Понятие функции

Пусть X, Y – некоторые непустые числовые множества.

Если каждому числу $x \in X$ *единственным образом поставлено в соответствие число* $y \in Y$, *то говорят, что на множестве* X *определена (задана) функция и пишут*

$$y = f(x)$$

Множество X - *область определения* функции;

x – *независимая переменная* (аргумент) функции;
y, соответствующее данному значению x, - *значение функции в точке* x.

множество $\{y\}$ – *множество значений* функции.

Геометрически функция $y = f(x)$ изображается своим графиком. *График функции* – это множество точек $\{\text{M}(x, f(x)), x \in X\}$ в прямоугольной системе координат $\text{O}xy$.

Основные характеристики функции

1. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *четной*, если $\forall x \in X$ выполнены условия:

$$-x \in X \text{и } f(-x) = f(x)$$

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *нечетной*, если $\forall x \in X$ выполнены условия:

$$-x \in X \text{и } f(-x) = -f(x)$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример1. Функции, заданные на всей числовой оси: $y = x^2$, $y = \cos x$ – четные, функции $y = x^3$, $y = \sin x$ – нечетные, $y = x^2 + 1$, $y = \sqrt{x}$ – общего вида.

2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и $X_1 \subset X$.

Если $\forall x_1, x_2 \in X_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется *возрастающей* на множестве X_1.

Если $\forall x_1, x_2 \in X_1$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция называется *неубывающей* на множестве X_1;

Если $\forall x_1, x_2 \in X_1 \;\; x_1 < x_2 \;\; \Rightarrow \;\; f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется *убывающей* на множестве X_1;

Если $\forall x_1, x_2 \in X_1 \;\; x_1 < x_2 \;\; \Rightarrow \;\; f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется *невозрастающей* на множестве X_1.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие, неубывающие функции на множестве X_1 называются *монотонными* на этом множестве, Возрастающие, и убывающие, функции на множестве X_1 называются *строго монотонными* на этом множестве.

3. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *ограниченной* на этом множестве, если существует такое число $\mathrm{M} > 0$, что $\forall x \in X$ выполнено неравенство $|f(x)| \leq \mathrm{M}$

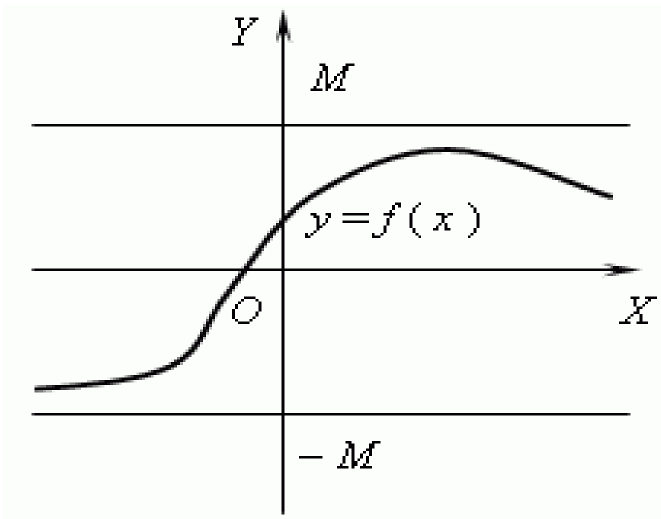

Рис. 1

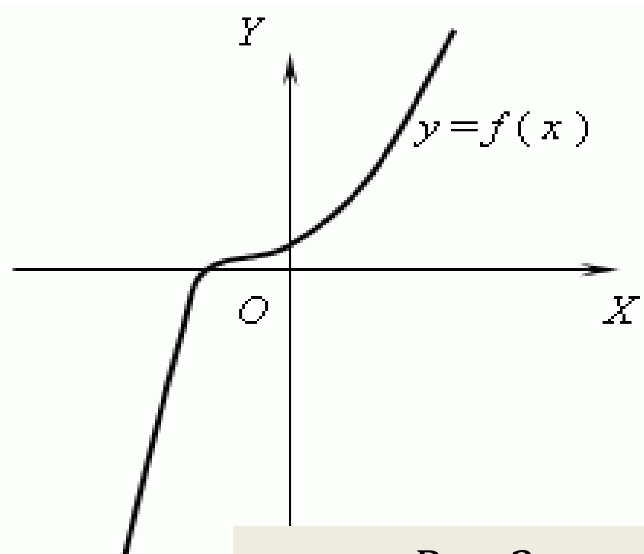

Рис. 2

3. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *периодической* на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, такое, что $\forall x \in X$ выполнены условия:

$$(x+T) \in X \text{ и } f(x+T) = f(x)$$

Пример2. Функции, заданные на всей числовой оси: $y = \cos x$, $y = \sin x$ – периодические, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ – не периодические.

Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$, определенная на множестве X и принимающая значения во множестве Y. Пусть каждому значению $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$. В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ устанавливает *взаимно-однозначное соответствие* между элементами X и Y.

Поставим каждому $y \in Y$ то число $x \in X$, для которого $y = f(x)$, тем самым будет определена функция $x = f^{-1}(y)$, которая называется *обратной к функции* $y = f(x)$.

Любая строго монотонная функция имеет обратную. При этом, если функция возрастает (убывает), то обратная также возрастает (убывает).

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Пример3. Функция $y = x^2$, заданная на множестве $X = [0; +\infty)$, имеет обратную $y = \sqrt{x}$

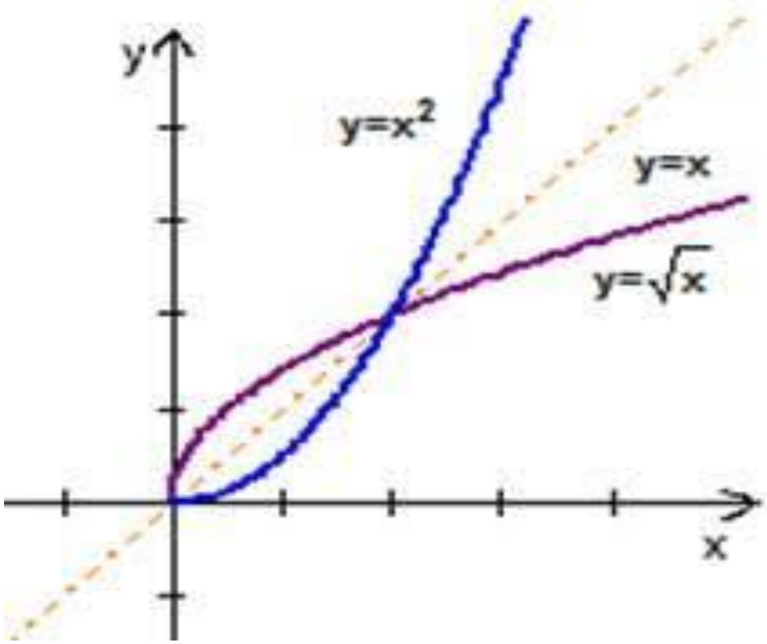

Рис. 3

Сложная функция

Пусть аргумент t функции $y = f(t)$ является не независимой переменной, а функцией некоторой переменной x: $t = \varphi(x)$. Тогда говорят, что переменная y является *сложной функцией* переменной x и пишут $y = f(\varphi(x))$.

Пример 4. Функция $y = \sin x^2$ - сложная функция, $y = \sin t$, $t = x^2$.

