Devoir
Rendre : 10/10/2023

1 Transformée de Fourier Discrète (TFD) et Transformée de Fourier rapide (FFT)

Soit $f : [0, 1, \ldots, N-1] \to \mathbb{R}$ un signal discret supposé N-périodique, c'est-à-dire pour $n \in [1, \ldots, N]$, $f(n) = f(n + kN)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.1. *La transformée de Fourier discrète d'un signal f est définie, pour tout $k \in [0, \ldots, N-1]$, par*

$$\widehat{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}.$$

1. Calculer $\widehat{f(\cdot - p)}$ lorsque $p \in [0, \ldots, N-1]$.
   On définit la dérivée de f comme le signal $\Delta f : [0, 1, \ldots, N-1] \to \mathbb{R}$ où pour tout $k \in [0, \ldots, N-1]$, $\Delta f(k) = f(k) - (k-1)$.
2. Calculer $\widehat{\Delta f}$.

   Définition 1.5. *Soit $f, g : [0, 1, \ldots, N-1] \to \mathbb{R}$ deux signaux discret N-périodique.*
   La convolution circulaire de ces 2 suites est définie par

$$f * g(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(n-m) g(m) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m) g(n-m).$$

3. Calculer $\widehat{f * g}$.
4. Calculer $\widehat{f}$ lorsque $f(n) = \sin(2\pi \frac{n}{N})$.
5. On pose $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$. Montrer que $\widehat{f}$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} \widehat{f}(0) \\ \widehat{f}(1) \\ \vdots \\ \widehat{f}(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}.$$

   On appelera A_N la matrice ci-dessus.

6. Évaluer le nombre d'opérations pour calculer la transformée discrète d'un signal de taille N.

   On admettra que la matrice A_N est une matrice inversible (une justification de son inversibilité et de l'obtention de l'inverse est donnée dans l'annexe A). L'inverse de A_N est

$$A_N^{-1} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{\omega_N} & \overline{\omega_N}^2 & \cdots & \overline{\omega_N}^{N-1} \\ 1 & \overline{\omega_N}^2 & \overline{\omega_N}^4 & \cdots & \overline{\omega_N}^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{\omega_N}^{N-1} & \overline{\omega_N}^{2(N-1)} & \cdots & \overline{\omega_N}^{(N-1)^2}. \end{pmatrix}$$

Définition 1.8. *La transformée de Fourier discrète inverse d'un signal $\widehat{f}$ est définie, pour tout $k \in [0, \ldots, N-1]$, par*

$$f(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \widehat{f}(n) e^{2i\pi k \frac{n}{N}}.$$

7. À partir de vos résultats à la question4 et de la définition 1.8, retrouver que $f(n) = \sin(2\pi \frac{n}{N})$.

   On se propose de trouver un algorithme pour calculer en $O(N\log(N))$ opérations la transformée de Fourier discrète d'un signal. On suppose que N s'écrit $N = 2^J$.

8. Montrer que $\widehat{f}(k)$ peut s'écrire

$$\widehat{f}(k) = \sum_{n=0}^{2^{J-1}-1} f_p(n) e^{-2i\pi k \frac{n}{2^{J-1}}} + \sum_{n=0}^{2^{J-1}-1} f_i(n) e^{-2i\pi k \frac{n}{2^{J-1}}},$$

   où f_p est le signal de $N/2 = 2^{J-1}$ points constitués de $f(2n)$ pour $n \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-1}\}$, et f_i est le signal de $N/2 = 2^{J-1}$ points constitués de $f(2n+1)$ pour $n \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-1}\}$.

   On note P_k le k-ième terme de la transformée de Fourier discrète de f_p et I_k le k-ième terme de la transformée de Fourier discrète de f_i.

9. Montrer que pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-1}\}$, on a

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} P_k + e^{-2i\pi \frac{k}{2^J}} I_k & \text{si } 0 \leq k < N/2 = 2^{J-1} \\ P_{k-N/2} - e^{-2i\pi \frac{k-N/2}{2^J}} I_{k-N/2} & \text{si } 2^{J-1} \leq k < 2^J \end{cases}.$$

10. En déduire qu'on peut calculer la FFT de f en temps $O(N\log(N)$.

A Inversibilité de A_N

On considère

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

la matrice de Vandermonde-Fourier utilisé dans la transformée de Fourier discrète. Cette matrice étant une matrice de Vandermonde, on peut facilement obtenir son déterminant. Ainsi on a

$$\det(A_N) = \prod_{0 \leq p < q \leq N-1} (e^{-2i\pi \frac{q}{N}} - e^{-2i\pi \frac{p}{N}})$$

$$= \prod_{0 \leq p < q \leq N-1} (\omega_N^q - \omega_N^p).$$

Or les ω_N^k sont tous distinct puisque $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ est une racine N-ième de l'unité. On en déduit que toutes les différences $\omega_N^q - \omega_N^p$ sont non nul et que $\det(A_N)$ est un produit de terme non nul et est donc non nul.

On obtient alors que A_N est bien inversible. Puis on peut remarquer que en effectuant les opérations sur les lignes

$$L_k \to \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \overline{\omega_N}^{p(k-1)} L_p,$$

on peut obtenir

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_k \to \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \overline{\omega_N}^{p(k-1)} L_p} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc on peut obtenir l'inverse de A_N en faisant l'opération suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_k \to \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \overline{\omega_N}^{p(k-1)} L_p} \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{\omega_N} & \overline{\omega_N}^2 & \cdots & \overline{\omega_N}^{N-1} \\ 1 & \overline{\omega_N}^2 & \overline{\omega_N}^4 & \cdots & \overline{\omega_N}^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{\omega_N}^{N-1} & \overline{\omega_N}^{2(N-1)} & \cdots & \overline{\omega_N}^{(N-1)^2} \end{pmatrix} = A_N^{-1}.$$