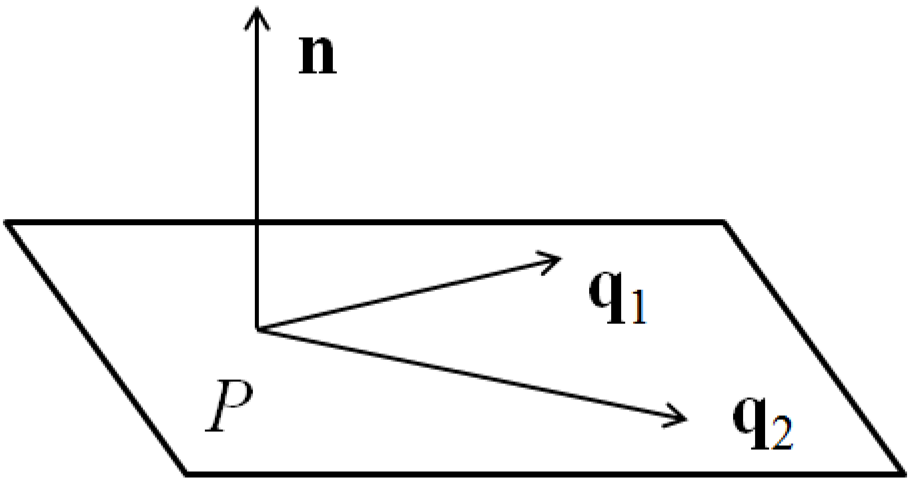
25. Уравнения плоскости в пространстве



Нормальный вектор - это любой ненулевой вектор, ортогональный (перпендикулярный) этой плоскости: То есть n ⊥ P, |n| ≠ 0

Направляющий вектор - любой ненулевой вектор, параллельный этой плоскости: q || P, |q| ≠ 0.

Плоскость можно задать одним **n** или двумя неколлинеарными (не лежащими на одной и той же прямой, либо на параллельных прямых) векторами **q1** и **q2**. Причем: **n = q1 x q2** (векторное произведение)

Пусть $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $\mathbf{q}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{q}_2 = (l_2, m_2, n_2)$. Тогда:

$$\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k} = (A, B, C) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

(типичное перемножение направляющих векторов даст нормальный вектор к плоскости, которую они образуют)

Общее уравнение прямой:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \boxed{\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0}$$

Простым языком:

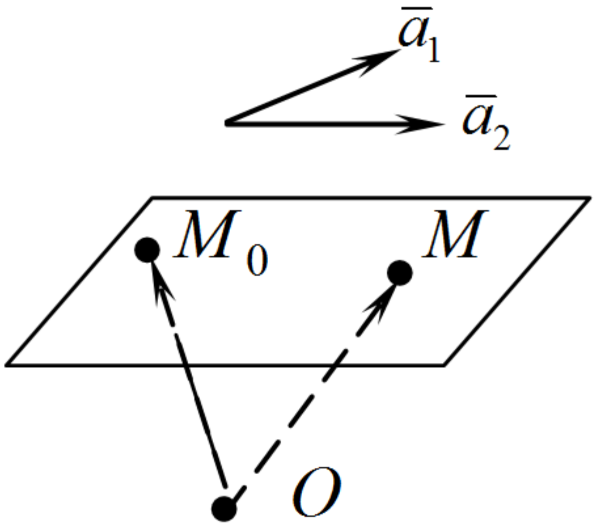
- В данном случае A, B, C - это координаты вектора нормали (n(A, B, C));
- А x0, y0, z0 - это координаты некоторой точки на данной плоскости (M0(x0, y0, z0))

Выводы:

1. Общее уравнение плоскости - линейное уравнение, коэффициенты которого - координаты нормального вектора.
2. Если коэффициент отсутствует какая-либо координата, то плоскость параллельна этой оси.
3. Если отсутствует свободный член, то плоскость проходит через начало координат.

Уравнение плоскости , проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам

Дано: $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $\quad \overline{a}_1 = (m_1;\, k_1;\, l_1)$, $\quad \overline{a}_2 = (m_2;\, k_2;\, l_2)$



$$\left(\overline{M_0M} \times \overline{a}_1\right) \cdot \overline{a}_2 = 0$$

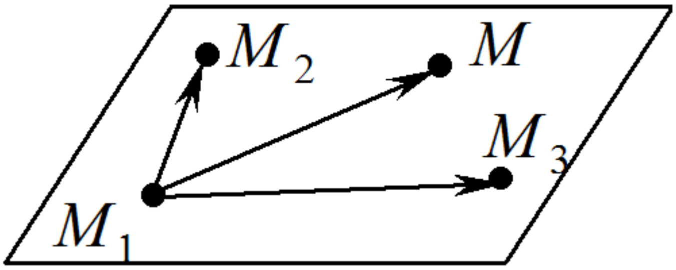
$$\Downarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & k_1 & l_1 \\ m_2 & k_2 & l_2 \end{vmatrix} = 0$$

