Пример 2 (п.1.10)

$$Z = 25x_1 - 16x_2 - 10x_3 + x_4 + x_5 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 9 \\ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -8 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$

$x_4 = 24 - 3x_1 + 8x_2$

$x_5 = 9 - x_1 - x_2$

$Z = 25x_1 - 16x_2 - 10(4 + 2x_1 - x_2) + 24 - 3x_1 + 8x_2 +$
$+ 9 - x_1 - x_2 = -7 + x_1 + x_2 \to max$

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CO
x_3	4	-2	1	1	0	0	—
x_4	24	3	-8	0	1	0	24/3 = 8 ←
x_5	9	1	1	0	0	1	9/1 = 9
Z	-7	-1 ↑	-1	0	0	0	

$X^1 = (0; 0; 4; 24; 9)$, $Z(X^1) = 7$

X^1 – не оптимально

	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CO
x_3	20	0	-13/3	1	2/3	0	—
x_1	8	1	-8/3	0	1/3	0	—
x_5	1	0	11/3	0	-1/3	1	3/11 ←
Z	1	0	-11/3 ↑	0	1/3	0	

$X^2 = (8; 0; 20; 0; 1)$, $Z(X^2) = 1$

X^2 не оптим.

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CO
x_3	$\frac{233}{11}$	0	0	1	3/11	13/11	233/3 ←
x_1	$\frac{96}{11}$	1	0	0	1/11	8/11	96
x_2	3/11	0	1	0	-1/11	3/11	—
Z	2	0	0	0	0 ↑	1	

$20 \to 20 + \frac{13}{\cancel{3}} \cdot 1 \cdot \frac{\cancel{3}}{11} = \frac{233}{11}$

$8 \to 8 + \frac{8}{\cancel{3}} \cdot 1 \cdot \frac{\cancel{3}}{11} = \frac{96}{11}$

$1/3 \to 1/3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{11}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{11}} = 0$

$2/3 \to 2/3 - \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{11} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11}$.

$1/3 \to 1/3 - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{11} = \frac{3}{33} = \frac{1}{11}$

$X^3 = \left(\frac{96}{11}; \frac{3}{11}; \frac{233}{11}; 0; 0\right)$

$Z(X^3) = 2$ $\quad X^3$ – оптим, но не ед.

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	$\frac{233}{3}$	0	0	11/3	1	13/3
x_1	5/3	1	0	Z	0	Z
x_2	22/3	0	1		0	
Z	2	0	0	0	0	1

$\frac{96}{11} \to \frac{96}{11} - \frac{233}{11} \cdot \frac{1}{\cancel{11}} \cdot \frac{\cancel{11}}{3} = \frac{55}{33} = 5/3$

$\frac{3}{11} \to \frac{3}{11} + \frac{233}{11} \cdot \frac{1}{\cancel{11}} \cdot \frac{\cancel{11}}{3} = \frac{242}{33} = \frac{22}{3}$

$X^4 = (5/3; 22/3; 0; 233/3; 0)$

$Z(X^4) = 2$ $\quad X^4$ – оптим.

Задача имеет бесконечно много решений, решением будет линейная комбинация X3 и X4

$$X^* = (1-\lambda)X^3 + \lambda \cdot X^4 = (1-\lambda)(96/11; 3/11; 233/11; 0; 0) + \lambda(5/3; 22/3; 0; 233/3; 0) =$$
$$= \left(\frac{96}{11} - \lambda\frac{96}{11} + \frac{5}{3}\lambda; \frac{3}{11} - \frac{3}{11}\lambda + \frac{22}{3}\lambda; \frac{233}{11} - \frac{233}{11}\lambda; \frac{233}{3}\lambda; 0\right) =$$
$$= \left(\frac{96}{11} + \lambda\left(\frac{5}{3} - \frac{96}{11}\right); \frac{3}{11} + \lambda\left(\frac{22}{3} - \frac{3}{11}\right); \frac{233}{11} - \frac{233}{11}\lambda; \frac{233}{3}\lambda; 0\right) =$$
$$= \left(\frac{96}{11} - \frac{233}{33}\lambda; \frac{3}{11} + \frac{233}{33}\lambda; \frac{233}{11} - \frac{233}{11}\lambda; \frac{233}{3}\lambda; 0\right), \ 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$Z_{max} = Z(X^*) = 2$$

