

# УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ДЛЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ



## КРИПТОГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ



Б. Я. РЯБКО  
А. Н. ФИОНОВ

2-е издание

**Б. Я. РЯБКО  
А. Н. ФИОНОВ**

# **КРИПТОГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ**

**2-е издание, стереотипное**

*Рекомендовано УМО по образованию в области телекоммуникаций  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальностям:*

*«Многоканальные телекоммуникационные системы»,*

*«Радиосвязь, радиовещание и телевидение»,*

*«Защищенные системы связи»*

**Москва  
Горячая линия — Телеком  
2012**

**Рябко Б. Я., Фионов А. Н.**  
**Р 98** Криптографические методы защиты информации: Учебное пособие для вузов. – 2-е издание, стереотип. – М.: Горячая линия–Телеком, 2012. – 229 с.: ил.

ISBN 978-5-9912-0286-2.

Изложены основные подходы и методы современной криптографии для решения задач, возникающих при обработке, хранении и передаче информации. Основное внимание уделено новым направлениям криптографии, связанным с обеспечением конфиденциальности взаимодействий пользователей компьютеров и компьютерных сетей. Рассмотрены основные шифры с открытыми ключами, методы цифровой подписи, основные криптографические протоколы, блочные и потоковые шифры, криптографические хеш-функции, а также редко встречающиеся в литературе вопросы о конструкции доказуемо невскрываемых криптосистем и криптографии на эллиптических кривых. Изложение теоретического материала ведется достаточно строго, но с использованием элементарного математического аппарата. Подробно описаны алгоритмы, лежащие в основе криптографических отечественных и международных стандартов. Приведены задачи и упражнения, необходимые при проведении практических занятий и лабораторных работ.

Для студентов, обучающихся по направлению «Телекоммуникации», будет полезна специалистам.

**32.801.4**

*Адрес издательства в Интернет [www.techbook.ru](http://www.techbook.ru)*

Учебное издание

**Рябко** Борис Яковлевич  
**Фионов** Андрей Николаевич

## **Криптографические методы защиты информации**

*Учебное пособие*

Обложка художника В. Г. Ситникова

Подписано в печать 05.06.2012. Формат 60×90/16. Уч.-изд. л. 14,5. Тираж 500 экз. (1-й завод 200 экз.) Изд. № 120286

ISBN 978-5-9912-0286-2

© Б. Я. Рябко, А. Н. Фионов, 2005, 2012

© Издательство «Горячая линия–Телеком», 2012

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение многих столетий криптография, т.е. наука о шифровании, или «закрытии» информации от несанкционированного использования, применялась в основном для защиты сообщений, которыми обменивались государственные чиновники или военные. Поэтому круг людей, применявших криптографию, был весьма ограничен, а сами методы этой науки секретны. Однако в последние десятилетия, когда человечество вступило в стадию информационного общества, криптографические методы защиты информации стали использоваться очень широко, обслуживая, в первую очередь, потребности бизнеса. Причем имеются в виду не только межбанковские расчеты по компьютерным сетям или, скажем, биржи, в которых все расчеты проводятся через Интернет, но и многочисленные операции, в которых ежедневно участвуют миллионы, если не миллиарды «обычных» людей, а именно: расчеты по кредитным карточкам, перевод заработной платы в банк, заказ билетов через Интернет, покупки в Интернет-магазинах и т.д., и т.п. Естественно, все эти операции, как и, скажем, разговоры по мобильным телефонам и электронная почта, должны быть защищены от нечестных или просто чрезмерно любопытных людей и организаций. Поэтому в наши дни в разработку и эксплуатацию систем защиты информации вовлечено множество специалистов, работающих в сфере информационных технологий. Так как многие из таких методов основываются на результатах современной криптографии, то теперь эта дисциплина преподается на факультетах университетов, готовящих специалистов по информационным технологиям.

Предлагаемое учебное пособие в значительной степени базируется на курсе лекций, который профессор Б. Я. Рябко читал сначала аспирантам, а затем студентам Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики, обучавшимся по специальностям, связанным с программированием и компьютерными сетями, и для которых курс «Защита информации» является обязательным. Как можно заключить из названия, эта книга предна-

значена для студентов и инженеров, специализирующихся в области информационных технологий, поэтому она рассчитана на людей со знанием математики в объеме, даваемом в технических вузах. Все необходимые сведения из теории чисел и теории вероятностей приводятся в книге, причем не в виде отдельных разделов, а по мере необходимости. Такой стиль позволяет поддерживать интерес студентов на лекциях и, как мы надеемся, поможет и читателям книги.

При изложении материала мы старались следовать принципу А. Эйнштейна «Все должно делаться настолько просто, насколько это возможно, но не проще» и соблюдать правило «... Кратко и подробно», сформулированное одним из героев известной поэмы А. Твардовского. Поэтому мы не пытались описать всю современную криптографию на строгом математическом уровне и во всей общности, но, как нам кажется, рассмотрели основные идеи и методы криптографии, применяемые в информационных технологиях, как мы надеемся, без их вульгаризации. При этом, хотя главный упор в книге делается на объяснение основных идей и принципов, в ней содержится также точное описание целого ряда практически используемых методов, в том числе и российских ГОСТов на криптографические алгоритмы.

Содержание первых пяти глав может быть основой семестрового курса. Другие главы могут быть использованы при чтении спецкурсов. Наш опыт показывает, что усвоению материала помогают практические занятия и лабораторные работы в компьютерных классах, в ходе которых студенты реализуют все основные алгоритмы из указанных глав. Поэтому пособие содержит снабженные ответами задачи и темы лабораторных работ.

Мы надеемся, что это учебное пособие поможет читателям не только понять основные задачи и методы современной криптографии, но и оценить красоту и изящество ее идей и результатов.

# Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

Мы начинаем изложение основ криптографии с классической задачи передачи секретных сообщений от некоторого отправителя  $A$  к получателю  $B$ .

Отправитель сообщений и их получатель могут быть физическими лицами, организациями, какими-либо техническими системами. Иногда об  $A$  и  $B$  говорят как об абонентах некоторой сети, о пользователях некоторой компьютерной системы или, еще более формально, как об абстрактных «сторонах» (англоязычный термин «party») или «сущностях» (entity), участвующих в информационном взаимодействии. Но чаще бывает удобно отождествлять участников обмена с некоторыми людьми и заменить формальные обозначения  $A$  и  $B$  на Алиса и Боб.

Предполагается, что сообщения передаются по так называемому «открытому» каналу связи, в принципе доступному для прослушивания некоторым другим лицам, отличным от получателя и отправителя. Такая ситуация возникает при радиопередаче сообщений (например, посредством мобильного телефона) и возможна при использовании даже таких «проверенных» каналов связи, как проводной телефон, телеграф, да и обычная почта. Особый интерес как средство передачи данных, стремительно завоевывающее лидирующие позиции во всем мире и в то же время чрезвычайно уязвимое с точки зрения возможности несанкционированного доступа третьих лиц, представляет Интернет. В этой среде легко реализуется не только копирование, но и подмена передаваемых сообщений.

В криптографии обычно предполагается, что у лица, передающего сообщения и (или) их принимающего, есть некоторый противник  $E$ , который может быть конкурентом в бизнесе, членом преступной группировки, представителем иностранной разведки или даже чрезмерно ревнивой женой, и этот противник может перехватывать сообщения, передаваемые по открытому каналу, и анализировать их. Часто удобно рассматривать противника как некую особу по имени Ева, которая имеет в своем распоряжении мощную вычислительную

технику и владеет методами криптоанализа. Естественно, Алиса и Боб хотят, чтобы их сообщения были непонятны Еве, и используют для этого специальные шифры.

Перед тем как передать сообщение по открытому каналу связи от  $A$  к  $B$ ,  $A$  шифрует сообщение, а  $B$ , приняв зашифрованное сообщение, дешифрует его, восстанавливая исходный текст. Важно то, что в рассматриваемой нами в этой главе задаче Алиса и Боб могут договариваться об используемом ими шифре (или, скорее, о некоторых его параметрах) не по открытому каналу, а по специальному «закрытому» каналу, недоступному для прослушивания противником. Такой «закрытый канал» может быть организован при помощи курьеров, или же Алиса и Боб могут обмениваться шифрами во время личной встречи и т.п. При этом надо учитывать, что обычно организация такого закрытого канала и передача по нему сообщений слишком дороги по сравнению с открытым каналом и (или) закрытый канал не может быть использован в любое время. Например, курьерская почта намного дороже обычной, передача сообщений с ее помощью происходит намного медленнее, чем, скажем, по телеграфу, да и использовать ее можно не в любое время суток и не в любой ситуации.

Чтобы быть более конкретными, рассмотрим пример шифра. Так как проблема шифрования сообщений возникла еще в глубокой древности, некоторые шифры связаны с именами известных исторических личностей и в качестве первых примеров обычно используют именно такие шифры. Мы также будем придерживаться этой традиции. Начнем с известного шифра Гая Юлия Цезаря (см., например, [2, 28]), адаптировав его к русскому языку. В этом шифре каждая буква сообщения заменяется на другую, номер которой в алфавите на три больше. Например,  $A$  заменяется на  $G$ ,  $B$  на  $D$  и т.д. Три последние буквы русского алфавита —  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{A}$  — шифруются буквами  $A$ ,  $B$ ,  $V$  соответственно. Например, слово ПЕРЕМЕНА после применения к нему шифра Цезаря превращается в ТИУИПИРГ (если исключить букву  $\mathcal{E}$  и считать, что в алфавите 32 буквы).

Последующие римские цезари модифицировали шифр, используя смещение в алфавите на четыре, пять и более букв. Мы можем описать их шифр в общем виде, если пронумеруем (закодируем) буквы русского алфавита числами от 0 до 31 (исключив букву  $\mathcal{E}$ ). Тогда

правило шифрования запишется следующим образом:

$$c = (m + k) \bmod 32, \quad (1.1)$$

где  $m$  и  $c$  — номера букв соответственно сообщения и шифротекста, а  $k$  — некоторое целое число, называемое ключом шифра (в рассмотренном выше шифре Цезаря  $k = 3$ ). (Здесь и в дальнейшем  $a \bmod b$  обозначает остаток от деления целого числа  $a$  на целое число  $b$ , причем остаток берется из множества  $\{0, 1, \dots, b - 1\}$ . Например,  $13 \bmod 5 = 3$ .)

Чтобы дешифровать зашифрованный текст, нужно применить «обратный» алгоритм

$$m = (c - k) \bmod 32. \quad (1.2)$$

Можно представить себе ситуацию, когда источник и получатель сообщений договорились использовать шифр (1.1), но для того, чтобы усложнить задачу противника, решили иногда менять ключ шифра. Для этого Алиса каким-либо образом генерирует число  $k$ , передает его Бобу по закрытому каналу связи, и после этого они обмениваются сообщениями, зашифрованными с помощью этого ключа  $k$ . Замену ключа можно проводить, например, перед каждым сеансом связи или после передачи фиксированного числа букв (скажем, каждую десятку символов шифровать со своим  $k$ ) и т.п. В таком случае говорят, что ключ порождается источником ключа. Схема рассмотренной криптосистемы с секретным ключом приведена на рис. 1.1.

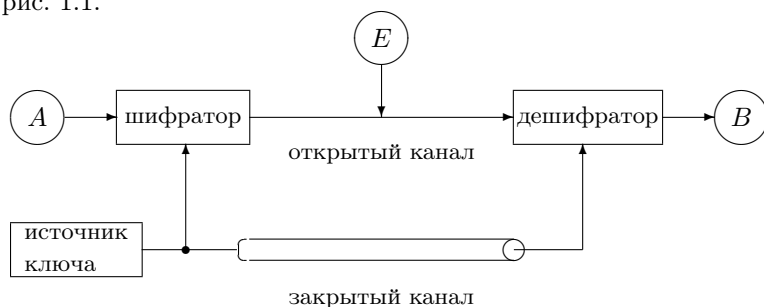


Рис. 1.1. Классическая система секретной связи



Обратимся теперь к анализу действий противника, пытающегося расшифровать сообщение и узнать секретный ключ, иными словами, вскрыть, или взломать шифр. Каждая попытка вскрытия шифра называется атакой на шифр (или на криптосистему). В криптографии принято считать, что противник может знать использованный алгоритм шифрования, характер передаваемых сообщений и перехваченный шифротекст, но не знает секретный ключ. Это называется «правилом Керкхофса» (см. [28]) в честь ученого, впервые сформулировавшего основные требования к шифрам (А. Kerckhoffs, 1883). Иногда это правило кажется «перестраховкой», но такая «перестраховка» отнюдь не лишняя, если, скажем, передается распоряжение о переводе миллиона долларов с одного счета на другой.

В нашем примере Ева знает, что шифр был построен в соответствии с (1.1), что исходное сообщение было на русском языке и что был передан шифротекст ТИУИПИРГ, но ключ Еве не известен.

Наиболее очевидная попытка расшифровки — последовательный перебор всех возможных ключей (это так называемый метод «грубой силы» (brute-force attack)). Итак, Ева перебирает последовательно все возможные ключи  $k = 1, 2, \dots$ , подставляя их в алгоритм дешифрования и оценивая получающиеся результаты. Попробуем и мы использовать этот метод. Результаты дешифрования по (1.2) при различных ключах и шифротексте ТИУИПИРГ сведены в табл. 1.1. В большинстве случаев нам достаточно было расшифровать две–три буквы, чтобы отвергнуть соответствующий ключ (из-за отсутствия слова в русском языке, начинающегося с такого фрагмента).

Таблица 1.1. Расшифровка слова ТИУИПИРГ путем перебора ключей

$k$	$m$	$k$	$m$	$k$	$m$	$k$	$m$
1	СЗТ	9	ЙЯ	17	БЧ	25	ЩП
2	РЖС	10	ИЮЙ	18	АЦБ	26	ШОЩ
3	ПЕРЕМЕНА	11	ЗЭИ	19	ЯХА	27	ЧН
4	ОДП	12	ЖЪ	20	ЮФ	28	ЦМ
5	НГ	13	ЕЫ	21	ЭУ	29	ХЛЦ
6	МВ	14	ДЪ	22	Ь	30	ФК
7	ЛБМ	15	ГЩ	23	Ы	31	УЙ
8	КАЛАЗ	16	ВШГ	24	Ъ	32	ТИУИПИРГ

Из табл. 1.1 мы видим, что был использован ключ  $k = 3$  и зашифровано сообщение ПЕРЕМЕНА. Причем для того, чтобы про-

верить остальные возможные значения ключа, нам не требовалось дешифровать все восемь букв, а в большинстве случаев после анализа двух–трех букв ключ отвергался (только при  $k = 8$  надо было дешифровать пять букв, зато при  $k = 22, 23, 24$  хватало и одной, так как в русском языке нет слов, начинающихся с Ъ, Ъ, Ы).

Из этого примера мы видим, что рассмотренный шифр совершенно нестойк, для его вскрытия достаточно проанализировать несколько первых букв сообщения и после этого ключ  $k$  однозначно определяется (и, следовательно, однозначно дешифруется все сообщение).

В чем же причины нестойкости рассмотренного шифра и как можно было бы увеличить его стойкость? Рассмотрим еще один пример. Алиса спрятала важные документы в ячейке камеры хранения, снабженной пятидекадным кодовым замком. Теперь она хотела бы сообщить Бобу комбинацию цифр, открывающую ячейку. Она решила использовать аналог шифра Цезаря, адаптированный к алфавиту, состоящему из десятичных цифр:

$$c = (m + k) \bmod 10.$$

(1.3)

Допустим, Алиса послала Бобу шифротекст 26047. Ева пытается расшифровать его, последовательно перебирая все возможные ключи. Результаты ее попыток сведены в табл. 1.2.

Т а б л и ц а 1.2. **Расшифровка сообщения 26047 путем перебора ключей**

$k$	$m$	$k$	$m$
1	15936	6	60481
2	04825	7	59370
3	93714	8	48269
4	82603	9	37158
5	71592	0	26047

Мы видим, что все полученные варианты равнозначны и Ева не может понять, какая именно комбинация истинна. Анализируя шифротекст, она не может найти значения секретного ключа. Конечно, до перехвата сообщения у Евы было  $10^5$  возможных значений кодовой комбинации, а после — только 10. Однако важно отметить то, что в данном случае всего 10 значений ключа. Поэтому при таком ключе

(одна десятичная цифра) Алиса и Боб и не могли рассчитывать на большую секретность.

В первом примере сообщение — текст на русском языке, поэтому оно подчиняется многочисленным правилам, различные буквы и их сочетания имеют различные вероятности и, в частности, многие наборы букв вообще запрещены. (Это свойство называется избыточностью текста). Поэтому-то и удалось легко подобрать ключ и дешифровать сообщение, т.е. избыточность позволила «взломать» шифр. В противоположность этому, во втором примере все комбинации цифр допустимы. «Язык» кодового замка не содержит избыточности. Поэтому даже простой шифр, примененный к сообщениям этого языка, становится невскрываемым. В классической работе К. Шеннона [19] построена глубокая и изящная теория шифров с секретным ключом и, в частности, предложена «правильная» количественная мера избыточности. Мы кратко коснемся этих вопросов в главе 7, а в главе 8 будут описаны современные шифры с секретным ключом.

Описанная в приведенных примерах атака называется атакой по *шифротексту*. Но часто на шифр может быть проведена атака по *известному тексту*. Это происходит, если Ева получает в свое распоряжение какие-либо открытые тексты, соответствующие ранее переданным зашифрованным. Сопоставляя пары «текст–шифротекст», Ева пытается узнать секретный ключ, чтобы с его помощью дешифровать все последующие сообщения от Алисы к Бобу.

Можно представить себе и более «серьезную» атаку — атаку по *выбранному тексту*, когда противник пользуется не только представленными ему парами «текст–шифротекст», но может и сам формировать нужные ему тексты и шифровать их с помощью того ключа, который он хочет узнать. Например, во время Второй мировой войны американцы, подкупив охрану, выкрали шифровальную машину в японском посольстве на два дня и имели возможность подавать ей на вход различные тексты и получать соответствующие шифровки. (Они не могли взломать машину с целью непосредственного определения заложенного в нее секретного ключа, так как это было бы замечено и повлекло бы за собой смену всех ключей.)

Может показаться, что атаки по известному и выбранному тексту надуманы и далеко не всегда возможны. Отчасти это так. Но разработчики современных криптосистем стремятся сделать их неуязвимыми даже и по отношению к атакам по выбранному тексту, и

на этом пути достигнуты значительные успехи. Иногда считается, что более надежно использовать шифр, противостоящий атаке по выбранному тексту, чем организационно обеспечивать неосуществимость такой атаки, хотя наиболее осторожные пользователи делают и то, и другое.

Итак, мы познакомились с основными героями криптографии — Алисой, Бобом и Евой и с важными понятиями этой науки — шифром, ключом, атакой, открытым и защищенным каналом. Заметим, что с последним понятием связан один интригующий факт — возможно построение надежных криптосистем без защищенного канала! В таких системах Алиса и Боб вычисляют секретный ключ так, что Ева не может этого сделать. Это открытие было сделано в основополагающих работах Диффи, Хеллмана и Меркля (см., например, [22]) в 1976 году и открыло новую эру в современной криптографии. Большая часть этой книги будет связана именно с такими системами, называемыми схемами с открытым, или несимметричным ключом.

## Задачи и упражнения

**1.1.** Определить ключи шифра Цезаря, если известны следующие пары открытый текст – шифротекст:

- а. АПЕЛЬСИН – САЦЪНВЩЮ,
- б. АБРИКОС – ЫЪЛГЕЙМ.

**1.2.** Расшифровать следующие сообщения, зашифрованные шифром Цезаря с неизвестным ключом  $k$ ,  $0 < k < 32$ :

- а. ФХНЗКЧ,
- б. ЦЩЕБФ.

## Глава 2. КРИПТОСИСТЕМЫ С ОТКРЫТЫМ КЛЮЧОМ

### 2.1. Предыстория и основные идеи

Рассмотрим три задачи, решение которых поможет нам лучше понять идеи и методы криптографии с открытым ключом. Все эти задачи имеют важное практическое значение.

Первая задача — хранение паролей в компьютере. Мы знаем, что каждый пользователь в сети имеет свой секретный пароль. При входе в сеть пользователь указывает свое имя (несекретное) и затем вводит пароль. Проблема состоит в следующем: если хранить пароль на диске компьютера, то Ева может прочесть его, а затем использовать для несанкционированного доступа (особенно легко это сделать, если Ева работает системным администратором этой сети). Поэтому необходимо организовать хранение паролей в компьютере так, чтобы такой «взлом» был невозможен.

Вторая задача возникла с появлением радиолокаторов и системы ПВО. При пересечении самолетом границы радиолокатор спрашивает пароль. Если пароль верный, то самолет «свой», в противном случае — «чужой». Здесь возникает такая проблема: так как пароль должен передаваться по открытому каналу (воздушной среде), то противник может прослушивать все переговоры и узнавать правильный пароль. Затем «чужой» самолет в случае запроса повторит перехваченный ранее «правильный» пароль в качестве ответа локактору и будет пропущен.

Третья задача похожа на предыдущую и возникает в компьютерных сетях с удаленным доступом, например, при взаимодействии банка и клиента. Обычно в начале сеанса банк запрашивает у клиента имя, а затем секретный пароль, но Ева может узнать пароль, так как линия связи открыта.

Сегодня все эти проблемы решаются с использованием криптографических методов. Решение всех этих задач основано на важном понятии односторонней функции (one-way function).

**Определение 2.1.** Пусть дана функция

$$y = f(x), \quad (2.1)$$

определенная на конечном множестве  $X$  ( $x \in X$ ), для которой существует обратная функция

$$x = f^{-1}(y). \quad (2.2)$$

Функция называется *односторонней*, если вычисление по формуле (2.1) — простая задача, требующая немного времени, а вычисление по (2.2) — задача сложная, требующая привлечения массы вычислительных ресурсов, например,  $10^6$ – $10^{10}$  лет работы мощного суперкомпьютера.

Данное определение, безусловно, неформально. Строгое определение односторонней функции может быть найдено в [26, 28], но для наших целей достаточно и вышеприведенного.

В качестве примера односторонней функции рассмотрим следующую:

$$y = a^x \bmod p, \quad (2.3)$$

где  $p$  — некоторое простое число (т.е. такое, которое делится без остатка только на себя и на единицу), а  $x$  — целое число из множества  $\{1, 2, \dots, p-1\}$ . Обратная функция обозначается

$$x = \log_a y \bmod p \quad (2.4)$$

и называется *дискретным логарифмом*.

Для того чтобы обеспечить трудность вычисления по (2.4) при использовании лучших современных компьютеров, в настоящее время используются числа размером более 512 бит. На практике часто применяются и другие односторонние функции, например, так называемые хеш-функции, оперирующие с существенно более короткими числами порядка 60–120 бит (они будут рассмотрены в главе 8).

Сначала мы покажем, что вычисление по (2.3) может быть выполнено достаточно быстро. Начнем с примера вычисления числа  $a^{16} \bmod p$ . Мы можем записать

$$a^{16} \bmod p = \left( \left( (a^2)^2 \right)^2 \right)^2 \bmod p,$$

т.е. значение данной функции вычисляется всего за 4 операции умножения вместо 15 при «наивном» варианте  $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ . На этом основан общий алгоритм.

Для описания алгоритма введем величину  $t = \lfloor \log_2 x \rfloor$  — целую часть  $\log_2 x$  (далее все логарифмы будут двоичные, поэтому в дальнейшем мы не будем указывать основание 2). Вычисляем числа ряда

$$a, \quad a^2, \quad a^4, \quad a^8, \quad \dots, \quad a^{2^t} \pmod{p}. \quad (2.5)$$

В ряду (2.5) каждое число получается путем умножения предыдущего числа самого на себя по модулю  $p$ . Запишем показатель степени  $x$  в двоичной системе счисления:

$$x = (x_t x_{t-1} \dots x_1 x_0)_2.$$

Тогда число  $y = a^x \bmod p$  может быть вычислено как

$$y = \prod_{i=0}^t a^{x_i \cdot 2^i} \bmod p \quad (2.6)$$

(все вычисления проводятся по модулю  $p$ ).