(по своей сути уравнения никакого нету, это просто один из способов нахождения уравнения общего вида. То есть смешанное произведение двух неколлинеарных векторов и вектора на плоскости - позволяет найти формулу плоскости)

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$$M_1(x_1; y_1; z_1),\ M_2(x_2; y_2; z_2),\ M_3(x_3; y_3; z_3),$$



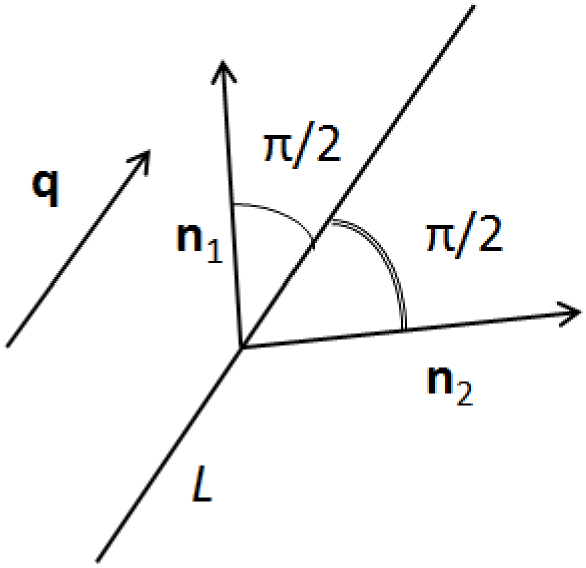
$$\left(\overline{M_0M} \times \overline{M_2M_1}\right) \cdot \overline{M_3M_1} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

(таким же способом можно найти формулу плоскости с помощью трёх точек на этой плоскости)

26. Уравнения прямой в пространстве



Прямая L в пространстве

Направляющий вектор - любой ненулевой вектор, лежащий на этой или параллельной прямой: q || L, |q| ≠ 0.

Нормальный вектор - любой ненулевой вектор, ортогональный направляющему вектору: n ⊥ L, |n| ≠ 0.

Прямую в пространстве можно задать одним **q** или двумя неколлинеарными **n1** и **n2**. Причем: **q = n1 x n2** (всё по аналогии с плоскостью)

Пусть $\mathbf{q} = (l, m, n)$, $\mathbf{q}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{q}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Тогда:

$$q = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k} = (l, m, n) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

(в лекции ошибка, вместо q1 и q2 - на самом деле n1 и n2 (ведь векторное произведение)

Общие уравнения прямой:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

– плоскости, содержащие прямую l.

$$\begin{cases} l \in P_1 \\ l \in P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \qquad l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

(юзлесс хрень, это не юзается нигде, но энивей)

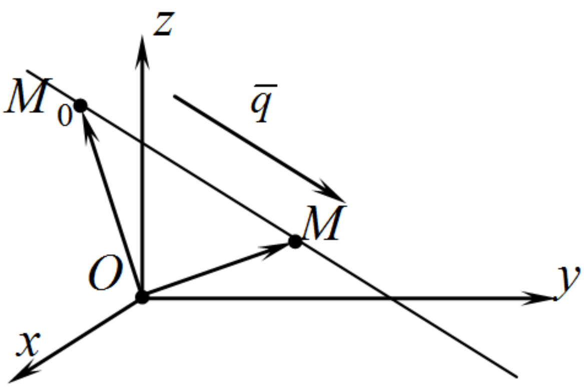
Канонические уравнения прямой

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка на прямой

$\mathbf{q} = (l, m, n)$ - направляющий вектор

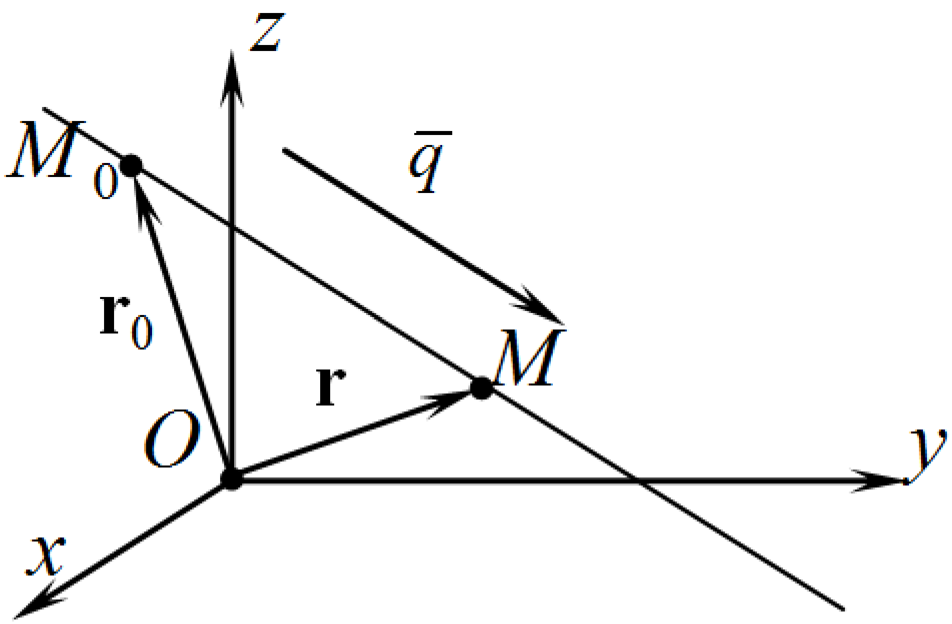
$\overrightarrow{M_0M} \parallel \mathbf{q}$ =>

