Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 6

1.11. Вырожденные решения и правило устранения зацикливания

Если задача имеет вырожденный опорный план, то на одной из итераций симплекс-метода одна или несколько базисных переменных опорного плана могут оказаться равными нулю.

В этом случае, при переходе от вырожденного опорного плана к другому опорному плану значение функции изменяться не будет. Более того, может произойти возврат к ранее найденному базису. Такой возврат называется *зацикливанием*.

Если количество базисных переменных, равных 0, в опорном решении небольшое количество (1-3), то зацикливаний не возникает.

Если же таких переменных много, то можно избежать возникновение зацикливаний, если применять правило Креко.

Правило заключается в следующем: если в выбранном разрешающем столбце есть несколько одинаковых минимальных симплексных отношений, то элементы этих строк делятся на предполагаемые разрешающие элементы, и за разрешающую строку принимается та строка, в которой раньше встретится наименьшее частное.

1.12. Метод искусственного базиса (М-метод)

Пусть задача линейного программирования представлена в канонической форме:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad (1.15)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases} \qquad (1.16)$$

Пусть выполнены 2 условия:

1) коэффициенты правой части неотрицательны: $b_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$

2) матрица системы ограничений не приведена к единичному базису или приведена частично.

Базис будем создавать искусственным образом за счет введения в каждое уравнение новой (*искусственной*) переменной. Введение искусственных переменных приводит к появлению новой задачи, называемой *расширенной задачей* или *М-задачей*.

Алгоритм построения М-задачи

1. В левую часть каждого ограничения добавляется своя искусственная неотрицательная переменная. Система ограничений М-задачи будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases} \qquad (1.21)$$

Из (1.21) можно найти начальный опорный план, в котором все искусственные переменные будут базисными, а исходные переменные задачи – свободными.

2. В целевой функции М-задачи должен накладываться штраф за использование искусственных переменных:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - M(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to \max, \qquad (1.22)$$

где М – достаточно большое число.

Исходная задача:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \quad (1.15)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

М-задача:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Начальный опорный план М-задачи:

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n\ \text{нулей}}, b_1, \ldots, b_m)$$

В оптимальном решении М-задачи должно выполняться:

$$x_{n+1} + \ldots + x_{n+m} = 0$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - M(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to \max, \qquad (1.22)$$

Замечания:

1. Если какое-либо уравнение системы (1.16) может быть разрешено относительно «естественной» базисной переменной, то искусственная переменная в это уравнение не вводится.

2. Если в исходной задаче целевая функция минимизируется, то в М-задаче минимизируется функция, имеющая вид: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + M(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to \min$, где M – большое положительное число.

Получение оптимального опорного плана исходной задачи (М-метод) основано на следующих теоремах.

Теорема 13 Если в оптимальном плане М-задачи искусственные переменные равны 0 (оптимальное решение имеет вид $(x_1^*,\ldots,x_n^*,0,\ldots,0)$), то план $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ является оптимальным для исходной задачи.

Теорема 14 Если в оптимальном плане М-задачи хотя бы одна из искусственных переменных $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$ положительна, то система ограничений (1.16) исходной задачи не совместна.

Теорема 15 Если М-задача не имеет решения (функция не ограничена), то исходная задача не разрешима (либо не ограничена функция, либо система ограничений не совместна).

Особенности в оформлении симплекс-таблиц при решении М-задачи:

1. Целевой функции М-задачи соответствуют 2 строки: в первой из них хранятся коэффициенты функции Z (Z-строка), а во второй – коэффициенты при переменных, определяемые слагаемыми, содержащими множитель M (М-строка).
2. Признак оптимальности сначала проверяют по М-строке, игнорируя Z-строку. В случае неоптимальности опорного решения выбор разрешающего столбца также определяется по М-строке.
3. По мере исключения из базиса искусственных переменных, соответствующие им столбцы исключаются из дальнейшей работы (вычеркиваются), т.к. обратно в базис эти переменные возвращаться не будут.
4. Итерационный процесс по М-строке ведется до тех пор, пока:

– либо все искусственные переменные будут исключены из базиса, при этом все элементы М-строки станут равны 0, и М-строку можно вычеркнуть, далее задача решается обычным симплекс-методом;

– либо не все искусственные переменные будут исключены из базиса, при этом М-строка не содержит отрицательных элементов, тогда система ограничений исходной задачи не совместна.