Основные элементарные функции

Показательная функция

$$y = a^x, a > 0, a \neq 1$$

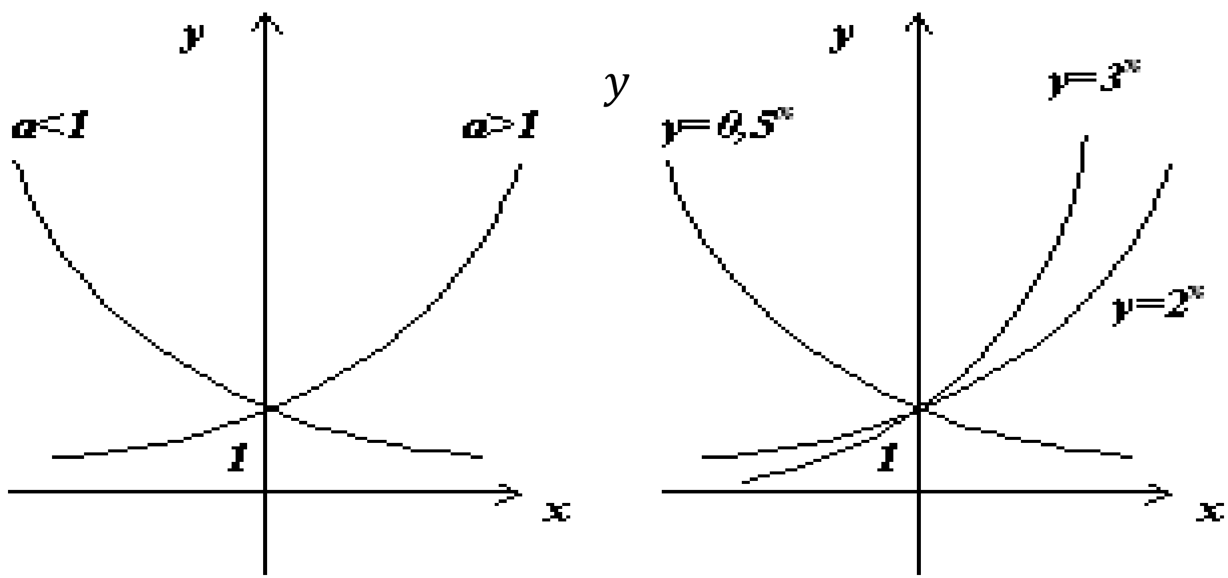

Рис. 4

Степенная функция

$$y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

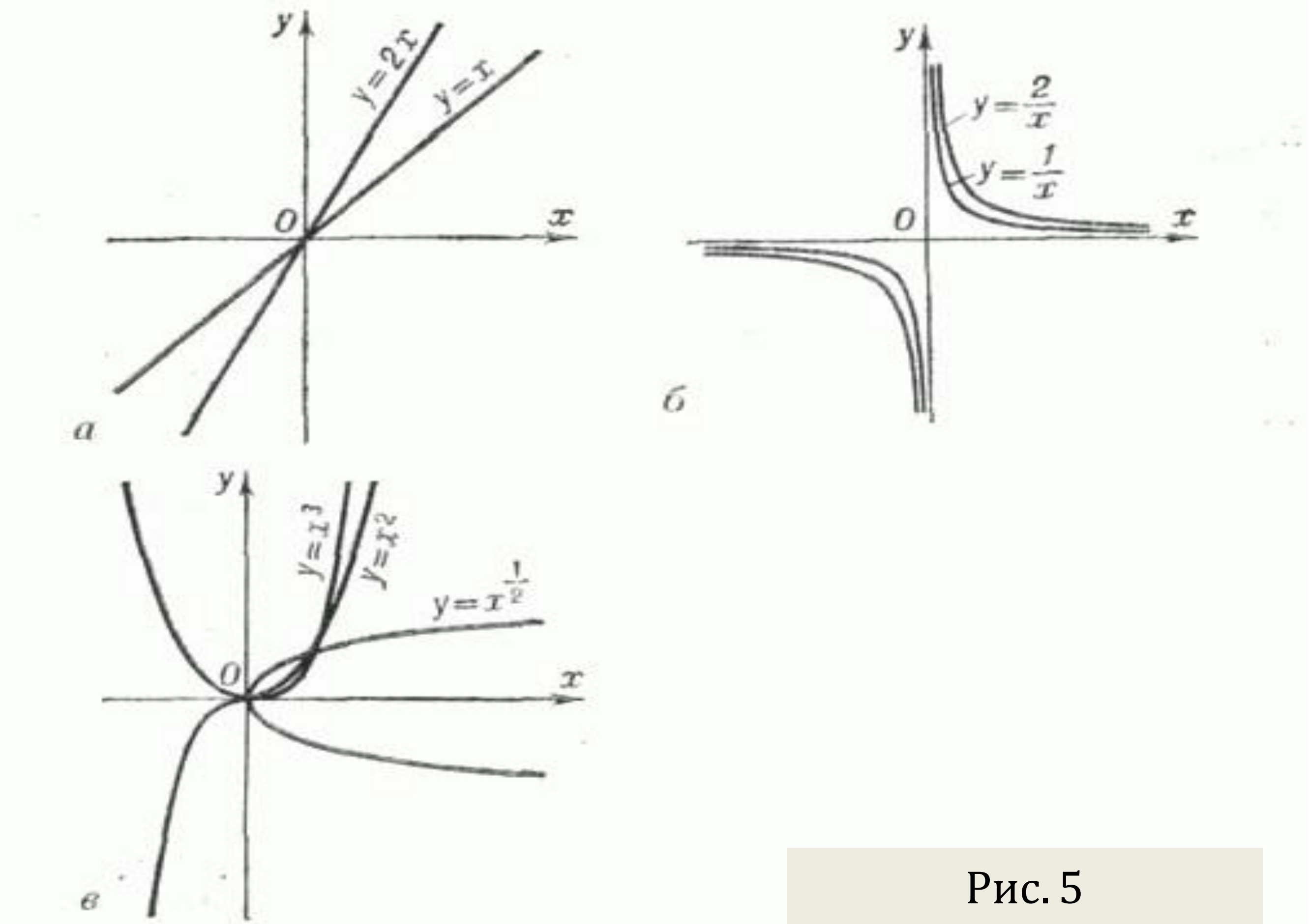

