2.5 *Принцип включения и исключения*

Теорема (комбинаторный принцип сложения):

Пусть множества A и B могут пересекаться. Тогда количество элементов, которые можно выбрать из A или B, определяется по формуле:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

<u>Теорема</u> (принцип включения и исключения)

$$|\bigcup_{i=1}^{m} A_i| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le m} |A_i \bigcap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le m} |A_i \bigcap A_j \bigcap A_k| - \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_m|$$

Пусть множество A состоит из N элементов и имеется m одноместных отношений (свойств)

$$P_1, P_2, \ldots P_m$$

Обозначим через $N_{i_1 \ldots i_k}$ число элементов, обладающих свойствами $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots P_{i_k}$ и, может быть, некоторыми другими.

$$N(0) = S_0 - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^m S_m$$

$$S_0 = N, \quad S_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} N_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

$$k = 1, \ldots m$$

Обозначим ***N*(*r*)** число элементов, обладающих ровно **r** свойствами (1 ≤ **r** ≤m).

$$N(r)=\sum_{k=0}^{m-r}(-1)^k C_{r+k}^{r} S_{r+k}$$

Пример. Сколько положительных трехзначных чисел делятся ровно на одно из чисел 3, 5 или 7?

Определим функцию [*x*] для вещественных чисел как наибольшее целое число, не превосходящее *x*. Число [*x*] называется *целой частью* числа *x*.

Глава 3 Элементы теории графов

3.1 Определения графов

3.1.1 Из истории теории графов

1. Задача о Кенигсбергских мостах
2. Задача о трех домах и трех колодцах
3. Задача о четырех красках

3.1.2 Основные понятия

Граф G это $\langle V, E \rangle$, где V – непустое множество **вершин**, $E \subset V \times V$– множество **ребер** (набор неупорядоченных или упорядоченных пар вершин). Вершины и ребра графа называются его элементами.

Граф, содержащий конечное число элементов, называется конечным.

Число вершин конечного графа называется его порядком и обозначается $|V|$, число ребер обозначается как $|E|$: $G(V,E) = \langle V, E \rangle$, $V \neq \varnothing$, $E \subset V \times V$, $E = E^{-1}$.

Граф порядка n, имеющий m ребер, называется (n,m)-графом.

Пусть v_1 и v_2 – вершины, e – соединяющее их ребро. Тогда ребро e и каждая из этих вершин называются инцидентными друг другу, вершины v_1 и v_2 называются смежными.

Два ребра, имеющие одну общую вершину, также называются смежными.

Множество вершин, смежных с вершиной *v*, называется **множеством смежности** ***(окружением)*** вершины *v* и обозначается

$$\Gamma^{+}(v) = \{u \in V \mid (u,v) \in E\},$$

$$\Gamma^{*}(v) = \Gamma^{+}(v) \cup \{v\}$$

Очевидно, что: $u \in \Gamma(v) \Leftrightarrow v \in \Gamma(u)$.

Если не оговорено противное, то подразумевается Γ^{+} и обозначается просто Г.

Если A – множество вершин, то $\Gamma(A)$ – множество вершин, смежных с вершинами из A:

$$\Gamma(A) = \{u \in V \mid \exists v \in A \;\; u \in \Gamma(v)\} = \cup \Gamma(v) \;\; \forall v \in A.$$

3.1.3 Другие определения графов и бинарные отношения

1. Если элементами множества $E=\{(u,v)\mid u,v\in V\}$ являются упорядоченные пары, ребра называются дугами.

Вершины в таком графе называются узлами, а сам граф, все ребра которого являются дугами, называется ориентированным графом, или орграфом.

Смешанные графы - имеющие как дуги, так и неориентированные ребра.

2. Различные ребра графа могут быть инцидентны одной и той же паре вершин, в этом случае они называются кратными ребрами, а сам граф – мультиграфом

3. Если элементом множества E является пара одинаковых элементов V, то такое ребро соединяет вершину саму с собой. Тогда это ребро называется петлей, а граф – псевдографом. В псевдографе возможно также наличие кратных ребер.
4. В отличие от мультиграфа и псевдографа, граф без петель и кратных ребер называется простым.
5. Если задана функция $F : V \to M$ или $F : E \to M$, то множество M называется *множеством пометок*, а сам граф называется размеченным (т.е. всем его вершинам или всем ребрам присвоены некоторые метки, в качестве которых обычно используются буквы или целые числа).

Любой граф с петлями, но без кратных ребер, задает бинарное отношение E на множестве V, и обратно.

Пара элементов принадлежит отношению: $(a,b) \in E \subset V \times V \Leftrightarrow$ в графе есть G ребро (a,b).

Неориентированный граф соответствует симметричному отношению.

Изменение направления всех дуг соответствует обратному отношению.

Псевдограф, все вершины которого имеют петли, задает рефлексивное отношение.

3.3 Изоморфизм графов

Говорят, что два графа $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$ изоморфны: $G_1 \sim G_2$, если существует взаимно однозначное отображение h: $V_1 \to V_2$, сохраняющая отношение инцидентности, при которой смежные вершины (ребра) графа G_1 переходят в смежные вершины (ребра) графа G_2:

$$e_1=(u,v)\in E_1 \Rightarrow e_2=(h(u),h(v))\in E_2;$$

$$e_2=(u,v)\in E_2 \Rightarrow e_1=(h^{-1}(u),h^{-1}(v))\in E_1;$$

Изоморфизм графов является отношением эквивалентности.

Графы рассматриваются с точностью до изоморфизма, т.е. рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма. Числовая характеристика, одинаковая для всех изоморфных графов, называется инвариантом графа.

В частности, количество вершин и количество ребер – инварианты графа G.

Не известно никакого набора инвариантов, определяющих граф с точностью до изоморфизма.