При геометрической интерпретации процесса решения методом искусственного базиса симплексным таблицам соответствуют точки пересечения гиперплоскостей, находящихся вне области допустимых решений. Такие точки будут соответствовать симплексным таблицам до тех пор, пока все искусственные переменные не будут выведены из базиса.

Пример 1

Решить задачу линейного программирования методом искусственного базиса.

$$Z = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

$$Z_{\max} = Z(0;0;16;31;14) = -7$$

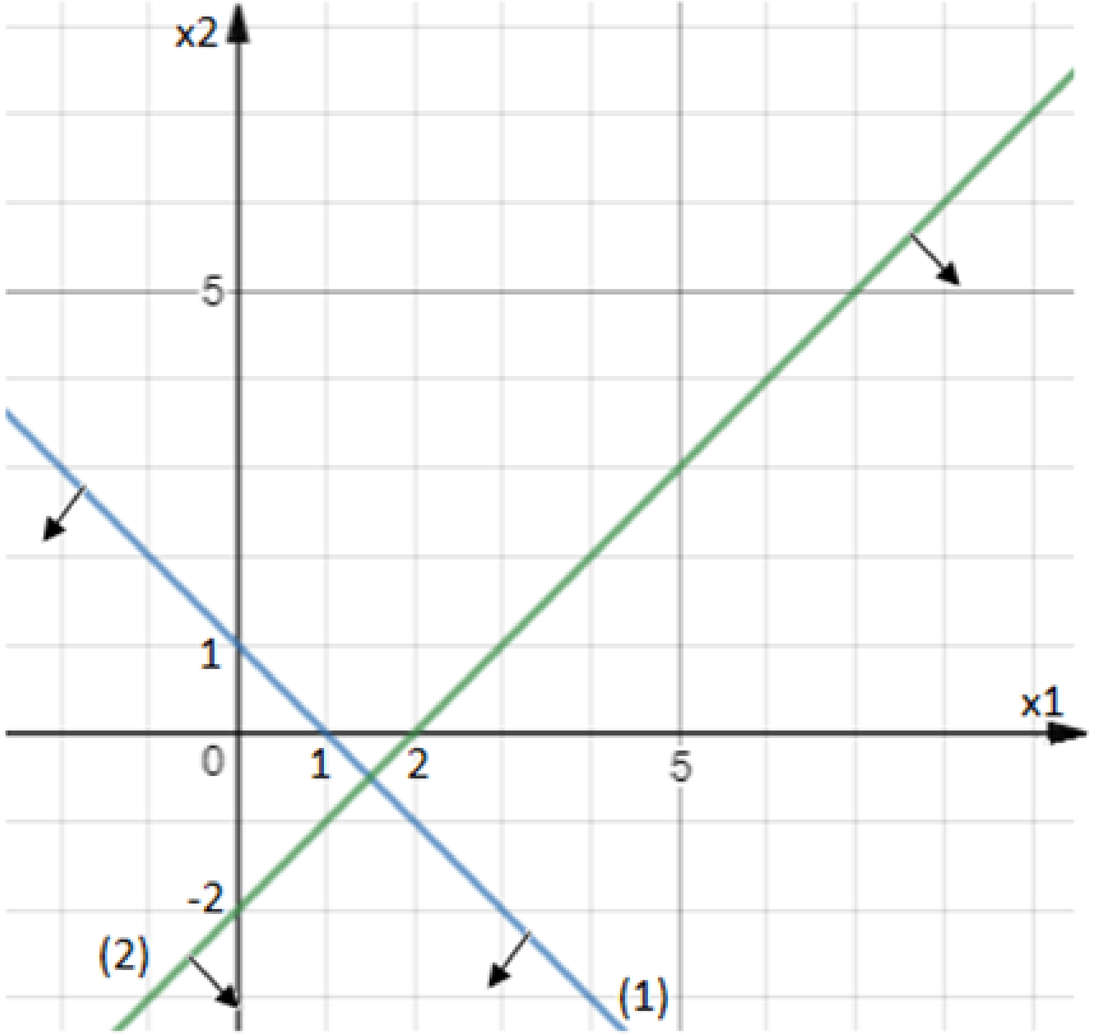
Решение примера 1 – в файле lecture6.pdf.

Пример 2

Решить задачу линейного программирования методом искусственного базиса.

$$Z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Задача не имеет решения.

Решение примера 2 – в файле lecture6.pdf.