Определение1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

1) Функция $f(x)$ *определена в точке* a и в некоторой окрестности точки a;
2) Функция $f(x)$ *имеет предел при* $x \to a$;
3) *Предел* функции в точке a *равен значению* функции в точке a.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* a *слева и справа, то она непрерывна в точке* a.

Определение 2. *Функция* $f(x)$ *называется непрерывной в точке* a, *если она определена в точке* a *и ее окрестности и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в интервале* $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a; b]$, если она непрерывна в интервале $(a; b)$, в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

Точки разрыва функции

Предельная точка области определения функции, в которой функция не является непрерывной называется *точкой разрыва функции*.

Свойства непрерывных функций

Теорема 1. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке* a, *то функции* $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ *(при условии* $g(a) \neq 0$ *также непрерывны в точке* a.

Теорема 2. (о непрерывности сложной функции)
Пусть функция $t = g(x)$ *непрерывна в точке* a, $g(a) = b$, *а функция* $y = f(t)$ *непрерывна в точке* b. *Тогда сложная функция* $y = f\big(g(x)\big)$ *непрерывна в точке* a.

Теорема 3. (о непрерывности обратной функции) *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена, строго монотонна и непрерывна на* $X = [a; b]$. *Тогда множеством ее значений является* $Y = [f(a); f(b)]$; *на* $[f(a); f(b)]$ *существует обратная функция* $x = f^{-1}(y)$; *обратная функция также строго монотонна; обратная функция непрерывна на* $Y = [f(a); f(b)]$.

Теорема 4. *Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.*

Свойства функций, непрерывных на отрезке

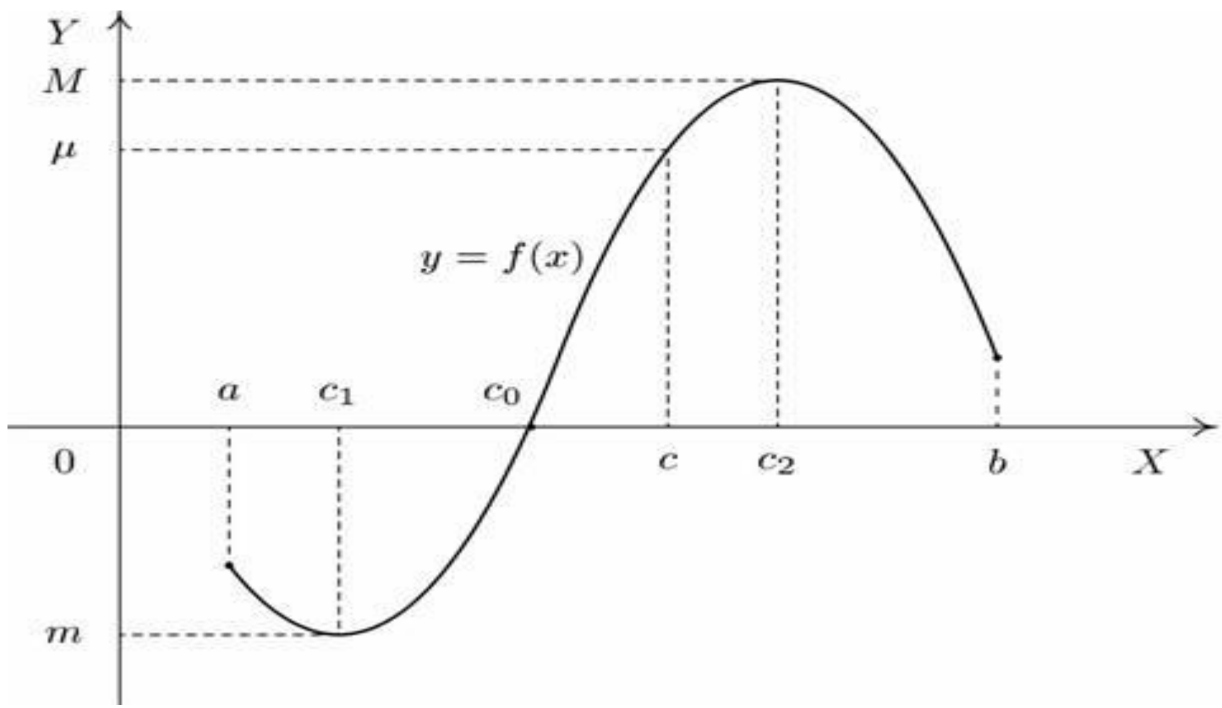
Теорема (Вейерштрасса). *Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.*

Следствие. *Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Теорема (Больцано-Коши). *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и принимает на его концах неравные значения* $f(a) = A$ *и* $f(b) = B$ *, то на этом отрезке она принимает все промежуточные значения между* A *и* B.