**Пример 2.1.** Пусть требуется вычислить  $3^{100} \bmod 7$ . Имеем  $t = \lfloor \log 100 \rfloor = 6$ . Вычисляем числа ряда (2.5):

$$\begin{array}{ccccccc} a & a^2 & a^4 & a^8 & a^{16} & a^{32} & a^{64} \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{array} \quad (2.7)$$

Записываем показатель в двоичной системе счисления:

$$100 = (1100100)_2$$

и проводим вычисления по формуле (2.6):

$$\begin{array}{cccccccc} a^{64} & a^{32} & & & a^4 & & & \\ 4 & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 4 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & = & 4 \end{array} \quad (2.8)$$

Нам потребовалось всего 8 операций умножения (6 для вычисления ряда (2.7) и 2 для (2.8)).  $\square$

В общем случае справедливо следующее

**Утверждение 2.1 (о сложности вычислений (2.3)).** *Количество операций умножения при вычислении (2.3) по описанному методу не превосходит  $2 \log x$ .*

**Доказательство.** Для вычисления чисел ряда (2.5) требуется  $t$  умножений, для вычисления  $y$  по (2.6) не более, чем  $t$  умножений (см. пример 2.1). Из условия  $t = \lfloor \log x \rfloor$ , учитывая, что  $\lfloor \log x \rfloor \leq \log x$ , делаем вывод о справедливости доказываемого утверждения. □

**З а м е ч а н и е.** Как будет показано в дальнейшем, при возведении в степень по модулю  $p$  имеет смысл использовать только показатели  $x < p$ . В этом случае мы можем сказать, что количество операций умножения при вычислении (2.3) не превосходит  $2 \log p$ .

Важно отметить, что столь же эффективные алгоритмы вычисления обратной функции (2.4) неизвестны. Один из методов вычисления (2.4), называемый «шаг младенца, шаг великана», будет подробно описан в разд. 3.2. Этот метод требует порядка  $2\sqrt{p}$  операций.

Покажем, что при больших  $p$  функция (2.3) действительно односторонняя, если для вычисления обратной функции используется метод «шаг младенца, шаг великана». Получаем следующий результат (табл. 2.1).

**Т а б л и ц а 2.1. Количество умножений для вычисления прямой и обратной функции**

Количество десятичных знаков в записи $p$	Вычисление (2.3) ( $2 \log p$ умножений)	Вычисление (2.4) ( $2\sqrt{p}$ умножений)
12	$2 \cdot 40 = 80$	$2 \cdot 10^6$
60	$2 \cdot 200 = 400$	$2 \cdot 10^{30}$
90	$2 \cdot 300 = 600$	$2 \cdot 10^{45}$

Мы видим, что если использовать модули, состоящие из 50–100 десятичных цифр, то «прямая» функция вычисляется быстро, а обратная практически не вычислима. Рассмотрим, например, суперкомпьютер, который умножает два 90-значных числа за  $10^{-14}$  сек. (для современных компьютеров это пока не доступно). Для вычисления (2.3) такому компьютеру потребуется

$$T_{\text{выч.пр.}} = 600 \cdot 10^{-14} = 6 \cdot 10^{-12} \text{ сек.},$$



а для вычисления (2.4) —

$$T_{\text{выч.обр.}} = 10^{45} \cdot 10^{-14} = 10^{31} \text{ сек.},$$

т.е. более  $10^{22}$  лет. Мы видим, что вычисление обратных функций практически невозможно при длине чисел порядка 90 десятичных цифр, и использование параллельных вычислений и компьютерных сетей существенно не меняет ситуацию. В рассмотренном примере мы предполагали, что обратная функция вычисляется за  $2\sqrt{p}$  операций. В настоящее время известны и более «быстрые» методы вычисления дискретного логарифма, однако общая картина та же — количество требуемых в них операций много больше  $2\log p$ . Таким образом, можно утверждать, что функция (2.3) действительно односторонняя, но с оговоркой. Никем не доказано, что обратная функция (2.4) не может быть вычислена столь же быстро, как и «прямая».

Используем одностороннюю функцию (2.3) для решения всех трех задач, описанных в начале данного раздела, не забывая, однако, что точно так же может быть использована и любая другая односторонняя функция.

Начнем с хранения паролей в памяти компьютера. Решение задачи основано на том, что пароли вообще не хранятся! Точнее, при регистрации в сети пользователь набирает свое имя и пароль; пусть, например, его имя — «фрукт», а пароль — «абрикос». Компьютер рассматривает слово «абрикос» как двоичную запись числа  $x$  и вычисляет (2.3), где  $a$  и  $p$  — два несекретные числа, возможно даже, всем известные. После этого в памяти компьютера заводится пара (имя,  $y$ ), где  $y$  вычислено по (2.3) при  $x$  = пароль. При всех дальнейших входах этого пользователя после ввода пары («фрукт», «абрикос»), компьютер вычисляет по (2.3) новое значение  $y_{\text{нов}}$  с  $x$  = «абрикос» и сравнивает с хранящимся в памяти ранее вычисленным значением  $y$ . Если  $y_{\text{нов}}$  совпадает с хранящимся в памяти  $y$ , соответствующим данному имени, то это законный пользователь. В противном случае это Ева.

Ева могла бы попытаться найти  $x$  по  $y$ . Однако мы видели, что уже при 90-значных числах для этого потребуется более чем  $10^{22}$  лет. Таким образом, представленная система хранения пароля весьма надежна и в настоящее время используется во многих реальных операционных системах.

Рассмотрим решение второй задачи (ПВО и самолет). Можно использовать следующий метод. Каждому «своему» самолету при-

сваивается секретное имя, известное системе ПВО и летчику, точнее, бортовому компьютеру. Пусть, например, одному из самолетов присвоено секретное имя СОКОЛ, и этот самолет приближается к границе 01 февраля 2005 года в 12 час.45 мин. Тогда перед приближением к границе бортовой компьютер самолета формирует слово

СОКОЛ	05	02	01	12	45
(имя	год	месяц	день	часы	минуты).

Другими словами, компьютер на самолете и станция ПВО представляют к секретному слову сведения о текущем времени и, рассматривая полученное слово как число  $x$ , вычисляют  $y = a^x \bmod p$ , где  $a$  и  $p$  не секретны. Затем самолет сообщает число  $y$  станции ПВО. Станция сравнивает вычисленное ею число  $y$  с полученным от самолета. Если вычисленное и полученное значения совпали, то самолет признается как «свой».

Противник не может взломать эту систему. Действительно, с одной стороны, он не знает секретного слова СОКОЛ и не может найти его по  $y$ , так как вычисление  $x$  по  $y$  занимает, скажем,  $10^{22}$  лет. С другой стороны, он не может просто скопировать  $y$  и использовать его в качестве ответа в будущем, так как время пересечения границы никогда не повторяется и последующие значения  $y$  будут отличаться от первоначального.

Рассмотренный вариант решения «задачи ПВО» требует точной синхронизации часов в самолете и в локаторе. Эта проблема достаточно легко решается. Например, служба навигации постоянно передает метки времени в открытом виде (время не секретно), и все самолеты и локаторы используют эти метки для синхронизации своих часов. Но есть более тонкие проблемы. Метка времени добавляется в слово  $x$  для того, чтобы все вычисляемые значения  $y$  были различны и противник не мог их повторно использовать. Однако противник может попытаться мгновенно повторить  $y$  в пределах текущей минуты. Как предотвратить эту возможность? Это первый вопрос. Другое затруднение возникает в ситуации, когда самолет посылает число  $y$  в конце 45-й минуты, а локатор принимает его в начале 46-й. Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно предложить вариант решения этих проблем.

Другой способ решения «задачи ПВО» возможен, если мы будем использовать дополнительный открытый канал передачи данных от локатора к самолету. Как и выше, каждый «свой» самолет и локатор

знают секретное слово (типа СОКОЛ), которое не заменяется. Обнаружив цель, локатор посылает ей случайно сгенерированное число  $a$  («вызов»). Самолет вычисляет  $y = a^x \bmod p$ , где  $x$  — секретное слово («СОКОЛ»), и сообщает число  $y$  локатору. Локатор воспроизводит те же вычисления и сравнивает вычисленное  $y$  и принятое. В этой схеме не нужно синхронизировать часы, но, как и ранее, противник не может повторить число  $y$ , так как локатор всякий раз посылает разные вызовы ( $a$ ). Интересно, что эта задача, по-видимому, была исторически первой, при решении которой использовались односторонние функции.

Третья задача решается совершенно аналогично, и оба рассмотренных метода формирования пароля применимы и используются в реальных сетевых протоколах.

## 2.2. Первая система с открытым ключом — система Диффи–Хеллмана

Эта криптосистема была открыта в середине 70-х годов американскими учеными Диффи (Whitfield Diffie) и Хеллманом (Martin Hellman) и привела к настоящей революции в криптографии и ее практических применениях. Это первая система, которая позволяла защищать информацию без использования секретных ключей, передаваемых по защищенным каналам. Для того чтобы продемонстрировать одну из схем применения таких систем, рассмотрим сеть связи с  $N$  пользователями, где  $N$  — большое число. Пусть мы хотим организовать секретную связь для каждой пары из них. Если мы будем использовать обычную систему распределения секретных ключей, то каждая пара абонентов должна быть снабжена своим секретным ключом, т.е. всего потребуется  $C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2} \approx \frac{N^2}{2}$  ключей.

Если абонентов 100, то требуется 5000 ключей, если же абонентов  $10^4$ , то ключей должно быть  $5 \cdot 10^7$ . Мы видим, что при большом числе абонентов система снабжения их секретными ключами становится очень громоздкой и дорогостоящей.

Диффи и Хеллман решили эту проблему за счет открытого пространства и вычисления ключей. Перейдем к описанию предложенной ими системы.

Пусть строится система связи для абонентов  $A, B, C, \dots$ . У каждого абонента есть своя секретная и открытая информация. Для

организации этой системы выбирается большое простое число  $p$  и некоторое число  $g$ ,  $1 < g < p - 1$ , такое, что все числа из множества  $\{1, 2, \dots, p - 1\}$  могут быть представлены как различные степени  $g \bmod p$  (известны различные подходы для нахождения таких чисел  $g$ , один из них будет представлен ниже). Числа  $p$  и  $g$  известны всем абонентам.

Абоненты выбирают большие числа  $X_A, X_B, X_C$ , которые хранят в секрете (обычно такой выбор рекомендуется проводить случайно, используя датчики случайных чисел). Каждый абонент вычисляет соответствующее число  $Y$ , которое открыто передается другим абонентам,

$$\begin{cases} Y_A = g^{X_A} \bmod p, \\ Y_B = g^{X_B} \bmod p, \\ Y_C = g^{X_C} \bmod p. \end{cases}$$

(2.9)

В результате получаем следующую таблицу.

Т а б л и ц а 2.2. Ключи пользователей в системе Диффи–Хеллмана

Абонент	Секретный ключ	Открытый ключ
$A$	$X_A$	$Y_A$
$B$	$X_B$	$Y_B$
$C$	$X_C$	$Y_C$

Допустим, абонент  $A$  решил организовать сеанс связи с  $B$ , при этом обоим абонентам доступна открытая информация из табл. 2.2. Абонент  $A$  сообщает  $B$  по открытому каналу, что он хочет передать ему сообщение. Затем абонент  $A$  вычисляет величину

$$Z_{AB} = (Y_B)^{X_A} \bmod p$$

(2.10)

(никто другой кроме  $A$  этого сделать не может, так как число  $X_A$  секретно). В свою очередь, абонент  $B$  вычисляет число

$$Z_{BA} = (Y_A)^{X_B} \bmod p.$$

(2.11)

**Утверждение 2.2.**  $Z_{AB} = Z_{BA}$ .

*Доказательство.* Действительно,

$$\begin{aligned} Z_{AB} &= (Y_B)^{X_A} \bmod p = (g^{X_B})^{X_A} \bmod p = \\ &= g^{X_A X_B} \bmod p = (Y_A)^{X_B} \bmod p = Z_{BA}. \end{aligned}$$

(Здесь первое равенство следует из (2.10), второе и четвертое — из (2.9), последнее — из (2.11).)  $\square$

Отметим главные свойства системы:

- 1) абоненты  $A$  и  $B$  получили одно и то же число  $Z = Z_{AB} = Z_{BA}$ , которое не передавалось по открытой линии связи;
- 2) Ева не знает секретных чисел  $X_A, X_B, \dots$ , поэтому не может вычислить число  $Z_{AB}$  (вообще говоря, она могла бы попытаться найти секретное число  $X_A$  по  $Y_A$  (см. (2.9)), однако при больших  $p$  это практически невозможно (требуются миллионы лет)).

Абоненты  $A$  и  $B$  могут использовать  $Z_{AB}$  в качестве секретного ключа для шифрования и дешифрования данных. Таким же образом любая пара абонентов может вычислить секретный ключ, известный только им.

Остановимся теперь на упомянутой выше задаче выбора числа  $g$ . При произвольно заданном  $p$  она может оказаться трудной задачей, связанной с разложением на простые множители числа  $p - 1$ . Дело в том, что для обеспечения высокой стойкости рассмотренной системы число  $p - 1$  должно обязательно содержать большой простой множитель (в противном случае алгоритм Полига–Хеллмана, описанный, например, в [28], быстро вычисляет дискретный логарифм). Поэтому часто рекомендуют использовать следующий подход. Простое число  $p$  выбирается таким, чтобы выполнялось равенство

$$p = 2q + 1,$$

где  $q$  — также простое число. Тогда в качестве  $g$  можно взять любое число, для которого справедливы неравенства

$$1 < g < p - 1 \quad \text{и} \quad g^q \bmod p \neq 1.$$

**Пример 2.2.** Пусть  $p = 23 = 2 \cdot 11 + 1$  ( $q = 11$ ). Выберем параметр  $g$ . Попробуем взять  $g = 3$ . Проверим:  $3^{11} \bmod 23 = 1$  и значит, такое  $g$  не подходит. Возьмем  $g = 5$ . Проверим:  $5^{11} \bmod 23 = 22$ . Итак, мы выбрали параметры  $p = 23$ ,  $g = 5$ . Теперь каждый абонент выбирает секретное число и вычисляет соответствующее ему открытое число. Пусть выбраны  $X_A = 7$ ,  $X_B = 13$ . Вычисляем

$Y_A = 5^7 \bmod 23 = 17$ ,  $Y_B = 5^{13} \bmod 23 = 21$ . Пусть  $A$  и  $B$  решили сформировать общий секретный ключ. Для этого  $A$  вычисляет  $Z_{AB} = 21^7 \bmod 23 = 10$ , а  $B$  вычисляет  $Z_{BA} = 17^{13} \bmod 23 = 10$ . Теперь они имеют общий ключ 10, который не передавался по каналу связи.  $\square$

## 2.3. Элементы теории чисел

Многие криптографические алгоритмы базируются на результатах классической теории чисел. Мы рассмотрим необходимый минимум из этой теории. Классические теоремы Ферма, Эйлера и ряд других результатов из теории чисел будут даны без доказательств, которые могут быть найдены практически в любом учебнике по теории чисел (см., например, [3]). Читатели, знакомые с теорией чисел, могут непосредственно перейти к разд. 2.4.

**Определение 2.2.** Целое положительное число  $p$  называется *простым*, если оно не делится ни на какое другое число, кроме самого себя и единицы.

**Пример 2.3.** Числа 11, 23 — простые; числа 27, 33 — составные (27 делится на 3 и на 9, 33 делится на 3 и на 11).  $\square$

**Теорема 2.3 (основная теорема арифметики).** *Любое целое положительное число может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем единственным образом.*

**Пример 2.4.**  $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ ,  $33 = 3 \cdot 11$ .  $\square$

**Определение 2.3.** Два числа называются *взаимно простыми*, если они не имеют ни одного общего делителя кроме единицы.

**Пример 2.5.** Числа 27 и 28 взаимно просты (у них нет общих делителей кроме единицы), числа 27 и 33 — нет (у них есть общий делитель 3).  $\square$

**Определение 2.4 (функция Эйлера).** Пусть дано целое число  $N \geq 1$ . Значение *функции Эйлера*  $\varphi(N)$  равно количеству чисел в ряду  $1, 2, 3, \dots, N-1$ , взаимно простых с  $N$ .

Пример 2.6.

$$\begin{array}{ll} \varphi(10) = ? & \varphi(12) = ? \\ 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, & 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11 \\ \varphi(10) = 4 & \varphi(12) = 4 \end{array}$$

(здесь зачеркнуты числа, не взаимнопростые с аргументом).  $\square$

**Утверждение 2.4.** Если  $p$  — простое число, то  $\varphi(p) = p - 1$ .

**Доказательство.** В ряду  $1, 2, 3, \dots, p-1$  все числа взаимно просты с  $p$ , так как  $p$  — простое число и по определению не делится ни на какое другое число.  $\square$

**Утверждение 2.5.** Пусть  $p$  и  $q$  — два различных простых числа ( $p \neq q$ ). Тогда  $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$ .

**Доказательство.** В ряду  $1, 2, \dots, pq-1$  не взаимнопростыми с  $pq$  будут числа

$$p, 2p, 3p, \dots, (q-1)p$$

и

$$q, 2q, 3q, \dots, (p-1)q.$$

Всего таких чисел будет  $(q-1) + (p-1)$ . Следовательно, количество чисел, взаимнопростых с  $pq$ , будет  $pq - 1 - (p-1) - (q-1) = pq - q - p + 1 = (p-1)(q-1)$ .  $\square$

**Теорема 2.6 (Ферма).** Пусть  $p$  — простое число и  $0 < a < p$ . Тогда

$$a^{p-1} \bmod p = 1.$$

Пример 2.7.  $p = 13, a = 2$ ;

$$2^{12} \bmod 13 = (2^2)^2 \cdot \left((2^2)^2\right)^2 \bmod 13 = 3 \cdot 9 \bmod 13 = 1,$$

$$10^{10} \bmod 11 = 10^2 \cdot \left((10^2)^2\right)^2 \bmod 11 = 1 \cdot 1 = 1. \quad \square$$

**Теорема 2.7 (Эйлер).** Пусть  $a$  и  $b$  — взаимно простые числа. Тогда

$$a^{\varphi(b)} \bmod b = 1.$$

Теорема Ферма является частным случаем теоремы Эйлера, когда  $b$  — простое число.

Пример 2.8.

$$\varphi(12) = 4,$$

$$5^4 \bmod 12 = (5^2)^2 \bmod 12 = (1^2)^2 \bmod 12 = 1.$$

$$\varphi(21) = 2 \cdot 6 = 12,$$

$$2^{12} \bmod 21 = 2^4 \cdot (2^4)^2 \bmod 21 = 16 \cdot 4 \bmod 21 = 1. \quad \square$$

Нам понадобится еще одна теорема, близкая к теореме Эйлера.

**Теорема 2.8.** Если  $p$  и  $q$  — простые числа,  $p \neq q$  и  $k$  — произвольное целое число, то

$$a^{k\varphi(pq)+1} \bmod (pq) = a. \quad (2.12)$$

Пример 2.9. Возьмем  $p = 5$ ,  $q = 7$ . Тогда  $pq = 35$ , а функция Эйлера —  $\varphi(35) = 4 \cdot 6 = 24$ . Рассмотрим случай  $k = 2$ , т.е. будем возводить числа в степень  $2 \cdot 24 + 1 = 49$ . Получим

$$9^{49} \bmod 35 = 9, \quad 23^{49} \bmod 35 = 23.$$

Это не удивительно, так как каждое из чисел 9 и 23 взаимно просто с модулем 35, и по теореме Эйлера  $9^{24} \bmod 35 = 1$ ,  $23^{24} \bmod 35 = 1$ . Однако теорема 2.8 остается верной и для следующих чисел:

$$10^{49} \bmod 35 = 10, \quad 28^{49} \bmod 35 = 28,$$

в то время как теорема Эйлера для них не применима (каждое из чисел 10 и 28 не взаимно просто с модулем 35 и  $10^{24} \bmod 35 = 15$ ,  $28^{24} \bmod 35 = 21$ ).  $\square$

**Определение 2.5.** Пусть  $a$  и  $b$  — два целых положительных числа. Наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$  есть наибольшее число  $c$ , которое делит и  $a$  и  $b$ :

$$c = \gcd(a, b).$$



(Обозначение  $\gcd$  для наибольшего общего делителя происходит от английских слов *greatest common divisor* и принято в современной литературе.)

Пример 2.10.  $\gcd(10, 15) = 5$ ;  $\gcd(8, 28) = 4$ . □

Для нахождения наибольшего общего делителя можно использовать следующий алгоритм, известный как алгоритм Евклида.

### Алгоритм 2.1. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

ВХОД: Положительные целые числа  $a, b$ ,  $a \geq b$ .

ВЫХОД: Наибольший общий делитель  $\gcd(a, b)$ .

1. WHILE  $b \neq 0$  DO
2.      $r \leftarrow a \bmod b$ ,  $a \leftarrow b$ ,  $b \leftarrow r$ .
3. RETURN  $a$ .

Пример 2.11. Покажем, как с помощью алгоритма Евклида вычисляется  $\gcd(28, 8)$ :

$$\begin{array}{rcl} a : & 28 & 8 & 4 \\ b : & 8 & 4 & 0 \\ r : & 4 & 0 & \end{array}$$

Здесь каждый столбец представляет собой очередную итерацию алгоритма. Процесс продолжается до тех пор, пока  $b$  не станет равным нулю. Тогда в значении переменной  $a$  содержится ответ (4). □

Для многих криптографических систем, рассматриваемых в следующих разделах и главах, актуален так называемый обобщенный алгоритм Евклида, с которым связана следующая теорема.

**Теорема 2.9.** Пусть  $a$  и  $b$  — два целых положительных числа. Тогда существуют целые (не обязательно положительные) числа  $x$  и  $y$ , такие, что

$$ax + by = \gcd(a, b). \quad (2.13)$$

Обобщенный алгоритм Евклида служит для отыскания  $\gcd(a, b)$  и  $x, y$ , удовлетворяющих (2.13). Введем три строки  $U = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $V = (v_1, v_2, v_3)$  и  $T = (t_1, t_2, t_3)$ . Тогда алгоритм записывается следующим образом.

**Алгоритм 2.2.** ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

ВХОД: Положительные целые числа  $a, b$ ,  $a \geq b$ .

ВЫХОД:  $\gcd(a, b)$ ,  $x$ ,  $y$ , удовлетворяющие (2.13).

1.  $U \leftarrow (a, 1, 0)$ ,  $V \leftarrow (b, 0, 1)$ .
2. WHILE  $v_1 \neq 0$  DO
3.      $q \leftarrow u_1 \operatorname{div} v_1$ ;
4.      $T \leftarrow (u_1 \bmod v_1, u_2 - qv_2, u_3 - qv_3)$ ;
5.      $U \leftarrow V$ ,  $V \leftarrow T$ .
6. RETURN  $U = (\gcd(a, b), x, y)$ .

Результат содержится в строке  $U$ .

Операция  $\operatorname{div}$  в алгоритме — это целочисленное деление

$$a \operatorname{div} b = \lfloor a/b \rfloor.$$

Доказательство корректности алгоритма 2.2 может быть найдено в [1, 9].

**Пример 2.12.** Пусть  $a=28$ ,  $b=19$ . Найдем числа  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие (2.13).

$U$				28	1	0	
$V$	$U$			19	0	1	
$T$	$V$	$U$		9	1	-1	$q = 1$
	$T$	$V$	$U$	1	-2	3	$q = 2$
		$T$	$V$	0	19	-28	$q = 9$

Поясним представленную схему. Вначале в строку  $U$  записываются числа  $(28, 1, 0)$ , а в строку  $V$  — числа  $(19, 0, 1)$  (это первые две строки на схеме). Вычисляется строка  $T$  (третья строка в схеме). После этого в качестве строки  $U$  берется вторая строка в схеме, а в качестве  $V$  — третья, и опять вычисляется строка  $T$  (четвертая строка в схеме). Этот процесс продолжается до тех пор, пока первый элемент строки  $V$  не станет равным нулю. Тогда предпоследняя строка в схеме содержит ответ. В нашем случае  $\gcd(28, 19) = 1$ ,  $x = -2$ ,  $y = 3$ . Выполним проверку:  $28 \cdot (-2) + 19 \cdot 3 = 1$ .  $\square$

Рассмотрим одно важное применение обобщенного алгоритма Евклида. Во многих задачах криптографии для заданных чисел  $s$ ,  $m$  требуется находить такое число  $d < m$ , что

$$cd \bmod m = 1. \quad (2.14)$$

Отметим, что такое  $d$  существует тогда и только тогда, когда числа  $c$  и  $m$  взаимно простые.

