Пример 1
Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори и дать геометрическую интерпретацию

$Z = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 + 3x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{ целые} \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 7 \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,4} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

б.п.	1	x_1	x_2	x_3	x_4	СО
x_3	7	3	1	1	0	7
x_4	7	1	3	0	1	7/3 ←
Z	0	-1	-2	0	0	
			↑			

$X^1 = (0;0), Z(X^1) = 0$

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	СО
x_3	14/3	8/3	0	1	-1/3	7/4 ←
x_2	7/3	1/3	1	0	1/3	7
Z	14/3	-1/3	0	0	2/3	
		↑				

$X^2 = (0; 7/3), Z(X^2) = 14/3$

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	7/4	1	0	3/8	-1/8
x_2	7/4	0	1	-1/8	3/8
Z	21/4	0	0	1/8	5/8

$7/3 \to 7/3 - \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{14}^{7}}{3} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{8}_4} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$

$14/3 \to 14/3 - \frac{\cancel{14}^{7}}{\cancel{3}}\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{8}_4} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}$

$1/3 \to 1/3 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{8} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

$2/3 \to 2/3 - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right) \cdot \frac{\cancel{3}}{8} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

$X^3 = (7/4; 7/4), \ Z(X^3) = 21/4$

Решение оптимально, но не целочисленное. Составим дополнительное ограничение.

$\{7/4\} = \frac{3}{4}, \ \{7/4\} = \frac{3}{4}$

$\underbrace{\{1\}}_{0} \cdot x_1 + \underbrace{\{0\}}_{0} x_2 + \underbrace{\{3/8\}}_{3/8} x_3 + \underbrace{\{-1/8\}}_{7/8} x_4 \ge \underbrace{\{7/4\}}_{3/4}$

$3/8 \, x_3 + 7/8 \, x_4 - x_5 = 3/4$

$-3/8 \, x_3 - 7/8 \, x_4 + x_5 = -3/4$

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	7/4	1	0	3/8	-1/8	0
x_2	7/4	0	1	-1/8	3/8	0
x_5	-3/4	0	0	-3/8	-7/8	1 ←
Z	21/4	0	0	1/8	5/8	0
СО				1/3	5/7	
				↑		

Таблица является двойственно допустимой. Далее решаем двойственным симплекс-методом.

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0		
x_2	2	0	1	0		
x_3	2	0	0	1	7/3	-8/3
Z	5	0	0	0	1/3	1/3

$7/4 \to 7/4 - \frac{3}{\cancel{8}}\left(-\frac{\cancel{3}}{4}\right)\left(-\frac{8}{\cancel{3}}\right) = 1$

$7/4 \to 7/4 - \left(-\frac{1}{\cancel{8}}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = 2$

$21/4 \to 21/4 - \left(-\frac{\cancel{3}}{4}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{8}}\left(-\frac{\cancel{8}}{\cancel{3}}\right) = 5$

$5/8 \to 5/8 - \frac{1}{8}\left(-\frac{7}{\cancel{8}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{8}}{3}\right) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

$X^4 = (1;2), \ Z(X^4) = 5$ Решение оптимально и целочисленно.

