Аналитическая геометрия

Основные и простейшие задачи аналитической геометрии

В аналитической геометрии изучаются две основных задачи:

1. Нахождение уравнения геометрического объекта, который рассматривают как геометрическое место точек, которые имеют определенное свойство.
2. Исследования свойств геометрического объекта по его уравнению и построение его.

К простейшим задачам аналитической геометрии относятся такие две:

1) нахождения расстояния между двумя точками;

2) деления отрезка в заданном отношении.

Пусть заданны точки M_1 и M_2 в пространстве, то есть каждая из них имеет три координаты $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Расстояние между точками M_1 и M_2 и равно длине вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, координаты которого равны разности одноименных координат точки M_2 и точки M_1. Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат. Итак, имеем, что расстояние между двумя заданными точками M_1 и M_2 находится по формуле: $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, .

Пусть теперь известно, что точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ. Найти координаты точки M. Обозначим их через $M(x,y,z)$. То, что точка $M(x,y,z)$ делит отрезок в отношении λ, означает, что $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda$.

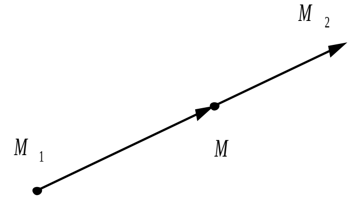


Рис. 3.1

Координаты x, y, z точки M:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1+z_2}{2},$$

__Пример 3.1.__ Заданны координаты двух точек $M_1(-3;0;1)$ и $M_2(2;2;-3)$. Найти:

1) Расстояние между этими точками;
2) Координаты точки M, делящей отрезок M_1M_2 на две равные части.

Решение

Найдем расстояние между этими точками:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(2-(-3))^2+(2-0)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{25+4+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

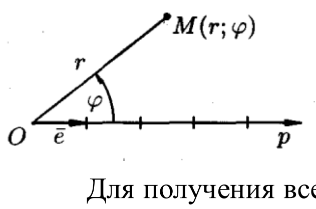
Найдем координаты точки M : $x = \dfrac{-3+2}{2} = -\dfrac{1}{2};\ y = \dfrac{0+2}{2} = 1;\ z = \dfrac{1-3}{2} = -1.$

$M\left(-\dfrac{1}{2};1;-1\right)$ - искомая точка.

Полярная система координат

Другой практически важной системой координат является **полярная система координат**.

Полярная система координат задается точкой О, называемой **полюсом,** лучом Ор, называемым полярной осью, и единичным вектором ē того же направления, что и луч Ор.

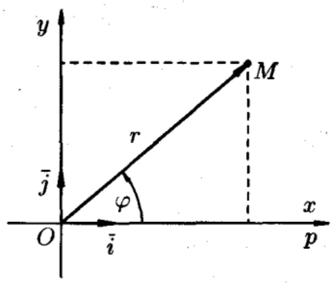


Возьмем на плоскости точку М, не совпадающую с О. Положение точки М определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса О и углом φ, образованным отрезком ОМ с полярной осью (отсчет углов ведется в направлении, противоположном движению часовой стрелки)

Числа r и φ называются полярными координатами точки М, пишут М(r;φ), при этом r называют полярным радиусом, φ — полярным углом.

Для получения всех точек плоскости достаточно полярный угол φ ограничить промежутком (—π; π) (или 0≤φ≤ 2π), а полярный радиус — [0; ∞). В этом случае каждой точке плоскости (кроме О) соответствует единственная пара чисел r и φ, и обратно.

Установим связь между прямоугольными и полярными координатами. для этого совместим полюс О с началом координат системы. Оxy, а полярную ось с положительной полуосью Оx. Пусть x и y - прямоугольные координаты точки М, а r и φ и ее полярные координаты.



Из рисунка видно, что прямоугольные координаты точки М выражаются через полярные координаты точки следующим образом:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

Полярные же координаты точки М выражаются через ее декартовы координаты такими формулами:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Определяя величину φ, следует установить (по знакам Х и у) четверть, в которой лежит искомый угол, и учитывать, что $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Основные понятия

Линия на плоскости часто задается как **множество точек**, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, о*кружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние R от некоторой фиксированной точки О (центра окружности).*

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел — ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т. е. равенства, связывающего координаты точек линии).

