Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 8

1.14 Двойственный симплекс-метод

Пусть имеется пара двойственных задач в симметричной форме

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0 \left(i = 1, \ldots, n \right) \end{cases}$$

$$W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \ge c_n \\ y_j \ge 0 \left(j = 1, \ldots, m \right) \end{cases}$$

Канонические формы:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

$$W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to \min$$

$$\begin{array}{c} y_1 \\ \ldots \\ y_m \\ \\ \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_i \geq 0 \left(i = 1, \ldots, n+m \right) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \ldots \\ x_m \\ \\ \end{array} \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n \\ y_j \geq 0 \left(j = 1, \ldots, m+n \right) \end{cases}$$

Матрица системы ограничений первой задачи:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & \ldots & x_n & x_{n+1} & & \ldots & x_{n+m} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_m \end{array} \right) \end{array}$$

Канонические формы:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ \ldots \\ y_m \\ \\ \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_i \ge 0\ (i = 1, \ldots, n+m) \end{cases}$$

$$W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ \ldots \\ x_m \\ \\ \end{array} \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n \\ y_j \ge 0\ (j = 1, \ldots, m+n) \end{cases}$$

Составим симплексную таблицу для первой задачи:

			y_{m+1}		y_{m+n}	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
	б.п.	1	x_1	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\ldots$	x_{n+m}
y_1	x_{n+1}	b_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1n}	1	0	$\ldots$	0
y_2	x_{n+2}	b_2	a_{21}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	x_{n+m}	b_m	$a_{m,1}$	$\ldots$	$a_{m,n}$	0	0	$\ldots$	1
	Z	0	$-c_1$	$\ldots$	$-c_n$	0	0	$\ldots$	0

Можно заметить, что построение самой двойственной задачи не обязательно, в столбцах таблицы записана исходная задача, а в строках – двойственная. При этом оценками плана исходной задачи являются коэффициенты Z-строки c_{ij}, а оценками плана двойственной задачи – коэффициенты столбца свободных членов b_i.

При решении симплекс-методом все коэффициенты в столбце свободных членов должны были быть неотрицательны, а в Z-строке допускались отрицательные коэффициенты, которые в процессе решения преобразовывались в неотрицательные. Поскольку в двойственной задаче столбец свободных членов и Z-строка меняются местами, то можно допустить, что в Z-строке все коэффициенты неотрицательны, а в столбце свободных членов могут быть отрицательные коэффициенты. Тогда при выполнении симплексных преобразований необходимо преобразовывать коэффициенты столбца свободных членов в неотрицательные.

Симплексная таблица, в которой все коэффициенты Z-строки неотрицательны, а в столбце свободных членов имеются отрицательные, называется *двойственно допустимой*, а соответствующее решение – *псевдопланом*.

			y_{m+1}		y_{m+n}	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
	б.п.	1	x_1	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\ldots$	x_{n+m}
y_1	x_{n+1}	b_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1n}	1	0	$\ldots$	0
y_2	x_{n+2}	b_2	a_{21}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	x_{n+m}	b_m	$a_{m,1}$	$\ldots$	$a_{m,n}$	0	0	$\ldots$	1
	Z	0	$-c_1$	$\ldots$	$-c_n$	0	0	$\ldots$	0

Алгоритм двойственного симплекс-метода (применяется в случае двойственно допустимой симплексной таблицы):

1. В столбце свободных членов выбирают среди отрицательных минимальный. Это определяет разрешающую строку.
2. Для отрицательных элементов разрешающей строки находим симплексные отношения: отношения элементов Z-строки к отрицательным элементам разрешающей строки, взятые по модулю.
3. Выбираем минимальное симплексное отношение, соответствующий столбец – разрешающий.
4. Выполняют шаг симплексных преобразований таблицы.
5. Если в столбце свободных членов нет отрицательных, то решение оптимально, иначе переход на п.1.

Отличие от симплекс-метода: сначала выбираем разрешающую строку, а потом столбец!

Алгоритм двойственного симплекс-метода часто используют, если после решения задачи возникает какое-то дополнительное ограничение, которое следует учесть в задаче. Для того, чтобы не решать задачу по-новому, можно добавить ограничение в последнюю симплекс-таблицу и решать ее двойственным симплекс-методом.

Пример 1

Решить задачу линейного программирования

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Решение примера 1 – в файле lecture8.pdf.

$$Z_{\max} = Z(14/3; 2/3; 8/3) = 32/3$$

Пример 2

Решить задачу линейного программирования и сделать геометрическую интерпретацию процесса поиска оптимального решения

$$Z(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 31 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение примера 2 – в файле lecture8.pdf.

$$Z_{\min} = Z(3;4) = 25$$

Геометрическая интерпретация процесса поиска оптимального решения

$$Z(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 31 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z_{\min} = Z(3;4) = 25$$