3.3 Изоморфизм графов

Говорят, что два графа $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$ изоморфны: $G_1 \sim G_2$, если существует взаимно однозначное отображение h: $V_1 \to V_2$, сохраняющая отношение инцидентности, при которой смежные вершины (ребра) графа G_1 переходят в смежные вершины (ребра) графа G_2:

$$e_1 = (u,v) \in E_1 \Rightarrow e_2 = (h(u),h(v)) \in E_2;$$

$$e_2 = (u,v) \in E_2 \Rightarrow e_1 = (h^{-1}(u),h^{-1}(v)) \in E_1;$$

Изоморфизм графов является отношением эквивалентности.

Графы рассматриваются с точностью до изоморфизма, т.е. рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма

Числовая характеристика, одинаковая для всех изоморфных графов, называется инвариантом графа.

В частности, количество вершин и количество ребер – инварианты графа G.

Не известно никакого набора инвариантов, определяющих граф с точностью до изоморфизма.

3.4 Валентность

Степенью (или валентностью) вершины v называется число инцидентных ей ребер.

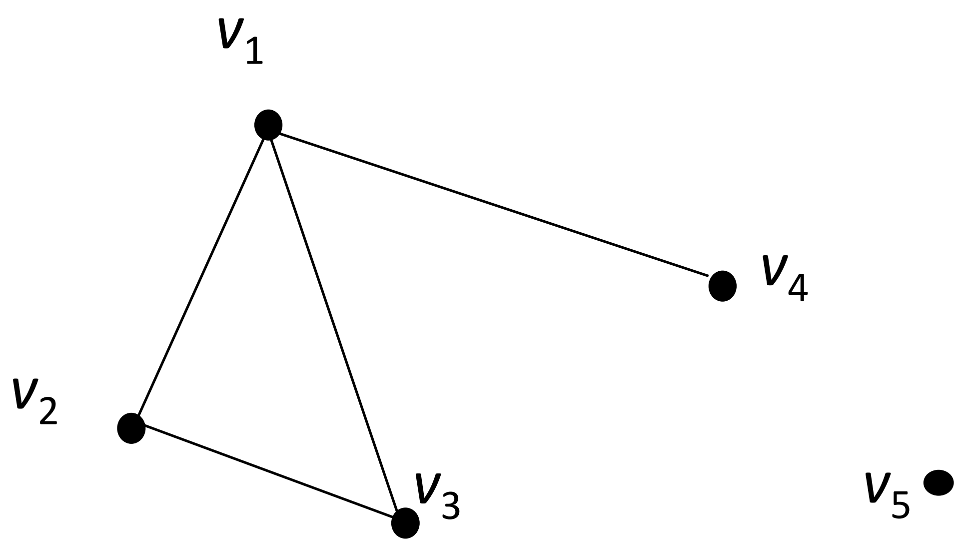
$deg(v)$

$0 \le deg(v) \le |V| - 1;$

$deg(v) = |\Gamma(v)|.$

Вершина графа, имеющая степень 0, называется изолированной,

а вершина со степенью 1 – висячей, или концевой.



v_4 – висячая, $deg(v_4) = 1$

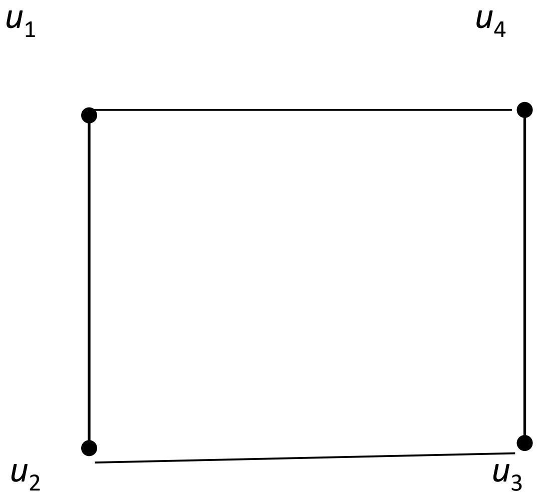
$deg(v_1) = 3$

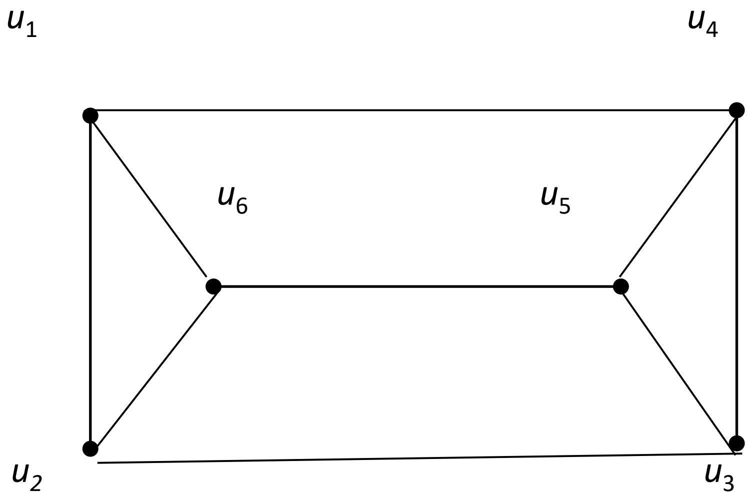
$deg(v_2) = deg(v_3) = 2$

$deg(v_5) = 0$ - изолированная

Если степени всех вершин графа одинаковы и равны некоторому числу *k*, то такой граф называется регулярным графом степени *k*.

Степень регулярности является инвариантом графа и обозначается *r(G)*. Для нерегулярных графов *r(G)* не определено.





Для орграфа число дуг, исходящих из вершины *v*, называется полустепенью исхода, а число входящих – полустепенью захода.

