Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 9

2. Специальные задачи линейного программирования

2.1. Целочисленные задачи линейного программирования. Метод Гомори

При решении многих задач линейного программирования на искомые переменные по их физическому смыслу необходимо наложить дополнительные условия целочисленности. Это может быть, когда искомыми величинами являются неделимые объекты.

$$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \le 0 \\ x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_i \ge 0, \textit{целые}, i = 1,2 \end{cases}$$

Решение без учета целочисленности:

$$X^* = (2; 2.5),\ Z_{\max} = 7$$

Если округлить вниз: $X^* = (2; 2)$

Если округлить вверх: $X^* = (2; 3)$

Решение с учетом целочисленности: $X^* = (0; 3),\ Z_{\max}^{ц} = 6$

Методы решения задач целочисленного программирования

- Методы отсечения
- Комбинаторные методы
- Приближенные методы

Методы отсечения

Используется несколько этапов.

1. Задача решается без условия целочисленности. Если полученное в результате решение будет целочисленным, то исходная задача решена. Если нет, то переходим к п.2.
2. К ограничениям задачи, решенной на предыдущем этапе, добавляется еще одно линейное ограничение, обладающее следующими двумя свойствами:
   а) оно должно отсекать найденное оптимальное нецелочисленное решение;
   б) оно не должно отсекать ни одного допустимого целочисленного решения. Такое дополнительное ограничение называется *правильным отсечением*. После этого задача решается с учетом добавленного ограничения. В случае, если решение и этой задачи не будет целочисленным переходим к п.2. И т.д., до получения целочисленного решения.

Комбинаторные методы

Поскольку число допустимых решений задачи целочисленного программирования конечно, то в принципе возможен их полный перебор.

Перебор должен быть направленным. Рассматриваются лишь те из допустимых решений, которые по некоторым признаком оказываются перспективными, с одновременным отбрасыванием бесперспективных.

Методы отсечения и комбинаторные методы позволяют получить точное решение задачи за конечное число шагов. Но даже для не очень больших задач скорость сходимости этих методов оказывается недостаточной.

Приближенные методы

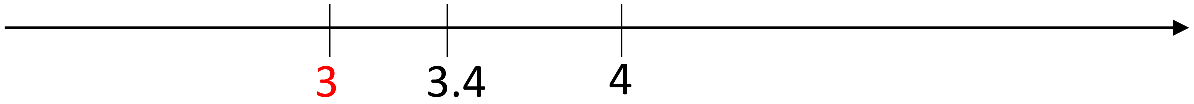
Учитывают специфику конкретной задачи. Эти методы используют как детерминированные алгоритмы, так и алгоритмы случайного поиска. Это позволяет, с одной стороны, упростить поиск решений, а, с другой стороны, ограничивает сферу применения методов.

Метод Гомори является одним из методов отсечения, основан на симплекс-методе и использует достаточно простой способ построения правильного отсечения.

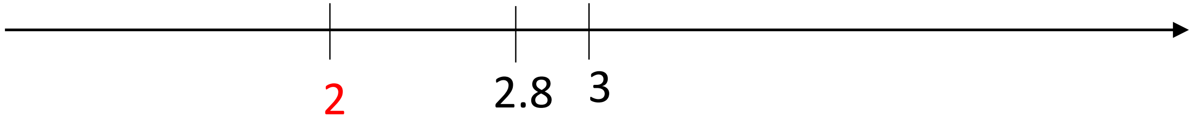
Целой частью числа а (обозначается $[a]$), называется наибольшее целое число, не превосходящее a.