**Определение 2.6.** Число  $d$ , удовлетворяющее (2.14), называется *инверсией  $c$  по модулю  $m$*  и часто обозначается  $c^{-1} \bmod m$ .

Данное обозначение для инверсии довольно естественно, так как мы можем теперь переписать (2.14) в виде

$$cc^{-1} \bmod m = 1.$$

Умножение на  $c^{-1}$  соответствует делению на  $c$  при вычислениях по модулю  $m$ . По аналогии можно ввести произвольные отрицательные степени при вычислениях по модулю  $m$ :

$$c^{-e} = (c^e)^{-1} = (c^{-1})^e \pmod{m}.$$

**Пример 2.13.**  $3 \cdot 4 \bmod 11 = 1$ , поэтому число 4 — это инверсия числа 3 по модулю 11. Можно записать  $3^{-1} \bmod 11 = 4$ . Число  $5^{-2} \bmod 11$  может быть найдено двумя способами:

$$5^{-2} \bmod 11 = (5^2 \bmod 11)^{-1} \bmod 11 = 3^{-1} \bmod 11 = 4,$$

$$5^{-2} \bmod 11 = (5^{-1} \bmod 11)^2 \bmod 11 = 9^2 \bmod 11 = 4.$$

При вычислениях по второму способу мы использовали равенство  $5^{-1} \bmod 11 = 9$ . Действительно,  $5 \cdot 9 \bmod 11 = 45 \bmod 11 = 1$ .  $\square$

Покажем, как можно вычислить инверсию с помощью обобщенного алгоритма Евклида. Равенство (2.14) означает, что для некоторого целого  $k$

$$cd - km = 1. \tag{2.15}$$

Учитывая, что  $c$  и  $m$  взаимно просты, перепишем (2.15) в виде

$$m(-k) + cd = \gcd(m, c), \tag{2.16}$$

что полностью соответствует (2.13), здесь только по-другому обозначены переменные. Поэтому, чтобы вычислить  $c^{-1} \bmod m$ , т.е. найти число  $d$ , нужно просто использовать обобщенный алгоритм Евклида для решения уравнения (2.16). Заметим, что значение переменной  $k$  нас не интересует, поэтому можно не вычислять вторые элементы

строк  $U$ ,  $V$ ,  $T$ . Кроме того, если число  $d$  получается отрицательным, то нужно прибавить к нему  $m$ , так как по определению число  $a \bmod m$  берется из множества  $\{0, 1, \dots, m-1\}$ .

**Пример 2.14.** Вычислим  $7^{-1} \bmod 11$ . Используем такую же схему записи вычислений, как в примере 2.12 :

$$\begin{array}{rcl} 11 & 0 & \\ 7 & 1 & \\ 4 & -1 & q = 1 \\ 3 & 2 & q = 1 \\ 1 & -3 & q = 1 \\ 0 & 11 & q = 3. \end{array}$$

Получаем  $d = -3$  и  $d \bmod 11 = 11 - 3 = 8$ , т.е.  $7^{-1} \bmod 11 = 8$ . Проверим результат:  $7 \cdot 8 \bmod 11 = 56 \bmod 11 = 1$ .  $\square$

Одной из важнейших операций в криптографии с открытыми ключами является операция возведения в степень по модулю. Идея построения эффективного алгоритма возведения в степень была ранее проиллюстрирована с помощью (2.5) и (2.6). Рассмотренный алгоритм можно реализовать и без хранения в памяти ряда чисел (2.5). Дадим описание этого алгоритма в форме, пригодной для непосредственной программной реализации. В названии алгоритма отражен тот факт, что биты показателя степени просматриваются справа-налево, т.е. от младшего к старшему.

### Алгоритм 2.3. ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ (СПРАВА-НАЛЕВО)

**ВХОД:** Целые числа  $a$ ,  $x = (x_t x_{t-1} \dots x_0)_2$ ,  $p$ .

**ВЫХОД:** Число  $y = a^x \bmod p$ .

1.  $y \leftarrow 1$ ,  $s \leftarrow a$ .
2. FOR  $i = 0, 1, \dots, t$  DO
3.     IF  $x_i = 1$  THEN  $y \leftarrow y \cdot s \bmod p$ ;
4.      $s \leftarrow s \cdot s \bmod p$ .
5. RETURN  $y$ .

Чтобы показать, что по представленному алгоритму действительно вычисляется  $y$  согласно (2.6), запишем степени переменных после каждой итерации цикла. Пусть  $x = 100 = (1100100)_2$ , как в примере 2.1, тогда:

$i$ :	0	1	2	3	4	5	6
$x_i$ :	0	0	1	0	0	1	1
$y$ :	1	1	$a^4$	$a^4$	$a^4$	$a^{36}$	$a^{100}$
$s$ :	$a^2$	$a^4$	$a^8$	$a^{16}$	$a^{32}$	$a^{64}$	$a^{128}$

В некоторых ситуациях более эффективным оказывается следующий алгоритм, в котором биты показателя степени просматриваются слева-направо, т.е. от старшего к младшему.

**Алгоритм 2.4.** ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ (СЛЕВА-НАПРАВО)

ВХОД: Целые числа  $a$ ,  $x = (x_t x_{t-1} \dots x_0)_2$ ,  $p$ .

ВЫХОД: Число  $y = a^x \bmod p$ .

1.  $y \leftarrow 1$ .
2. FOR  $i = t, t-1, \dots, 0$  DO
3.      $y \leftarrow y \cdot y \bmod p$ ;
4.     IF  $x_i = 1$  THEN  $y \leftarrow y \cdot a \bmod p$ .
5. RETURN  $y$ .

Чтобы убедиться в том, что алгоритм 2.4 вычисляет то же самое, что и алгоритм 2.3, запишем степени переменной  $y$  после каждой итерации цикла для  $x = 100$ :

$i$ :	6	5	4	3	2	1	0
$x_i$ :	1	1	0	0	1	0	0
$y$ :	$a$	$a^3$	$a^6$	$a^{12}$	$a^{25}$	$a^{50}$	$a^{100}$

Приведенных в данном разделе сведений из теории чисел будет достаточно для описания основных криптографических алгоритмов и методов.

## 2.4. Шифр Шамира

Этот шифр, предложенный Шамиром (Adi Shamir), был первым, позволяющим организовать обмен секретными сообщениями по открытой линии связи для лиц, которые не имеют никаких защищенных каналов и секретных ключей и, возможно, никогда не видели друг друга. (Напомним, что система Диффи–Хеллмана позволяет

сформировать только секретное слово, а передача сообщения потребует использования некоторого шифра, где это слово будет использоваться как ключ.)

Перейдем к описанию системы. Пусть есть два абонента  $A$  и  $B$ , соединенные линией связи.  $A$  хочет передать сообщение  $m$  абоненту  $B$  так, чтобы никто не узнал его содержание.  $A$  выбирает случайное большое простое число  $p$  и открыто передает его  $B$ . Затем  $A$  выбирает два числа  $c_A$  и  $d_A$ , такие, что

$$c_A d_A \bmod (p - 1) = 1. \quad (2.17)$$

Эти числа  $A$  держит в секрете и передавать не будет.  $B$  тоже выбирает два числа  $c_B$  и  $d_B$ , такие, что

$$c_B d_B \bmod (p - 1) = 1, \quad (2.18)$$

и держит их в секрете.

После этого  $A$  передает свое сообщение  $m$ , используя трехступенчатый протокол. Если  $m < p$  ( $m$  рассматривается как число), то сообщение  $m$  передается сразу, если же  $m \geq p$ , то сообщение представляется в виде  $m_1, m_2, \dots, m_t$ , где все  $m_i < p$ , и затем передаются последовательно  $m_1, m_2, \dots, m_t$ . При этом для кодирования каждого  $m_i$  лучше выбирать случайно новые пары  $(c_A, d_A)$  и  $(c_B, d_B)$  — в противном случае надежность системы понижается. В настоящее время такой шифр, как правило, используется для передачи чисел, например, секретных ключей, значения которых меньше  $p$ . Таким образом, мы будем рассматривать только случай  $m < p$ . Дадим описание протокола.

**Шаг 1.**  $A$  вычисляет число

$$x_1 = m^{c_A} \bmod p, \quad (2.19)$$

где  $m$  — исходное сообщение, и пересылает  $x_1$  к  $B$ .

**Шаг 2.**  $B$ , получив  $x_1$ , вычисляет число

$$x_2 = x_1^{c_B} \bmod p \quad (2.20)$$

и передает  $x_2$  к  $A$ .

**Шаг 3.**  $A$  вычисляет число

$$x_3 = x_2^{d_A} \bmod p \quad (2.21)$$

и передает его  $B$ .

**Шаг 4.**  $B$ , получив  $x_3$ , вычисляет число

$$x_4 = x_3^{d_B} \bmod p. \quad (2.22)$$

**Утверждение 2.10 (свойства протокола Шамира).**

- 1)  $x_4 = m$ , т.е. в результате реализации протокола от  $A$  к  $B$  действительно передается исходное сообщение;
- 2) злоумышленник не может узнать, какое сообщение было передано.

**Доказательство.** Вначале заметим, что любое целое число  $e \geq 0$  может быть представлено в виде  $e = k(p-1) + r$ , где  $r = e \bmod (p-1)$ . Поэтому на основании теоремы Ферма

$$\begin{aligned} x^e \bmod p &= x^{k(p-1)+r} \bmod p = \\ &= (1^k \cdot x^r) \bmod p = x^{e \bmod (p-1)} \bmod p. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Справедливость первого пункта утверждения вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3^{d_B} \bmod p = (x_2^{d_A})^{d_B} \bmod p = \\ &= (x_1^{c_B})^{d_A d_B} \bmod p = (m^{c_A})^{c_B d_A d_B} \bmod p = \\ &= m^{c_A d_A c_B d_B} \bmod p = m^{(c_A d_A c_B d_B) \bmod (p-1)} \bmod p = m \end{aligned}$$

(предпоследнее равенство следует из (2.23), а последнее выполняется в силу (2.17) и (2.18)).

Доказательство второго пункта утверждения основано на предположении, что для злоумышленника, пытающегося определить  $m$ , не существует стратегии более эффективной, чем следующая. Вначале он вычисляет  $c_B$  из (2.20), затем находит  $d_B$  и, наконец, вычисляет  $x_4 = m$  по (2.22). Но для осуществления этой стратегии злоумышленник должен решить задачу дискретного логарифмирования (2.20), что практически невозможно при больших  $p$ .  $\square$

Опишем метод нахождения пар  $c_A, d_A$  и  $c_B, d_B$ , удовлетворяющих (2.17) и (2.18). Достаточно описать только действия для абонента  $A$ , так как действия для  $B$  совершенно аналогичны. Число  $c_A$  выбираем случайно так, чтобы оно было взаимно простым с  $p-1$  (поиск целесообразно вести среди нечетных чисел, так как  $p-1$  четно). Затем вычисляем  $d_A$  с помощью обобщенного алгоритма Евклида, как это было объяснено в разд. 2.3.

**Пример 2.15.** Пусть  $A$  хочет передать  $B$  сообщение  $m = 10$ .  $A$  выбирает  $p = 23$ ,  $c_A = 7$  ( $\gcd(7, 22) = 1$ ) и вычисляет  $d_A = 19$ . Аналогично,  $B$  выбирает параметры  $c_B = 5$  (взаимно простое с 22) и  $d_B = 9$ . Переходим к протоколу Шамира.

Шаг 1.  $x_1 = 10^7 \bmod 23 = 14$ .

Шаг 2.  $x_2 = 14^5 \bmod 23 = 15$ .

Шаг 3.  $x_3 = 15^{19} \bmod 23 = 19$ .

Шаг 4.  $x_4 = 19^9 \bmod 23 = 10$ .

Таким образом,  $B$  получил передаваемое сообщение  $m = 10$ . □

## 2.5. Шифр Эль-Гамалия

Пусть имеются абоненты  $A, B, C, \dots$ , которые хотят передавать друг другу зашифрованные сообщения, не имея никаких защищенных каналов связи. В этом разделе мы рассмотрим шифр, предложенный Эль-Гамалем (Taher ElGamal), который решает эту задачу, используя, в отличие от шифра Шамира, только одну пересылку сообщения. Фактически здесь используется схема Диффи–Хеллмана, чтобы сформировать общий секретный ключ для двух абонентов, передающих друг другу сообщение, и затем сообщение шифруется путем умножения его на этот ключ. Для каждого следующего сообщения секретный ключ вычисляется заново. Перейдем к точному описанию метода.

Для всей группы абонентов выбираются некоторое большое простое число  $p$  и число  $g$ , такие, что различные степени  $g$  суть различные числа по модулю  $p$  (см. разд. 2.2). Числа  $p$  и  $g$  передаются абонентам в открытом виде (они могут использоваться всеми абонентами сети).



Затем каждый абонент группы выбирает свое секретное число  $c_i$ ,  $1 < c_i < p-1$ , и вычисляет соответствующее ему открытое число  $d_i$ ,

$$d_i = g^{c_i} \bmod p. \quad (2.24)$$

В результате получаем таблицу 2.3.

Т а б л и ц а 2.3. Ключи пользователей в системе  
Эль-Гамала

Абонент	Секретный ключ	Открытый ключ
$A$	$c_A$	$d_A$
$B$	$c_B$	$d_B$
$C$	$c_C$	$d_C$

Покажем теперь, как  $A$  передает сообщение  $m$  абоненту  $B$ . Будем предполагать, как и при описании шифра Шамира, что сообщение представлено в виде числа  $m < p$ .

**Шаг 1.**  $A$  формирует случайное число  $k$ ,  $1 \leq k \leq p-2$ , вычисляет числа

$$r = g^k \bmod p, \quad (2.25)$$

$$e = m \cdot d_B^k \bmod p \quad (2.26)$$

и передает пару чисел  $(r, e)$  абоненту  $B$ .

**Шаг 2.**  $B$ , получив  $(r, e)$ , вычисляет

$$m' = e \cdot r^{p-1-c_B} \bmod p. \quad (2.27)$$

**Утверждение 2.11 (свойства шифра Эль-Гамала).**

- 1) Абонент  $B$  получил сообщение, т.е.  $m' = m$ ;
- 2) противник, зная  $p$ ,  $g$ ,  $d_B$ ,  $r$  и  $e$ , не может вычислить  $m$ .

**Доказательство.** Подставим в (2.27) значение  $e$  из (2.26):

$$m' = m \cdot d_B^k \cdot r^{p-1-c_B} \bmod p.$$

Теперь вместо  $r$  подставим (2.25), а вместо  $d_B$  — (2.24):

$$\begin{aligned} m' &= m \cdot (g^{c_B})^k \cdot (g^k)^{p-1-c_B} \bmod p = \\ &= m \cdot g^{c_B k + k(p-1) - k c_B} \bmod p = m \cdot g^{k(p-1)} \bmod p. \end{aligned}$$

По теореме Ферма

$$g^{k(p-1)} \bmod p = 1^k \bmod p = 1,$$

и, таким образом, мы получаем первую часть утверждения.

Для доказательства второй части заметим, что противник не может вычислить  $k$  в равенстве (2.25), так как это задача дискретного логарифмирования. Следовательно, он не может вычислить  $m$  в равенстве (2.26), так как  $m$  было умножено на неизвестное ему число. Противник также не может воспроизвести действия законного получателя сообщения (абонента  $B$ ), так как ему не известно секретное число  $c_B$  (вычисление  $c_B$  на основании (2.24) — также задача дискретного логарифмирования).  $\square$

**Пример 2.16.** Передадим сообщение  $m = 15$  от  $A$  к  $B$ . Выберем параметры аналогично тому, как это было сделано в примере 2.2 стр. 20. Возьмем  $p = 23$ ,  $g = 5$ . Пусть абонент  $B$  выбрал для себя секретное число  $c_B = 13$  и вычислил по (2.24)

$$d_B = 5^{13} \bmod 23 = 21.$$

Абонент  $A$  выбирает случайно число  $k$ , например  $k = 7$ , и вычисляет по (2.25), (2.26):

$$r = 5^7 \bmod 23 = 17, \quad e = 15 \cdot 21^7 \bmod 23 = 15 \cdot 10 \bmod 23 = 12.$$

Теперь  $A$  посылает к  $B$  зашифрованное сообщение в виде пары чисел  $(17, 12)$ .  $B$  вычисляет по (2.27)

$$m' = 12 \cdot 17^{23-1-13} \bmod 23 = 12 \cdot 17^9 \bmod 23 = 12 \cdot 7 \bmod 23 = 15.$$

Мы видим, что  $B$  смог расшифровать переданное сообщение.  $\square$

Ясно, что по аналогичной схеме могут передавать сообщения все абоненты в сети. Заметим, что любой абонент, знающий открытый ключ абонента  $B$ , может посылать ему сообщения, зашифрованные с помощью открытого ключа  $d_B$ . Но только абонент  $B$ , и никто другой, может расшифровать эти сообщения, используя известный только ему секретный ключ  $c_B$ . Отметим также, что объем шифра в два раза превышает объем сообщения, но требуется только одна передача данных (при условии, что таблица с открытыми ключами заранее известна всем абонентам).

## 2.6. Односторонняя функция с «лазейкой» и шифр RSA

Названный в честь его разработчиков Ривеста (Ron Rivest), Шамира (Adi Shamir) и Адлемана (Leonard Adleman), этот шифр до сих пор является одним из самых широко используемых.

Мы видели, что шифр Шамира полностью решает задачу обмена сообщениями, закрытыми для прочтения, в случае, когда абоненты могут пользоваться только открытыми линиями связи. Однако при этом сообщение пересылается три раза от одного абонента к другому, что является недостатком. Шифр Эль-Гамала позволяет решить ту же задачу за одну пересылку данных, но объем передаваемого шифротекста в два раза превышает объем сообщения. Система RSA лишена подобных недостатков. Интересно то, что она базируется на другой односторонней функции, отличной от дискретного логарифма. Кроме того, здесь мы встретимся с еще одним изобретением современной криптографии – *односторонней функцией с «лазейкой»* (trapdoor function).

Эта система базируется на следующих двух фактах из теории чисел:

- 1) задача проверки числа на простоту является сравнительно легкой;
- 2) задача разложения чисел вида  $n = pq$  ( $p$  и  $q$  — простые числа) на множители является очень трудной, если мы знаем только  $n$ , а  $p$  и  $q$  — большие числа (это так называемая задача факторизации).

Пусть в нашей системе есть абоненты  $A, B, C, \dots$ . Каждый абонент выбирает случайно два больших простых числа  $P$  и  $Q$ . Затем он вычисляет число

$$N = PQ. \quad (2.28)$$

(Число  $N$  является открытой информацией, доступной другим абонентам.) После этого абонент вычисляет число  $\phi = (P - 1)(Q - 1)$  и выбирает некоторое число  $d < \phi$ , взаимно простое с  $\phi$ , и по обобщенному алгоритму Евклида находит число  $e$ , такое, что

$$ed \bmod \phi = 1. \quad (2.29)$$

Т а б л и ц а 2.4. Ключи пользователей в системе RSA

Абонент	Секретный ключ	Открытый ключ
$A$	$c_A$	$d_A, N_A$
$B$	$c_B$	$d_B, N_B$
$C$	$c_C$	$d_C, N_C$

Вся информация, связанная с абонентами и являющаяся их открытыми и секретными ключами, представлена в табл. 2.4.

Опишем протокол RSA. Пусть Алиса хочет передать сообщение  $m$  Бобу, причем сообщение  $m$  рассматривается как число, удовлетворяющее неравенству  $m < N_B$  (далее индекс  $B$  указывает на то, что соответствующие параметры принадлежат Бобу).

**Шаг 1.** Алиса шифрует сообщение по формуле

$$e = m^{d_B} \bmod N_B, \quad (2.30)$$

используя открытые параметры Боба, и пересылает  $e$  по открытой линии.

**Шаг 2.** Боб, получивший зашифрованное сообщение, вычисляет

$$m' = e^{c_B} \bmod N_B. \quad (2.31)$$

**Утверждение 2.12.** Для описанного протокола  $m' = m$ , т.е. абонент  $B$  получает исходящее от  $A$  сообщение.

**Доказательство.** По построению протокола

$$m' = e^{c_B} \bmod N_B = m^{d_B c_B} \bmod N_B.$$

Равенство (2.29) означает, что для некоторого  $k$

$$c_B d_B = k\phi_B + 1.$$

Согласно утверждению 2.5

$$\phi_B = (P_B - 1)(Q_B - 1) = \varphi(N_B),$$

где  $\varphi(\cdot)$  — функция Эйлера. Отсюда и из теоремы 2.8 следует

$$m' = m^{k\varphi(N_B)+1} \bmod N_B = m.$$

□

**Утверждение 2.13 (свойства протокола RSA).**

- 1) Протокол шифрует и дешифрует информацию корректно;
- 2) злоумышленник, перехватывающий все сообщения и знающий всю открытую информацию, не сможет найти исходное сообщение при больших  $P$  и  $Q$ .

**Доказательство.** Первое свойство протокола следует из утверждения 2.12. Для доказательства второго свойства заметим, что злоумышленник знает только открытые параметры  $N$  и  $d$ . Для того чтобы найти  $c$ , он должен знать значение  $\phi = (P - 1)(Q - 1)$ , а для этого, в свою очередь, ему требуется знать  $P$  и  $Q$ . Вообще говоря, он может найти  $P$  и  $Q$ , разложив  $N$  на множители, однако это трудная задача (см. пункт 2 в начале раздела). Отметим, что выбор больших случайных  $P$  и  $Q$  возможен за приемлемое время, так как справедлив пункт 1.  $\square$

Односторонняя функция  $y = x^d \bmod N$ , применяемая в системе RSA, обладает так называемой «лазейкой», позволяющей легко вычислить обратную функцию  $x = \sqrt[d]{y} \bmod N$ , если известно разложение  $N$  на простые множители. (Действительно, легко вычислить  $\phi = (P - 1)(Q - 1)$ , а затем  $c = d^{-1} \bmod \phi$ .) Если  $P$  и  $Q$  неизвестны, то вычисление значения обратной функции практически невозможно, а найти  $P$  и  $Q$  по  $N$  очень трудно, т.е. знание  $P$  и  $Q$  — это «лазейка» или «потайной ход»). Такие односторонние функции с лазейкой находят применение и в других разделах криптографии.

Отметим, что для схемы RSA важно, чтобы каждый абонент выбирал собственную пару простых чисел  $P$  и  $Q$ , т.е. все модули  $N_A, N_B, N_C, \dots$  должны быть различны (в противном случае один абонент мог бы читать зашифрованные сообщения, предназначенные для другого абонента). Однако этого не требуется от второго открытого параметра  $d$ . Параметр  $d$  может быть одинаковым у всех абонентов. Часто рекомендуется выбирать  $d = 3$  (при соответствующем выборе  $P$  и  $Q$ , см. [28]). Тогда шифрование выполняется максимально быстро, всего за два умножения.

