1.3.2 Отношения

n-местным отношением R или *n-местным предикатом R* на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называется любое подмножество прямого произведения $A_1 \times \ldots \times A_n$:

$R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x_i \in A_i \; \forall i = 1, 2, \ldots, n$ *связаны отношением R* тогда и только тогда, когда упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in R$.

При $n = 1$ отношение $R \subseteq A$ и называется *унарным отношением* или *свойством*.

При $n = 2$, $R \subseteq A \times B$, *и* называется *бинарным отношением* R из множества A в множество B, или *соответствием*.

Запись: $(a,b) \in R$ *или* aRb

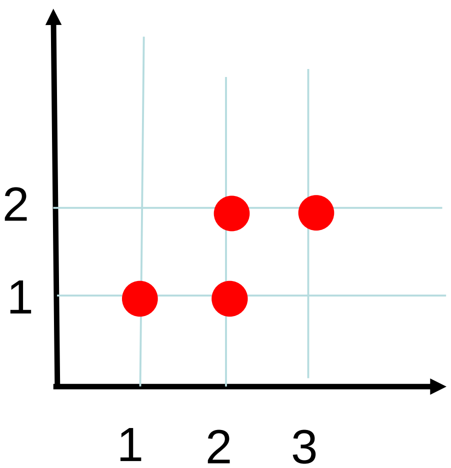
Если $R \subseteq A \times A$, то R называется *бинарным отношением на множестве* A.

Отношение $R \subseteq A^n$ называется *n-местным предикатом на множестве* A.

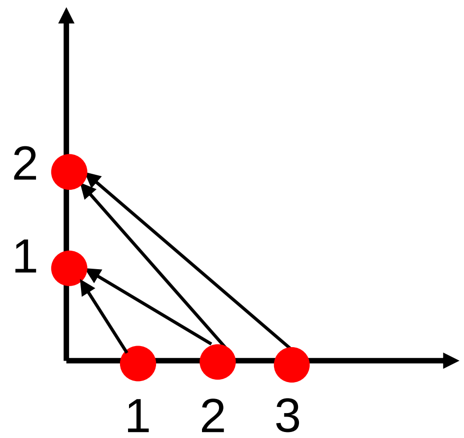
Способы описания бинарного отношения - такие же, как для множеств.

Варианты графического представления:

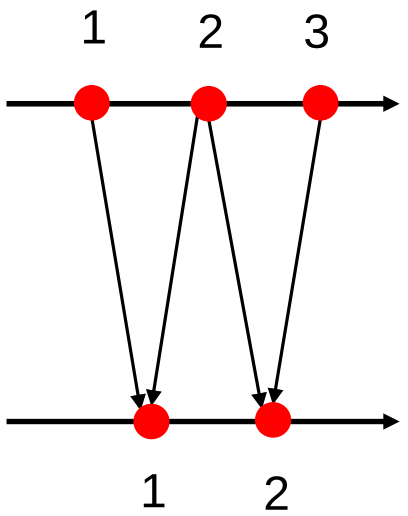
Пример: R={(1,1),(2,1),(2,2),(3,2)}



Вариант 1



Вариант 2



Вариант 3

$R \subseteq A \times A,\ \ a,b \in A$

Обратное отношение: $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

Дополнение отношения: $\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\}$

Тождественное отношение: $I = \{(a,a) \mid a \in A\}$

Универсальное (или полное) отношение:
$U_A = \{(a,b) \mid a \in A$ и $b \in A\}$

область определения $\delta_R = \{x \mid (x,y) \in R$ для некоторого $y\}$,

и *множество значений* $\rho_R = \{y \mid (x,y) \in R$ для некоторого $x\}$.

Пусть имеются множества A, B, C и отношения $R_1 \subseteq A\times B$, $R_2 \subseteq B\times C$.

Определим отношение $R \subseteq A\times C$ следующим образом:

$R = R_2 \circ R_1 = \{(x,y) \mid \exists\ z \in B,\ (x,z) \in R_1,\ (z,y) \in R_2\}$

Такое отношение называется *составным* (*композицией*), или *произведением отношений*

Внимание! В разных источниках обозначения могут отличаться:

$\{(x,y) \mid \exists\ z \in B,\ (x,z) \in R_1,\ (z,y) \in R_2\} = R_1 \circ R_2$

1.3.3 Свойства отношений

<u>Теорема 1.1</u>: *Для любых бинарных отношений P, Q, R выполняются следующие свойства:*

1. $(P^{-1})^{-1}=P$;
2. $(P \circ Q)^{-1}= Q^{-1} \circ P^{-1}$;
3. $(P \circ Q) \circ R=P \circ (Q \circ R)$ *(ассоциативность композиции)*

Желающие доказать теорему могут это сделать и получить 5 баллов

Пусть $R \subseteq A \times A$

1. Отношение называется *рефлексивным*, если $\forall a \in A \quad aRa$.
2. Отношение называется *антирефлексивным*, если $\forall\, a,b \quad aRb \Rightarrow a \neq b$.
3. Отношение называется *симметричным*, если $\forall\, a, b \in A \quad aRb \Rightarrow bRa$.
4. Отношение называется *антисимметричным*, если $\forall\, a, b \in A \quad aRb$ и $bRa \Rightarrow a = b$.
5. Отношение называется *транзитивным*, если $\forall\, a, b, c \in A \quad (aRb$ и $bRc) \Rightarrow aRc$.
6. Отношение называется *полным (линейным)*, если $\forall\, a, b \in A \mid a \neq b \Rightarrow aRb$ или bRa.

