Fiche n° 1 : Introduction aux Probabilités

Exercice 1. On lance simultanément deux dés à six faces. Déterminer l'univers Ω et son cardinal dans le cas où les dés sont

1. discernables ;
2. identiques ;
3. identiques et l'on ne s'intéresse qu'à la parité des chiffres obtenus.

Corrigé 1.

1. $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ et $\text{Card}(\Omega) = 36$.
2. $\Omega = \{(i, j) :, 1 \leq i < j \leq 6\}$ et $\text{Card}(\Omega) = 21$.
3. $\Omega = \{(\text{pair}, \text{pair}); (\text{pair}, \text{impair}); (\text{impair}, \text{impair})\}\}$ et $\text{Card}(\Omega) = 3$.

Exercice 2.

1. On joue à pile ou face cinq fois au plus en s'arrêtant quand pile est apparu une fois. Représenter l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. On s'arrête maintenant quand pile est apparu deux fois. Représenter l'univers Ω'.

Corrigé 2. On note P pour Pile et F pour Face.

1. $\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, FFFFP, FFFFF\}$.
2. $\Omega' = \{PP, FPP, PFP, PFFP, FPFP, FFPP, FFFPP, PFFFP, FPFFP, FFPFP, FFFFP, FFFPF, FFPFF, FPFFF, PFFFF, FFFFF\}$

Exercice 3. Résoudre les paradoxes suivants

1. Le prince de Toscane demande à Galilée pourquoi, en lançant trois dés, on obtient plus souvent un total de 10 qu'un total de 9, alors qu'il y a six façons d'obtenir ces résultats.
2. Le Chevalier de Méré demande à Pascal s'il est plus facile d'obtenir un six au moins en lançant quatre fois de suite un seul dé, ou d'obtenir un double six au moins en lançant vingt-quatre fois de suite deux dés.

Corrigé 3.

1. On suppose que les dés sont discernables. On a alors $\text{Card}(\Omega) = 6^3 = 216$. Soient les événements A : « le total fait 9 » et B : « le total fait 10 ». On a alors
   - Pour A : $(1, 2, 6)$ avec 6 possibilités, $(1, 3, 5)$ avec 6 possibilités, $(1, 4, 4)$ avec 3 possibilités, $(2, 2, 5)$ avec 3 possibilités, $(2, 3, 4)$ avec 6 possibilités, $(3, 3, 3)$ avec 1 possibilités. Donc $\text{Card}(A) = 25$ et $\mathbb{P}(A) = 25/216$.
   - Pour B : $(1, 3, 6)$ avec 6 possibilités, $(1, 4, 5)$ avec 6 possibilités, $(2, 2, 6)$ avec 3 possibilités, $(2, 3, 5)$ avec 6 possibilités, $(2, 4, 4)$ avec 3 possibilités, $(3, 3, 4)$ avec 3 possibilités. Donc $\text{Card}(B) = 27$ et $\mathbb{P}(B) = 27/216 > \mathbb{P}(A)$.

2. On suppose les dés équilibrés et indépendants. Dans le cas de 4 lancers de suite d'un dé, la probabilité d'obtenir au moins un 6 est $p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \simeq 0,517747$.
Dans le cas de 24 lancers de suite de deux dés discernables, la probabilité d'obtenir au moins un double 6 est $p_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491404$.

Exercice 4. *On rappelle qu'un jeu de cartes est composé de 4 couleurs (pique, cœur, carreau, trèfle) en parts égales. Pour un jeu de 32 cartes, il y a donc 8 cartes de chaque couleur dont les valeurs sont : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As.*

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on suppose que tous les tirages sont équiprobables. On considère les événements suivants :

A :« La carte est un roi »,

B :« La carte est un trèfle »,

C :« La carte est noire ».

1. Définir en une phrase les événements $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, A \cap B, B \cap C, A \cap C, A \cap B \cap C, A \cup B, B \cup C, A \cup C$ et $A \cup B \cup C$.
2. Calculer les probabilités de A, B, C et des événements décrits à la question 1.
3. (A, B, C) est-elle une famille indépendante ?

