Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 4

1.10. Симплекс-метод

Симплекс-метод (метод последовательного улучшения плана) позволяет решить любую ЗЛП, заданную в канонической форме.

Симплекс – простейший многогранник данного числа измерений, например, треугольник в R^2, тетраэдр – в R^3 и т.д.). Название метода связано с тем историческим обстоятельством, что ограничения одной из первых задач, решенных этим методом, задавали симплекс в пространстве соответствующей размерности.

Пусть задача линейного программирования представлена в канонической форме:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{1.15}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

Прежде, чем описать алгоритм симплекс-метода, сформулируем ряд теорем, которые дают этот алгоритм.

Пусть система (1.16) приведена к единичному базису с неотрицательными правыми частями $(b_i \ge 0, i = 1, 2, \dots, m)$:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}, \qquad (1.17)$$

Выразим целевую функцию через свободные переменные.

$$Z = c'_0 + c'_1 x_{r+1} + \ldots + c'_n x_n \to \max \qquad (1.18)$$

Системе (1.17) соответствует опорное решение $(b'_1, \ldots, b'_r, 0, \ldots, 0)$, при этом значение функции $Z = c'_0$.

Из (1.17), (1.18) можно перейти к симметричной форме ЗЛП и для нее построить область допустимых решений – многогранник.

Теорема 8 Каждому опорному решению системы (1.16) соответствует вершина многогранника планов эквивалентной симметричной задачи и наоборот.

Из теоремы 8 следует, что максимального значения функция достигает для одного из опорных решений системы (1.16).

Симплекс-метод позволяет найти этот опорный план в результате упорядоченного перебора опорных планов. При этом упорядоченность понимается в том смысле, что переход от одного опорного решения к другому значения функции не убывают.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}, \qquad (1.17)$$

$$Z = c'_0 + c'_1 x_{r+1} + \ldots + c'_n x_n \to \max \qquad (1.18)$$

Средством хранения информации о решаемой задаче линейного программирования являются симплекс-таблицы, начальная таблица составляется по (1.17), (1.18) и имеет следующий вид:

б.п.	1	x_1	x_2	…	x_r	x_{r+1}	…	x_n
x_1	b'_1	1	0	…	0	$a'_{1,r+1}$	…	$a'_{1,n}$
x_2	b'_2	0	1	…	0	$a'_{2,r+1}$	…	$a'_{2,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	b'_r	0	0	…	1	$a'_{r,r+1}$	…	$a'_{r,n}$
Z	c'_0	0	0	…	0	$-c'_{r+1}$	…	$-c'_n$

(1.19)

Последнюю строку называют *строкой целевой функции* или Z-строкой. Столбец с заголовком 1 содержит правые части уравнений (1.17), свободный член целевой функции и называется *столбцом свободных членов*.

$$
\begin{array}{c|c|ccccccc}
\textit{б.п.} & 1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_r & x_{r+1} & \ldots & x_n \\
\hline
x_1 & b'_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1,r+1} & \ldots & a'_{1,n} \\
x_2 & b'_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{2,r+1} & \ldots & a'_{2,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_r & b'_r & 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{r,r+1} & \ldots & a'_{r,n} \\
\hline
Z & c'_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c'_{r+1} & \ldots & -c'_n
\end{array}
\qquad (1.19)
$$

Таблице (1.19) соответствует опорное решение $(b'_1,\ldots,b'_r,0,\ldots,0)$, при этом значение функции $Z = c'_0$.

Теорема 9 (признак оптимальности опорного решения) Если в таблице (1.19) коэффициенты $-c'_j \geq 0$ ($j = r+1,\ldots,n$), то опорное решение $X' = (b'_1,\ldots,b'_r,0,\ldots,0)$ является оптимальным и при этом $Z_{\max} = Z(X') = c'_0$.

