8. Аналитическая геометрия

Линия (алгебраическая) на плоскости — ГМТ $M\ (x,\ y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $F\ (x,\ y) = 0$, где $F\ (x, y)$ – многочлен степени n.

Поверхность (алгебраическая) — ГМТ $M\ (x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $F\ (x, y, z) = 0$, где $F\ (x, y, z)$ – многочлен степени n.

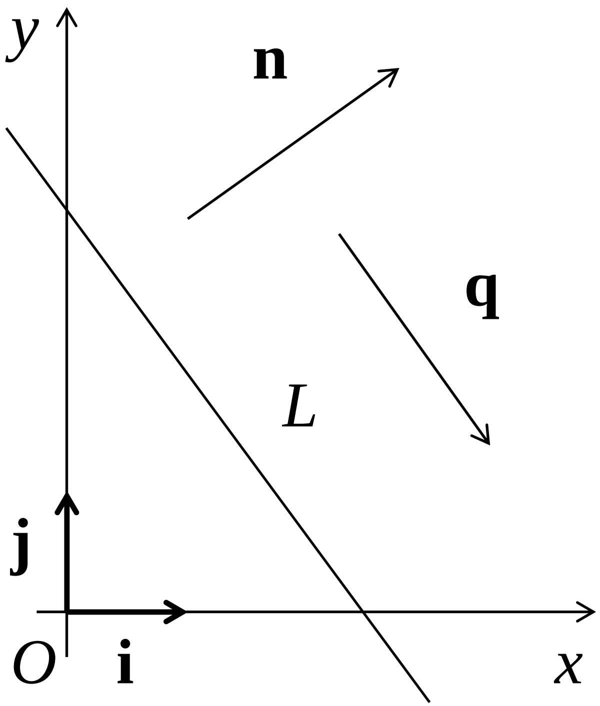
Линия (алгебраическая) в пространстве — пересечение двух поверхностей:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Уравнение линии или поверхности - нахождение зависимости между координатами текущей точки.

8.1 Прямая на плоскости

8.1.1. Некоторые понятия



Декартова прямоугольная система координат

Прямая линия L на плоскости

Нормальный вектор - любой ненулевой вектор, ортогональный этой прямой: $\mathbf{n} \perp \mathrm{L}$, $|\mathbf{n}| \neq 0$.

Направляющий вектор - любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой: $\mathbf{q} \parallel \mathrm{L}$, $|\mathbf{q}| \neq 0$.

По определению, $\mathbf{n} \perp \mathrm{L}$, т.е. $\mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = 0$

Пусть $\mathbf{n} = (A, B) = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$, $\mathbf{q} = (l, m) = l\mathbf{i} + m\mathbf{j}$.

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = 0 \Rightarrow Al + Bm = 0$

Отсюда, если задан $\mathbf{n} = (A, B)$, то $\mathbf{q} = (B, -A)$ или $\mathbf{q} = (-B, A)$.

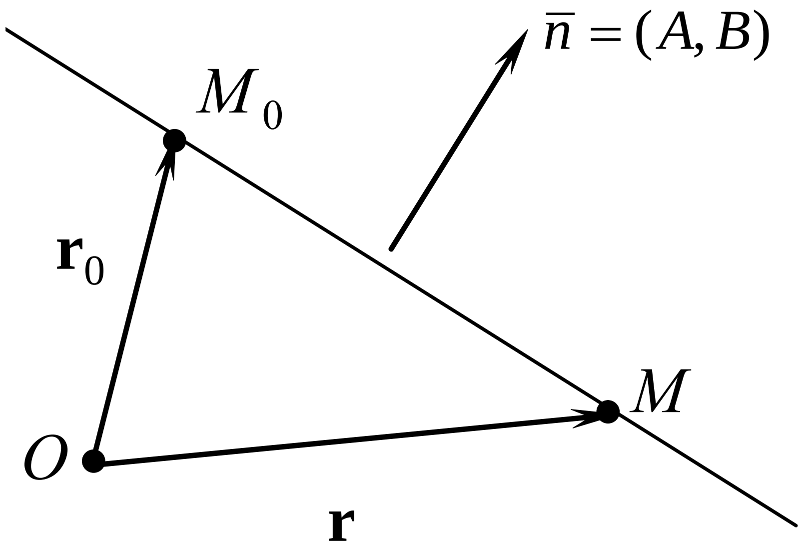
И наоборот, если задан $\mathbf{q} = (l, m)$, то $\mathbf{n} = (m, -l)$ или $\mathbf{n} = (-m, l)$.