Уравнением линии (или кривой) ***на плоскости Oxy называется такое уравнение F(x; у) = 0 с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты х и у каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.***

Переменные *x* и *y* в уравнении линии называются **текущими координатами точек линии**.
Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Так, для того чтобы установить лежит ли точка $A(x_o; y_o)$ на данной линии, достаточно проверить (не прибегая к геометрическим построениям), удовлетворяют ли координаты точки А уравнению этой линии в выбранной системе координат.

Пример 10.1. Лежат ли точки К(—2;1) и Е(1;1) на линии 2х + у +3 = О?

Решение: Подставив в уравнение вместо х и у координаты точки К, получим 2. (—2) + 1 +3 = 0. Следовательно, точка К лежит на данной линии. Точка Е не лежит на данной линии, т. к. $2\cdot1+1+3\neq0$

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x;y) = 0$ и $F_2(x;y)=0$, сводится к отысканию точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям обеих линий, т. е. сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x;y) = 0 \\ F_2(x;y)=0, \end{cases}$$

Если эта система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются.

Аналогичным образом вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат.

Уравнение F(r,φ) = 0 называется **уравнением данной линии в полярной системе координат**, если координаты любой точки, лежащей на этой линии, и только они, удовлетворяют этому уравнению.

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений:

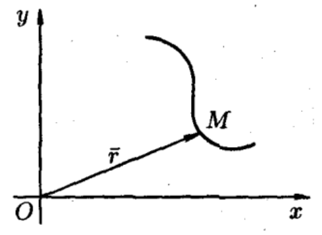
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где х и у — координаты произвольной точки М(х; у), лежащей на данной линии, t — переменная, называемая параметром; параметр определяет положение точки (х; у) на плоскости.

Например, если х = + 1, $y = t^2$, то значению параметра t^2 соответствует на плоскости точка (3; 4), т.к. $x = 2 + 1 = 3$, $y = 2_2 = 4$.

Если параметр t изменяется, то точка на плоскости перемещается, описывая данную линию. Такой способ задания линии называется параметрическим, а уравнения (10.1) — **параметрическими уравнениями линии.**

Линию на плоскости можно задать векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где t — скалярный переменный параметр. Каждому значению t_0 соответствует определенный вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$ плоскости. При изменении параметра t конец вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$) опишет некоторую линию



Векторому уравнению линии $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в системе координат Oxy соответствуют два скалярных уравнения (10.1), т. е. уравнения проекций на оси координат векторного уравнения линии **есть ее параметрические уравнения.**

Векторное уравнение и параметрические уравнения линии имеют механический смысл. Если точка перемещается на плоскости, то указанные уравнения называются **уравнениями движения**, а линия — **траекторией** точки, параметр t при этом есть **время**.

Итак, всякой линии на плоскости соответствует некоторое уравнение вида F(x;y) = 0.

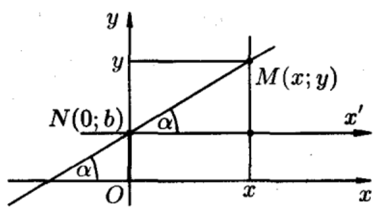
Всякому уравнению вида F(x;y) = 0соответствует некоторая линия, свойства которой определяются данным уравнением (могут быть и исключения).

Уравнения прямой на плоскости

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости Oxy задана произвольная прямая, не параллельная оси Oy. Ее положение вполне определяется ординатой b точки N(0;b) пересечения с осью Oy и углом α между осью Ox и прямой (см. рис.).



Под **углом α (0≤α≤π) наклона** прямой понимается наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения прямой и оси Ox против часовой стрелки ось Ox до её совпадения с прямой.

Возьмем на прямой произвольную точку M(x;y) (см. рис.). Проведем через точку N ось Nx′, параллельную оси Ox и одинаково с ней направленную. Угол между осью Nx′ и прямой равен α. В системе Nx′y точка M имеет координаты x и (y — b). Из определения тангенса угла следует равенство $tg\alpha = \dfrac{y-b}{x}$

т. е. y=tg α·x+b.

Введем обозначение tg α=k, получаем уравнение ***y=kx+b*** (10.2)

которому удовлетворяют координаты любой точки M(x; y) прямой. Можно убедиться, что координаты любой точки P(x; y), лежащей вне данной прямой, уравнению (10.2) не удовлетворяют.

