Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 11

2. Специальные задачи линейного программирования

2.2. Транспортная задача (продолжение)

2.2.2 Проверка оптимальности решения транспортной задачи

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

Идея решения задачи: начальный план будем улучшать до получения оптимального.

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min$$

$$\begin{array}{l} u_1 \\ \ldots \\ u_m \\ v_1 \\ \ldots \\ v_n \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \\ x_{ij} \ge 0 \; (i = 1,\ldots,m; \; j = 1,\ldots,n) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc|} & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} & \ldots & x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \\ \hline u_1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_m & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ v_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_n & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}$$

Двойственная задача:

$$W = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m + \ldots + b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n \to \max$$

$$\begin{array}{l} x_{11} \\ \ldots \\ x_{1n} \\ x_{21} \\ \ldots \\ x_{mn} \end{array} \begin{cases} u_1 + v_1 \le c_{11} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1 + v_n \le c_{1n} \\ u_2 + v_1 \le c_{21} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m + v_n \le c_{mn} \end{cases}$$

Переменные двойственной задачи называются потенциалами.

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min$$

$$\begin{array}{l} u_1 \\ \dots \\ u_m \\ v_1 \\ \dots \\ v_n \\ \\ \end{array}\left\{\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m \\ x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n \\ x_{ij}\ge 0\ (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n) \end{array}\right.$$

$$W=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j\to\max$$

$$\begin{array}{l} x_{11} \\ \dots \\ x_{1n} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{mn} \end{array}\left\{\begin{array}{l} u_1+v_1\le c_{11} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1+v_n\le c_{1n} \\ u_2+v_1\le c_{21} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m+v_n\le c_{mn} \end{array}\right.$$

Из теоремы равновесия следует, что для оптимальных планов двойственных задач должно выполняться:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{11}(c_{11}-(u_1+v_1))=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}(c_{1n}-(u_1+v_n))=0 \\ x_{21}(c_{21}-(u_2+v_1))=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{mn}(c_{mn}-(u_m+v_n))=0 \end{array}\right.$$

Для оптимального плана:

$$c_{ij}-(u_i+v_j)=0,\ \text{для } x_{ij}>0$$

$$c_{ij}-(u_i+v_j)\ge 0,\ \text{для } x_{ij}=0$$

или

$$u_i+v_j=c_{ij},\ \text{для } x_{ij}>0$$

$$c_{ij}-(u_i+v_j)\ge 0,\ \text{для } x_{ij}=0$$

Теорема 1 (необходимое условие оптимальности опорного решения)
Если план перевозок транспортной задачи оптимален, то ему соответствует система из $m+n$ чисел, удовлетворяющих условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ для } x_{ij} > 0$$
$$u_i + v_j \le c_{ij}, \text{ для } x_{ij} = 0$$

Алгоритм проверки плана транспортной задачи на оптимальность:

1. Для каждой базисной переменной x_{ij} составляем систему уравнений

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (2.1)$$

и находим ее решение.

В системе будет $m+n$-1 уравнение и $m+n$ неизвестных. Следовательно, система имеет бесконечно много решений и для нахождения базисного решения можно положить $u_1 = 0$.

Потенциалы записывают в распределительную таблицу в дополнительный столбец (справа) и строку (внизу).

В силу специфики системы уравнений значения переменных находятся последовательно одно за другим по занятым клеткам (если известен для клетки известен один из потенциалов, то второй находим из уравнения (2.1)).

2. Для каждой свободной клетки определяем балансы по формуле

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \quad (2.2)$$

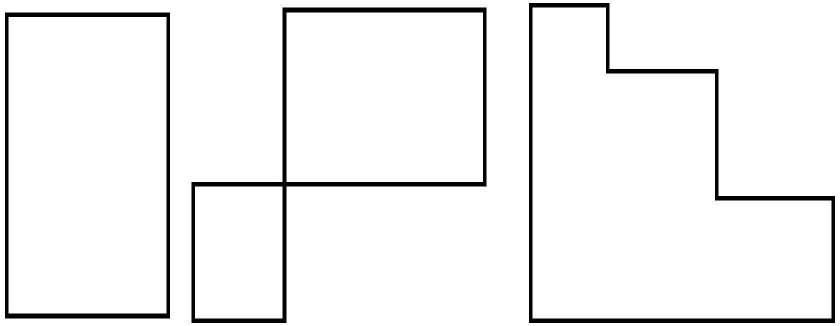
Балансы будем записывать в правый нижний угол клетки. Отсутствие отрицательных балансов – критерий оптимальности решения.

2.2.3 Переход к новому опорному плану, более близкому к оптимальному

План можно улучшить, заполнив клетку с отрицательным балансом. Если таких клеток несколько, то для заполнения выбирают клетку с максимальным по модулю отрицательным балансом. Эта клетка определяет переменную, вводимую в базис. Т.к. выбранная клетка присоединяется к занятым, то необходимо освободить одну из занятых клеток.

