Методические указания к лекционному занятию

Изучите лекционный материал.

Лекция 7

Аналитическое представление и оценка случайных погрешностей

Предполагается, что абсолютная погрешность результата измерений $\Delta = \Delta_c + \overset{\circ}{\Delta}$**.** является только случайной, т.е. $\Delta = \overset{\circ}{\Delta}$ - и обозначается как Δ.

Аналитически случайная погрешность измерений описывается и оценивается с помощью аппарата теории вероятностей и математической статистики. При такой оценке обычно интересуются вероятностью *P* того, что погрешность результата измерений *A* находится в некотором *заданном интервале распределения погрешностей* ($\Delta_{г1}$ $\Delta_{г2}$), где $\Delta_{г1}$ и $\Delta_{г2}$ — соответственно *нижняя* и *верхняя границы* интервала. Записывается данная вероятность как $P(\Delta_{г1} \leq \Delta \leq \Delta_{г2})$ и из математики известно, что в общем случае $0 \leq P \leq 1$. Если вероятность $P = 0{,}6$ и выполнено, например, сто измерений, то можно считать, что шестьдесят значений *A* попадают в интервал ($\Delta_{г1}$,$\Delta_{г2}$).

Для определения значения вероятности $P(\Delta_{г1} \leq \Delta \leq \Delta_{г12})$ необходимо знать *закон p(A) распределения случайной погрешности A*, называемый *плотностью распределения вероятностей* (или *плотностью вероятностей) случайной погрешности A*. При известном законе распределения *p(A)* искомая вероятность определяется по формуле

$$P(\Delta_{\Gamma 1} \leq \Delta \leq \Delta_{\Gamma 2}) = \int^{\Delta_{\Gamma 2}} \rho(\Delta) d\Delta. \qquad 1$$

Из физических представлений следует, что вероятность нахождения погрешности *А* на интервале всех возможных погрешностей измерений, т.е. в общем случае на интервале (- оо, оо):

$$P(-\infty \leq \Delta \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\Delta) d\Delta = 1. \qquad 2$$

Выражение (2) называется *условием нормирования плотности распределения вероятностей р(А).* Оно означает, что площадь под графиком любой функции *р(Δ)* на интервале всех ее значений должна быть равна единице.

В практике измерений наиболее часто используются нормальный (Гаусса), равномерный и треугольный (Симпсона) законы распределения погрешностей, а также закон распределения Стьюдента.

Нормальный закон распределения погрешностей. Этот закон применяется при следующих предположениях:

- погрешность *А* может принимать непрерывный ряд значений в интервале ± ∞;

- при выполнении значительного числа измерений большие погрешности *А* появляются реже, чем малые, а частота появления погрешностей, идентичных по абсолютной величине и противоположных по знаку, одинакова.

Для нормального закона распределения

$$\rho(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\Delta^2}{2\sigma^2}\right), \qquad 3$$

случайных погрешностей *А* относительно центра их распределения, т.е. в данном случае относительно значения *А* = 0, уменьшается.

Широкое применение в практической метрологии нормального закона распределения объясняется центральной предельной теоремой теории вероятностей (теоремой Ляпунова), утверждающей, что распределение случайных погрешностей будет близко к нормальному во всех случаях, когда результаты наблюдений формируются под влиянием большого числа независимо действующих факторов, каждый из которых оказывает лишь незначительное действие по сравнению с суммарным действием всех остальных.

В теории вероятностей часто используется такой параметр, как *дисперсия D,* характеризующая рассеяние погрешностей относительно центра распределения. Причем среднеквадратическое отклонение и дисперсия связаны известной в математической статистике формулой *a = V^2* .