Число k = tg α называется **угловым коэффициентом** прямой, а уравнение (10.2) — уравнением **прямой с угловым коэффициентом**.

Если прямая проходит через начало координат, то ***b*** = 0 и, следовательно, уравнение этой прямой будет иметь вид ***y=kx***.

Если прямая параллельна оси Ox, то α = 0, следовательно, k = tg α = 0 и уравнение (10.2) примет вид ***y=b***.

Если прямая параллельна оси Oy, то α =π/2 , уравнение (10.2) теряет смысл, т. к. для нее угловой коэффициент не существует. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид $x = a$, (10.3)

где a — абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox. Отметим, что уравнения (10.2) и (10.3) есть уравнения первой степени.

Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение первой степени относительно x и y в общем виде:

Ax+By+C=0, (10.4)

где A, B, C — произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Покажем, что уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии. Возможны два случая.

Если B = 0, то уравнение (10.4) имеет вид Ax + C = 0, причем A≠0, т. е. x = —C/A. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку (—C/A;0).

Если B≠0, то из уравнения (10.4) получаем y = —A/Bx-C/B. Это есть уравнение прямой с угловым коэффициентом k = tg α = —A/B.

Итак, уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии, оно называется **общим уравнением прямой**.

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1) если A = 0, то уравнение приводится к виду y = -C/B. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox;
2) если B = 0, то прямая параллельна оси Oy;
3) если C = 0, то получаем Ax+By = 0. Уравнению удовлетворяют координаты точки O(0; 0), прямая проходит через начало координат.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая проходит через точку $M(x_o; y_o)$ и ее Направление характеризуется угловым коэффициентом ***k***. Уравнение этой прямой можно записать в виде $y = kx + b$, где ***b*** — пока неизвестная величина. Так как прямая проходит через точку $M(x_o; y_o)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $y_o = kx_0 + b$. Отсюда $b = y_o - kx_0$.
Подставляя значение ***b*** в уравнение $y = kx + b$, получим искомое уравнение прямой :
$y = kx + y_0 - kx_0$, т. е. $\underline{y - y_0 = k(x - x_0)}$. (10.5)
Уравнение (10.5) с различными значениями ***k*** называют также **уравнениями пучка прямых** с центром в точке M(xo; yo). Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Oy.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, имеет вид $y - y_1 = k(x - x_1)$, (10.6)
где ***k*** — пока неизвестный коэффициент.
Так как прямая проходит через точку $M_2(x_2\ y_2)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (10.6): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$.

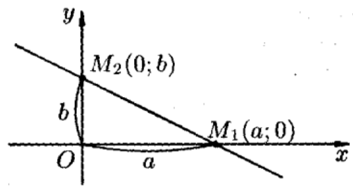
Отсюда находим $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Подставляя найденное значение ***k*** в уравнение (10.6), получим уравнение

прямой, проходящей через точки M_1 и M_2: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$
Если $x_1 = x_2$, то прямая, проходящая через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.
Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой может быть записано в виде $y = y_1$, прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая пересекает ось Ox в точке $M_1(a;0)$, а ось Oy – в точке $M_2(0;b)$. Уравнение примет вид:
$\dfrac{y-0}{b-0} = \dfrac{x-a}{0-a}$ т.е. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Это уравнение называется **уравнением прямой в отрезках, т.к. числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат**.



Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_o(x_O; y_o)$ перпендикулярно данному ненулевому вектор n = (A; B).
Возьмем на прямой произвольную точку M(x; y) и рассмотрим вектор $M_0M(x - x_0;\ y - y_o)$ (см. рис.1). Поскольку векторы n и M_oM перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: то есть

$$A(x - xo) + B(y - yo) = 0. \quad (10.8)$$

Уравнение (10.8) называется ***уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору***.
Вектор n= (A; B), перпендикулярный прямой, называется нормальным ***нормальным вектором этой прямой***.
Уравнение (10.8) можно переписать в виде $Ax + By + C = 0$, (10.9)
где A и B координаты нормального вектора, $C = -Ax_o - By_o$ - свободный член. Уравнение (10.9) **есть общее уравнение прямой** (см. рис.2).

