Fiche n° 2 : Variables Aléatoires Discrètes

Exercice 1. Trois urnes U_1, U_2, U_3 contiennent chacune 10 boules indiscernables numérotées de 1 à 10. On tire une boule dans chacune des urnes et on suppose les tirages indépendants.

1. Quelle hypothèse peut-on faire sur les tirages grâce à l'indiscernabilité ? Donner alors la probabilité d'obtenir un 4 à chaque tirage.
2. Soit X le nombre de 4 obtenus lors de cette épreuve de 3 tirages.
   (a) Exprimer les événements élémentaires de X en fonction des événements A_i : « Le tirage dans l'urne U_i donne un 2 » ($i = 1, 2, 3$).
   (b) Donner la loi de X, son diagramme en bâtons et sa fonction de répartition F_X.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X (sous forme fractionnelle).
   (d) Retrouvez $\mathbb{P}(X \leq 2)$, $\mathbb{P}(X = 2)$ puis $\mathbb{P}(1 < X \leq 2)$ à l'aide de F_X.

Corrigé 1. 1. Comme les boules sont indiscernables, cela signifie qu'on a la même probabilité de tirer chacune des boules (équiprobabilité). On a alors 1 chance sur 10 de tirer la boule n° 2 dans chacune des urnes, et par indépendance des tirages, on a alors que la probabilité de tirer la boule n° 2 dans chaque urne est de $(1/10)^3 = 0,001$.

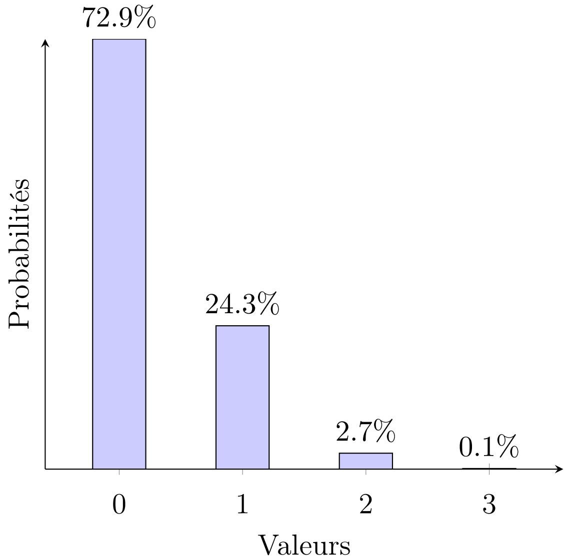
2. (a) La variable X est à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$. On a $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2})$,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}\left((A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)\right),$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}\left((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)\right),$$

