Задача № 1. Вариант № 4.		
Проверить полноту системы логических функций, используя критерий Поста. Заполнение таблицы Поста должно быть обоснованным. Если система не полна, то достроить её до полной. Далее к системе добавить функции $\{0,\neg\}$ (константу 0, отрицание). Из полученного множества функций выбрать все полные подсистемы. (5б.)		
В варианте №4 используются функции: №3, 9, 10		
3. $\neg x_1 \wedge (x_2 \oplus x_3)$	**9.** $x_1 x_2 \rightarrow x_2 x_3 \vee x_1 x_3$	**10.** $x_1 \rightarrow \neg x_2 \wedge x_3$
Решение:		
Запишем соответствующие таблицы истинности для каждой функции, чтобы определить к каким классам Поста они относятся.		
Для расчёта таблиц удобно пользоваться равносильными формулами для импликации и для "исключающего или":		
$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	$A \oplus B \equiv \neg A\, B \vee A \neg B$	
3.	**9.**	**10.**

x_1	x_2	x_3	f_3	x_1	x_2	x_3	f_9	x_1	x_2	x_3	f_{10}
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0

Далее для каждого класса Поста, определим, относится ли соответствующая функция к данному классу:		
Класс T_0, сохраняющий константу 0:		
Да, относится так как при: $x_1=x_2=x_3=0$ **:** $f_3=0$	**Нет, не относится. Так как при** $x_1=x_2=x_3=0$ **:** $f_9=1$	**Нет, не относится. Так как при** $x_1=x_2=x3=0$ **:** $f_{10}=1$
Класс T_1, сохраняющий константу 1:		
Нет, не относится, так как при $x_1=x_2=x_3=1$ **:** $f_3=0$	**Относится, так как при** $x_1=x_2=x_3=1$ **:** $f_9=1$	**Не относится, так как при** $x_1=x_2=x_3=1$ **:** $f_{10}=0$

Определим принадлежность функций классу S, самодвойственных функций, что выполняется если двойственная функция совпадает с исходной, что выполняется тогда и только тогда, когда на взаимно противоположных наборах, функция принимает взаимно противоположные значения.

Не относится, так как для $x_i=0$ **и** $x_i=1$ **:** $f_3=0$ $i\in\{1,2,3\}$	**Не относится, так как для** $x_i=0$ **и** $x_i=1$ **:** $f_9=1$ $i\in\{1,2,3\}$	**Не относится, так как для** $x_1=x_3=1$, $x_2=0$ **и для** $x_1=x_3=0$, $x_2=1$ **:** $f_{10}=1$

Таким образом, ни одна из данных функций не принадлежит классу S, так как на противоположных наборах значений переменных, имеют одинаковые значения функции, что не соответствует вышеупомянутому критерию.

Теперь рассмотрим принадлежность функций классу M, монотонных булевых функций.

Рассмотрим f_3 она принимает значение 1 при наборе $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$. Из этого следует, что если функция монотонна, то на большем наборе $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$ она так же должна иметь значение 1. Что для функции f_3 не верно. Следовательно она не является монотонной.

Аналогично для функции f_9 , она принимает значение 1 при наборе $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$. Если f_9 монотонна, то на большем наборе при $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=0$ f_9 должна была бы иметь значение 1, что не наблюдаем по таблице истинности, значит - f_9 не монотонна.

Функция f_{10} подобным образом не является монотонной, так как при наборе $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=1$ функция имеет значение 1, но при большем наборе $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$ она имеет нулевое значение.

Проверить множество функций на принадлежность классу L линейных функций. Для этого следует представить их в виде полинома Жегалкина, и проверить, является ли получающийся полином линейным.

Полином Жегалкина для функции трёх переменных:

$$a_{123}x_1x_2x_3\oplus a_{12}x_1x_2\oplus a_{13}x_1x_3\oplus a_{23}x_2x_3\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus a_3x_3\oplus a_0$$

С помощью таблиц истинности функций находим коэффициенты полинома Жегалкина для каждой функции, при необходимости решая уравнения, и проводя проверку для исключения ошибок вычислений смотря совпадение таблиц истинности получившегося полинома и соответствующей исходной функции.

f_3 : $a_0=0$ $a_1=0$ $a_2=1$ $a_3=1$ $a_{12}=1$ $a_{13}=1$ $a_{23}=0$ $a_{123}=0$	f_9: $a_0=1$ $a_1=0$ $a_2=0$ $a_3=0$ $a_{12}=1$ $a_{13}=0$ $a_{23}=0$ $a_{123}=1$	f_9: $a_0=1$ $a_1=1$ $a_2=0$ $a_3=0$ $a_{12}=0$ $a_{13}=1$ $a_{23}=0$ $a_{123}=1$

Так как ненулевые коэффициенты есть при произведениях переменных у каждой из рассматриваемых функций, то ни одна из функций не является принадлежащей множеству линейных.

Таким образом, можно заполнить таблицу Поста, для данных трёх функций:

	T_0	T_1	S	M	L
f_3	+	-	-	-	-
f_9	-	+	-	-	-
f_{10}	-	-	-	-	-

Согласно критерия Поста: «Множество булевых функций полно тогда и только тогда, когда оно целиком не содержится ни в одном из классов Поста».

Для рассматриваемого набора функций достаточно рассмотреть одну лишь f_{10}, которая не содержится ни в одном из классов Поста (подобно тому как штрих Шеффера не принадлежит ни одному из классов Поста и сам по себе является полным множеством), для того чтобы в соответствии с критерием Поста сделать вывод о полноте рассматриваемой системы.

Это завершает рассмотрение первого пункта задачи. Система полна. И достраивать её до полной соответственно необходимости нет.

Следующая подзадача, расширить набор рассматриваемых функций, добавив константу 0 и отрицание, выбрать все полные подсистемы.

Определим классы Поста для константы 0.

T_0 - очевидно, так как константа 0 сохраняет 0. T_1 , очевидно нет, так как константа 0 очевидно не сохраняет 1. Самодвойственность — нет, так как на противоположных наборах, значение константы не меняется. Монотонность - да, так как значение функции равно нулю при любых значениях переменных. Так же - константа 0 является линейной, так как все коэффициенты полинома Жегалкина нулевые.

Подобным образом, определим классы Поста для отрицания:

0	1
1	0

По таблице истинности очевидно, что отрицание не принадлежит T_0 и T_1, по ней же, очевидно, что отрицание является самодвойственной функцией, принадлежит S, не является монотонной, так как при значении аргумента 0 её значение равно 1, а при большем наборе, то есть при значении аргумента 1, значение функции 0. Полином Жегалкина - линейный: $x_1 \oplus 1$, то есть отрицание принадлежит L.