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}}$$



(тобишь в числителях x0/y0/z0 это координаты точки на прямой, а в знаменателях координаты направляющего вектора прямой)

Параметрические уравнения прямой



$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

$\mathbf{r} = (x, y, z),\ \mathbf{r}_0 =$

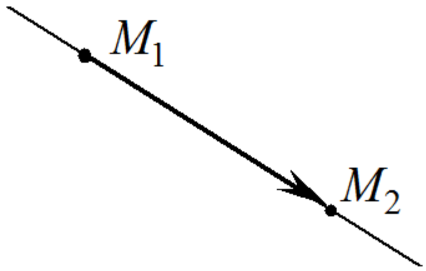
$\mathbf{q} = (l, m, n) =>$

такс…

- l, m, n - это координаты направляющего вектора q
- x0, y0, z0 - это координаты вектора, который проведёт из начала координат к некоторой точке M0, лежащей на прямой
- x, y, z - это координаты вектора, который проведёт из начала координат к некоторой точке M, лежащей на прямой

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

Дано: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.



Направляющий вектор:
$\mathbf{q} = M_1M_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Тогда из канонических уравнений

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

получаем:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Отсюда - условие того, что три точки M_1, M_2, M_3 лежат на одной прямой:

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

27. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть даны плоскость и прямая:

$$P: Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{и} \quad \ell: \frac{x-x_0}{q_x} = \frac{y-y_0}{q_y} = \frac{z-z_0}{q_z}.$$

$\bar{n} = (A;\ B;\ C)$ – нормальный вектор плоскости,

$\bar{q} = (q_x, q_y, q_z)$ – направляющий вектор прямой.

Возможны три случая:

а) прямая параллельна плоскости $\Leftrightarrow \quad \bar{n} \perp \bar{q} \Leftrightarrow \bar{n} \cdot \bar{q} = 0$

б) прямая принадлежит плоскости $\Leftrightarrow$ координаты любой ее точки удовлетворяют уравнению плоскости: $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

в) прямая и плоскость пересекаются в одной точке.

Угол между прямой и плоскостью - это угол между прямой и её проекцией на плоскость.

$$\varphi + \psi = \pi/2 \quad \Rightarrow \sin\varphi = \cos\psi$$

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{q}|} = \frac{Aq_x + Bq_y + Cq_z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{q_x^2+q_y^2+q_z^2}}$$

28. Типовые задачи в пространстве

Пример на нахождение уравнения плоскости через 3 точки

Дано: три точки $M_1(1;\ 1;\ 1), M_2(2;\ -1;\ 0), M_3(0;\ 3;\ 0)$.

Найти: общее уравнение плоскости, проходящей через M_1, M_2, M_3.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & -1-1 & 0-1 \\ 0-1 & 3-1 & 0-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1) + 2(y-1) = 0 \quad \Leftrightarrow 2(x-1) + y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$$

Пример на нахождение уравнения плоскости через точку

<u>Дано</u>: плоскость P: $5x - 4y + 2z + 1 = 0$, точка $M(2; 3; -1)$.

<u>Найти</u>: уравнение плоскости, проходящей через M и параллельной P.

<u>Первый способ:</u>

$\mathbf{n}_1 = (5; -4; 2) = \mathbf{n}_2$

$5x - 4y + 2z + D = 0$

$5x_0 - 4y_0 + 2z0 + D = 0$

$5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + D = 0$

$D = 4$

$5x - 4y + 2z + 4 = 0$

<u>Второй способ:</u>

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$5(x - x_0) - 4(y - y_0) + 2(z - z_0) = 0$

$5(x - 2) - 4(y - 3) + 2(z + 1) = 0$

$5x - 10 - 4y + 12 + 2z + 2 = 0$

$5x - 4y + 2z + 4 = 0$

Пример на нахождение расстояния между параллельными пл-ми

<u>Дано</u>: P_1: $4x - 2y + 4z + 5 = 0$, P_2: $2x - y + 2z - 7 = 0$

<u>Найти</u>: расстояние между P_1 и P_2.

$\mathbf{n}_1 = (4; -2; 4)$, $\mathbf{n}_2 = (2; -1; 2)$ - коллинеарны.

Берём любую точку на P_1 и вычисляем расстояние от неё до P_2.

$x = 0$, $y = 0$ => $z = -5/4$ => $M_1(0; 0; -5/4)$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-5/4) - 7|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \left|\frac{-9{,}5}{3}\right| = \frac{19}{6}.$$

Пример на нахождение уравнения прямой

<u>Найти</u>: каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1;\ 3;\ -5)$ и $M_2(1;\ 4;\ 2)$.