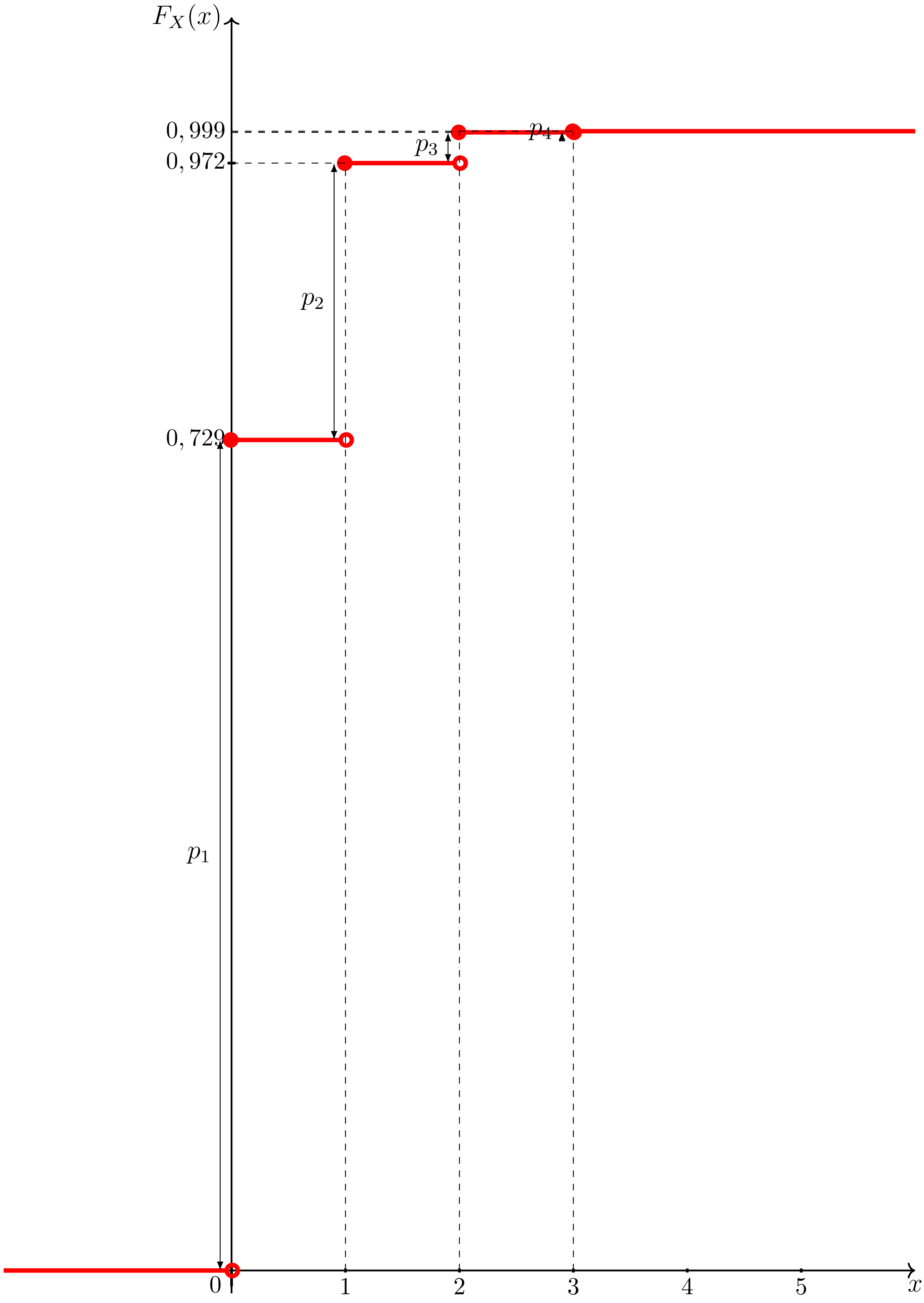
et $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

(b) On a $\mathbb{P}(A_i) = 1/10$, $i = 1, 2, 3$. Par indépendance des tirages, on a $\mathbb{P}(X = 3) = (1/10)^3 = 0,001$ et $\mathbb{P}(X = 0) = (9/10)^3 = 0,729$. Par unions disjointes et indépendance, on a $\mathbb{P}(X = 1) = 3 \times 1/10 \times (9/10)^2 = 0,243$ et $\mathbb{P}(X = 2) = 3 \times (1/10)^2 \times 9/10 = 0,027$.



Sa fonction de répartition s'écrit

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\\ 0,729 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 0,972 & \text{si} \quad x \in [1,2[\\ 0,999 & \text{si} \quad x \in [2,3[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [3,+\infty[\end{cases}.$$



(c)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{3} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{243}{1000} + 2 \times \frac{27}{1000} + 3 \times \frac{1}{1000} = \frac{3}{10},$$

et

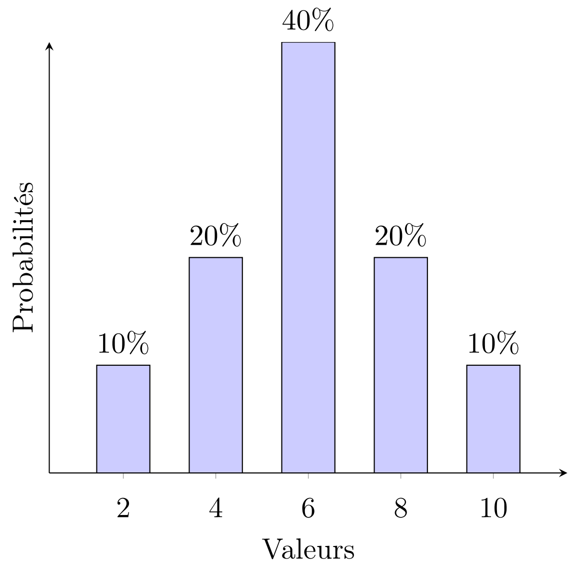
$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \sum_{i=0}^{3}(x_i - \mathbb{E}[X])^2\mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{729}{1000} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \frac{243}{1000} + \left(\frac{17}{10}\right)^2 \cdot \frac{27}{1000} + \left(\frac{27}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{1000} \\
&= \frac{27}{100}.
\end{aligned}
$$

(d) $\mathbb{P}(X \leq 2) = F_X(2) = 0,999$, $\mathbb{P}(X = 2) = F_X(2) - F_X(2-) = 0,027$, $\mathbb{P}(1 < X \leq 2) = \mathbb{P}(X \leq 2) - \mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(2) - F_X(1) = 0,027$.