Сведём расширенный набор функций в одну таблицу Поста:

	T_0	T_1	S	M	L
f_3	+	-	-	-	-
f_9	-	+	-	-	-
f_{10}	-	-	-	-	-
0	+	-	-	+	+
$\neg$	-	-	+	-	+

Теперь с помощью полученной таблицы можно найти все полные подсистемы.

Это можно сделать с помощью перебора по включению функций в подсистему, создадим соответствующую таблицу (см. следующую страницу)

Алгоритм определения полноты подсистемы с помощью таблицы Поста: смотрим пересечения по строкам функций подсистемы и столбцам классов Поста, если в каком-либо столбце нет ни одного "минуса" - значит подсистема замкнута относительно данного класса, и не является полной, в соответствии с критерием Поста. Обратно, если для каждого столбца, есть хоть один минус в какой-либо строке, соответствующей рассматриваемой функции из подсистемы, то в соответствии с критерием Поста, данная подсистема будет полной.

f_3	f_9	f_{10}	0	отрицание	Полна ли система?	Краткое пояснение:
					Не полна	Нет функций
				вкл.	**Не полна**	Неполнота отрицания
			вкл.		**Не полна**	Неполнота 0
			вкл.	**вкл.**	**Не полна**	Неполнота 0 и отрицания
		вкл.			**Полна**	Полнота f_10
		вкл.		**вкл.**	**Полна**	Полнота f_10
		вкл.	**вкл.**		**Полна**	Полнота f_10
		вкл.	**вкл.**	**вкл.**	**Полна**	Полнота f_10
	вкл.				**Не полна**	Неполнота f_9
	вкл.			**вкл.**	**Полна**	Полнота f_9 и отрицания
	вкл.		**вкл.**		**Полна**	Полнота f_9 и 0
	вкл.		**вкл.**	**вкл.**	**Полна**	Полнота f_9 и 0
	вкл.	**вкл.**			**Полна**	Полнота f_10
	вкл.	**вкл.**		**вкл.**	**Полна**	Полнота f_10
	вкл.	**вкл.**	**вкл.**		**Полна**	Полнота f_10
	вкл.	**вкл.**	**вкл.**	**вкл.**	**Полна**	Полнота f_10
вкл.					**Не полна**	Неполнота f_3
вкл.				**вкл.**	**Полна**	Полнота f_3 и отрицания
вкл.			**вкл.**		**Не полна**	Неполнота f_3 и 0
вкл.			**вкл.**	**вкл.**	**Полна**	Полнота f_3 и отрицания
вкл.		**вкл.**			**Полна**	Полнота f_10
вкл.		**вкл.**		**вкл.**	**Полна**	Полнота f_10
вкл.		**вкл.**	**вкл.**		**Полна**	Полнота f_10
вкл.		**вкл.**	**вкл.**	**вкл.**	**Полна**	Полнота f_10
вкл.	**вкл.**				**Полна**	Полнота f_3 и f_9
вкл.	**вкл.**			**вкл.**	**Полна**	Полнота f_3 и f_9
вкл.	**вкл.**		**вкл.**		**Полна**	Полнота f_3 и f_9
вкл.	**вкл.**		**вкл.**	**вкл.**	**Полна**	Полнота f_3 и f_9
вкл.	**вкл.**	**вкл.**			**Полна**	Полнота f_10
вкл.	**вкл.**	**вкл.**		**вкл.**	**Полна**	Полнота f_10
вкл.	**вкл.**	**вкл.**	**вкл.**		**Полна**	Полнота f_10
вкл.	**вкл.**	**вкл.**	**вкл.**	**вкл.**	**Полна**	Полнота f_10

Ответ: Исходная система полна, после добавления 0 и отрицания, число получившихся полных подсистем равно 25, (см. таблицу на предыдущей странице).

Задача №2. Вариант № 4.
Исчисление высказываний. **4. Высказывание: Франция выйдет на чемпионат мира по фудболу только если Германия не попадёт на чемпионат мира. Бразилия выйдет на чемпионат мира, если Франция не попадёт на чемпионат мира. Бразилия не попала на чемпионат мира. Значит, Германия не выйдет на чемпионат мира по фудболу.** **2. Записать рассуждение в логической символике, обосновать выбор логических связок (3б.)**
Решение
Высказывания обозначаются заглавными латинским буквами. Выделим и обозначим

следующие высказывания:

A: Франция выйдет на чемпионат мира по фудболу.
B: Германия попадёт на чемпионат мира.
C: Бразилия выйдет на чемпионат мира.

Высказывания соединяются в более сложные с помощью логических связок (логических операций):

При интерпретации высказываний на естественном языке, выделяют следующие логические связки (на основе примеров из слайдов лекций):

1. Отрицание (не А;А не имеет места;А не верно)
2. Конъюнкция (А и В;не только А, но и В;как А, так и В;А вместе с В;А, в то время как В)
3. Дизъюнкция (А или В, или оба; А или В; А, если не В; А и/или В)
4. Импликация (Если А, то В;Коль скоро А, то В; В случае А имеет место В; Для В достаточно А; Для А необходимо В; А, только если В; А, только если В; В, если А;)
5. Эквивалентность (А, если и только если В; Если А, то В, и обратно; А, если В, и В, если А; Для А необходимо и достаточно В; А равносильно В; А тогда и только тогда, когда В)

Итак, попробуем составить логические формулы, соответствующие высказываниям:

1. Франция выйдет на чемпионат мира по фудболу только если Германия не попадёт на чемпионат мира.	Обратим внимание на слова **"Только если"** и **"Не"**, в соответствии с вариантами логических связок в естественном языке можно предположить соответствие **импликации** и **отрицанию**	Тогда формула, соответствующая данному высказыванию в соответствии с обозначениями: $A \rightarrow \neg B$
2. Бразилия выйдет на чемпионат мира, если Франция не попадёт на чемпионат мира	Обратим внимание на слова **"Если не",** в этом случае, есть подходящий пункт в выражениях естественного языка для **дизъюнкции**.	В случае этого высказывания формула может быть такой: $C \vee A$
3. Бразилия не попала на чемпионат мира. Значит, Германия не выйдет на чемпионат мира по фудболу.	Обратим внимание на два слова **"не"**, подозреваем два **отрицания**, и на слово **"значит"**, которое скорее всего подразумевает **импликацию**.	В этом случае, может быть следующая запись: $\neg C \rightarrow \neg B$

(1) Франция выйдет на чемпионат мира по фудболу только если Германия не попадёт на чемпионат мира. (2) Бразилия выйдет на чемпионат мира, если Франция не попадёт на чемпионат мира. (3) Бразилия не попала на чемпионат мира. Значит, Германия не выйдет на чемпионат мира по фудболу.	$\left(\left(A \rightarrow \neg B\right) \wedge \left(C \vee A\right)\right) \rightarrow \left(\neg C \rightarrow \neg B\right)$

Ответ: Высказывание может быть проинтерпретировано следующим образом в логической символике: $\left(\left(A \rightarrow \neg B\right) \wedge \left(C \vee A\right)\right) \rightarrow \left(\neg C \rightarrow \neg B\right)$

Задача №3. Вариант № 4.

