c_{j+1}[2k] + \frac{1}{\sqrt{2}} c_{j+1}[2k+1]$$

et

$$d_j[k] = \frac{1}{\sqrt{2}} c_{j+1}[2k] - \frac{1}{\sqrt{2}} c_{j+1}[2k+1]$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} c_2 &= \left[2\sqrt{2}, \frac{9}{\sqrt{2}}, 8\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] & d_2 &= \left[-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right] \\ c_1 &= \left[\frac{13}{2}, \frac{17}{2} \right] & d_1 &= \left[-\frac{5}{2}, \frac{15}{2} \right] \\ c_0 &= \left[\frac{15}{\sqrt{2}} \right] & d_0 &= \left[-\sqrt{2} \right] \end{aligned}$$

Puis à partir de

$$c_0 = \left[\frac{15}{\sqrt{2}} \right] \quad \text{et} \quad d_0 = \left[-\sqrt{2} \right],$$

on peut retrouver les données initiales en utilisant les formules précédent qui pour la base de Haar sont

$$\begin{cases} c_j[2k] &= \frac{1}{\sqrt{2}}c_{j-1}[k] + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{j-1}[k], \\ c_j[2k+1] &= \frac{1}{\sqrt{2}}c_{j-1}[k] - \frac{1}{\sqrt{2}}d_{j-1}[k]. \end{cases}$$

En utilisant (2.2.1), on en déduit

$$\begin{aligned} c_0 &= \left[\frac{15}{\sqrt{2}} \right] & d_0 &= \left[-\sqrt{2} \right] \\ c_1 &= \left[\frac{13}{2}, \frac{17}{2} \right] & d_1 &= \left[-\frac{5}{2}, \frac{15}{2} \right] \\ c_2 &= \left[2\sqrt{2}, \frac{9}{\sqrt{2}}, 8\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] & d_2 &= \left[-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right] \\ c_3 &= [1, 3, 4, 5, 7, 9, 2, -1] \end{aligned}$$