При нормальном законе распределения погрешностей измерения выражение для расчета вероятности $P(\Delta_{г1} < \Delta < \Delta_{г2})$ находится подстановкой (3) в формулу (1). Для случая симметричного интервала ($-\Delta_{г1}$, $\Delta_{г1}$; $|-\Delta_{г1}| = \Delta_{г1}$

Отметим геометрическую интерпретацию вероятности, определяемой по (4).

$$P(-\Delta_{г1} \le \Delta \le \Delta_{г1}) = 2\int_0^{\Delta_{г1}} \rho(\Delta)d\Delta = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\Delta_{г1}} \exp\left(\frac{-\Delta^2}{2\sigma^2}\right)d\Delta. \qquad 4$$

На графике плотности вероятности для конкретного *СКО* σ (1) вероятность численно равна площади *S* заштрихованной фигуры, ограниченной функцией $\rho(\Delta)$, отрезком оси Δ от $-\Delta_{г1}$ до $\Delta_{г1}$ и ординатами $p(-\Delta_{г1})$, $p(\Delta_{г1})$- Чем шире заданный интервал погрешностей $(-\Delta_{г1}\ \Delta_{г1})$, тем больше площадь *S,* т.е. больше вероятность попадания случайных погрешностей измерений *А* в этот интервал. Для интервала (-∞, ∞) вероятность $P(-\infty < \Delta < \infty) = 1$.

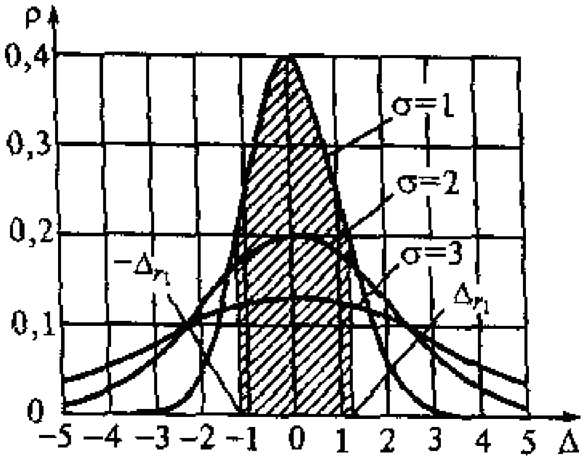

Рис.1. Графики нормального закона распределения плотности вероятности случайных погрешностей

Для вычисления вероятности (4) удобно в интеграле заменить переменную А на относительную $t = \Delta/\sigma$. При этом его верхний предел заменяется на $z = \Delta_{\text{г}1}/\sigma$, а правая часть выражения (4) преобразуется в табулированный *интеграл вероятностей Ф(z),* график которого показан на рис.2, а значения интеграла приведены в табл.1. В результате формула (4) приобретает вид (5):

$$P(-\Delta_{\text{г}1} \le \Delta \le \Delta_{\text{г}1}) = \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt \qquad 5$$

где *σ — среднеквадратическое отклонение (СКО) погрешности Δ,* характеризующее точность выполненных измерений (чем меньше *σ,* тем выше точность). Это следует из графиков функции (3), приведенных на рис. 1 для различных значений *σ*.