Вспомним каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

Требуется найти координаты направляющего вектора.

$$\mathbf{q} = \overrightarrow{M_1M_2} = (1\text{-}1;\ 4\text{-}3;\ 2\text{-}(-5)) = (0;\ 1;\ 7)$$

За точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ берём M_1. Тогда:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{7}$$

Ещё пример на нахождение уравнения прямой

<u>Дано</u>:

$$\begin{matrix} P_1: \\ P_2: \end{matrix}\begin{cases} 2x+y-3z+1=0 \\ 3x+4y-z-2=0 \end{cases}$$

<u>Найти</u>: каноническое уравнение прямой.

Для канонического уравнения нужен **q**. Для **q** нужны $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$:

$\mathbf{n}_1 = (2;\ 1;\ -3)$, $\mathbf{n}_2 = (3;\ 4;\ -1)$

$$\mathbf{q}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=11\mathbf{i}-7\mathbf{j}+5\mathbf{k}=(11;-7;5)$$

Далее находим точку, лежащую на прямой:

$$y=0\Rightarrow\begin{cases} 2x-3z=-1 \\ 3x-z=2 \end{cases}\Rightarrow x=1, z=1\Rightarrow M_0=(1;0;1)\ \Rightarrow\frac{x-1}{11}=\frac{y}{-7}=\frac{z-1}{5}$$

Пример на нахождение уравнения плоскости с заданными парам-ми

Дано: точка $M(1;\ 3;\ -5)$ и прямая L: $\begin{matrix} P_1: \\ P_2: \end{matrix} \begin{cases} 4x - y + 5z + 1 = 0 \\ 2x - 3y - z - 5 = 0 \end{cases}$

Найти: общее уравнение плоскости P, проходящей через M и перпендикулярной L.

По условию $L \perp P$ => $\mathbf{n}$ плоскости P коллинеарен $\mathbf{q}$ прямой L:
$\mathbf{n} \sim \mathbf{q} = \mathbf{n}_1 \mathrm{x} \mathbf{n}_2$

$\mathbf{n}_1 = (4;\ -1;\ 5)$, $\mathbf{n}_2 = (2;\ -3;\ -1)$

$$\mathbf{q} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 16\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 10\mathbf{k} = (16; 14; -10)$$

$\mathbf{n} = (8;\ 7;\ -5)$ => $8(x-1) + 7(y-3) - 5(z+5) = 0$ => $8x + 7y - 5z - 54 = 0$

Пример на нахождение точки пересечения

Дано:

прямая $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+4}{1}$ и плоскость $2x - y - 3z + 5 = 0$

Найти: точку пересечения.

Составляем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Подставляем их в уравнение плоскости:

$2(1+2t) - (-1+3t) - 3(-4+t) = 0$ => $-2t + 20 = 0$ => $t = 10$

=> $x = 21$, $y = 29$, $z = 6$.

29, 30, 31, 32, 33. Классификация линий второго порядка (вот тут вообще гг)

Линии второго порядка, плоские линии, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению 2-й степени

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{11} = 0$. (*)

Уравнение (*) может и не определять действительного геометрического образа, но для сохранения общности в таких случаях говорят, что оно определяет мнимую Л. в. п. В зависимости от значений коэффициентов общего уравнения (*) оно может быть преобразовано с помощью параллельного переноса начала и поворота системы координат на некоторый угол к одному из 9 приведённых ниже канонических видов, каждому из которых соответствует определённый класс линий. Именно,

нераспадающиеся линии:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — эллипсы,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболы,

$y^2 = 2px$ — параболы,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — мнимые эллипсы;

распадающиеся линии:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — пары пересекающихся прямых,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — пары мнимых пересекающихся прямых,

$x^2 - a^2 = 0$ — пары параллельных прямых,

$x^2 + a^2 = 0$ — пары мнимых параллельных прямых,

$x^2 = 0$ — пары совпадающих параллельных прямых.

Исследование вида Л. в. п. может быть проведено без приведения общего уравнения к каноническому виду. Это достигается совместным рассмотрением значений т. н. основных инвариантов Л. в. п. — выражений, составленных из коэффициентов уравнения (*), значения которых не меняются при параллельном переносе и повороте системы координат:

$$\Delta = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$S = a_{11} + a_{22}$, ($a_{ij} = a_{ji}$).

Так, например, эллипсы, как нераспадающиеся линии, характеризуются тем, что для них $\Delta \neq 0$; положительное значение инварианта δ выделяет эллипсы среди других типов нераспадающихся линий (для гипербол $\delta < 0$, для парабол $\delta = 0$). Различить случаи действительного или мнимого эллипсов позволяет сопоставление знаков инвариантов Δ и S: если Δ и S разных знаков, эллипс действительный; эллипс мнимый, если Δ и S одного знака.

Три основные инварианта Δ, δ и S определяют Л. в. п. (кроме случая параллельных прямых) с точностью до *движения* евклидовой плоскости: если соответствующие инварианты Δ, δ и S двух линий равны, то такие линии могут быть совмещены движением. Иными словами, эти линии эквивалентны по отношению к группе движений плоскости (метрически эквивалентны).