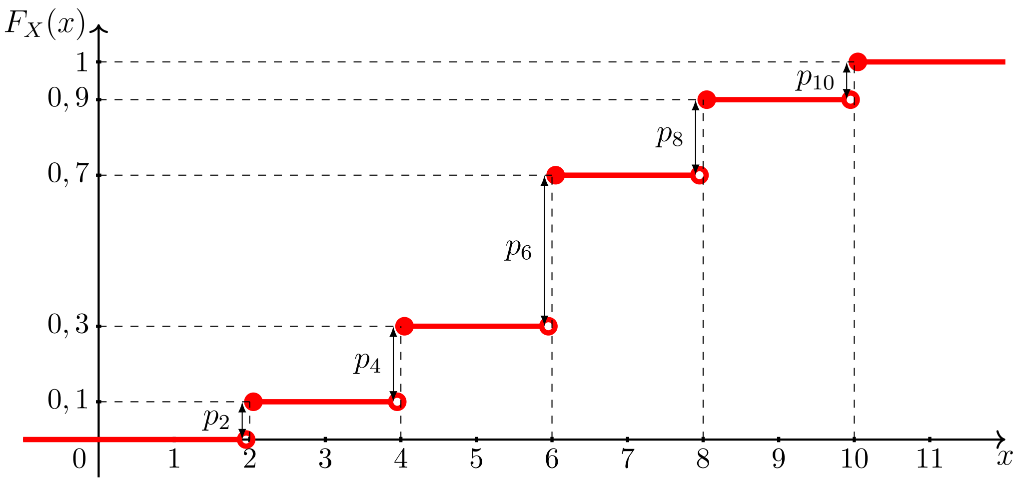
Exercice 2. Une variable aléatoire X peut prendre des valeurs paires entre 2 et 10 avec pour probabilités $p_2 = 0,1$, $p_4 = 0,2$, $p_6 = 0,4$, $p_8 = 0,2$.

1. Quelle est la probabilité p_{10} d'obtenir un 10 ?
2. Représenter le diagramme en bâtons de X, ainsi que sa fonction de répartition.
3. Calculer son espérance et sa variance.
4. Soit les événements $A = \{X \leq 6\}$, $B = \{X \geq 8\}$, $C = \{X > 4\}$.
   Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cup C)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap C)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$, $\mathbb{P}(A|C)$, $\mathbb{P}(B|C)$, $\mathbb{P}(B|A)$.

Corrigé 2.
1. $p_{10} = 1 - \sum_i p_i = 0,1$.
2. Diagramme en bâtons de X



Fonction de répartition de X



3. On a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i i \cdot p_i = 2 \times 0,1 + 4 \times 0,2 + 6 \times 0,4 + 8 \times 0,2 + 10 \times 0,1 = 6,$$

et

$$\mathbb{V}(X) = \sum_i (i - \mathbb{E}[X])^2 \cdot p_i = 4^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,2 + 0 \times 0,4 + 2^2 \times 0,2 + 4^2 \times 0,1 = 4,8.$$

4. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \leq 6) = p_2 + p_4 + p_6 = 0,7.$
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X \geq 8) = p_8 + p_{10} = 0,3.$
$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(X > 4) = p_6 + p_8 + p_{10} = 0,7.$
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$
$\mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$
$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(X = 6) = 0,4.$
$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) = 0,3.$
$\mathbb{P}(A|C) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{0,4}{0,7} = \dfrac{4}{7}.$
$\mathbb{P}(B|C) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{0,3}{0,7} = \dfrac{3}{7}.$
$\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = 0.$

Exercice 3. Dans un atelier textile, la température exprimée en Farenheit ne s'écarte jamais de plus de 2 degrés de 62 degrés. Plus précisément, la température est une variable aléatoire F prenant les valeurs $60, 61, 62, 63, 64$ avec comme probabilités

