Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 7

1.13 Двойственные задачи

Пусть для изготовления двух видов продукции P_1, P_2 предприятие использует 4 вида сырья S_1, S_2, S_3, S_4.

Сырье	Запасы	Расход на единицу продукции	
		P_1	P_2
S_1	20	3	2
S_2	16	4	1
S_3	30	0	3
S_4	40	4	0
Прибыль от ед. продукции (у.е.)		10	6

Составить план производства, максимизирующий прибыль предприятия.

x_1- кол-во выпущенной продукции P_1;
x_2- кол-во выпущенной продукции P_3.

Математическая модель:

$$Z(x_1, x_2) = 10x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 4x_1 + x_2 \le 16 \\ 3x_2 \le 30 \\ 4x_1 \le 40 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Предположим, что по некоторым обстоятельствам потребитель отказался от заказа, и предприятие решило продать сырье, не выпуская продукцию. По каким ценам будет продаваться сырье? Составим математическую модель новой задачи.

y_1- стоимость единицы сырья S_1;
y_2- стоимость единицы сырья S_2;
y_3- стоимость единицы сырья S_3;
y_4- стоимость единицы сырья S_4.

Построение математической модели новой задачи – в файле lecture7.pdf.

$$W(y_1, y_2, y_3, y_4) = 20y_1 + 16y_2 + 30y_3 + 40y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 4y_4 \geq 10 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Двойственная задача

$$Z(x_1,x_2)=10x_1+6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2 \le 20 \\ 4x_1+x_2 \le 16 \\ 3x_2 \le 30 \\ 4x_1 \le 40 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$W(y_1,y_2,y_3,y_4)=20y_1+16y_2+30y_3+40y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 3y_1+4y_2+4y_4 \ge 10 \\ 2y_1+y_2+3y_3 \ge 6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

Математическая связь задач:

1. Цели задач – противоположны (max и min).
2. Кол-во переменных двойственной задачи совпадает с кол-вом оганичений исходной задачи.
3. Коэффициенты при неизвестных функции исходной задачи являются правыми частями в ограничениях двойственной задачи и наоборот.
4. Матрица коэффициентов при неизвестных в двойственной задаче - транспонированная матрица коэффициентов при неизвестных исходной задачи.
5. Знаки неравенств противоположны ($\le$ и $\ge$).
6. Переменные обоих задач неотрицательны.

Алгоритм построения двойственной задачи

Пусть исходная задача задана в общей форме.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_p \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_{p+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0 \ \left(i = 1,\ldots,l; \quad l \le n\right) \end{cases}$$

Каждой такой задаче можно поставить в соответствие двойственную задачу по следующему алгоритму:

1. Согласуются неравенства системы ограничений с целью исходной задачи. Если целевая функция максимизируется, то все знаки неравенств должны быть «≤», если целевая функция минимизируется, то все знаки неравенств должны быть «≥».

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_p \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_{p+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0 \ \ (i = 1,\ldots,l; \quad l \le n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0 \ \ (i = 1,\ldots,l; \quad l \le n) \end{cases}$$

2. Каждому *i*-му ограничению системы исходной задачи соответствует переменная y_i двойственной задачи и, наоборот, каждому *j*-му ограничению системы двойственной задачи соответствует переменная x_i исходной задачи.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{array}{ll} y_1 & \\ \ldots & \\ y_k & \\ y_{k+1} & \\ \ldots & \\ y_m & \\ & \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0 \;\; (i = 1, \ldots, l; \quad l \le n) \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 \\ \ldots \\ x_l \\ x_{l+1} \\ \ldots \\ x_n \\ \end{array}\right\}$$

3. Коэффициенты при неизвестных в целевой функции двойственной задачи совпадают с правыми частями системы ограничений исходной задачи.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad\qquad W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

$$\begin{array}{ll} y_1 & \\ \ldots & \\ y_k & \\ y_{k+1} & \\ \ldots & \\ y_m & \\ & \end{array}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,\ n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0 \ \ (i = 1,\ldots,l;\ l \le n) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 \\ \ldots \\ x_l \\ x_{l+1} \\ \ldots \\ x_n \end{array}\begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

4. Цель двойственной задачи противоположна цели исходной задачи.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ \ldots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \ldots \\ y_m \\ \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,\,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0 \ \ (i = 1, \ldots, l;\ l \le n) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ \ldots \\ x_l \\ x_{l+1} \\ \ldots \\ x_n \end{array} \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

5. Матрица системы ограничений двойственной задачи получается транспонированием из матрицы системы ограничений исходной задачи.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ \ldots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \ldots \\ y_m \\ \\ \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,\,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0 \ \left(i = 1, \ldots, l;\ l \le n\right) \end{cases}$$

$$W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ \ldots \\ x_l \\ x_{l+1} \\ \ldots \\ x_n \\ \\ \end{array} \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,l+1}y_2 + \ldots + a_{m,l+1}y_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \\ \end{cases}$$