Существуют классификации Л. в. п. с точки зрения др. групп преобразований. Так, относительно более общей, чем группа движений, — группы *аффинных преобразований* — эквивалентными являются любые две линии, определяемые уравнениями одного канонического вида. Например, две подобные Л. в. п. (см. *Подобие*) считаются эквивалентными. Связи между различными аффинными классами Л. в. п. позволяет установить классификация с точки зрения *проективной геометрии*, в которой бесконечно удалённые элементы не играют особой роли. Действительные нераспадающиеся Л. в. п.: эллипсы, гиперболы и параболы образуют один проективный класс — класс действительных овальных линий (овалов). Действительная овальная линия является эллипсом, гиперболой или параболой в зависимости от того, как она расположена относительно бесконечно удалённой прямой: эллипс пересекает несобственную прямую в двух мнимых точках, гипербола — в двух различных действительных точках, парабола касается несобственной прямой; существуют проективные преобразования, переводящие эти линии одна в другую. Имеется всего 5 проективных классов эквивалентности Л. в. п. Именно,

невырождающиеся линии

(x_1, x_2, x_3 — однородные координаты):

$x_1^2 + x_2^2 — x_3^2 = 0$ — действительный овал,

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ — мнимый овал, вырождающиеся линии:

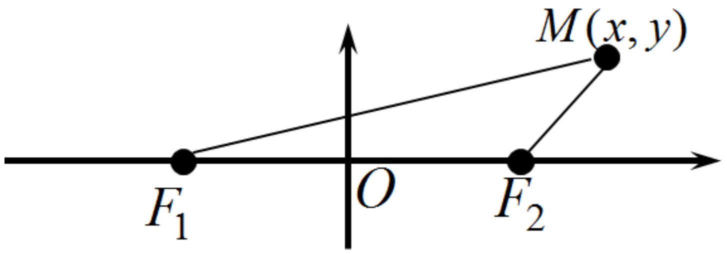
$x_1^2 - x_2^2 = 0$ — пара действительных прямых,

$x_1^2 + x_2^2 = 0$ — пара мнимых прямых,

$x_1^2 = 0$ — пара совпадающих действительных прямых.

9.1.1. Эллипс

Эллипс — *ГМТ плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек* F_1 *и* F_2 *постоянна и равная* $2a$ ($2a>|F_1F_2|$).



F_1 и F_2 — ***фокусы*** эллипса.

