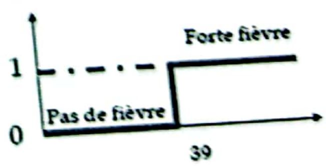
Systèmes à inférence floue
Partie 1- Les fondements

Logique Booléenne

- **Inconvénients**

- Les variables décrivant des états sont booléennes.

La variable booléenne, qui ne peut prendre que deux valeurs (vrai ou faux) est mal adaptée à la représentation de la plupart des phénomènes courants.



Et si la température était de 38,99 ?!
Et si la température était de 39,01 ?!

Et si le phénomène était plus complexe ?!

Logique Booléenne

- Inconvénients

Exemple : Dans un environnement de gestion des ressources humaines, que signifie : Le stress de l'opérateur est 0.8

~~Valuation numérique~~ ↓ Valuation qualitative: langage naturel

Le stress de l'opérateur est *fort*

Comment représenter ces valeurs linguistiques ?

Comment formuler cette quantification linguistique ?

Comment intégrer ces valeurs linguistiques dans un système intelligent ?

Théorie des ensembles flous

- **L'incertain et l'imprécis**

- Je crois que la température est élevé.

  Incertitude... "Je crois, mais ce n'est pas sûr."

  Mise en question de la validité de l'observation

- La température de la chambre est très élevé

  Imprécision... Que signifie " très élevé " ?

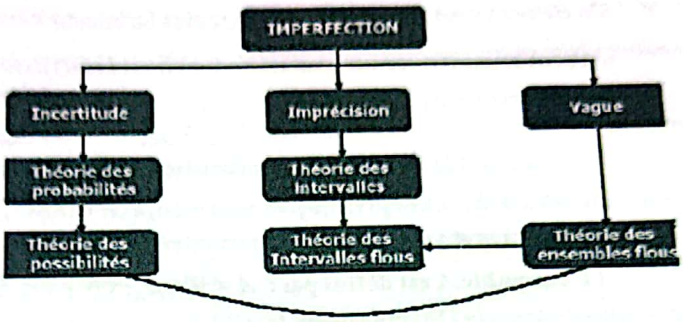
  Appréciation

- La température de la chambre a augmenté de à peu prés 20%

  Imprécision ou incertitude ??

Théorie des ensembles flous

- **L'incertain et l'imprécis**



Théorie des ensembles flous

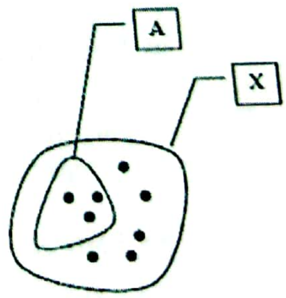
- **Concepts fondamentaux**

- Le concept de sous-ensemble flou permet des graduations dans l'appartenance d'un élément à une classe.
- Dans l'approche classique :

Si μ_A est la fonction d'appartenance de l'ensemble A

$$\forall x \in X \qquad \mu_A(x) = 0 \quad \text{si } x \notin X$$

$$\mu_A(x) = 1 \quad \text{si } x \in X$$



L'ensemble A est défini par : $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$

Théorie des ensembles flous

☞ **Concepts fondamentaux**

- Dans l'approche floue :
  - ✓ Un élément peut appartenir plus ou moins fortement à cette classe.
  - ✓ Un sous-ensemble flou A d'un référentiel X est caractérisé par une fonction d'appartenance μ_A :

Si μ_A est la fonction d'appartenance de l'ensemble flou A

$\forall x \in X \qquad \mu_A \in [0,1]$

L'ensemble A est défini par : $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$

Théorie des ensembles flous

☞ **Concepts fondamentaux**

Si $\mu_A(x)=0{,}10$

x appartient à l'ensemble flou A avec un degré d'appartenance de 10%

⇔ Faible appartenance ⇔ Traduction de la valeur linguistique « Faible »

Si $\mu_A(x)=0{,}90$

x appartient à l'ensemble flou A avec un degré d'appartenance de 90%

⇔ Forte appartenance ⇔ Traduction de la valeur linguistique « Fort»

degré d'appartenance = valeur de vérité.

Un ensemble flou est totalement déterminé par sa fonction d'appartenance

Théorie des ensembles flous

- **Concepts fondamentaux**

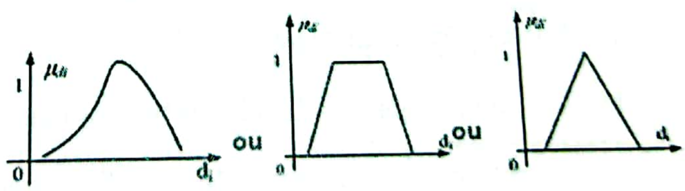
- **La fonction d'appartenance décrivant un sous-ensemble ou est caractérisée par quatre propriétés :**
  - ✓ **Le type :** la forme du nombre ou qui peut être triangulaire, trapézoïdale, gaussienne ou sigmoïdale.
  - ✓ **La hauteur :** $H(A) = Sup_{x \in X} (\mu_A(x))$ de la fonction d'appartenance. Un sous-ensemble ou est dit normalisé s'il est d'hauteur 1.
  - ✓ **Le noyau :** $N(A) = \{x / \mu_A(x) = 1\}$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent totalement à A. Pour les fonctions de type triangulaire, le noyau est un singleton qui est appelé aussi valeur modale.
  - ✓ **Le support :** $S(A) = \{x / \mu A(x) \neq 0\}$; cet ensemble décrit l'ensemble des éléments qui sont partiellement dans A.

