Université Paris-Est Créteil — Année 2023-2024

Théorie de Fourier et ondelettes — Q. Rible

Feuille d'exercices 1 :
Rappels sur les calculs de sommes et d'intégrales

Exercice 1 : Rappels de sommes usuelles

Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$,

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$,

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$,

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 2 :

Soit $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$,

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

Exercice 3 :

Soit $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta).$$

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes :

1) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} ij$,

2) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \max(i,j)$.

Exercice 5 :

Calculer les sommes infinies suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k,$ 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$

Indication : Pour la deuxième somme on essaiera d'abord de calculer $i^k - (-i)^k$ pour $k \geq 0$.

Exercice 6 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{k-1}{k!} x^k,$ 2) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}.$

Exercice 7 : Intégration par partie

Calculer les primitives de $x \mapsto \cos(x)e^{-x}$

Exercice 8 : Intégration par partie

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx,$ 2) $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)dt,$ 3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt.$

Exercice 9 : Changement de variables

Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt,$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t},$ 3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt.$

Exercice 10 : Moment

Soit $\lambda > 0$ calculer

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx,$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x},$ 3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-\lambda x}dx.$

Exercice 11 :

Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$. On pourra utiliser $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 12 :

On pose $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Calculer I^2 à l'aide d'un changement de variables polaires, en déduire la valeur de I.