Примеры:

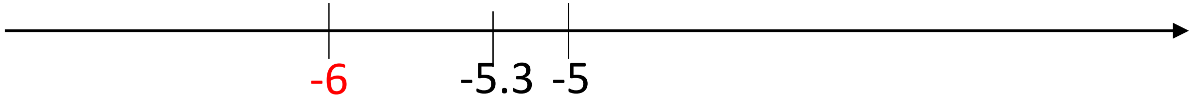
1. [3.4]-?
   [3.4]=3



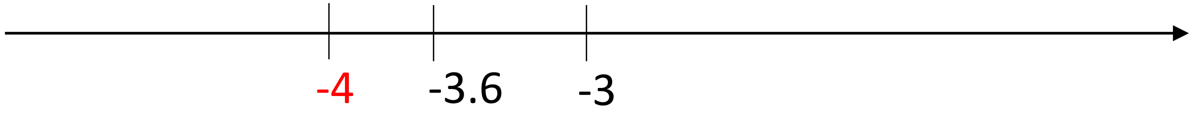
2. [2.8]-?
   [2.8]=2



3. [-5.3]-?
   [-5.3]=-6



4. [-3.6]-?
   [-3.6]=-4

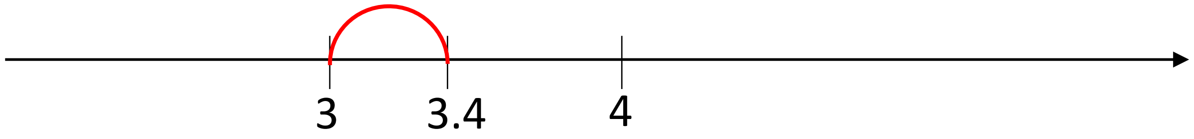


Дробной частью числа а (обозначается $\{a\}$) называется разность между числом a и его целой частью, т.е. $\{a\} = a - [a]$ (расстояние до ближайшего целого, расположенного слева от a).

<u>Примеры:</u>

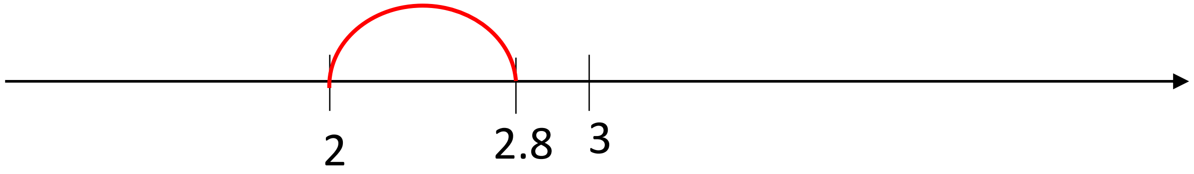
1. $\{3.4\}$-?

   $\{3.4\}=3.4-3=0.4$



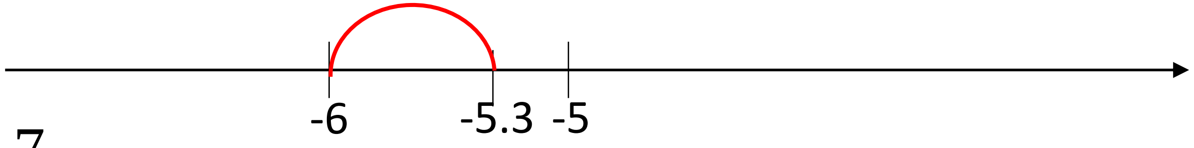
2. $\{2.8\}$-?

   $\{2.8\}=2.8-2=0.8$



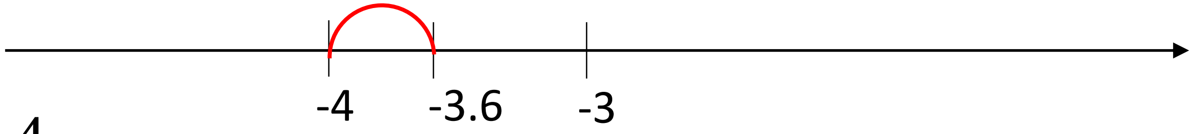
3. $\{-5.3\}$-?

   $\{-5.3\}=-5.3-(-6)=0.7$



4. $\{-3.6\}$-?

