Пример 1

Решить задачу симплекс-методом и дать геометрическую интерпретацию поиска оптимального решения

$$z = x_1 + 2x_2 \to max \qquad z = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \le 1 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_5 = -1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{array}\right)$$

x_3, x_4, x_5 – б.п

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СО
x_3	6	2	3	1	0	0	6/3=2
x_4	1	1	0	0	1	0	–
x_5	1	-1	1	0	0	1	1/1=1 ←
z	0	-1	-2	0	0	0	

Таблице 1 соответствует опорное решение

$X^1 = (0; 0; 6; 1; 1)$

$z(X^1) = 0$

Решение не оптимально, т.к. в Z-строке есть отрицательные коэффициенты

$max(|-1|, |-2|) = 2$

б.п.	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	СО
x_3	3	5	0	1	0	-3	3/5 ←
x_4	1	1	0	0	1	0	1/1=1
x_2	1	-1	1	0	0	1	—
z	2	-3	0	0	0	2	

Таблице 2 соответствует опорное решение

$X^2 = (0; 1; 3; 1; 0)$

$z(X^2) = 2$

Решение не оптимально, т.к. в Z-строке есть отрицательный коэффициент

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	3/5	1	0	1/5	0	-3/5
x_4	2/5	0	0	Z	1	Z
x_2	8/5	0	1		0	
z	19/5	0	0	3/5	0	1/5

Таблице 3 соответствует опорное решение

$X^3 = (3/5; 8/5; 0; 2/5; 0)$

$z(X^3) = 19/5$

Решение оптимально, т.к. в Z-строке нет отрицательных коэффициентов

$z_{max} = z(3/5; 8/5) = 19/5$

$$z = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \le 1 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(1) $2x_1 + 3x_2 = 6$

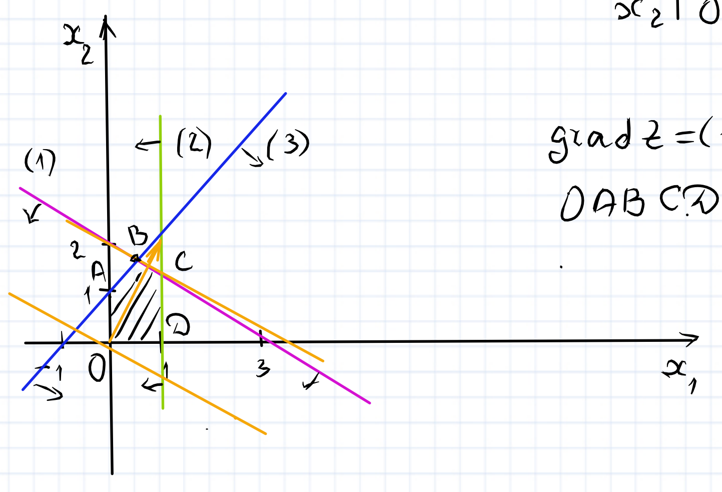
x_1	0	3
x_2	2	0

(3) $-x_1 + x_2 = +1$

x_1	0	-1
x_2	1	0

(2) $x_1 = 1$

x_1	1	1
x_2	0	2



grad $z = (1; 2)$

OABCD – область допустимых решений

номер таблицы	опорние решение из таблицы	значение функции	Точка на чертеже
1	$X^1=(0,0,6,1,1)$	0	O
2	$X^2=(0,1,3,1,0)$	2	A
3	$X^3=(3/5,8/5,0,2/5,0)$	19/5	B

Доказательство Теоремы 6 (раздел 1.7)

$P(p_1, p_2, \dots p_n), Q(q_1, q_2, \dots q_n)$ – принадлежат полупр-ву

$a_1p_1 + \dots + a_np_n \le b$

$a_1q_1 + \dots + a_nq_n \le b$

$X(x_1, \dots x_n) \in PQ \Rightarrow x_i = \lambda q_i + (1-\lambda)p_i$

$0 \le \lambda \le 1$

$$+\begin{array}{l|l} a_1p_1 + \dots + a_np_n \le b & \times(1-\lambda) \\ a_1q_1 + \dots + a_nq_n \le b & \times\lambda \end{array}$$

$a_1(p_1(1-\lambda) + q_1\lambda) + \dots + a_n(p_n(1-\lambda) + q_n\lambda) \le b(1-\lambda) + b\lambda$

$a_1x_1 + \dots + a_nx_n \le b - b\lambda + b\lambda = b \Rightarrow X$ принадл полупр-ву

Доказательство Теоремы 7 (раздел 1.7)

1) Пусть оптим. точка – внутри многоуг.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

$z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 \Rightarrow z = 0$ противоречие

2) Сл-но, оптим точка лежит на границе

Пусть $X^*(x_1^*, \dots, x_n^*)$ – не вершина $\Rightarrow X^* \in PQ$

$x_i = \lambda q_i + (1-\lambda)p_i$, $P(p_1, \dots p_n)$, $Q(q_1, \dots q_n)$

$z(X^*) = M$, $z(P) < M$, $z(Q) < M$

$M = z(X^*) = c_1x_1^* + \dots + c_nx_n^* = c_1(\lambda q_1 + (1-\lambda)p_1) + \dots +$

$+ c_n(\lambda q_n + (1-\lambda)p_n) = \lambda(c_1q_1 + \dots + \lambda_n q_n) + (1-\lambda)(c_1p_1 + \dots + c_np_n) =$

$= \lambda z(Q) + (1-\lambda)z(P) < \lambda M + (1-\lambda)M = \cancel{\lambda M} + M - \cancel{\lambda M} = M$