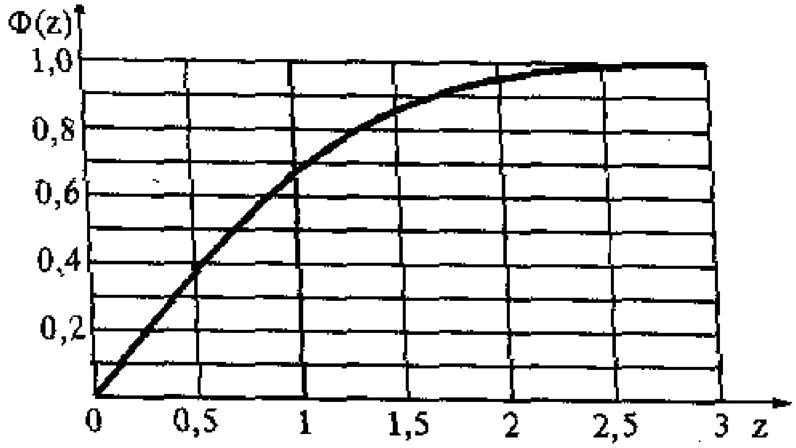

Рис.2. График значений функции *Φ(z) для* $z \geq 0$

Таблица 1 Значение интеграла вероятностей *Φ(z)*

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,000	0,70	0,516	1,40	0,839	2,25	0,976
0,10	0,080	0,80	0,576	1,50	0,866	2,50	0,988
0,20	0,159	0,90	0,632	1,60	0,890	2,75	0,9940
0,30	0,236	1,00	0,683	1,70	0,911	3,00	0,99730
0,40	0,311	1,10	0,729	1,80	0,928	3,30	0,99903
0,50	0,383	1,20	0,770	1,90	0,943	3,50	0,99953
0,60	0,452	1,30	0,806	2,00	0,955	4,00	0,99994

Задаваясь границей $\Delta_{г1}$ в долях σ, находят $z = \Delta_{г1}/\sigma$, а затем искомую вероятность по таблицам функции *Φ(г).* При необходимости можно выполнить обратный поиск, т.е. по заданной вероятности *Φ(г)* определить z, далее $\Delta_{г1} = z\sigma$ и интервал ($-\Delta_{г1}$, $\Delta_{г1}$).

Ниже приведены значения интеграла вероятности (5)

$$P(-2\sigma/3 \leq \Delta \leq 2\sigma/3) = 0{,}5; \quad P(-\sigma \leq \Delta \leq \sigma) = 0{,}683;$$

для некоторых, применяемых на практике, интервалов ($-\Delta_{г1}, \Delta_{г1}$), представленных в долях σ:

$$P(-3\sigma \leq \Delta \leq 3\sigma) = 0{,}997; \quad P(-\infty \leq \Delta \leq +\infty) = 1. \qquad 6$$

В соответствии со значениями этих вероятностей погрешность результатов измерений, равная (2/3)σ названа *равновероятной* (поскольку P = 0,5). При этом вероятность того, что погрешность не превысит величину a, равна 0,683. Погрешность, равная 3σ, принята в радиотехнике за *максимальную* и записывается в виде M_o = 3σ. Отметим, что при максимальной вероятности из тысячи выполненных измерений только три их погрешности Δ выходят за пределы интервала (-3σ, 3σ), а вероятность того, что погрешность не превысит величину 3σ, равна 0,997.

Нормальный закон распределения, представленный в зависимости от относительного аргумента $t = \Delta/\sigma$, называется *нормированным* (иногда употребляется определение *стандартный) нормальным законом* и задается выражением (7)

$$\rho_н(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right). \qquad 7$$

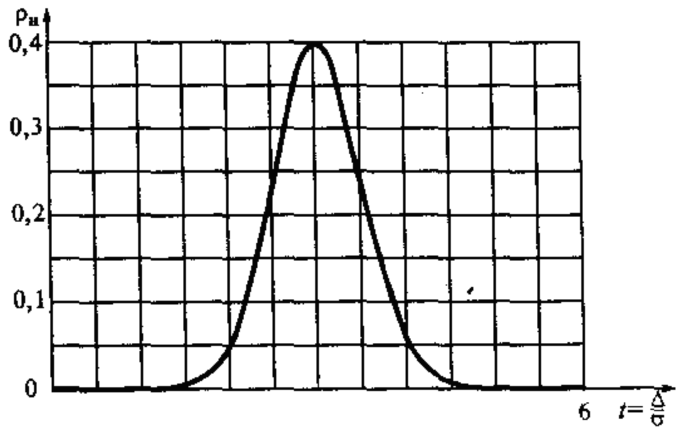

Рис.3. График нормированного нормального закона $p_н(/)$

График функции нормированного нормального закона распределения погрешностей (7) приведен на рис. 3. Следует отметить, что график функции нормированного нормального закона совпадает при $t = \Delta$ *с* графиком нормального закона (3) для СКО $\sigma = 1$ (см. рис.1).