Théorie des ensembles flous

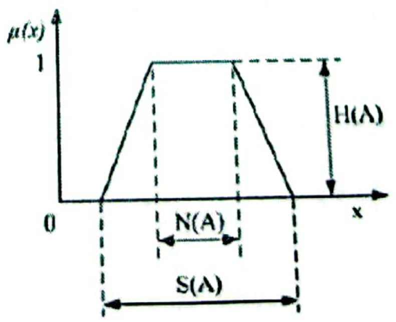
- Concepts fondamentaux

- La fonction d'appartenance décrivant un sous-ensemble ou est caractérisée par quatre propriétés :

  - ✓ Le type :



  - ✓ La hauteur, le noyau, le support :

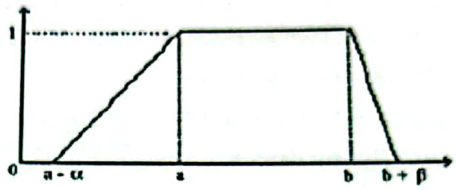


Théorie des ensembles flous

☞ **Notation :**

- **L'intervalle flou couramment utilisé dans R est décrit par sa fonction d'appartenance.**
- **Un nombre flou trapézoïdale est notée généralement par (a, b, α, β) :**

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x. \quad (x \text{ hors du support de A}) \\ 1 \text{ si } a < x < b. \quad (x \text{ dans le noyau de A}) \\ 1 + (x - a) / \alpha \text{ si } a - \alpha < x < a. \\ 1 - (b - x) / \beta \text{ si } b < x < b + \beta \end{cases}$$



Théorie des ensembles flous

☞ **Notation :**

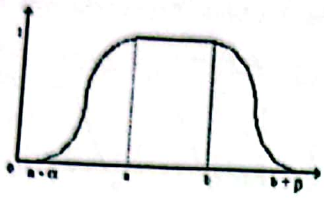
- Un nombre flou triangulaire est un cas particulier d'un nombre trapézoïdale. Il est notée généralement par (a, α, β).
- Dans le domaine de la recherche, ce type de nombre flous est très utilisé :
  - ✓ Ils contiennent tous les intervalles de confiance des distributions de probabilité symétrique ayant même noyau et même support que les nombre flous (Dubois et al., 2004)
  - ✓ La traduction de l'expertise humaine vers ce type de nombre flou est plus facile.

La manipulation mathématique est plus facile avec cette forme

Théorie des ensembles flous

☞ **Notation :**

- La fonction d'appartenance d'un nombre flou avec des cotés paraboliques est définie de la manière suivante :

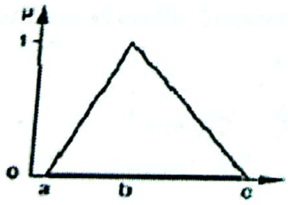


$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x, \text{ (x hors du support de A)} \\ 1 \text{ si } a < x < b, \text{ (x dans le noyau de A)} \\ \text{si } a - \alpha < x < a - \alpha/2 \text{ alors } 2(x - a + \alpha)^2/\alpha^2 \\ \text{si } a - \alpha/2 < x < a \text{ alors } 1 + 2(x - a)^2/\alpha^2 \\ \text{si } b < x < b + \beta/2 \text{ alors } 1 - 2(b - x)^2/\beta^2 \\ \text{si } a + \beta/2 < x < b \text{ alors } 2(x - b + \beta)^2/\beta^2 \end{cases}$$

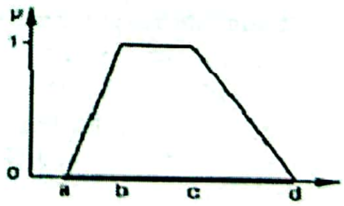
Les nombres flous de forme gaussienne est un cas particulier

Théorie des ensembles flous

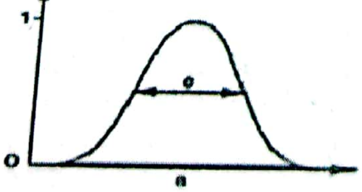
☞ **Concepts fondamentaux : le support**



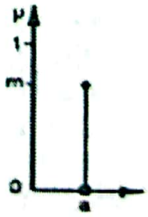
Triangle [a,b,c]



Trapézoïdale [a,b,c,d]



Gaussien [a, Θ]



singleton [a, m]

Théorie des ensembles flous

☞ **Les opérateurs flous**

- Extension des opérations de la théorie des ensembles classiques: $=, \cup, \cap, \subset$, complément.
- Soient A et B deux sefs de X, de définie par les fonctions d'apprentissage μ_A et μ_B :

Égalité de sefs:

$A = B$ *ssi* $\forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$

Inclusion de sefs:

$A \subset B$ *ssi* $\forall x \in X, \mu_A(x) < \mu_B(x)$

Intersection de sefs: $A \cap B$*:*

$\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Union de sefs: $A \cup B$*:*

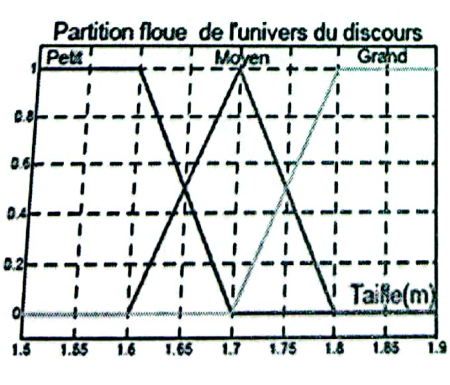
$\forall x \in X, \mu_{A \cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

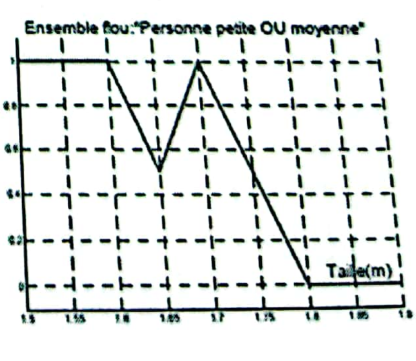
Théorie des ensembles flous

☞ **Les opérateurs flous : Union**

L'ensemble des personnes petites OU moyennes est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\mu_{A \cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U$$



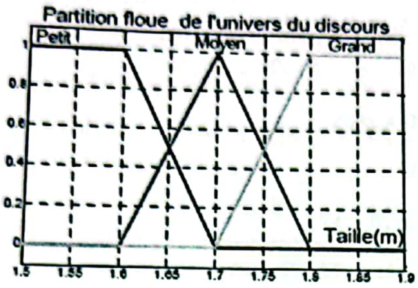


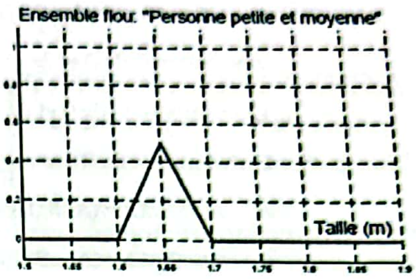
Théorie des ensembles flous

- **Les opérateurs flous : Intersection**

L'ensemble des personnes petites ET moyennes est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\mu_{A\cup B}(x) = min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) \quad \forall x \in U$$