6. Коэффициенты правых частей двойственной задачи – это коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ \ldots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \ldots \\ y_m \\ \\ \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,\,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0 \ \left(i = 1,\ldots,l;\ l \le n\right) \end{cases}$$

$$W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ \ldots \\ x_l \\ x_{l+1} \\ \ldots \\ x_n \\ \\ \end{array} \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m & c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m & c_l \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,l+1}y_2 + \ldots + a_{m,l+1}y_m & c_{l+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n & c_n \\ & \end{cases}$$

7. Знаки ограничений двойственной задачи могут быть либо неравенствами, соответствующими цели двойственной задачи, либо равенствами. Неравенство ставится в случае, если на переменную исходной задачи, соответствующую ограничению двойственной задачи, наложено условие неотрицательности. Если такого условия нет, то соответствующее ограничение двойственной задачи – уравнение.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ \ldots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \ldots \\ y_m \\ \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,\,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0 \ \ (i = 1, \ldots, l;\ l \le n) \end{array} \right.$$

$$W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ \ldots \\ x_l \\ x_{l+1} \\ \ldots \\ x_n \end{array} \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m & \ge & c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m & \ge & c_l \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,l+1}y_2 + \ldots + a_{m,l+1}y_m & = & c_{l+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n & = & c_n \end{array} \right.$$

8. На переменную y_j двойственной задачи следует наложить условие неотрицательности лишь в том случае, если i-е ограничение исходной задачи – неравенство.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{array}{ll} y_1 & \\ \ldots & \\ y_k & \\ y_{k+1} & \\ \ldots & \\ y_m & \\ & \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,\ n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0 \ \ (i = 1,\ldots,l;\ l \le n) \end{cases}$$

$$W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{array}{ll} x_1 & \\ \ldots & \\ x_l & \\ x_{l+1} & \\ \ldots & \\ x_n & \\ & \end{array} \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m \ge c_l \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,l+1}y_2 + \ldots + a_{m,l+1}y_m = c_{l+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n = c_n \\ y_j \ge 0 \left(j = 1,\ldots,k, \quad k \le m \right) \end{cases}$$

Если по алгоритму построить двойственную задачу к двойственной, то получим исходную задачу. Поэтому исходную и двойственную задачу называют *парой взаимно двойственных задач*.

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ \ldots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \ldots \\ y_m \\ \\ \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,\,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0 \ \left(i = 1,\ldots,l;\ l \le n\right) \end{cases}$$

$$W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to \min.$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ \ldots \\ x_l \\ x_{l+1} \\ \ldots \\ x_n \\ \\ \end{array} \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m \ge c_l \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,l+1}y_2 + \ldots + a_{m,l+1}y_m = c_{l+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n = c_n \\ y_j \ge 0 \left(j = 1,\ldots,k, \quad k \le m \right) \end{cases}$$

Пример 1

Составить двойственную задачу.

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Решение примера 1– в файле lecture7.pdf.

$$W = 6y_1 - 9y_2 + 11y_3 \to \min$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ \end{array} \begin{cases} y_1 - 2y_2 + 3y_3 \ge 5 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 4 \\ y_1 - 3y_2 + 2y_3 \ge 6 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Двойственная задача

Пусть имеется пара двойственных задач в симметричной форме

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0\,(i = 1,\ldots,n) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \ge c_n \\ y_j \ge 0\,(j = 1,\ldots,m) \end{cases}$$

Сформулируем ряд теорем, дающих зависимости между решениями пары двойственных задач.

Теорема 16 (Основное неравенство теории двойственности) Пусть $X = (x_1,\ldots,x_n)$ и $Y = (y_1,\ldots,y_m)$ - допустимые решения пары двойственных задач в симметричной форме. Тогда, $W(Y) \ge Z(X)$.

Доказательство:

$$W(Y) = b_1y_1 + \ldots + b_my_m \ge (a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n)y_1 + \ldots + (a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n)y_m =$$

$$= (a_{11}y_1 + \ldots a_{m1}y_m)x_1 + \ldots + (a_{1n}y_1 + \ldots a_{mn}y_m)x_n \ge c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = Z(X)$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0\left(i = 1,\ldots,n\right) \end{cases}$$

$$W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \ge c_n \\ y_j \ge 0\left(j = 1,\ldots,m\right) \end{cases}$$

Теорема 17 (Достаточный признак оптимальности решения) Пусть $X^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*,\ldots,y_m^*)$ - допустимые решения пары двойственных задач и $W(Y^*) = Z(X^*)$. Тогда, X^*, Y^* – оптимальные решения этих задач.

Доказательство:

1. Пусть X* - не оптимальное решение.
Тогда существует допустимое решение X такое, что Z(X)>Z(X*)=W(Y*).
Противоречие теореме 16.