Рис. 5

Логарифмическая функция

$$y = \log_a x\,, a > 0, a \neq 1$$

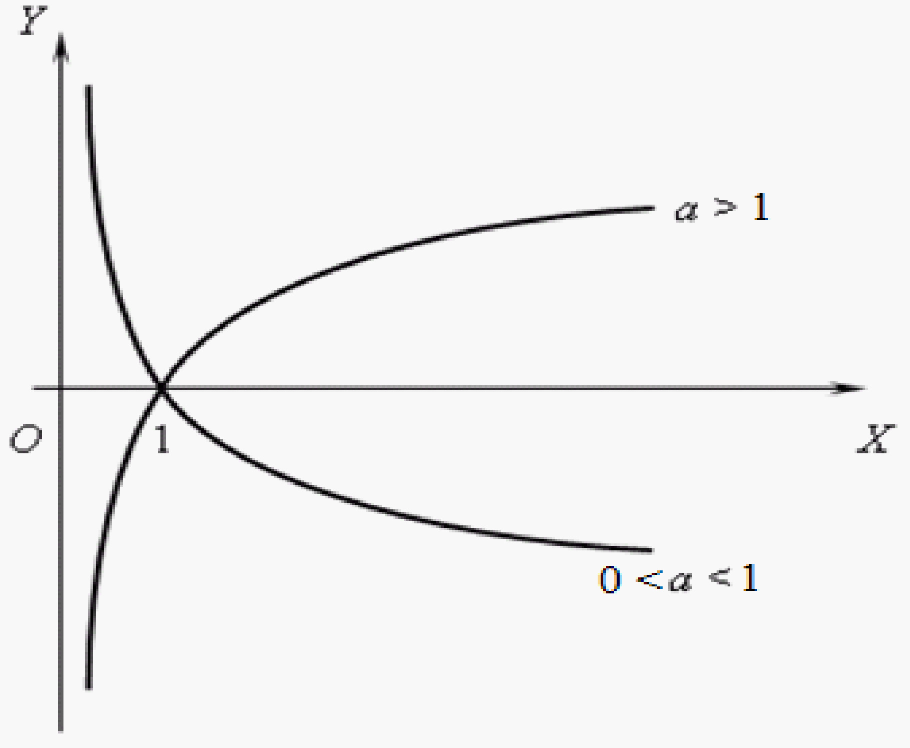

Рис. 6

Тригонометрические функции

$$y = \cos x\,,\ y = \sin x\,,\ y = \operatorname{tg} x\,,\ y = \operatorname{ctg} x$$