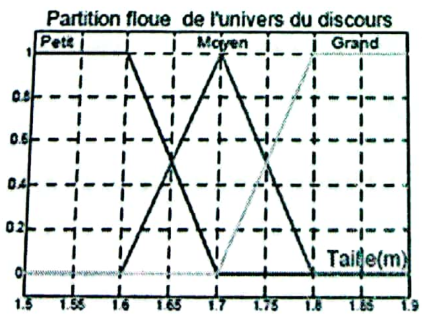


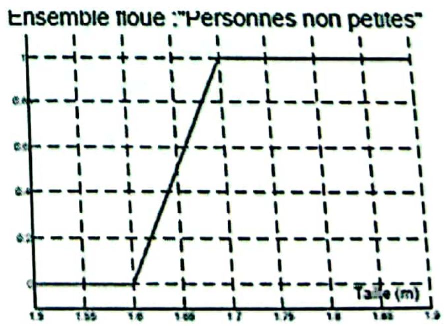
Théorie des ensembles flous

- **Les opérateurs flous : complément**

L'ensemble des personnes NON petites est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in U$$





Théorie des ensembles flous

☞ **Les opérateurs flous : propriétés**

- Certaines propriétés de la théorie des ensembles classiques sont vérifiées :
  - ✓ $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup X = X$, $A \cap X = A$
  - ✓ Associativité de $\cap$ et de $\cup$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - ✓ Commutativité de $\cap$ et de $\cup$: $A \cap B = B \cap A$
  - ✓ Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:
    - ➢ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    - ➢ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Théorie des ensembles flous

☞ **Les opérateurs flous : propriétés**

- Certaines propriétés de la théorie des ensembles classiques sont vérifiées :
  - ✓ La relation de Morgan :
    - ➢ $\neg(A \cap B) = (\neg A) \cup (\neg B)$
    - ➢ $\neg(A \cup B) = (\neg A) \cap (\neg B)$
  - ✓ Les lois d'absorption :
    - ➢ $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$

Théorie des ensembles flous

Les opérateurs arithmétique :

- **L'addition :**

$$\mu_{A+B}(z) = \max\{\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \,/\, x + y = z\} ;$$

- **La multiplication :**

$$\mu_{A.B}(z) = \max\{\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \,/\, xy = z\}$$

A+B :

$$(a, b, \alpha, \beta) + (a', b', \alpha', \beta') = (a + a', b + b', \alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

λB :

$$\lambda\,(a, b, \alpha, \beta) = (\lambda a, \lambda b, \lambda \alpha, \lambda \beta)$$

Théorie des ensembles flous

Le produit cartésien :

- Le produit cartésien est défini par $\mu_{A*B}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$.

Cardinalité d'un ensemble flou

- Dans le cas fini, on peut définir le nombre d'éléments d'un ensemble flou A par :
$$card(A) = \sum \mu_A(x)$$
- Si A est continu, le nombre d'éléments d'un ensemble flou A par :

$$card(A) = \int_x \mu_x(x)dx$$

Théorie des ensembles flous

La distance de Hamming

- La notion de distance entre ensembles flous peut être utile pour définir des relations telles que *«à peu près égal»* ou *«très supérieur à»*.
- La distance de Hamming est : $d(A, B) = (x \in X)\ |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$

Ou autrement :

$$\int_a^b |\mu_A(x) - \mu_B(x)|dx$$

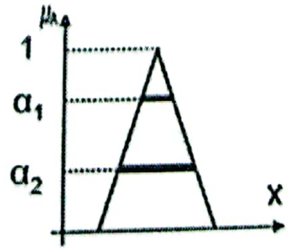
Théorie des ensembles flous

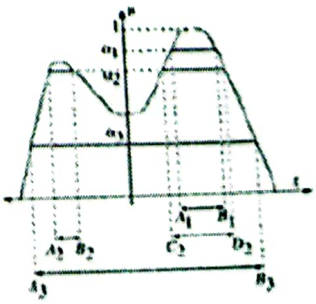
Les α-coupes

- Il est important aussi d'introduire le concept d'α-coupe ou coupe de niveau α:
- Une α-coupe d'un sous-ensemble ou A pour une valeur $\alpha \in [0..1]$ est le sous-ensemble classique noté A_α et déni par :

$$A_\alpha = \{x\,;\, \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

- Les α-coupes A_α d'un sous-ensemble A sont des intervalles non-floues emboités par rapport à la valeur de niveau α.

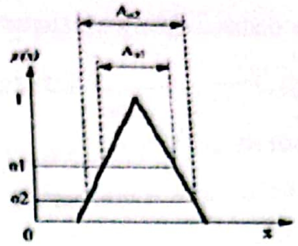




Théorie des ensembles flous

- Les α-coupes

$$\text{Si } \alpha_1 \geq \alpha_2 \text{ alors } A_{\alpha 2} \supseteq A_{\alpha 1}$$



- Les α-coupes des sous-ensembles A et B flous vérifient les propriétés suivantes:
  - ✓ $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$
  - ✓ $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$
  - ✓ Si $(A \supseteq B)_\alpha$ alors $A_\alpha \supseteq B_\alpha$
  - ✓ $(\neg A)_{1-\alpha} \neq \neg(A_\alpha)$, sauf pour $\alpha = 1/2$.

Théorie des ensembles flous

- Les valeurs linguistiques :

<u>Exemple</u> : Dans un environnement de gestion des ressources humaines, que signifie : Le stress de l'opérateur est 0.8

~~Valuation numérique~~ ↓ Valuation qualitative: langage naturel

Le stress de l'opérateur est *fort*

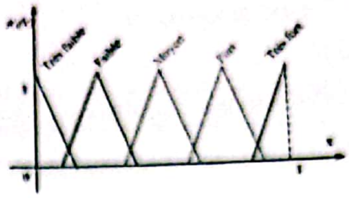
Comment représenter ces valeurs linguistiques ?

Comment formuler cette quantification linguistique ?

Comment intégrer ces valeurs linguistiques dans un système intelligent ?

