2.4 Обобщенные перестановки и разбиения

2.4.1 ***Перестановки с повторениями***

Пусть некоторая совокупность X содержит n объектов k различных типов, причем имеется:

n_1 неразличимых объектов типа 1,

n_2 неразличимых объектов типа 2, …,

n_k неразличимых объектов типа k.

Обозначим количество различных размещений элементов X через $\mathbf{P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k)}$.

Тогда такие размещения называются *перестановками с повторениями* и их количество вычисляется по формуле

$$P(n;n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...n_k!}$$

2.4.2 *Разбиения и числа Стирлинга*

Пусть $\mathscr{B} = \{B_1,\ldots,B_k\}$ есть разбиение множества X из n элементов на k подмножеств:

$\forall$i $B_i \subset X$, $\cup B_i = X$, $B_i \neq \varnothing$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$.

$|B_i| = n_i$, $n_1+\ldots+n_k = n$.

Тогда набор $(B_1,\ldots,B_k)$ называется упорядоченным разбиением множества X, а подмножества B_i называются блоками разбиения.

Если $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ – два разбиения X, то разбиение $\mathscr{B}_1$ есть измельчение разбиения $\mathscr{B}_2$, если каждый блок $\mathscr{B}_2$ есть объединение блоков $\mathscr{B}_1$.

Измельчение является частичным порядком на множестве разбиений.

Число упорядоченных разбиений

$$R(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_k!}$$

Теорема 2.7 Число R(n,k) упорядоченных разбиений на k подмножеств вычисляется по формуле:

$$R(n,k) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n;\ n_i>0} R(n; n_1, n_2, \ldots n_k)$$

Числа *R*(*n*; *n*$_1$, *n*$_2$, …, *n*$_k$) называются полиномиальными коэффициентами

Теорема 2.8 (Полиномиальная теорема)

$\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_k \in$ R справедливо соотношение:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n;\ n_i \geq 0} R(n; n_1, n_2, \ldots n_k) \cdot a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \ldots a_k^{n_k}$$

Если рассмотренный выше набор $(B_1,\ldots,B_k)$ рассматривать без учета порядка его блоков, то он

называется неупорядоченным разбиением множества X, или просто разбиением на k блоков.

Число разбиений *n*-элементного множества на k блоков называется числом Стирлинга второго рода и обозначается **S(n,k)**.

$S(n,k)=S(n-1,k-1)+ k\cdot S(n-1,k)$ $(0<k<n)$

$S(n,0)=0$ при $n>0$, $S(n,k)=0$ при $n<k$,

$S(n,n)=1$, $S(0,0)=1$.

Из предыдущей формулы следует удобный способ рекуррентного вычисления значений чисел Стирлинга 2 рода, который можно представить в графической форме (в виде треугольника) следующим образом:

В этом треугольнике каждое k-е в ряду число является суммой левого стоящего над ним числа с правым, умноженным на k. Тогда число Стирлинга *S(n,k)* находится в *n*–м ряду на *k*-м месте, если начинать счет от 0.