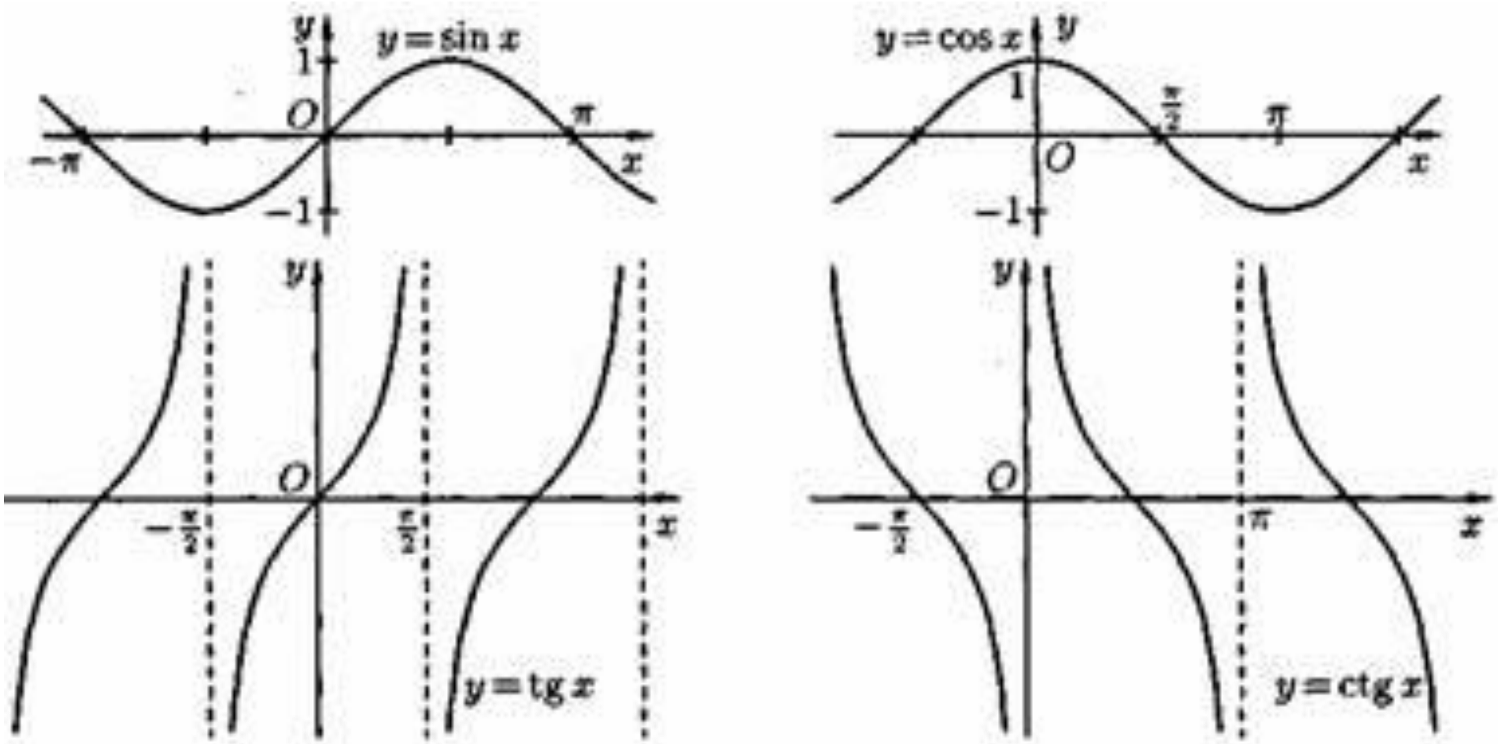

Рис. 7

Обратные тригонометрические функции

$y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

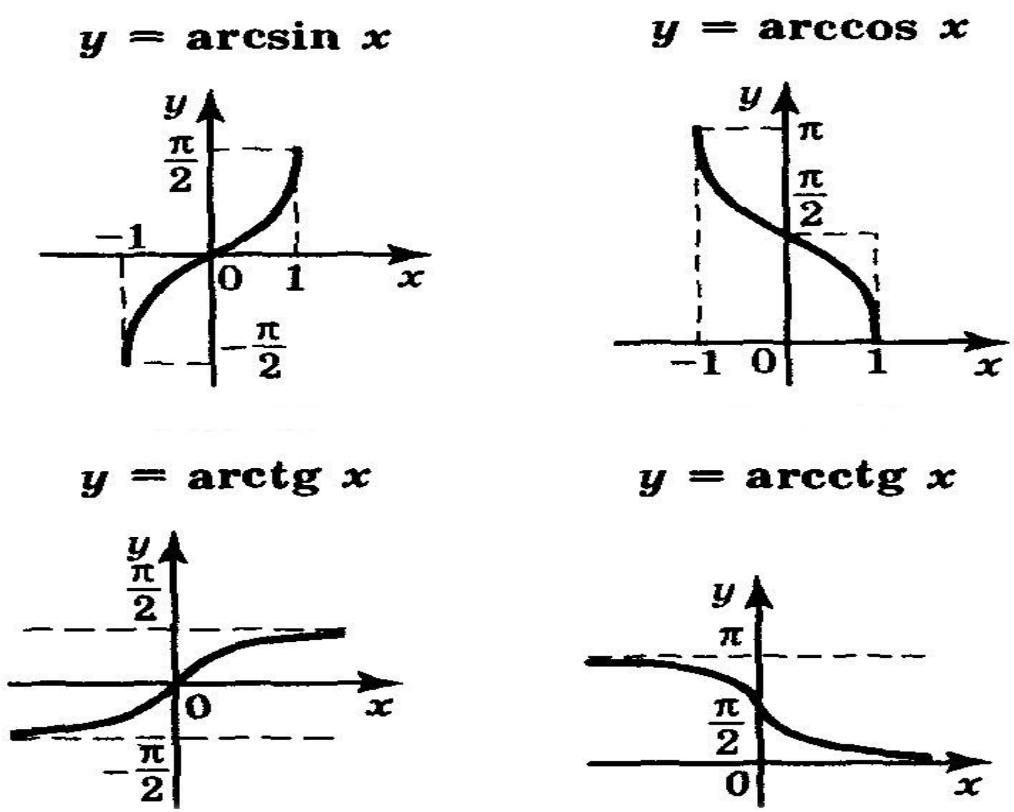

Рис. 8

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных, с помощью конечного числа арифметических операций и операций взятия функции от функции называется *элементарной*.

Пример 5. Функция $y = \sin x^2 + 2^{\sqrt{x}}$ – элементарная функция,

Функция $y = \begin{cases} \sin x^2, \text{при } x \le 0 \\ 2^{\sqrt{x}}, \text{при } x > 0 \end{cases}$ не является элементарной.

Предел функции

Окрестности

Окрестность точки c – любой интервал, содержащий точку x_0;

ε – *окрестность* точки c – интервал $(c - \varepsilon; c +$

Предельные точки множества

Число a называется *предельной точкой числового множества* X, если в любой проколотой ε – окрестности точки a содержатся точки из X. При этом сама точка может принадлежать, а может и не принадлежать X.