Исчисление высказываний.

4. Высказывание: Франция выйдет на чемпионат мира по фудболу только если Германия не попадёт на чемпионат мира. Бразилия выйдет на чемпионат мира, если Франция не попадёт на чемпионат мира. Бразилия не попала на чемпионат мира. Значит, Германия не выйдет на чемпионат мира по фудболу.

3. Проверить правильность рассуждения методом Куайна (3б.)

Решение:

Воспользуемся записью высказывания в логической символике, которое было получено в задаче 2.

$$\left(\left(A \rightarrow \neg B\right) \wedge \left(C \vee A\right)\right) \rightarrow \left(\neg C \rightarrow \neg B\right)$$

Для проверки рассуждения методом Куайна, рассмотрим множество высказывательных переменных в формуле: **<A, B, C>**

Шаг 1. Далее, берём первую переменную А, придаём ей, например, истинное значение. Подставляем в формулу, и выполним вычисления при такой подстановке.

Получаем: $\left(1 \rightarrow \neg B\right) \rightarrow \left(\neg C \rightarrow \neg B\right)$

Шаг 1.1 Для полученной формулы, подобным образом, рассмотрев множество высказывательных переменных <B, C> поступаем подобным образом, берём переменную B, придаём, например, истинное значение, и проводим вычисления:

Получаем $\left(1 \rightarrow 0\right) \rightarrow \left(\neg C \rightarrow 0\right)$ что является тавтологией в силу свойств импликации, для любого значения **C**.

Шаг 1.2 Теперь рассмотрим формулу полученную на **шаге 1,** и множество высказывательных переменных **<B, C>,** но в отличие от **шага 1.1.** придадим ложное значение переменной **B,** проведём вычисления.

Получаем: $\left(1 \rightarrow 1\right) \rightarrow \left(\neg C \rightarrow 1\right)$, что вновь является тавтологией по свойствам импликации, независимо от значения переменной **C.**

Таким образом, завершаем рассмотрение **Шага 1**. И переходим к **шагу 2**.

Шаг 2. Придав в исходной формуле высказывательной переменной **A,** ложное значение, в противоположность первому шагу, где переменной **A** придавали истинное значение.

Получим: $C \rightarrow \left(\neg C \rightarrow \neg B\right)$

Шаг 2.1 по тому же принципу, придаём истинное значение переменной **C**, вычисляем:

Получаем: $1 \rightarrow \left(0 \rightarrow \neg B\right)$ что по свойствам импликации является тавтологией, независимо от значения переменной **B.**

Шаг 2.2. подобным образом, вычислим, придав переменной С ложное значение:
Получаем: $0 \rightarrow (1 \rightarrow \neg B)$ что вновь, по свойствам импликации является тавтологией, не зависит от значения переменной **B**.
На этом, проверка правильности рассуждения методом Куайна завершена. Рассуждение согласно проверке - правильное.
Ответ: проверка методом Куайна показала правильность рассуждения.

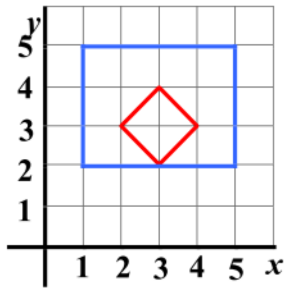
Задача №4. Вариант №4
Исчисление высказываний. 4. Высказывание: Франция выйдет на чемпионат мира по фудболу только если Германия не попадёт на чемпионат мира. Бразилия выйдет на чемпионат мира, если Франция не попадёт на чемпионат мира. Бразилия не попала на чемпионат мира. Значит, Германия не выйдет на чемпионат мира по фудболу. 4. Проверить правильность рассуждения методом редукции (3б.)
Решение
Воспользуемся записью высказывания в логической символике, которое было получено в задаче 2.
$((A \rightarrow \neg B) \wedge (C \vee A)) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$
Согласно методу редукции, для распознания тожественной истинности формулы, следует рассмотреть формулу имеющую вид $F = X \rightarrow Y$
В нашем случае $X = (A \rightarrow \neg B) \wedge (C \vee A)$, а $Y = \neg C \rightarrow \neg B$
Допустим что в некоторой интерпретации формула F принимает ложное значение
Тогда в соответствии с таблицей истинности для импликации имеем $X = 1$, $Y = 0$
Тогда проверка формулы F сводится к проверке формул X и Y
Если подобным образом проверяя X и Y получим противоречие с исходным предположением о ложном значении формулы F некоторой интерпретации, то тем самым доказываем, что формула F является тавтологией.
Рассмотрим $Y = \neg C \rightarrow \neg B$, ложное значение которой, возможно лишь при $C = 0, B = 1$.
Рассмотрим $X = (A \rightarrow \neg B) \wedge (C \vee A)$, учитывая необходимость ложного значения **Y** при **C=0, B=1** можно рассмотреть эту формулу при данных значениях: X = $(A \rightarrow 0) \wedge A$. Которая независимо от значения переменной **A** имеет ложное значение. Что приводит к противоречию с изначальным предположением. Таким образом, действительно, исходная формула F является тождественно истинной.
Ответ: проверка методом редукции показала правильность рассуждения.

