Матрицы

МАТРИЦЕЙ НАЗЫВАЕТСЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ИЛИ КВАДРАТНАЯ ТАБЛИЦА, ЗАПОЛНЕННАЯ ЧИСЛАМИ.

$$A_{n\times m} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & \text{Второй столбец} & & \\ & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Вторая строка} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

a_i – i-я строка

a_j – j-й столбец

A $m\times n$ - матрица

a_{ij} – элемент матрицы

Виды матриц

- Квадратная   (n = m)
- Матрица-строка (n = 1)
- Матрица-столбец (m = 1)
- Нулевая   ($a_{ij} = 0$ для хвсех i,j)
- Единичная ($a_{ij} = 0$ если i≠j ; $a_{ii} = 1$)
- Диагональная ($a_{ij} = 0$ если i≠j)   - только для квадратных
- Треугольная ($a_{ij} = 0$ если i>j)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Важная характеристика квадратной матрицы – - её определитель

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если Δ = 0, то матрица **выроždена** или **особенная.**

Другая характеристика - **след** матрицы

$$\mathrm{Tr}\,A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Линейные операции над матрицами

- **Умножение на число** $B = \alpha \cdot A \quad \Rightarrow b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \quad \forall i, j$

  <u>для любых чисел и любых матриц</u>

- **Сложение** $C = A + B \quad \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$

  <u>только для матриц одинакового размера!</u>

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

Свойства линейных операций

1. Коммутативность сложения

$$A+B=B+A$$

2. Ассоциативность сложения

$$\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$$

3. Коммутативность умножения на число

$$\alpha\cdot A=A\cdot\alpha$$

4. Ассоциативность относительно числового множителя

$$\left(\alpha\beta\right)A=\alpha\left(\beta A\right)$$

5. Дистрибутивность умножения на число относительно сложения

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

Транспонирование суммы $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$

Умножение матриц

Произведением матриц *A* и *B* называется матрица *C*, элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов *i*-ой строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Таким образом

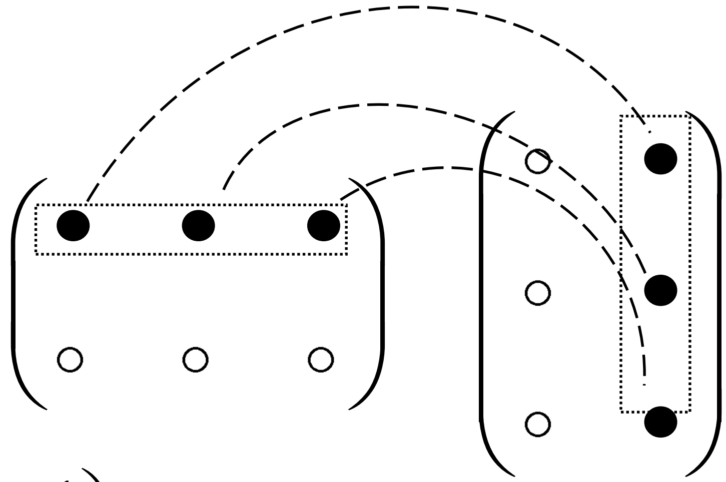
$$A \cdot B = C \quad \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Размеры матриц должны быть согласованы:

Число столбцов матрицы-первого сомножителя равно числу строк матрицы-второго сомножителя.

$$A_{n \times m} \cdot B_{m \times l} = C_{n \times l}$$

Схема вычисления элемента c_{12}:



Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-4-9 \\ 4+0-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Матрицы A и B ***перестановочные*** или ***коммутирующие***, если для них выполняется условие:

$$AB = BA \; .$$

Это значит, что такие матрицы – ***квадратные***.

Важно! единичная матрица коммутирует с любой квадратной того же размера: $AE = EA = A$

Свойства умножения матриц

1. Ассоциативность умножения

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$$

2. Дистрибутивность умножения относительно сложения

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C;$$

$$C\cdot(A+B) = C\cdot A + C\cdot B$$

3. Ассоциативность произведения относительно умножения на число

$$\alpha(A\cdot B) = (\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B)$$

4. Транспонирование произведения

$$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$$

5. Определитель произведения $\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B$

(для квадратных матриц)

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к матрице A, если выполняется условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \quad ,$$

где E – единичная матрица того же порядка.

Теорема. Всякая невырожденная квадратная матрица имеет обратную и притом только одну.

Доказательство существования - для матриц 2 или 3 порядка.

Доказательство единственности – в общем виде (от противного)

Формула для вычисления обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^{*}\right)^{T}$$

A* - матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A (**присоединённая** матрица).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \left(A^{*}\right)^{T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример.

Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Решение.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Свойства обращения матриц

1. Определитель обратной матрицы - обратный к определителю матрицы. $$\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det A}$$
2. Обращение произведения матриц $$\left(A\cdot B\right)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$
3. Транспонирование обратной матрицы $$\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}$$
4. Обращение обратной матрицы $$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$$

Для матриц 2 порядка

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Матричная запись систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \Leftrightarrow \quad AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Если матрица А <u>невырождена</u>, то $X = A^{-1} \cdot B$

Пример.

Решить матричное уравнение $A\cdot X\cdot B=C$, где

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}9 & 11\\ -14 & -20\end{pmatrix}$$

Решение.

Очевидно, $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$

$$\det A=1;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\quad \det B=1;\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix};$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & 11\\ -14 & -20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 20\\ 9 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & -3\end{pmatrix}.$$

Элементарные преобразования матриц. Эквивалентность матриц

Элементарные преобразования матриц:

1. ***Перестановка строк (столбцов) матрицы***
2. ***Умножение какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и то же число, не равное нулю.***
3. ***Прибавление к какой-либо строке (столбцу) матрицы другой строки (столбца), умноженной на одно и то же число.***

Замечание:

Для каждого элементарного преобразования существует обратное , тоже элементарное.

Матрицы A и B называются ***эквивалентными*** ($A \sim B$), если одна из них может быть получена из другой с помощью элементарных преобразований.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в правом верхнем («северо-западном») углу находится единичная матрица, а остальные элементы равны нулю. Такая матрица называется **канонической**.

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица порядка n – **каноническая** для всех невырожденных квадратных матриц порядка n .

Каждое элементарное преобразование равносильно **умножению** матрицы **справа** или **слева** на квадратную матрицу, полученную из единичной матрицы, над которой произведено именно это элементарное преобразование (такую матрицу будем называть *матрицей специального вида*).

! Поясним на примере. $A \to \tilde{A}, \quad E \to \tilde{E} \quad \Rightarrow \tilde{E} \cdot A = \tilde{A}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Следовательно, **приведение** матрицы к каноническому виду равносильно цепочке произведений (справа и слева) на такие *матрицы специального вида.*

Критерий эквивалентности матриц

*Матрицы **A** и **B** эквивалентны тогда и только тогда, когда найдутся две невырожденные матрицы **S** и **T** такие, что **B = S·A·T**.*

Задача для самостоятельного решения:

Найти такие ***S*** и ***T*** для $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

$$\left(A \middle| \; E \right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(E \middle| A^{-1} \right)$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение матричных уравнений вида ***AX=B*** с помощью элементарных преобразований

$$\left(A \,\middle|\, B \right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(E \,\middle|\, X \right)$$

Пример.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг матрицы

Ранг матрицы - наибольший порядок её ненулевого минора

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

выделен минор порядка 3.

Базисный минор ?

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad r(A) = \operatorname{rang} A = 1.$$

Свойства ранга матрицы

1. При элементарных преобразованиях матрицы её ранг не меняется.
2. При транспонировании ранг не меняется.

Следствие.

Ранг равен числу единиц в канонической матрице, эквивалентной данной.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 5 \\ 5 & -4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad r = 2.$$

Теорема о ранге

Ранг матрицы равен числу линейно независимых строк этой матрицы.

Доказательство.

Без ограничения общности считаем, что базисный минор находится в «северо-западном» углу:

$$rang\left(A\right)=r; \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0$$

Допустим, что число линейно независимых строк равно ***p***. Очевидно, $r \le p$.

Докажем, что любая $\boldsymbol{i}$ –ая строка при $\boldsymbol{i} > \boldsymbol{r}$ линейно выражается через первые $\boldsymbol{r}$ строк матрицы.

Рассмотрим определитель порядка r + 1

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}, \quad где \quad i > r,\ 1 \le j \le n$$

Если $1 \le j \le r$, то $\Delta^* = 0$ (два одинаковых столбца).

Если r+$1 \le j \le n$, то $\Delta^* = 0$ (минор порядка $r + 1$) .

Разложим Δ* по последнему столбцу

$$A_{1j} \cdot a_{1j} + A_{2j} \cdot a_{2j} + \ldots + A_{rj} \cdot a_{rj} + \Delta \cdot a_{ij} = 0$$

Это означает, что i –ая строка линейно выражается через первые r строк. Следовательно, $p = r$.

Теорема доказана.

Следствия:

- $r(AB) \le r(A); \quad r(AB) \le r(B);$
- при умножении на невырожденную ранг не меняется.

Итак,

ранг матрицы это

– порядок наибольшего ненулевого минора,

– число линейно независимых строк (столбцов),

– число единиц на главной диагонали канонической матрицы.