Следствие. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри отрезка* $[a;b]$ *найдется хотя бы одна точка* c, *в которой* $f(c) = 0$.

Функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, $a < 0, b > 0$;
M – наибольшее значение функции $f(x)$ на $[a; b]$;
m – наименьшее значение функции $f(x)$ на $[a; b]$.



Производные и дифференциалы

Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$.

Возьмем произвольную точку $x \in (a; b)$ и рассмотрим другую точку $x + \Delta x$ этого интервала, Δx *– приращение аргумента* x.

Соответствующее *приращение функции* $f(x)$ *в точке* x

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

При фиксированном x эта разность является функцией от Δx.

Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Оно также является функцией аргумента Δx.

Определение. *Если существует*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

то он называется производной функции $y = f(x)$ *в точке* x.

Обозначения: $f'(x)$, $y'(x)$, $\dot{y}(x)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Пример 1. Найдем производную постоянной функции $y = c$.

Так как
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$$
То
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$
Т.е.
$$c' = 0$$

Пример 2. Найдем производную функции $y = \sin x$.
Имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = $$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользуемся первым замечательным пределом:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = $$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x$$

Таблица производных

1. $c' = 0,\ c = \mathrm{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\ x)' = \mathrm{ch}\ x$
17. $(\mathrm{ch}\ x)' = \mathrm{sh}\ x$
18. $(\mathrm{th}\ x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{th}\ x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Односторонние производные

Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta x > 0$$

Если существует

$$f_{\text{пр}}{}'(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

то он называется правой производной функции $y = f(x)$ в точке x.

Аналогично определяется левая производная функции $y = f(x)$ в точке x:

$$f_{\text{лев}}{}'(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пример 3. Рассмотрим функцию $y = |x|$.

В точке $x = 0$ имеем

$$\Delta y = y(0 + \Delta x) - y(0) =$$

$$= \begin{cases} \Delta x, & \text{при } \Delta x > 0 \\ -\Delta x, & \text{при } \Delta x < 0 \end{cases}$$

поэтому,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{при } \Delta x > 0 \\ -1, & \text{при } \Delta x < 0 \end{cases}$$

Следовательно,

$$y_{\text{пр}}{}'(0) = 1 \neq y_{\text{лев}}{}'(0) = -1$$

Производной в точке $x = 0$ функция $y = |x|$ не имеет.

Физический смысл производной

Пусть x – время, а $y = f(x)$ – координаты точки, движущейся по оси OY, в момент времени x.

Соотношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

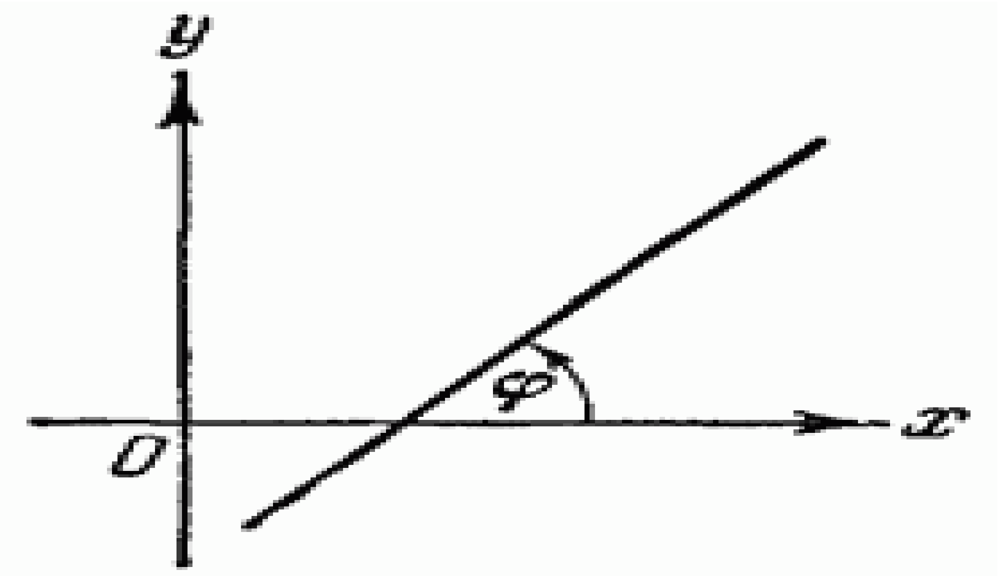
представляет собой *среднюю скорость точки* на промежутке от момента времени x до момента времени $x + \Delta x$, а величина

$$v(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

является *мгновенной скоростью в момент времени* x.