Задача №5. Вариант №4
Исчисление высказываний. 4. Высказывание: Франция выйдет на чемпионат мира по фудболу только если Германия не попадёт на чемпионат мира. Бразилия выйдет на чемпионат мира, если Франция не попадёт на чемпионат мира. Бразилия не попала на чемпионат мира. Значит, Германия не выйдет на чемпионат мира по фудболу. 5. Проверить правильность рассуждения методом резолюций (3б.)
Согласно записям высказываний в логической символике, полученным в задаче 2, обозначены следующие переменные:
A: Франция выйдет на чемпионат мира по фудболу. **B**: Германия попадёт на чемпионат мира. **C**: Бразилия выйдет на чемпионат мира.
Аналогично, используем запись в логической символике высказываний из задачи 2, которые для проверки правильности рассуждения методом резолюций примем как гипотезы:
Гипотезы: $A \rightarrow \neg B$ $C \vee A$
В качестве вывода, для проверки правильности рассуждения методом резолюций, так же используем запись в логической символике высказывания из задачи 2:
Вывод: $\neg C \rightarrow \neg B$
Для проверки правильности рассуждения методом резолюций, следует провести проверку выводимости, соответствующего вывода, из соответствующих гипотез, что записывается следующим образом:
$A \rightarrow \neg B, C \vee A [Знак\ выводимости] \neg C \rightarrow \neg B$
Метод резолюций работает с формулами в виде **предложений.** Дизъюнкцией переменных или их отрицаний.
Поэтому следует найти соответствующие **предложения** для гипотез, и для отрицания целевой формулы.
Формулу можно привести к множеству предложений следующим образом: 1) Формулу приводим к КНФ 2) Конъюнкция дизъюнкций разбивается на множество предложений

КНФ для гипотезы $A \rightarrow \neg B$ будет $\neg A \vee \neg B$, (проверяется таблицей истинности, получаем с помощью алгоритма построения СКНФ по таблице истинности исходной формулы, или тождественными преобразованиями).
КНФ для гипотезы $C \vee A$, сама по себе КНФ.
КНФ для отрицания вывода $\neg(\neg C \rightarrow \neg B)$ будет $\neg C \wedge B$. Что даёт два предложения: $\neg C$ и B
Таким образом получили множество предложений: $\{\neg A \vee \neg B, C \vee A, \neg C, B\}$
1. $\neg A \vee \neg B$ 2. $C \vee A$ 3. $\neg C$ 4. B
Далее из имеющихся предложений, с помощью правила резолюции: 5. A **ПР из 2 и 3** 6. $\neg B$ **ПР из 5 и 1** 7. $\varnothing$ **ПР из 4 и 6**
Проверка методом резолюций показала правильность исходного рассуждения.
Ответ: Рассуждение верное согласно проверке методом резолюций.

Задача №6 Вариант №4
Придумать верное рассуждение с не менее, чем с тремя гипотезами и проверить придуманное рассуждение методом резолюций (5 б.) (выполняется по желанию, оцениваются только оригинальные задачи и только при выполнении задания минимум на 20 б.).
Решение:
Для того чтобы придумать соответствующее задаче верное рассуждение, можно воспользоваться «методом резолюций наоборот»
Предположим у нас есть два предложения, D (гипотеза) и $\neg D$ (выводимое по методу резолюций) по ним метод резолюций даст $\varnothing$.
Предположим что у нас есть два предложения C (гипотеза) , и $\neg C \vee \neg D$ (выводимое по методу резолюций), по ним метод резолюций даст $\neg D$
Далее аналогично, предположим, что у нас есть предложения B (гипотеза) и $\neg B \vee \neg C \vee \neg D$ (полученное по методу резолюций), по ним метод резолюций даст $\neg C \vee \neg D$
И ещё раз предположим, что у нас есть предложения A (гипотеза) и $\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D$ (пусть это будет отрицание вывода), по которым метод резолюций даст $\neg B \vee \neg C \vee \neg D$.
Соберём те из предложений, которые не получены с помощью метода резолюций:
Гипотезы: A, B, C, D Вывод (отрицание соответствующего выводу предложения): $A \wedge B \wedge C \wedge D$
По построению, очевидно, что эта схема рассуждения проверяется методом резолюций.
Осталось, додумать соответствующие гипотезам и выводу конструкции на естественном языке:
Соответствие гипотезам: Пусть A - студент Иванов, сдаст экзамен по матлогике, Пусть B - студент Петров, сдаст экзамен по матлогике, Пусть C - студент Сидоров, сдаст экзамен по матлогике, Пусть D - студентка Васильева сдаст экзамен по матлогике. **Соответствие выводу:** Студент Иванов сдаст экзамен по матлогике., и студент Петров сдаст экзамен по матлогике, и студент Сидоров сдаст экзамен по матлогике и студентка Васильева тоже сдаст экзамен по матлогике.

Пусть А - студент Иванов, сдаст экзамен по матлогике, Пусть В - студент Петров, сдаст экзамен по матлогике, Пусть С - студент Сидоров, сдаст экзамен по матлогике, Пусть D - студентка Васильева сдаст экзамен по матлогике.
Тогда запись в логической символике: $A \wedge B \wedge C \wedge D \rightarrow A \wedge B \wedge C \wedge D$
Получится множество предложений: { A, B, C, D , $\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D$ }
Осуществим проверку с помощью метода резолюций:
1. A 2. B 3. C 4. D 5. $\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D$ 6. $\neg B \vee \neg C \vee \neg D$ **МР из 1 и 5** 7. $\neg C \vee \neg D$ **МР из 2 и 6** 8. $\neg D$ **МР из 3 и 7** 9. $\emptyset$ **МР из 4 и 8** **Рассуждение верное**

Задача №7. Вариант №4	
На координатной плоскости даны множества А и В (А ограничено красным цветом, В - синим). Описать предикаты $P_A(x)=\{x \in A\}$, $P_B(x)=\{x \in B\}$ (x - точка на плоскости, границы включены в множества, можно использовать логические операции и сравнение $\leq$). С использованием полученных предикатов записать в виде формул логики предикатов высказывания о множествах А и В. (5 б.)	
	**1) А содержится в В** **2) Некоторые точки В не принадлежат А**
Решение:	
Множество субъектов, о которых делаются высказывания, называется предметной областью. В нашей задаче, предметной областью Ω будет множество точек координатной плоскости, так же пусть в предметной области будут множество А и множество В, ограниченные на координатной плоскости соответственно красным и синим, так же, в предметную область включим координаты точек координатной плоскости, взятые по оси Ox и по оси Oy представленные действительными числами, так же в предметной области пусть будет множество действительных чисел.	