Corrigé 4.
1. $\overline{A}$:« La carte n'est pas un roi » ; $\overline{B}$:« La carte n'est pas un trèfle » ; $\overline{C}$:« La carte est rouge » ; $A \cap B$:« La carte est le roi de trèfle » ; $B \cap C$:« La carte est un trèfle » ; $A \cap C$:« La carte est un roi noir » ; $A \cap B \cap C$:« La carte est le roi de trèfle » ; $A \cup B$:« La carte est un roi ou un trèfle » ; $B \cup C$:« La carte est noire » ; $A \cup C$:« La carte est un roi ou noire » ; $A \cup B \cup C$:« La carte est un roi ou noire ».
2. Par équiprobabilité, $\mathbb{P}(A) = 4/32 = 1/8$, $\mathbb{P}(B) = 8/32 = 1/4$, $\mathbb{P}(C) = 16/32 = 1/2$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 7/8$, $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) = 3/4$, $\mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - \mathbb{P}(C) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/32$, $\mathbb{P}(B \cap C) = 8/32 = 1/4$, $\mathbb{P}(A \cap C) = 2/32 = 1/16$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/32$, $\mathbb{P}(A \cup B) = (4 + 7)/32 = 11/32$, $\mathbb{P}(B \cup C) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cup C) = (16 + 2)/32 = 9/16$, $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 9/16$.
3. $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/32 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 1/32$ donc A et B sont indépendants.
$\mathbb{P}(B \cap C) = 1/4 \neq \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$ donc B et C ne sont pas indépendants.
$\mathbb{P}(A \cap C) = 1/16 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ donc A et C sont indépendants.
Ainsi la famille (A, B, C) n'est pas indépendante.

Exercice 5. On considère les événements aléatoires suivants :

A : « Ce jeudi il y aura du vent »,

B : « Ce jeudi il y aura de la pluie ».

Météo-France a annoncé les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{5}.$$

1. A et B sont-ils incompatibles ? Sont-ils indépendants ?
2. Expliciter les événements suivants à l'aide des opérations ensemblistes :
   C : « Ce jeudi, il y aura de la pluie ou du vent »
   D : « Ce jeudi, il y aura de la pluie et du vent »
   E : « Ce jeudi, il n'y aura ni pluie, ni vent »
   F : « Ce jeudi, il y aura de la pluie mais pas de vent »
   G : « Ce jeudi, il y aura ou de la pluie, ou du vent, mais pas les deux ensemble »
   H : « Ce jeudi, il pleuvra mais on ne sait pas s'il y aura du vent »
3. Calculer les probabilités des événements précédents.

Corrigé 5.

1. Puisque $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$, les évènements ne sont pas incompatibles. $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/5 \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 3/8$ donc A et B ne sont pas indépendants.
2. $C = A \cup B$, $D = A \cap B$, $E = \overline{A} \cap \overline{B}$, $F = \overline{A} \cap B$, $G = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$, $H = B$.
3. $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 3/4 + 1/2 - 2/5 = 17/20$,
   $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap B) = 2/5$,
   $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 3/20$,
   $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) = 1/2 - 2/5 = 1/10$,
   $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}((A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 17/20 - 2/5 = 9/20$,
   $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(B) = 1/2$.

Exercice 6. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 3/4$ et $\mathbb{P}(B) = 2/5$.

Trouver les valeurs maximale et minimale de $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Corrigé 6. Comme $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ et que c'est une probabilité, la valeur maximale possible pour $\mathbb{P}(A \cup B)$ est 1. Ainsi, comme

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B),$$

la valeur minimale possible pour $\mathbb{P}(A \cap B)$ est $3/4 + 2/5 - 1 = 3/20$.
Par ailleurs, comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(B)$. La valeur minimale possible pour $\mathbb{P}(A \cup B)$ est donc $\max(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)) = 3/4$. Ainsi, la valeur maximale possible pour $\mathbb{P}(A \cap B)$ est $3/4 + 2/5 - 3/4 = 2/5$.