Теорема 10 (признак неограниченности функции) Если в таблице (1.19) существует хотя бы один коэффициент $-c'_j < 0$ такой, что среди элементов a'_{ij} ($i = 1,2,\ldots,r$) нет положительных, то целевая функция (1.18) при ограничениях (1.17), не ограничена сверху.

$$
\begin{array}{c|c|cccccccc}
б.п. & 1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_r & x_{r+1} & \ldots & x_n \\
\hline
x_1 & b'_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1,r+1} & \ldots & a'_{1,n} \\
x_2 & b'_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{2,r+1} & \ldots & a'_{2,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_r & b'_r & 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{r,r+1} & \ldots & a'_{r,n} \\
\hline
Z & c'_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c'_{r+1} & \ldots & -c'_n
\end{array}
\qquad (1.19)
$$

Теорема 11 (о возможности улучшения плана) Если в таблице (1.19) существует хотя бы один коэффициент $-c'_j < 0\,(j = r+1,\ldots,n)$, а в каждом столбце с таким элементом среди $a'_{ij}\,(i = 1,2,\ldots,r)$ есть хотя бы один положительный, то поменяв базис, можно перейти к другому опорному плану X'' такому, что $Z(X'') \geq Z(X')$.

Теорема 12 (признак альтернативного оптимума) Если в Z-строке симплексной таблицы (1.19), содержащей оптимальный план, среди чисел $-c'_j \geq 0\,(j = r+1,\ldots,n)$ есть равные 0, то множество оптимальных решений бесконечно.

Сформулированные теоремы позволяют проверить, является ли найденное опорное решение оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному решению, но не дают самого алгоритма перехода.

Идея симплекс-метода: осуществлять переход от одной таблицы к другой, заменяя одну из базисных переменных на свободную до тех пор, пока не получим оптимальное решение или не установим, что функция не ограничена (теоремы 9, 10).

Если в Z-строке есть отрицательные элементы, то введение в базис соответствующих свободных переменных позволит не уменьшить значение целевой функции (теорема 11). Так как количество переменных в базисе должно остаться неизменным, то одна из переменных должна быть выведена из базиса. Таким образом, на каждом шаге симплекс-метода осуществляется преобразование базиса: одна из свободных переменных вводится в базис, а одна из базисных – выводится.

Алгоритм симплексного преобразования

б.п.	1	x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	$\dots$	x_n
x_1	b_1'	1	0	$\dots$	0	$a_{1,r+1}'$	$\dots$	$a_{1,n}'$
x_2	b_2'	0	1	$\dots$	0	$a_{2,r+1}'$	$\dots$	$a_{2,n}'$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_r	b_r'	0	0	$\dots$	1	$a_{r,r+1}'$	$\dots$	$a_{r,n}'$
Z	c_0'	0	0	$\dots$	0	$-c_{r+1}'$	$\dots$	$-c_n'$

1. Для перехода к новому опорному решению в Z-строке среди отрицательных коэффициентов $-c'_j$ $(j = r+1, \dots, n)$ выбирают наибольший по абсолютной величине, пусть это будет $-c'_{j_0}$. Тем самым выбрана свободная переменная x_{j_0}, которая будет вводиться в базис. Столбец с заголовком x_{j_0} называется *разрешающим*.

Отметим разрешающий столбец.

б.п.	1	x_1	x_2	$\ldots$	x_r	x_{r+1}	$\ldots$	x_{j_0}	$\ldots$	x_n	*CO*
x_1	b'_1	1	0	$\ldots$	0	$a'_{1,r+1}$	$\ldots$	a'_{1,j_0}	$\ldots$	$a'_{1,n}$	
x_2	b'_2	0	1	$\ldots$	0	$a'_{2,r+1}$	$\ldots$	a'_{2,j_0}	$\ldots$	$a'_{2,n}$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
x_{i_0}	b'_{i_0}	0	0	$\ldots$	0	$a'_{i_0,r+1}$	$\ldots$	a'_{i_0,j_0}	$\ldots$	$a'_{i_0,n}$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
x_r	b'_r	0	0	$\ldots$	1	$a'_{r,r+1}$	$\ldots$	a'_{r,j_0}	$\ldots$	$a'_{r,n}$	
Z	c'_0	0	0	$\ldots$	0	$-c'_{r+1}$	$\ldots$	$-c'_{j_0}$	$\ldots$	$-c'_n$	

$$-c'_{j_0} < 0$$

2. Для выбора базисной переменной, выводимой из базиса, находятся *симплексные отношения* – отношения элементов столбца свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. И записывают эти отношения в специальный столбец.

