Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 3

1.7. Графическое решение задачи линейного программирования (продолжение)

Полупространством называется множество точек, удовлетворяющее одному из неравенств $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$ или $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \ge b$.

Гиперплоскость делит точки пространства на два полупространства. В двумерном случае полупространством является полуплоскость.

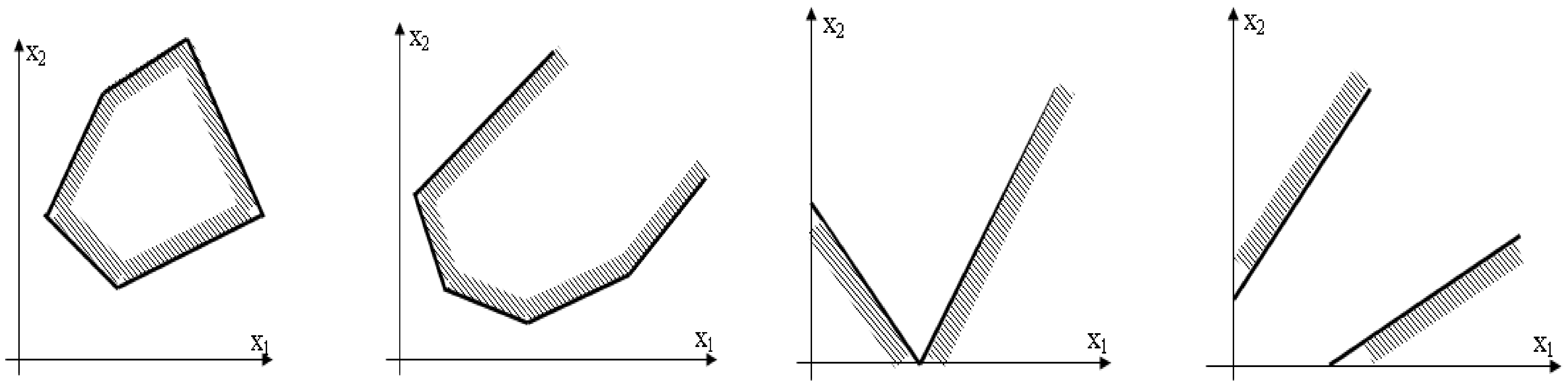
Теорема 6 Полупространство является выпуклым множеством.

Доказательство Теоремы 6 – в файле lecture3.pdf.

Следствие Пересечение любого количества полупространств является выпуклым множеством.

Многогранником называется пересечение одного или более полупространств. Многогранник в двумерном случае называется *многоугольником*.

Примеры многоугольников:



Точка выпуклого множества называется *угловой*, если она не лежит внутри никакого отрезка, соединяющего две другие точки данного множества.

Угловыми точками треугольника являются его вершины.

Угловыми точками круга являются точки окружности, которая его ограничивает (их бесконечное число).

Угловая точка многогранника называется его *вершиной*.

Рассмотрим ЗЛП, заданную в симметричной форме.

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max \qquad (1.11)$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases} \qquad (1.12)$$

***Теорема** 7* Если задача (1.11), (1.12) имеет оптимальное решение, то максимальное значение целевая функция принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция принимает более, чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих вершин (т.е. функция принимает максимальное значение в любой точке ребра или грани, которые определяются этими вершинами).

Доказательство Теоремы 7 – в файле lecture3.pdf.

1.8. Графический способ метод решения ЗЛП, заданной в симметричной форме, в случае двух переменных

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \tag{1.13}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Для решения этой задачи можно перебрать все вершины многоугольника, определяемого системой ограничений, и выбрать из них ту, в которой значение функции больше.