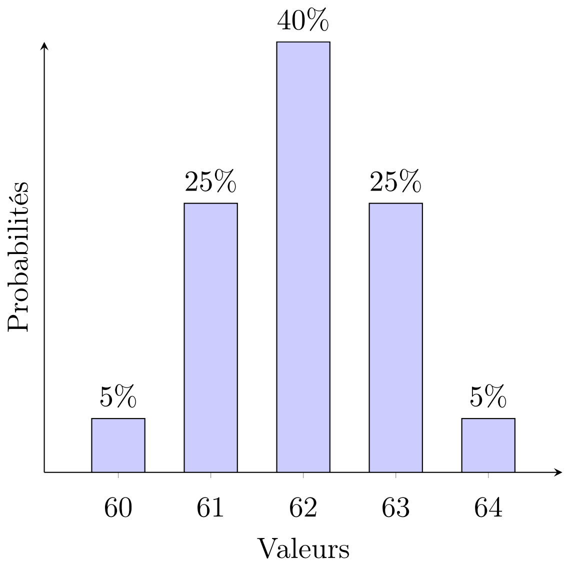
$$\mathbb{P}(F = 60) = 0,05, \quad \mathbb{P}(F = 61) = 0,25, \quad \mathbb{P}(F = 62) = 0,4,$$

$$\mathbb{P}(F = 63) = 0,25, \quad \mathbb{P}(F = 64) = 0,05.$$

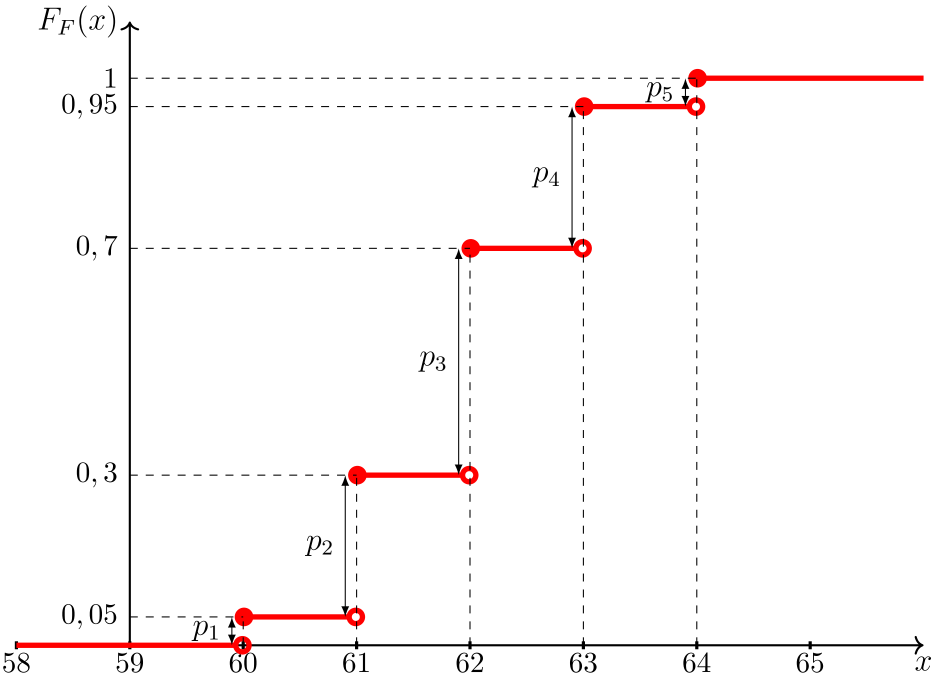
1. Représenter graphiquement la loi de F (diagramme en bâtons et fonction de répartition).
2. Calculer l'espérance et la variance de F..

3. On a décidé de lire la température C en degrés Celcius, dont l'échelle satisfait $C = \frac{5}{9}(F-32)$.
Donner la loi de C, son espérance et sa variance.

Corrigé 3. 1. Diagramme en bâtons de F



Fonction de répartition de F



2.

$$\mathbb{E}[F] = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \mathbb{P}(F = x_i) = 60 \times 0,05 + 61 \times 0,25 + 62 \times 0,4 + 63 \times 0,25 + 64 \times 0,05 = 62.$$

$$\mathbb{V}(F) = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \mathbb{E}[F])^2 \cdot \mathbb{P}(F = x_i) = 4 \times 0,05 + 0,25 + 0 + 0,25 + 4 \times 0,05 = 0,9.$$