Переменная, выводимая из базиса, определяется минимальным симплексным соотношением, соответствующая ей строка называется *разрешающей*. Отметим ее.

Элемент, находящийся на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называется *разрешающим элементом*, выделим его.

$б.п.$	1	x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	$\dots$	x_{j_0}	$\dots$	x_n	CO
x_1	b'_1	1	0	$\dots$	0	$a'_{1,r+1}$	$\dots$	a'_{1,j_0}	$\dots$	$a'_{1,n}$	
x_2	b'_2	0	1	$\dots$	0	$a'_{2,r+1}$	$\dots$	a'_{2,j_0}	$\dots$	$a'_{2,n}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_{i_0}	b'_{i_0}	0	0	$\dots$	0	$a'_{i_0,r+1}$	$\dots$	a'_{i_0,j_0}	$\dots$	$a'_{i_0,n}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_r	b'_r	0	0	$\dots$	1	$a'_{r,r+1}$	$\dots$	a'_{r,j_0}	$\dots$	$a'_{r,n}$	
Z	c'_0	0	0	$\dots$	0	$-c'_{r+1}$	$\dots$	$-c'_{j_0}$	$\dots$	$-c'_n$	

3. Формируется новая симплексная таблица по следующим правилам:

– в базис вместо переменной x_{i_0} вводим переменную x_{j_0};

$б.п.$	1	x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	$\dots$	x_{j_0}	$\dots$	x_n	CO
x_1				$\dots$			$\dots$		$\dots$		
x_2				$\dots$			$\dots$		$\dots$		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_{j_0}				$\dots$			$\dots$		$\dots$		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_r				$\dots$			$\dots$		$\dots$		
Z				$\dots$			$\dots$		$\dots$		

б.п.	1	x_1	x_2	…	x_r	x_{r+1}	…	x_{j_0}	…	x_n	CO
x_1	b'_1	1	0	…	0	$a'_{1,r+1}$	…	a'_{1,j_0}	…	$a'_{1,n}$	
x_2	b'_2	0	1	…	0	$a'_{2,r+1}$	…	a'_{2,j_0}	…	$a'_{2,n}$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_{i_0}	b'_{i_0}	0	0	…	0	$a'_{i_0,r+1}$	…	a'_{i_0,j_0}	…	$a'_{i_0,n}$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_r	b'_r	0	0	…	1	$a'_{r,r+1}$	…	a'_{r,j_0}	…	$a'_{r,n}$	
Z	c'_0	0	0	…	0	$-c'_{r+1}$	…	$-c'_{j_0}$	…	$-c'_n$	

– элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;

б.п.	1	x_1	x_2	…	x_r	x_{r+1}	…	x_{j_0}	…	x_n	CO
x_1				…			…		…		
x_2				…			…		…		
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_{j_0}	$\dfrac{b'_{i_0}}{a'_{i_0,j_0}}$	0	0	…	0	$\dfrac{a'_{i_0,r+1}}{a'_{i_0,j_0}}$	…	1	…	$\dfrac{a'_{i_0,n}}{a'_{i_0,j_0}}$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_r				…			…		…		
Z				…			…		…		

б.п.	1	x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	$\dots$	x_{j_0}	$\dots$	x_n	CO
x_1	b'_1	1	0	$\dots$	0	$a'_{1,r+1}$	$\dots$	a'_{1,j_0}	$\dots$	$a'_{1,n}$	
x_2	b'_2	0	1	$\dots$	0	$a'_{2,r+1}$	$\dots$	a'_{2,j_0}	$\dots$	$a'_{2,n}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_{i_0}	b'_{i_0}	0	0	$\dots$	0	$a'_{i_0,r+1}$	$\dots$	a'_{i_0,j_0}	$\dots$	$a'_{i_0,n}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_r	b'_r	0	0	$\dots$	1	$a'_{r,r+1}$	$\dots$	a'_{r,j_0}	$\dots$	$a'_{r,n}$	
Z	c'_0	0	0	$\dots$	0	$-c'_{r+1}$	$\dots$	$-c'_{j_0}$	$\dots$	$-c'_n$	