В случае произвольной функции $y = f(x)$ *производная $f'(x)$ характеризует скорость изменения переменной y (функции) относительно изменения аргумента x*.

Геометрический смысл производной



Число $k = tg\varphi$ – *угловой коэффициент прямой* в данной системе координат.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Отметим на графике точки $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ и $B\big(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)\big)$. Прямая AB называется *секущей по отношению к графику функции*. Величину угла между секущей AB и осью абсцисс обозначим α. Устремим Δx к нулю.

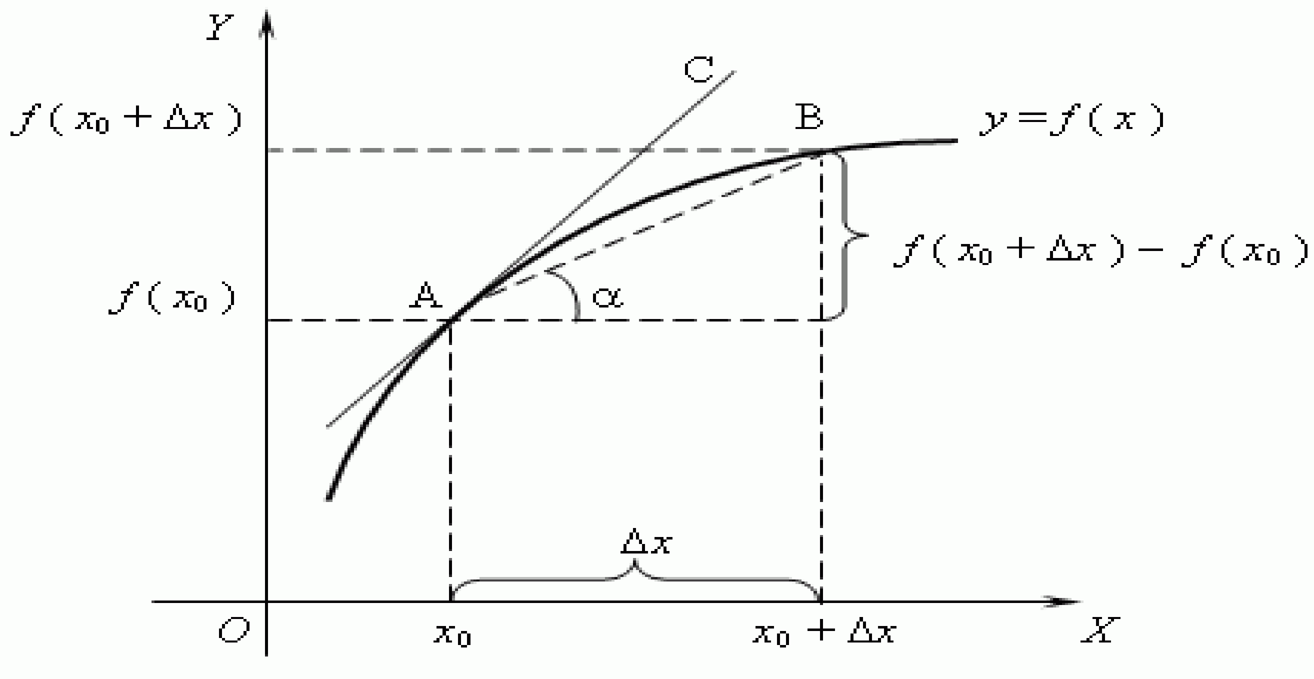


Рис. 1

Определение. *Если существует*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \alpha_0$$

то прямая с угловым коэффициентом $k = tg\alpha_0$, *проходящая через точку* $A\big(x_0, f(x_0)\big)$, называется *касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* A.

Касательная к графику функции $y = f(x)$ *в точке* $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ *есть предельное положение секущей* AB *при* $\Delta x \to 0$.

Теорема. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ *производную* $f'(x_0)$ *, то график функции имеет в точке* $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ *касательную, причем угловой коэффициент касательной равен* $f'(x_0)$.