3. La température C est à valeurs dans

$$\left\{28 \cdot \frac{5}{9}, 29 \cdot \frac{5}{9}, 30 \cdot \frac{5}{9}, 31 \cdot \frac{5}{9}, 32 \cdot \frac{5}{9}\right\} = \left\{\frac{140}{9}, \frac{145}{9}, \frac{50}{3}, \frac{155}{9}, \frac{160}{9}\right\},$$

avec

$$\mathbb{P}\left(C = \frac{140}{9}\right) = \mathbb{P}(F = 60) = 0,05, \quad \mathbb{P}\left(C = \frac{145}{9}\right) = \mathbb{P}(F = 61) = 0,25,$$

$$\mathbb{P}\left(C = \frac{50}{3}\right) = \mathbb{P}(F = 62) = 0,4, \quad \mathbb{P}\left(C = \frac{155}{9}\right) = \mathbb{P}(F = 63) = 0,25,$$

$$\mathbb{P}\left(C = \frac{160}{9}\right) = \mathbb{P}(F = 64) = 0,05.$$

Alors, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}[C] = \frac{5}{9}\left(\mathbb{E}[F] - 32\right) = 62 \cdot \frac{5}{9} = \frac{310}{9},$$

et par propriété de la variance

$$\mathbb{V}(C) = \frac{25}{81}\mathbb{V}(F) = \frac{5}{18}.$$

Exercice 4. Une loterie comporte 20 billets dont 2 gagnants : un à 100 euros et un autre à 60 euros. On achète trois billets.

1. Calculer les probabilités des événements :
   A : « Obtenir les deux billets gagnants »,
   B : « Obtenir le billet gagnant à 100 euros uniquement »,
   C : « Obtenir le billet gagnant à 60 euros uniquement »,
   D : « N'obtenir aucun billet gagnant ».
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui, à tout tirage de trois billets, associe la somme gagnée et calculer son espérance.
   Déterminer le prix de vente des billets à fixer pour que la vente de 20 billets rapporte cette somme.

Corrigé 4. 1. $P(A) = \dfrac{C_2^2 \cdot C_{18}^1}{C_{20}^3} = \dfrac{3}{190}.$

$P(B) = \dfrac{C_1^1 \cdot C_{18}^2}{C_{20}^3} = \dfrac{51}{380}.$

$P(C) = \dfrac{C_1^1 \cdot C_{18}^2}{C_{20}^3} = \dfrac{51}{380}.$

$P(D) = \dfrac{C_{18}^3}{C_{20}^3} = \dfrac{68}{95}.$

2. On a $\mathbb{P}(X = 160) = \mathbb{P}(A) = \dfrac{3}{190}$.

$\mathbb{P}(X = 100) = \mathbb{P}(B) = \dfrac{51}{380}$.

$\mathbb{P}(X = 60) = \mathbb{P}(C) = \dfrac{51}{380}$.

$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(D) = \dfrac{68}{95}$.

Alors
$$\mathbb{E}[X] = 160 \times \frac{3}{190} + 100 \times \frac{51}{380} + 60 \times \frac{51}{380} = 24 \text{ euros.}$$
Le prix d'un billet de loterie doit donc être égal à $24/20 = 1,20$ euros.

Exercice 5. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$ toutes les deux. La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant

x \ y	-1	0	1
-1	$1/5$	0	$1/5$
0	$1/15$	$1/15$	$1/15$
1	$1/5$	0	$1/5$

1. Donner les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer la covariance du couple (X, Y).
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé 5. 1. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\
&= \sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=-1}^{1} ij\mathbb{P}(X = i, Y = j) \\
&\quad - \left(\sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=-1}^{1} i\mathbb{P}(X = i, Y = j)\right)\left(\sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=-1}^{1} j\mathbb{P}(X = i, Y = j)\right) \\
&= (-1)^2\frac{1}{5} + (-1)\frac{1}{5} + (-1)\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \\
&\quad - \left(-1 \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right)\left(-1 \times \frac{7}{15} + \frac{7}{15}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

2.
$$\mathbb{P}(X = -1) = \sum_{j=-1}^{1} \mathbb{P}(X = -1, Y = j) = 2/5,$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{j=-1}^{1} \mathbb{P}(X = 0, Y = j) = 1/5,$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\sum_{j=-1}^{1}\mathbb{P}(X=1,Y=j)=2/5,$$

$$\mathbb{P}(Y=-1)=\sum_{i=-1}^{1}\mathbb{P}(X=i,Y=-1)=7/15,$$

$$\mathbb{P}(Y=0)=\sum_{i=-1}^{1}\mathbb{P}(X=i,Y=0)=1/15,$$

$$\mathbb{P}(Y=1)=\sum_{i=-1}^{1}\mathbb{P}(X=i,Y=1)=7/15.$$

3. X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall i,j\in\{-1,0,1\},\quad \mathbb{P}(x=i,Y=j)=\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j).$$