$x_3 = 4 + 2x_1 - x_2 \geq 0$

$x_4 = 24 - 3x_1 + 8x_2 \geq 0$

$x_5 = 9 - x_1 - x_2 \geq 0$

$Z = -7 + x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 8x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(1) $-2x_1 + x_2 = 4$

x_1	0	-2
x_2	4	0

(2) $3x_1 - 8x_2 = 24$

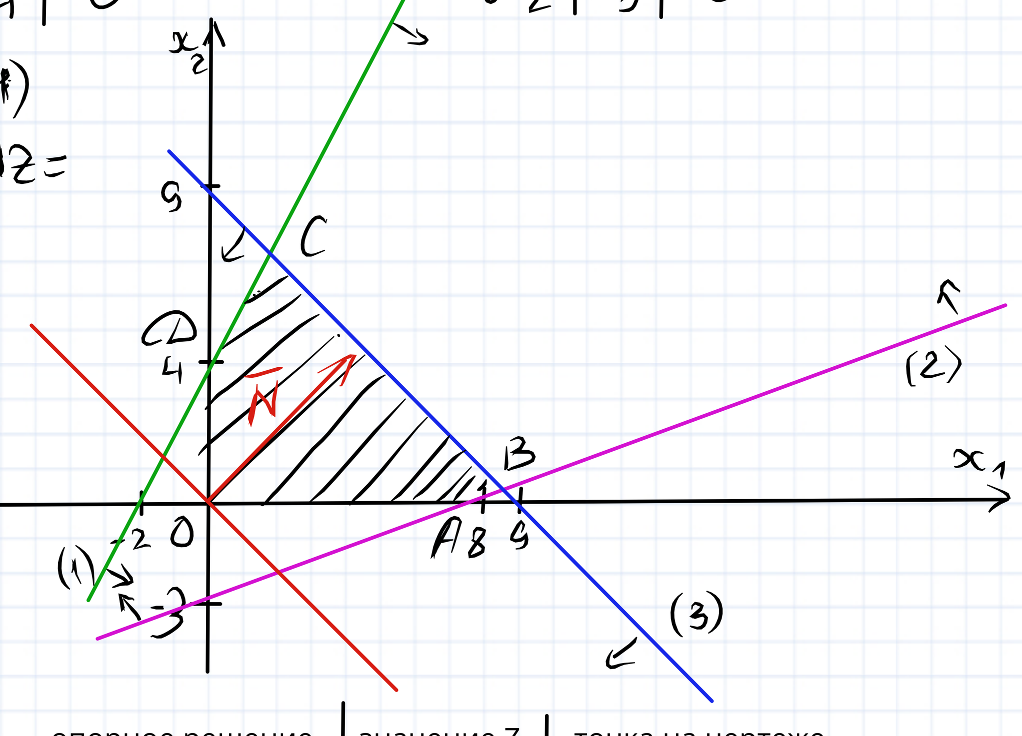
x_1	0	8
x_2	-3	0

(3) $x_1 + x_2 = 9$

x_1	0	9
x_2	9	0

grad Z (1; 1)

$\bar{N} = 4\,\mathrm{grad}\,Z = (4; 4)$



номер таблицы	опорное решение	значение Z	точка на чертеже
1	$X^1(0; 0; 4; 24; 9)$	-7	O
2	$X^2(8; 0; 20; 0; 1)$	1	A
3	$X^3(\frac{96}{11}; \frac{3}{11}; \frac{233}{11}; 0; 0)$	2	B
4	$X^4(5/3; 22/3; 0; \frac{233}{3}; 0)$	2	C

$X^* \in BC$

Пример 3 (п.1.10)

$$Z = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_5 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 10 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & -7 & 10 \\ -3 & 1 & 1 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ базиса нет}$$

Составим таблицу, подобную симплексной и найдем опорное решение

$$\hat{Z} = -Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 \to max$$

бп	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CO
	7	3	1	1	0	-6	7/1 = 7
	10	2	1	3	3	-7	10/1 = 1
	1	-3	1	1	-6	0	1/1 = 1 ←
$\hat{Z}$	0	-1	-1 ↑	-1	-1	4	

При преобразованиях таблицы на Z-строку не смотрим! Следим только за тем, чтобы столбец свободных членов сохранял неотрицательность. Для этого в выбранном для включения в базис столбце находим минимум симплексных отношений. В соответствии с заданием сначала в базис включаем переменную x2.

бп	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CO
	6	6	0	0	6	-6	—
	9	5	0	2	9	-7	9/2 = 9
x_2	1	-3	1	1	-6	0	1/1 = 1 ←
$\hat{Z}$	1	-4	0	0 ↑	-7	4	

Далее в базис должны включить x3. Но Тогда из базиса уйдет x2! Поэтому попытамся включить в базис следующую переменную по заданию - это x4.