**Пример 2.17.** Допустим, Алиса хочет передать Бобу сообщение  $m = 15$ . Пусть Боб выбрал следующие параметры:

$$P_B = 3, Q_B = 11, N_B = 33, d_B = 3$$

(3 взаимно просто с  $\varphi(33) = 20$ ). Найдем  $c_B$  с помощью обобщенного алгоритма Евклида:

$$c_B = 7$$

(проверим:  $3 \cdot 7 \bmod 20 = 1$ ). Кодируем  $m$  по формуле (2.30):

$$e = 15^3 \bmod 33 = 15^2 \cdot 15 \bmod 33 = 27 \cdot 15 \bmod 33 = 9.$$

Число 9 Алиса передает Бобу по открытому каналу связи. Только Боб знает  $c_B = 7$ , поэтому он декодирует принятое сообщение, используя (2.31):

$$m' = 9^7 \bmod 33 = (9^2)^2 \cdot 9^2 \cdot 9 \bmod 33 = 15^2 \cdot 15 \cdot 9 \bmod 33 = 15.$$

Таким образом, Боб расшифровал сообщение Алисы.  $\square$

Рассмотренная система нескрывается при больших  $P$  и  $Q$ , но обладает следующим недостатком:  $A$  передает сообщение  $B$ , используя открытую информацию абонента  $B$  (числа  $N_B$  и  $d_B$ ). Злоумышленник не может читать сообщения, предназначенные для  $B$ , однако он может передать сообщение к  $B$  от имени  $A$ . Избежать этого можно, используя более сложные протоколы, например, следующий.

$A$  хочет передать  $B$  сообщение  $m$ . Сначала  $A$  вычисляет число  $e = m^{c_A} \bmod N_A$ . Злоумышленник не может этого сделать, так как  $c_A$  секретно. Затем  $A$  вычисляет число  $f = e^{d_B} \bmod N_B$  и передает  $f$  к  $B$ .  $B$  получает  $f$  и вычисляет последовательно числа  $u = f^{c_B} \bmod N_B$  и  $w = u^{d_A} \bmod N_A$ .

В результате абонент  $B$  получает сообщение  $w = m$ . Как и в исходной схеме RSA, злоумышленник не может прочесть переданное сообщение, но здесь, в отличие от RSA, он не может также послать сообщение от имени  $A$  (поскольку не знает секретного  $c_A$ ).

Здесь мы встречаемся с новой ситуацией.  $B$  знает, что сообщение пришло от  $A$ , т.е.  $A$  как бы «подписал» его, зашифровав своим секретным  $c_A$ . Это пример так называемой *электронной* или *цифровой подписи*. Она — одно из широко используемых на практике изобретений современной криптографии и будет систематически изучаться в главе 4.

## Задачи и упражнения

- 2.1.** Привести результат выражений  $5$ ,  $16$ ,  $27$ ,  $-4$ ,  $-13$ ,  $3 + 8$ ,  $3 - 8$ ,  $3 \cdot 8$ ,  $3 \cdot 8 \cdot 5$ :
- а. по модулю  $10$ ,
  - б. по модулю  $11$ .
- 2.2.** Вычислить, используя быстрые алгоритмы возведения в степень,  $2^8 \bmod 10$ ,  $3^7 \bmod 10$ ,  $7^{19} \bmod 100$ ,  $7^{57} \bmod 100$ .
- 2.3.** Разложить на простые множители числа  $108$ ,  $77$ ,  $65$ ,  $30$ ,  $159$ .
- 2.4.** Определить, какие из пар чисел  $(25, 12)$ ,  $(25, 15)$ ,  $(13, 39)$ ,  $(40, 27)$  взаимно просты.
- 2.5.** Найти значения функции Эйлера  $\varphi(14)$ ,  $\varphi(20)$ .
- 2.6.** Используя свойства функции Эйлера, вычислить  $\varphi(53)$ ,  $\varphi(21)$ ,  $\varphi(159)$ .
- 2.7.** Используя теорему Ферма, вычислить  $3^{13} \bmod 13$ ,  $5^{22} \bmod 11$ ,  $3^{17} \bmod 5$ .
- 2.8.** Используя теорему Эйлера, вычислить  $3^9 \bmod 20$ ,  $2^{14} \bmod 21$ ,  $2^{107} \bmod 159$ .
- 2.9.** С помощью алгоритма Евклида найти  $\gcd(21, 12)$ ,  $\gcd(30, 12)$ ,  $\gcd(24, 40)$ ,  $\gcd(33, 16)$ .
- 2.10.** С помощью обобщенного алгоритма Евклида найти значения  $x$  и  $y$  в уравнениях
- а.  $21x + 12y = \gcd(21, 12)$ ,
  - б.  $30x + 12y = \gcd(30, 12)$ ,
  - в.  $24x + 40y = \gcd(24, 40)$ ,
  - г.  $33x + 16y = \gcd(33, 16)$ .
- 2.11.** Вычислить  $3^{-1} \bmod 7$ ,  $5^{-1} \bmod 8$ ,  $3^{-1} \bmod 53$ ,  $10^{-1} \bmod 53$ .
- 2.12.** Выписать все простые числа, меньшие  $100$ . Какие из них соответствуют виду  $p = 2q + 1$ , где  $q$  также простое?

**2.13.** Найти все допустимые варианты выбора параметра  $g$  в системе Диффи–Хеллмана при  $p = 11$ .

**2.14.** Вычислить секретные ключи  $Y_A$ ,  $Y_B$  и общий ключ  $Z_{AB}$  для системы Диффи–Хеллмана с параметрами:

а.  $p = 23$ ,  $g = 5$ ,  $X_A = 5$ ,  $X_B = 7$ ,

б.  $p = 19$ ,  $g = 2$ ,  $X_A = 5$ ,  $X_B = 7$ ,

в.  $p = 23$ ,  $g = 7$ ,  $X_A = 3$ ,  $X_B = 4$ ,

г.  $p = 17$ ,  $g = 3$ ,  $X_A = 10$ ,  $X_B = 5$ ,

д.  $p = 19$ ,  $g = 10$ ,  $X_A = 4$ ,  $X_B = 8$ .

**2.15.** Для шифра Шамира с заданными параметрами  $p$ ,  $c_A$ ,  $c_B$  найти недостающие параметры и описать процесс передачи сообщения  $m$  от  $A$  к  $B$ :

а.  $p = 19$ ,  $c_A = 5$ ,  $c_B = 7$ ,  $m = 4$ ,

б.  $p = 23$ ,  $c_A = 15$ ,  $c_B = 7$ ,  $m = 6$ ,

в.  $p = 19$ ,  $c_A = 11$ ,  $c_B = 5$ ,  $m = 10$ ,

г.  $p = 23$ ,  $c_A = 9$ ,  $c_B = 3$ ,  $m = 17$ ,

д.  $p = 17$ ,  $c_A = 3$ ,  $c_B = 13$ ,  $m = 9$ .

**2.16.** Для шифра Эль-Гамала с заданными параметрами  $p$ ,  $g$ ,  $c_B$ ,  $k$  найти недостающие параметры и описать процесс передачи сообщения  $m$  пользователю  $B$ :

а.  $p = 19$ ,  $g = 2$ ,  $c_B = 5$ ,  $k = 7$ ,  $m = 5$ ,

б.  $p = 23$ ,  $g = 5$ ,  $c_B = 8$ ,  $k = 10$ ,  $m = 10$ ,

в.  $p = 19$ ,  $g = 2$ ,  $c_B = 11$ ,  $k = 4$ ,  $m = 10$ ,

г.  $p = 23$ ,  $g = 7$ ,  $c_B = 3$ ,  $k = 15$ ,  $m = 5$ ,

д.  $p = 17$ ,  $g = 3$ ,  $c_B = 10$ ,  $k = 5$ ,  $m = 10$ .

**2.17.** В системе RSA с заданными параметрами  $P_A$ ,  $Q_A$ ,  $d_A$  найти недостающие параметры и описать процесс передачи сообщения  $m$  пользователю  $A$ :

а.  $P_A = 5$ ,  $Q_A = 11$ ,  $d_A = 3$ ,  $m = 12$ ,

б.  $P_A = 5$ ,  $Q_A = 13$ ,  $d_A = 5$ ,  $m = 20$ ,



в.  $P_A = 7$ ,  $Q_A = 11$ ,  $d_A = 7$ ,  $m = 17$ ,

г.  $P_A = 7$ ,  $Q_A = 13$ ,  $d_A = 5$ ,  $m = 30$ ,

д.  $P_A = 3$ ,  $Q_A = 11$ ,  $d_A = 3$ ,  $m = 15$ .

- 2.18.** Пользователю системы RSA с параметрами  $N = 187$ ,  $d = 3$  передано зашифрованное сообщение  $e = 100$ . Расшифровать это сообщение, взломав систему RSA пользователя.

## Темы лабораторных работ

- 2.19.** Написать и отладить набор подпрограмм, реализующих базовые алгоритмы, используемые в изученных криптосистемах: возведение в степень по модулю ( $a^x \bmod m$ ), вычисление наибольшего общего делителя ( $\gcd(a, b)$ ), вычисление инверсии ( $x^{-1} \bmod m$ ).
- 2.20.** Написать программу, реализующую систему Диффи–Хеллмана. Рекомендуемые значения параметров  $p = 30803$ ,  $g = 2$ . Секретные ключи генерировать случайным образом.
- 2.21.** Написать программу, реализующую шифр Шамира. В качестве простого модуля можно взять число  $p = 30803$ . Остальные параметры генерировать случайным образом.
- 2.22.** Написать программу, реализующую шифр Эль-Гамала. Рекомендуемые значения параметров  $p = 30803$ ,  $g = 2$ . Секретные ключи и другие параметры генерировать случайным образом.
- 2.23.** Написать программу, реализующую шифр RSA для передачи секретных сообщений в адрес абонентов  $A$  или  $B$ . Рекомендуемые значения параметров  $P_A = 131$ ,  $Q_A = 227$ ,  $P_B = 113$ ,  $Q_B = 281$ ,  $d_A = d_B = 3$ .

## Глава 3. МЕТОДЫ ВЗЛОМА ШИФРОВ, ОСНОВАННЫХ НА ДИСКРЕТНОМ ЛОГАРИФМИРОВАНИИ

### 3.1. Постановка задачи

Для построения надежной криптосистемы необходимо принимать во внимание те методы взлома, которые может применить злоумышленник, и выбирать параметры криптосистемы (в частности, длины чисел) так, чтобы сделать эти методы практически нереализуемыми. В данном параграфе мы рассмотрим два таких метода, для того чтобы дать читателю некоторое представление об этой «таинственной» области.

Мы видели, что многие рассматриваемые шифры основываются на односторонней функции

$$y = a^x \bmod p \quad (3.1)$$

и знаем, что можно вычислить  $y$ , если даны  $a$  и  $x$ , затратив не более, чем  $2 \log x$  операций (утверждение 2.1). Однако отыскание  $x$  по известным  $a$  и  $y$ , т.е. вычисление дискретного логарифма, — задача намного более трудная.

Как уже было показано при рассмотрении шифра Шамира (см. (2.23)), на основании теоремы Ферма при возведении в степень по простому модулю  $p$  показатели степени приводятся по модулю  $p-1$ . Поэтому нам достаточно рассматривать только показатели  $x$ , удовлетворяющие неравенству  $0 \leq x \leq p-1$ .

Обозначим через  $t_y$  число операций умножения, необходимых для вычисления  $y$  в (3.1) по  $a$  и  $x$ , и будем для краткости называть  $t_y$  временем вычисления. Время возведения в степень по алгоритмам из разд. 2.1 не больше  $2 \log x$ , причем  $x < p$ . Отсюда

$$t_y \leq 2 \log p \quad (3.2)$$

при любом показателе степени  $x$ .

Теперь перейдем к задаче отыскания  $x$  в (3.1) по данным  $a$  и  $y$ . Сначала оценим сложность прямого перебора. Для этого можно было бы сначала вычислить  $a^1$  и проверить, верно ли равенство  $a^1 = y$ . Если нет, то проверяем  $a^2 = y$ , если нет, то  $a^3 = y$  и т.д. до  $a^{p-1}$ . В среднем потребуется  $(p-1)/2$  раз умножать на  $a$  и проверять равенство. Таким образом, время прямого перебора

$$t_{\text{п.п.}} \approx p/2.$$

В описываемом ниже методе «шаг младенца, шаг великана» время отыскания  $x$  существенно меньше:

$$t_{\text{ш.м.ш.в.}} \approx 2 \cdot \sqrt{p},$$

а в методе исчисления порядка это время еще меньше:

$$t_{\text{и.п.}} \approx c_1 \cdot 2^{c_2 \sqrt{\log p \log \log p}},$$

где  $c_1, c_2$  — некоторые положительные константы.

Чтобы сделать сравнение более наглядным, выразим время вычисления через длину числа  $p$  в (3.1). Обозначим эту длину в битах через  $n$ . При вычислениях по модулю  $p$  имеем  $n \approx \log p$ . Поэтому порядок трудоемкости (в смысле количества операций) упомянутых алгоритмов будет следующий:

$$\begin{aligned} t_y &\approx n, \\ t_{\text{п.п.}} &\approx 2^{n-1}, \\ t_{\text{ш.м.ш.в.}} &\approx 2^{n/2}, \\ t_{\text{и.п.}} &\approx 2^{c_2 \sqrt{n \log n}}, \end{aligned}$$

где  $\approx$  означает «пропорционально».

Мы видим, что количество операций при возведении в степень растет линейно с ростом длины числа  $n$ , а время решения обратной задачи различными методами растет экспоненциально либо субэкспоненциально (для метода исчисления порядка). Вопрос о существовании более быстрых алгоритмов для вычисления дискретных логарифмов, как и для решения других обратных задач, возникающих в криптоанализе, остается открытым.

### 3.2. Метод «шаг младенца, шаг великана»

В открытой литературе этот метод был впервые описан Шенксом (Daniel Shanks); ссылки на него известны с 1973 года. Это был один из первых методов, который показал, что задача вычисления дискретного логарифма может быть решена значительно быстрее, чем методом перебора. Перейдем к описанию этого метода отыскания  $x$  в (3.1).

**Шаг 1.** Сначала берем два целых числа  $m$  и  $k$ , такие, что

$$mk > p. \quad (3.3)$$

**Шаг 2.** Вычислим два ряда чисел

$$y, \quad ay, \quad a^2y, \quad \dots, \quad a^{m-1}y \pmod{p}; \quad (3.4)$$

$$a^m, \quad a^{2m}, \quad \dots, \quad a^{km} \pmod{p} \quad (3.5)$$

(все вычисления проводятся по модулю  $p$ ).

**Шаг 3.** Найдем такие  $i$  и  $j$ , для которых выполняется равенство

$$a^{im} = a^j y. \quad (3.6)$$

**Утверждение 3.1.** Число

$$x = im - j \quad (3.7)$$

является решением уравнения (3.1). Кроме того, целые числа  $i, j$ , удовлетворяющие (3.6), существуют.

**Доказательство.** Справедливость (3.7) следует из приводимой ниже символической цепочки равенств, где все вычисления даны по модулю  $p$ , а деление соответствует умножению на обратный элемент:

$$a^x = a^{im-j} = \frac{a^{im}}{a^j} = \frac{a^{im}y}{a^j y} = \frac{a^{im}y}{a^{im}} = y.$$

Докажем теперь, что числа  $i$  и  $j$ , удовлетворяющие (3.6), существуют. Для этого сведем все числа вида (3.7) в таблицу 3.1.

Т а б л и ц а 3.1. Распределение чисел вида  $im - j$ 

$i \downarrow \quad j \rightarrow$	0	1	2	...	$m - 1$
1	$m$	$m - 1$	$m - 2$	...	1
2	$2m$	$2m - 1$	$2m - 2$	...	$m + 1$
...	...	...	...	...	...
$k$	$km$	$km - 1$	$km - 2$	...	$(k - 1)m + 1$

Мы видим, что в таблице содержатся все числа от 1 до  $km$ . Значит, из (3.3) следует, что в таблице содержатся все числа от 1 до  $p$ . Таким образом, любой показатель степени  $x < p$  будет содержаться в таблице, т.е. число  $x$ , удовлетворяющее (3.1), может быть представлено в виде (3.7) и всегда найдется в таблице, поэтому уравнение (3.6) всегда имеет решение.  $\square$

**Пример 3.1.** Найдём решение уравнения  $2^x \bmod 23 = 9$ , используя метод «шаг младенца, шаг великана».

Выберем  $m, k$ . Пусть  $m = 6, k = 4$ . Мы видим, что (3.3) выполняется. Вычислим числа (3.4), (3.5):

$$(3.4) : \quad 9, 18, 13, 3, 6, 12;$$

$$(3.5) : \quad 18.$$

Дальнейшие вычисления не проводим, так как уже нашлись одинаковые числа в (3.4) и (3.5) при  $i = 1, j = 1$ . По (3.7) получаем

$$x = 1 \cdot 6 - 1 = 5.$$

Проверим:  $2^5 \bmod 23 = 9$ . Действительно,  $x = 5$  есть решение.  $\square$

Объясним происхождение названия рассмотренного метода. Мы знаем, что в криптографии  $p$  — большое простое число, значит  $m$  и  $k$  тоже большие. В ряду (3.4) степень увеличивается на 1 (шаг младенца), а в ряду (3.5) степень увеличивается на  $m$  (шаг великана).

Оценим сложность этого метода.

**Утверждение 3.2.** *Время вычислений по данному методу при больших  $p$  удовлетворяет неравенству*

$$t_{\text{ш.м.ш.в.}} \leq \text{const} \cdot \sqrt{p} \log^2 p. \quad (3.8)$$

(Здесь речь идет о полном времени вычислений, а не о числе умножений).

Доказательство. Мы можем взять

$$k = m = \lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1, \quad (3.9)$$

так что, очевидно, (3.3) выполняется. Тогда в (3.4) и (3.5) потребуется не более  $2\sqrt{p}$  операций умножения. Мы знаем, что для «обычных» («школьных») методов умножения и деления время вычисления результата для двух  $r$ -значных чисел пропорционально  $r^2$ . У нас все числа берутся из множества  $\{1, \dots, p\}$ , значит,  $r \leq \log p$ , и время вычисления пропорционально  $\log^2 p$ . Отсюда мы сразу получаем время, затраченное на вычисление рядов (3.4) и (3.5). Однако мы не учли все этапы алгоритма. Мы не учли время, требуемое для нахождения равных чисел в этих рядах. При больших  $k$  и  $m$  это далеко не простая задача. Она может быть решена следующим образом: сначала каждому числу припишем его номер в ряду и еще один бит, в котором указана принадлежность к ряду (3.4) или (3.5), затем преобразуем обе последовательности в список и отсортируем (упорядочим по величине). Длина общего ряда равна  $k + m \approx 2\sqrt{p}$ . Для лучших методов сортировки требуется  $S \log S$  операций сравнения, где  $S$  — число элементов в списке (см., например, [1]). В нашем случае  $S = 2\sqrt{p}$  и, следовательно, требуется  $2\sqrt{p} \log(2\sqrt{p}) \approx \sqrt{p} \log p$  операций сравнения над словами длины  $\log p$  бит, т.е. всего требуется порядка  $\sqrt{p} \log^2 p$  операций. После сортировки объединенного ряда его надо просмотреть и найти два равных числа из разных рядов (3.4), (3.5), используя битовый признак. Таким образом, суммируя время вычисления на всех этапах, получаем (3.8).  $\square$

### 3.3. Алгоритм исчисления порядка

Основные идеи *алгоритма исчисления порядка* (index-calculus algorithm) были известны в теории чисел еще с 20-х годов XX века. Однако только в 1979 году Адлеман, один из создателей RSA, указал на этот алгоритм как на средство решения уравнения (3.1) и исследовал его трудоемкость. В настоящее время алгоритм исчисления порядка и его улучшенные варианты дают наиболее быстрый способ вычисления дискретных логарифмов в уравнениях типа (3.1).

Для удобства описания алгоритма введем следующее понятие.

**Определение 3.1.** Число  $n$  называется  $p$ -гладким, если оно разлагается только на простые множители, меньшие либо равные  $p$ .

**Пример 3.2.** Числа 15, 36, 45, 270, 2025 являются 5-гладкими (в их разложении участвуют только множители 2, 3, и 5).  $\square$

Перейдем непосредственно к описанию алгоритма.

**Шаг 1.** Формируем множество базовых множителей

$$S = \{p_1, p_2, \dots, p_t\},$$

состоящее из первых  $t$  простых чисел (замечание о выборе значения  $t$  будет дано ниже).

**Шаг 2.** Задавая последовательно значения  $k = 1, 2, 3, \dots$ , находим  $t + \epsilon$  ( $\epsilon$  — небольшое целое число, см. ниже)  $p_t$ -гладких чисел вида  $a^k \bmod p$ , проверяя гладкость путем деления на элементы множества  $S$ . Каждое из найденных  $p_t$ -гладких чисел записывается через произведение базовых множителей:

$$a^k \bmod p = \prod_{i=1}^t p_i^{c_i}, \quad c_i \geq 0, \quad (3.10)$$

(для каждого значения  $k$  получаем свой набор чисел  $c_i$ ).

**Шаг 3.** Переходим к логарифмам в (3.10):

$$k = \sum_{i=1}^t c_i \log_a p_i \quad (3.11)$$

для каждого  $p_t$ -гладкого числа, найденного на шаге 2. Мы получили систему из  $t + \epsilon$  уравнений вида (3.11) с  $t$  неизвестными. В качестве неизвестных здесь выступают величины  $\log_a p_i$ , при этом число уравнений на  $\epsilon$  больше числа неизвестных, что повышает вероятность получения решения системы в случае, если некоторые из уравнений окажутся линейно зависимыми. Решаем систему методами линейной алгебры, проводя все вычисления по модулю  $p - 1$  (напомним, что показатели степени, а следовательно и логарифмы, приводятся по модулю  $p - 1$ ). В результате получаем значения логарифмов чисел из множества  $S$ :  $\log_a p_1, \log_a p_2, \dots, \log_a p_t$ .

**Шаг 4.** Случайным образом выбирая  $r$ , находим  $p_t$ -гладкое число вида  $(y \cdot a^r)$ :

$$y \cdot a^r \bmod p = \prod_{i=1}^t p_i^{e_i}, \quad e_i \geq 0. \quad (3.12)$$

**Шаг 5.** Логарифмируя (3.12), получаем конечный результат

$$x = \log_a y = \left( \sum_{i=1}^t e_i \log_a p_i - r \right) \bmod (p-1) \quad (3.13)$$

(величина  $r$  вычитается из всей суммы, а не из каждого слагаемого).

Справедливость описанного метода довольно очевидна из построения алгоритма, а его эффективность связана со следующим наблюдением. Если мы выбираем случайно наугад число из бесконечного множества целых чисел, то с вероятностью  $1/2$  оно делится на 2, с вероятностью  $1/3$  — на 3, с вероятностью  $1/5$  — на 5 и т.д. Поэтому мы можем ожидать, что в промежутке от 1 до  $p-1$  существует достаточно много чисел, в разложении которых участвуют только маленькие простые множители из множества  $S$ . Именно такие числа отыскиваются на шагах 2 и 4 алгоритма. Чем больше  $t$ , т.е. количество простых множителей в  $S$ , тем меньше неудач при поиске гладких чисел происходит на шагах 2 и 4, т.е. эти шаги выполняются быстрее. Однако при больших  $t$  резко увеличивается трудоемкость шага 3, когда приходится решать систему из  $t + \epsilon$  уравнений. Нахождение значения  $t$ , дающего минимальное общее время вычислений, обычно может быть выполнено с использованием численных методов. Аналитические выражения получить довольно трудно. Параметр  $\epsilon$  принимается равным небольшому целому числу для того, чтобы увеличить вероятность существования решения системы уравнений на шаге 3. Дело в том, что полученная система может содержать линейно зависимые уравнения (как это будет показано в приводимом ниже примере). Считается, что при больших  $p$  значение  $\epsilon$  порядка 10 гарантирует существование единственного решения системы с высокой вероятностью (см. [28]). Если же все-таки полученная система имеет бесконечно много решений, то необходимо вернуться к шагу 2 и использовать другие значения  $k$ .



Адлеман показал, что при оптимальном значении  $t$  для трудоемкости алгоритма имеем

$$t_{\text{и.п.}} < c_1 2^{(c_2 + o(1))\sqrt{\log p \log \log p}},$$

где  $c_1, c_2$  — некоторые положительные константы.