Or

$$\mathbb{P}(X=1,Y=0)=0\neq\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0)=\frac{2}{75},$$

donc X et Y ne sont pas indépendantes. On remarque que leur covariance est nulle mais qu'elles ne sont pas indépendantes : c'est donc un exemple pour montrer que la réciproque de la propriété suivante est en général fausse : si X est indépendante de Y, alors $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

Exercice 6. Un sac contient 7 jetons : trois n$^{\circ}$ 0 et quatre n$^{\circ}$ 1. On effectue deux tirages d'un jeton sans remise. Soit X le n$^{\circ}$ sorti au 1$^{\text{er}}$ tirage et Y celui du 2$^{\text{nd}}$.
Calculer

1. La loi du couple (X,Y).
2. Les lois marginales.
3. Les lois conditionnelles.

Corrigé 6. 1. Les v.a. sont à valeurs dans $\{0,1\}$. La loi du couple (X,Y) est

$x \backslash y$	0	1
0	$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$
1	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$

2. Lois marginales.

x	0	1
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$

y	0	1
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$

On retrouve bien les mêmes lois marginales.

3. Lois conditionnelles : on utilise la formule suivante

$$\forall x, y \in \{0,1\}, \quad \mathbb{P}(X=x|Y=y)=\frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}.$$

x	0	1
$\mathbb{P}(X=x\|Y=0)$	$\frac{1}{7}\times\frac{7}{3}=\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}\times\frac{7}{3}=\frac{2}{3}$
$\mathbb{P}(X=x\|Y=1)$	$\frac{2}{7}\times\frac{7}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}\times\frac{7}{4}=\frac{1}{2}$

On utilise maintenant la formule suivante

$$\forall x, y \in \{0,1\}, \quad \mathbb{P}(Y=y|X=x)=\frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}.$$

y	0	1
$\mathbb{P}(Y=y\|X=0)$	$\frac{1}{7}\times\frac{7}{3}=\frac{1}{3}$	$\frac{7}{2}\times\frac{7}{3}=\frac{2}{3}$
$\mathbb{P}(Y=y\|X=1)$	$\frac{2}{7}\times\frac{7}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}\times\frac{7}{4}=\frac{1}{2}$

On trouve le même résultat que précédemment (en inversant les variables X et Y) car les lois marginales de X et Y sont les mêmes.

Exercice 7. On considère le même énoncé que pour l'exercice précédent mais les tirages se font avec remise.
Calculer

1. La loi du couple (X, Y).
2. Les lois marginales.
3. Les lois conditionnelles.
4. La loi de la somme $X + Y$.

Corrigé 7. 1. Les v.a. sont à valeurs dans $\{0, 1\}$. La loi du couple (X, Y) est

$x \backslash y$	0	1
0	$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$	$\frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$
1	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$	$\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

2. Lois marginales.

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{9}{49} + \frac{12}{49} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$	$\frac{12}{49} + \frac{16}{49} = \frac{28}{49} = \frac{4}{7}$

y	0	1
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{9}{49} + \frac{12}{49} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$	$\frac{12}{49} + \frac{16}{49} = \frac{28}{49} = \frac{4}{7}$

On retrouve bien les mêmes lois marginales.

3. Lois conditionnelles : on utilise la formule suivante

$$\forall x, y \in \{0, 1\}, \quad \mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x \| Y = 0)$	$\frac{9}{49} \times \frac{7}{3} = \frac{3}{7}$	$\frac{12}{49} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{7}$
$\mathbb{P}(X = x \| Y = 1)$	$\frac{12}{49} \times \frac{7}{4} = \frac{3}{7}$	$\frac{16}{49} \times \frac{7}{4} = \frac{4}{7}$

Dans le cas avec remise, la loi marginale de X est la même que la loi conditionnelle : Y n'a donc aucune influence sur X et les variables aléatoires sont donc indépendantes.

On utilise maintenant la formule suivante

$$\forall x, y \in \{0,1\}, \quad \mathbb{P}(Y=y|X=x) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}.$$

y	0	1
$\mathbb{P}(Y=y\|X=0)$	$\frac{9}{49} \times \frac{7}{3} = \frac{3}{7}$	$\frac{12}{49} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{7}$
$\mathbb{P}(Y=y\|X=1)$	$\frac{12}{49} \times \frac{7}{4} = \frac{3}{7}$	$\frac{16}{49} \times \frac{7}{4} = \frac{4}{7}$

On retrouve ici l'indépendance entre X et Y : X n'a aucune influence sur Y puisque la loi conditionnelle est la même que la loi marginale.

