Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и a – предельная точка X.

Определение предела (по Коши). *Число* A *называется пределом функции* $f(x)$ *в точке* a *(при* $x \to a$*), если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для любого значения аргумента* x *из проколотой* δ *- окрестности точки* a *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = A}$$

Замечание 1. *Функция может иметь в данной точке не более одного предела.*

Замечание 2. *Если функция имеет предел в точке* a, *то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

Утверждение следует непосредственно из определения предела функции:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$

Односторонние пределы

Функция может иметь различные предельные точки слева и справа в некоторой точке.

Например,

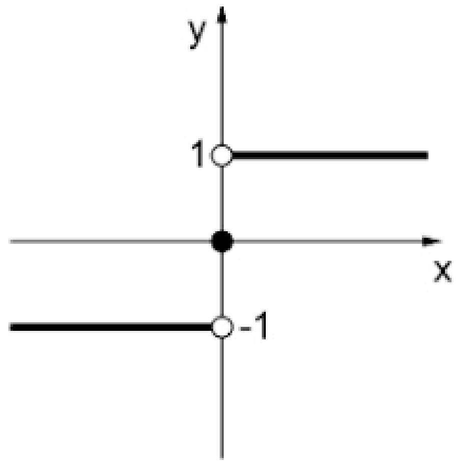

Рис. 10

$$y = sgn\, x = \begin{cases} 1, \text{при } x > 0 \\ 0, \text{при } x = 0 \\ -1, \text{при } x < 0 \end{cases}$$

*Число A называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a справа (слева), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого значения аргумента*
$x \in (a; a + \delta)$ (соответственно $x \in (a - \delta; a)$) *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A \text{ или } f(a+0) = A$$

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A \text{ или } f(a-0) = A$$

Теорема. *Если у функции $f(x)$ существуют в точке a предел слева и предел справа, причем $f(a+0) = f(a-0) = A$, то в данной точке существует предел этой функции, равный A.*

Предел функции при $x \to \infty$

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве X и $\forall N\ \exists x \in X\colon\ x > N$

Число A называется предeлом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такое, что для любого $x > N$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

Аналогично определяется $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$

Если $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

то пишут

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Пример 1. Докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Действительно, $\forall\varepsilon>0$ возьмем $N=\frac{1}{\varepsilon}$.

Тогда

если $x>N=\frac{1}{\varepsilon}$, то $\frac{1}{x}<\varepsilon$, т.е. $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$.

Предел числовой последовательности

Числовая последовательность – это функция, определенная на множестве натуральных чисел: $f(n)\colon n \in \mathbb{N}$ $\quad\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

Число A *называется* *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$, *такой, что* $\forall n > N$ *выполнено неравенство* $|x_n - A| < \varepsilon$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

Если последовательность имеет предел, то говорят, что она *сходится*, а если не имеет предела, то *расходится.*

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой в точке* a (при $x \to a$), если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

иначе,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \\ \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Пример 2: Функция $f(x) = \sin x$ является б.м. в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{если } x \neq 0 \\ 1, \qquad \text{если } x = 0 \end{cases}$$

также является б.м. в точке $x = 0$

Функция

$$sgn\, x = \begin{cases} 1, \text{при } x > 0 \\ 0, \text{при } x = 0 \\ -1, \text{при } x < 0 \end{cases}$$

не является б. м. в точке $x = 0$.

Аналогично определяется б. м. при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) функция, в частности, *бесконечно малая последовательность* $\{x_n\}$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

Пример 3: 1) Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является б. м. при $x \to +\infty$

2) Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ является б. м.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой в точке a (при $x \to a$)*, если

$$\forall A > 0\ \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| > A$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Пример 3: Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является б. б. в точке $x = 0$.

(Для доказательства достаточно $\forall A > 0$ взять $\delta = \frac{1}{A}$).

Аналогично определяется б. б. функция при $x \to +\infty$ $(-\infty)$, а также при $x \to a + 0$ (-0)

<u>Теорема</u> (о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций)

Пусть $f(x)$ *определена в некоторой проколотой окрестности точки* a, *то*

1) *Если* $f(x)$ *- б. б. в точке* a *функция, то в некоторой проколотой окрестности точки* a *определена функция* $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ *и она является б. м. в точке* a.