**Пример 3.3.** Решим с помощью алгоритма исчисления порядка уравнение

$$37 = 10^x \bmod 47. \quad (3.14)$$

Имеем  $y = 37$ ,  $a = 10$ ,  $p = 47$ . Возьмем множество базовых множителей  $S = \{2, 3, 5\}$ ,  $t = 3$ , и примем  $\epsilon = 1$ , т.е. будем строить систему из четырех уравнений. Обозначим логарифмы чисел из  $S$  через  $u_1, u_2, u_3$  соответственно, например,  $u_3 = \log_{10} 5 \bmod 47$ . Мы выполнили первый шаг алгоритма, перейдем ко второму.

Проведем поиск четырех 5-гладких чисел:

$$\begin{aligned} 10^1 \bmod 47 &= 10 = 2 \cdot 5, & \checkmark \\ 10^2 \bmod 47 &= 6 = 2 \cdot 3, & \checkmark \\ 10^3 \bmod 47 &= 13 = 13, \\ 10^4 \bmod 47 &= 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3, & \checkmark \\ 10^5 \bmod 47 &= 31 = 31, \\ 10^6 \bmod 47 &= 28 = 2 \cdot 2 \cdot 7, \\ 10^7 \bmod 47 &= 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5. & \checkmark \end{aligned}$$

Мы нашли четыре 5-гладких числа, соответствующих степеням 1, 2, 4 и 7.

Начинаем третий шаг алгоритма. Перейдем к логарифмам и составим систему уравнений из равенств, отмеченных на предыдущем шаге символом  $\checkmark$ :

$$1 = u_1 + u_3, \quad (3.15)$$

$$2 = u_1 + u_2, \quad (3.16)$$

$$4 = 2u_1 + 2u_2, \quad (3.17)$$

$$7 = 2u_2 + u_3. \quad (3.18)$$

Мы видим, что в полученной системе уравнения (3.16) и (3.17) линейно зависимы, так что мы не зря нашли четвертое гладкое число. Чтобы решить систему, вычтем (3.15) из (3.16). Получим

$$1 = u_2 - u_3. \quad (3.19)$$

Прибавим (3.19) к (3.18). Получим

$$8 = 3u_2. \quad (3.20)$$

Из (3.20) непосредственно находим  $u_2$ :

$$u_2 = (8/3) \bmod 46 = 8 \cdot 3^{-1} \bmod 46 = 8 \cdot 31 \bmod 46 = 18.$$

Мы можем сделать проверку, вычислив  $10^{18} \bmod 47 = 3$ , таким образом,  $u_2$  — действительно логарифм числа 3. Теперь из (3.19) находим  $u_3$ :

$$u_3 = u_2 - 1 = 18 - 1 = 17$$

(действительно,  $10^{17} \bmod 47 = 5$ ). Наконец, из (3.16) находим  $u_1$ :

$$u_1 = 2 - u_2 = (2 - 18) \bmod 46 = -16 \bmod 46 = 30$$

( $10^{30} \bmod 47 = 2$ ).

Итак, теперь мы знаем логарифмы чисел из  $S$ . Самый трудоемкий этап алгоритма позади. Переходим к четвертому шагу. Начнем с  $k = 3$ :

$$\begin{aligned} 37 \cdot 10^3 \bmod 47 &= 37 \cdot 13 \bmod 47 = 11, \\ 37 \cdot 10^4 \bmod 47 &= 37 \cdot 36 \bmod 47 = 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Переходим в последнем равенстве к логарифмам (это пятый шаг) и получаем конечный результат:

$$\log_{10} 37 = 4 \log_{10} 2 - 4 = (4 \cdot 30 - 4) \bmod 46 = 24.$$

Мы нашли решение уравнения (3.14)  $x = 24$ . Можем сделать проверку:  $10^{24} \bmod 47 = 37$ .  $\square$

Самым быстрым на данное время считается вариант рассмотренного алгоритма исчисления порядка, называемый Number Field Sieve. Этот метод использует тонкие алгебраические конструкции и довольно сложен для описания. Его трудоемкость дается оценкой

$$t_{\text{n.f.s.}} < c_1 \cdot 2^{(c_2 + o(1))} \sqrt[3]{\log p (\log \log p)^2}, \quad (3.21)$$

где  $c_1, c_2$  — некоторые положительные константы. Именно этот метод диктует сегодня условия для выбора длин модулей криптосистем, стойкость которых основана на трудности вычисления дискретных логарифмов (из рассмотренных во второй главе это система

Диффи-Хеллмана, шифры Шамира и Эль-Гамала). Для достижения долговременной стойкости этих криптосистем рекомендуется брать модули длиной не менее 1024 бит (по данным на 2005 год).

В заключение отметим, что в нашей книге мы не рассматриваем методы взлома криптосистем, основанных на факторизации чисел (таких как RSA). Дело в том, что описание современных алгоритмов разложения числа на множители потребовало бы введения дополнительных понятий и алгоритмов из теории чисел, нигде больше в книге не используемых. Однако скажем, что по состоянию на 2005 год самые быстрые методы разложения чисел на множители характеризуются такой же оценкой времени, которую дает выражение (3.21). Как следствие, для обеспечения стойкости системы RSA длина модуля должна также быть не менее 1024 бит (т.е. простые числа, дающие в произведении модуль RSA, должны быть длиной минимум по 512 бит).

## Задачи и упражнения

**3.1.** Используя метод “шаг младенца, шаг великана”, решить следующие уравнения:

а.  $2^x \bmod 29 = 21$ ,

б.  $3^x \bmod 31 = 25$ ,

в.  $2^x \bmod 37 = 12$ ,

г.  $6^x \bmod 41 = 21$ ,

д.  $3^x \bmod 43 = 11$ .

**3.2.** Используя алгоритм исчисления порядка, решить следующие уравнения:

а.  $2^x \bmod 53 = 24$ ,

б.  $2^x \bmod 59 = 13$ ,

в.  $2^x \bmod 61 = 45$ ,

г.  $2^x \bmod 67 = 41$ ,

д.  $7^x \bmod 71 = 41$ .

**Темы лабораторных работ**

**3.3.** Выполнить программную реализацию метода “шаг младенца, шаг великана” и алгоритма исчисления порядка и решить с помощью компьютера следующие уравнения:

а.  $2^x \bmod 30203 = 24322$ ,

б.  $2^x \bmod 30323 = 21740$ ,

в.  $2^x \bmod 30539 = 28620$ ,

г.  $2^x \bmod 30803 = 16190$ ,

д.  $5^x \bmod 31607 = 30994$

(при недостатке времени достаточно реализовать программно только отдельные шаги алгоритмов).

## Глава 4. ЭЛЕКТРОННАЯ, ИЛИ ЦИФРОВАЯ ПОДПИСЬ

### 4.1. Электронная подпись RSA

После появления криптографии с открытым ключом произошла настоящая революция в современных компьютерных и сетевых технологиях. Появилась возможность решать задачи, которые ранее считались неразрешимыми, а теперь находят широкое применение на практике. В настоящее время при помощи этих технологий ежедневно проводятся расчеты и совершаются сделки на многие миллиарды долларов, рублей, евро и т.п. Одним из важных элементов этих технологий является электронная, или цифровая подпись. Во многих странах и, в частности, в России введены стандарты на электронную (цифровую) подпись, а само это понятие введено в гражданское законодательство. Термин «электронная подпись» более привычен для России, хотя в последнее время все чаще используется принятый в других странах (прежде всего, в США) термин «цифровая подпись», что отражено и в новых российских стандартах. Оба термина означают одно и то же.

Прежде чем начать рассмотрение криптографической цифровой подписи, сформулируем три свойства, которым (в идеале) должна удовлетворять любая, в частности, обычная рукописная подпись:

1. Подписать документ может только «законный» владелец подписи (и, следовательно, никто не может подделать подпись).
2. Автор подписи не может от нее отказаться.
3. В случае возникновения спора возможно участие третьих лиц (например, суда) для установления подлинности подписи.

Разумеется, цифровая (электронная) подпись также должна обладать всеми этими свойствами, однако лица, подписывающие документы и проверяющие их подлинность, могут находиться за тысячи

километров друг от друга и взаимодействовать только через компьютерную сеть.

Кроме обычной подписи, в реальной жизни используется так называемая нотариальная подпись, когда специально выделяемое лицо (нотариус) заверяет документы своей подписью и печатью, так что любое другое лицо может удостовериться в их подлинности. Аналог этой подписи также востребован в киберпространстве. Электронная нотариальная подпись реализуется точно так же, как и подпись любого другого лица.

В этом разделе мы рассмотрим электронную подпись, базирующуюся на схеме RSA.

Если Алиса планирует подписывать документы, то она должна вначале выбрать параметры RSA точно так же, как это описано в разд. 2.6. Для этого Алиса выбирает два больших простых числа  $P$  и  $Q$ , вычисляет  $N = PQ$  и  $\phi = (P - 1)(Q - 1)$ . Затем она выбирает число  $d$ , взаимно простое с  $\phi$ , и вычисляет  $c = d^{-1} \bmod \phi$ . Наконец, она публикует числа  $N$  и  $d$ , например, помещает их на своем сайте, ассоциировав со своим именем, и хранит в секрете число  $c$  (остальные числа  $P$ ,  $Q$  и  $\phi$  можно забыть, они больше не потребуются). Теперь Алиса готова ставить свои подписи на документах или сообщениях.

Пусть Алиса хочет подписать сообщение  $\bar{m} = m_1, \dots, m_n$ . Тогда вначале она вычисляет так называемую хеш-функцию

$$y = h(m_1, \dots, m_n),$$

которая ставит в соответствие сообщению  $\bar{m}$  число  $y$ . Предполагается, что алгоритм вычисления хеш-функции всем известен. Но мы пока не будем останавливаться на свойствах и способах вычисления хеш-функции, так как этот вопрос будет более подробно рассмотрен в главе 8. Отметим только наиболее важное для нас свойство: практически невозможно изменить основной текст  $m_1, \dots, m_n$ , не изменив  $y$ . Поэтому на следующем шаге Алисе достаточно снабдить подписью только число  $y$ , и эта подпись будет относиться ко всему сообщению  $\bar{m}$ .

Алиса вычисляет число

$$s = y^c \bmod N, \quad (4.1)$$

т.е. она возводит число  $y$  в свою секретную степень. Число  $s$  это и есть цифровая подпись. Она просто добавляется к сообщению  $\bar{m}$ , и

тем самым Алиса имеет сформированное подписанное сообщение

$$\langle \bar{m}, s \rangle. \quad (4.2)$$

Теперь каждый, кто знает открытые параметры Алисы, ассоциированные с ее именем, т.е. числа  $N$  и  $d$ , может проверить подлинность ее подписи. Для этого необходимо, взяв подписанное сообщение (4.2), вычислить значение хеш-функции  $h(\bar{m})$ , число

$$w = s^d \bmod N \quad (4.3)$$

и проверить выполнение равенства  $w = h(\bar{m})$ .

**Утверждение 4.1.** *Если подпись подлинная, то  $w = h(\bar{m})$ .*

**Доказательство.** Из (4.3), (4.1) и свойств схемы RSA (см. разд. 2.6) следует

$$w = s^d \bmod N = y^{cd} \bmod N = y = h(\bar{m}). \quad \square$$

**Утверждение 4.2.** *Описанная электронная подпись удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к подписи.*

**Доказательство.** Проверим первое свойство подписи. Никто не может разложить число  $N$  на простые множители (при больших  $N$  порядка 1024 бит по состоянию на 2005 год эта задача практически неразрешима). Поэтому, зная  $N$  и  $d$  невозможно найти  $s$ . Действительно, чтобы вычислить  $s = d^{-1} \bmod \phi$ , нужно знать  $\phi = (P - 1)(Q - 1)$ , а для этого нужно знать простые множители  $P$  и  $Q$ . Таким образом, первое свойство выполнено — никто, кроме Алисы, не может знать число  $s$  и поэтому не может подписать сообщение.

Второе свойство выполнено вследствие первого. Автор подписи не может от нее отказаться, так как никто другой не может «сфабриковать» подпись от его имени.

Третье свойство также очевидно — в случае спора заинтересованная сторона может предъявить судье все вычисления для их проверки и выяснения истины.  $\square$

**Пример 4.1.** Пусть  $P = 5$ ,  $Q = 11$ . Тогда  $N = 5 \cdot 11 = 55$ ,  $\phi = 4 \cdot 10 = 40$ . Пусть  $d = 3$ . Такой выбор  $d$  возможен, так

как  $\gcd(40, 3) = 1$ . Параметр  $c = 3^{-1} \bmod 40$  вычисляем с помощью обобщенного алгоритма Евклида (см. разд. 2.3),  $c = 27$ .

Пусть, например, Алиса хочет подписать сообщение  $\bar{m} = abbbbaa$ , для которого значение хеш-функции равно, скажем, 13:

$$y = h(abbbbaa) = 13.$$

В этом случае Алиса вычисляет по (4.1)

$$s = 13^{27} \bmod 55 = 7$$

и формирует подписанное сообщение

$$\langle abbbbaa, 7 \rangle.$$

Теперь тот, кто знает открытые ключи Алисы  $N = 55$  и  $d = 3$ , может проверить подлинность подписи. Получив подписанное сообщение, он заново вычисляет значение хеш-функции

$$h(abbbbaa) = 13$$

(если содержание сообщения не изменено, то значение хеш-функции совпадет с тем, которое вычисляла Алиса) и вычисляет по (4.3)

$$w = 7^3 \bmod 55 = 13.$$

Значения  $w$  и хеш-функции совпали, значит, подпись верна.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Обратим внимание на то, что одна и та же схема RSA, сгенерированная Алисой, может использоваться для решения двух задач. Во-первых, Алиса может подписывать сообщения, как это было показано в данном разделе, используя свой *секретный ключ*  $s$ . Во-вторых, кто угодно может послать Алисе зашифрованное сообщение (число), расшифровать которое, как это было показано в разд. 2.6, сможет только она, используя для шифрования ее *открытый ключ*  $d$ .

## 4.2. Электронная подпись на базе шифра Эль-Гамала

В предыдущем разделе была описана схема электронной подписи, необходимые свойства которой определяются сложностью решения задачи разложения числа на множители. В этом разделе мы опишем



вариант подписи, основанный на задаче дискретного логарифмирования.

Пусть, как и выше, Алиса собирается подписывать документы. Алиса выбирает большое простое число  $p$  и число  $g$ , такие, что различные степени  $g$  суть различные числа по модулю  $p$  (см. разд. 2.2). Эти числа передаются или хранятся в открытом виде и могут быть общими для целой группы пользователей. Алиса выбирает случайное число  $x$ ,  $1 < x < p - 1$ , которое она держит в секрете. Это ее секретный ключ, только она его знает. Затем она вычисляет число

$$y = g^x \bmod p. \quad (4.4)$$

Это число  $y$  Алиса публикует в качестве своего открытого ключа. Заметим, что при больших  $p$ , зная  $y$ , невозможно найти  $x$  (это задача дискретного логарифмирования).

Теперь Алиса может подписывать сообщения. Допустим, она хочет подписать сообщение  $\bar{m} = m_1, \dots, m_n$ . Опишем последовательность действий для построения подписи.

Вначале Алиса вычисляет значение хеш-функции  $h = h(\bar{m})$ , которое должно удовлетворять неравенству  $1 < h < p$ . Затем Алиса выбирает случайно число  $k$  ( $1 < k < p - 1$ ), взаимно простое с  $p - 1$ , и вычисляет число

$$r = g^k \bmod p. \quad (4.5)$$

Далее Алиса вычисляет числа

$$u = (h - xr) \bmod (p - 1), \quad (4.6)$$

$$s = k^{-1}u \bmod (p - 1). \quad (4.7)$$

Под  $k^{-1}$  в (4.7) подразумевается число, удовлетворяющее уравнению

$$k^{-1}k \bmod (p - 1) = 1. \quad (4.8)$$

Такое  $k^{-1}$  существует, так как  $k$  и  $p - 1$  взаимно просты, и может быть найдено по обобщенному алгоритму Евклида. Наконец, Алиса формирует подписанное сообщение

$$\langle \bar{m}; r, s \rangle. \quad (4.9)$$

Получатель подписанного сообщения (4.9), прежде всего, заново вычисляет значение хеш-функции  $h = h(\bar{m})$ . Затем он проверяет подпись, используя равенство

$$y^r r^s = g^h \bmod p. \quad (4.10)$$

**Утверждение 4.3.** *Если подпись верна, то условие (4.10) выполняется.*

**Доказательство.** Действительно,

$$y^r r^s = (g^x)^r (g^k)^s = g^{xr} g^{k(k^{-1}(h-xr))} = g^{xr} g^h g^{-xr} = g^h \bmod p.$$

(Здесь первое равенство следует из (4.4) и (4.5), второе из (4.7).)  $\square$

**Утверждение 4.4.** *Описанная электронная подпись удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к подписи.*

**Доказательство.** Проверим первое свойство подписи (никто не может подделать подпись, другими словами, никто кроме Алисы не может подписать сообщение ее подписью). Действительно, из (4.6) мы видим, что при формировании подписи используется секретное число  $x$ . Более того, сомножитель  $xr$ , используемый при формировании подписи в (4.6), меняется от сообщения к сообщению (так как  $k$  выбирается случайно, то и  $r$  случайно).

По той же самой причине Алиса не сможет отказаться от своей подписи, так как никто кроме нее не знает  $x$ , т.е. выполняется второе свойство подписи.

Понятно также, что в случае возникновения конфликта между Алисой и Бобом, они могут обратиться к третьим лицам для выявления истины. Судья может проверить все вычисления, если ему предъявят числа  $x$ ,  $\bar{m}$  и  $r$ .  $\square$

**Пример 4.2.** Пусть общие параметры для некоторого сообщества пользователей  $p = 23$ ,  $g = 5$ . Алиса выбирает свой секретный ключ  $x = 7$  и вычисляет открытый ключ  $y$  по (4.4):

$$y = 5^7 \bmod 23 = 17.$$

Пусть Алиса создала документ  $\bar{m} = baabaab$  и хочет его подписать.

Перейдем к вычислению подписи по алгоритму. Прежде всего она вычисляет хеш-функцию, пусть ее значение  $h(\bar{m}) = 3$ . Затем Алиса генерирует случайное число  $k$ , например,  $k = 5$ . Вычисления по (4.5), (4.6) дают

$$r = 5^5 \bmod 23 = 20,$$

$$u = (3 - 7 \cdot 20) \bmod 22 = 17.$$

Далее Алиса находит  $k^{-1} \bmod 22$ :

$$k^{-1} \bmod 22 = 5^{-1} \bmod 22 = 9.$$

Вычисления по (4.7) дают

$$s = 9 \cdot 17 \bmod 22 = 21.$$

Наконец, Алиса формирует подписанное сообщение в виде (4.9):

$$\langle baaaaab, 20, 21 \rangle.$$

Подписанное сообщение передается, Боб его получает и проверяет подлинность подписи. Вначале он вычисляет значение хеш-функции

$$h(baaaaab) = 3,$$

затем вычисляет левую часть (4.10)

$$17^{20} \cdot 20^{21} \bmod 23 = 16 \cdot 15 \bmod 23 = 10$$

и после этого правую часть (4.10)

$$5^3 \bmod 23 = 10.$$

Боб делает вывод, что подпись верна. □

Рассмотренный метод электронной подписи сложнее, чем RSA, а его стойкость базируется на другой, нежели в RSA, односторонней функции. Это важно для криптографии, так как в случае дискредитации одного метода можно использовать другой. Кроме того, на основе подписи Эль-Гамала может быть построен более эффективный алгоритм, в котором время вычислений значительно сокращается за счет использования «коротких» показателей степени. Такой алгоритм представлен в следующем разделе.

### 4.3. Стандарты на электронную (цифровую) подпись

Во многих странах сегодня существуют стандарты на электронную (цифровую) подпись. В этом разделе мы опишем российский государственный стандарт ГОСТ Р34.10-94 и стандарт США FIPS 186.

Российский стандарт, как следует из его обозначения, был принят в 1994 году, американский — в 1991. В основе обоих стандартов лежит по сути один и тот же алгоритм, называемый DSA (Digital Signature Algorithm) и являющийся вариацией подписи Эль-Гамала. Мы подробно рассмотрим российскую версию алгоритма, а затем укажем на отличия американской версии.

Вначале для некоторого сообщества пользователей выбирают общие несекретные параметры. Прежде всего необходимо найти два простых числа,  $q$  длиной 256 бит и  $p$  длиной 1024 бита, между которыми выполняется соотношение

$$p = bq + 1 \quad (4.11)$$

для некоторого целого  $b$ . Старшие биты в  $p$  и  $q$  должны быть равны единице. Затем выбирается число  $a > 1$ , такое, что

$$a^q \bmod p = 1. \quad (4.12)$$

В результате получаем три общих параметра —  $p$ ,  $q$  и  $a$ .

*З а м е ч а н и е.* Равенство (4.12) означает, что при возведении  $a$  в степени по модулю  $p$  показатели приводятся по модулю  $q$ , т.е.  $a^b \bmod p = a^{b \bmod q} \bmod p$  (мы уже проводили обоснование подобного феномена при доказательстве утверждения 2.10 на стр. 30). Такое приведение будет постоянно выполняться при генерации и проверке подписи, в результате чего длина показателей степени в рамках рассматриваемого алгоритма никогда не будет превышать 256 бит, что упрощает вычисления.

Далее, каждый пользователь выбирает случайно число  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $0 < x < q$ , и вычисляет

$$y = a^x \bmod p. \quad (4.13)$$

Число  $x$  будет секретным ключом пользователя, а число  $y$  — открытым ключом. Предполагается, что открытые ключи всех пользователей указываются в некотором несекретном, но «сертифицированном» справочнике, который должен быть у всех, кто собирается проверять подписи. Отметим, что в настоящее время найти  $x$  по  $y$  практически невозможно при указанной выше длине модуля  $p$ . На этом этап выбора параметров заканчивается, и мы готовы к тому, чтобы формировать и проверять подписи.

Пусть имеется сообщение  $\bar{m}$ , которое необходимо подписать. Генерация подписи выполняется следующим образом:

1. Вычисляем значение хеш-функции  $h = h(\bar{m})$  для сообщения  $m$ , значение хеш-функции должно лежать в пределах  $0 < h < q$  (в российском варианте хеш-функция определяется ГОСТом Р34.11-94).
2. Формируем случайное число  $k$ ,  $0 < k < q$ .
3. Вычисляем  $r = (a^k \bmod p) \bmod q$ . Если оказывается так, что  $r = 0$ , то возвращаемся к шагу 2.
4. Вычисляем  $s = (kh + xr) \bmod q$ . Если  $s = 0$ , то возвращаемся к шагу 2.
5. Получаем подписанное сообщение  $\langle \bar{m}; r, s \rangle$ .

Для проверки подписи делаем следующее.

1. Вычисляем хеш-функцию для сообщения  $h = h(\bar{m})$ .
2. Проверяем выполнение неравенств  $0 < r < q$ ,  $0 < s < q$ .
3. Вычисляем  $u_1 = s \cdot h^{-1} \bmod q$ ,  $u_2 = -r \cdot h^{-1} \bmod q$ .
4. Вычисляем  $v = (a^{u_1} y^{u_2} \bmod p) \bmod q$ .
5. Проверяем выполнение равенства  $v = r$ .

Если хотя бы одна из проверок на шагах 2 и 5 не дает нужного результата, то подпись считается недействительной. Если же все проверки удачны, то подпись считается подлинной.

