1.3.5 Отношение порядка

Бинарное отношение R на множестве A называется *отношением порядка*, если оно антисимметрично и транзитивно.

Отношение порядка может быть рефлексивным, и тогда оно называется отношением *нестрогого порядка*

обозначается $\leq$

Если отношение порядка антирефлексивно, то оно называется отношением *строгого порядка* и обозначается обычно $<$.

вместо aRb или $(a,b) \in R$ пишут $a<b$. Для отношения $<$ обратным является $>$.

Отношение порядка может быть полным (линейным), и тогда оно называется отношением линейного порядка, а множество – вполне упорядоченным.

Если отношение порядка не обладает свойством полноты, то оно называется отношением *частичного порядка*, а множество с заданным на нем отношением частичного порядка называется *частично упорядоченным множеством*.

Пусть дано ч.у.м. M с отношением порядка $\leq$: ũ$=\{M,\leq\}$. Тогда:

Элемент a ч.у.м. Ũ называется *максимальным*, если $\forall y \in M \mid a \leq y \Rightarrow a = y$; (во всем множестве нет элемента, большего чем a).

Элемент a называется *минимальным*, если

$\forall y \in M \mid y \leq a \Rightarrow a = y$ (во всем множестве нет элемента меньшего чем a).

Элемент b ч.у.м. Ũ называется *наибольшим*, если $x \leq b\ \forall x \in M$ (т.е. любой другой элемент множества меньше либо равен b).

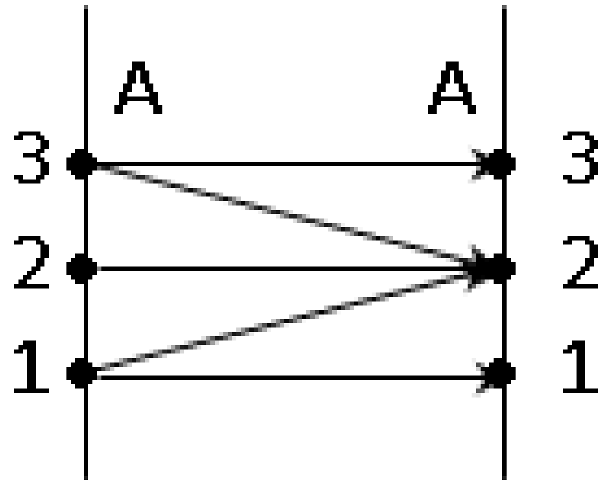
Элемент b называется *наименьшим*, если $b \leq x$ $\forall x \in M$ (т.е. любой другой элемент множества больше либо равен b).

Всякий наибольший элемент, если он существует, является максимальным, а всякий наименьший – минимальным.

Наибольший (наименьший) элемент ч.у.м. ũ обычно обозначают max ũ (min ũ).

Наибольший элемент обычно называют *единицей*, а наименьший – *нулем* множества *M*.

Пусть ч.у.м. A содержит три элемента, условно обозначенные 1, 2 и 3



Отношение порядка задано парами: $1 \leq 1$, $1 \leq 2$, $2 \leq 2$, $3 \leq 2$, $3 \leq 3$

2- наибольший элемент

1, 3 – минимальные элементы

Для ч.у.м. М с отношением порядка $\leq$ и подмножеством $A \subseteq M$ элемент $a \in M$ называется *верхней гранью множества* A, если $\forall x \in A$ $x \leq a$.

Элемент $a \in M$ называется *наименьшей верхней гранью* множества А и обозначается **sup A**, если a является верхней гранью и для любого другого элемента a', являющегося верхней гранью, верно $a \leq a'$.

Наибольший элемент множества А является **sup** А.

Аналогично, элемент $b \in$ M называется *нижней гранью множества* A, если $\forall y \in$ A $b \le y$.

Элемент $b \in$ M называется *наибольшей нижней гранью* множества A и обозначается **inf A**, если b является нижней гранью и для любого другого элемента b', являющегося нижней гранью, верно $b' \le b$.

Наименьший элемент множества A является **inf** A.

Пусть А – вполне упорядоченное множество с отношением порядка $\le$.

$(a_1, \ldots, a_m) \le (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow$
$m \le n$ и $\forall i = 1,..,m \;\; a_i = b_i$ или

$\exists\, k \le \min(n,m) \mid a_k \le b_k$ и $a_i = b_i \;\forall i < k$.