Циклом в распределительной таблице называется замкнутая ломаная линия, вершины которой находятся в клетках таблицы, звенья располагаются вдоль строк и столбцов, причем в любой вершине соединяются только 2 звена: горизонтальное и вертикальное. Допустимы пересечения звеньев.

Примеры циклов:



Число вершин в любом цикле – четно!

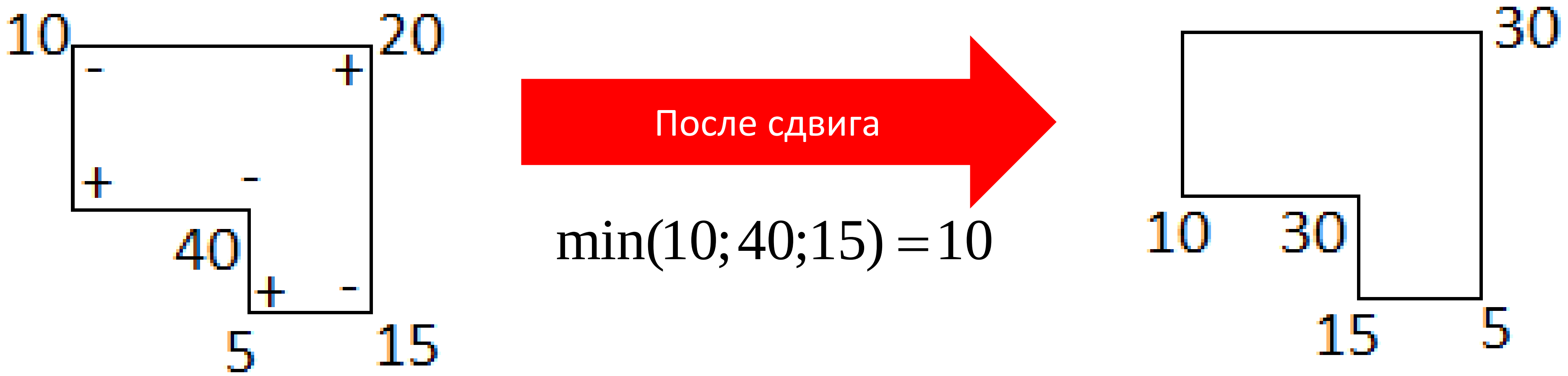
Означенным циклом в распределительной таблице называется цикл, вершинам которого приписаны знаки «+» и «-», чередуясь.
Сдвигом по означенному циклу на величину *M* называется увеличение перевозок в вершинах со знаком «+» и уменьшение перевозок в вершинах со знаком «-» на величину *M*.

Теорема 2 Сдвиг по означенному циклу преобразует допустимое решение транспортной задачи в новое допустимое решение.

Теорема 3 Допустимый план транспортной задачи является опорным тогда и только тогда, когда из занятых клеток для этого плана клеток нельзя образовать цикла.
Циклом пересчета свободной клетки называется означенный цикл, одна из вершин которого находится в выбранной свободной клетке, остальные – в занятых, причем свободной клетке приписан знак «+».
Теорема 8 В распределительной таблице для любой свободной клетки существует и притом единственный цикл пересчета.

Алгоритм перехода к новому опорному плану, не увеличивающему значение функции

1. Найти свободную клетку с самым маленьким отрицательным балансом (если таких клеток несколько, выбрать любую).
2. Для выбранной свободной клетки построить цикл пересчета.
3. Осуществить сдвиг по циклу пересчета на величину $M = \min x_{ij}$, где x_{ij} – поставки, помеченные в клетках цикла знаком «-».



$$\min(10;40;15) = 10$$

2.2.4 Метод потенциалов (нахождение оптимального решения транспортной задачи)

1. Найти начальный опорный план одним из методов: северо-западного угла, минимальной стоимости, Фогеля. Должна быть занята $m+n$-1 клетка.
2. По занятым клеткам найти потенциалы u_i, v_j, решив систему (2.1) (положив $u_1 = 0$).
3. Для свободных клеток найти балансы по формуле $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Если нет отрицательных балансов, то решение оптимально, иначе перейти к п.4.
4. Выбрать среди отрицательных балансов минимальный, построить для выбранной клетки цикл пересчета, осуществить сдвиг по циклу пересчета и перейти на п.2.

Пример 1 Найти оптимальное решение транспортной задачи методом потенциалов.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10	5	7	6	20
A_2	9	6	11	10	80
A_3	11	17	10	11	50
Потребности	30	50	40	30	

Решение примера 1 – в файле lecture11.pdf.