Théorie des ensembles flous

- **Les valeurs linguistiques :**



- **L'ensemble de référence d'un mot du langage naturel s'appelle l'univers du discours.**
- **Une variable linguistique représente un état dans le système à régler.**
- **Sa valeur est définie dans des termes linguistiques qui peuvent être des mots ou des phrases d'un langage naturel.**

Théorie des ensembles flous

- **Les valeurs linguistiques :**

- Chaque variable linguistique est caractérisée par l'ensemble :

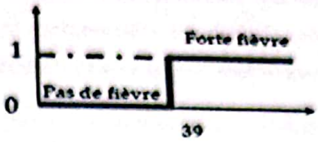
  <x, T(x), U, G, M>

  avec :

  - x est le nom de la variable,
  - T(x) est l'ensemble des valeurs linguistique que peut prendre x
  - U est l'univers du discours associé avec la valeur de base
  - G est la règle syntaxique pour générer les valeurs linguistique de x
  - M est la règle sémantique pour associer un sens à chaque valeur linguistique

Théorie des ensembles flous

☞ **Les valeurs linguistiques :**



Si le patient à 38,9°C de température ⇒ Le patient n'a pas de forte fièvre.

Si le patient n'a pas de forte fièvre ⇒ Le patient n'a pas d'hépatite.

⬇

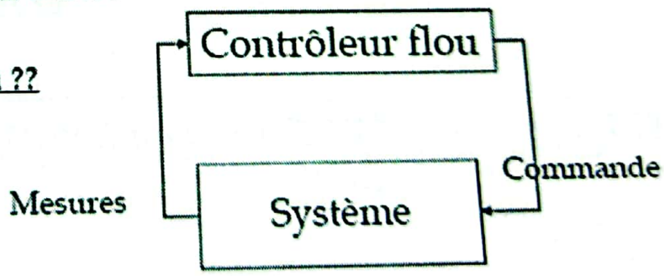
Si le patient n'a pas de forte fièvre ⇒ Le patient n'a pas d'hépatite.

<u>Comment représenter « forte »?</u>

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

<u>Mais pourquoi un contrôleur flou ??</u>



Modus Ponens:

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}$$

<u>Et si c'est à peu près A ??</u>

Modus Ponens:

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad A'}{??}$$

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

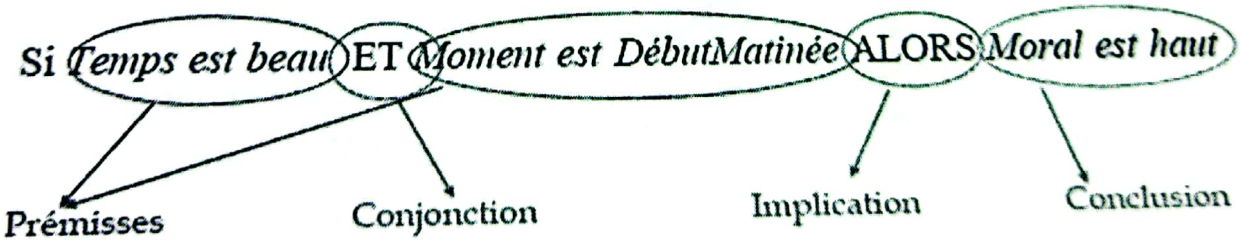
- **Les méthodes d'inférence utilisées dans la logique classique, *modus tollens* et *modus ponens* ne permettent pas de raisonner lorsque les règles ou les faits sont dénis de façon imparfaite.**
- **Cette forme de raisonnement a été adaptée à la logique floue pour prendre en compte les informations et les règles vagues que les systèmes d'inférence peuvent contenir.**

Modus Ponens généralisé :

$$\frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ A' \end{array}}{B'}$$

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**



Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

- **Les conjonctions :**
  - **La définition des opérateurs logiques est assurée selon le type de la fonction d'appartenance utilisée.**
  - **Quelques opérateurs mathématiques :**

Nom	Intersection "ET"	Union "OU"	"NON"
Zadeh	$\mu_{AETB} = min(\mu_A, \mu_B)$	$\mu_{AOUB} = Max(\mu_A, \mu_B)$	$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$
Probabiliste	$\mu_{AETB} = \mu_A \cdot \mu_B)$	$\mu_{AOUB} = \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B$	$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$
Lukasiewicz	$\mu_{AETB} = Max(\mu_A + \mu_B - 1, 0)$	$\mu_{AETB} = min(\mu_A + \mu_B, 1)$	$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$
Weber	$\mu_{AETB} = \begin{cases} \mu_A & si \ \mu_B = 1 \\ \mu_B & si \ \mu_A = 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$	$\mu_{AOUB} = \begin{cases} \mu_A & si \ \mu_B = 0 \\ \mu_B & si \ \mu_A = 0 \\ 1 & sinon \end{cases}$	$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

- L'implication :
  - L'implication floue est une relation qui associe à toute règle floue R une fonction d'appartenance qui peut être dénie de différentes manières.

	Nom	Fonction d'appartenance
R_m	Mamdani	$min(\mu_A, \mu_B)$
R_l	Larsen	$\mu_A \times \mu_B$
R_r	Reichenbach	$1 - \mu_A + \mu_A \times \mu_B$
R_w	Willmott	$Max(1 - \mu_A, min(\mu_A, \mu_B))$
R_{rg}	Rescher-Gaines	$\begin{cases} 1 & si \ \mu_A \leq \mu_B \\ 0 & sinon \end{cases}$
R_{kd}	Kleene-Dienes	$Max(1 - \mu_A, \mu_B)$

	Nom	Fonction d'appartenance
R_{bg}	Brouwer-Gödel	$\begin{cases} 1 & si \ \mu_A \leq \mu_B \\ \mu_B & sinon \end{cases}$
R_g	Goguen	$\begin{cases} min(\frac{\mu_B}{\mu_A}, 1) & si \ \mu_A \neq 0 \\ 1 & sinon \end{cases}$
R_l	Lukasiewicz	$min(1 - \mu_A + \mu_B, 1))$

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

- Il y a 5 étapes nécessaires lors de la conception d'un contrôleur flou :
  - **Définition des entrées et des sorties du contrôleur:**
    - ✓ *nombres, noms, types, univers de discours*
  - **subdivision de toutes les variables d'entrées et de sorites en sous ensembles flous :**
    - ✓ *nombres de subdivisions, types de subdivisions, noms, paramètres.*
  - **Définition de la base de règles :**
    - ✓ *nombre de règles, type de règles, les combinaisons possibles, les résultats.*
  - **Sélection de la méthode d'inférence**
  - **Sélection de la méthode de défuzzification**

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

- Il y a 5 étapes à suivre pour aboutir à la sortie d'un système flou :