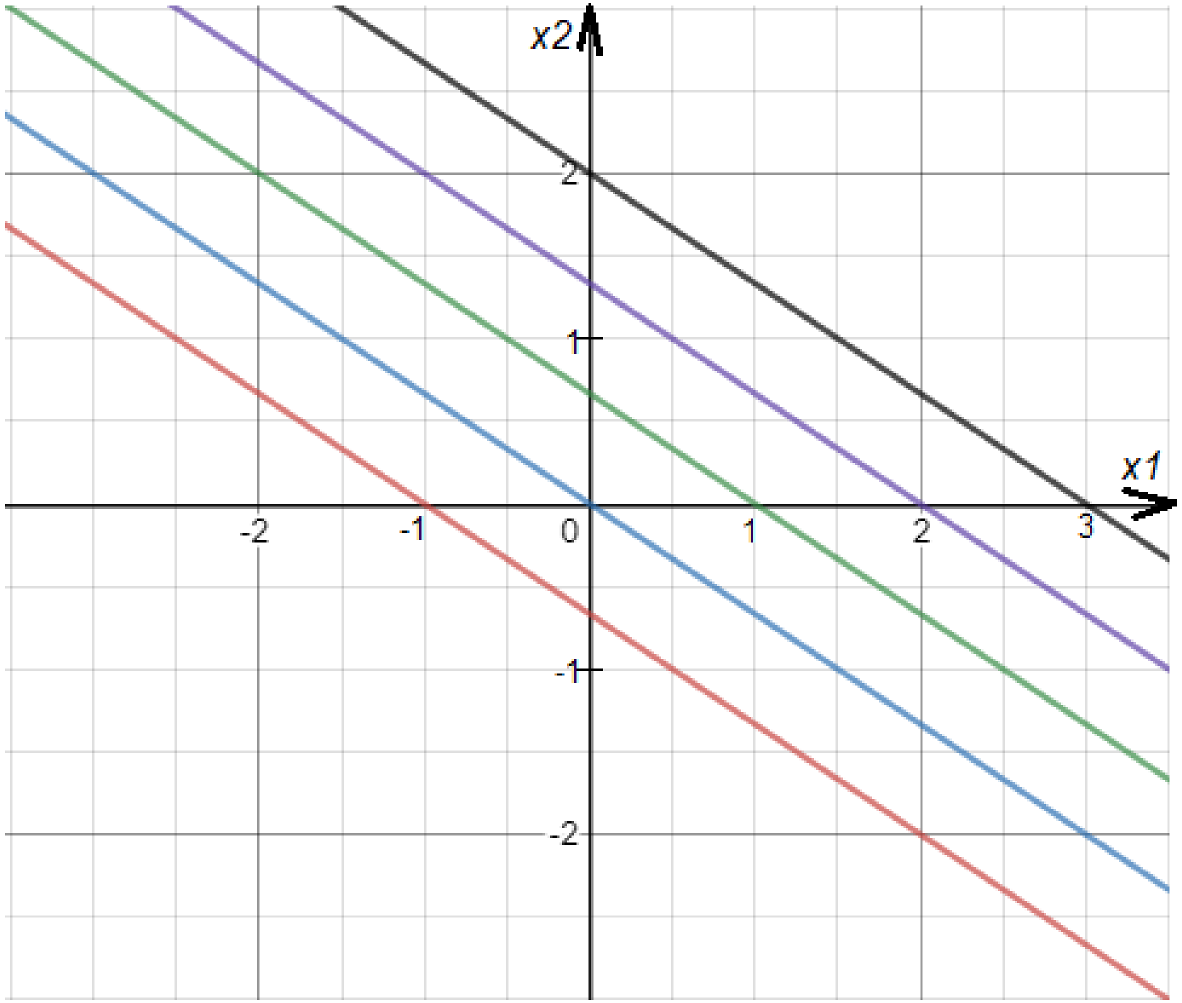
Линией уровня функции Z называется множество точек, удовлетворяющее уравнению $Z = c$, где c – произвольная константа. В двумерном случае, это уравнение определяет прямую. Линии уровня линейной функции образуют семейство параллельных прямых.

Пример 1

Построим линии уровня функции $Z=2x_1+3x_2$.

$2x_1+3x_2=6$

x_1	0	3
x_2	2	0



На рисунке приведены линии уровня функции Z. Первая линия (черная) $2x_1+3x_2=6$.

Вектор $grad \ Z = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right)$ называется *градиентом функции* Z. Вектор $grad \ Z$ в каждой точке перпендикулярен линии уровня, проходящей через эту точку, и указывает направление наибольшего возрастания функции Z, $grad \ Z = (c_1, c_2)$.

Наибольшее значение Z достигается в вершине, через которую проходит линия уровня, соответствующая наибольшему значению Z.

Для графического решения задачи ЗЛП используют следующий алгоритм:

1. Записывают уравнения граничных прямых $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$ (i = 1,…,m) и строят их на плоскости X_1OX_2 по двум точкам.
2. Отмечают полуплоскости, соответствующие ограничениям - неравенствам. Для этого берут «пробную» точку, через которую не проходит граница полуплоскости (часто берут, если прямая не проходит через начало координат, точку (0,0)), и ее координаты подставляют в соответствующее ограничение-неравенство. Если полученное неравенство верное, то искомой будет полуплоскость, содержащая «пробную» точку; в противном случае, искомой будет полуплоскость, которой данная точка не принадлежит.
3. Заштриховывают многоугольник, определяемый системой ограничений. Для этого определяют общую часть ранее отмеченных m полуплоскостей, лежащую в первой четверти (следует из условий неотрицательности переменных).