$F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$

$|OF_1| = |OF_2| = c.$

$$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a$$

фокальное свойство эллипса

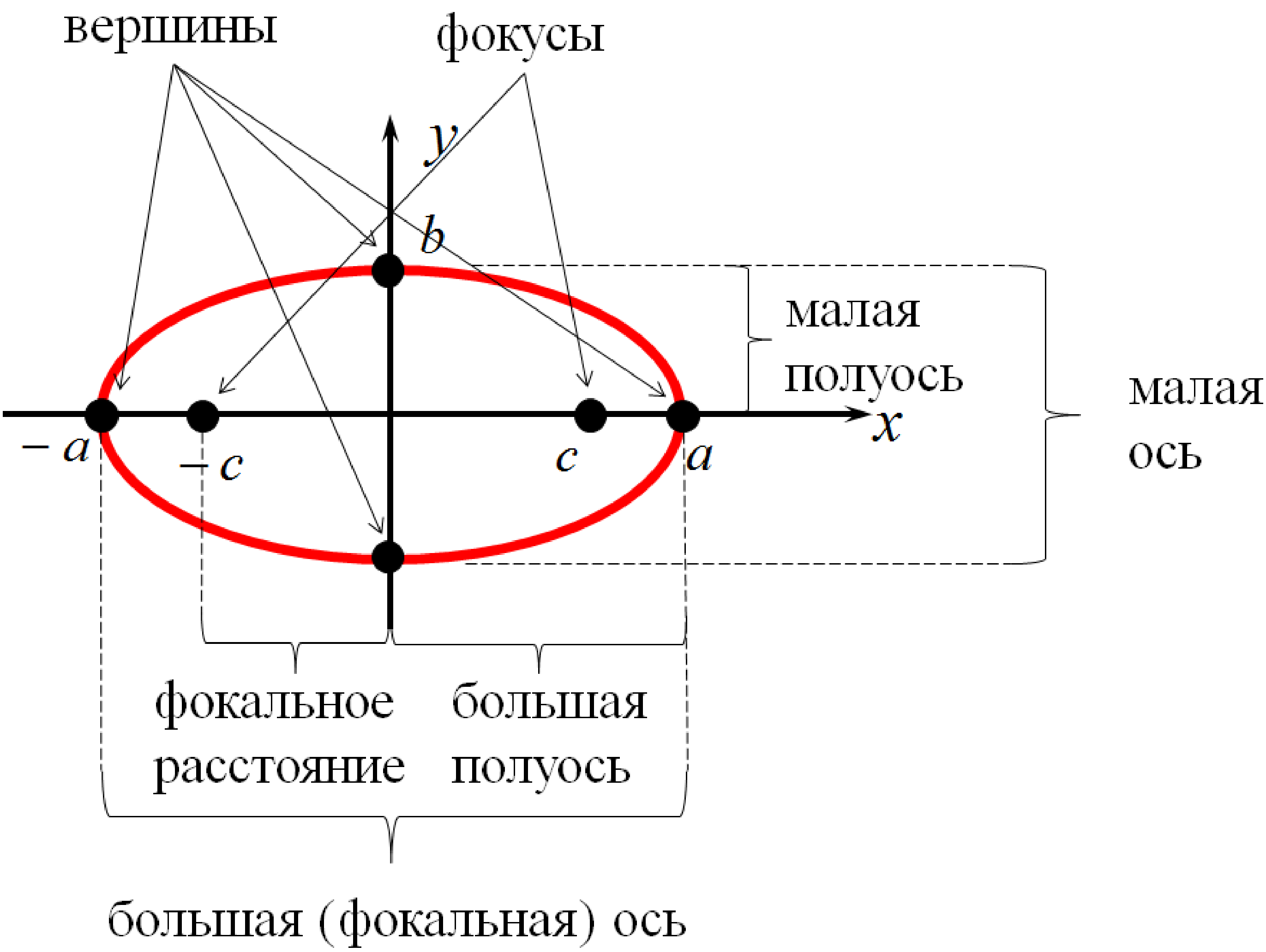
фокальные радиусы

$$|(x+c, y)| + |(x-c, y)| = 2a$$

<u>ФОРМУЛА ЭЛЛИПСА (выведенная)</u>

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad c^2=a^2-b^2$$

Элементы эллипса



И немного формул:

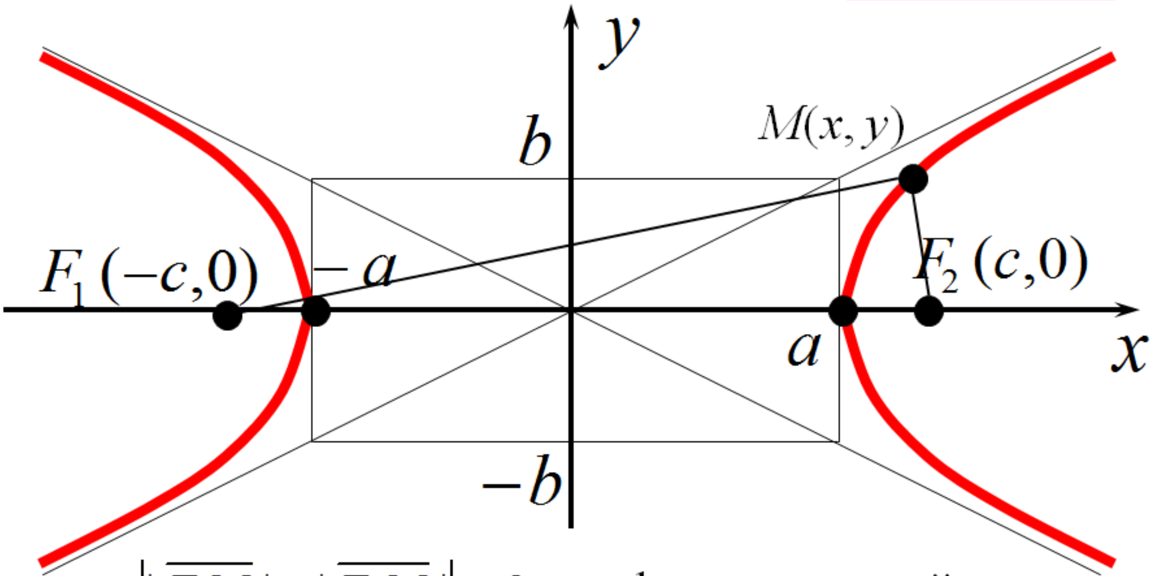
эксцентриситет *эллипса* $$e=\frac{c}{a}$$

9.1.2. Гипербола

Гипербола — *ГМТ плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 величина постоянная и равная $2a$ $(2a < |F_1F_2|)$.*