Entrée

↓

Fuzzification

↓

Calcul de degré d'activation de chaque règle

↓

Recherche de la fonction d'appartenance pour la sortie de chaque règle

↓

Recherche de la fonction d'appartenance résultante globale

↓

Defuzzification

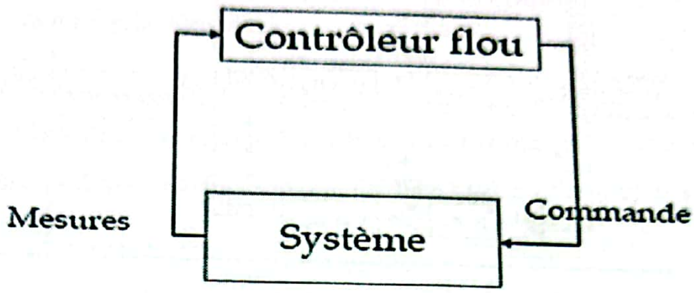
↓

Sortie

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

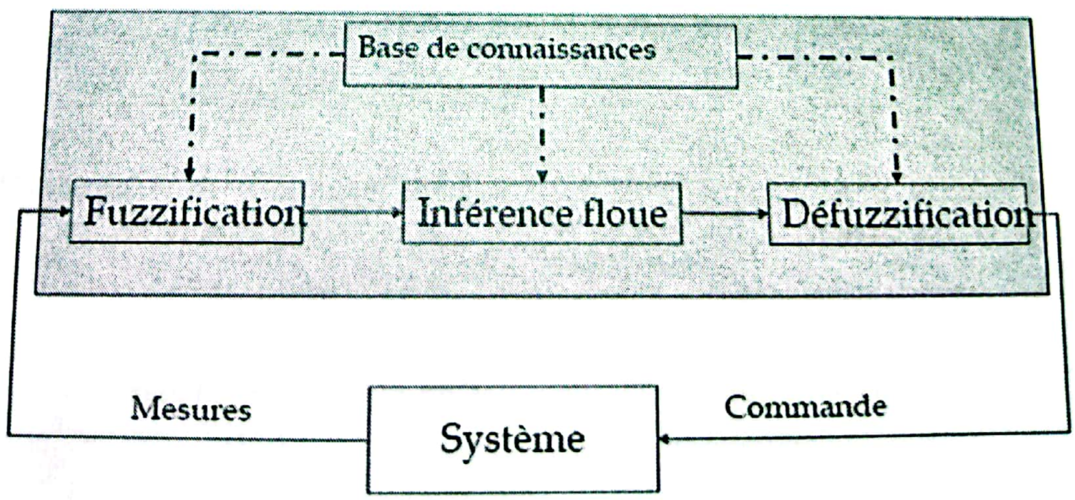
- **Il y a 5 étapes à suivre pour aboutir à la sortie d'un système flou :**



Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

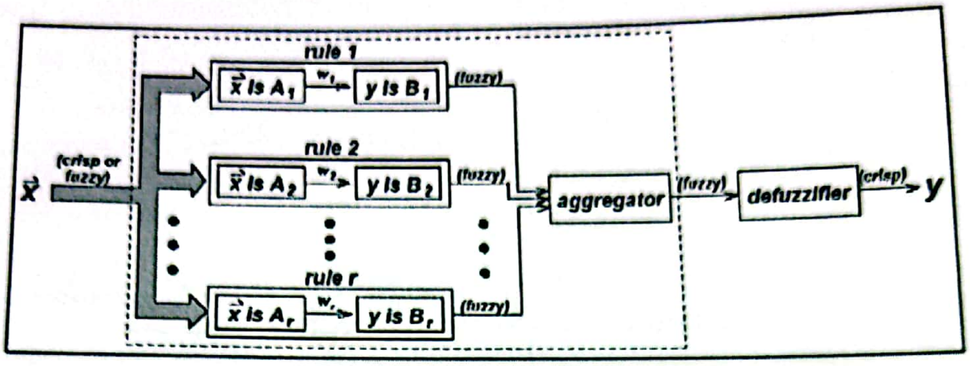
- Il y a 5 étapes à suivre pour aboutir à la sortie d'un système flou :



Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

- **Il y a 5 étapes à suivre pour aboutir à la sortie d'un système flou :**



Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

1. **Fuzzification :** processus qui consiste à transformer une grandeur numérique en un sous-ensemble flou.

   ✓ **Qualifier une valeur numérique avec un terme linguistique.**

<u>Et si on augmente le support des nombres flous utilisés ?</u>

Inférence floue

- Conception de contrôleur flou :

1. Comment fuzzifier ?
   1. Donner l'univers du discours : plage de variations possibles de l'entrée considérée.
   2. Une partition en classe floue de cet univers.
   3. Les fonctions d'appartenances de chacune de ces classes.

- Exemple : Selon les valeurs des entrées , le système flou indiquera qu'en sortie la puissance de chauffe devra prendre les valeurs de sortie « faible » ou « moyenne » ou « forte ».

Inférence floue

- Conception de contrôleur flou :

2. Calcul du degré d'activation de chaque règle :

✓ L'activation des règles consiste à appliquer une norme triangulaire (ou T-norme) pour obtenir le degré d'activation de chacune.

✓ C'est une valeur comprise entre 0 et 1.

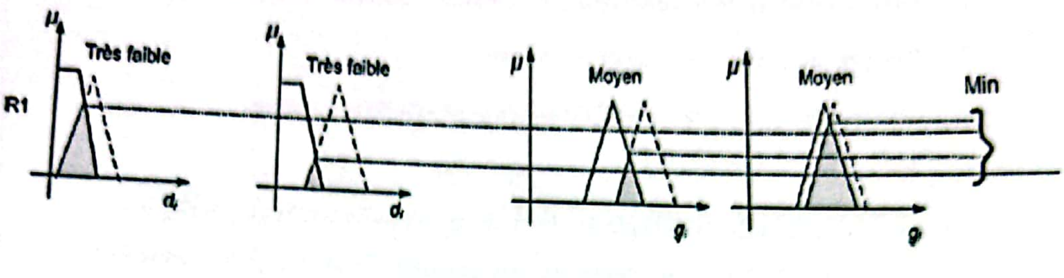
		[illegible]e
Lukasiewicz	$T_L(u,v) = max(u+v-1, 0$ [illegible]	[illegible]
Probabiliste	$T_P(u,v) = u \cdot v$	[illegible]
Zadeh	$T_Z(u,v) = min(u,v)$	[illegible]