**Утверждение 4.5.** *Если подпись к сообщению была сформирована законно, т.е. обладателем секретного ключа  $x$ , то  $v = r$ .*

**Доказательство.** Запишем следующую цепочку равенств, которая следует непосредственно из описания метода (напомним, что показатели степени приводятся по модулю  $q$ ):

$$\begin{aligned}
 v &= \left( a^{sh^{-1}} y^{-rh^{-1}} \bmod p \right) \bmod q = \\
 &= \left( a^{(kh+xr)h^{-1}} a^{-xrh^{-1}} \bmod p \right) \bmod q = \\
 &= \left( a^{k+xrh^{-1}-xrh^{-1}} \bmod p \right) \bmod q =
 \end{aligned}$$

$$= (a^k \bmod p) \bmod q = r. \quad \square$$

**З а м е ч а н и е.** Чтобы найти параметр  $a$ , удовлетворяющий (4.12), рекомендуется использовать следующий метод. Берем случайное число  $g > 1$  и вычисляем

$$a = g^{(p-1)/q} \bmod p. \quad (4.14)$$

Если  $a > 1$ , то это то, что нам нужно. Действительно, на основании (4.14) и теоремы Ферма имеем

$$a^q \bmod p = g^{((p-1)/q)q} \bmod p = g^{p-1} \bmod p = 1,$$

т.е. выполняется равенство (4.12). Если при вычислении по (4.14) мы получаем  $a = 1$  (крайне маловероятный случай), то нужно просто взять другое число  $g$ .

**П р и м е р 4.3.** Выберем общие несекретные параметры

$$q = 11, \quad p = 6q + 1 = 67,$$

возьмем  $g = 10$  и вычислим

$$a = 10^6 \bmod 67 = 25.$$

Выберем секретный ключ  $x = 6$  и вычислим открытый ключ

$$y = 25^6 \bmod 67 = 62.$$

Сформируем подпись для сообщения  $\bar{m} = baaaaab$ . Пусть для хеш-функции этого сообщения  $h(\bar{m}) = 3$ . Возьмем случайно число  $k = 8$ . Вычислим

$$r = (25^8 \bmod 67) \bmod 11 = 24 \bmod 11 = 2,$$

$$s = (8 \cdot 3 + 6 \cdot 2) \bmod 11 = 36 \bmod 11 = 3.$$

Получаем подписанное сообщение

$$\langle baaaaab; 2, 3 \rangle.$$

Теперь выполним проверку подписи. Если сообщение не изменено, то  $h = 3$ . Вычислим

$$h^{-1} = 3^{-1} \bmod 11 = 4,$$

$$u_1 = 3 \cdot 4 \bmod 11 = 1,$$

$$u_2 = -2 \cdot 4 \bmod 11 = -8 \bmod 11 = 3,$$

$$v = (25^1 \cdot 62^3 \bmod 67) \bmod 11 =$$

$$= (25 \cdot 9 \bmod 67) \bmod 11 = 24 \bmod 11 = 2.$$

Мы видим, что  $v = r$ , значит подпись верна.  $\square$

Теперь остановимся на отличиях американского стандарта от российского. Они сводятся к следующему.

1. Длина числа  $q$  берется равной 160 бит.
2. В качестве хеш-функции используется алгоритм SHA-1.
3. При генерации подписи на шаге 4 параметр  $s$  вычисляется по формуле  $s = k^{-1}(h + xr) \bmod q$ .
4. При проверке подписи на шаге 3  $u_1$  и  $u_2$  вычисляются по формулам  $u_1 = h \cdot s^{-1} \bmod q$ ,  $u_2 = r \cdot s^{-1} \bmod q$ .

С учетом этих отличий нетрудно переписать всю схему подписи в «американском» стиле. Доказательство корректности алгоритма проводится совершенно аналогично.

## Задачи и упражнения

Во всех задачах будем предполагать, что  $h(m) = m$  для всех значений  $m$ .

**4.1.** Построить подпись RSA для сообщения  $m$  при следующих параметрах пользователя:

- а.  $P = 5$ ,  $Q = 11$ ,  $c = 27$ ,  $m = 7$ ,
- б.  $P = 5$ ,  $Q = 13$ ,  $c = 29$ ,  $m = 10$ ,
- в.  $P = 7$ ,  $Q = 11$ ,  $c = 43$ ,  $m = 5$ ,
- г.  $P = 7$ ,  $Q = 13$ ,  $c = 29$ ,  $m = 15$ ,
- д.  $P = 3$ ,  $Q = 11$ ,  $c = 7$ ,  $m = 24$ .

**4.2.** Для указанных открытых ключей пользователя RSA проверить подлинность подписанных сообщений:

- а.  $N = 55$ ,  $d = 3$ :  $\langle 7, 28 \rangle$ ,  $\langle 22, 15 \rangle$ ,  $\langle 16, 36 \rangle$ ,
- б.  $N = 65$ ,  $d = 5$ :  $\langle 6, 42 \rangle$ ,  $\langle 10, 30 \rangle$ ,  $\langle 6, 41 \rangle$ ,
- в.  $N = 77$ ,  $d = 7$ :  $\langle 13, 41 \rangle$ ,  $\langle 11, 28 \rangle$ ,  $\langle 5, 26 \rangle$ ,
- г.  $N = 91$ ,  $d = 5$ :  $\langle 15, 71 \rangle$ ,  $\langle 11, 46 \rangle$ ,  $\langle 16, 74 \rangle$ ,

д.  $N = 33$ ,  $d = 3$ :  $\langle 10, 14 \rangle$ ,  $\langle 24, 18 \rangle$ ,  $\langle 17, 8 \rangle$ .

**4.3.** Абоненты некоторой сети применяют подпись Эль-Гамала с общими параметрами  $p = 23$ ,  $g = 5$ . Для указанных секретных параметров абонентов найти открытый ключ  $(y)$  и построить подпись для сообщения  $m$ :

а.  $x = 11$ ,  $k = 3$ ,  $m = h = 15$ ,

б.  $x = 10$ ,  $k = 15$ ,  $m = h = 5$ ,

в.  $x = 3$ ,  $k = 13$ ,  $m = h = 8$ ,

г.  $x = 18$ ,  $k = 7$ ,  $m = h = 5$ ,

д.  $x = 9$ ,  $k = 19$ ,  $m = h = 15$ .

**4.4.** Для указанных открытых ключей  $(y)$  пользователей системы Эль-Гамала с общими параметрами  $p = 23$ ,  $g = 5$  проверить подлинность подписанных сообщений:

а.  $y = 22$ :  $\langle 15; 20, 3 \rangle$ ,  $\langle 15; 10, 5 \rangle$ ,  $\langle 15; 19, 3 \rangle$ ,

б.  $y = 9$ :  $\langle 5; 19, 17 \rangle$ ,  $\langle 7; 17, 8 \rangle$ ,  $\langle 6; 17, 8 \rangle$ ,

в.  $y = 10$ :  $\langle 3; 17, 12 \rangle$ ,  $\langle 2; 17, 12 \rangle$ ,  $\langle 8; 21, 11 \rangle$ ,

г.  $y = 6$ :  $\langle 5; 17, 1 \rangle$ ,  $\langle 5; 11, 3 \rangle$ ,  $\langle 5; 17, 10 \rangle$ ,

д.  $y = 11$ :  $\langle 15; 7, 1 \rangle$ ,  $\langle 10; 15, 3 \rangle$ ,  $\langle 15; 7, 16 \rangle$ .

**4.5.** Сообщество пользователей ГОСТа Р34.10-94 имеют общие параметры  $q = 11$ ,  $p = 67$ ,  $a = 25$ . Вычислить открытый ключ  $(y)$  и построить подпись для сообщения  $m$  при следующих секретных параметрах:

а.  $x = 3$ ,  $h = m = 10$ ,  $k = 1$ ,

б.  $x = 8$ ,  $h = m = 1$ ,  $k = 3$ ,

в.  $x = 5$ ,  $h = m = 5$ ,  $k = 9$ ,

г.  $x = 2$ ,  $h = m = 6$ ,  $k = 7$ ,

д.  $x = 9$ ,  $h = m = 7$ ,  $k = 5$ .

**4.6.** Для указанных открытых ключей  $(y)$  пользователей ГОСТа Р34.10-94 с общими параметрами  $q = 11$ ,  $p = 67$ ,  $a = 25$  проверить подлинность подписанных сообщений:



- а.  $y = 14$ :  $\langle 10; 4, 5 \rangle$ ,  $\langle 10; 7, 5 \rangle$ ,  $\langle 10; 3, 8 \rangle$ ,
- б.  $y = 24$ :  $\langle 1; 3, 5 \rangle$ ,  $\langle 1; 4, 3 \rangle$ ,  $\langle 1; 4, 5 \rangle$ ,
- в.  $y = 40$ :  $\langle 7; 7, 4 \rangle$ ,  $\langle 7; 9, 2 \rangle$ ,  $\langle 5; 9, 2 \rangle$ ,
- г.  $y = 22$ :  $\langle 6; 9, 5 \rangle$ ,  $\langle 8; 8, 3 \rangle$ ,  $\langle 7; 4, 1 \rangle$ ,
- д.  $y = 64$ :  $\langle 10; 7, 3 \rangle$ ,  $\langle 7; 7, 10 \rangle$ ,  $\langle 8; 7, 5 \rangle$ .

## Темы лабораторных работ

- 4.7. Разработать программы для генерации и проверки подписей RSA. Параметры пользователей необходимо выбрать самостоятельно. Для тестирования программы проверки подписи рекомендуется использовать подписанное сообщение  $\langle 500, 46514 \rangle$  для открытых ключей пользователя  $N = 52891$ ,  $d = 3$  (предполагаем, что  $h(m) = m$ ). Данное сообщение должно признаваться подлинным. Любое изменение компонентов подписанного сообщения с большой вероятностью будет делать подпись недействительной.
- 4.8. Разработать программы для генерации и проверки подписей Эль-Гамала. Рекомендуемые значения общих открытых параметров  $p = 31259$ ,  $g = 2$ . Остальные параметры пользователей выбрать самостоятельно. Для тестирования программы проверки подписи рекомендуется использовать подписанное сообщение  $\langle 500; 27665, 26022 \rangle$  для открытого ключа пользователя  $y = 16196$  (предполагаем, что  $h(m) = m$ ). Данное сообщение должно признаваться подлинным. Любое изменение компонентов подписанного сообщения с большой вероятностью будет делать подпись недействительной.
- 4.9. Разработать программы для генерации и проверки подписей по ГОСТ Р34.10-94. Рекомендуемые значения общих открытых параметров  $q = 787$ ,  $p = 31481$ ,  $a = 1928$ . Остальные параметры пользователей выбрать самостоятельно. Для тестирования программы проверки подписи рекомендуется использовать подписанное сообщение  $\langle 500; 655, 441 \rangle$  для открытого ключа пользователя  $y = 12785$  (предполагаем, что  $h(m) = m$ ). Данное сообщение должно признаваться подлинным. Любое изменение компонентов подписанного сообщения с большой вероятностью будет делать подпись недействительной.

## Глава 5. КРИПТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОТОКОЛЫ

Рассмотренные в предыдущих главах криптографические методы часто используются в качестве инструментов для решения других практически важных задач. Современная криптография позволяет решать проблемы, которые ранее считались в принципе неразрешимыми. Причем в настоящее время многие такие возможности криптографии используются в реальных компьютерных системах. Это и заключение коммерческих сделок в режиме удаленного взаимодействия участников, и осуществление денежных расчетов по сети, и проведение выборов по компьютерным сетям, и многое другое. Методы решения подобных задач обычно описываются в форме так называемых криптографических протоколов. Некоторые из них будут представлены в этой главе.

Обратим внимание читателя на то, что криптографические алгоритмы не просто предоставляют новые возможности пользователю (например, не нужно ходить в банк, можно произвести все необходимые операции со своего домашнего компьютера). Важно то, что они способны обеспечивать надежность значительно более высокую, чем традиционные механизмы. Например, если бумажную банкноту можно подделать, и случаи подделок весьма многочисленны, то электронную банкноту, созданную при помощи криптографических методов, подделать практически невозможно.

Часто практически важные задачи формулируются в игровой, забавной форме, для того чтобы представить идею в «чистом» виде, не загромождая ее техническими деталями. Одна из таких задач — «ментальный покер» — рассматривается в следующем разделе.

### 5.1. Ментальный покер

Рассмотрим задачу проведения честной игры в карты, когда партнеры находятся далеко друг от друга, но связаны компьютерной сетью. Мы рассмотрим предельно упрощенную постановку задачи, где

участвуют всего два игрока и всего три карты. Однако все основные идеи будут продемонстрированы, а обобщения на другие случаи очевидны.

Задача ставится следующим образом. Имеются два игрока Алиса и Боб и три карты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Необходимо раздать карты следующим образом: Алиса должна получить одну карту, Боб — также одну, а одна карта должна остаться в прикупе. При этом необходимо, чтобы:

- 1) каждый игрок мог получить с равными вероятностями любую из трех карт  $\alpha$ ,  $\beta$  или  $\gamma$ , а одна карта оказалась в прикупе;
- 2) каждый игрок знал только свою карту, но не знал карту противника и карту в прикупе;
- 3) в случае спора возможно было пригласить судью и выяснить, кто прав, кто виноват;
- 4) при раздаче карт с помощью компьютерной сети никто не знал, кому какая карта досталась (хотя раздача происходит по открытой линии связи и Ева может записать все передаваемые сообщения).

Дадим описание протокола, позволяющего организовать такую раздачу карт. Его удобно разбить на два этапа.

Предварительный этап необходим для выбора параметров протокола. Участники выбирают несекретное большое простое число  $p$ . Затем Алиса выбирает случайно число  $c_A$ , взаимно простое с  $p - 1$ , и вычисляет по обобщенному алгоритму Евклида число  $d_A$ , такое, что

$$c_A d_A \bmod (p - 1) = 1. \quad (5.1)$$

Независимо и аналогично Боб находит пару  $c_B$ ,  $d_B$ , такую, что

$$c_B d_B \bmod (p - 1) = 1. \quad (5.2)$$

Эти числа каждый игрок держит в секрете. Затем Алиса выбирает случайно три (различных) числа  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$  в промежутке от 1 до  $p - 1$ , в открытом виде передает их Бобу и сообщает, что  $\hat{\alpha}$  соответствует  $\alpha$ ,  $\hat{\beta} - \beta$ ,  $\hat{\gamma} - \gamma$  (т. е., например, число 3756 соответствует тузу и т.д.).

После этого начинается второй этап — собственно раздача карт, который удобно описать по шагам.

**Шаг 1.** Алиса вычисляет числа

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{\alpha}^{c_A} \bmod p, \\ u_2 &= \hat{\beta}^{c_A} \bmod p, \\ u_3 &= \hat{\gamma}^{c_A} \bmod p \end{aligned}$$

и высылает  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  Бобу, предварительно перемешав их случайным образом.

**Шаг 2.** Боб получает три числа, выбирает случайно одно из них, например  $u_2$ , и отправляет его Алисе по линии связи. Это и будет карта, которая достанется ей в процессе раздачи. Алиса, получив это сообщение, может вычислить

$$\hat{u} = u_2^{d_A} \bmod p = \hat{\beta}^{c_A d_A} \bmod p = \hat{\beta}, \quad (5.3)$$

т.е. она узнает, что ей досталась карта  $\beta$  (можно и не вычислять (5.3), так как она знает, какое число  $u_i$  какой карте соответствует).

**Шаг 3.** Боб продолжает свои действия. Он вычисляет для оставшихся двух чисел

$$v_1 = u_1^{c_B} \bmod p, \quad (5.4)$$

$$v_3 = u_3^{c_B} \bmod p. \quad (5.5)$$

С вероятностью  $1/2$  он переставляет эти два числа и отправляет Алисе.

**Шаг 4.** Алиса выбирает случайно одно из полученных чисел, например  $v_1$ , вычисляет число

$$w_1 = v_1^{d_A} \bmod p \quad (5.6)$$

и отправляет это число обратно к Бобу. Боб вычисляет число

$$z = w_1^{d_B} \bmod p \quad (5.7)$$

и узнает свою карту (у него получается  $\hat{\alpha}$ ). Действительно,

$$z = w_1^{d_B} = v_1^{d_A d_B} = u_1^{c_B d_B d_A} = \hat{\alpha}^{c_A c_B d_A d_B} = \hat{\alpha} \bmod p.$$

Карта, соответствующая  $v_2$ , остается в прикупе.

**Утверждение 5.1.** *Описанный протокол удовлетворяет всем свойствам честной раздачи карт.*

**Доказательство.** Мы дадим только идею доказательства. Алиса перемешивает числа  $u_1, u_2, u_3$  перед отправкой к Бобу. Затем Боб выбирает одно из этих чисел, не зная, какое число какой карте соответствует. При этом, если Боб выбирает карту случайно, обеспечивается то, что Алиса получает любую из карт с вероятностью  $1/3$ . Аналогично, если Алиса выбирает одну из оставшихся двух карт случайно с равными вероятностями, то Боб также получает любую из трех карт с вероятностью  $1/3$ . Очевидно, что при этих условиях и в прикупе каждая из карт может оказаться с вероятностью  $1/3$ .

Интересно отметить, что если Алиса или Боб будут нарушать некоторые требования протокола, то это может быть использовано им во вред. Поэтому каждый участник заинтересован в точном выполнении всех правил. Проверим это, считая, что игра повторяется многократно.

Предположим, что Алиса не перемешивает карты  $u_1, u_2, u_3$ , а всегда посылает их в одной и той же последовательности или руководствуется каким-либо другим простым правилом. Если раздача карт выполняется несколько раз, то Боб может использовать это в своих интересах (например, он всегда будет отправлять Алисе самую младшую карту и в каждом случае будет знать, какая карта ей досталась), т.е. Алисе выгодно перемешивать карты. Аналогично, можно проверить, что при необходимости выбора каждому игроку лучше выбирать карту случайно, с равными вероятностями.

Проверим выполнение второго требования, предъявляемого к честной раздаче карт. Когда Боб выбирает число  $u_i$ , соответствующее карте Алисы (шаг 2), он не знает секретное  $s_A$ , следовательно, он не может узнать, какое  $u_i$  какой карте соответствует, а вычисление  $s_A$  по  $u_i$  эквивалентно задаче дискретного логарифмирования и практически невозможно при больших  $p$ . Вообще говоря, когда Алиса выбирает карту для Боба, а он для нее, никто из них не может определить достоинство этой карты, так как оно зашифровано при помощи либо  $s_A$ , либо  $s_B$ .

Заметим, что ни Алиса, ни Боб не могут также знать, какая карта осталась в прикупе, так как соответствующее число имеет вид  $a^{s_A s_B}$  (см. (5.4) и (5.5)). Алиса не знает  $d_B$ , а Боб не знает  $d_A$ .

Проверим третье свойство. В случае возникновения спора су-

дья может повторить все вычисления по записанным передаваемым числам и выяснить, кто прав.

Проверим четвертое свойство. По линии связи передаются числа  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$  и  $w_1$ . Каждое из них может быть представлено в виде  $a^x \bmod p$ , где  $x$  неизвестно Еве. Мы знаем, что нахождение  $x$  — задача дискретного логарифмирования, которая практически неразрешима. Значит Ева ничего не может узнать.  $\square$

**Пример 5.1.** Пусть Алиса и Боб хотят честно раздать три карты: тройку ( $\alpha$ ), семерку ( $\beta$ ) и туза ( $\gamma$ ). (Точнее, обычно в криптографии предполагается, что никто из них не хочет быть обманутым. Большей «честности» от них не ожидают.) Пусть на предварительном этапе выбраны следующие параметры:

$$p = 23, \quad \hat{\alpha} = 2, \quad \hat{\beta} = 3, \quad \hat{\gamma} = 5.$$

Алиса выбирает  $c_A = 7$ , Боб выбирает  $c_B = 9$ .

Найдем по обобщенному алгоритму Евклида  $d_A$  и  $d_B$ :  $d_A = 19$ ,  $d_B = 5$ .

Шаг 1. Алиса вычисляет

$$\begin{aligned} u_1 &= 2^7 \bmod 23 = 13, \\ u_2 &= 3^7 \bmod 23 = 2, \\ u_3 &= 5^7 \bmod 23 = 17. \end{aligned}$$

Затем она перемешивает  $u_1, u_2, u_3$  и высылает их Бобу.

Шаг 2. Боб выбирает одно из полученных чисел, пусть, например, выбрано число 17. Он отправляет число 17 к Алисе. Она знает, что число 17 соответствует карте  $\gamma$ , и, таким образом, ее карта при раздаче — туз.

Шаг 3. Боб вычисляет

$$\begin{aligned} v_1 &= 13^9 \bmod 23 = 3, \\ v_2 &= 2^9 \bmod 23 = 6 \end{aligned}$$

и отправляет эти числа к Алисе, возможно, переставив их местами.

Шаг 4. Алиса получает числа 3 и 6, выбирает одно из них, пусть это будет 3, и вычисляет число

$$w_1 = 3^{19} \bmod 23 = 6.$$

Это число она отправляет Бобу, который вычисляет число

$$z = 6^5 \bmod 23 = 2$$

и узнает свою карту  $\alpha$ , т.е. ему досталась тройка. В прикупе осталась семерка, но ни Алиса, ни Боб этого не знают. Ева же, следившая за всеми передаваемыми сообщениями, не может ничего узнать в случае большого  $p$ .  $\square$

## 5.2. Доказательства с нулевым знанием

Рассмотрим следующую задачу, возникающую в некоторых криптографических приложениях. Снова участвуют Алиса и Боб. Алиса знает решение некоторой сложной задачи, она хочет убедить Боба в этом, однако так, чтобы Боб не узнал самого решения задачи. Т.е. в результате Боб должен убедиться в том, что Алиса знает решение, но не должен узнать что-нибудь о самом решении. На первый взгляд сама задача кажется абсурдной, а возможность ее решения — фантастической! Для того чтобы лучше понять ситуацию, рассмотрим случай из жизни пиратов. Пусть, например, Алиса знает карту острова, где спрятан клад, а Боб — капитан корабля, который может доставить ее на остров. Алиса хочет доказать, что карта у нее есть, не показывая ее Бобу (иначе Боб обойдется без Алисы, и весь клад достанется ему).

Такая же задача актуальна для компьютерных сетей в тех случаях, когда Боб (сервер или контроллер домена) должен принять решение о допуске Алисы к информации, хранящейся в сети, но при этом Алиса не хочет, чтобы кто-либо, прослушивающий канал передачи данных и сам сервер, получил какие-либо знания о ее пароле. Т.е. Боб получает «нулевое знание» о пароле (или карте) Алисы, но уверен, что у Алисы такой пароль (или карта) есть.

Итак, наша задача — построить протокол «доказательства с нулевым знанием». При этом мы считаем, что каждый из участников может вести «нечестную» игру и пытаться обмануть другого.

В качестве сложной задачи, решение которой известно Алисе, мы вначале рассмотрим задачу раскраски графа тремя красками. Мы опишем достаточно простой в идейном плане протокол доказательства для этой задачи. Затем мы рассмотрим задачу нахождения гамильтонова цикла в графе с более сложным в идейном плане,

но более эффективным в плане реализации протоколом доказатель-ства. Отметим, что обе задачи — раскраски графа тремя красками и нахождения гамильтонова цикла — являются NP-полными. Мы не приводим формального определения NP-полноты, которое может быть найдено, например, в [1]. Для читателя, не знакомого с этим определением, отметим только, что NP-полнота задачи неформально означает, что время решения задачи растет экспоненциально с ростом размера задачи (объема исходных данных).

### Задача о раскраске графа

В задаче о раскраске графа рассматривается граф с множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$  (числа элементов в этих множествах будем обозначать через  $|V|$  и  $|E|$ ). Алиса знает правильную раскраску этого графа тремя красками (красной (R), синей (B) и желтой (Y)). Правильная раскраска — это такая, когда любые две вершины, соединенные одним ребром, окрашены разными цветами. Приведем пример (рис. 5.1).