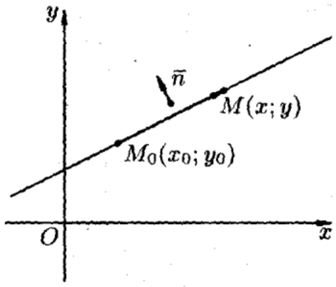


Рис.1

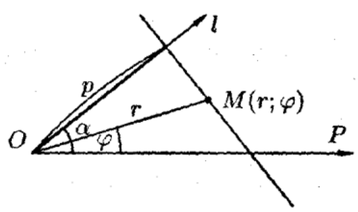


Рис.2

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m},$$

Где (x_1, y_1) - координаты точки, через которую проходит прямая, а $\vec{s}=\{\ell, m\}$ - направляющий вектор.

Кривые второго порядка

Окружность

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноотстоящих от данной точки, которая называется центром.

Каноническое уравнение круга радиуса R *с центром в точке* $C(a,b)$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

В частности, если центр кола совпадает с началом координат, то уравнение будет иметь вид: $x^2+y^2=R^2$.

Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2, которые называются фокусами, есть величина постоянная $(2a)$, большая чем расстояние между фокусами $(2c)$.

Каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, а начало координат посредине между

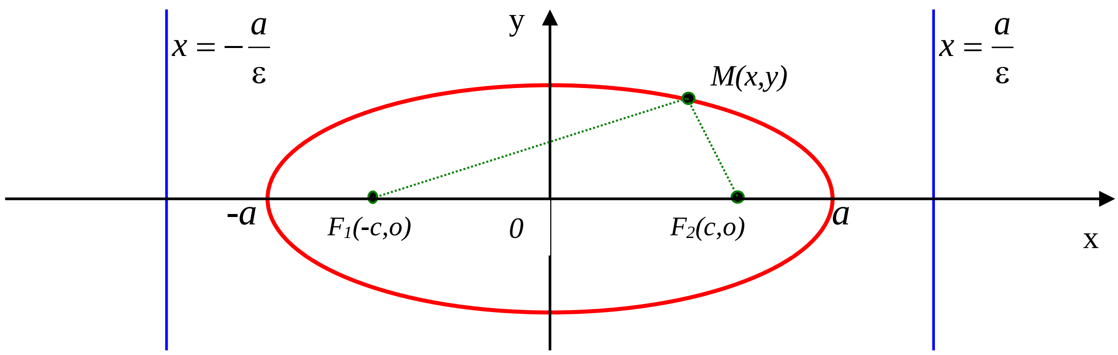


Рис. 2.

фокусами имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$, *где* a *длина большой полуоси;* b *– длина малой полуоси (рис. 2).*

Зависимость между параметрами эллипса a, b *и* c *выражается соотношением:*

$$c^2=a^2-b^2. \qquad (4)$$

Эксцентриситетом эллипса *называется отношение межфокусного расстояния* **2с** *к большой оси* **2а:**

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1.$$

Директрисами эллипса называются прямые, параллельные оси Оу, которые находятся от этой оси на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$. Уравнения директрис: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Если в уравнении эллипса $a < b$*, тогда фокусы эллипса находятся на оси Оу.*

Итак, $c^2 = b^2 - a^2$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 (фокусов), взятая по модулю, есть величина постоянная $(2a)$, меньшая, чем расстояние между фокусами $(2c)$.

Уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ох, а начало координат посредине