Quelques exemples de t-normes

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

2. **Calcul du degré d'activation de chaque règle :**

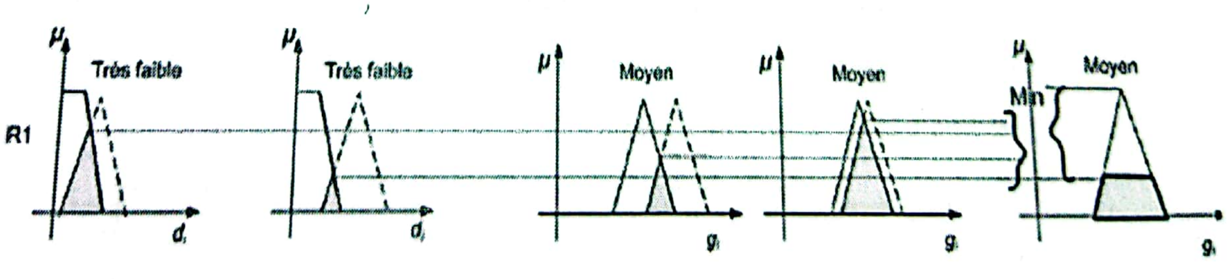


Exemple : t-norme défini par Zadeh

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

3. Recherche de la fonction d'appartenance pour la sortie de chaque règle :



Exemple : Selon la t-norme défini par Zadeh

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

4. **Agrégation ou Recherche de la fonction d'appartenance résultante globale :**

- **La conclusion finale d'un système d'inférence est le résultat de la combinaison des résultats de différentes règles activées en utilisant les normes triangulaires (T-norme) ou T-conorme :**

1. **Par T-norme : la fonction d'appartenance du sous-ensemble ou Y', qui est le résultat de l'agrégation, est dénie de la manière suivante :**

$$\forall y, \mu_{Y'}(y) = \top(\mu_{A'^1}(y), \ldots, \mu_{A'^N}(y))$$

avec T la T-norme Min et N est le nombre de règles activés

Inférence floue

☞ Conception de contrôleur flou :

4. Agrégation ou Recherche de la fonction d'appartenance résultante globale :

2. Par T-conorme : la fonction d'appartenance du sous-ensemble ou Y 0, qui est le résultat de l'agrégation, est dénie de la manière suivante :

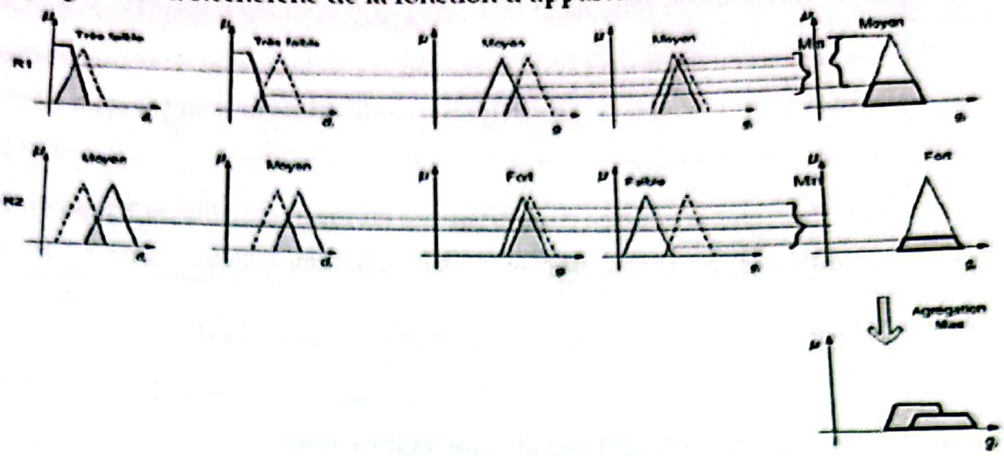
$$\forall y, \mu_{Y'}(y) = \perp(\mu_{A'^1}(y), \ldots, \mu_{A'^N}(y))$$

avec ⊥ la T-conorme Max et N est le nombre de règles activées.

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

4. **Agrégation ou Recherche de la fonction d'appartenance résultante globale :**



Inférence floue

☞ Conception de contrôleur flou :

5. Défuzzification :

- C'est l'opération qui, inversement à la fuzzication, consiste à transformer un nombre ou B' en une grandeur numérique y_0
- Parmi les méthodes de défuzzication les plus répandues :

Centre de gravité $$y_0 = \frac{\int_Y y \cdot \mu_{B'}(y)dy}{\int_Y \cdot \mu_{B'}(y)dy}$$

Premier Maximum $y_0 = min\{z/\mu_{B'}(z) = Max\mu_{B'}(y)\}$

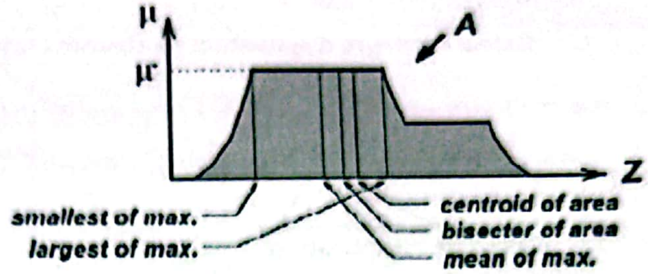
Dernier Maximum $y_0 = Max\{z/\mu_{B'}(z) = Max\mu_{B'}(y)\}$

Centre Maximum
$$y_1 = min\{z/\mu_{B'}(z) = Max\mu_{B'}(y)\}$$
$$y_2 = Max\{z/\mu_{B'}(z) = Max\mu_{B'}(y)\}$$
$$y_0 = \frac{y1+y2}{2}$$