Проверяем: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = AB-BA = -AB + BA = lm - ml = -lm + ml = 0$

Вывод: один из этих векторов на плоскости полностью задаёт положение прямой, и по нему можно найти другой вектор.

8.1.2. Общее уравнение прямой на плоскости

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$, перпендикулярно вектору ***нормали***



O(0, 0) - дано (начало коор-т)

$M_0(\mathbf{r}_0) = M_0(x_0, y_0)$ - дана

$\mathbf{n} = (A, B)$ - дан

$M(\mathbf{r}) = M(x, y)$ - лежит на заданной прямой

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{nr} - \mathbf{nr}_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{nr} + C = 0}$$

общее векторное уравнение прямой на плоскости

Аналогично для $\mathbf{q}$: $\mathbf{q} \parallel \overrightarrow{M_0M} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{q} \parallel (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{q} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{q}}$$

векторное параметрическое уравнение прямой на плоскости

То же самое для координат:

$$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (A,B)\cdot(x-x_0,\,y-y_0)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad \boxed{\Leftrightarrow\quad Ax+By+C=0}$$

Полное уравнение $Ax+By+C = 0$ <=> *A*,*B*, *C* — *ненулевые*.

Частные случаи:

(1) A = 0, B ≠ 0, C ≠ 0 => By + C = 0 или y = y1 - прямая параллельна оси *Ox*.

(2) B = 0, A ≠ 0, C ≠ 0 => Ax + C = 0 или x = x1 - прямая параллельна оси *Oy*.

(3) C = 0, A ≠ 0, B ≠ 0 => Ax + By = 0 или y = kx - проходит через начало коор-т.

(4) A = 0, C = 0, B ≠ 0 => y = 0 - прямая совпадает с осью *Ox*.

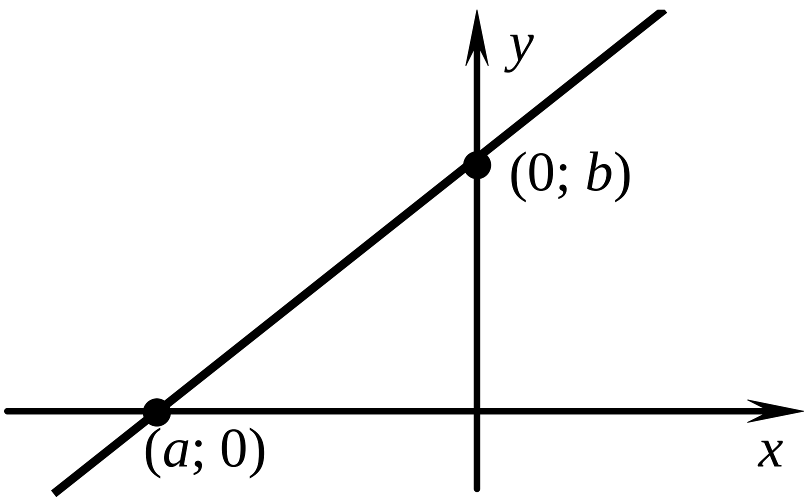
(5) B = 0, C = 0, A ≠ 0 => x = 0 - прямая совпадает с осью *Oy*.

Выводы:

1. Общее уравнение прямой на плоскости - линейное уравнение, коэффициенты которого - координаты нормального вектора.
2. Если коэффициент при *x* (*y*) равен нулю, то прямая параллельна оси *Oy* (*Ox*).
3. Если отсутствует свободный член, то прямая проходит через начало координат.