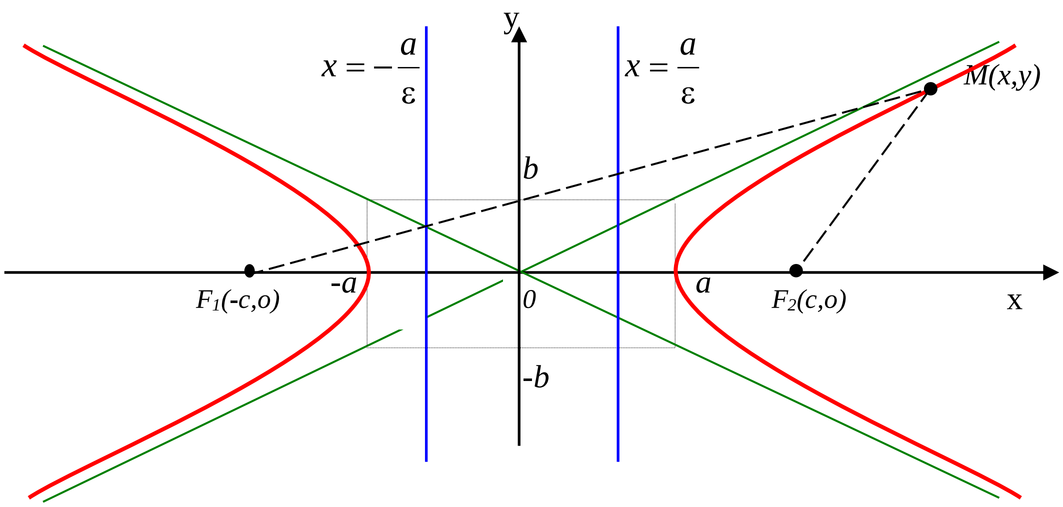


Рис. 3

между фокусами имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$

где а *– длина действительной полуоси* b *– длина мнимой полуоси гиперболы (рис. 3).*

Зависимость между параметрами гиперболы a, b *и* c *выражается соотношением:* $c^2 = a^2 + b^2.$ *(8)*

Эксцентриситетом гиперболы называется отношения межфокусного расстояния к расстоянию между вершинами: $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1.$ *(9)*

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x.$ *(10)*

Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные оси Оу и которые находятся от этой оси на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$.

Уравнения директрис: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}.$ *(11)*

Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy, *то ее уравнения имеет вид:*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \qquad (12)$$

а уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{a}{b}\cdot x.$

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки F (фокуса) и заданной прямой (директрисы).

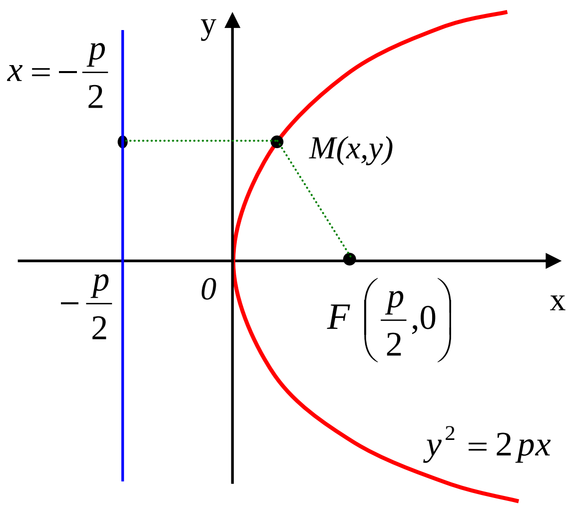


Рис. 4.

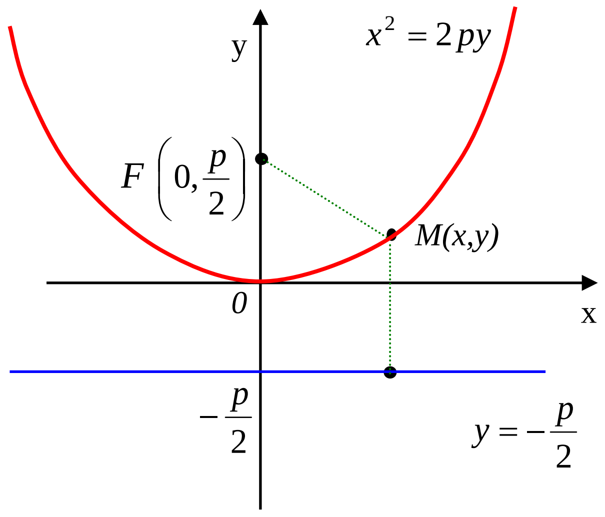


Рис. 5.

Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox (рис. 4):

$$y^2 = 2px;$$

Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy (рис. 5):

$$x^2 = 2py.$$

В обоих случаях вершина параболы, то есть точка, которая находится на оси симметрии, находится в начале координат.

Парабола $y^2 = 2px$ *имеет фокус* $F(\frac{p}{2};0)$ *и директрису* $x = -\dfrac{p}{2}.$

Парабола $x^2 = 2py$ *имеет фокус* $F(0;\frac{p}{2})$ *и директрису* $y = -\dfrac{p}{2}.$

<u>Директориальное свойство кривых второго порядка:</u> отношения расстояний от данной точки кривой к его фокусу ud к соответствующей директрисе есть величина постоянная, которая равняется эксцентриситету кривой: $\dfrac{r}{d} = \varepsilon.$