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

5. **Défuzzification :**



Centre de gravité

Premier Maximum

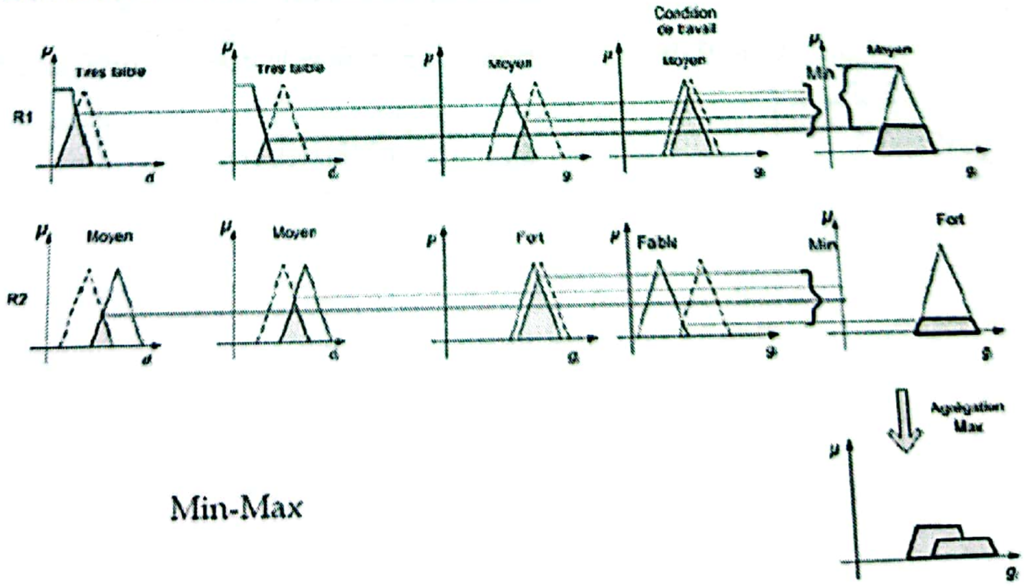
Dernier Maximum

Centre Maximum

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

- Méthode d'inférence : Méthode de Mamdani



Min-Max

Inférence floue

Conception de contrôleur flou :

- **Méthode d'inférence : Méthode de Mamdani**
  - **Considérons les observations : $d_{S1}^{obs}, d_{S2}^{obs}, g_1^{obs}$ et e_1^{obs}. Le raisonnement ou se décompose comme suit :**

    1. **Calcul du degré d'activation de chaque règle :**

$$\alpha_{R_1} = min(\mu_{Faible}(d_{S1}^{obs}), \mu_{Faible}(d_{S2}^{obs}), \mu_{Moyen}(g_1^{obs}), \mu_{Moyen}(e_1^{obs})) \quad et$$

$$\alpha_{R_2} = min(\mu_{Moyen}(d_{S1}^{obs}), \mu_{Moyen}(d_{S2}^{obs}), \mu_{Fort}(g_1^{obs}), \mu_{Faible}(e_1^{obs}))$$

    2. **Calcul de l'implication :**

$$\mu_{I_1} = min(\alpha_{R_1}, \mu_{ZE}(Variation\_g_1))$$

$$\mu_{I_2} = min(\alpha_{R_2}, \mu_{PS}(Variation\_g_1))$$

Inférence floue

Conception de contrôleur flou :

- Méthode d'inférence : Méthode de Mamdani

    3. Calcul de l'agrégation pour former la conclusion finale floue C :

$$\mu_C = max(\mu_{I_1}, \mu_{I_2})$$

Inférence floue

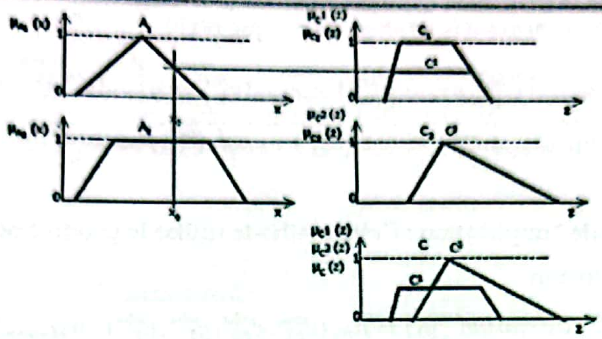
– Agrégation des règles (au sens Mandani):

R_1 : si x est A_1 alors z est C_1
R_2 : si x est A_2 alors z est C_2
...
R_n : si x est A_n alors z est C_n
Fait : x est $\overline{x_0}$
Conséquence : z est C

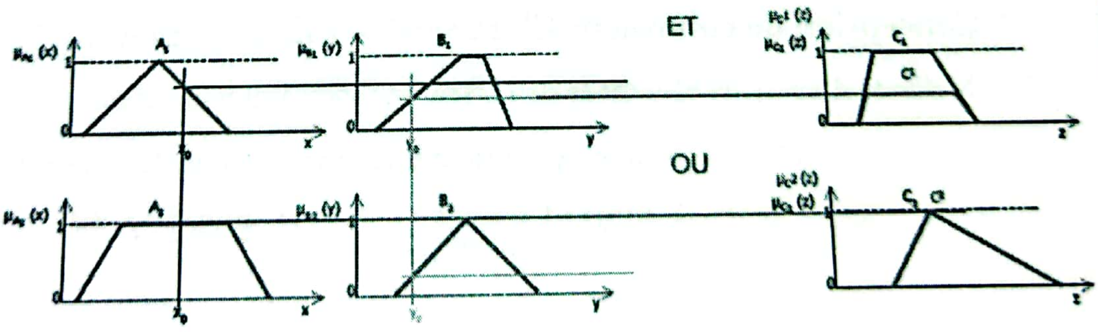
où la conséquence C est déterminée par :

$$\mu_C(z) = \max_{i=1,n}\left(\mu_{C'_i}(z)\right), \quad z \in Z$$

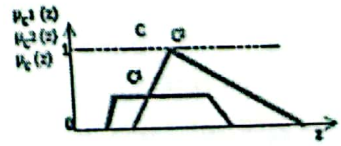
soit $$\mu_C(z) = \max_{i=1,n}\left(\min\left(\mu_{A_i}(x_0), \mu_{C_i}(z)\right)\right), \quad z \in Z$$



Inférence floue



R_1 : si x est A_1 et y est B_1 alors z est C_1
R_2 : si x est A_2 ou y est B_2 alors z est C_2
Fait : x est $\overline{x_0}$ et y est $\overline{y_0}$
Conséquence : z est C



Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

- **Méthode d'inférence : Méthode de Larsen**
  - **Considérons les observations : $d_{81}^{obs}, d_{82}^{obs}, g_1^{obs}$ et e_1^{obs}. Le raisonnement ou se décompose comme suit :**

