18. **Вектор в системе координат. Линейные операции в базисе.**

Декартова прямоугольная система координат

Требуется знание понятия базиса(предыдущий файл с вопросами, мало ли кто в рандомном порядке учит).

Орт - единичный вектор.

Базис называется ***ортонормированным, если его вектора единичны и взаимно перпендикулярны:***

$$\boxed{\bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k} - \text{орты}}$$

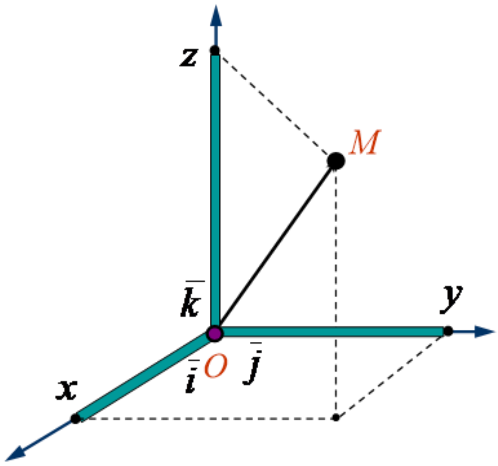
Совокупность фиксированной точки *О(начало координат) и ортонормированного базиса называется* ***прямоугольной декартовой системой координатв пространстве.***

Прямые *Ox*, *Oy* и *Oz, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов называются* ***осями координат. Ox- ось абсцисс, Oy- ось ординат, Oz- ось аппликат***

Плоскости, проходящие через оси координат — ***координатные плоскости. Пространство делится на восемь октантов***(октан то же что и четверть простой координатной плоскости только В ОБЪЕМЕ, в кубике 2х2 один кубик - октант, сомневаюсь что это вообще нужно, но мало ли).

Координатами точки *М* *называются проекции* радиус – вектора на оси координат:

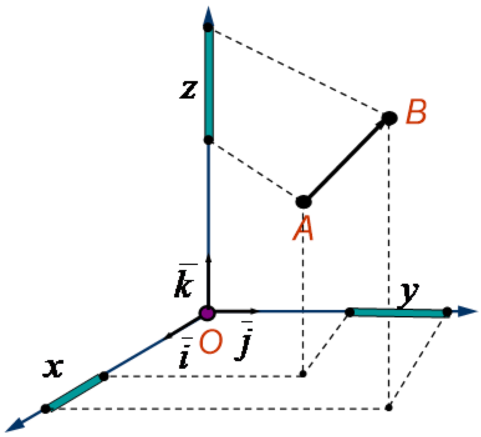
$$\text{пр}_{\bar{i}}\overline{OM} = x,\ \text{пр}_{\bar{j}}\overline{OM} = y,\ \ \text{пр}_{\bar{k}}\overline{OM} = z \qquad M(x;\ y;\ z)$$



Координатами вектора называются скалярные проекции векторана оси координат**:**

$$np_i \overline{AB} = x,\ np_j \overline{AB} = y,\quad np_k \overline{AB} = z\quad \overline{AB} = (x;\ y;\ z)$$

$$\overline{AB} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$$

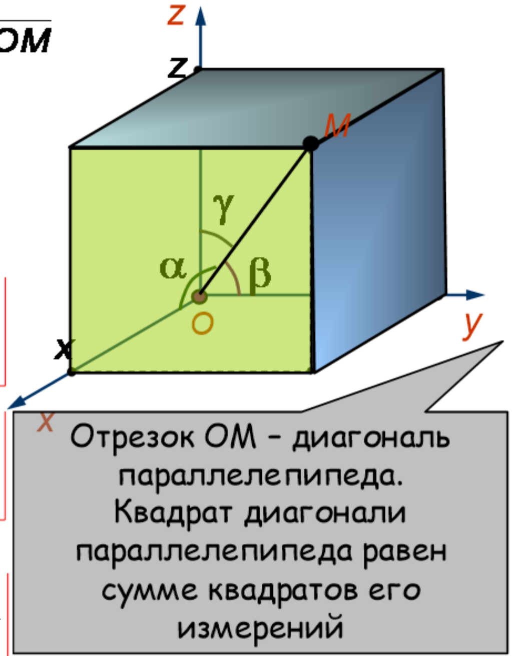


$\alpha; \beta; \gamma$ — углы, между вектором $\overline{OM}$ и осями координат.