8.1.3. Уравнение прямой в отрезках

$$Ax+By+C=0-\textit{полное} \Leftrightarrow \frac{x}{-C/A}+\frac{y}{-C/B}=1 \Leftrightarrow$$



$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

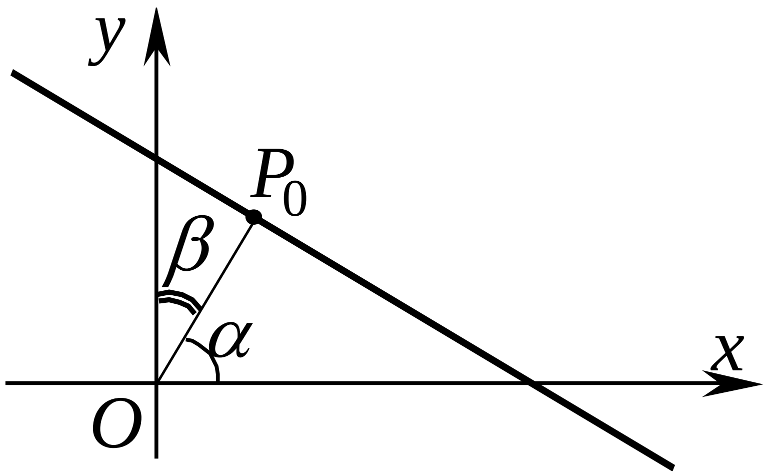
a и b – отрезки, отсекаемые прямой на осях Ox и Oy.

Замечание: для частных случаев общего уравнения прямой уравнения прямой в отрезках не существует.

8.1.4. Нормальное уравнение прямой

Пусть прямая ℓ не проходит через $O(0;0)$.

$$\overline{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta)$$



$\rho = \left|\overline{OP_0}\right|$ – расстояние от начала координат до прямой ℓ

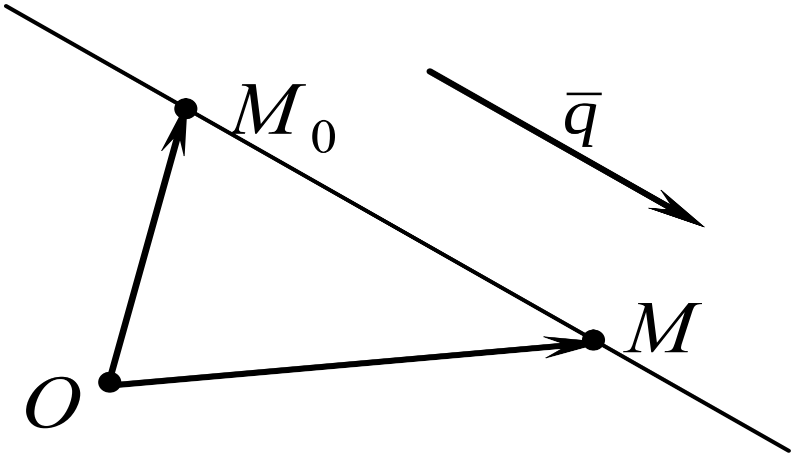
$$\boxed{\cos\alpha\cdot x + \cos\beta\cdot y + C = 0,}$$

нормальное уравнение прямой

$(C = -\rho)$.

8.1.5. Каноническое уравнение прямой

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$,
параллельно *направляющему* вектору $\bar{q} = (l, m)$



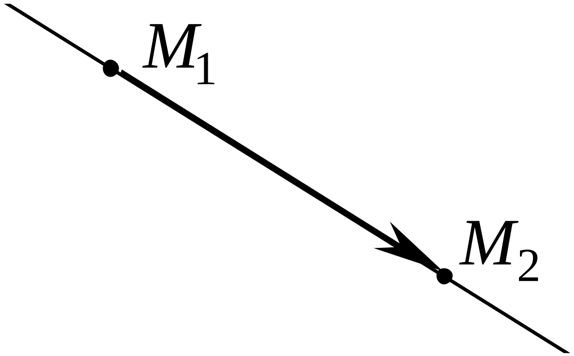
$$\overline{M_0M} \parallel \bar{q} \Leftrightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}}$$

Частные случаи:

(1) $\dfrac{x - x_0}{0} = \dfrac{y - y_0}{m}$, $\mathbf{q} = (0, m)$ - прямая параллельна оси Oy, уравнение прямой $x - x_0 = 0$;

(2) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{0}$, $\mathbf{q} = (l, 0)$ - прямая параллельна оси Ox, уравнение прямой $y - y_0 = 0$.