– на месте остальных элементов разрешающего столбца будут стоять нули;

б.п.	1	x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	$\dots$	x_{j_0}	$\dots$	x_n	CO
x_1				$\dots$			$\dots$	0	$\dots$		
x_2				$\dots$			$\dots$	0	$\dots$		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_{j_0}	$\dfrac{b'_{i_0}}{a'_{i_0,j_0}}$	0	0	$\dots$	0	$\dfrac{a'_{i_0,r+1}}{a'_{i_0,j_0}}$	$\dots$	1	$\dots$	$\dfrac{a'_{i_0,n}}{a'_{i_0,j_0}}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_r				$\dots$			$\dots$	0	$\dots$		
Z				$\dots$			$\dots$	0	$\dots$		

б.п.	1	x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	$\dots$	x_{j_0}	$\dots$	x_n	CO
x_1	b'_1	1	0	$\dots$	0	$a'_{1,r+1}$	$\dots$	a'_{1,j_0}	$\dots$	$a'_{1,n}$	
x_2	b'_2	0	1	$\dots$	0	$a'_{2,r+1}$	$\dots$	a'_{2,j_0}	$\dots$	$a'_{2,n}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_{i_0}	b'_{i_0}	0	0	$\dots$	0	$a'_{i_0,r+1}$	$\dots$	a'_{i_0,j_0}	$\dots$	$a'_{i_0,n}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_r	b'_r	0	0	$\dots$	1	$a'_{r,r+1}$	$\dots$	a'_{r,j_0}	$\dots$	$a'_{r,n}$	
Z	c'_0	0	0	$\dots$	0	$-c'_{r+1}$	$\dots$	$-c'_{j_0}$	$\dots$	$-c'_n$	

– столбцы таблицы с заголовками базисных переменных (кроме x_{i_0}), не изменяются;

б.п.	1	x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	$\dots$	x_{j_0}	$\dots$	x_n	CO
x_1		1	0	$\dots$	0		$\dots$	0	$\dots$		
x_2		0	1	$\dots$	0		$\dots$	0	$\dots$		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_{j_0}	$\dfrac{b'_{i_0}}{a'_{i_0,j_0}}$	0	0	$\dots$	0	$\dfrac{a'_{i_0,r+1}}{a'_{i_0,j_0}}$	$\dots$	1	$\dots$	$\dfrac{a'_{i_0,n}}{a'_{i_0,j_0}}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_r		0	0	$\dots$	1		$\dots$	0	$\dots$		
Z		0	0	$\dots$	0		$\dots$	0	$\dots$		

– все остальные элементы пересчитываются по правилу прямоугольника:

$$\begin{matrix} \boxed{a'_{i_0 j_0}} & a'_{i_0 j} \\ a'_{i j_0} & a'_{ij} \end{matrix} \qquad\qquad a''_{ij} = a'_{ij} - \frac{a'_{i_0 j} \cdot a'_{i j_0}}{a'_{i_0 j_0}}$$

Правило 3 распространяется на коэффициенты столбца свободных членов и Z-строки.

Симплексные преобразования проводят до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение или установлена неразрешимость задачи (теоремы 9, 10).