$\cos\alpha; \quad \cos\beta; \quad \cos\gamma$ –

- направляющие косинусы

вектора $\overline{OM}$



$x = \left|\overline{OM}\right| \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$y = \left|\overline{OM}\right| \cdot \cos\beta$ $\qquad$ $\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$z = \left|\overline{OM}\right| \cdot \cos\gamma$ $\qquad$ $\cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

<u>Далее будут операции, на слайдах всё просто, да понятно, поэтому просто скрин</u>

Операции над векторами в декартовой системе координат

$$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k} \qquad \bar{b} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}$$

По свойствам скалярной проекции вектора на ось получим:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2)\cdot \bar{i} + (y_1 \pm y_2)\cdot \bar{j} + (z_1 \pm z_2)\cdot \bar{k}$$

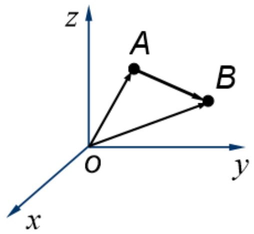
$$\lambda \bar{a} = (\lambda x_1)\cdot \bar{i} + (\lambda y_1)\cdot \bar{j} + (\lambda z_1)\cdot \bar{k}$$

По координатам точек $A(x_a; y_a; z_a)$ и $B(x_b; y_b; z_b)$ найти координаты вектора ***AB***

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$\overline{OB} = \{x_b; y_b; z_b\} \qquad \overline{OA} = \{x_a; y_a; z_a\}$$

$$\overline{AB} = \{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}$$



19. Скалярное произведение векторов и его свойства.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей векторовна косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}}$$

.

Скалярное произведение векторов **в координатной форме:**

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}$$

Не совсем понимаю зачем нужно то, что будет далее тк. вывод такой же как и тут, но пусть будет:

Таблица скалярного умножения в декартовых координатах

.	*i*	*j*	*k*
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

Запишем векторы **a** и **b** в виде суммы компонент:

$$\mathbf{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}; \quad \mathbf{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

Тогда, используя свойство 3 (будет дальше):

$$\mathbf{ab} = a_xb_x\boldsymbol{ii} + a_xb_y\boldsymbol{ij} + a_xb_z\boldsymbol{ik} + \\ + a_yb_x\boldsymbol{ji} + a_yb_y\boldsymbol{jj} + a_yb_z\boldsymbol{jk} + \\ + a_zb_x\boldsymbol{ki} + a_zb_y\boldsymbol{kj} + a_zb_z\boldsymbol{kk}$$

И, используя таблицу, получим:

$$\mathbf{ab} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Свойства скалярного произведения.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

5. $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Из определения скалярного произведения

2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Из свойств сложения умножения действительных чисел

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

6. $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

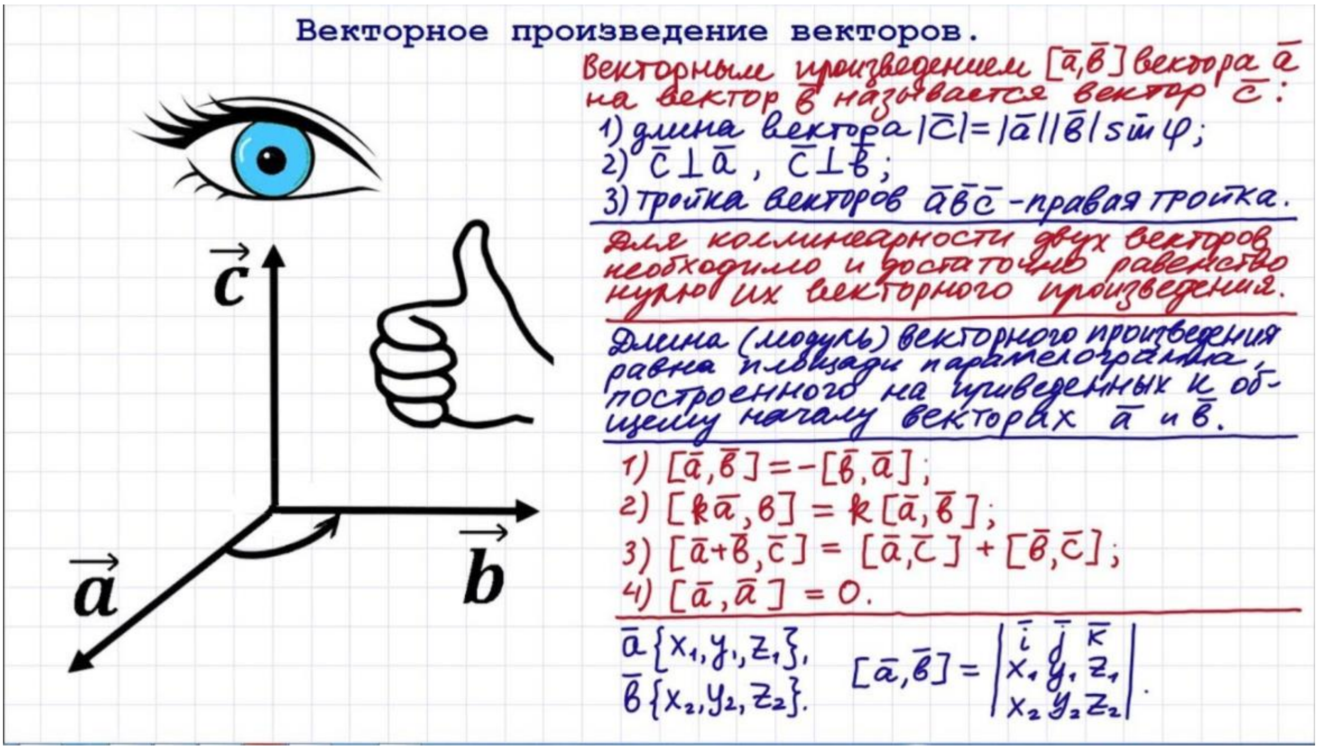
4. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$