Exercice 7. On considère 20 personnes parmi lesquelles 10 lisent la revue A, 8 la revue B et 3 lisent les deux revues. Calculer la probabilité de choisir 5 personnes parmi les 20 dans chacun des cas suivants

1. chacune des 5 personnes lit une seule revue ;
2. 3 lisent A, 2 lisent B, chacune ne lisant qu'une revue ;
3. toutes lisent une seule revue, mais 3 au moins la revue A ;
4. trois au moins lisent la revue A.

Corrigé 7. On a donc 3 personnes qui lisent les deux revues, 7 qui ne lisent que la revue A, 5 que la revue B et 5 qui ne lisent aucune des deux revues. Le nombre de façon de choisir les 5 personnes (sans remise et sans ordre) parmi les 20 est C_{20}^5 qui est le cardinal de l'univers.

1. Il y a 12 personnes qui ne lisent qu'une seule revue et on doit en choisir 5 parmi les 12. Ainsi $p_1 = \dfrac{C_{12}^5}{C_{20}^5}$.
2. On choisit 3 personnes parmi les 7 qui ne lisent que A et 2 parmi les 5 qui ne lisent que B. Ainsi $p_2 = \dfrac{C_7^3 \cdot C_5^2}{C_{20}^5}$.
3. On choisit donc 3, 4 ou 5 personnes qui lisent la revue A seule parmi les 7, les autres ne lisant que la revue B. Ainsi $p_3 = \dfrac{C_7^3 \cdot C_5^2 + C_7^4 \cdot C_5^1 + C_7^5}{C_{20}^5}$.
4. On choisit donc 3, 4 ou 5 personnes qui lisent la revue A parmi les 10, les autres étant choisi parmi les 10 personnes restantes. Ainsi $p_4 = \dfrac{C_{10}^3 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^4 \cdot C_{10}^1 + C_{10}^5}{C_{20}^5}$.

Exercice 8. Jouons au Loto ! On rappelle qu'il s'agit de cocher 5 numéros distincts dans une grille de nombres entre 1 et 49, plus un numéro complémentaire entre 1 et 10, et que les 5 boules pour les numéros sont successivement tirées au sort et celle du complémentaire à part après.

Calculer la probabilité d'obtenir

1. les 5 bons numéros ;
2. 4 bons numéros et le complémentaire.
3. au moins 4 bons numéros.

Corrigé 8. On a $\mathrm{Card}(\Omega) = C_{49}^5 \cdot C_{10}^1 = 10 \cdot C_{49}^5$.

1. $p_1 = \dfrac{1}{C_{49}^5}$.
2. $p_2 = \dfrac{C_5^4 \cdot C_{44}^1 \cdot C_1^1}{10 \cdot C_{49}^5}$.
3. $p_3 = \dfrac{C_5^4}{C_{49}^5} + \dfrac{1}{C_{49}^5}$.

Exercice 9. On considère deux gènes a et b tels que la redondance de l'un d'entre eux (*i.e.* le fait de posséder aa ou bb) entraîne l'acquisition d'un caractère $\mathcal{C}$. Léa et Tristan possèdent chacun la combinaison ab et attendent un enfant : ils lui transmettront soit le gène a, soit le gène b, avec même probabilité. Soient les événements

$$A : \text{ « Léa transmet le gène } a \text{ »}, \quad B : \text{ « Tristan transmet le gène } b \text{ »},$$

$$C : \text{ « l'enfant présente le caractère } \mathcal{C} \text{ »}.$$

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

Corrigé 9. On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$. De plus, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = 1/4 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(C \cap B) = 1/4 = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(B)$, mais $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = 1/8$.