Геометрически симплекс-метод можно проинтерпретировать следующим образом. Начальному опорному плану соответствует угловая точка многогранника решений (1.17). Шагу симплексного преобразования соответствует переход в соседнюю вершину таким образом, чтобы значение целевой функции не уменьшилось

б.п.	1	x_1	x_2	…	x_r	x_{r+1}	…	x_n
x_1	b'_1	1	0	…	0	$a'_{1,r+1}$	…	$a'_{1,n}$
x_2	b'_2	0	1	…	0	$a'_{2,r+1}$	…	$a'_{2,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	b'_r	0	0	…	1	$a'_{r,r+1}$	…	$a'_{r,n}$
Z	c'_0	0	0	…	0	$-c'_{r+1}$	…	$-c'_n$

Замечания:

1. Если таблица (1.19) соответствует оптимальному решению, а среди чисел $-c'_j$ $(j = r+1,\ldots,n)$ имеется коэффициент $-c'_{j_0}$ равный нулю, то задача имеет бесконечно много решений. Вторую вершину, соответствующую оптимальному решению, можно найти, выбрав в качестве разрешающего столбец, содержащий $-c'_{j_0}$.

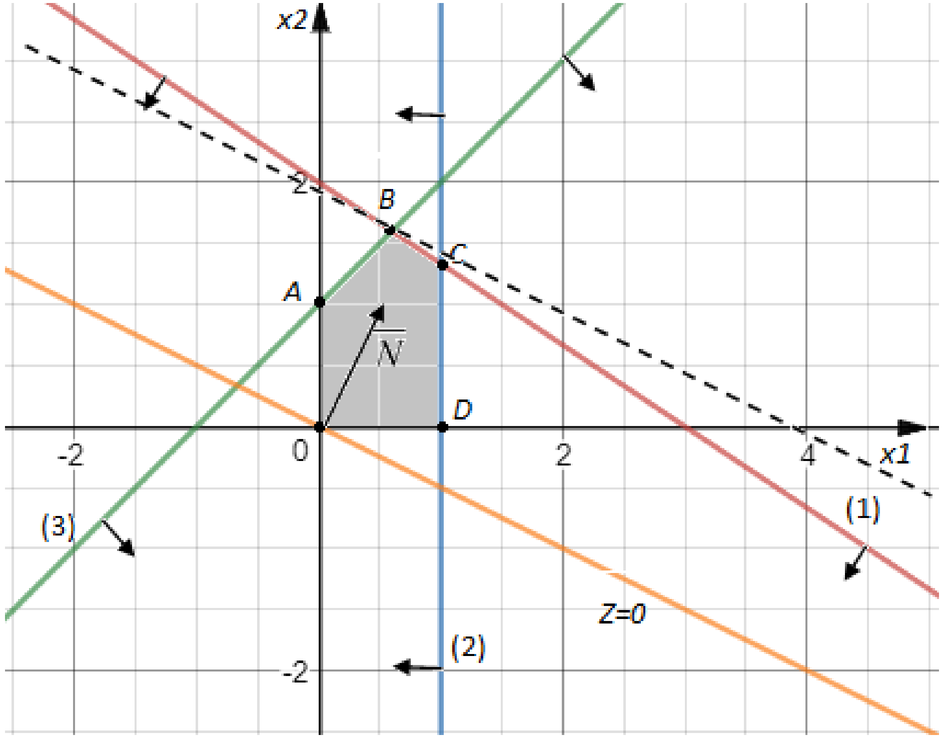
2. Задачу минимизации Z можно формально заменить задачей максимизации функции (-Z). Но можно этого не делать. Признаком оптимальности опорного плана задачи минимизации является отсутствие положительных элементов в Z-строке таблицы (1.19). Для выбора разрешающего столбца выбирают максимальный среди положительных коэффициентов $-c'_j$ $(j = r+1,\ldots,n)$, а вся остальная вычислительная процедура остается прежней.

Пример 1

Решить задачу симплекс-методом и дать геометрическую интерпретацию процесса поиска оптимального решения.

$$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \le 1 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2 \end{cases}$$



Решение примера 1 – в файле lecture4.pdf.

$$Z_{max} = Z(3/5, 8/5) = 19/5$$

Номер таблицы	Опорное решение из таблицы	Значение функции	Точка на графике
1	$X^1 = (0;0;6;1;1)$	0	O
2	$X^2 = (0;1;3;1;0)$	2	A
3	$X^3 = (3/5;8/5;0;2/5;0)$	19/5	B