бп	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CO
	6	6	0	0	6	-6	6/6 = 1 ←
	9	5	0	2	9	-7	9/9 = 1
x_2	1	-3	1	1	-6	0	—
$\hat{Z}$	1	-4	0	0	-7 ↑	4	

бп	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CO
x_4	1	1	0	0	1	-1	—
	0	-4	0	2	0	2	0/2 = 0 ←
x_2	7	3	1	1	0	-6	7/1 = 7
$\hat{Z}$	8	3	0	0 ↑	0	-3	

Теперь надо снова попытаться включить в базис x3. Находим симплексные отношения для третьего столбца. Видно, что включение x3 в базис дает опорное решение.

бп	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CO
x_4	1	1	0	0	1	-1	—
x_3	0	-2	0	1	0	1	0 ←
x_2	7	5	1	0	0	-7	—
$\hat{Z}$	8	3	0	0	0	-3 ↑	

Это симплексная таблица (выделен базис). Ей соответствует первое опорное решение

$X^1 = (0, 7, 0, 1, 0)$, $\hat{Z}(X^1) = 8$

Решение - вырожденное, т.к. базисная переменная x3=0. Решение не оптимально, т.к. в Z- строке содержится отрицательный элемент.

бп	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CO
x_4	1	-1	0	1	1	0	—
x_5	0	-2	0	1	0	1	—
x_2	7	-9	1	7	0	0	—
$\hat{Z}$	8	-3 ↑	0	3	0	0	

Таблице соответствует второе опорное решение

$X^2 = (0, 7, 0, 1, 0)$, $\hat{Z}(X^2) = 8$

Решение не оптимально, но выбрать разрешающий элемент нельзя. Функция не ограничена. Задача не имеет решения.

Сделаем геометрическую интерпретацию процесса решения. Для этого перейдем к симметричной форме, выразив базисные переменные и функцию из первой симплексной таблицы

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - x_5 = 1 \\ -2x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_5 = 7 \\ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 1 - x_1 + x_5 \geq 0 \\ x_3 = 2x_1 - x_5 \geq 0 \\ x_2 = 7 - 5x_1 + 7x_5 \geq 0 \\ x_1, x_5 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_5 \leq 1 \\ 2x_1 - x_5 \geq 0 \\ 5x_1 - 7x_5 \leq 7 \\ x_1, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\hat{Z} = 8 - 3x_1 + 3x_5 \to max$$

(1) $x_1 - x_5 = 1$

x_1	0	1
x_5	-1	0

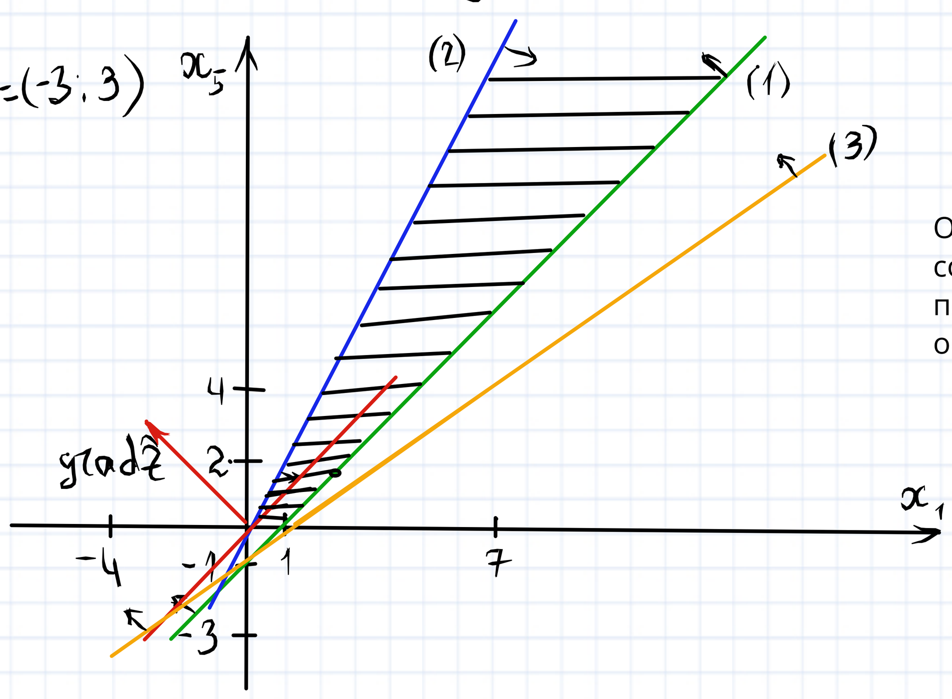
(2) $2x_1 - x_5 = 0$

x_1	0	1
x_5	0	2

(3) $5x_1 - 7x_5 = 7$

x_1	0	7
x_5	-1	

grad $\hat{Z} = (-3; 3)$



Обоим симплексным таблицам на чертеже соответствует одна и та же точка (0;0). При попытке сдвинутся по синему ребру, обнаруживается, что функция не ограничена.