4. Строят вектор $grad\ \ Z=(c_1,c_2)$ и одну из прямых семейства $Z=c$ (чаще всего $Z=0$). Если выбранный для построения многоугольника масштаб не позволяет построить $grad\ \ Z$, то вместо него строят вектор $\overline{N}=k\cdot grad\ \ Z$ (в случае, если длина $grad\,Z$ слишком мала для построения) или $\overline{N}=\dfrac{grad\ \ Z}{k}$ (в случае, если длина $grad\ \ Z$ слишком велика для построения), где $k>1$.

5. В случае необходимости параллельным переносом линию уровня следует расположить таким образом, чтобы многоугольник находился впереди линии уровня по направлению $grad\,Z$.

6. Определяют экстремальную точку, соответствующую вершине многоугольника, путем параллельного перемещения прямой $Z = c$ в направлении вектора $grad\,Z$. Это будет наиболее удаленная вершина многоугольника, в которой линия уровня пересекается с многоугольником.

7. Вычисляют координаты оптимальной точки и значение функции Z в этой точке.

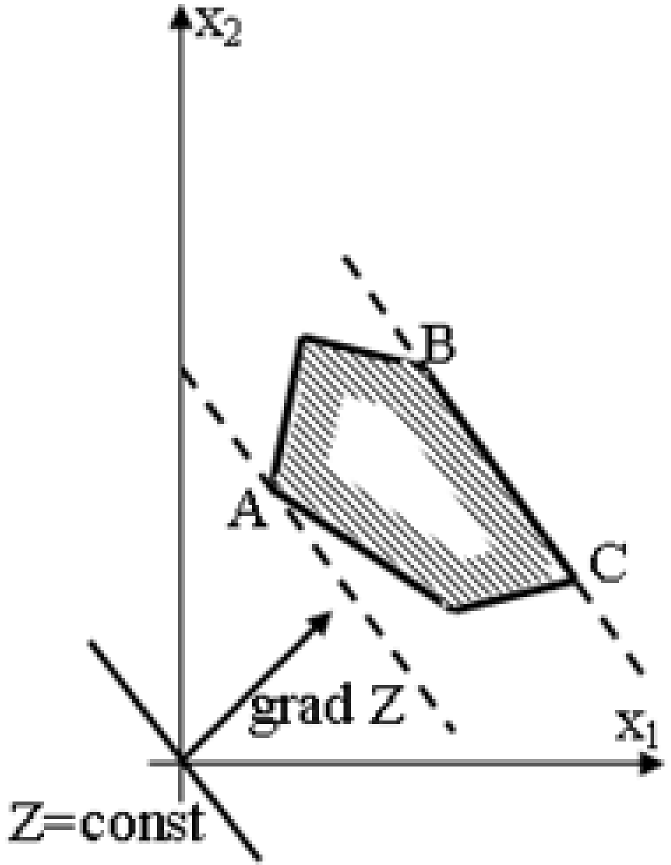
Замечание:

1. Если у функции требуется найти минимальное значение, то линию уровня $Z = c$ перемещают в направлении вектора $-grad\,Z$ (или перемещают в направлении $grad\ Z$, но находят первую вершину пересечения линии уровня с многоугольником).

2. Если масштаб по осям выбран одинаковым, то линия уровня перпендикулярна $grad\ Z$.