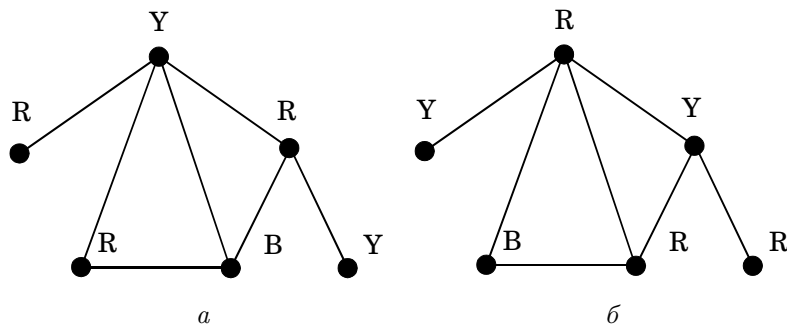


Рис. 5.1. Примеры раскрасок:  $a$  — правильная,  $b$  — неправильная

Для получения правильной раскраски графа тремя красками известны только экспоненциальные алгоритмы, т.е. такие, у которых время решения растет экспоненциально с ростом числа вершин и ребер в графе. Поэтому в случае больших  $|V|$  и  $|E|$  эта задача практически неразрешима.



Итак, Алиса знает (правильную) раскраску графа с большими  $|V|$  и  $|E|$ . Она хочет доказать это Бобу, но так, чтобы он ничего не узнал об этой раскраске.

Протокол доказательства состоит из множества одинаковых этапов. Опишем сначала один этап.

**Шаг 1.** Алиса выбирает случайно перестановку  $\Pi$  из трех букв R, B, Y и перенумеровывает все вершины графа согласно этой перестановке. Очевидно, что раскраска останется верной. Например, если  $\Pi = (Y, R, B)$ , то граф слева на рис. 5.1 превращается в граф на рис. 5.2.

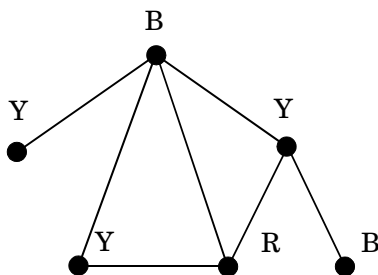


Рис. 5.2. Другой вариант раскраски

**Шаг 2.** Для каждой вершины  $v$  из множества  $V$  Алиса генерирует большое случайное число  $r$  и заменяет в нем два последних бита на 00, что соответствует красной вершине, 01 — синей, 10 — желтой.

**Шаг 3.** Для каждой вершины  $v$  Алиса формирует данные, используемые в RSA, а именно,  $P_v$ ,  $Q_v$ ,  $N_v = P_v Q_v$ ,  $c_v$  и  $d_v$ .

**Шаг 4.** Алиса вычисляет

$$Z_v = r_v^{d_v} \bmod N_v$$

и посылает Бобу значения  $N_v$ ,  $d_v$  и  $Z_v$  для каждой вершины графа.

**Шаг 5.** Боб выбирает случайно одно ребро из множества  $E$  и сообщает Алисе, какое именно ребро он выбрал. В ответ Алиса высылает числа  $c_{v_1}$  и  $c_{v_2}$ , соответствующие вершинам этого ребра. После этого Боб вычисляет

$$\hat{Z}_{v_1} = Z_{v_1}^{c_{v_1}} \bmod N_{v_1} = r_{v_1}, \quad \hat{Z}_{v_2} = Z_{v_2}^{c_{v_2}} \bmod N_{v_2} = r_{v_2}$$

и сравнивает два младших бита в полученных числах. При правильной раскраске два младших бита в числах  $\hat{Z}_{v_1}$  и  $\hat{Z}_{v_2}$  должны быть различны. Если значения совпали, значит, Алиса пыталась обмануть Боба, и на этом все заканчивается. Если не совпали, то весь описанный процесс повторяется  $a|E|$  раз, где  $a > 0$  — параметр.

**Утверждение 5.2.** *Если Алиса не располагает правильной раскраской графа, то вероятность того, что она сможет обмануть Боба не превышает  $e^{-a}$ , где  $e \approx 2.718$  — число Эйлера (основание натурального логарифма).*

*З а м е ч а н и е.* Если взять большое  $a$ , то вероятность обмана можно сделать сколь угодно малой. Например, при  $a = 5$  эта вероятность меньше 0.01.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть Алиса не располагает правильной раскраской графа. Значит, хотя бы для одного ребра из  $E$  вершины окрашены в один цвет. Если Алиса будет действовать по протоколу, то вероятность того, что Боб обратится к такому ребру, не меньше  $1/|E|$  (в этом случае Алиса разоблачена). Значит, вероятность того, что Алиса не разоблачена во время одного этапа, не превышает  $1 - 1/|E|$  и, следовательно, вероятность того, что она не будет разоблачена за  $a|E|$  этапов, не превышает  $(1 - 1/|E|)^{a|E|}$ . Используя известное неравенство  $1 - x \leq e^{-x}$ , получаем

$$(1 - 1/|E|)^{a|E|} \leq \left(e^{-1/|E|}\right)^{a|E|} = e^{-a}. \quad \square$$

Проверим все свойства, необходимые для протокола с нулевым знанием.

1. Мы видим, что вероятность возможности обмана для Алисы может быть сделана сколь угодно малой.

2. Посмотрим, почему Боб не получает никакой информации о раскраске. Из-за того, что цвета переставляются случайно на каждом этапе (см. шаг 1), он не сможет узнать истинную раскраску, перебирая все ребра одно за другим, и вообще он ничего не узнает о правильной раскраске. То, что на втором шаге выбирается случайное число  $r_v$ , не позволяет Бобу вычислить по имеющимся  $N_v$  и  $d_v$  коды соответствующих красок. Он не может декодировать полученное  $Z_v$  потому, что он не знает чисел  $c_v$ , так как они для всех вершин не высылаются, а вычислить их он не может, не зная  $P_v$  и  $Q_v$ .
3. Рассмотрим еще одну возможность обмана, которая в принципе может быть у Алисы. Казалось бы, Алиса может подменить  $c_{v_1}$  и  $c_{v_2}$ , если ей это выгодно. Однако это невозможно в силу того, что числу  $c_v$ , удовлетворяющее равенству

$$c_v d_v \bmod ((P_v - 1)(Q_v - 1)) = 1,$$

единственно.

Таким образом, выполнены все свойства:

- 1) Алиса доказывает Бобу, что знает решение задачи, и вероятность того, что Боб обманут, не больше  $e^{-a}$ ;
- 2) Боб не получает никаких сведений о раскраске.

Рассмотрим последнюю возможность обмана для всех участников. Что будет, если они будут уклоняться от указанного алгоритма, выбирая параметры не случайно?

Пусть, например, Боб запрашивает ребра графа не случайно, а по какому-нибудь простому правилу (например, в соответствии с их номерами). В этом случае, если у Алисы нет правильной раскраски, то она сможет обмануть Боба, «правильно» раскрашивая те ребра, которые будут запрошены. Таким образом, Боб заинтересован в том, чтобы его запросы были случайны и не содержали в себе какой-либо закономерности.

Стойкость остальных шагов определяется стойкостью RSA, и при больших  $P_v$  и  $Q_v$  система достаточно надежна.

Задача о нахождении гамильтонова цикла в графе

Рассматриваемая в данном разделе задача не просто предоставляет нам возможность описать еще одну схему построения протокола доказательства с нулевым знанием, но и имеет важное теоретическое значение. Блюм (Manuel Blum) показал, что, выражаясь неформально, любое математическое утверждение может быть представлено в виде графа, причем доказательство этого утверждения соответствует гамильтонову циклу в этом графе (см., например, [34]). Поэтому наличие протокола доказательства с нулевым знанием для гамильтонова цикла означает, что доказательство любого математического утверждения может быть представлено в форме доказательства с нулевым знанием.

**Определение 5.1.** *Гамильтоновым циклом* в графе называется непрерывный путь, проходящий через все вершины графа ровно по одному разу.

Пример 5.2. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 5.3.

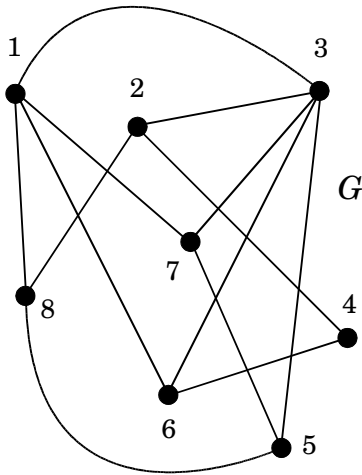


Рис. 5.3. Граф с гамильтоновым циклом (8, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 1)

Путь, проходящий последовательно через вершины 8, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 1, представляет собой гамильтонов цикл. Действительно, в этом

пути содержатся все вершины графа, и каждая вершина посещается только один раз.  $\square$

Ясно, что если в графе  $G$  с  $n$  вершинами гамильтонов цикл существует, то при некоторой нумерации вершин он пройдет точно через вершины с последовательными номерами  $1, 2, 3, \dots, n$ . Поэтому путем перебора всех возможных нумераций вершин мы обязательно найдем гамильтонов цикл. Но количество возможных нумераций равно  $n!$ , и поэтому уже при умеренно больших  $n$ , например, при  $n = 100$ , такой подход становится практически нереализуемым. Доказано, что задача нахождения гамильтонова цикла в графе является NP-полной. Мы уже говорили кратко о понятии NP-полноты. Неформально, NP-полнота рассматриваемой задачи означает, что для ее решения не существуют (точнее, неизвестны) алгоритмы существенно более быстрые, чем указанный метод перебора.

Нашей задачей будет построение криптографического протокола, с помощью которого Алиса будет доказывать Бобу, что она знает гамильтонов цикл в некотором графе  $G$  так, чтобы Боб не получил никаких знаний о самом этом цикле. Иными словами, Алиса будет предоставлять Бобу доказательство с нулевым знанием. Еще раз напомним читателю, что «нулевое знание» означает, что независимо от числа реализаций протокола доказательства Боб будет располагать точно такими же сведениями о гамильтоновом цикле, какие он мог бы получить, просто изучая представленный ему граф  $G$ .

Итак, допустим, что Алиса знает гамильтонов цикл в графе  $G$ . Теперь она может это доказывать Бобу и всем, кто имеет граф  $G$ , с помощью описываемого ниже протокола. Алиса может использовать это доказательство, например, для идентификации своей личности. Но прежде чем мы перейдем к описанию протокола, договоримся о некоторых обозначениях.

Мы будем обозначать графы буквами  $G, H, F$ , понимая под этим одновременно соответствующие матрицы смежности. Элемент матрицы  $H_{ij} = 1$ , если в графе  $H$  есть ребро, соединяющее вершины  $i$  и  $j$ ;  $H_{ij} = 0$  в противном случае. Символом  $\parallel$  будем обозначать конкатенацию (сцепление) двух чисел, точнее, двоичных слов, им соответствующих. Нам понадобится шифр с открытым ключом. Вообще говоря, это может быть любой шифр, но для определенности будем использовать шифр RSA (разд. 2.6). Будем считать, что Алиса сформировала систему RSA с открытыми параметрами  $N$  и  $d$ .

Важно, что зашифрованные в этой системе сообщения может расшифровать только Алиса и больше никто.

Протокол доказательства состоит из следующих четырех шагов (пояснения будут даны ниже).

**Шаг 1.** Алиса строит граф  $H$ , являющийся копией исходного графа  $G$ , где у всех вершин новые, случайно выбранные номера. На языке теории графов говорят, что  $H$  изоморфен  $G$ . Иными словами,  $H$  получается путем некоторой перестановки вершин в графе  $G$  (с сохранением связей между вершинами). Алиса кодирует матрицу  $H$ , приписывая к первоначально содержащимся в ней нулям и единицам случайные числа  $r_{ij}$  по схеме  $\tilde{H}_{ij} = r_{ij} \| H_{ij}$ . Затем она шифрует элементы матрицы  $\tilde{H}$ , получая зашифрованную матрицу  $F$ ,  $F_{ij} = \tilde{H}_{ij}^d \bmod N$ . Матрицу  $F$  Алиса передает Бобу.

**Шаг 2.** Боб, получив зашифрованный граф  $F$ , задает Алисе один из двух вопросов.

1. Каков гамильтонов цикл для графа  $H$ ?
2. Действительно ли граф  $H$  изоморфен  $G$ ?

**Шаг 3.** Алиса отвечает на соответствующий вопрос Боба.

1. Она расшифровывает в  $F$  ребра, образующие гамильтонов цикл.
2. Она расшифровывает  $F$  полностью (фактически передает Бобу граф  $\tilde{H}$ ) и предъявляет перестановку, с помощью которых граф  $H$  был получен из графа  $G$ .

**Шаг 4.** Получив ответ, Боб проверяет правильность расшифровки путем повторного шифрования и сравнения с  $F$  и убеждается либо в том, что показанные ребра действительно образуют гамильтонов цикл, либо в том, что предъявленные перестановки действительно переводят граф  $G$  в граф  $H$ .

Весь протокол повторяется  $t$  раз.

Обсудим вначале кратко несколько вопросов по построению протокола.

1. Зачем Алиса строит изоморфный граф? Если бы она этого не делала, то Боб, получив ответ на свой вопрос номер один, узнал бы гамильтонов цикл в графе  $G$ .
2. Зачем Алиса кодирует матрицу  $H$ ? С этим приемом мы уже встречались при шифровании цветов вершин графа. Дело в том, что невозможно зашифровать непосредственно нули и единицы (с помощью шифра RSA они вообще не шифруются). Даже если заменить их на какие-то произвольные числа  $a$  и  $b$ , то мы получим всего два различных шифротекста, и Бобу не составит труда понять, какой из них какому числу соответствует. Т.е. структура графа не будет скрыта. Здесь мы сталкиваемся с типичной ситуацией, когда требуется использовать так называемый рандомизированный шифр. И такой шифр строится путем добавления случайных чисел в матрицу  $H$  перед шифрованием. Закодированная матрица  $\tilde{H}$  точно также задает граф (нечетность числа означает наличие ребра, четность — его отсутствие), но после шифрования  $\tilde{H}$  структура графа полностью скрывается (мы используем известное свойство шифра RSA — он полностью скрывает четность числа [26]).
3. Зачем Боб задает два вопроса? Если бы он задавал только вопрос номер один, который по смыслу протокола является основным, то Алиса, не зная в действительности гамильтонова цикла в графе  $G$ , могла бы предъявить Бобу совсем другой граф с таким же количеством вершин и искусственно заложенным в него гамильтоновым циклом. Поэтому Боб иногда просит Алису доказать изоморфизм графов  $H$  и  $G$ . Важно, что Алиса не знает заранее, какой из двух вопросов задаст Боб.
4. Почему Боб не может задать сразу двух вопросов? В этом случае он узнал бы гамильтонов цикл в  $G$ , так как ему был бы показан гамильтонов цикл в  $H$  и правило перехода от  $H$  к  $G$ .
5. Зачем Боб проверяет правильность расшифровки? Если бы он этого не делал, то Алиса на четвертом шаге могла бы предоставить ему «выгодную» для себя информацию, а не ту, которую она посылала ему на втором шаге.

Более точно основные детали протокола обосновываются в ходе доказательства двух основных утверждений.

**Утверждение 5.3.** *Вероятность обмана при  $t$  реализациях протокола не превосходит  $2^{-t}$ .*

**Доказательство.** Вначале покажем, что вероятность обмана в одной реализации протокола равна  $1/2$ . Заметим, что если Алиса действительно знает гамильтонов цикл в графе  $G$ , то она может правильно ответить на любой вопрос Боба. Если же она не знает гамильтонов цикл, то самое большее, что она может сделать, — это подготовиться к ответу на первый либо на второй вопрос. В ожидании первого вопроса, она создает новый граф с искусственно заложенным в него гамильтоновым циклом. Но в этом случае она не сможет доказать его изоморфизм графу  $G$ . В ожидании второго вопроса, она строит граф, изоморфный графу  $G$ . Но в этом случае она не сможет показать в нем гамильтонов цикл. Таким образом, вероятность успешности обмана равна вероятности угадывания номера вопроса. В предположении, что Боб задает оба вопроса с одинаковыми вероятностями, мы получаем, что вероятность обмана равна  $1/2$ .

Так как Боб прекращает игру при первом же неправильном ответе, вероятность обмана при  $t$  реализациях протокола не превосходит  $(1/2)^t$ .  $\square$

**Утверждение 5.4.** *Представленный протокол реализует доказательство с нулевым знанием.*

**Доказательство.** Чтобы доказать, что Боб не получает никаких знаний в ходе реализации протокола, достаточно показать, что все, что он получает от Алисы, он мог бы получить сам, не вступая с ней ни в какое общение.

Рассмотрим вначале второй вопрос Боба. В ответ на этот вопрос он получает граф, изоморфный графу  $G$ . Но он сам мог построить сколько угодно изоморфных графов, и то, что присылает ему Алиса, это просто один из них.

Случай с первым вопросом не столь очевиден. В ответ на первый вопрос Боб получает гамильтонов цикл в графе, изоморфном графу  $G$ . На первый взгляд может показаться, что это дает Бобу какую-то информацию. Однако это не так. Заметим, что если в  $G$  есть гамильтонов цикл, то при некоторой нумерации вершин существует



изоморфный граф, который задается матрицей смежности вида

$$\begin{pmatrix} * & 1 & * & \cdots & * & * & * \\ * & * & 1 & \cdots & * & * & * \\ & & & \cdots & & & \\ * & * & * & \cdots & * & 1 & * \\ * & * & * & \cdots & * & * & 1 \\ 1 & * & * & \cdots & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

где \* означает неопределенность в наличии или отсутствии ребра. Т.е. при такой нумерации гамильтонов цикл проходит через вершины в порядке возрастания номеров. Изменяя нумерацию вершин, Боб может получать из (5.8) всевозможные изоморфные матрицы. Когда Алиса, отвечая на его первый вопрос, открывает гамильтонов цикл, Боб видит как раз одну из таких матриц.

Таким образом, Боб не получает от Алисы никакой информации, которую он не мог бы получить сам.  $\square$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий все основные этапы описанного протокола.

**Пример 5.3.** Возьмем в качестве основного граф  $G$ , изображенный на рис. 5.3. Его матрица смежности имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

В матрице с помощью  $\boxed{\cdot}$  показан гамильтонов цикл. Алиса выбирает некоторую случайную нумерацию вершин, скажем, 7, 4, 5, 3, 1, 2, 8,

6, и получает изоморфный граф

$$H = \begin{pmatrix} & 7 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 8 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} \\ 5 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для шифрования матрицы будем использовать систему RSA с параметрами  $N = 55$ ,  $d = 3$ . Вначале закодируем матрицу  $H$ . В рамках данного примера просто припишем слева к каждому элементу матрицы выбираемую случайно с равными вероятностями цифру из множества  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ :

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 50 & 20 & 11 & 31 & 21 & 40 & 20 & 10 \\ 40 & 30 & 50 & 20 & 10 & 41 & 50 & 21 \\ 41 & 30 & 50 & 11 & 30 & 20 & 51 & 40 \\ 11 & 10 & 41 & 30 & 51 & 41 & 30 & 21 \\ 31 & 20 & 40 & 11 & 50 & 10 & 41 & 31 \\ 50 & 41 & 20 & 21 & 40 & 10 & 21 & 50 \\ 40 & 30 & 31 & 50 & 41 & 21 & 30 & 40 \\ 20 & 41 & 10 & 51 & 41 & 20 & 30 & 40 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы шифруем матрицу  $\tilde{H}$ , возводя каждый ее элемент в куб по модулю 55:

$$F = \begin{pmatrix} 40 & 25 & 11 & 36 & 21 & 35 & 25 & 10 \\ 35 & 50 & 40 & 25 & 10 & 06 & 40 & 21 \\ 06 & 50 & 40 & 11 & 50 & 25 & 46 & 35 \\ 11 & 10 & 06 & 50 & 46 & 06 & 50 & 21 \\ 36 & 25 & 35 & 11 & 40 & 10 & 06 & 36 \\ 40 & 06 & 25 & 21 & 35 & 10 & 21 & 40 \\ 35 & 50 & 36 & 40 & 06 & 21 & 50 & 35 \\ 25 & 06 & 10 & 46 & 06 & 25 & 50 & 35 \end{pmatrix}.$$

(При внимательном просмотре матрицы  $F$  может показаться, что использованный нами шифр плохо скрывает исходную матрицу  $H$ .)

Это объясняется тем, что, во-первых, модуль 55 слишком мал и, во-вторых, в матрице  $\tilde{H}$  много чисел, не взаимно простых с модулем. Для реальных систем RSA, где  $N$  — большое число, такая ситуация практически исключена.)

Боб получает матрицу  $F$  и задает один из двух вопросов. Если он просит доказать изоморфизм графов, то Алиса просто посылает ему кодированную матрицу  $\tilde{H}$  и использованную нумерацию 7, 4, 5, 3, 1, 2, 8, 6. Боб проверяет соответствие матрицы  $\tilde{H}$  матрице  $F$ , т.е. выполнение равенств  $50^3 \bmod 55 = 40$ ,  $20^3 \bmod 55 = 25$  и т.д. Из матрицы  $\tilde{H}$  Боб получает граф  $H$  (просто отбросив старшую десятичную цифру). Затем он переставляет вершины графа  $G$  в соответствии с полученной нумерацией, как это делала Алиса, и убеждается в том, что  $H$  и  $G$  — один и тот же граф.

Если Боб просит показать ему гамильтонов цикл, то Алиса посылает ему соответствующий список (закодированных) ребер графа  $H$ : (1, 5, 21), (5, 7, 41), (7, 6, 21), ..., (3, 1, 41). Каждый элемент содержит номера вершин и код ребра. Боб проверяет соответствие указанных в списке ребер матрице  $F$ , например,  $21^3 \bmod 55 = 21 = F_{1,5}$ ,  $41^3 \bmod 55 = 06 = F_{5,7}$  и т.д. Затем он убеждается, что указанный в списке путь проходит через все вершины графа по одному разу.  $\square$

### 5.3. Электронные деньги

Во многих странах люди оплачивают покупки при помощи электронных карточек, заказывают авиабилеты через Интернет, покупают самые разнообразные товары в Интернет-магазинах. Сведения о покупках накапливаются в магазинах и банках. Поэтому появилась новая проблема, иногда называемая «проблема Большого Брата».

Суть проблемы состоит в том, что исчезает анонимность процесса покупки, т.е. информация о покупках любого человека может стать известной третьим лицам и использоваться против него. Например, сведения о покупке билета на поезд или самолет могут представлять интерес для преступников, информация о закупках алкогольных напитков политическим деятелем может быть использована против него его противниками и т.д., и т.п.

Поэтому возникла идея разработать такие схемы электронных платежей, которые сохраняли бы анонимность покупателя в той же степени, что и при расчете наличными деньгами. Такие протоколы называются электронными или цифровыми деньгами (digital cache),

что подчеркивает их основное свойство — они обеспечивают ту же степень анонимности, что и обычные деньги. Некоторые схемы уже используются в реальной жизни. Описываемая ниже схема была предложена Д. Чаумом (David Chaum), см. [2, 26].

Мы рассмотрим две «плохие» схемы, а затем «хорошую», чтобы было легче понять суть метода.

Вначале дадим более точную постановку задачи. Имеются три участника: банк, покупатель и магазин. Покупатель и магазин имеют соответствующие счета в банке, и покупатель хочет купить некоторый товар в магазине. Покупка осуществляется в виде трехступенчатого процесса:

- 1) покупатель снимает нужную сумму со своего счета в банке;
- 2) покупатель «пересылает» деньги в магазин;
- 3) магазин сообщает об этом в банк, соответствующая сумма денег зачисляется на счет магазина, а покупатель забирает товар (или последний ему доставляется).

Наша цель — разработать такую схему, чтобы

- она была надежна;
- чтобы банк не знал, кто купил товар, т.е. была сохранена анонимность обычных денег.

Опишем первую «плохую» схему (она базируется на RSA). Банк имеет следующую информацию: секретные числа  $P$ ,  $Q$ ,  $c$  и открытые

$$\begin{aligned} N &= PQ, \\ d &= c^{-1} \bmod (P-1)(Q-1). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Допустим, покупатель решил израсходовать некоторую заранее оговоренную с банком сумму (например, 100\$). (Мы сначала рассмотрим случай, когда может использоваться «банкнота» только одного номинала (скажем, 100\$).) Покупатель высылает в банк число  $n$ , которое будет номером банкноты (обычно требуется, чтобы генерировалось случайное число в промежутке  $[2, N-1]$ ).