Пример 6. 1) $X = \{x: a < x < b\}$. Любая точка интервала, а также точки a, b – предельные точки интервала X.

2) $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел не имеет предельных точек.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и a – предельная точка X.

Определение предела (по Коши). *Число* A *называется пределом функции* $f(x)$ *в точке* a *(при* $x \to a$*), если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для любого значения аргумента* x *из проколотой* δ *- окрестности точки* a *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = A}$$

Геометрический смысл предела функции

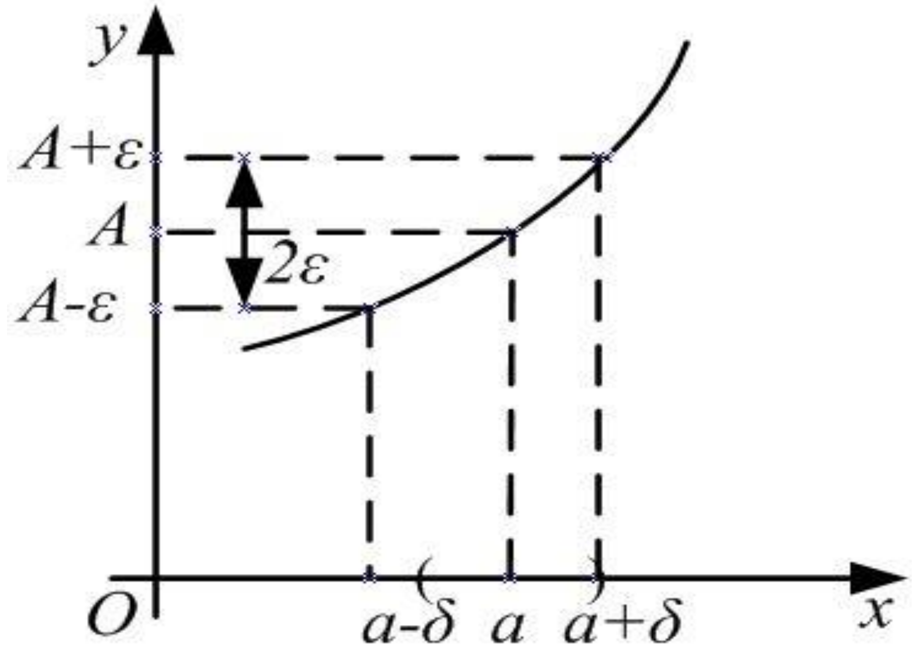

Рис. 9

Замечание 1. *Функция может иметь в данной точке не более одного предела.*

Замечание 2. *Если функция имеет предел в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

Утверждение следует непосредственно из определения предела функции:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$

Пример 6.