- $$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Longrightarrow \alpha = arctg\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} arctg\frac{\Delta y}{\Delta x} = arctg \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= arctgf'(x_0)$$

Отсюда следует, что существует касательная к графику функции в точке $A(x_0, f(x_0))$. При этом

$$\alpha_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = arctgf'(x_0)$$

Следовательно,

$$k = tg\alpha_0 = f'(x_0)$$

■

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ *в точке* $A(x_0, f(x_0))$ *имеет вид:*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке , называется *дифференцируемой* в этой точке.
Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется дифференцируемой в этом интервале.

Теорема . *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.*

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Это и означает, что $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

Обратная теорема не верна.

Пример. Функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ не имеет производной, но является непрерывной.

Если функция $y = f(x)$ *имеет непрерывную производную в некотором интервале* $(a; b)$, *то функция называется гладкой на этом интервале.*

Правила дифференцирования

Теорема. *Если функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *дифференцируемы в точке* x, *то функции* $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $u(x)/v(x)$ *(где* $v(x) \neq 0$*) также дифференцируемы в точке* x, *причем:*

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$[u(x)/v(x)]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

- Докажем 2). Положим $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) =$$
$$= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$
$$= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) +$$
$$+u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$
$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x + \Delta x) + u(x)$$
$$\cdot [v(x + \Delta x) - v(x)] =$$
$$= \Delta u \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \Delta v.$$

Отсюда:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

$$y' = [u(x) \cdot v(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

■

Следствие. $[\mathrm{c} \cdot u(x)]' = \mathrm{c} \cdot u'(x),$

где $\mathrm{c} = const$.

Пример 5.

$$[tg(x)]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' =$$

$$\frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Производная обратной функции

Теорема. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена, строго монотонна и непрерывна в окрестности точки* x_0, *дифференцируема в точке* x_0 *и* $f'(x_0) \neq 0$. *Пусть* $f(x_0) = y_0$. *Тогда в некоторой окрестности точки* y_0 *существует обратная функция* $x = f^{-1}(y)$, *эта функция дифференцируема в точке* y_0 *и*

$$f^{-1\prime}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Пример 6. Рассмотрим функцию $y = \sin x$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Эта функция имеет обратную $x = arcsiny$, $-1 < y < 1$. Для любого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполнены условия теоремы:

$$[arcsiny]' = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Заменим y на x:

$$[arcsinx]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$

Замечание. При $x \to \pm 1$ имеем $[arcsinx]' \to +\infty$. В этом случае говорят, что функция в данной точке имеет бесконечную производную. Геометрически это означает, что касательная к графику функции в соответствующей точке параллельна оси OY.

Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию $y = f(t)$,
где $t = \varphi(x)$, то есть $y = f\big(\varphi(x)\big)$.

Теорема. *Пусть функция* $t = \varphi(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 , $\varphi(x_0) = t_0$, *функция* $y = f(t)$ *дифференцируема в точке* t_0. *Тогда сложная функция* $y = f\big(\varphi(x)\big)$ *дифференцируема в точке* x_0 *и выполнено равенство:*

$$\left[f\big(\varphi(x_0)\big)\right]' = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0) = f_\varphi{}' \cdot \varphi_x{}'$$

Пример 7. Найдем производную функции

$$y = \ln\cos(arctge^x)$$

$$y' = \frac{1}{\cos(arctge^x)} \cdot (-\sin(arctge^x)) \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x$$

$$= -tg(arctge^x) \cdot \frac{e^x}{1+e^{2x}} = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Производная степенно-показательной функции

$$y(x) = [u(x)]^{v(x)}, \qquad \text{где } u(x) > 0.$$

Логарифмируем функцию

$$\ln y = \ln u^v = v \ln u$$

$$(\ln y)' = (v \ln u)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$(u^v)' = u^v \cdot \left(v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right)$$

Формула логарифмической производной

$$y' = y \cdot (\ln y)'$$

Производная неявно заданной функции

Если функция задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, *то для нахождения производной* y' *по аргументу* x *достаточно продифференцировать это уравнение по* x, *рассматривая при этом* y *как функцию* x, *затем полученное уравнение разрешить относительно* y'.

Пример 8. Найти производную функции y, заданной уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$
Дифференцируем по x равенство:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3(y + xy') = 0$$

Выражаем y':

$$y^2 \cdot y' - xy' = y - x^2$$

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Производная параметрически заданной функции

$$y = f(x), \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

где t – параметр.

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы, функция $x = x(t)$ имеет обратную, то

$$t'_x = \frac{1}{x_t'}$$

Функцию $y = f(x)$ можно рассматривать как сложную функцию

$$y = f(x) = f\big(t(x)\big)$$

Получим: $\quad y_x' = y_t' \cdot \frac{1}{x_t'}$ или

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$$