Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 10

2. Специальные задачи линейного программирования

2.2. Транспортная задача

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ - поставщики $\qquad$ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ - запасы грузов

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ - потребители $\qquad$ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - потребности в грузах

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

- матрица тарифов (c_{ij} - стоимости перевозок единицы груза от A_i к B_j)

Требуется составить план перевозок с минимальными издержками.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

- матрица перевозок (x_{ij} – количество перевезенного груза от A_i к B_j)

Информация о транспортной задаче хранится в распределительной таблице:

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	

Составим математическую модель транспортной задачи:

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	

Затраты на перевозки:

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min$$

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	

Все запасы должны быть вывезены:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{cases}$$

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	

Все потребности должны быть удовлетворены:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases}$$

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	

Нет обратных перевозок:

$$x_{ij} \geq 0 \; (i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n)$$

Математическая модель транспортной задачи:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \qquad (2.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n) \end{cases} \qquad (2.2)$$

Система ограничений содержит m+n уравнений и $m \cdot n$ неизвестных

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (2.3)$$

При выполнении этого условия модель транспортной задачи – закрытая. Иначе – открытая.

Транспортную задачу можно решать симплекс-методом.

Если 4 поставщика и 5 потребителей, то сколько будет уравнений и неизвестных?

Теорема 1 Условие (2.3) является необходимым и достаточным условием совместности системы (2.2).

Доказательство теоремы 1 – в файле lecture10.pdf.

Следствие 1 Закрытая модель транспортной задачи имеет хотя бы одно опорное решение.

Следствие 2 Закрытая модель транспортной задачи имеет оптимальное решение.

В случае невыполнения условия (2.3) необходимо осуществить переход к закрытой модели.

Алгоритм перехода от открытой к закрытой модели

1. Суммарный спрос больше суммарных потребностей $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

Заводим фиктивного поставщика A_{m+1} с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

2. Суммарный спрос меньше суммарных потребностей $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

Заводим фиктивного потребителя B_{n+1} с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

У фиктивного поставщика и потребителя нулевые тарифы перевозок.
Введение фиктивного поставщика или потребителя не влияет на целевую функцию!

Теорема 2 Ранг матрицы системы ограничений (2.2) равен m+n-1.

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,\ldots,m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,\ldots,n \\ x_{ij} \geq 0 \; (i = 1,\ldots,m; \; j = 1,\ldots,n) \end{cases}$$

Ранг системы ограничений равен m+n-1$\Rightarrow$ базисных переменных при приведении системы к разрешенному виду будет m+n-1.

В распределительной таблице будем заполнять только те клетки, для которых переменная x_{ij} – базисная. Такая клетка будет называться *занятой*. Клетки, соответствующие свободным переменным не заполняются и называются *свободными*.

Нулевые перевозки могут появится в распределительной таблице только в случае, если опорное решение – вырожденное.

Из теоремы 2 следует, что в распределительной таблице должна быть m+n-1 занятая клетка.

Теорема 3 Любая базисная переменная в опорном решении системы (2.2) является линейной комбинацией коэффициентов a_i, b_j с коэффициентами 0, 1, -1.

Следствие Если в системе (2.2) коэффициенты a_i, b_j – целые числа, то решение транспортной задачи – целочисленное.

Этапы решения транспортной задачи:

- нахождение начального опорного решения;
- оценка найденного решения;
- переход к новому опорному решению путем замены базисной переменной на свободную.

2.2.1. Нахождение начального опорного плана

Чем лучше начальный план, тем быстрее сможем найти решение. Но как правило, для нахождения лучшего плана используются более сложные методы.

Все методы используют последовательное заполнение клеток распределительной таблицы значениями перевозок. Различие методов – в принципах заполнения.

Общие принципы методов нахождения начального опорного плана

- На каждом шаге заполняется только одна клетка поставкой x_{ij} таким образом, чтобы либо полностью удовлетворить потребность потребителя B_j, либо вывести весь груз от поставщика A_i.
- Запасы груза в i-ой строке и потребности в j-ом столбце уменьшаются на величину x_{ij}.
- Если запас груза в i-ой строке стал равен 0, то из дальнейшего рассмотрения исключаются все клетки i-ой строки. Если потребности j-го потребителя становятся равными 0, то из дальнейшего рассмотрения исключаются все клетки j-го столбца.
- Далее рассматривается таблица с исключенными клетками и процесс заполнения повторяется.
- Заполненных клеток должно быть $m+n-1$.

Замечание: Если на каком-нибудь шаге метода одновременно удовлетворяются потребности потребителя и вывозится груз от поставщика , то опорный план – вырожденный и необходимо прежде, чем исключить из дальнейшего рассмотрения строку и столбец занести нулевую поставку в одну из пустых клеток исключаемых строки или столбца.

Метод северо-западного угла

Это самый простой метод. Заполнение таблицы начинается с верхней левой клетки («северо-западный угол»). На каждом шаге для заполнения выбирается клетка, находящаяся справа или снизу от предыдущей.

Пример 1 Найти начальное опорное решение методом северо-западного угла.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	8	3	10	4	50
A_2	10	7	9	6	5	130
A_3	7	3	6	4	12	80
Потребности	80	50	60	20	50	

Решение примера 1 – в файле lecture10.pdf.

Начальный опорный план в этом методе обычно получается далеким оп оптимального, т.к. не учитывается стоимость перевозок.

Метод минимальной стоимости

Очевидно, выбор пунктов назначения и отправления целесообразно производить, ориентируясь на тарифы перевозок. На каждом шаге метода минимальной стоимости для заполнения выбирается клетка, имеющая наименьший тариф из тех клеток, которые могут быть заполнены на данном этапе. Если таких клеток несколько, то для заполнения выбирается любая из них. План, полученный этим методом, как правило, является более близким к оптимальному, чем методом северо-западного угла.

Пример 2

Найти начальное опорное решение задачи примера 1 методом минимальной стоимости.

Решение примера 2 – в файле lecture10.pdf.

Метод Фогеля

Для каждой строки и каждого столбца составляются разности между двумя минимальными тарифами. Среди полученных разностей выбирают максимальную, а затем в соответствующей строке или столбце выбирают для заполнения клетку с минимальным тарифом. Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток строки или столбца, то для заполнения выбирают ту клетку, которая соответствует наибольшей разности минимальных тарифов строки или столбца.

План, полученный этим методом, близок к оптимальному (обычно – оптимальный). Метод Фогеля используется при незначительном количестве поставщиков и потребителей.

Пример 3

Найти начальное опорное решение задачи примера 1 методом Фогеля.

Решение примера 3 – в файле lecture10.pdf.