Нормирование нормального закона распределения приводит к переносу начала координат в центр распределения и выражению абсциссы в долях СКО. Значения дифференциальной функции нормированного нормального распределения погрешностей сведены в таблицы, которые можно найти в литературе по теории вероятностей.

Пусть задан некоторый симметричный интервал ($-t_{r1}|$, t_{r1}), где t_{r1} = z = = *Ari/cm* — относительная его граница. При нормированном законе распределения $p_u(t)$ вероятность $P(-t_{r1} \leq t \leq t_{r1})$ попадания относительной случайной величины t в этот интервал равна вероятности $P($- А,., < А < Д$_Г$|) при законе распределения вида (3) для границы $A_Г$|= $t_t a$ = za. Обе вероятности определяются с помощью интеграла вероятностей (5).

Нормальный закон распределения случайных погрешностей широко используется при обработке результатов измерений, что объясняется следующими обстоятельствами. Случайная погрешность измерения некоторой величины складывается из многих составляющих, вызванных различными причинами, зачастую трудноуловимыми. Причем каждая из составляющих оказывает незначительное влияние на случайную погрешность. При этом, как следует из центральной предельной теоремы теории вероятностей (теоремы Ляпунова), такая случайная погрешность имеет закон распределения, близкий к нормальному. Учитывая отмеченное, оправданно принимают, что при прямых измерениях закон распределения случайных погрешностей многократных наблюдений некоторой величины соответствует нормальному. Для получения достаточно точных результатов обработки таких наблюдений их число n должно быть не меньше 20.

Закон распределения Стьюдента. Р.А. Фишер назвал данный закон распределением Стьюдента — псевдоним В.С. Госсета, предсказавшего это распределение. Наиболее часто этот закон применяется в процессе обработки результатов небольшого числа многократных наблюдений физической величины (2 < n< 20) и справедлив, когда случайные погрешности наблюдений распределены по нормальному закону. Этот закон описывает распределение плотности вероятности значений случайной величины / = *(x* - x„)/ *σ*, где *x* = (*1 + *xг* +...+ *x,)/п* — среднее арифметическое значение выполненного ряда наблюдений *($x_{\{}$, x_2,...,* *„) величины x_u. Он отличается от нормального закона тем, что учитывает число выполненных наблюдений и задается функцией, зависящей от относительного аргумента *t* = *A/σ* , где А = *x* -x_u —случайная погрешность.

$$\rho(t)|_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\sqrt{\pi(n-1)}}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \qquad 8$$

Здесь

$$n \geq 2;\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

гамма - функции (интегралы Эйлера), определяемые для аргумента *x* как

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \qquad 9$$

Графики функции распределения (8) для различного числа наблюдений *n* приведены на рис.4. Там же для сравнения дан график нормированного нормального распределения $p_н$*(г).*

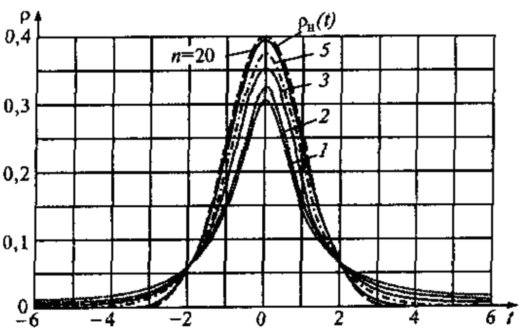

Рис. 4. Графики распределения Стьюдента $\rho(t)|_n$ и нормированного *нормального распределения $\rho_н$ (t) плотности вероятности*

Распределения Стьюдента имеют ряд особенностей:

- при $n < 3$ их *СКО* становится равным бесконечности, т.е. дисперсионная оценка ширины разброса не работает (перестает существовать);

- классический аппарат статистических характеристик для оценки формы и ширины распределения Стьюдента с малым числом наблюдений n оказывается не работоспособным, и их ширина и форма могут быть оценены лишь с использованием доверительных оценок. Этим распределение Стьюдента существенно отличается от других распределений.