Для обозначения субъектов, будем использовать предметные переменные: x для обозначения точки плоскости, A , B для обозначения заданных ограниченных множеств точек.
Определим терм: взять координату данной точки координатной плоскости по оси Ox . Определим соответствующую терму функциональную переменную f_x
Определим терм: взять координату данной точки координатной плоскости по оси Oy Определим соответствующую терму функциональную переменную f_y
Определим терм: сложение двух действительных чисел, его функциональную переменную, и соответствующее значение: $f_+^2(x, y) = x + y$
Определим терм: разница двух действительных чисел, его функциональную переменную, и соответствующее значение: $f_-^2(x, y) = x - y$
Определим терм: унарный минус от действительного числа, и соответствующее значение $f_-^1(x) = -x$
Определим терм: сравнить два действительных числа, первое меньше либо равно второму и соответствующий функциональный символ и значение $f_{<=}^2(x, y) = x \leq y$ пусть, если условие выполняется, значение терма будет равно 1, если условие не выполняется значение терма будет 0.
Определим терм: числовая конъюнкция действительных чисел, численно равная их произведению, соответствующий функциональный символ, и значение $f_\&^2(x, y) = xy$.
Заметим что границы множества A представлены отрезками прямых с уравнениями: $y = x + 1$, $y = x - 1$, $y = -x + 5$, $y = -x + 7$
Так же, границы множества B представлены отрезками прямых с уравнениями: $y = 5$, $y = 2$, $x = 1$, $x = 5$
Отсюда, множество A , определяется множеством точек, для (x, y) -координат которых выполняются все неравенства: $y \leq x + 1, x \leq y + 1, -y \leq x - 5, y \leq -x + 7$
Аналогично, множество B определяется множеством точек, для (x, y) -координат которых выполняются все неравенства: $y \leq 5, 2 \leq y, 1 \leq x, x \leq 5$
Предикат - это языковое выражение, обозначающее какое-то свойство субъекта или отношение между субъектами.
В соответствии с этим понятием, опишем предикаты $P_A(x) = \{x \in A\}$ и $P_B(x) = \{x \in B\}$. (где x точка плоскости, границы включены в множества, можно использовать логические операции и сравнение $\leq$)
Тогда, учитывая данные выше определения, можно описать предикаты.

$P_A(x)=$ "Отлично от нуля следующее выражение: $(x_y \le x_x + 1 \,\&\, x_x \le x_y + 1)\,\&\,(-x_y \le x_x - 5 \,\&\, x_y \le -x_x + 7)$ "
$P_B(x)=$ "Отлично от нуля следующее выражение: $(x_y \le 5 \,\&\, 2 \le x_y)\,\&\,(1 \le x_x \,\&\, x_x \le 5)$ "
1) Записать с помощью полученных предикатов в виде формулы логики предикатов выражение: А содержится в В
Данному выражению соответствует формула: $\forall x\,(P_A(x) \rightarrow P_B(x))$
2) Записать с помощью полученных предикатов в виде формулы логики предикатов выражение: Некоторые точки В не принадлежат А
Данному выражению почти соответствует формула: $\exists x\,(\neg(P_B(x) \rightarrow P_A(x)))$
Почти соответствует, потому что формула соответствует выражению о существовании хотя бы одной такой точки, а в утверждении говориться о том что **"некоторые точки",** то есть точек должно быть как минимум две различных, иначе можно говорить только о **"некоторая точка В не принадлежит А"**. В этом случае можно уточнить формулу, добавив ещё один предикат: **"точка** x **и точка** y **совпадают"** назовём и опишем его следующим образом, опираясь на данные выше определения $P_{=}(x, y)=$ "Равно нулю выражение $(x_x - y_x)\,\&\,(x_x - y_x) + (x_y - y_y)\,\&\,(x_y - y_y)$ "
Тогда для выражения получим более точную формулу: $\exists x \exists y\,(\neg(P_B(x) \rightarrow P_A(x)) \wedge \neg(P_B(y) \rightarrow P_A(y)) \wedge \neg P_{=}(x, y))$
Ответ: 1) $\forall x\,(P_A(x) \rightarrow P_B(x))$ **2)** $\exists x\,(\neg(P_B(x) \rightarrow P_A(x)))$ **2*)** $\exists x \exists y\,(\neg(P_B(x) \rightarrow P_A(x)) \wedge \neg(P_B(y) \rightarrow P_A(y)) \wedge \neg P_{=}(x, y))$

Задача №8. Вариант №4
Проверить общезначимость формулы методом резолюций (5 б.) $\left(\exists x \forall y A(x, y)\right) \rightarrow \left(\forall x \exists y B(x, y)\right)$
Решение:
Выпишем используемые определения.
Формула ***общезначима*** или (тождественно истинна в логике предикатов), если она истинная в любой интерпретации.
Формула истинна в данной модели, если она принимает истинное значение на любом наборе $< a_1, a_2, \dots, a_n >$ из предметной области Ω, значений своих ***свободных*** переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Под интерпретацией (моделью) будем понимать предметную область Ω с определёнными на ней n-арными предикатами.
Если в формуле по некоторой переменной навешан квантор, то такая переменная называется ***связанной***, в противном случае, переменная является ***свободной***.
Если в формуле нет свободных переменных, то формула называется ***замкнутой***.
Метод резолюций
Метод резолюций работает с особой стандартной формой формул, которые называются предложениями.
Предложение - бесскванторная дизъюнкция литералов.

Любая формула ИП может быть преобразована во множество предложений, используя следующие шаги:
1) Приведение к предварённой форме.
А находится в предварённой форме, если она имеет вид: $A = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n B(x_{1,} \ldots, x_2)$ где $Q_1, \ldots, Q_n$ - кванторы B - бескванторая формула.
Для приведения к предварённой форме, исключают импликации:
$\neg(\exists x \forall y A(x, y)) \vee (\forall x \exists y B(x, y))$
Для внесения отрицания внутрь скобок, применяют **законы де Моргана**
$\forall x(\neg(\forall y A(x, y))) \vee (\forall x \exists y B(x, y))$ $\forall x(\exists y(\neg A(x, y))) \vee (\forall x \exists y B(x, y))$
Для переноса кванторов, применяют **законы дистрибутивности**
$\forall x(\exists y(\neg A(x, y)) \vee \exists y B(x, y))$ $\forall x(\exists y((\neg A(x, y)) \vee B(x, y)))$
Таким образом, получили **предварённую форму**.
$\forall x \exists y(\neg A(x, y) \vee B(x, y))$
2) Далее производят элиминацию кванторов существования, используя преобразование (для данного случая):
$\forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \forall x F(x, f(x))$, где f - функциональный символ.
Для нашей формулы: $\forall x(\neg A(x, f(x)) \vee B(x, f(x)))$
Получили **скулемовскую стандартную форму.**
3) Элиминация кванторов всеобщности
$\neg A(x, f(x)) \vee B(x, f(x))$
Теперь формула **не содержит кванторов.**
4) Приведение к КНФ и элиминация коньюнкций
В нашем случае формула уже в КНФ.
5) Получаем множество предложений
$\{\neg A(x, f(x)) \vee B(x, f(x))\}$
Проверка общезначимости формулы.
Будем использовать теорему Гёделя о полноте исчисления предикатов: Формула доказуема в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда формула общезначима.

