Сочетания с повторениями

Определим отношение эквивалентности на множестве размещений с повторениями из n элементов по k:

$(a_1,a_2,\ldots,a_k) \sim (b_1,b_2,\ldots,b_k) \Leftrightarrow \forall c \in M$ число элементов $a_i = c$ совпадает с числом элементов $b_j = c$.

Пример: (1,2,3,2,3) ~ (3,3,2,2,1)

Тогда сочетанием с повторениями из n элементов по k или неупорядоченной выборкой с возвращениями из n элементов по k является множество, которое состоит из элементов, выбранных k раз из множества M, причем один и тот же элемент допускается выбирать повторно.

Пример: M={1,2,3,4,5} сочетания с повторениями из 5 элементов по 2:

(1,1), (1,2)~(2,1), (2,2), (5,2) ~(2,5), и т.п.

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

При рассмотрении выборок с повторениями число ***n*** более наглядно трактуется как количество имеющихся в наличии типов объектов, а **k** – количество непосредственно выбираемых объектов. Раз объекты выбираются с повторениями, неважно, каково их реальное количество для каждого из типов. Можно считать их неисчерпаемыми.

Пример: Сколько существует целых чисел между 0 и 1000, содержащих ровно одну цифру «6»?

2.3 *Биномиальные коэффициенты*

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

число различных *k*-элементных подмножеств *n*-элементного множества

2.3.1 *Свойства биномиальных коэффициентов*

Теорема 2.4

Число C_n^k

обладает следующими свойствами:

1. $$C_n^k = C_n^{n-k}$$

2. $$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

3. $$C_n^k \cdot C_k^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m}$$

Теорема 2.5 (Бином Ньютона)

При любых x, y $\in$ *R* $\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k}$

Доказывается индукцией по n.

Следствие 1.

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

Следствие 2.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k = 0$$

Теорема 2.6

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = k2^{n-1}$$

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}$$

2.3.2 *Треугольник Паскаля*

Из второй формулы теоремы 2.4 следует удобный способ рекуррентного вычисления значений биномиальных коэффициентов, который можно представить в графической форме, известной как треугольник Паскаля.

В этом равнобедренном треугольнике каждое число (кроме боковых единиц) является суммой двух стоящих над ним чисел. Тогда число сочетаний $C(n,k)$ находится в ($n+1$) ряду на ($k+1$) месте.

0							1							
1						1		1						
2					1		2		1					
3				1		3		3		1				
4			1		4		6		4		1			
5		1		5		10		10		5		1		
6	1		6		15		20		15		6		1	