1. Определители 2 и 3 порядков и их вычисление. Миноры и алгебраические дополнения.

Квадратная таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

составленная из четырех действительных или комплексных чисел называется квадратной матрицей 2-го порядка. Определителем 2-го порядка, соответствующим матрице A (или просто определителем матрицы A) называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Аналогично если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица 3-го порядка, то соответсвующим ей определителем 3-го порядка называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Пример

Задание. Найти минор M_{23} к элементу a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычеркиваем в заданном определителе вторую строку и третий столбец:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{-1} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 7 & 8 & \cancel{4} \end{vmatrix}$$

тогда $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

Ответ. $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Пример

Задание. Найти алгебраическое дополнение A_{23} к элементу a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

Ответ. $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

2. Основные свойства определителей.

1) $\det 0 = 0$ 2) $\det E = 1$ 3) $\det A^T = \det A$

4) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ 5) $\det AB = \det A \cdot \det B$

6) При добавлении к любой строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов) определитель не изменится:

$a_i + \lambda_j a_j$, где λ_j - некоторое число, a_i, a_j - строки матрицы

7) Если две строки (столбца) совпадают, то определитель равен нулю.

8) Если переставить две строки (столбца), то определитель меняет знак .

9) Если хотя бы один ряд нулевой, то определитель равен нулю.

10) Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

3. Разложение определителя по строке (столбцу).

Допустим, нам задана квадратная матрица n-го порядка, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычислить определитель этой матрицы можно, разложив его по строке или по столбцу.

Зафиксируем некоторую строку, номер которой равен i. Тогда определитель матрицы $A_{n\times n}$ можно разложить по выбранной i-й строке, используя следующую формулу:

$$\Delta A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

A_{ij} обозначает алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Определитель равен сумме произведений элементов строки определителя на их алгебраические дополнения. Обычно выбирают ту строку/столбец, в которой/ом есть нули. Строку или столбец, по которой/ому ведется разложение, будет обозначать стрелкой.

Пример

Задание. Разложив по первой строке, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \\ \end{matrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$

$1\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3+12-9 = 0$

Ответ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

4. Формулы Крамера решения системы линейных уравнений.

Теорема

Теорема Крамера. Если определитель матрицы квадратной системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ - определитель матрицы системы, Δ_i - определитель матрицы системы, где вместо i -го столбца стоит столбец правых частей.

Замечание

Если определитель системы равен нулю, то система может быть как совместной, так и несовместной.

Пусть Δ -определитель матрицы A системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$$

$$\Delta = detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а $\Delta_i (j=1,2,\dots)$ - определители матрицы A, полученные путем замены j-го столбца на столбец свободных членов. Тогда:

- если $\Delta \neq 0,$ то решение системы единственное в виде

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

- если $\Delta = 0,$ а хотя бы один из определителей переменных от нуля отличен, то система несовместна (решений нет);

- если $\Delta = 0, \Delta_1 = 0, \dots, \Delta_i = 0,$ то система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Задание. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ при помощи метода Крамера.

Решение. Вычисляем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система совместна и имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители. Определитель Δ_1 получим из определителя Δ заменой его первого столбца столбцом свободных коэффициентов. Будем иметь:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 18 = -11$$

Аналогично, определитель Δ_2 получается из определителя матрицы системы Δ заменой второго столбца столбцом свободных коэффициентов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 14 = 31$$

Тогда получаем, что

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{1} = -11, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{31}{1} = 31$$

Ответ. $x_1 = -11, x_2 = 31$

5. Матрицы. Основные виды матриц. Линейные операции над матрицами и их свойства.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая *m* строк одинаковой длины.

Виды:

Матрица, у которой число строк и столбцов равно – называется **квадратной**.

Матрица, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали равны нулю, называется **диагональной**.

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется **единичной**. Обозначается буквой Е.

Матрица, у которой все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю, называется **треугольной**.

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется **нулевой**.

Линейные операции:

1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

3) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$

4) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$

5) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$

6) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

7) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

8) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

6. Произведение матриц и его свойства.

Произведение матрицы $\boldsymbol{A}$ на матрицу $\boldsymbol{B}$ определено только в том случае, когда число столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ равно числу строк матрицы $\boldsymbol{B}$. В результате умножения получим матрицу C , у которой столько же строк, как у матрицы A , и столько же столбцов, как у матрицы B .

По определению элемент c_{ij} матрицы C равен сумме парных произведений элементов i - *ой* строки матрицы A , на соответствующие элементы j - *го* столбца матрицы B .

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{im} \cdot b_{mk} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} \cdot b_{sk}$$

1) $(A \cdot B) \cdot k = (A \cdot k) \cdot B = A \cdot (B \cdot k)$, где k -число;

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

4) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

7. Обратная матрица, ее вычисление и свойства.

Обратной матрицей, к квадратной матрице **A** называется такая матрица A^{-1} для которой справедливо равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

1 способ:

Для существования обратной матрицы A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, то есть, чтобы $\det A \neq 0$. Пусть задана квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, тогда обратную к ней матрицу A^{-1} можно вычислить по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

2 способ:

Если справа к квадратной матрице дописать единичную матрицу того же порядка и с помощью элементарных преобразований над строками преобразовать полученную матрицу так, чтобы начальная матрица стала единичной, то матрица полученная из единичной будет обратной матрицей к исходной.

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Свойства:

1) Обратная бывает у квадратных, и то не у всех. $A, A^{-1} - n \times n$

2) Обратная к обратной равна исходной. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

3) Обратная к транспонированной равна транспонированной обратной. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

4) Обратная произведения равна произведению обратных в обратном порядке. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5) Обратная к умноженной на число равна обратной, разделенной на это число $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

8. Матричные уравнения. Решение систем уравнений с помощью обратной матрицы.

Матричные уравнения – уравнения, где неизвестной является матрица.

AX = b (матричное уравнение), где A – матрица, x – решение, b – столбец свободных членов.

X = A^{-1} * b, где A^{-1}- обратная матрица

Замечание С помощью данного метода можно находить решение только для квадратных СЛАУ.

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Запишем заданную систему в матричном виде:

$$AX = B$$

Если матрица A невырождена, то тогда с помощью операций над матрицами выразим неизвестную матрицу X . Операция деления на множестве матриц заменена умножением на обратную матрицу, поэтому домножим последнее равенство на матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow$$
$$X = A^{-1}B$$

Поэтому, чтобы найти неизвестную матрицу X надо найти обратную матрицу к матрице системы и умножить ее справа на вектор-столбец свободных коэффициентов.

Пример

Задание. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ матричным методом.

Решение. Выпишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицу правых частей $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу для матрицы системы. Для матрицы второго порядка обратную можно находить по следующему алгоритму: 1) матрица должна быть невырождена, то есть ее определитель не должен равняться нулю: $|A| = 1$; 2) элементы, стоящие на главной диагонали меняем местами, а у элементов побочной диагонали меняем знак на противоположный и делим полученные элементы на определитель матрицы. Итак, получаем, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Две матрицы одного размера равны, если равны их соответствующие элементы, то есть в итоге имеем, что $x_1 = -11$, $x_2 = 31$

Ответ. $x_1 = -11$, $x_2 = 31$