2) *Если* $f(x)$ *- б. м. в точке* a *функция, то в некоторой проколотой окрестности точки* a *определена функция* $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ *и она является б. б. в точке* a.

Основные свойства бесконечно малых функций

Теорема1. *Сумма и разность двух бесконечно малых в точке* a *функций есть функция бесконечно малая в точке* a.

- Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б. м. в точке a. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, также

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0,\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall x$ из окрестности $0 < |x - a| < \delta$ выполнены неравенства

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\}$ выполнено $|f(x) \pm$

Теорема 2. *Произведение бесконечно малой в точке a функции на ограниченную в окрестности точки a функцию есть функция бесконечно малая в точке a.*

Следствие 1. Произведение конечного числа ограниченных функций, из которых хотя бы одна – б. м. в точке a, есть функция бесконечно малая в точке a.

Следствие 2. Частное от деления бесконечно малой в точке а функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел в точке а есть функция бесконечно малая в точке a.

Неопределенности

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б. м. в точке a. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

называется *неопределенностью типа* $\frac{0}{0}$ $\left(\left[\frac{0}{0}\right]\right)$

Пример 4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

является неопределенностью $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б. б. в точке a. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

называется *неопределенностью типа* $\frac{\infty}{\infty}$ $\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)$.

Существуют другие типы неопределенностей, например,

$$[\infty-\infty], [\infty\cdot 0], [\infty^0], [0^0], [1^\infty]$$

Основные теоремы о пределах

<u>Теорема</u> (о связи между функцией, пределом и бесконечно малой функцией)

1) *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$,
то $f(x) = A + \alpha(x)$, *где* $\alpha(x)$ – *б. м. в точке* a.

2) *Если* $f(x) = A + \alpha(x)$, *где* $\alpha(x)$ – *б. м. в точке* a *и* A – *число, то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

- 1) Согласно определению предела $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Это означает, что функция $\alpha(x) = f(x) - A$ – бесконечно малая в точке a.

Представим $f(x)$ в виде

$f(x) = A + (f(x) - A) = A + \alpha(x)$.

Алгебраические свойства пределов функций

Теорема. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в проколотой окрестности точки* a *и, пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B.$

Тогда:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = A \cdot B;$$

Если $B \neq 0$ *, то в некоторой проколотой окрестности точки* a *определена функция* $f(x)/g(x)$ *и*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

1) Согласно теореме о связи функции, предела и б. м.

$$f(x) = A + \alpha(x), \qquad g(x) = B + \beta(x)$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б. м. в точке a.

Поэтому

$$f(x) \pm g(x) = (A \pm B) + \big(\alpha(x) \pm \beta(x)\big) =$$
$$= (A \pm B) + \gamma(x)$$

где $\gamma(x) = \alpha(x) \pm \beta(x)$ - б. м. в точке a.
Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = A \pm B$$

Следствие 1.

$$\lim_{x \to a} c\, f(x) = c\, A$$

где $c = const$

Следствие 2. *Пусть* $P_n(x)$ *и* $Q_m(x)$ – *многочлены степени* n *и* m. *Если* $Q_m(a) \neq 0$, *то*

$$\lim_{x \to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}$$

Замечание. Алгебраические свойства предела допускают обобщение на функции, являющиеся б. м. или б. б. в точке a, например

$$[\infty \cdot \infty] = \infty,\ [c \cdot \infty] = \infty,\ \left[\frac{c}{0}\right] = \infty,\ \left[\frac{c}{\infty}\right] = 0,\ \left[\frac{\infty}{0}\right] = \infty,\ \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x}{x^2-5x+6}=\left[\frac{8}{0}\right]=\infty$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-3)}=\frac{2}{-1}-2$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

Пример 8.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+x+4}{4x^3+3x^2+2x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}$$

Порядковые свойства предела

Теорема. *Если в некоторой проколотой окрестности точки* a *выполняется неравенство* $f(x) \geq B$ ($f(x) \leq B$) *и существует*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

то $A \geq B$ $(A \leq B)$.