Геометрическая интерпретация

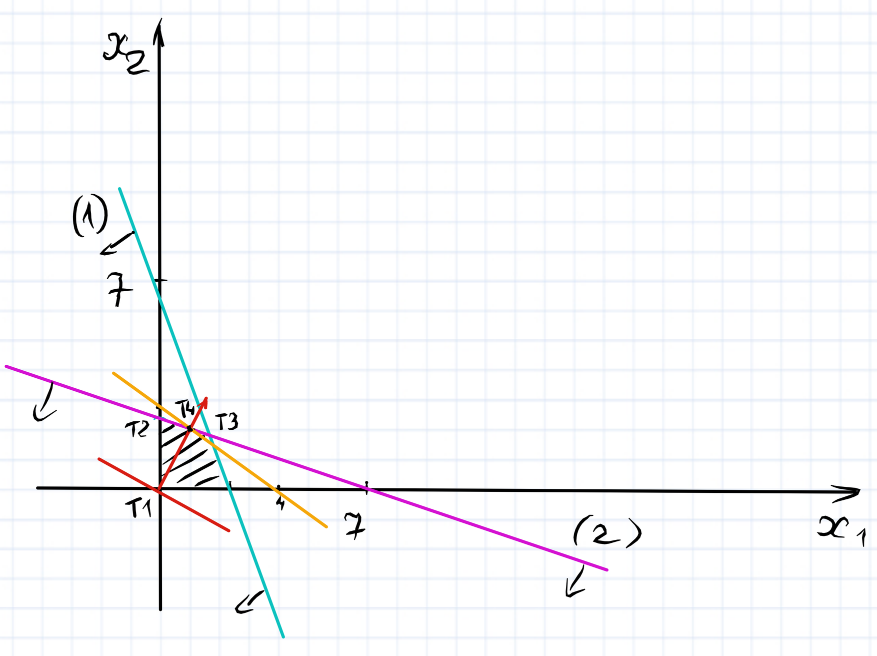
(1) $3x_1 + x_2 = 7$

x_1	0	2,3
x_2	7	0

(2) $x_1 + 3x_2 = 7$

x_1	0	7
x_2	2,3	0

$grad Z = (1;2)$



$\frac{3}{8}x_3 + \frac{7}{8}x_4 \ge \frac{3}{4}$

$3x_3 + 7x_4 \ge 6$

$3(7 - 3x_1 - x_2) + 7(7 - x_1 - 3x_2) \ge 6$

$21 - 9x_1 - 3x_2 + 49 - 7x_1 - 21x_2 \ge 6$

$16x_1 + 24x_2 \le 64$

$2x_1 + 3x_2 \le 8$

(доп. огр-е) $2x_1 + 3x_2 = 8$

x_1	0	4
x_2	2,7	0

Пример 2
Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори

$Z = 2x_1 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6 \\ 5x_1 - x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{ целые} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 - x_2 + x_4 = 9 \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	СО
x_3	6	3	1	1	0	2
x_4	9	5	-1	0	1	9/5 ←
Z	0	-2	0	0	0	
		↑				

$X^1 = (0;0), \ Z(X^1) = 0$

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	СО
x_3	3/5	0	8/5	1	-3/5	3/5 ←
x_1	9/5	1	-1/5	0	1/5	—
Z	18/5	0	-2/5	0	2/5	
			↑			

$X^2 = (9/5; 0), \ Z(X^2) = 18/5$

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	3/8	0	1	5/8	-3/8
x_1	15/8	1	0	1/8	1/8
Z	15/4	0	0	1/4	1/4

$\frac{9}{5} \to \frac{9}{5} - \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{\cancel{5}}\right) \cdot \frac{\cancel{5}}{8} = \frac{75}{40} = \frac{15}{8}$

$\frac{18}{5} \to \frac{18}{5} - \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{\cancel{5}}\right) \cdot \frac{\cancel{5}}{8} = \frac{150}{40} = \frac{15}{4}$

$\frac{1}{5} \to \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3}{\cancel{5}}\right) \cdot \frac{\cancel{5}}{8} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

$\frac{2}{5} \to \frac{2}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2}{\cancel{5}}\right) \cdot \frac{\cancel{5}}{8} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

$X^3 = (15/8; 3/8), \ Z(X^3) = 15/4$

оптимально, но не целое

$\left\{\frac{15}{8}\right\} = \frac{7}{8}$ max $\quad \left\{\frac{3}{8}\right\} = \frac{3}{8}$

$\left\{\frac{15}{8}\right\} = \frac{7}{8} \quad \{1\} = 0 \quad \{0\} = 0 \quad \{1/8\} = \frac{1}{8} \quad \left\{\frac{1}{8}\right\} = \frac{1}{8}$

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	3/8	0	1	5/8	-3/8	0
x_1	15/8	1	0	1/8	1/8	0
x_5	-7/8	0	0	-1/8	-1/8	1 ←
Z	15/4	0	0	1/4	1/4	0
СО				2	2	
				↑		

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	-4	0	1	0	-1	5
x_1	1	1	0	0	0	1
x_3	7	0	0	1	1	-8
Z	2	0	0	0	0	2

$X^4 = (1; -4)$ - не допустимое

б.п	1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	4	0	-1	0	1	-5
x_1	1	1	0	0	0	1
x_3	3	0	1	1	0	-3
Z	2	0	0	0	0	2
			↑			

$X^5(1;0), \ Z(X^5) = 2$ - оптим

$X^6 = (1;3), \ Z(X^6) = 2$ - оптим

$(1-\lambda)X^5 + \lambda X^6 = (1-\lambda)(1;0) + \lambda(1;3) = (1 - \lambda + \lambda; 3\lambda) = (1; 3\lambda), \ 0 \le \lambda \le 1$

целое?

$\lambda = \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$

$X^7 = (1;1), \ X^8 = (1;2)$ Решение - 4 точки