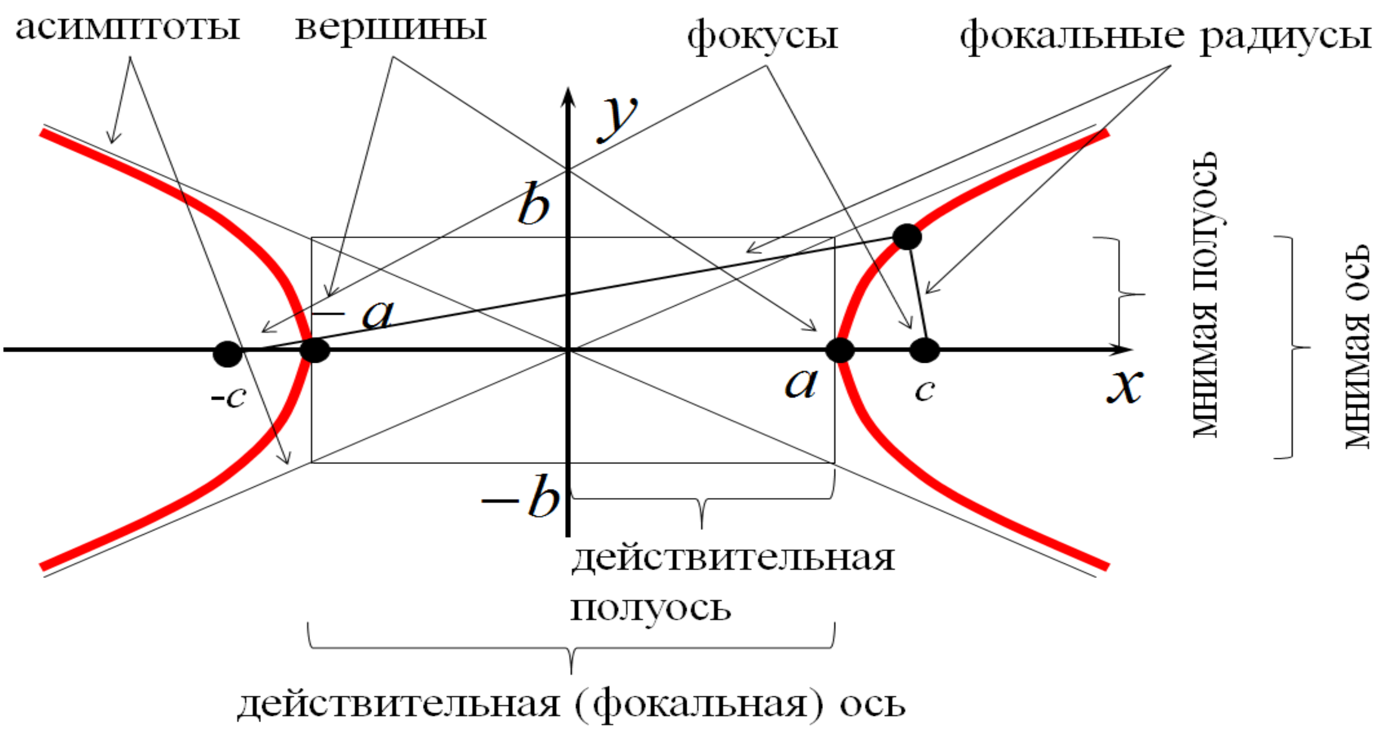
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} > a \quad \Rightarrow \quad e = \frac{c}{a} > 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



$$\left| \, |\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}| \, \right| = 2a$$ - фокальное свойство гиперболы

Элементы гиперболы

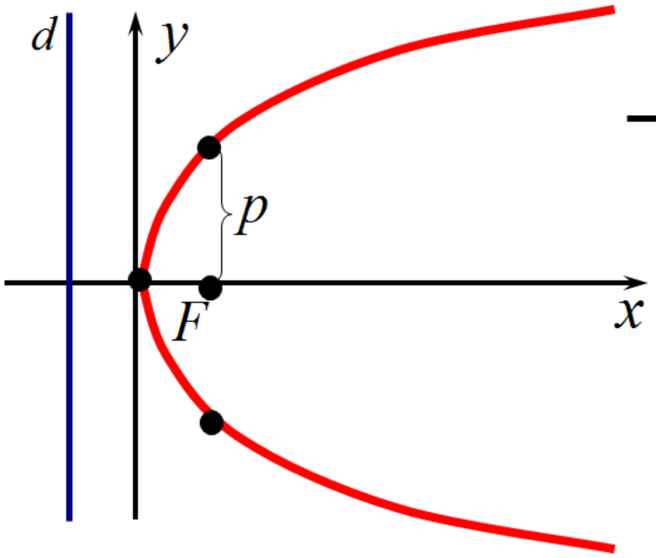


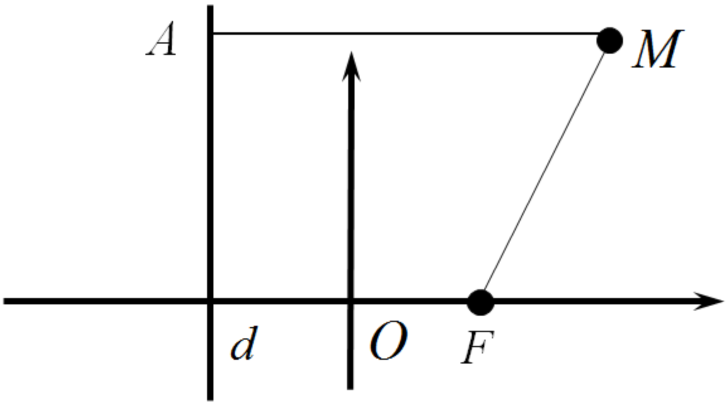
9.1.3. Парабола

Парабола *— ГМТ плоскости, расстояние от которых до фиксированной прямой* ***d*** *и до фиксированной точки* F *(не лежащей на прямой* ***d****) одинаково.*

F ***— фокус параболы***, ***d*** – ***директриса***.