Замечание. Теорема справедлива в отношении предела функции при $x \to +\infty$.

Теорема (о пределе промежуточной функции)

Если в проколотой окрестности точки a *выполняются неравенства*

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

и существуют пределы функций $f(x)$ *и* $h(x)$ *в точке* a*, причем*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$$

то существует

$$\lim_{x\to a} g(x) = A$$

- Зададим произвольное $\varepsilon > 0$.

Согласно определению предела функции найдется проколотая δ – окрестность точки a, в которой $|f(x) - A| < \varepsilon$ и $|h(x) - A| < \varepsilon$, кроме того

$$f(x) - A \leq g(x) - A \leq h(x) - A$$

Отсюда следует, что $|g(x) - A| < \varepsilon$ при $x \epsilon \{0 < |x - a| < \delta\}$, что и означает, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ ■

Теорема (о пределе монотонной функции)

Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена на полупрямой $x \geq a$, то существует

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

Замечание. Аналогичная теорема имеет место для правого и левого предела функции в точке a: если функция $f(x)$ монотонна и ограничена в правой (левой) полуокрестности точки a, то существует

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \ (\lim_{x \to a-0} f(x))$$

Следствие. Монотонная ограниченная последовательность сходится.

Пример. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718281828\ldots$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

или

$$\lim_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(этот предел является неопределенностью типа $[1^{\infty}]$)

Пример 9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3\cdot 7x}=\frac{3}{7}$$

Формы первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

Пример 10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=1$$

Пример. 11

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = [1^\infty] =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}\cdot\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\cdot x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}} = e^8$$

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б.м. в точке a.
Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка* (имеет более высокий порядок малости), *чем* $g(x)$ *при* $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Обозначение $f = o(g)$ при $x \to a$ (o *– малое от* g)

Пример 7. $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка (имеют одинаковый порядок малости) при $x \to a$*, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$$

Обозначение $f = O(g)$ при $x \to a$

(*O – большое* от g)

Пример 12. $2x^2 + x^3 = O(x^2)$ при $x \to 0$, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + x^3}{x^2} = 2$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми при $x \to a$,* если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение $f \sim g$ при $x \to a$

Пример 13. $x^2 + x^3 \sim x^2$ при $x \to 0$.

Замечание. Равенства с символом о – малое, как правило, верны только в одну сторону, слева направо. Например, $x^2 = o(x)$, но $x \neq o(x^2)$ при $x \to 0$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б. б. в точке a.

Функция $f(x)$ *имеет более высокий порядок роста*, чем $g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Пример 14. Функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ имеет более высокий порядок роста, чем функция $g(x) = \frac{1}{x}$ при $x \to 0$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ *имеют одинаковый порядок роста при* $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$$

Пример 15. Функции $f(x) = \frac{1}{x+1}$ и $g(x) = \frac{1}{x}$ имеют одинаковый порядок роста при $x \to 0$.

Основные эквивалентные соотношения $(x \to 0)$

1.	$\sin x \sim x$	6.	$\ln(1+x) \sim x$
2.	$\arcsin x \sim x$	7.	$\log_a x \sim \dfrac{x}{\ln a}$
3.	$\mathrm{tg}\, x \sim x$	8.	$a^x - 1 \sim x \ln a$
4.	$\mathrm{arctg}\, x \sim x$	9.	$e^x - 1 \sim x$
5.	$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	10.	$(1+x)^m - 1 \sim mx$

Докажем, например, 7):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

Отсюда

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$$

Как частный случай получим 7):

$$\ln(1+x) \sim x$$

Теорема 1. *Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.*
Теорема 2. *Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.*
Теорема 3. *Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.*

■ Докажем Теорему 1.

Пусть $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to a$. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{g_1(x)}{g_1(x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

■

Пример.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n$$
$$\text{при } x \to \infty, a_n \neq 0$$

Действительно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_n x^n} =$$
$$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n} = 1$$

Пример 14.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$

Пример 15.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}$$