В статистической теории известна разновидность распределения Стьюдента, называемая *распределением Коши.* Оно характерно тем, что ему подчиняется распределение отношения двух нормально распределенных центрированных случайных величин. Распределение Коши — это предельное распределение семейства законов Стьюдента с минимально возможным числом наблюдений $n = 1$ (см. рис.4). Распределение Коши обладает такими свойствами:

- дисперсия и *СКО* не существуют, так как определяющий их интеграл расходится; они будут бесконечно увеличиваться при росте числа экспериментальных данных;

- оценка центра в виде среднего арифметического для распределения Коши неправомочна, так как ее рассеяние $\sigma/\sqrt{n}$ равно бесконечности; математическое ожидание не существует.

Из анализа графиков (см. рис..4) следует, что закон распределения Стьюдента при числе наблюдений $n > 20$ практически совпадает с нормальным нормированным законом $pH(t)$, а при $n < 20$ отличается от него тем значительнее, чем меньше число наблюдений n. Отличия состоят в увеличении рассеяния относительных погрешностей t около центра $t = 0$ по мере уменьшения числа наблюдений. Следовательно, при этом следует ожидать уменьшения вероятности *P* попадания погрешностей случайной величины *t* в заданный интервал ($-t_{г1}$ $t_{г1}$).

Для поиска такой вероятности достаточно подставить формулу (8) в выражение, подобное (1), но в котором пределы интеграла $\Delta_{г1}$ и $\Delta_{г2}$ заменены на относительные и равные соответственно $\pm t_{г1} = \pm \Delta_{г1}/\sigma$:

$$P(-t_{г1} \le t \le t_{г1})\big|_n = \int_{-t_{г1}}^{t_{г1}} \rho(t)\big|_n dt = 2\int_0^{t_{г1}} \rho(t)\big|_n dt \qquad 10$$

Результаты расчета значений вероятности (10) приведены в виде графиков для нескольких значений и на рис.5. Там же для сравнения дан график интеграла вероятностей Ф(z), у которого аргумент *г* принят равным $t_{г1} = \Delta_{г1}/\sigma$. Из рисунка видно, что при большом числе измерений (*n* > 20) вероятность распределения (2.14) практически совпадает с вероятностью, даваемой интегралом Лапласа Ф(z).

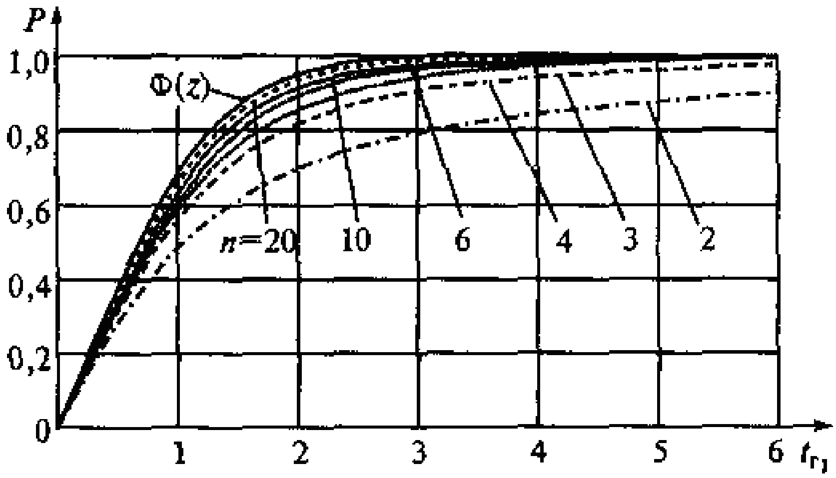

Рис. 5. Графики вероятностей $P(-t_{г1} \le t \le t_{г1})\big|_n$ при законе распределения Стьюдента для различных *n* и функции Ф(*z*)

Однако по мере снижения *n* эта вероятность уменьшается и тем значительнее, чем меньше число измерений.