То есть для проверки общезначимости в ИП методом резолюций нужно установить выводимость $[\text{знак выводимости}]F$. В этом случае воспользуемся доказательством от противного и будем доказывать выводимость $\neg F[\text{знак выводимости}]\varnothing$
По аналогии с процессом, применённым для нахождения множества предложений формулы, найдём множество предложений её отрицания.
1) Приведение к предварённой форме.
$\neg(\exists x\forall y A(x,y))\rightarrow(\forall x\exists y B(x,y))$
исключаем импликацию
$\neg(\neg(\exists x\forall y A(x,y))\vee(\forall x\exists y B(x,y)))$
далее отрицание внутрь скобок, с использованием законов де Моргана и закона двойного отрицания.
$(\exists x\forall y A(x,y))\wedge\neg(\forall x\exists y B(x,y))$
$(\exists x\forall y A(x,y))\wedge(\exists x(\neg(\exists y B(x,y))))$
$(\exists x\forall y A(x,y))\wedge(\exists x\forall y B(x,y))$
Перенос кванторов по законам дистрибутивности
$\exists x\forall y(A(x,y)\wedge\neg B(x,y))$
Осуществляем элиминацию квантора существования:
$\forall y(A(a,y)\wedge\neg B(a,y))$ где а - предметная константа
Получили скулемовскую стандарнтную форму
Осуществляем элиминацию квантора всеобщности:
$A(a,y)\wedge\neg B(a,y)$
Имеем КНФ, для получения множества предложений, осуществляем элиминацию конъюнкций:
$\{A(a,y),\neg B(a,y)\}$ Множество предложений.
Теперь применим метод резолюций:
Среди текущего множества предложений нет резольвируемых. Значит, формула не является общезначимой.
Примечание: В случае если бы нам было известно о том что предикат А и предикат В является одним и тем же, то общезначимость была бы, но без выполнения такого условия общезначимости, конечно, нет.
Ответ: проверка на формулы общезначимость методом резолюций показала что формула не является таковой.

Задача №10, вариант №4

Построить машину Тьюринга для перевода из начальной конфигурации в заключительную. На ленте МТ записаны нули и единицы, при этом пустые ячейки содержат нули, внешний алфавит состоит только из 0 и 1. Пояснения по построению программы для МТ обязательны. Проверить работу машины Тьюринга для конкретных значений x, y и нарисовать граф, соответствующий построенной МТ. (8б)

$$q_1 1^x 0 1^y 0 \Rightarrow \begin{cases} q_0 1^y, \textit{если}\ x > 2 \\ q_0 1^x, \textit{если}\ x \le 2 \end{cases}$$

Решение:

Создадим таблицу нескольких первых пар значений x, y, для определения возможных вариантов исходных данных, и шаблонов действий МТ в зависимости от этих данных.

$y \backslash x$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	Случай A	Случай $Б$	Случай $В$	Случай $Г$
2	Случай A_1	Случай $Б_1$	Случай $В_1$	Случай $Г_1$

Случай A и A_1 нужно сделать:

1) Определить что $x=1$ (Условие $x \le 2$)
2) Перейти к y, переписать его пустым символом
3) Вернуться к началу x

Случай $Б$ и $Б_1$ нужно сделать:

1) Определить что $x=2$ (Условие $x \le 2$)
2) Перейти к y, переписать его пустым символом
3) Вернуться к началу x

Заметим, что в случаях A и A_1, $Б$ и $Б_1$ совпадают пункты 2) и 3) это может служить поводом для выделения "подпрограммы" МТ для их выполнения, то есть для этих случаев, может работать один набор команд МТ.

Случай $В$ и $В_1$ нужно сделать:

1) Определить что $x=3$ (Условие $x>2$)
2) Вернуться к началу x, переписать его пустым символом
3) Перейти к началу y.

Случай $Г$ и $Г_1$ нужно сделать:

1) Определить что $x=4$ (Условие $x>2$)
2) Вернуться к началу x, переписать его пустым символом
3) Перейти к началу y.

Заметим, что в случаях B и B_1, Γ и Γ_1, пункты 2) и 3) совпадают, что является поводом для выделения "подпрограммы" МТ для их выполнения, то есть может отвечать за эти действия один и тот же набор команд МТ.

Другое замечание, касается первых пунктов случаев B и B_1, Γ и Γ_1, так как в них явно требуется определить конкретное значение x, если в случаях A и A_1, $Б$ и $Б_1$ такой подход вполне работоспособен, благо всего два варианта $x=1$ и $x=2$, то в случаях групп B и Γ конечно этот подход решения задачи не даст, так как требуется иметь независимость от величины x, чтобы подход работал и для бОльших чисел. Тогда, первый пункт этих групп должен просто подразумевать что $x>2$, так как случаи групп A и $Б$ мы рассмотрим первыми, и уже не вовсе нет нужды пытаться проверять величину x. Так же, нет совсем никакой надобности заботиться о величине y, в таблице она приведена лишь для наглядности рассмотрения.

Поэтому итоговый требуемый набор действий можно свести к следующему:
1. Проверяем $x=1$?
Да. Тогда переходим к пункту 1.1
Нет. Тогда переходим к пункту 2.
1.1 Перейти к началу y, переписать его пустым символом. Перейти к пункту 1.2
1.2 Перейти к началу x. Завершить программу.
2. Проверяем $x=2$?
Да. Тогда переходим к пункту 1.1
Нет. Переходим к пункту 3.
3. Известно что $x>2$, так как осуществлены проверки 1 и 2. Переходим к 3.1.
3.1 Перейти к началу x, переписать его пустым символом. Переходим к 3.2.
3.2 Перейти к началу y. Завершить программу.

Возможно что можно выбрать иной подход, который требует меньшего количества действий, если начать с проверки $x>2$. Попробуем рассмотреть и этот вариант.

1. Проверим что $x>2$?
Да. Тогда переходим к пункту 1.1
Нет. Тогда переходим к пункту 2.
1.1 Перейти к началу x, переписать пустым символом.
1.2. Перейти к началу y, завершить программу.
2. Известно что $x\leq 2$. Так как проведена проверка 1. Сразу выполняем 2.1.
2.1 Перейти к началу y, переписать его пустым символом. Перейти к пункту 2.2
2.2 Перейти к началу x, завершить программу.