1) Пусть $f(x) = A = const \ \forall x \in \mathbb{R}$, тогда $\forall a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ возьмем любое $\delta > 0$. Тогда

$|f(x) - A| = 0 < \varepsilon$ при всех x и, значит,

при $0 < |x - a| < \delta$

2) $f(x) = \begin{cases} A, \text{при } x \neq a \\ \text{В}, \text{при } x = a \end{cases}$, тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

3) $f(x) = \begin{cases} A, \text{при } x \neq a \\ \text{не определена, при } x = a \end{cases}$, тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Замечание 3. Если в определении предела опустить неравенство $0 < |x - a|$, то в 3) ответ не изменится, т.к. $x = a$ не является значением аргумента.

В 2) ответ изменится: предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не будет существовать, так как при $x = a$ неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ примет вид $|\text{В} - A| < \varepsilon$, оно не выполняется, если взять $\varepsilon < |\text{В} - A|$.

Односторонние пределы

Функция может иметь различные предельные точки слева и справа в некоторой точке.
Например,

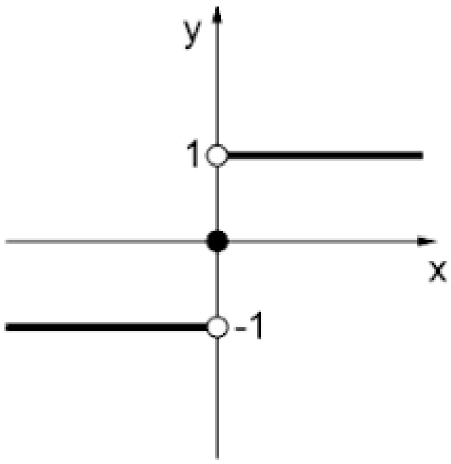

Рис. 10

$$y = sgn\, x = \begin{cases} 1, \text{при } x > 0 \\ 0, \text{при } x = 0 \\ -1, \text{при } x < 0 \end{cases}$$

*Число A называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a справа (слева), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого значения аргумента*
$x \in (a; a+\delta)$ (соответственно $x \in (a-\delta; a)$) *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \to a+0} f(x) = A$ или $f(a+0) = A$

$\lim_{x \to a-0} f(x) = A$ или $f(a-0) = A$

Теорема. *Если у функции $f(x)$ существуют в точке a предел слева и предел справа, причем $f(a+0) = f(a-0) = A$, то в данной точке существует предел этой функции, равный A.*

Предел функции при $x \to \infty$

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве X и $\forall N\ \exists x \in X$: $x > N$

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такое, что для любого $x > N$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

Аналогично определяется $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

Если $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

то пишут

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Пример 7. Докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Действительно, $\forall\varepsilon>0$ возьмем $N=\frac{1}{\varepsilon}$.

Тогда

если $x>N=\frac{1}{\varepsilon}$, то $\frac{1}{x}<\varepsilon$, т.е. $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\ \varepsilon$.

Предел числовой последовательности

Числовая последовательность – это функция, определенная на множестве натуральных чисел: $f(n)\colon n \in \mathbb{N}$ $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

Число A *называется* *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, *если* $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}$, *такой, что* $\forall n > N$ *выполнено неравенство* $|x_n - A| < \varepsilon$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

Если последовательность имеет предел, то говорят, что она *сходится*, а если не имеет предела, то *расходится.*

Свойства пределов функций

Теорема. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в проколотой окрестности точки* a *и, пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B.$

Тогда:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = A \cdot B;$$

Если $B \neq 0$, *то в некоторой проколотой окрестности точки* a *определена функция* $f(x)/g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$

Следствие 1.

$$\lim_{x\to a} c\, f(x) = c\, A$$

где $c = const$

Следствие 2. *Пусть* $P_n(x)$ *и* $Q_m(x)$ – *многочлены степени* n *и* m. *Если* $Q_m(a) \neq 0$, *то*

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}$$

Пример 8.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x}{(x-3)} = \frac{2}{-1} - 2$$