Коэффициент $t_{г1i}$ на рис. 5 и в выражении (10) называется *коэффициентом Стьюдента* и его принято записывать для упрощения без индекса «*rl*». При выполнении расчетов погрешностей измерений задаются вероятностью *P* и числом наблюдений *n*. Поэтому данный коэффициент, далее обозначается через $t(P_д, n)$, где $P_д = P$.

Равномерный закон распределения плотности вероятности. Данный закон применяется тогда, когда случайная погрешность измерений с идентичной плотностью вероятности принимает любые значения в ограниченном интервале. Этот закон характерен для случайных погрешностей при измерении непрерывных физических величин методом дискретного счета, при преобразовании таких величин в аналого-цифровых преобразователях (погрешности дискретности, квантования), а также для погрешностей отсчета показаний со шкал приборов.

Все возможные случайные погрешности результата измерений, описываемых равномерным законом, расположены в интервале $(-\Delta_m, \Delta_m)$, где Δ_m — максимальная погрешность. Аналитически плотность вероятности равномерного закона распределения определяется по формуле

$$\rho(\Delta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta_m}, & -\Delta_m \le \Delta \le \Delta_m; \\ 0, & \Delta < -\Delta_m \text{ и } \Delta > \Delta_m. \end{cases} \quad 11$$

График равномерного закона распределения плотности вероятности приведен на рис.6.

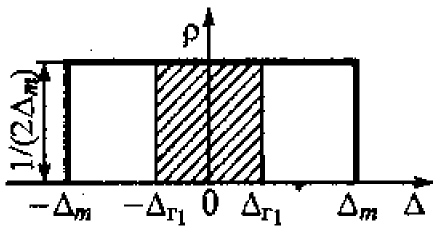

Рис. 6. График равномерного закона распределения плотности вероятности

Вероятность того, что случайная погрешность результатов измерений Δ находится в некотором симметричном интервале $(-\Delta_{r1}, \Delta_{r1})$, определяется выражением (1) при подстановке в него значения плотности вероятности $p(\Delta) = /(2\Delta_m)$

$$P(-\Delta_{r1} \le \Delta \le \Delta_{r1}) = \int_{-\Delta_{r1}}^{\Delta_{r1}} \rho(\Delta) d\Delta = \frac{1}{2\Delta_m} \int_{-\Delta_{r1}}^{\Delta_{r1}} d\Delta = \frac{\Delta_{r1}}{\Delta_m}. \qquad 12$$

На графике (см. рис.6) площадь заштрихованного прямоугольника с основанием $2\Delta_{r1}$ и высотой $1/(\Delta_m)$ численно равна вероятности (12).

Для равномерного закона, симметричного относительно центра $\Delta = 0$ (см. рис.6), расчет СКО σ случайной погрешности выполняется с помощью известного из теории вероятностей выражения для дисперсии - случайной величины:

$$\sqrt{D} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \rho(\Delta) d\Delta} = \sqrt{\frac{1}{2\Delta_m} \int_{-\Delta_m}^{\Delta_m} \Delta^2 d\Delta} = \sqrt{\frac{\Delta_m^2}{3}} = \frac{\Delta_m}{\sqrt{3}} \qquad 13$$

Треугольный закон распределения (закон Симпсона). Он характерен для случайных погрешностей цифровых приборов, в которых измеряемая величина преобразуется в пропорциональный интервал времени $T_{сч}$, называемый *временем счета,* а измерение этого интервала выполняется с помощью счетных импульсов стабильного генератора, имеющих период следования T_o. В связи со случайным положением счетных импульсов относительно интервала $T_{сч}$, а также случайным соотношением между периодом T_o и временем счета $T_{сч}$ треугольный закон представляет собой *композицию* (объединение) двух равномерных законов с одинаковыми по величине максимальными погрешностями Δ_m.