Из свойств скалярной проекции

7. $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Из определения скалярного произведения и косинуса 0* и 90*

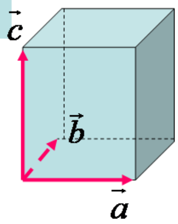
20. Векторное произведение векторов и его свойства.



<u>1000 листов из презентации можно уместить на одном листе ШОК **для любителей извращений в презентации есть какой-то ужасно сложный способ координатного векторного произведения без матрицы**</u>

21. Смешанное произведение векторов и его свойства.

6.3. Смешанное произведение векторов



Смешанным произведением трех векторов называется векторное произведение первых двух векторов, умноженное скалярно на третий вектор

$$\vec a\vec b\vec c = (\vec a \times \vec b)\cdot \vec c$$

Смешанное произведение векторов в координатной форме:

$$(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} (x_c \ y_c \ z_c)$$

$$\vec a\vec b\vec c = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

$$(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c = \left(\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right)(x_c \ y_c \ z_c) =$$

$$= x_c \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - y_c \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + z_c \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} =$$

Смешанным произведением трех векторов называется векторное произведение первых двух векторов, умноженное скалярно на третий вектор.<u>(может кому мелко написано).</u>

Свойства смешанного произведения.

1. $\vec a\vec b\vec c = \vec c\vec a\vec b = \vec b\vec c\vec a = -\vec b\vec a\vec c = -\vec a\vec c\vec b = -\vec c\vec b\vec a$

2. $\lambda(\vec a\vec b\vec c) = \overrightarrow{\lambda a}\vec b\vec c = \vec a\overrightarrow{\lambda b}\vec c = \vec a\vec b\overrightarrow{\lambda c}$

3. $|\vec a\vec b\vec c| = V_{параллелепипеда}$

$\vec a\vec b\vec c < 0$ – левая тройка
$\vec a\vec b\vec c > 0$ – правая тройка

4. $\vec a\vec b\vec c = 0 \Leftrightarrow \vec a, \vec b, \vec c$ – компланарны

22. Метод координат. Основные задачи аналитической геометрии на плоскости.

В аналитической геометрии изучаются две основных задачи:
1.Нахождение уравнения геометрического объекта, который рассматривают как геометрическое место точек, которые имеют определенное свойство.
2.Исследования свойств геометрического объекта по его уравнению и построение его.
К простейшим задачам аналитической геометрии относятся такие две:
1) нахождения расстояния между двумя точками;
2) деления отрезка в заданном отношении.

Пусть заданны точки M1 и M2 в пространстве, то есть каждая из них имеет три координаты M1(x1,y1,z1), M2(x2,y2,z2). Расстояние между точками M1 и M2 и равно длине вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, координаты которого равны разности одноименных координат точки M2 и точки M1. Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат. Итак, имеем, что расстояние между двумя заданными точками M1 и M2 находится по формуле: $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$,

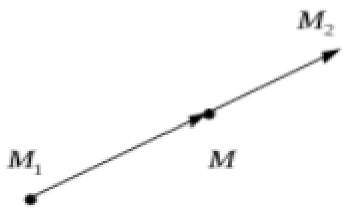


Рис. 3.1

Пусть теперь известно, что точка M делит отрезокM1M2 в отношении λ. Найти координаты точки M. Обозначим их через M(x,y,z). То, что точка M(x,y,z) делит отрезок в отношении λ, означает, что $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda$.