Из двух вариантов подходов, второй вариант выглядит предпочтительнее, так как меньше проверок, по сути лишь одна, и совокупно действий меньше (по крайней мере в "смысловой" записи алгоритма, возможно что при реализации на МТ что первый, что второй вариант могут потребовать тот же объём команд). Попробуем реализовать эти действия в виде команд МТ.

Разработку будем вести с помощью таблицы команд, условно выделяя и называя в ней диапазоны команд по смыслу действий, в соответствии с разработанным алгоритмом.

Смысл команды:	Проверка $x>2$?	Проверка $x>2$?
Номер команды	q_1	q_2
Если читаем 1	Есть шанс что $x>2$, пишем 1 , переходим вправо, q_2	Есть шанс что $x>2$, пишем 1 , переходим вправо, q_3
Если читаем 0	При натуральных входящих невозможный случай	Случай $x\leq 2$, пишем 0 , переходим вправо к началу y , q_6

смысл	Проверка $x>2$?	Переход к началу x , чтобы его обнулить.	Переход от начала x , до конца обнуляя x
№q	q_3	q_4	q_5
1	Да, $x>2$ уже точно, пишем 1 , переходим влево, q_4	Идём к началу x пишем 1 , переходим влево, q_4	пишем 0 , переходим вправо, q_5
0	Случай $x\leq 2$, пишем 0 , переходим вправо к началу y , q_6	x готов к обнулению, пишем 0 , переходим вправо, q_5	Закончили обнуление x . Ещё шаг до y , пишем 0 , переходим вправо, завершаем программу q_0

смысл	Обнуление y	Переход к концу x , поверх нулей бывшего y	Переход к началу x , поверх его записи
№q	q_6	q_7	q_8
1	Пишем 0 , переходим вправо, q_6	Дошли до конца записи x , пишем 1 , переходим влево, q_8	Ещё не дошли до начала x , пишем 1 , переходим влево q_8
0	Обнулили y .Пишем 0 , переходим влево, q_7	Пишем 0 , переходим влево, q_7	Дошли до начала x . Пишем 0, переходим вправо, завершаем программу q_0 .

Выпишем теперь получившиеся команды, их получается 15, без учёта q_0 . Начало вычислений подразумевается с команды q_1 , что можно понять из условия задачи.

$q_1 1 \rightarrow 1\, R q_2$
$q_2 1 \rightarrow 1\, R q_3$
$q_2 0 \rightarrow 0\, R q_6$
$q_3 1 \rightarrow 1\, L q_4$
$q_3 0 \rightarrow 0\, R q_6$
$q_4 1 \rightarrow 1\, L q_4$
$q_4 0 \rightarrow 0\, R q_5$
$q_5 1 \rightarrow 0\, R q_5$
$q_5 0 \rightarrow 0\, R q_0$
$q_6 1 \rightarrow 0\, R q_6$
$q_6 0 \rightarrow 0\, L q_7$
$q_7 1 \rightarrow 1\, L q_8$
$q_7 0 \rightarrow 0\, L q_7$
$q_8 1 \rightarrow 1\, L q_8$
$q_8 0 \rightarrow 0\, R q_0$

Теперь, распишем схемы действия МТ по данной программе, для вышерассмотренных случаев $А, Б, В, Г, А_{1}, Б_{1}, В_{1}, Г_{1}$, схема показывает положение УГ МТ относительно ленты, показана текущая команда. Последняя строка схемы для каждого случая, показывает завершение программы, с положением УГ относительно ленты.

Нижерасположенные схемы являются проверкой работы программы МТ при основных вариантах входных данных. При бОльших значениях x, y, чем проверенные, работа программы принципиально измениться не может.

Случай А: x = 1, y = 1:

```
00 | q1_1->1Rq2 > 1010
001 | q2_0->0Rq6 > 010
0010 | q6_1->0Rq6 > 10
00100 | q6_0->0Lq7 > 0
0010 | q7_0->0Lq7 > 00
001 | q7_0->0Lq7 > 000
00 | q7_1->1Lq8 > 1000
0 | q8_0->0Rq0 > 01000
00 |         q0 > 1000
```

Случай Б: x=2, y = 1;

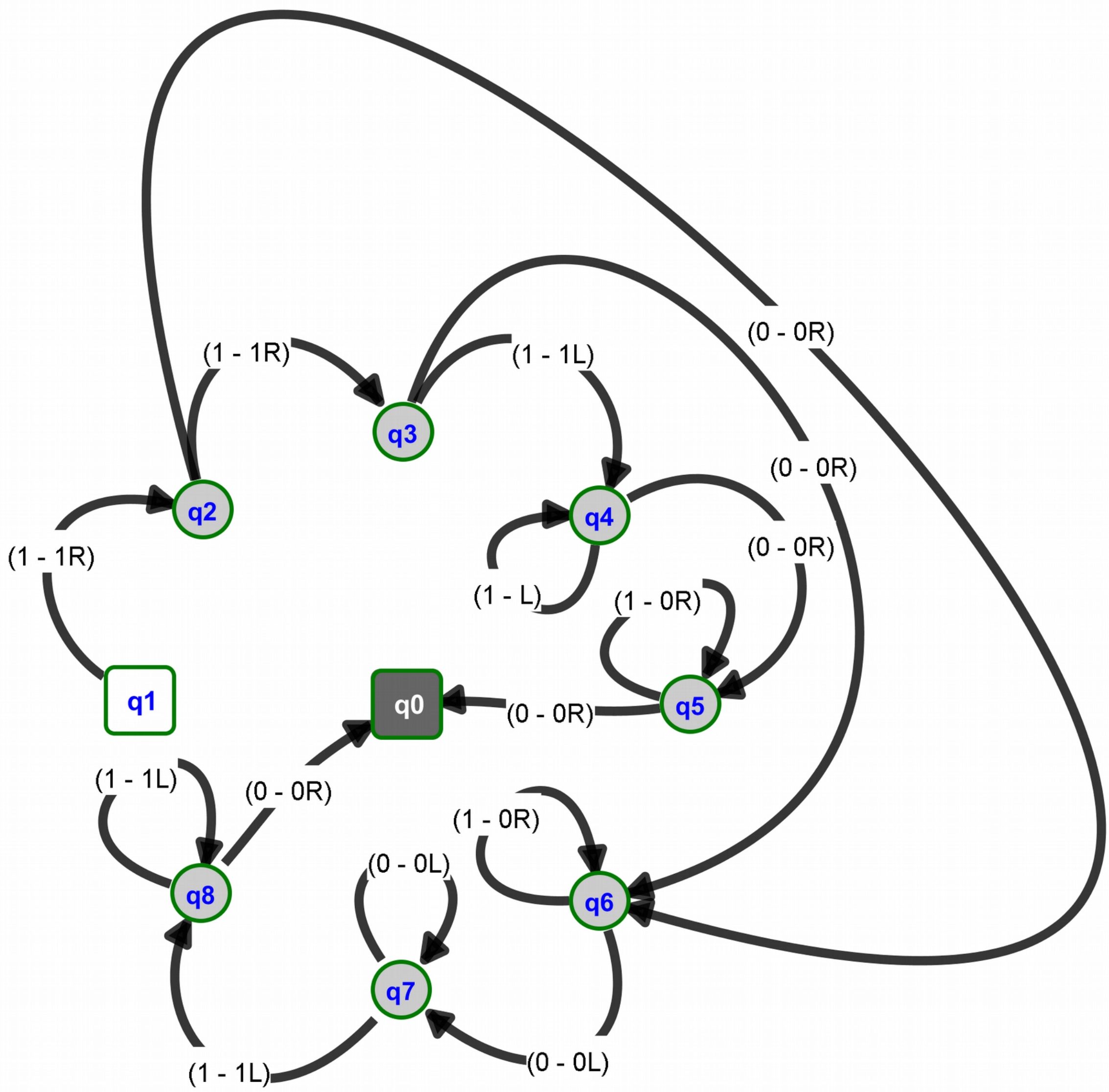
```
00 | q1_1->1Rq2 > 11010
001 | q2_1->1Rq3 > 1010
0011 | q3_0->0Rq6 > 010
00110 | q6_1->0Rq6 > 10
001100 | q6_0->0Lq7 > 0
00110 | q7_0->0Lq7 > 00
0011 | q7_0->0Lq7 > 000
001 | q7_1->1Lq8 > 1000
00 | q8_1->1Lq8 > 11000
0 | q8_0->0Rq0 > 011000
00 |         q0 > 11000
```