Exercice 10. Montrer que

$$A \perp\!\!\!\perp B \iff A \perp\!\!\!\perp \overline{B} \iff \overline{A} \perp\!\!\!\perp B \iff \overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}.$$

Corrigé 10. Par définition, $A \perp\!\!\!\perp B \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. On a alors

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}) \iff A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$$
$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(\overline{A}) \cdot \mathbb{P}(B) \iff \overline{A} \perp\!\!\!\perp B$$
$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}) \iff \overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$$

Exercice 11. On lance deux pièces mal équilibrées pour lesquelles la probabilité d'obtenir pile est égale à $p \in]0; 1[$ pour chacune des deux (les pièces sont supposées être indépendantes). On considère les événements suivants

A : « obtenir pile au premier lancer » et B : « les résultats des deux lancers sont différents ».

Vérifier que A et B sont indépendants si et seulement si $p = 1/2$.

Corrigé 11. On a $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ avec $\mathbb{P}(PP) = p^2$, $\mathbb{P}(PF) = \mathbb{P}(FP) = p(1-p)$ et $\mathbb{P}(FF) = (1-p)^2$. Alors $\mathbb{P}(A) = p^2 + p(1-p) = p$, $\mathbb{P}(B) = 2p(1-p)$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = p(1-p)$. A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire

$$p(1-p) = 2p^2(1-p) \iff 2p = 1 \iff p = \frac{1}{2}.$$

Exercice 12. On jette un dé à 6 faces non truqué à deux reprises. On note A_i l'événement « le premier lancer donne i », pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et S l'événement « la somme des deux lancers vaut 7 ».

1. Montrer que quel soit i, les événements A_i et S sont indépendants.
2. Est-ce toujours le cas si on remplace S par l'événement « la somme des deux lancers vaut 4 » ?

Corrigé 12. 1. Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on a $\mathbb{P}(A_i) = 1/6$. De plus, en notant par le couple (i, j), $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, le résultat des deux lancers, on a

$$S = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

Par équiprobabilité, comme il y a 36 possibilités en tout, on a alors $\mathbb{P}(S) = 6/36 = 1/6$.

Enfin, pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on a $A_i \cap S = \{(i, 7-i)\}$, donc $\mathbb{P}(A_i \cap S) = 1/36$. Les événements A_i et S sont alors indépendants pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ puisque $\mathbb{P}(A_i \cap S) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(S)$.

2. Si on pose S : « la somme des deux lancers vaut 4 », alors $S = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ et $\mathbb{P}(S) = 3/36 = 1/12$. De plus,

$$\mathbb{P}(A_i \cap S) = \left\{ \begin{array}{rcl} 1/36 & \text{si} & i \in \{1,2,3\} \\ 0 & \text{si} & i \in \{4,5,6\} \end{array} \right. .$$

Dans ce cas, les événements A_i et S ne sont pas indépendants.

Exercice 13. Un test est utilisé pour dépister une maladie. Si le patient est effectivement atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Cependant, il se peut que le résultat du test soit positif alors que le patient est en bonne santé, et ceci se produit dans 2% des cas.

1. Sachant qu'en moyenne un patient sur 1 000 est atteint par la maladie à dépister, calculer la probabilité qu'un patient soit atteint sachant que le test a été positif ?
2. Comment améliorer ce résultat ?

Corrigé 13. 1. Soient les événements M :« Le patient est atteint par la maladie » et P :« Le test est positif ». D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(M) = 0,001$, $\mathbb{P}(P|M) = 0,99$ et $\mathbb{P}(P|\overline{M}) = 0,02$. Alors par la formule de Bayes

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M|P) &= \frac{\mathbb{P}(M \cap P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|\overline{M})\mathbb{P}(\overline{M})} \\ &= \frac{0,99 \times 0,001}{0,99 \times 0,001 + 0,02 \times 0,999} \approx 0,04721. \end{aligned}$$

2. Pour améliorer ce résultat, il faut diminuer la probabilité de faux positif, à savoir $\mathbb{P}(P|\overline{M})$. En effet, si l'on prend $\mathbb{P}(P|\overline{M}) = 0,001$, on a alors par la même formule $\mathbb{P}(M|P) \approx 0,4977$.

Exercice 14. Une franchise de mode possède trois magasins A, B, C qui reçoivent respectivement 20%, 30% et 50% de la production. La probabilité qu'un produit invendu (événement noté I) ait été retourné par A, B ou C est : $\mathbb{P}(I|A) = 0,05$, $\mathbb{P}(I|B) = 0,04$, $\mathbb{P}(I|C) = 0,01$.