1. **Calcul du degré d'activation de chaque règle :**

$$\alpha_{R_1} = min(\mu_{Faible}(d_{81}^{obs}), \mu_{Faible}(d_{82}^{obs}), \mu_{Moyen}(g_1^{obs}), \mu_{Moyen}(e_1^{obs})) \quad et$$

$$\alpha_{R_2} = min(\mu_{Moyen}(d_{81}^{obs}), \mu_{Moyen}(d_{82}^{obs}), \mu_{Fort}(g_1^{obs}), \mu_{Faible}(e_1^{obs}))$$

2. **Calcul de l'implication : Cette méthode utilise le produit pour définir la conclusion**

$$\mu_{R_1}(d_{81}^{obs}, d_{82}^{obs}, g_1^{obs}, c_1^{obs}, Variation\_g_1) = \mu_{R_1}(d_{81}^{obs}, d_{82}^{obs}; g_1^{obs}, c_1^{obs}) \cdot \mu_{Moyen}(Variation\_g_1)$$

Inférence floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Méthode d'inférence : Méthode de Larsen

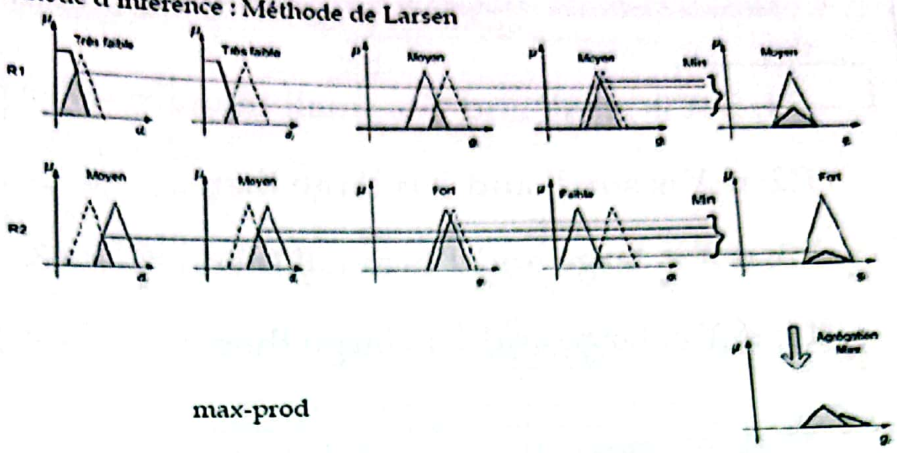
3. Calcul de l'agrégation pour former la conclusion finale floue C :

$$\mu_C = max(\mu_{I_1}, \mu_{I_2})$$

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

- Méthode d'inférence : Méthode de Larsen



max-prod

Inférence floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

- Méthode d'inférence : Méthode de Takagi-Sugeno:

$$\text{If } x \text{ is } A \text{ and } y \text{ is } B \text{ then } z = f(x, y)$$

sous-ensemble flou

Souvent : $f(x, y)$ est une fonction polynomiale en fonction de x et y

Inférence floue

- **Conception de contrôleur flou :**
- **Méthode d'inférence : Méthode de Takagi-Sugeno:**

R1: if X is small and Y is small then $z = -x + y + 1$

R2: if X is small and Y is large then $z = -y + 3$

R3: if X is large and Y is small then $z = -x + 3$

R4: if X is large and Y is large then $z = x + y + 2$

Inférence floue

- **Conception de contrôleur flou :**
- Méthode d'inférence : Méthode de Takagi-Sugeno

1. **Calcul du degré d'activation de chaque règle (en utilisant l'opérateur de Larsen - produit) :**

$$\alpha_{R_i}(x) = \mu_{R_i}(x) = \prod_{j=1}^{m} \mu_{A_{ij}}(x); \quad i = 1..n$$

2. **Calcul de l'implication :**

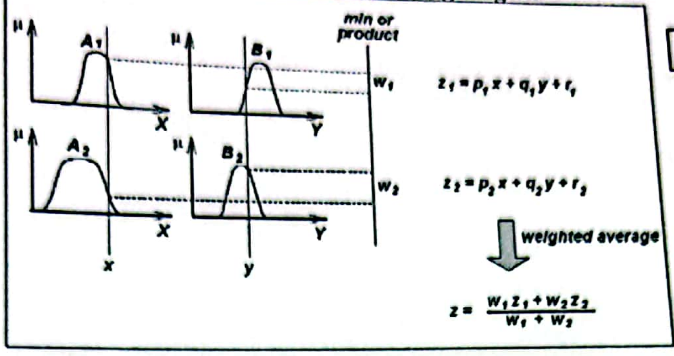
$$y^i = \alpha_{R_i}(x) \times f_i(x_1, \ldots x_m)$$

3. **La sortie finale est calculée comme la moyenne des sorties des règles, pondérées par le poids α_{Ri} :**

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y^i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_{R_i}(x)}$$

Inférence floue

- **Conception de contrôleur flou :**
  - Méthode d'inférence : Méthode de Takagi-Sugeno

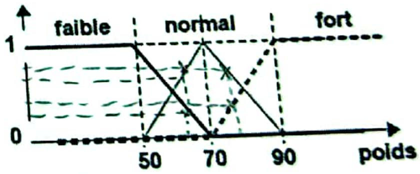


les étapes 4 et 5 d'un contrôleur flou classique n'existent plus

Exercice d'application

On va étudier le problème suivant (toute ressemblance avec un problème réel est pure coïncidence) :

Univers du discours : poids
Variables linguistiques : ***faible***, ***normal***, ***fort***



Univers du discours : nourriture
Variables linguistiques :

- ***rationnée*** : 1800 Kcal
- ***normale*** : 2000 Kcal
- ***renforcée*** : 2200 Kcal

Règles d'inférence :

- Si le poids est faible, alors nourriture renforcée,
- Si le poids est normal, alors nourriture normale,
- Si le poids est fort, alors nourriture rationnée.

Comment doit-on nourrir une personne pesant 65 kg, une personne pesant 78kg ?

Expliquer les étapes d'inférence pour déterminer la quantité de nourriture pour chacun des deux cas précédents. Pour la défuzzification, le centre de gravité peut être calculé ici approximativement en utilisant la méthode d'inférence de type Sugeno d'ordre zéro. Les fonctions d'appartenance de la sortie (nourriture) sont représentées par trois singletons : rationnée [1800 Kcal, 1]; normale [2000 Kcal, 1]; renforcée [2200 Kcal, 1].