8.1.6. Уравнение прямой, проходящей через две точки



$$q = \overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

Подставляем в каноническое уравнение:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

<u>Следствие</u>: условие того, что три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ лежат на одной прямой:

$$\boxed{\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}}$$

8.1.7. Параметрические уравнения прямой

Векторное параметрическое уравнение прямой: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{q}$

Найдём это уравнение в декартовых координатах из канонического уравнения прямой:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t$$

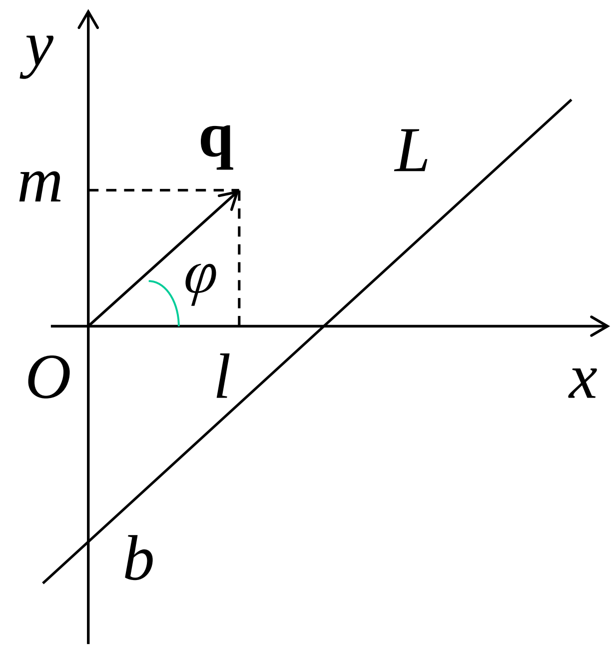
$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = t\,l \\ y - y_0 = t\,m \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x = t\,l + x_0 \\ y = t\,m + y_0 \end{cases}}$$

8.1.8. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}\Rightarrow\quad y-y_0=\frac{m}{l}\left(x-x_0\right)$$

$$\Rightarrow y=\frac{m}{l}x+\left(y_0-\frac{m}{l}x_0\right)\Rightarrow \boxed{y=kx+b}$$

$$k=\frac{m}{l}=\operatorname{tg}\varphi$$



Частные случаи:

(1) если φ = 0, то *к* = 0 и *y* = *b*, т.е. прямая параллельна оси *Ox*;

(2) если φ < π/2, то *к* = tg φ > 0;

(3) если φ > π/2, то *к* = tg φ < 0;

(4) если φ = π/2, то *к* = tg φ не существует, уравнения прямой с угловым коэффициентом – тоже;

(5) если *b* = 0, то *y* = *kx*, и прямая проходит через начало коор-т.

8.1.9. Взаимное расположение прямых на плоскости

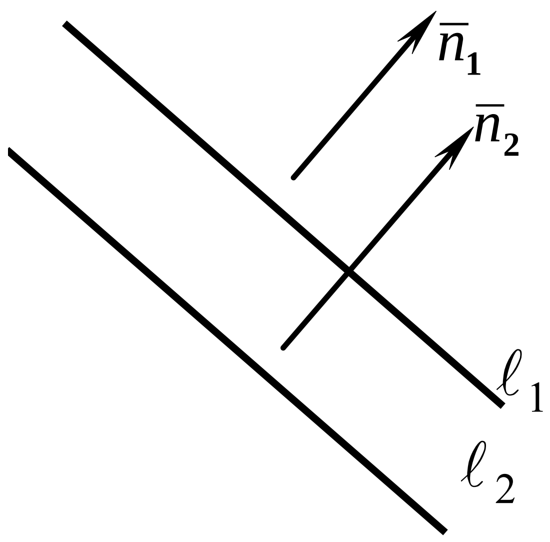
либо параллельны, либо пересекаются.

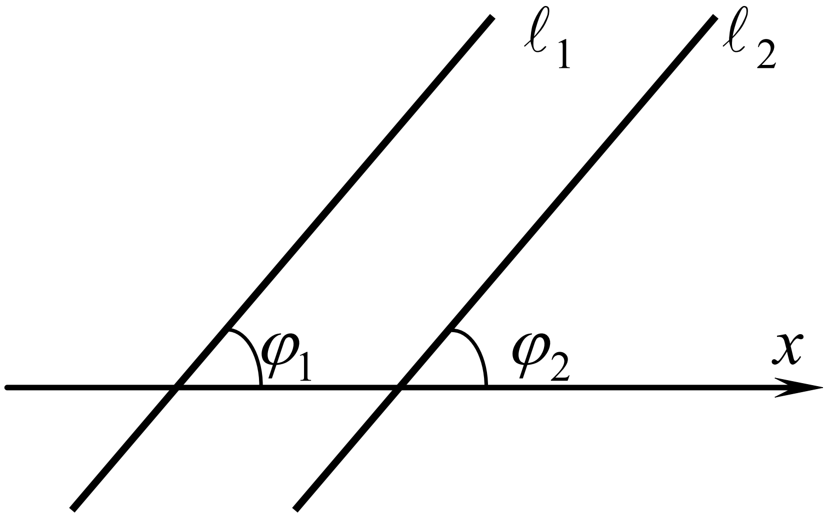
ℓ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ℓ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\mathbf{q}_1 = (l_1, m_1)$, k_1 $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2)$, $\mathbf{q}_2 = (l_2, m_2)$, k_2