   $\{-3.6\}=-3.6-(-4)=0.4$



Алгоритм метода Гомори

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0, \textit{целые} \end{cases}$$

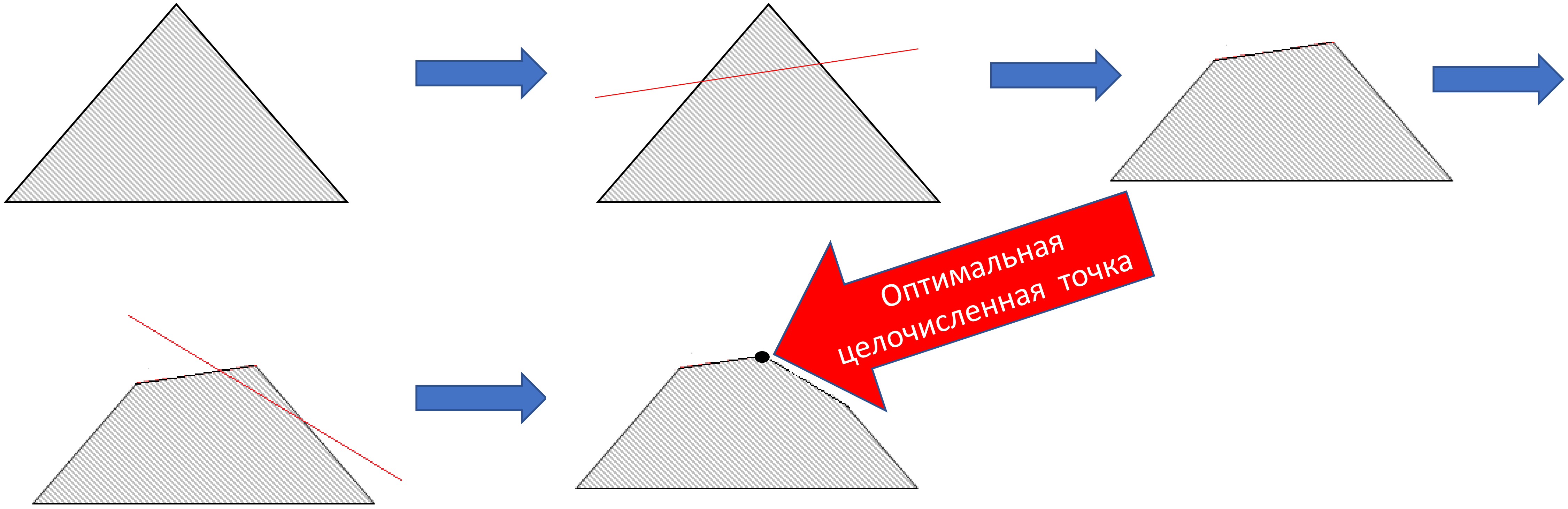
1. Отбросив условие целочисленности, решить задачу симплекс-методом. Если получим целочисленный оптимальный план, то задача решена. Иначе переходим к шагу 2.

2. Для нецелочисленной компоненты решения составить дополнительное ограничение. Пусть для определенности это будет компонента с номером i_0.

$$\left\{a_{i_0 1}\right\} x_1 + \left\{a_{i_0 2}\right\} x_2 + \ldots + \left\{a_{i_0 n}\right\} x_n \geq \left\{b_{i_0}\right\}$$

3. Переходим к равенству $\left\{a_{i_0 1}\right\} x_1 + \left\{a_{i_0 2}\right\} x_2 + \ldots + \left\{a_{i_0 n}\right\} x_n - x_{n+1} = \left\{b_{i_0}\right\}$, выражаем базисную x_{n+1}, добавляем в симплексную таблицу ограничение и решаем двойственным симплекс-методом. В случае получения нецелочисленного решения переходим на п.2.