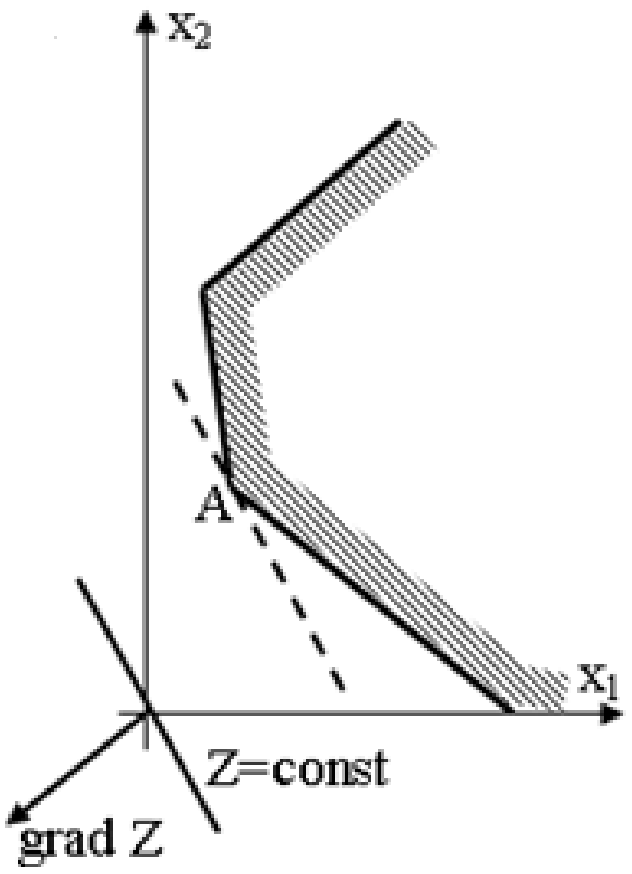
В зависимости от особенностей области допустимых решений и взаимного расположения области и вектора $grad\,Z$ при решении задачи линейного программирования возможны различные случаи.

Если область допустимых решений – ограниченный многоугольник, то может быть либо единственное решение, либо бесконечно много решений – все точки отрезка, соединяющего две вершины многоугольника (альтернативный оптимум). В случае альтернативного оптимума оптимальный план представляется выражением координат произвольной точки отрезка через координаты ее концов.

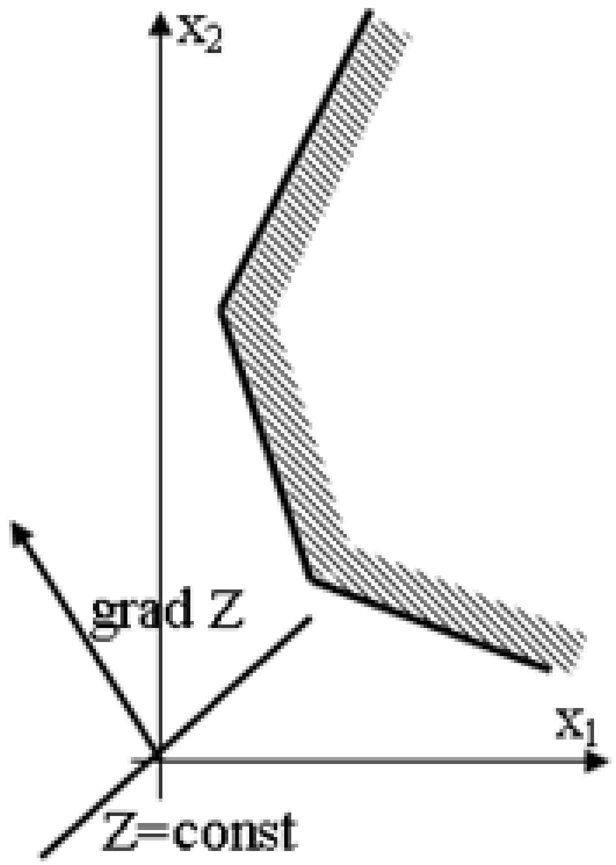


Функция достигает минимума в точке *A*, а максимума – в любой точке отрезка *BC* (альтернативный оптимум).

Если область допустимых решений – неограниченный многоугольник, то в зависимости от направления $grad\,Z$ задача может иметь или не иметь решения. В этом случае так же может оказаться альтернативный оптимум.



Максимум функции достигается в точке *A*, минимума функция не имеет.



Функция не имеет ни минимума, ни максимума.

Пример 2

Решить графически ЗЛП:

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение примера 2 – в файле lecture3.pdf.

Ответ: $Z_{\max} = Z\left(\dfrac{90}{23}; \dfrac{40}{23}\right) = \dfrac{6100}{23}$.

1.9. Многомерные ЗЛП, заданные в канонической форме, решаемые графически

Графическим методом можно решить ЗЛП, заданную в канонической форме, если $n - r \leq 2$.

Для решения такой задачи переходят к симметричной форме. Далее решают графически задачу в эквивалентной симметричной форме и находят значения свободных переменных. Подставив найденные значения в общее решение исходной системы, находят значения базисных переменных.

Пример

Решить графически задачу линейного программирования:

$$Z = 4x_1 + 2x_2 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 14 \\ x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_6 = 6 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 6 \end{cases}$$

Решение примера – в файле lecture3.pdf.

Ответ: $Z_{\max} = Z(6; 2; 0; 6; 4; 0) = 34$.