Функция распределения одномерной плотности вероятности случайных погрешностей для треугольного закона задается следующими соотношениями:

$$\rho(\Delta)=\begin{cases}\dfrac{\Delta_m+\Delta}{\Delta_m^2}, & -\Delta_m\le\Delta\le 0;\\[2mm] \dfrac{\Delta_m-\Delta}{\Delta_m^2}, & 0\le\Delta\le\Delta_m;\\[2mm] 0, & -\Delta_m>\Delta;\ \Delta>\Delta_m.\end{cases} \qquad 14$$

График треугольного закона распределения приведен на рис.7.

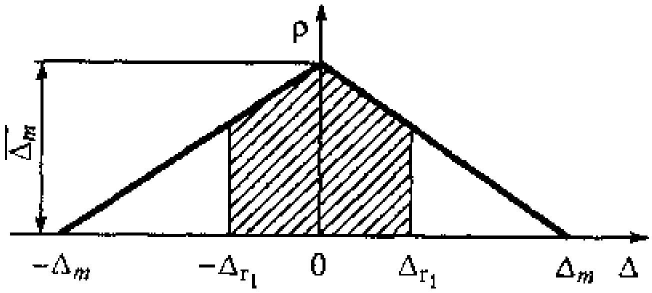

Рис.7. График треугольного закона распределения

Для этого закона вероятность того, что погрешность измерения Δ располагается в интервале (- Δ_{r1}, Δ_{r1}), находится по формулам (1) и (14):

$$2\int_0^{\Delta_{r1}}\left(\frac{\Delta_m-\Delta}{\Delta_m^2}\right)d\Delta=2\left(\frac{\Delta_{r1}}{\Delta_m}\right)-\left(\frac{\Delta_{r1}}{\Delta_m}\right)^2 \qquad 15$$

Заштрихованная область на рис.7 численно равна вероятности, определяемой по формуле (15). Среднеквадратическое отклонение σ несложно вычислить путем подстановки в (13) первого или второго выражения из (14).

В результате вычислений получаем, что СКО

$$\sigma \doteq \Delta_m/\sqrt{6}$$

В практике радиоизмерений используются и другие законы распределения погрешностей (например, *трапецеидальный, арксинуса* и др.). В частности, трапецеидальный закон является композицией двух равномерных с различными значениями максимальных погрешностей

Δ_m. Если трапецеидальный закон распределения неизвестен, то обычно принимают равномерное распределение погрешностей.

В общем случае погрешность результата измерения представляет собой сумму систематической Δс и случайной Δ погрешностей. При этом рассеяние значений случайной погрешности происходит относительно некоторого центрального значения, равного величине систематической погрешности. Примеры нормального и равномерного законов распределения таких случайных погрешностей приведены на рис.8, где принято $\Delta = \Delta_c + \Delta^{\circ}$.

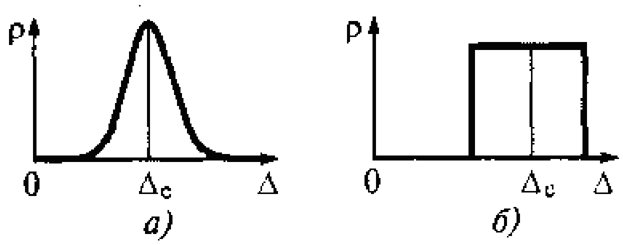

Рис. 8. Законы распределения случайных погрешностей с центром Δ_c: *а* — нормальный; *б* — равномерный

Для количественной оценки систематической составляющей погрешности измерений Δ_c и рассеяния случайной погрешности Δ используются числовые характеристики случайной величины — математическое ожидание М/(Δ) и дисперсия $D = \sigma^2$ соответственно:

$$M(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \rho(\Delta) d\Delta \qquad 16$$

$$D(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta - M(\Delta))^2 \rho(\Delta) d\Delta \qquad 17$$

Если $\Delta_c = 0$, то $M(\Delta) = 0$ и выражение для дисперсии (17) преображается к виду (13) для равномерного закона.