4. Pour la somme $X+Y$ il y a 3 valeurs possibles : 0,1 ou 2. La loi de $X+Y$ est alors donnée à partir de la loi jointe de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=0) &= \mathbb{P}(X=0, Y=0) = \frac{9}{49}, \\
\mathbb{P}(X+Y=1) &= \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) = \frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \frac{24}{49}, \\
\mathbb{P}(X+Y=2) &= \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{16}{49}.
\end{aligned}$$

Exercice 8. Dans une population donnée, la probabilité de trouver un gène Z (responsable de la dégradation rapide des graisses) actif est de 5%. Une expérience a été menée sur un échantillon de 25 personnes dont on veut étudier l'obésité éventuelle.
Soit X le nombre de patients possédant ce gène Z actif.

1. Quelle est la probabilité de déceler lors de cette expérience la présence d'un gène inactif chez 22 personnes au moins ?
2. Quelle est la probabilité de trouver 5 personnes possédant ce gène Z actif ? Combien de combinaisons sont possibles ?

Corrigé 8. 1. On a $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(25; 0,05)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 22) &= \mathbb{P}(X=22) + \mathbb{P}(X=23) + \mathbb{P}(X=24) + \mathbb{P}(X=25) \\
&= C_{25}^{22}(0,05)^{22}(0,95)^3 + C_{25}^{23}(0,05)^{23}(0,95)^2 + C_{25}^{24}(0,05)^{24}(0,95) + (0,05)^{25} \\
&\approx 4,73394 \cdot 10^{-26}.
\end{aligned}$$

2. On a $C_{25}^{5} = 53\,130$ combinaisons possibles et la probabilité est

$$\mathbb{P}(X=5) = C_{25}^{5}(0,05)^5(0,95)^{20} \approx 0,005952.$$

Exercice 9. Dans un magasin de mode, la probabilité d'achat d'un client est évaluée à $p = 0,1$ et en moyenne le magasin reçoit la visite de 10 clients en une heure.
On note X le nombre d'acheteurs en une heure, Y le nombre de clients entrés jusqu'à avoir enfin un acheteur et Z le nombre d'acheteurs sur une journée de 10 heures.

1. Identifier les lois de X, Y et Z.
2. Donner les probabilités des événements élémentaires de X, Y et Z.
3. Calculer leurs espérances et variances.
4. Quel est le nombre minimum de clients que doit recevoir le magasin pour qu'il y ait enfin un acheteur avec une probabilité d'au moins 90% ?
5. Quelle approximation utiliser pour évaluer le nombre d'acheteurs en une journée de 10 heures ? Pourquoi est-elle possible et judicieuse ? Évaluer alors les probabilités d'avoir respectivement 1, 4, 10 ou 20 acheteurs dans une journée de 10h.

Corrigé 9. 1. On a $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(10; 0,1)$, $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}(0,1)$ et $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(100; 0,1)$.

2. On a
$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 10\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = C_{10}^k (0,1)^k (0,9)^{10-k},$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(Y = k) = 0,1 \times (0,9)^{k-1},$$
et
$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 100\}, \quad \mathbb{P}(Z = k) = C_{100}^k (0,1)^k (0,9)^{100-k}.$$
3. $\mathbb{E}[X] = 10 \times 0,1 = 1$, $\mathbb{V}(X) = 10 \times 0,1 \times 0,9 = 0,9$, $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{0,1} = 10$, $\mathbb{V}(Y) = \frac{0,9}{0,1^2} = 90$, $\mathbb{E}[Z] = 100 \times 0,1 = 10$, $\mathbb{V}(Z) = 100 \times 0,1 \times 0,9 = 9$.
4. On cherche le nombre n de clients tels que
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq n) \geq 0,90 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} 0,1(0,9)^{k-1} \geq 0,9 \Longleftrightarrow 0,1 \cdot \frac{1-(0,9)^n}{1-0,9} \geq 0,90 \\ &\Longleftrightarrow \quad (0,9)^n \leq 0,1 \Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)} \approx 21,8543.\end{aligned}$$
Il faut donc au minimum attendre d'avoir 22 clients pour qu'il y ait au moins 90% de chance d'avoir un acheteur/
5. On peut approcher la loi de Z par une loi de Poisson puisque $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $n \cdot p < 15$, en posant $\lambda = n \cdot p = 10$. On a alors
$$\mathbb{P}(Z = 1) \approx e^{-10} \approx 0,000045, \quad \mathbb{P}(Z = 4) \approx \frac{10^4}{4!} e^{-10} \approx 0,018917,$$
$$\mathbb{P}(Z = 10) \approx \frac{10^{10}}{10!} e^{-10} \approx 0,12511, \quad \mathbb{P}(Z = 20) \approx \frac{10^{20}}{20!} e^{-10} \approx 0,001866.$$

Exercice 10. Un tas de 100 polos Lacoste contient un faux en moyenne.

