

Математическая модель транспортной задачи:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \geq 0, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (2.3)$$

Теорема 1 Условие (2.3) является необходимым и достаточным условием совместности системы (2.2).

Доказательство Теоремы 1:

1) пусть b выполнено (2.3)

Пусть $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum a_i}$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1 \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1 \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n \end{cases} \begin{cases} \frac{a_1 b_1}{\sum b_j} + \frac{a_1 b_2}{\sum b_j} + \dots + \frac{a_1 b_n}{\sum b_j} = a_1 & a_1 \frac{b_1 + \dots + b_n}{\sum b_j} = a_1 \text{ верно} \\ \dots \\ \frac{a_m b_1}{\sum b_j} + \frac{a_m b_2}{\sum b_j} + \dots + \frac{a_m b_n}{\sum b_j} = a_m & a_m \frac{b_1 + \dots + b_n}{\sum b_j} = a_m \text{ верно} \\ \frac{a_1 b_1}{\sum a_i} + \frac{a_2 b_1}{\sum a_i} + \dots + \frac{a_m b_1}{\sum a_i} = b_1 & b_1 \frac{a_1 + \dots + a_m}{\sum a_i} = b_1 \text{ верно} \\ \dots \\ \frac{a_1 b_n}{\sum a_i} + \frac{a_2 b_n}{\sum a_i} + \dots + \frac{a_m b_n}{\sum a_i} = b_n & b_n \frac{a_1 + \dots + a_m}{\sum a_i} = b_n \text{ верно} \end{cases}$$

2) Сложим первые m уравнений

$$\begin{aligned} x_{11} + \dots + x_{1n} + \dots + x_{m1} + \dots + x_{mn} &= a_1 + \dots + a_m = \sum a_i \\ x_{11} + \dots + x_{m1} + \dots + x_{1n} + \dots + x_{mn} &= b_1 + \dots + b_n = \sum b_j \Rightarrow \sum a_i = \sum b_j \end{aligned}$$

Пример 1 Метод северо-западного угла

поставщики	потребители					запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	50 ⁵	- ⁸	- ³	- ¹⁰	- ⁴	50,0
A2	30 ¹⁰	50 ⁷	50 ⁹	- ⁶	- ⁵	130,100,50,0
A3	- ⁷	- ³	10 ⁶	20 ⁴	50 ¹²	80,70,50,0
потребности	80,30,0	50,0	60,10,0	20,0	50,0	260

$$\sum b_j = 80 + 50 + 60 + 20 + 50 = 260$$

$$\sum a_i = 50 + 130 + 80 = 260$$

$$\sum a_i = \sum b_j \Rightarrow \text{можно закрыть}$$

Порядок заполнения таблицы: $A_1 B_1, A_2 B_1, A_2 B_2, A_2 B_3, A_3 B_3, A_3 B_4, A_3 B_5$

$$m+n-1 = 3+5-1 = 7 \text{ заполненных клеток}$$

$$Z = 50 \cdot 5 + 30 \cdot 10 + 50 \cdot 7 + 50 \cdot 9 + 10 \cdot 6 + 20 \cdot 4 + 50 \cdot 12 = 50 \cdot 35 + 300 + 60 + 80 = 1750 + 440 = 2190$$

Пример 2 Метод минимальной стоимости

поставщики	потребители					запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	- ⁵	- ⁸	50 ³	- ¹⁰	- ⁴	50,0
A2	80 ¹⁰	- ⁷	- ⁹	- ⁶	50 ⁵	130,80,0
A3	0 ⁷	50 ³	10 ⁶	20 ⁴	- ¹²	80,30,10,0
потребности	80,0	50,0	60,10,0	20,0	50,0	260

порядок заполнения поставок: $A_1 B_3, A_3 B_2, A_3 B_4, A_2 B_5, A_3 B_3 (+ A_3 B_1), A_2 B_1$

$$m+n-1 = 3+5-1 = 7 \text{ заполненных (вместе с 0)}$$

$$Z = 50 \cdot 3 + 80 \cdot 10 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 10 \cdot 6 + 20 \cdot 4 = 50 \cdot 16 + 800 + 60 + 80 = 800 + 940 = 1740$$

Пример 3 Метод Фогеля

поставщики	потребители					запасы						
	B1	B2	B3	B4	B5							
A1	- ⁵	- ⁸	50 ³	- ¹⁰	- ⁴	50,0	1	1	-	-	-	-
A2	50 ¹⁰	- ⁷	10 ⁹	20 ⁶	50 ⁵	130,80,60,0	1	1	1	③	1	①
A3	30 ⁷	50 ³	- ⁶	- ⁴	- ¹²	80,30,0	1	2	2	2	1	-
потребности	80,50,0	50,0	60,10	20,0	50,0	260						
	2	④	3	2	1							
	2	-	③	2	1							
	3	-	3	2	⑦							
	3	-	3	2	-							
	③	-	3	-	-							
	-	-	-	-	-							

Порядок заполнения: $A_3 B_3, A_1 B_3, A_2 B_5, A_2 B_4, A_3 B_1, A_2 B_3, A_2 B_1$

$$\begin{aligned} Z &= 50 \cdot 3 + 50 \cdot 10 + 10 \cdot 9 + 20 \cdot 6 + 50 \cdot 5 + 30 \cdot 7 + 50 \cdot 3 = 50 \cdot 21 + 90 + 120 + 210 = \\ &= 1050 + 420 = 1470 \end{aligned}$$