Другое определение антисимметричности:
  Отношение антисимметрично, если одновременно aRb и bRa невозможно при $a \neq b$

Теорема 1.2 (о проверке свойств отношения):

Отношение R на множестве A^2:

1. R рефлексивно $\Leftrightarrow I \subseteq R$;
2. R симметрично $\Leftrightarrow R = R^{-1}$;
3. R транзитивно $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$;
4. R антисимметрично $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I$;
5. R полно $\Leftrightarrow R \cup I \cup R^{-1} = U$;

доказательство теоремы – 10 баллов

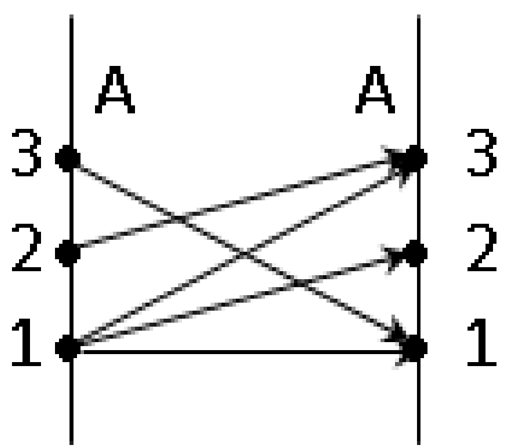
Матричный способ представления отношений

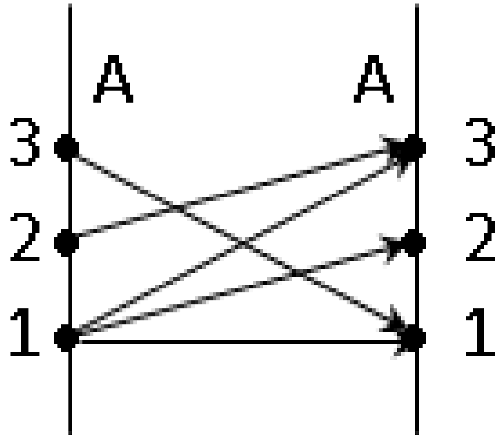
$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $P \subseteq A \times B$.

Определим матрицу $[P] = (p_{ij})$ бинарного отношения P по следующему правилу:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, b_j) \in P, \\ 0, & \text{если } (a_i, b_j) \notin P. \end{cases}$$

Пример: $P \subseteq A^2$, где $A=\{1,2,3\}$





$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Основные свойства матриц бинарных отношений:

1. Если бинарные отношения $P, Q \subseteq A \times B$,

$[P] = (p_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$, то

$[P \cup Q] = (p_{ij} + q_{ij})$, $[P \cap Q] = (p_{ij} \cdot q_{ij})$,

где умножение осуществляется обычным образом, а сложение – по логическим формулам (т.е. 0+0=0, во всех остальных случаях 1).

$[P \cup Q] = [P]+[Q]$, $[P \cap Q] = [P]*[Q]$.

2. Если бинарные отношения $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$, то $[Q \circ P] = [Q] \cdot [P]$,

где умножение матриц [P] и [Q] осуществляется по обычному правилу, а произведение и сумма элементов из [P] и [Q] – по правилам пункта 1.

3. Матрица обратного отношения P^{-1} равна транспонированной матрице отношения P:

$[P^{-1}] = [P]^{\mathrm{T}}$.

4. Если $P \subseteq Q$, $[P] = (p_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$,

то $p_{ij} \le q_{ij}$. $\forall i,j$.

5. Матрица тождественного отношения единична:

$[I_A] = (I_{ij}) : \; I_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$.

6. Пусть R – бинарное отношение на A^2. Отношение R является рефлексивным, если $\forall x \in A\ (x,x) \in R$, т.е. $I_A \in R$ (на главной диагонали R стоят единицы).

Отношение R является *симметричным*, если $\forall x,y \in A$ $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$, т.е. $R^{-1}=R$, или $[R]=[R]^T$ (матрица симметрична относительно главной диагонали).

Отношение R является *антисимметричным*, если $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$, т.е. в матрице $[R \cap R^{-1}]=[R]*[R]^T$ вне главной диагонали все элементы равны 0.

Отношение R является *транзитивным*, если $(x,y) \in R$, $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$, т.е. $R \circ R \subseteq R$.

Пример: $P \subseteq A^2$, где A={1,2,3}

$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) не рефлексивно

2) не симметрично

3) $[P \cap P^{-1}] = [P]*[P]^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Антисимметрично

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Транзитивно

1.3.4 Отношение эквивалентности

Бинарное отношение R на множестве A называется *отношением эквивалентности*, если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

$\equiv$ или $\sim$

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A.

Определим *класс эквивалентности* $[x]$ для $x \in A$: $[x] = \{y \mid xRy\}$, т.е. это множество всех элементов A, которые R-эквивалентны x.

Утверждение 1.1.

Всякое отношение эквивалентности на множестве M определяет разбиение множества M, причем среди элементов разбиения нет пустых;

и обратно: всякое разбиение множества M, не содержащее пустых элементов, определяет отношение эквивалентности на множестве M

Пусть E – эквивалентность на множестве M. Тогда семейство классов эквивалентности множества M называется *фактормножеством* множества M по отношению E

$M/E = \{E(x) \mid x \in M\}$.