1. Déduire de l'énoncé les probabilités $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)$ qu'un article soit respectivement distribué par A,B ou C. Rappeler les deux expressions de la formule des probabilités totales pour la partition $\{A, B, C\}$ et calculer la probabilité qu'un produit soit invendu.
2. Calculer la probabilité pour qu'un produit invendu provienne de A.
3. Donner la probabilité pour qu'un produit ait été vendu par C.

Corrigé 14. 1. D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(A) = 0,2$, $\mathbb{P}(B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(C) = 0,5$. Comme $\{A, B, C\}$ est une partition de l'univers Ω, la première formule des probabilités totales nous donne $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Pour l'événement I, la seconde formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(I) &= \mathbb{P}(I|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(I|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(I|C)\mathbb{P}(C) \\ &= 0,05 \times 0,2 + 0,04 \times 0,3 + 0,01 \times 0,5 = 0,027. \end{aligned}$$

2. On calcule alors
$$\mathbb{P}(A|I) = \frac{\mathbb{P}(I \cap A)}{\mathbb{P}(I)} = \frac{\mathbb{P}(I|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(I)} = \frac{0,05 \times 0,2}{0,027} = \frac{10}{27} \approx 0,3704.$$
3. On calcule alors
$$\mathbb{P}(C|\overline{I}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{I} \cap C)}{\mathbb{P}(\overline{I})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{I}|C)\mathbb{P}(C)}{1 - \mathbb{P}(I)} = \frac{(1 - \mathbb{P}(I|C))\,\mathbb{P}(C)}{1 - \mathbb{P}(I)} = \frac{0,99 \times 0,5}{1 - 0,027} \approx 0,5087.$$

Exercice 15. Quatre personnes A, B, C et D tirent à tour de rôle dans cet ordre une boule dans une urne contenant deux boules blanches et trois boules noires. Chaque boule est retirée du jeu et la première personne qui tire une boule blanche gagne le jeu.

1. Calculer la probabilité de gain de chaque joueur.
2. On suppose maintenant que chaque joueur tire une boule dans le même ordre, mais sans la regarder. À la fin, les quatre joueurs regardent leurs boules en même temps. Celui (ou ceux) qui a (ont) tiré une boule blanche gagne(nt). Montrer que la probabilité de gagner pour chacun des joueurs est la même.

Corrigé 15. Soient les événements B_i :« une boule blanche est tirée au $i^{\text{ème}}$ tirage » et N_i :« une boule noire est tirée au $i^{\text{ème}}$ tirage », avec $1 \leq i \leq 4$.

1. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1) = 2/5$,
   $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_2 \cap N_1) = \mathbb{P}(B_2|N_1) \cdot \mathbb{P}(N_1) = 1/2 \times 3/5 = 3/10$,
   $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B_3 \cap N_2 \cap N_1) = \mathbb{P}(B_3|N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_2 \cap N_1) = \mathbb{P}(B_3|N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_2|N_1) \cdot \mathbb{P}(N_1) = 2/3 \times 1/2 \times 3/5 = 1/5$,
   $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B_4 \cap N_3 \cap N_2 \cap N_1) = \mathbb{P}(B_4|N_3 \cap N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_3 \cap N_2 \cap N_1) = \mathbb{P}(B_4|N_3 \cap N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_3|N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_2 \cap N_1) = \mathbb{P}(B_4|N_3 \cap N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_3|N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_2|N_1)\mathbb{P}(N_1) = 1 \times 1/3 \times 1/2 \times 3/5 = 1/10$.
2. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1) = 2/5$,
   $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_2 \cap N_1) + \mathbb{P}(B_2 \cap B_1) = \mathbb{P}(B_2|N_1) \cdot \mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(B_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) = 1/2 \times 3/5 + 1/4 \times 2/5 = 2/5$,
   $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B_3 \cap N_2 \cap N_1) + \mathbb{P}(B_3 \cap B_2 \cap N_1) + \mathbb{P}(B_3 \cap N_2 \cap B_1) = \mathbb{P}(B_3|N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_2|N_1) \cdot \mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(B_3|B_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(B_2|N_1) \cdot \mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(B_3|N_2 \cap B_1) \cdot \mathbb{P}(N_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) = 2/3 \times 1/2 \times 3/5 + 1/3 \times 1/2 \times 3/5 + 1/3 \times 3/4 \times 2/5 = 2/5$,
   $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B_4 \cap N_3 \cap N_2 \cap N_1) + \mathbb{P}(B_4 \cap B_3 \cap N_2 \cap N_1) + \mathbb{P}(B_4 \cap N_3 \cap B_2 \cap N_1) + \mathbb{P}(B_4 \cap N_3 \cap N_2 \cap B_1) = \mathbb{P}(B_4|N_3 \cap N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_3|N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_2|N_1)\mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(B_4|B_3 \cap N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(B_3|N_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_2|N_1)\mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(B_4|N_3 \cap B_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(N_3|B_2 \cap N_1) \cdot \mathbb{P}(B_2|N_1)\mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(B_4|N_3 \cap N_2 \cap B_1) \cdot \mathbb{P}(N_3|N_2 \cap B_1) \cdot \mathbb{P}(N_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) = 1 \times 1/3 \times 1/2 \times 3/5 + 1/2 \times 2/3 \times 1/2 \times 3/5 + 1/2 \times 2/3 \times 1/2 \times 3/5 + 1/2 \times 2/3 \times 3/4 \times 2/5 = 2/5$.

Exercice 16. Une élection a lieu au scrutin majoritaire à deux tours. Deux candidats A et B sont en lice. Au premier tour, 40% des voix vont à A et 45% à B, les autres constituant les abstentions. Aucun des deux candidats n'ayant la majorité absolue, un second tour est donc organisé et l'on estime que tout électeur ayant voté la première fois votera à nouveau, et un sondage indique que 5% des voix de A se reporteront sur B, et 10% des voix de B iront à A. De plus, on estime que les deux tiers des abstentionnistes du premier tour voteront, à raison de 60% pour A et 40% pour B.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un abstentionniste du premier tour vote pour A ? Pour B ?
2. D'après ce sondage, quel candidat a la plus forte probabilité d'être élu ?

Corrigé 16. Soient les événements A_i : « l'électeur vote pour A au tour i », B_i : « l'électeur vote pour B au tour i » et C_i : « l'électeur s'abstient au tour i », avec $1 \leq i \leq 2$. D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(A_1) = 0,4$, $\mathbb{P}(B_1) = 0,45$, $\mathbb{P}(C_1) = 0,15$, $\mathbb{P}(B_2|A_1) = 0,05$, $\mathbb{P}(A_2|B_1) = 0,1$ et $\mathbb{P}(C_2|C_1) = 1/3$.

1. $\mathbb{P}(A_2|C_1) = 2/3 \times 0,6 = 0,4$ et $\mathbb{P}(B_2|C_1) = 2/3 \times 0,4 = 4/15$.
2. $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap C_1) = \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A_2|C_1) \cdot \mathbb{P}(C_1) = 0,95 \times 0,4 + 0,1 \times 0,45 + 0,4 \times 0,15 = 0,485$.
   $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2 \cap A_1) + \mathbb{P}(B_2 \cap B_1) + \mathbb{P}(B_2 \cap C_1) = \mathbb{P}(B_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2|C_1) \cdot \mathbb{P}(C_1) = 0,05 \times 0,4 + 0,9 \times 0,45 + 4/15 \times 0,15 = 0,465$.
   $\mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(C_2 \cap A_1) + \mathbb{P}(C_2 \cap B_1) + \mathbb{P}(C_2 \cap C_1) = \mathbb{P}(C_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(C_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(C_2|C_1) \cdot \mathbb{P}(C_1) = 0 \times 0,4 + 0 \times 0,45 + 1/3 \times 0,15 = 0,05$.