Прямые параллельны, если:

(1) $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$; (2) $\mathbf{q}_1 \parallel \mathbf{q}_2 \Rightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$; (3) $k_1 = k_2$.





Прямые перпендикулярны, если:

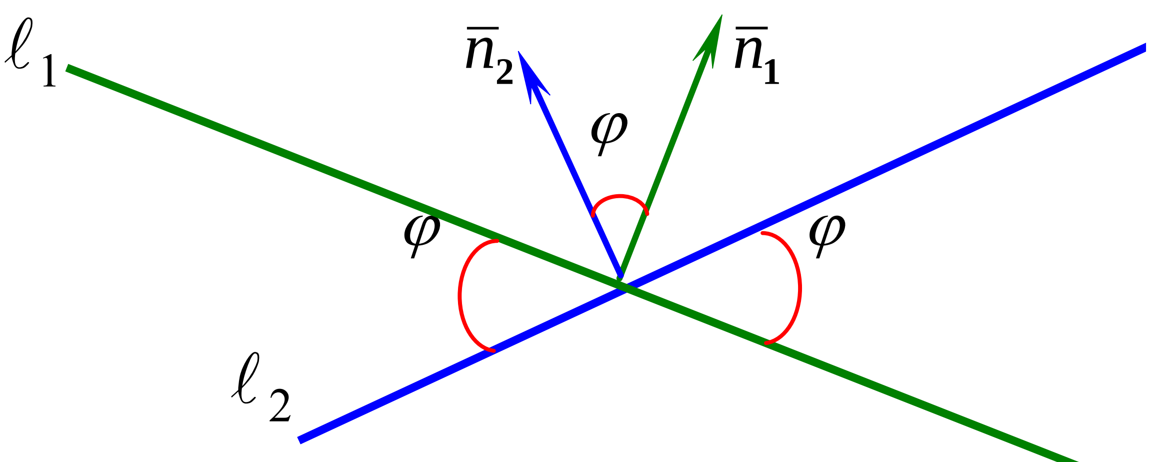
$$(1)\ \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Rightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0;$$

$$(2)\ \mathbf{q}_1 \perp \mathbf{q}_2 \Rightarrow l_1l_2 + m_1m_2 = 0; \qquad (3)\ k_1k_2 = -1.$$

Угол между прямыми:

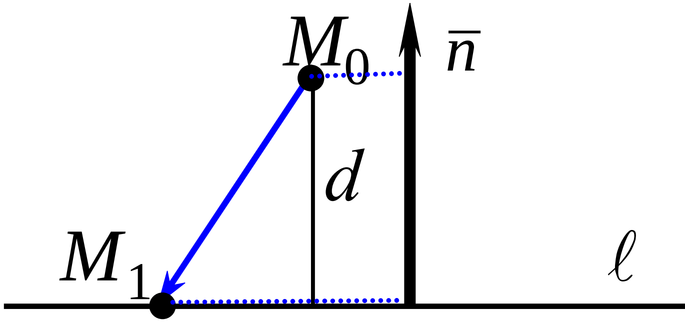
$$(1)\ \cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

$$(2)\ \cos\varphi = \frac{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_1||\mathbf{q}_2|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}; \qquad (3)\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$



8.1.10. Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая ℓ задана уравнением $Ax + By + C = 0$,
$M_0(x_0;y_0)$ – точка, не на прямой ℓ.
Найти расстояние от т.M_0 до прямой ℓ.