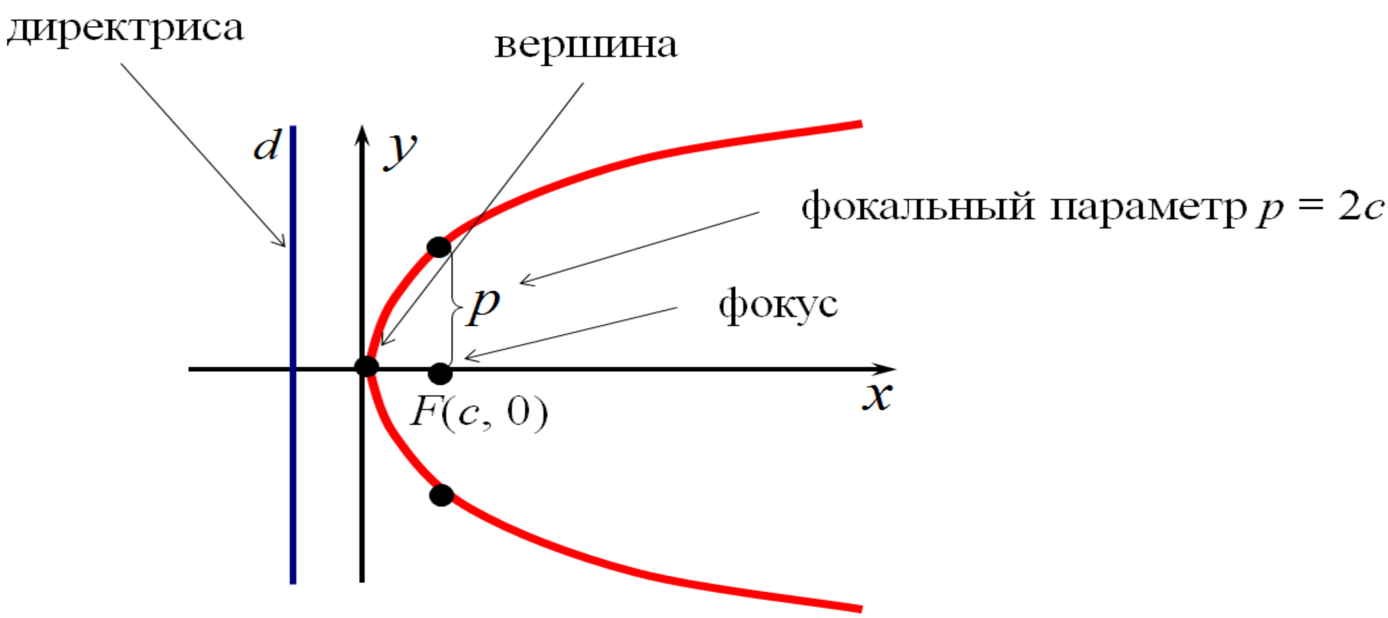
$y^2 = 2px$ или $x = ay^2$





$|AM| = |FM|$ - фокальное свойство параболы

Элементы параболы



Приведение к каноническому виду

$$4x^2+24x+y^2-6y-4=0$$

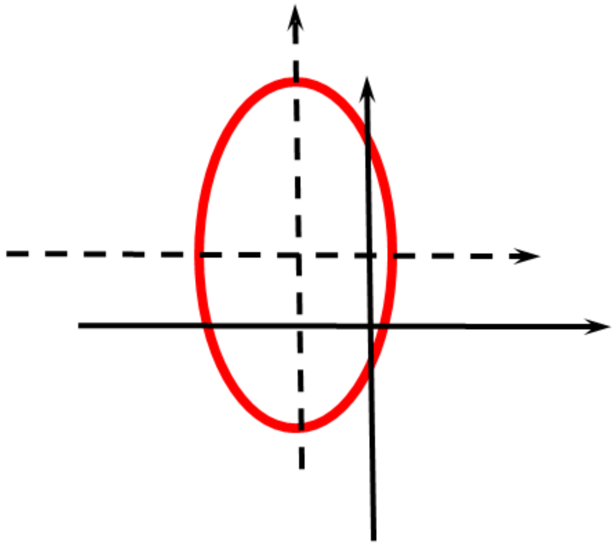
$$(2x)^2+2\cdot 6\cdot(2x)+6^2+y^2-2\cdot 3y+3^2-36-9-4=0$$

$$(2x+6)^2+(y-3)^2=49$$

$$\frac{4(x+3)^2}{49}+\frac{(y-3)^2}{49}=1$$

$$\frac{(x+3)^2}{(3,5)^2}+\frac{(y-3)^2}{7^2}=1$$

$$\frac{(y-3)^2}{7^2}+\frac{(x+3)^2}{(3,5)^2}=1$$



Параметрические уравнения эллипса

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$