$deg^{-}(v)$ и $deg^{+}(v)$: $deg(v)=deg^{-}(v) + deg^{+}(v)$.

<u>**Теорема Эйлера**</u> **(Лемма *"о рукопожатиях"*)**. ***Сумма степеней всех вершин графа является четным числом и равна удвоенному числу его ребер, т.е. .***

$$\sum_{v\in V}\deg(v) = 2|E|$$

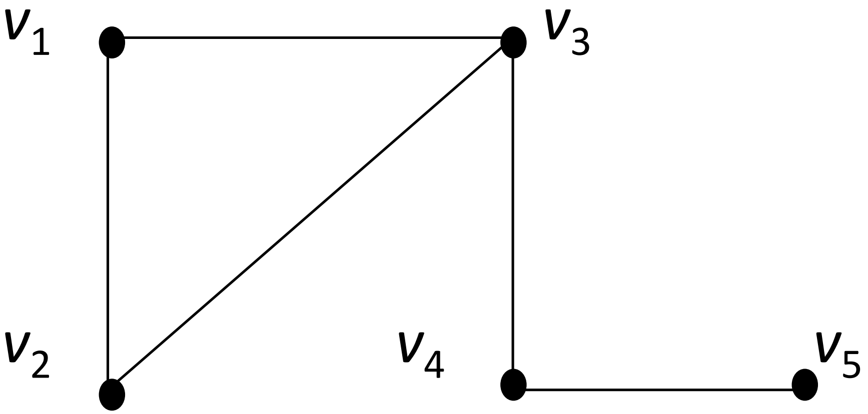
Для орграфа:

$$\sum_{v\in V}\deg^{-}(v)+\sum_{v\in V}\deg^{+}(v) = 2|E|$$

Последовательность степеней всех вершин графа, записанных в каком-либо порядке, называется степенной последовательностью

Пример: Найдем степенную последовательность для графа G.

(2,2,3,2,1).



3.5 Маршруты, цепи, циклы

Маршрутом от вершины *u* к вершине *v* или **(u,v)-маршрутом** в графе *G* называется всякая последовательность вида

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n = v,$$

в которой любые два соседних элемента инцидентны, т.е. e_k – ребро, соединяющее вершины v_{k-1} и v_k, $k = 1,2,\ldots,n$.

Это определение подходит также для псевдо-, мульти- и орграфов. В случае орграфа v_{k-1} – начало ребра e_k, а v_k – его конец

Маршрут называется цепью, если в нем нет совпадающих ребер, и простой цепью – если дополнительно нет совпадающих вершин, кроме, может быть, начала и конца цепи.

Про цепь $u = v_0, v_1, \ldots, v_n = v$ говорят, что она *соединяет* вершины *u* и *v* и обозначают $\langle u, v \rangle$.

Замкнутая цепь называется циклом;

Замкнутая простая цепь – простым циклом.

Число циклов в графе *G* обозначается *z(G)*.

Граф без циклов называется ациклическим.

Для орграфов цепь называется путем, а цикл – контуром.

Число ребер в маршруте М (возможно, с повторениями) называется его длиной, обозначается |М|.

Расстоянием между вершинами u и v (d(u,v)) называется длина кратчайшей цепи $\langle u,v \rangle$, а сама кратчайшая цепь называется геодезической.

Если не существует цепи, соединяющей вершины u и v, то по определению $d(u,v) = +\infty$.

Диаметром графа G (обозначается $D(G)$) называется длина длиннейшей геодезической.

3.6 *Связность*

Если две вершины u и v в графе можно соединить цепью, то такие вершины связаны.

Граф называется связным, если в нем связаны все вершины.

Отношение связности на множестве вершин является отношением эквивалентности.

Классы называются компонентами связности;

$k(G)$ - число компонент связности

Граф G является связным $\Leftrightarrow$ $k(G) = 1$.

Если $k(G) > 1$, то это несвязный граф.

Граф, состоящий только из изолированных вершин (в котором $k(G)=|V|$), называется вполне несвязным.

Орграф *G(V,E)* является слабо связным (слабым), если если после замены всех дуг графа *G* ребрами полученный граф будет связным.

Ориентированный граф является сильно связным (сильным), если для любой пары вершин $u, v \in V$ существует ориентированный путь из u в v.

Если для любой пары вершин по крайней мере одна достижима из другой, то такой граф является односторонне связным, или односторонним.

Граф, состоящий из одной вершины, по определению считается сильно связным.

Множества вершин связных компонент образуют разбиение множества вершин графа.

3.7 ***Подграфы***

Граф $G'(V',E')$ называется подграфом графа $G(V,E)$: $G'(V',E') \subseteq G(V,E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$, и каждое из ребер E' инцидентно только вершинам из V'.

Если $G' \subseteq G$ и $V' \neq V$ и $E' \neq E$, то подграф G' является собственным подграфом графа G.

Если множества $V' = V$ и в графе G' нет циклов, то G' называется остовным подграфом (остовом, каркасом) графа G.

Остовное дерево – требуется связность

Для получения остова из графа необходимо удалить (m–n+k) ребер

3.7 Виды графов и операции над ними

3.7.1 Тривиальные и полные графы

Граф, состоящий из одной вершины, называется тривиальным.

Граф, в котором нет ребер, называется пустым

Граф, состоящий из простого цикла с k вершинами, обозначается $\mathbf{C_k}$.

Граф с n вершинами называется полным, если любые две его вершины смежны.

Обозначается K_n,

число ребер $n \cdot (n-1)/2$.

Утверждение: Всякий полный граф является регулярным; обратное же не верно.

Полный граф G(V,E) соответствует универсальному бинарному отношению *E* на множестве вершин *V*