1. On effectue n tirages indépendants avec remise.
   Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le faux Lacoste ?

2. Combien de tirages indépendants n doit-on effectuer pour que cette probabilité soit au moins de 95% ?
3. Comparer avec une loi de Poisson judicieusement choisie.
4. On effectue 100 tirages. Combien de faux polos le tas devrait contenir pour que la probabilité d'en tirer au moins un soit supérieure à 95% ?

Corrigé 10. 1. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de fois que le faux Lacoste est tiré dans les n tirages. Comme les tirages sont indépendants et avec remise, on a à chaque tirage la même probabilité $p = 0,01$ de tirer le faux et donc $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n; 0,01)$. Ainsi on cherche la probabilité suivante

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0,99^n.$$

2. On cherche la valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \geq 0,95 \Longleftrightarrow 1 - 0,99^n \geq 0,95 \Longleftrightarrow 0,99^n \leq 0,05$$

$$\Longleftrightarrow n \ln(0,99) \leq \ln(0,05) \Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,99)} \Longleftrightarrow n \geq 299.$$

3. Prenons $n = 300$, alors $n \cdot p = 3 < 15$ et on approche la loi de X par une loi de Poisson de paramètre 3. Dans ce cas,

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) \approx 1 - e^{-3} \approx 0,950213.$$

4. On cherche la valeur de $N = 100p \in \mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \geq 0,95 \Longleftrightarrow 1 - (1-p)^{100} \geq 0,95 \Longleftrightarrow (1-p)^{100} \leq 0,05$$

$$\Longleftrightarrow 1 - p \leq (0,05)^{1/100} \Longleftrightarrow p \geq 1 - (0,05)^{1/100} \approx 0,029513.$$

Le tas devrait contenir 3 faux polos au minimum pour qu'il y ait 95% de chance d'en tirer au moins un sur 100 tirages.

Exercice 11. On suppose que dans un train contenant 1 000 personnes, il y a en moyenne un médecin. On suppose en outre que le nombre (aléatoire) de médecins dans un train de 1 000 places suit une loi de Poisson.

1. Justifier cette dernière hypothèse.
2. Quelle est la probabilité de ne trouver aucun médecin ? Un médecin ? Deux médecins ? Cinq médecins ?
3. Comparer vos résultats avec ceux de la loi binomiale.

Corrigé 11. 1. On a $n = 1\,000$ et $p = 0,001$. Le nombre de médecins sur 1 000 personnes peut alors être modélisé par une loi binomiale de paramètres n et p. En utilisant l'approximation de Poisson de la loi binomiale, on justifie alors que le nombre de médecins peut être modélisé par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \cdot p = 0,001$.

2. Soit N la variable aléatoire comptant le nombre de médecins. Alors $N \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{P}(1)$. Alors

$$\mathbb{P}(N=0) = e^{-1} \approx 0,367879, \quad \mathbb{P}(N=1) = e^{-1} \approx 0,367879,$$

$$\mathbb{P}(N=2) = \frac{e^{-1}}{2} \approx 0,18394, \quad \mathbb{P}(N=5) = \frac{e^{-1}}{5!} \approx 0,003066.$$

3. Comparons nos résultats à ceux de la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,001$. Si $N \sim \mathcal{B}(1\,000; 0,001)$, alors

$$\mathbb{P}(N=0) = 0,999^{1\,000} \approx 0,367695, \quad \mathbb{P}(N=1) = 1\,000 \times 0,001 \times 0,999^{999} \approx 0,368063,$$

$$\mathbb{P}(N=2) = \frac{1\,000 \times 999}{2} \times 0,001^2 \times 0,999^{998} \approx 0,184032,$$

$$\mathbb{P}(N=5) = C_{1\,000}^{5} 0,001^5 \times 0,999^{995} \approx 0,003049.$$

Les valeurs de ces probabilités sont proches car en arrondissant à 3 décimales, on obtient les mêmes valeurs.