$\Rightarrow M < M$ – противоречие $\Rightarrow X^*$ – вершина

Пример 2 (раздел 1.8)

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение

(1) $2x_1 + 5x_2 = 20$

x_1	0	10
x_2	4	0

(2) $8x_1 + 5x_2 = 40$

x_1	0	5
x_2	8	0

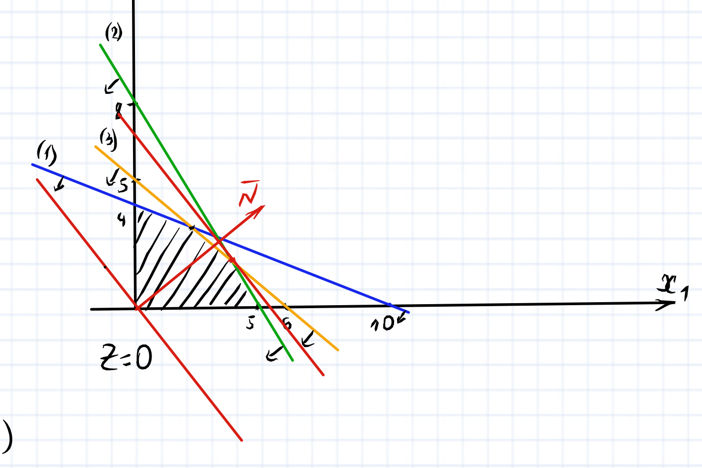
(3) $5x_1 + 6x_2 = 30$

x_1	0	6
x_2	5	0

$2\cdot0 + 5\cdot0 \le 20$ верно

$8\cdot0 + 5\cdot0 \le 40$ верно

$5\cdot0 + 6\cdot0 \le 30$ верно



grad $z = (50; 40)$

$\bar{N} = \frac{grad z}{10} = (5; 4)$

max: (2)∩(3)

$$-\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 & \times 5 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 & \times 8 \end{cases}$$

$-23x_2 = -40$

$x_2 = \frac{40}{23}$

$$x_1 = \frac{40 - 5\cdot\frac{40}{23}}{8} = \frac{920 - 200}{184} = \frac{720}{184} = \frac{90}{23}$$

$$z_{max} = z\left(\frac{90}{23}; \frac{40}{23}\right) = 50\cdot\frac{90}{23} + 40\cdot\frac{40}{23} = \frac{6100}{23}$$

Пример (раздел 1.9)

$$\begin{cases} Z = 4x_1 + 2x_2 + x_4 \to max \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 14 \\ x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_6 = 6 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$$

Решение

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & & & & 1 & & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6 \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \end{array}$$

$x_3 = 14 - 2x_1 - x_2 \ge 0$

$x_4 = 8 - x_2 \ge 0$

$0 \le x_5 = -4 + x_1 + x_2 \ge 0$

$x_6 = 6 - 2x_1 + 3x_2 \ge 0$

$$z = 4x_1 + 2x_2 + 8 - x_2 = 8 + 4x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(1) $2x_1 + x_2 = 14$

x_1	0	7
x_2	14	0

(2) $x_2 = 8$

x_1	0	2
x_2	8	8

(3) $x_1 + x_2 = 4$

x_1	0	4
x_2	4	0

(4) $2x_1 - 3x_2 = 6$

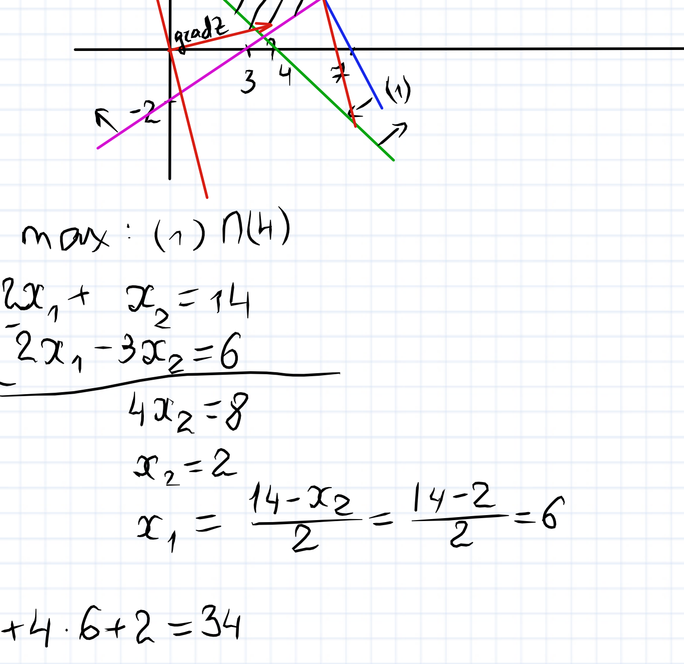
x_1	0	3
x_2	-2	0

$2\cdot0 + 0 \le 14$ верно

$0 \le 8$ верно

$0 + 0 \ge 4$ не верно

$2\cdot0 - 3\cdot0 \le 6$ верно



grad $z = (4; 1)$

max: (1)∩(4)

$$-\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 14 \\ 2x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$4x_2 = 8$

$x_2 = 2$

$$x_1 = \frac{14 - x_2}{2} = \frac{14 - 2}{2} = 6$$

$z_{max} = z(6; 2) = 8 + 4\cdot6 + 2 = 34$

$x_3 = 14 - 2\cdot6 - 2 = 0$

$x_4 = 8 - 2 = 6$

$x_5 = -4 + 6 + 2 = 4$

$x_6 = 6 - 2\cdot6 + 3\cdot2 = 0$

$z_{max} = z(6; 2; 0; 6; 4; 0) = 34$