расстояние от т. M_0 до прямой ℓ — модуль скалярной проекции вектора M_0M_1 на нормаль прямой ℓ:

$$d = \left|np_{\bar{n}}\overline{M_1M_0}\right| = \left|\frac{\bar{n}\cdot\overline{M_1M_0}}{|\bar{n}|}\right| = \left|\frac{(A,B)\cdot(x_0-x_1,y_0-y_1)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| =$$

$$= \frac{|Ax_0 - Ax_1 + By_0 - By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - \overbrace{(Ax_1 + By_1)}^{-C}|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

8.1.11. Уравнение прямой, проходящей через точку

Дано: фиксированная точка прямой $M_0(x_0, y_0)$.

1. Пусть задан вектор нормали $\mathbf{n} = (A, B)$. Найти уравнение прямой, проходящей через M_0 и перпендикулярной $\mathbf{n}$.

Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$

M_0 лежит на прямой => $Ax_0 + By_0 + C = 0$

$$\boxed{\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$$

2. Пусть задан угловой коэффициент k. Найти уравнение прямой, проходящей через M_0, с коэффициентом k.

$y = kx + b$ => $y_0 = kx_0 + b$ $\boxed{\Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0)}$

Пример на нахождение других уравнений прямой

Дано: общее уравнение $3x - 4y - 12 = 0$

Найти: другие уравнения этой прямой

Из уравнения: $A = 3$; $B = -4$ => $\mathbf{n} = (3; -4)$ => $\mathbf{q} = (4; 3)$

Выражаем y: $4y = 3x - 12 \Rightarrow y = \dfrac{3}{4}x - 3$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом

Делим на свободный член: $3x - 4y = 12 \Rightarrow \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-3} = 1$ - уравнение прямой в отрезках

Каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} \Rightarrow \dfrac{x - 4}{4} = \dfrac{y}{3}$ $\left(x_0 = 4,\ y_0 = 0\right)$

Параметрическое уравнение прямой: $\dfrac{x - 4}{4} = \dfrac{y}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4t + 4 \\ y = 3t \end{cases}$

или: $\begin{cases} x = lt + x_0 = 4t + 4 \\ y = mt + y_0 = 3t \end{cases}$

Пример на нахождение угла между прямыми

Дано: прямая $2x + y - 1 = 0$

Найти: угол между прямой и прямой с $\mathbf{q}_2 = (1; 3)$, проходящей через точку $(3; 2)$.

$\mathbf{n}_1 = (2; 1)$ $\mathbf{q}_2 = (1; 3) \Rightarrow \mathbf{n}_2 = (3; -1)$

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Ещё пример на нахождение угла между прямыми

Дано: прямая L_1 отсекает на координатных осях отрезки (2; -3), а прямая L_2 проходит через точки A(-1; 2) и B(1; -3).

Найти: угол между прямыми.

$$L_1: \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1 \;\Rightarrow -3x+2y+6=0 \;\Rightarrow n_1=(-3;2)$$

$$L_2: \quad \frac{x+1}{1-(-1)}=\frac{y-2}{-3-2}=1 \;\Rightarrow 5x+2y+1=0 \;\Rightarrow n_2=(5;2)$$

$$\cos\varphi=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{-3\cdot5+2\cdot2}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{25+4}}=\frac{-11}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}}=-\frac{11}{\sqrt{377}}$$

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{377}}\right)$$

Пример на нахождение уравнения прямой, проходящей через точку

Дано: точка $M(4; -1)$, прямая $4x + 3y + 5 = 0$

Найти: общее уравнение прямой, проходящей через M и перпендикулярной данной.

$\mathbf{n}_1 = (4; 3)$ $\mathbf{n}_2 = (3; -4)$ (по условию)

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно $\mathbf{n}_2$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$\Rightarrow 3(x - 4) - 4\,(y+1) = 0$ $\Rightarrow 3x - 4y - 16 = 0$

Пример на нахождение высоты в треугольнике

Дано: треугольник *ABC*, где *A*(2; 1), *B*(1; -1), *C*(3; 5).

Найти: длину высоты, опущенной из *A*.

Другими словами, нужно найти расстояние от *A* до прямой, проходящей через *B* и *C*.

Уравнение прямой, проходящей через *B* и *C*: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y+1}{5+1}$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{6} \Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3} \Rightarrow 3x-3=y+1 \Rightarrow 3x-y-4=0$$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \Rightarrow h=\frac{\left|3x_A-y_A-4\right|}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}}=\frac{\left|3\cdot 2-1-4\right|}{\sqrt{9+1}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$