2. Пусть Y* - не оптимальное решение.
Тогда существует допустимое решение Y такое, что W(Y)<W(Y*)=Z(X*).
Противоречие теореме 16.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0\,(i = 1,\ldots,n) \end{cases}$$

$$W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \ge c_n \\ y_j \ge 0\,(j = 1,\ldots,m) \end{cases}$$

Теорема 18 (О минимаксе) Если одна из пары двойственных задач имеет решение, то и другая имеет решение, причем $Z_{max}=W_{min}$. Если одна из пары двойственных задач имеет неограниченную функцию, то система ограничений второй задачи не совместна.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad\qquad W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ \ldots \\ y_m \\ \end{array}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0\ (i = 1, \ldots, n) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 \\ \ldots \\ x_n \\ \end{array}\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \ge c_n \\ y_j \ge 0\ (j = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

Теорема 19 (Равновесия) Пусть $X^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ и $Y^*=(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ - допустимые планы пары двойственных задач в симметричной форме. Эти планы являются оптимальными тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия дополняющей нежесткости:

$$\begin{cases} y_1^* \cdot \left[b_1 - \left(a_{11}x_1^* + \ldots + a_{1n}x_n^*\right)\right] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m^* \cdot \left[b_m - \left(a_{m1}x_1^* + \ldots + a_{mn}x_n^*\right)\right] = 0 \\ x_1^* \cdot \left[\left(a_{11}y_1^* + \ldots + a_{m1}y_m^*\right) - c_1\right] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^* \cdot \left[\left(a_{1n}y_1^* + \ldots + a_{mn}y_m^*\right) - c_n\right] = 0 \end{cases}$$

Теорема 19 позволяет определить оптимальное решение одной из пары двойственных задач по решению другой. Если ограничение одной задачи при подстановке оптимального решения обращается в строгое неравенство, то соответствующая двойственная переменная в оптимальном решении двойственной задачи равна 0. Если в оптимальном плане одной задачи какая-нибудь переменная положительна, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи является уравнением.

Пример 2

Решив графически двойственную задачу, найти решение исходной по теореме равновесия.

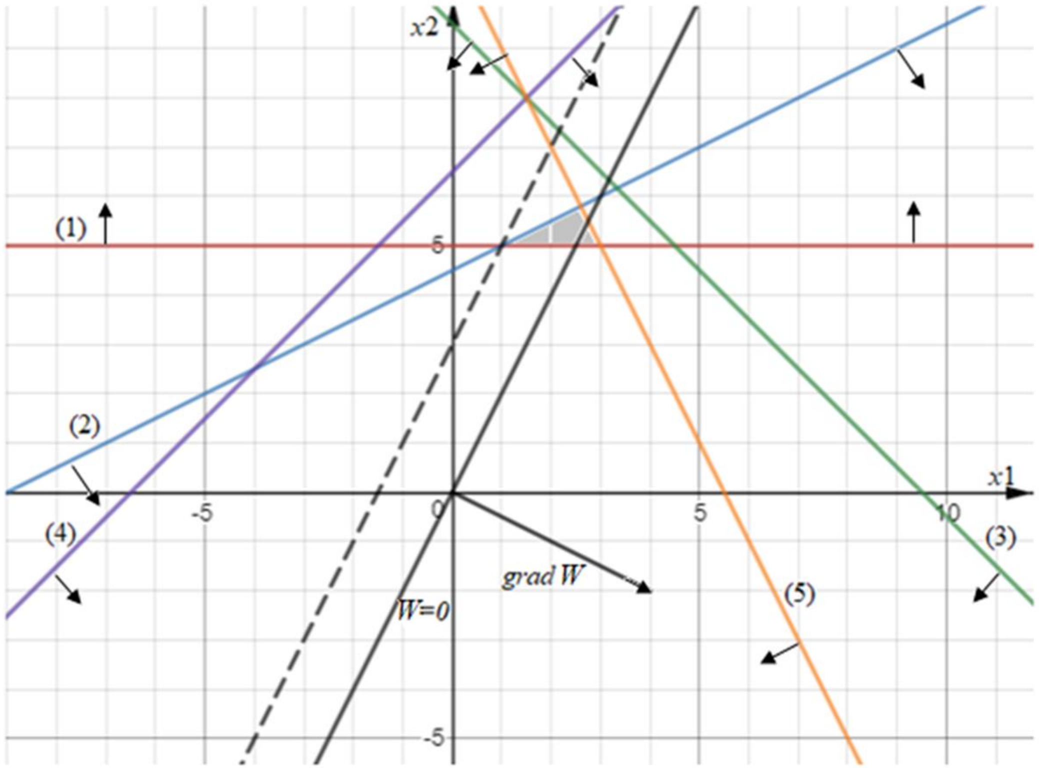
$$Z = 10x_1 - 9x_2 - 19x_3 - 13x_4 - 11x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \le 4 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \ge 2, \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Решение примера 2 – в файле lecture7.pdf.

$$W = 6y_1 - 9y_2 + 11y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + 3y_3 \ge 5 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 4 \\ y_1 - 3y_2 + 2y_3 \ge 6 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$W_{\min} = W(1;5) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = -6$$

$$Z_{\max} = Z(3;4;0;0;0) = -6$$