Случай $В$ **: x = 3, y = 1:**

Случай $Г$ **: x = 4, y = 1:**

<table>
<tr>
<td>00 | q1_1->1Rq2 > 111010
001 | q2_1->1Rq3 > 11010
0011 | q3_1->1Lq4 > 1010
001 | q4_1->1Lq4 > 11010
00 | q4_1->1Lq4 > 111010
0 | q4_0->0Rq5 > 0111010
00 | q5_1->0Rq5 > 111010
000 | q5_1->0Rq5 > 11010
0000 | q5_1->0Rq5 > 1010
00000 | q5_0->0Rq0 > 010
000000 | q0 > 10</td>
<td>00 | q1_1->1Rq2 > 1111010
001 | q2_1->1Rq3 > 111010
0011 | q3_1->1Lq4 > 11010
001 | q4_1->1Lq4 > 111010
00 | q4_1->1Lq4 > 1111010
0 | q4_0->0Rq5 > 01111010
00 | q5_1->0Rq5 > 1111010
000 | q5_1->0Rq5 > 111010
0000 | q5_1->0Rq5 > 11010
00000 | q5_1->0Rq5 > 1010
000000 | q5_0->0Rq0 > 010
0000000 | q0 > 10</td>
</tr>
<tr>
<td>Случай A_1 : x = 1, y = 2:</td>
<td>Случай $Б_1$: x = 2, y = 2:</td>
</tr>
<tr>
<td>00 | q1_1->1Rq2 > 10110
001 | q2_0->0Rq6 > 0110
0010 | q6_1->0Rq6 > 110
00100 | q6_1->0Rq6 > 10
001000 | q6_0->0Lq7 > 0
00100 | q7_0->0Lq7 > 00
0010 | q7_0->0Lq7 > 000
001 | q7_0->0Lq7 > 0000
00 | q7_1->1Lq8 > 10000
0 | q8_0->0Rq0 > 010000
00 | q0 > 10000</td>
<td>00 | q1_1->1Rq2 > 110110
001 | q2_1->1Rq3 > 10110
0011 | q3_0->0Rq6 > 0110
00110 | q6_1->0Rq6 > 110
001100 | q6_1->0Rq6 > 10
0011000 | q6_0->0Lq7 > 0
001100 | q7_0->0Lq7 > 00
00110 | q7_0->0Lq7 > 000
0011 | q7_0->0Lq7 > 0000
001 | q7_1->1Lq8 > 10000
00 | q8_1->1Lq8 > 110000
0 | q8_0->0Rq0 > 0110000
00 | q0 > 110000</td>
</tr>
<tr>
<td>Случай B_1 : x = 3, y = 2:</td>
<td>Случай $Г_1$: x = 4, y = 2:</td>
</tr>
<tr>
<td>00 | q1_1->1Rq2 > 1110110
001 | q2_1->1Rq3 > 110110
0011 | q3_1->1Lq4 > 10110
001 | q4_1->1Lq4 > 110110
00 | q4_1->1Lq4 > 1110110
0 | q4_0->0Rq5 > 01110110
00 | q5_1->0Rq5 > 1110110
000 | q5_1->0Rq5 > 110110
0000 | q5_1->0Rq5 > 10110
00000 | q5_0->0Rq0 > 0110
000000 | q0 > 110</td>
<td>00 | q1_1->1Rq2 > 11110110
001 | q2_1->1Rq3 > 1110110
0011 | q3_1->1Lq4 > 110110
001 | q4_1->1Lq4 > 1110110
00 | q4_1->1Lq4 > 11110110
0 | q4_0->0Rq5 > 011110110
00 | q5_1->0Rq5 > 11110110
000 | q5_1->0Rq5 > 1110110
0000 | q5_1->0Rq5 > 110110
00000 | q5_1->0Rq5 > 10110
000000 | q5_0->0Rq0 > 0110
0000000 | q0 > 110</td>
</tr>
</table>

Далее, в рамках задачи требуется представить работу программы МТ в виде графа:



Каждый такт выполнения программы МТ соответствует ребру ориентированного графа, выбор ребра осуществляется в зависимости от прочитанного символа УГ. Этот выбор указан в подписи к ребру, соединяющего соответствующие вершины: например команда $q_3 1 \rightarrow 1 L q_4$, соответствует ребру орграфа соединяющего вершины q_3 и q_4 с подписью **(1 - 1L).** Подобным образом представлены все команды программы. Начальное состояние q_1 и остановка q_0 выделены на графе прямоугольными элементами, и помечены разными цветами, для пущей наглядности.

Ответ: Построена соответствующая задаче МТ. Приведены пояснения по построению МТ. Проверена работа машины Тьюринга для конкретных значений x, y **.** **Нарисован граф, соответствующий построенной МТ.**