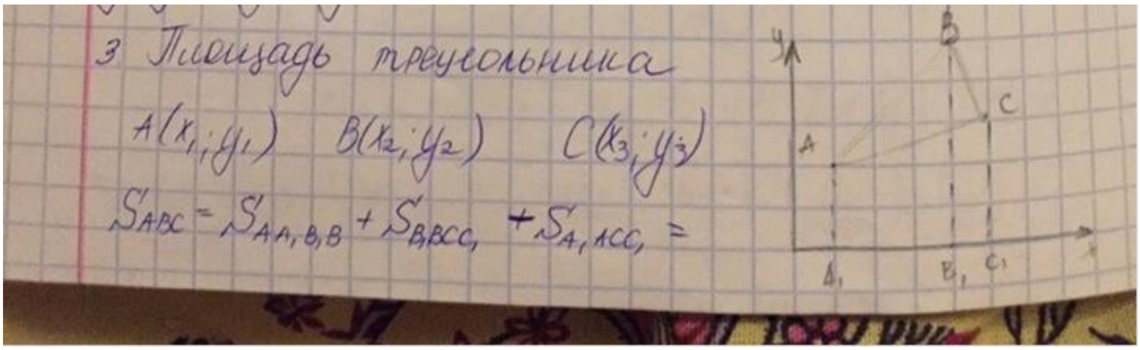
Координаты x, y, z точки M:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, если точка M делит отрезок M1M2 пополам, то λ =1

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

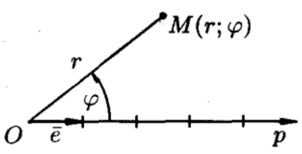
3 задача аналитической геометрии(сорре мне лень искать красивое, я её собсна нигде и не встретил, но на лекции было. А спонсор этого фото Вика - Вика, мы говорим спасибо вам).



Полярная система координат

Другой практически важной системой координат является полярная система координат.

Полярная система координат задается точкой O, называемой полюсом, лучом Op, называемым полярной осью, и единичным вектором ē того же направления, что и луч Op.

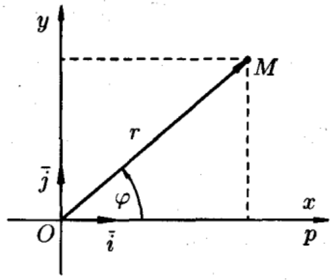


Возьмем на плоскости точку M, не совпадающую с O. Положение точки M определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (отсчет углов ведется в направлении, противоположном движению часовой стрелки)

Числа r и φ называются полярными координатами точки M, пишут M(r;φ), при этом r называют полярным радиусом, φ — полярным углом.

Для получения всех точек плоскости достаточно полярный угол φ ограничить промежутком (—π; π) (или 0≤φ≤ 2π), а полярный радиус — [0; ∞). В этом случае каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ, и обратно.

Установим связь между прямоугольными и полярными координатами. для этого совместим полюс O с началом координат системы. Oxy, а полярную ось с положительной полуосью Ох. Пусть х и у - прямоугольные координаты точки М, а r и φ и ее полярные координаты.



Из рисунка видно, что прямоугольные координаты точки М выражаются через полярные координаты точки следующим образом:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi. \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Полярные же координаты точки М выражаются через ее декартовы координаты такими формулами:

Определяя величину φ, следует установить (по знакам Х и у) четверть, в которой лежит искомый угол, и учитывать, что —π≤φ≤ π.

23. Уравнения прямой линии на плоскости.

<u>Посмотрел я презентацию и не вижу смысла копипастить скриншотами 15 страниц, просто прикреплю презентацию, по мне так проще будет. Не согласны - сделаю, пока пусть так будет сорре.</u>

24. Основные задачи аналитической геометрии в пространстве.

Две основные задачи аналитической геометрии.

I.Дано некоторое множество точек плоскости (пространства), обладающее некоторым набором свойств. Требуется составить уравнение (или систему уравнений), которое в некоторой системе координат задает это множество точек.

II (обратная). В заданной системе координат некоторое множество точек плоскости (пространства) описывается заданным уравнением (или системой уравнений). Требуется определить вид и основные свойства этого множества и построить его эскиз.

Простейшие задачи аналитической геометрии.

1) Нахождение длины отрезка.

2) Деление отрезка в заданном отношении.

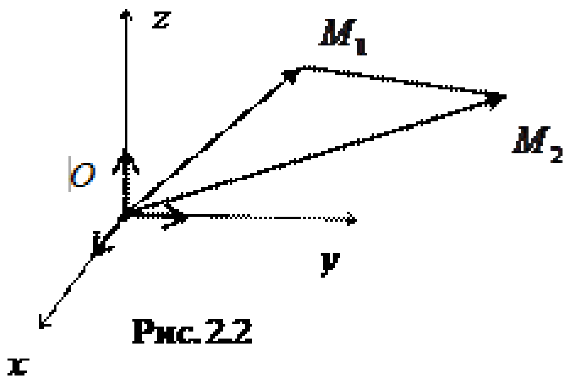


Рис. 2.2

Пусть в заданной декартовой прямоугольной системе координат имеется две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

вектор $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$

Следовательно, **длина отрезка**

$$|M_1M_2| = \left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$