1. Линейное программирование

1.1. Пример задачи линейного программирования (задача использования сырья)

Пусть на мебельной фабрике могут выпускать стулья и кресла. Сведения о ресурсах, расходе материалов и прибыли от реализации каждого изделия приведены в таблице.

Ресурсы	Запасы	Расход на единицу продукции	
		стул	кресло
Пиломатериалы (м3)	10	0.01	0.03
Ткань (м2)	2000	0.5	2
Рабочее время (ч)	1000	2	5
Прибыль от ед. продукции (у.е.)		10	35

Найти план выпуска продукции, максимизирующий прибыль предприятия.

x_1 - кол-во выпущенных стульев

x_2 - кол-во выпущенных кресел

Математическая модель:

$$\begin{cases} 0{,}01x_1 + 0{,}03x_2 \le 10 \\ 0{,}5x_1 + 2x_2 \le 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 1000 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = 10x_1 + 35x_2 \to max$$

Доказательство теоремы 1:

1) $\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n = \bar{0}$

$\alpha_1(1,0,..0) + \alpha_2(0,1,0,\ldots0) + \ldots + \alpha_n(0,0,\ldots,1) = (0,\ldots0)$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0,\ldots,0)$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n = 0 \Rightarrow \bar{e}_1, \ldots \bar{e}_n$ - л. н.

2) $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1\bar{e}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n$

$\alpha_1 = x_1, \ldots \alpha_n = x_n \Rightarrow \bar{e}_1, \ldots \bar{e}_n$ - базис

Решение примера 3 из п.1.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & -8 & 11 \\ 0 & -7 & -8 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/7 & 6/7 \\ 0 & 1 & 8/7 & -11/7 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim$$

$-3 \to -3 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -7$

$-2 \to -2 - \frac{3 \cdot 2}{1} = -8$

$3 \to 3 - \frac{-4 \cdot 2}{1} = 11$

$1 \to 1 - \frac{2 \cdot 4}{1} = -7$

$4 \to 4 - \frac{3 \cdot 4}{1} = -8$

$-5 \to -5 - \frac{-4 \cdot 4}{1} = 11$

$3 \to 3 - \frac{2 \cdot (-8)}{-7} = -5/7$

$-4 \to -4 - \frac{2 \cdot 11}{-7} = 6/7$

$-8 \to -8 - \frac{-8(-7)}{-7} = 0$

$11 \to 11 - \frac{11(-7)}{-7} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/7 & 6/7 \\ 0 & 1 & 8/7 & -11/7 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2$$

Решение примера из п.1.3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$1 \to 1 - \frac{2 \cdot 1}{1} = -1$

$1 \to 1 - \frac{1 \cdot 1}{1} = 0$

$-4 \to -4 - \frac{-6 \cdot 1}{1} = 2$

$0 \to 0 - \frac{-3 \cdot 1}{1} = 3$

$-3 - \frac{2 \cdot 3}{-1}$

$4 - \frac{2 \cdot (-1)}{-1}$

$6 - \frac{3(-1)}{-1}$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \quad r = 3 < n = 4$$

$$\begin{cases} x_1 - 8x_4 = 6 \\ x_2 - 2x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 + 8x_4 \\ x_2 = -3 + 2x_4 \\ x_3 = -3 + 2x_4 \end{cases}$$ - общее решение

Нахождение всех базисных решений для примера 1 из п.1.4

2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$ x_1, x_2 - не м. б. вместе в базисе

3) $x_1 x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \quad X^2 = (6; 0; 0; 3/2)$$

4) $x_2 x_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \quad X^3 = (0, 3, -3, 0)$$

5) $x_2 x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \quad X^4 = (0, 6, 0, 3/2)$$

6) $x_3 x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & -6 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right) \quad X^5 = (0, 0, -6, -3/2)$$

$3/2 - \frac{6 \cdot (-1/2)}{-1} = -3/2$