Интерпретация метода Гомори



Пример 1

$$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 + 3x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0, \textit{целые} \end{cases}$$

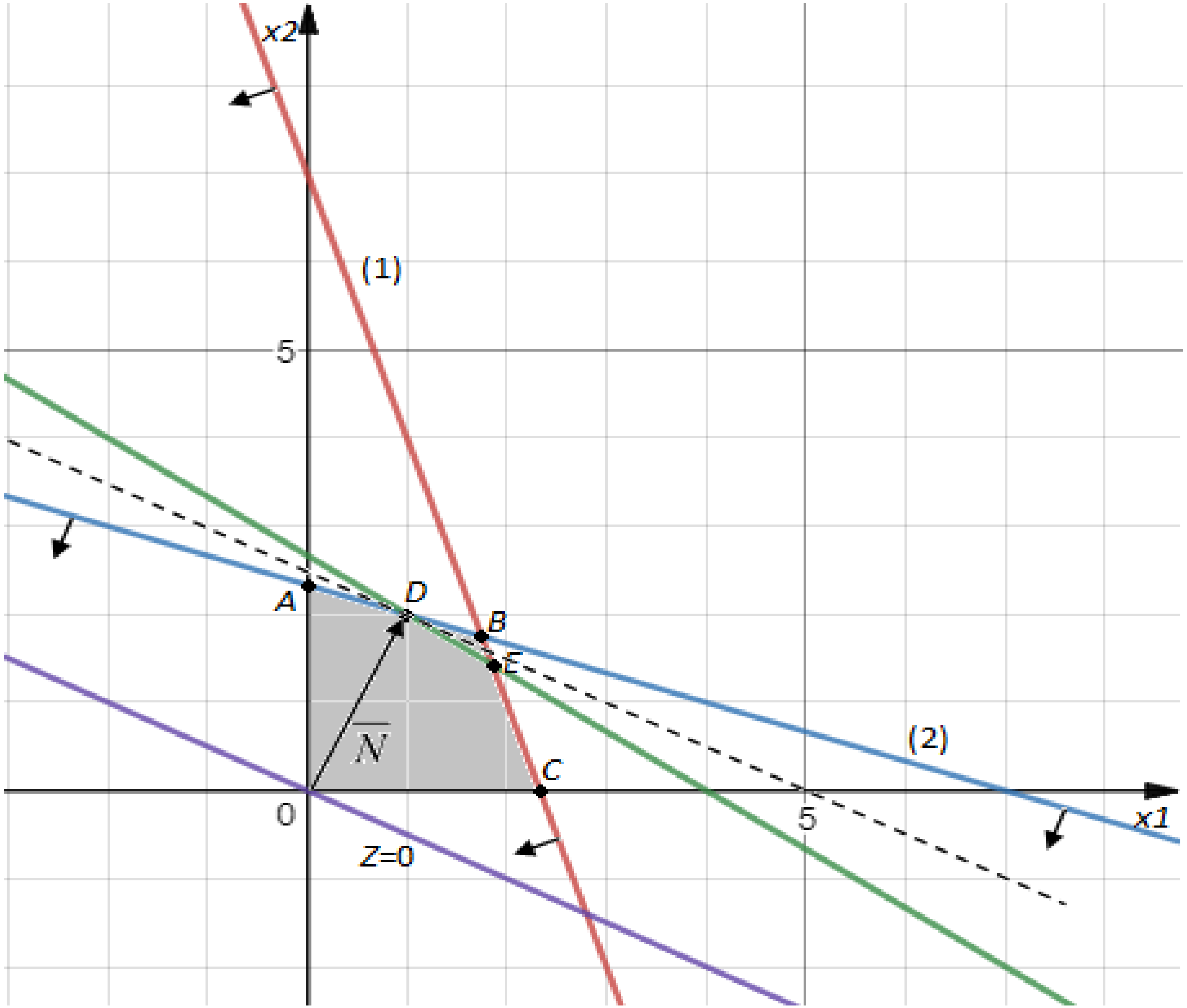
Решение примера 1 –
в файле lecture9.pdf.

Добавленное ограничение:

$$2x_1 + 3x_2 \le 8$$

$X^* = (1;2;2;0)$ соответствует $D(1;2)$

Геометрическая интерпретация метода Гомори



Пример 2

$$Z = 2x_1 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6 \\ 5x_1 - x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0, \textit{целые} \end{cases}$$

Решение примера 2 – в файле lecture9.pdf.

Задача имеет 4 оптимальных целочисленных решения:

$$Z_{\max} = Z(1;0) = Z(1;3) = Z(1;1) = Z(1;2) = 2$$