Такое отношение называется *лексикографическим*, или *алфавитным* порядком.

Пример:

$(2,4,5) \le (2,4,5,2)$

$(2,4,3,2,1) \le (2,4,5,2)$

1.4 Функции

1.4.1 Определение функций

Отношение $f \subseteq A \times B$ называется *функцией* из A в B ($f : A \to B$), если:

а) $\forall x \in A \ \ \exists y \in B \mid (x,y) \in f$;

б) если $(x, y) \in f$ и $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$.

$(x,y) \in f \qquad y = f(x)$.

При этом x называется *аргументом*, а y – *значением функции* f.

Для $f : A \to B$

область определения

$Dom(f) \equiv \{x \in A \mid \exists\ y \in B \mid y = f(x)\}$,

область значений

$Codom(f) \equiv \{y \in B \mid \exists\ x \in A \mid y = f(x)\}$.

Для $f : A \to B$ и $x \in A$:

если $y = f(x)$, то y называется *образом элемента* x, а x – *прообразом элемента* y.

Функция $f: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ называется функцией n аргументов, или *n-местной* функцией.

1.4.2 Классификация функций

Отображение $f : A \to B$ называется

инъективным (инъекцией),

если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (любым различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции)

сюръективным, сюръекцией, или *отображением **на***, если $\forall y \in B \; \exists \, x \in A \mid f(x) = y$;

биективным, биекцией, или *взаимно однозначным соответствием*, если оно является одновременно инъекцией и сюръекцией;

перестановкой множества A, если $A = B$ и функция $f : A \to A$ является взаимно однозначным соответствием

Если функция $I : A \to A$ определена как $I(a)=a$ $\forall a \in A$, то I называется *тождественной функцией* на множестве A.

Множество называется *счетным*, если его элементы можно пронумеровать, т.е. если существует взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и множеством натуральных чисел.

f^{-1} может не быть функцией, даже если f является функцией из A в B.

Если f^{-1} является функцией, то ее называют *обращением функции*, или *обратной функцией*.

Теорема 1.3 (об обратной функции):

Если функция $f : A \to B$ является биекцией, то обратное отношение f^{-1} также является функцией из B в A, причем биекцией. Обратно, если f^{-1} – функция из B в A, то f является биекцией.

Теорема 1.4:

Если функция $f : A \to B$ является биекцией, то:

а) $\forall b \in B \quad f(f^{-1}(b))=b$,

б) $\forall a \in A \quad f^{-1}(f(a))=a$.

<u>Теорема 1.5</u>:

Если функция $f : A \to A$ и $\mathbb{I}$ – тождественная функция на A, то $\mathbb{I} \circ f = f \circ \mathbb{I} = f$. Если для f существует обратная функция, то $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathbb{I}$.

<u>Теорема 1.6:</u> Пусть функции $g : A \to B$ и $f : B \to C$. Тогда:

Если g и f – инъекции, то их композиция – инъекция;

Если g и f – сюръекции, то их композиция – сюръекция;

Если g и f –биекции, то их композиция – биекция;

1.4.3 Некоторые специальные функции

1) Перестановка

2) Тождественная функция

3) Пусть задано некоторое множество $M \subset U$. *Характеристической функцией* этого множества является функция X, равная 1 на элементах множества M:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in M \\ 0, & \text{если} \quad x \notin M \end{cases}$$

4) Бинарной операцией на множестве A называется функция $b : A\times A \to A$. Образ пары (x,y) при отображении b записывается как $b(x,y)$ или как xby.

5) Конечной последовательностью называется функция из {1, 2, 3, …, n} в некоторое множество S.

6) Бесконечной последовательностью называется функция из {1, 2, 3, …} в некоторое множество S.

Принцип математической индукции

состоит в следующем:

Если некоторое свойство *P* выполняется на элементе 0, и для любого $n \in \mathbf{N}$ из выполнимости *P* на элементе *n* следует его выполнимость на элементе n+1, то свойство *P* выполняется на любом элементе $n \in \mathbf{N}$.

$\forall P\ ((P(0), \forall n \in N\ P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in N\ P(n)).$

Шаги:

1. База (базис) индукции. Проверяется выполнение P(0).

2. Индукционный переход. Предполагается, что выполнено P(n). Показывается, что тогда выполнено и P(n+1): $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.