Банк вычисляет число

$$s = n^c \bmod N \tag{5.10}$$

и формирует банкноту  $\langle n, s \rangle$ , которую возвращает покупателю, предварительно уменьшив его счет на 100\$. Параметр  $s$  в банкноте — это подпись банка. Никто не может подделать подпись, так как число  $s$  секретно.

Покупатель предъявляет банкноту  $\langle n, s \rangle$  в магазине, чтобы купить товар. Магазин отправляет эту банкноту в банк для проверки. Прежде всего, банк проверяет правильность подписи (эту проверку мог бы сделать и магазин, используя открытые ключи банка). Но кроме этого банк хранит все номера возвратившихся к нему банкнот и проверяет, нет ли числа  $n$  в этом списке. Если  $n$  есть в списке, то платеж не принимается (кто-то пытается использовать банкноту повторно), и банк сообщает об этом магазину. Если же все проверки прошли успешно, то банк добавляет 100\$ на счет магазина, а магазин отпускает товар покупателю.

Недостаток этой схемы — отсутствует анонимность. Банк, а также все, кто имеет доступ к открытым линиям связи, могут запомнить, какому покупателю соответствует число  $n$ , и тем самым выяснить, кто купил товар.

Рассмотрим вторую «плохую» схему, которая уже обеспечивает анонимность. Эта схема базируется на так называемой «слепой подписи».

Снова покупатель хочет купить товар. Он генерирует число  $n$ , которое теперь *не будет* посылаться в банк. Затем он генерирует случайное число  $r$ , взаимно простое с  $N$ , и вычисляет число

$$\hat{n} = (n \cdot r^d) \bmod N. \quad (5.11)$$

Число  $\hat{n}$  покупатель отправляет в банк.

Банк вычисляет число

$$\hat{s} = \hat{n}^c \bmod N \quad (5.12)$$

и отправляет  $\hat{s}$  обратно покупателю (не забыв при этом снять 100\$ с его счета).

Покупатель находит число  $r^{-1} \bmod N$  и вычисляет

$$s = (\hat{s} \cdot r^{-1}) \bmod N. \quad (5.13)$$

Заметим, что с учетом соотношений (5.12), (5.11) и (5.9) имеем

$$s = \hat{n}^c \cdot r^{-1} = (n \cdot r^d)^c \cdot r^{-1} = n^c r^{dc} \cdot r^{-1} = n^c r^1 r^{-1} = n^c \bmod N,$$

т.е. мы получили подпись банка к  $n$  (см. (5.10)), но самого числа  $n$  ни банк, ни кто либо другой не видел. Вычисление (5.12) называется «слепой подписью», так как реальное сообщение ( $n$ ) подписывающий не видит и узнать не может.

Таким образом, покупатель имеет число  $n$ , которое никому не известно и никогда не передавалось по каналам связи, и подпись банка  $s$ , совпадающую с вычисленной по (5.10). Покупатель формирует банкноту  $\langle n, s \rangle$  и действует так же, как в первой «плохой» схеме. Но теперь никто не знает, кому соответствует эта банкнота, т.е. она стала анонимной, как обычная бумажная банкнота.

Действия магазина и банка после предъявления покупателем банкноты  $\langle n, s \rangle$  ничем не отличаются от действий, описанных в первой схеме.

Почему же данная схема плохая? Она имеет следующий недостаток: можно сфабриковать фальшивую банкноту, если известны хотя бы две настоящие. Делается это так. Пусть злоумышленник (будь то покупатель или магазин) имеет две настоящие банкноты  $\langle n_1, s_1 \rangle$  и  $\langle n_2, s_2 \rangle$ . Тогда он легко сможет изготовить фальшивую банкноту  $\langle n_3, s_3 \rangle$ , вычислив числа

$$\begin{aligned} n_3 &= n_1 n_2 \bmod N, \\ s_3 &= s_1 s_2 \bmod N. \end{aligned}$$

Действительно,

$$n_3^c = (n_1 n_2)^c = n_1^c n_2^c = s_1 s_2 = s_3 \bmod N, \quad (5.14)$$

т.е.  $s_3$  является правильной подписью для  $n_3$ , и у банка нет никаких оснований, чтобы не принять эту фальшивую банкноту (он просто не сможет отличить ее от подлинной). Это так называемое «мультипликативное свойство» системы RSA.

Опишем, наконец, «хорошую» схему, в которой устранены все недостатки первых двух. В одном варианте такой схемы используется некоторая односторонняя функция

$$f: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$$

( $f$  вычисляется легко, а обратная к ней функция  $f^{-1}$  — очень трудно). Функция  $f$  не секретна и известна всем (покупателю, банку и магазину).

Банкнота теперь определяется как пара чисел  $\langle n, s_f \rangle$ , где

$$s_f = (f(n))^c \bmod N,$$

т.е. подписывается не  $n$ , а значение  $f(n)$ .

Покупатель генерирует  $n$  (никому его не показывая), вычисляет  $f(n)$ , подписывает в банке при помощи «слепой подписи» число  $f(n)$  и формирует банкноту  $\langle n, s_f \rangle$ . Эта банкнота обладает всеми хорошими свойствами, как и во второй схеме, в то же время подделывать такую банкноту невозможно, так как невозможно вычислить  $f^{-1}$ . Для проверки подписи (т.е. подлинности банкноты) нужно вычислить  $f(n)$  и убедиться, что

$$s_f^d \bmod N = f(n).$$

Заметим, что при выборе односторонней функции нужно проявлять осторожность. Например, функция  $f(n) = n^2 \bmod N$ , которая действительно является односторонней, не годится для рассматриваемого протокола. Читатель может проверить, что банкноты, созданные с использованием такой функции, будут по-прежнему обладать мультипликативным свойством (5.14). На практике в качестве  $f(n)$  обычно используются криптографические хеш-функции, описываемые в главе 8.

Все остальные действия магазина и банка остаются такими же, как и в ранее описанных схемах.

Есть еще один, более простой, способ борьбы с мультипликативным свойством системы RSA — внесение избыточности в сообщение. Допустим, что длина модуля  $N$  — 1024 бита. Такой же может быть и длина числа  $n$ . Будем записывать (случайно выбираемый) номер банкноты только в младшие 512 бит  $n$ , а в старшие 512 бит  $n$  запишем некоторое фиксированное число. Это фиксированное число может нести полезную информацию, такую, как номинал банкноты и наименование банка (с помощью 512 бит можно представить строку из 64 символов ASCII). Теперь банк при предъявлении ему банкноты будет обязательно проверять наличие фиксированного заголовка в параметре  $n$  и отвергать банкноту в случае его отсутствия. Вероятность того, что при перемножении двух чисел по модулю  $N$  результат совпадет с ними в 512 битах пренебрежимо мала. Поэтому получить фальшивую банкноту по формуле (5.14) не удастся.

**Пример 5.4.** Пусть в качестве секретных параметров банка выбраны числа  $P = 17$ ,  $Q = 7$ ,  $c = 77$ . Соответствующие им открытые параметры будут  $N = 119$ ,  $d = 5$ . Для исключения возможности подделки банкнот их допустимыми номерами считаются только числа, состоящие из двух одинаковых десятичных цифр, например, 11, 77, 99.

Когда покупатель хочет получить банкноту, он вначале случайным образом выбирает ее номер (из числа допустимых). Предположим, он выбрал  $n = 33$ . Затем он находит случайное число  $r$ , взаимнопростое со 119. Допустим,  $r = 67$ ,  $\gcd(67, 119) = 1$ . Далее, покупатель вычисляет

$$\hat{n} = (33 \cdot 67^5) \bmod 119 = (33 \cdot 16) \bmod 119 = 52.$$

Именно число 52 он посылает в банк.

Банк списывает со счета покупателя 100\$ и отправляет ему число

$$\hat{s} = 52^{77} \bmod 119 = 103.$$

Покупатель вычисляет  $r^{-1} = 67^{-1} \bmod 119 = 16$  и  $s = 103 \cdot 16 \bmod 119 = 101$  и получает платежеспособную банкноту

$$\langle n, s \rangle = \langle 33, 101 \rangle.$$

Эту банкноту он приносит (или посылает) в магазин, чтобы купить товар.

Магазин предъявляет банкноту в банк. Банк делает следующие проверки:

- 1) номер банкноты ( $n = 33$ ) состоит из двух одинаковых десятичных цифр (т.е. содержит требуемую избыточность);
- 2) ранее банкнота с таким номером не предъявлялась;
- 2) подпись банка верна, т.е.  $33^5 \bmod 119 = 101$ .

Так как все проверки прошли успешно, банк зачисляет 100\$ (это фиксированный номинал банкноты) на счет магазина, о чем ему и сообщает. Магазин отпускает товар покупателю.  $\square$

В завершение разберем еще две проблемы, возникающие в связи с рассмотренной схемой электронных денег.



В представленной схеме независимо действующие покупатели или даже один покупатель, который не помнит номеров ранее использованных им банкнот, могут случайно сгенерировать две или более банкноты с одинаковыми номерами. По условиям протокола банк примет к оплате только одну из таких банкнот (ту, которая будет предъявлена первой). Однако примем во внимание размеры чисел, используемых в протоколе. Если номер банкноты — число длиной 512 бит и покупатели генерируют его действительно случайным образом, то вероятность получения когда либо двух одинаковых номеров пренебрежимо мала.

Вторая проблема состоит в том, что в рассмотренной схеме используются только банкноты одного фиксированного номинала, что, конечно, неудобно для покупателя. Решение проблемы использования банкнот разного номинала возможно следующим образом. Банк заводит несколько пар  $(c_i, d_i)$ , обладающих свойством (5.9), и объявляет, что  $d_1$  соответствует, например, 1000 руб.,  $d_2$  — 500 руб. и т.д. Когда покупатель запрашивает слепую подпись в банке, он дополнительно сообщает, какого номинала банкноту он хочет получить. Банк снимает с его счета сумму, равную указанному номиналу, и формирует подпись, используя соответствующее секретное число  $c_i$ . Когда впоследствии банк получает подписанную банкноту, он использует для проверки подписи по очереди числа  $d_1, d_2$  и т.д. Если подпись оказалась верна для какого-то  $d_i$ , то принимается банкнота  $i$ -го номинала. В случае, когда параметр  $n$  банкноты содержит фиксированный заголовок с указанием ее номинала, задача проверки подписи облегчается — банк сразу использует нужный ключ  $d_i$ .

#### 5.4. Взаимная идентификация с установлением ключа

В данном разделе мы рассмотрим криптографически стойкий протокол, в результате реализации которого два абонента сети  $A$  и  $B$  взаимно идентифицируют друг друга (т.е.  $A$  убеждается в том, что взаимодействует с  $B$ , а  $B$  — в том, что он взаимодействует с  $A$ ) и формируют общий секретный ключ, который может использоваться в дальнейшем для шифрования передаваемых ими сообщений. В реальной жизни в качестве  $A$  и  $B$  могут выступать пользователь и компьютерная система или две различные компьютерные системы

— суть описываемого ниже протокола от этого не меняется.

В процессе описания мы рассматриваем различные, все более изощренные типы атак и средства защиты от них. Так мы уже рассматривали ранее (см. разд. 2.1 и 2.2) подходы к решению задачи идентификации и установления ключа. Однако мы исходили из того, что противник может только прослушивать информацию, передаваемую по открытому каналу. Но в современных сетях передачи данных, например в Интернете, информация от одного пользователя передается другому через множество промежуточных узлов (маршрутизаторы, шлюзы, почтовые серверы и т.д.), не контролируемых этими пользователями. В результате противник, обосновавшийся на одном таком промежуточном узле, может не только прослушивать информацию, т.е. играть чисто пассивную роль, но и осуществлять активные воздействия, например, изменять, добавлять или удалять сообщения.

Разберем, например, типичную атаку на систему Диффи–Хеллмана в сети связи с активным противником. Алиса выбирает свое секретное число  $X_A$  и посылает Бобу  $g^{X_A}$ . Боб выбирает свое секретное число  $X_B$  и посылает Алисе  $g^{X_B}$ . Однако Ева перехватывает эти числа и посылает вместо них и Алисе, и Бобу  $g^{X_E}$ , где  $X_E$  — ее число. Все эти числа выглядят как совершенно случайные, так что ни Алиса, ни Боб ничего не подозревают. В результате Алиса формирует ключ  $K_A = g^{X_E X_A}$ , а Боб — ключ  $K_B = g^{X_E X_B}$ . Оба этих ключа могут быть легко вычислены и Евой. Теперь, когда Алиса посылает Бобу сообщение, зашифрованное с ключом  $K_A$ , Ева расшифровывает его, снова шифрует с ключом  $K_B$  и отправляет Бобу. Аналогично Ева действует и при передаче сообщений в обратном направлении. Боб и Алиса взаимодействуют, как им кажется, в защищенном режиме, но на самом деле Ева читает все их сообщения.

Такая атака становится невозможной, если Алиса и Боб не передают открытые ключи (в системе Диффи–Хеллмана это  $Y_A = g^{X_A}$  и  $Y_B = g^{X_B}$ ) по каналу связи, а выбирают их из некоторой таблицы или справочника, который был получен ими ранее из «надежного» источника (как это предполагалось в разд. 2.2).

Вообще, большинство криптосистем с открытыми ключами требуют наличия некоторой организационной структуры, занимающейся сертификацией открытых ключей. Такая структура может, например, выглядеть следующим образом. В сети, которой принадлежат Алиса и Боб, имеется «честный» пользователь Трент (абонент  $T$ ),

который заинтересован только в том, чтобы сеть работала надежно (скорее всего это не человек, а хорошо охраняемый компьютер, работающий по жестко заложенной программе). Трент располагает какой-либо надежной криптосистемой (например, RSA с длиной модуля порядка 10000 бит) с соответствующими открытыми ключами и выполняет всего две функции:

- 1) он добавляет в свою базу данных информацию об открытом ключе пользователя, присылаемую в виде сообщения, зашифрованного с использованием открытого ключа Трента;
- 2) он сообщает информацию о чем-либо открытом ключе, снабженную своей подписью.

Открытые ключи Трента доводятся до сведения всех пользователей каким-либо способом, исключающим вмешательство Евы. Например, они публикуются в виде рекламного сообщения в газете. Теперь Алиса, вычислив свой открытый ключ, формирует сообщение из своего имени и этого ключа, шифрует его с использованием открытого ключа Трента и посылает Тренту (никто кроме Трента не может расшифровать это сообщение). Боб, когда ему нужен открытый ключ Алисы, посылает запрос Тренту, и Трент присылает ему подписанный ключ Алисы (никто не может подделать подпись Трента). Боб проверяет подпись Трента, используя его открытый ключ, и принимает ключ Алисы как достоверный. Таким образом, каждый пользователь сети получает достоверную информацию об открытых ключах других пользователей, и Ева никак не может вмешаться в этот процесс.

Итак, если Алиса и Боб пользуются достоверными открытыми ключами, то схема Диффи–Хеллмана решает задачу установления секретного ключа. Однако она непосредственно не обеспечивает идентификацию пользователей. Действительно, если вместо Алисы выступала Ева, которая не знает секретного ключа Алисы, то у них с Бобом будут сформированы различные секретные ключи, но это может выясниться только позднее, на стадии обмена данными, когда Боб, например, не сможет расшифровать переданное ему сообщение или обнаружит, что «Алиса» не понимает того, что он посылает ей. Часто требуется обеспечить явную идентификацию, чтобы по завершении протокола стороны точно знали, кто есть кто.

У схемы Диффи–Хеллмана есть и другой недостаток: секретный ключ, который формируют Алиса и Боб, будет всегда один и

тот же, пока они не поменяют открытые ключи. Но смена открытых ключей — это относительно долгий процесс (например, обычно требуется оповестить всех пользователей сети об изменении какого-то открытого ключа, чтобы они могли скорректировать информацию в своих справочниках). Хотелось бы иметь протокол, обеспечивающий оперативное создание каждый раз различных, случайно выбираемых секретных ключей.

Решение состоит в использовании какого-либо шифра с открытым ключом для передачи секретных ключей. Обозначим шифр сообщения  $x$ , построенный с использованием открытого ключа пользователя  $A$ , через  $P_A(x)$ . (Например,  $P_A(x)$  может быть шифром RSA или шифром Эль-Гамала. В случае RSA  $P_A(x) = x^{d_A} \bmod N_A$ , где пара чисел  $d_A$  и  $N_A$  представляет собой открытый ключ пользователя  $A$ .) Все, кто знает открытый ключ  $A$ , могут вычислить  $P_A(x)$  для сообщения  $x$ . В то же время только  $A$ , знающий соответствующий секретный ключ, может получить  $x$  из  $y = P_A(x)$ . Аналогично ( $P_B(x)$ ) будем обозначать шифр, построенный с помощью открытого ключа пользователя  $B$ . Символом  $\parallel$ , как и ранее, будем обозначать конкатенацию чисел. Мы опишем протокол поэтапно, чтобы не «утопить» читателя в деталях.

Напомним, что мы решаем следующую задачу: Алиса и Боб хотят взаимно идентифицировать друг-друга и установить общий секретный ключ. Рассмотрим вначале следующий (плохой) протокол, состоящий из трех шагов, чтобы обсудить несколько важных вопросов.

**Шаг 1.** Алиса придумывает секретный ключ  $k_1$ , шифрует его, используя открытый ключ Боба, и посылает Бобу:

$$A \longrightarrow B : \quad P_B(k_1). \quad (5.15)$$

**Шаг 2.** Боб расшифровывает  $k_1$ , снова шифрует его, используя открытый ключ Алисы, и посылает Алисе:

$$A \longleftarrow B : \quad P_A(k_1). \quad (5.16)$$

**Шаг 3.** Алиса расшифровывает  $k_1$  и сравнивает его с тем, который она придумала на шаге 1.

Что мы имеем в результате реализации этого протокола? В первых, Алиса и Боб получили общий секретный ключ  $k_1$ , неизвестный Еве (Ева не может расшифровать ни  $P_B(k_1)$ , ни  $P_A(k_1)$ ).

Во-вторых, Алиса получила криптографически стойкую идентификацию Боба, так как никто кроме него не смог бы расшифровать  $k_1$ . Очевидно, что в данном протоколе Боб не получает никакой идентификации Алисы (сообщение (5.15) мог послать кто угодно). Он мог бы провести симметричный протокол со своей стороны:

$$A \longleftarrow B : P_A(k_2), \quad (5.17)$$

$$A \longrightarrow B : P_B(k_2) \quad (5.18)$$

и получить такую идентификацию. Проблема, однако, здесь состоит в логической независимости двух протоколов, в результате чего нет гарантии, что оба протокола проводятся одними и теми же участниками.

Но есть и более тонкая проблема. Алиса может использовать описанный протокол для вскрытия криптосистемы Боба! Делается это так. Допустим, Алиса перехватила какое-то сообщение  $y$ , предназначенное для Боба, т. е.  $y = P_B(x)$ . Она притворяется, что хочет войти в систему Боба, и запускает протокол (5.15), (5.16). Однако вместо  $P_B(k_1)$  она передает Бобу сообщение  $y$ . Так как  $k_1$  — произвольно выбранное число, то Боб не может ничего заподозрить. Он честно выполняет свой шаг в протоколе и расшифровывает для Алисы  $x$ !

Урок, который следует отсюда извлечь, следующий: никогда ни для кого не следует расшифровывать случайные числа. Это может повредить вашей безопасности. Средство борьбы с такой «опасной» случайностью — внесение избыточности в сообщения, например, введение какого-либо элемента, известного получателю и ожидаемого им. В частности, в (5.15) Алиса могла бы послать свое имя. Она могла бы построить сообщение, отведя 512 бит под случайное число  $k_1$  и 512 бит под свое имя, адрес, фрагмент открытого ключа и другую легко проверяемую информацию (будем обозначать все это вместе через  $\hat{A}$ ), и послать Бобу  $P_B(k_1 || \hat{A})$ . В этом случае Боб не стал бы посылать Алисе сообщение  $x$ , так как его соответствующие 512 бит наверняка не содержали бы  $\hat{A}$ .

Все вышеизложенное приводит нас к следующему протоколу Нидхама–Шредера (Needham, Schroeder, см., например, [28]), который полностью решает поставленную в начале раздела задачу.

**Шаг 1.** Алиса выбирает случайное число  $k_1$ , объединяет его со своей открытой информацией  $\hat{A}$  и посылает Бобу

$$A \longrightarrow B : P_B(k_1 \| \hat{A}). \quad (5.19)$$

**Шаг 2.** Боб расшифровывает (5.19) и убеждается в том, что полученное сообщение содержит открытую информацию Алисы  $\hat{A}$ . Затем он выбирает случайное число  $k_2$ , объединяет его с  $k_1$  и посылает Алисе

$$A \longleftarrow B : P_A(k_1 \| k_2). \quad (5.20)$$

**Шаг 3.** Алиса расшифровывает (5.20) и убеждается в том, что полученное сообщение содержит  $k_1$ . Это является для нее надежным признаком идентификации Боба, так как никто другой не мог бы извлечь  $k_1$  из (5.19). Алиса посылает Бобу

$$A \longrightarrow B : P_B(k_2). \quad (5.21)$$

**Шаг 4.** Боб расшифровывает (5.21) и убеждается в том, что он получил  $k_2$ . Это является для него надежным признаком идентификации Алисы, так как никто другой не мог бы извлечь  $k_2$  из (5.20).

Теперь Алиса и Боб могут сформировать из  $k_1$ ,  $k_2$  общий ключ, например,  $k = k_1 \oplus k_2$ , где  $\oplus$  — побитовая сумма по модулю 2, или использовать  $k_1$  и  $k_2$  по-отдельности для шифрования входящих и исходящих сообщений.

**Пример 5.5.** Пусть в некоторой сети используется шифр Эль-Гамаль с открытыми параметрами  $p = 107$ ,  $g = 2$ . Пользователи  $A$  и  $B$  имеют открытые ключи  $d_A = 58$ ,  $d_B = 28$ , которым соответствуют секретные  $s_A = 33$ ,  $s_B = 45$ . Рассмотрим реализацию протокола Нидхама–Шредера для взаимной идентификации пользователей  $A$  и  $B$  и установления общего секретного ключа. Учитывая небольшую величину модуля  $p$  в нашем примере, будем использовать в качестве идентификаторов пользователей одну цифру в десятичной записи, пусть  $\hat{A} = 1$ ,  $\hat{B} = 2$ , и секретный ключ будем получать также в виде одной десятичной цифры.

На первом шаге протокола  $A$  выбирает секретный ключ, пусть  $k_1 = 3$ , и формирует сообщение  $m = k_1 \| \hat{A} = 31$ . Это сообщение

шифруется шифром Эль-Гамала на открытом ключе пользователя  $B$ :

$$\begin{aligned}k &= 15, & r &= g^k \bmod p = 2^{15} \bmod 107 = 26, \\e &= m \cdot d_B^k \bmod p = 31 \cdot 28^{15} \bmod 107 = 47.\end{aligned}$$

Пара чисел  $(26, 47)$  и есть тот шифротекст, который необходимо послать  $B$ . В использованных при описании протокола обозначениях  $P_B(k_1 \| \hat{A}) = (26, 47)$  и

$$A \longrightarrow B : \quad (26, 47).$$

На втором шаге протокола  $B$  расшифровывает  $(26, 47)$ , используя свой секретный ключ:

$$m' = e \cdot r^{p-1-c_B} \bmod p = 47 \cdot 26^{106-45} \bmod 107 = 31.$$

$B$  убеждается, что младшая цифра содержит идентификационный номер пользователя  $A$  и извлекает  $k_1 = 3$ . Затем он выбирает свое секретное число, пусть  $k_2 = 7$ , формирует сообщение  $m = k_1 \| k_2 = 37$  и шифрует его на открытом ключе  $A$ :

$$\begin{aligned}k &= 77, & r &= g^k \bmod p = 2^{77} \bmod 107 = 63, \\e &= m \cdot d_A^k \bmod p = 37 \cdot 58^{77} \bmod 107 = 18.\end{aligned}$$

Пара чисел  $(63, 18)$  — это то, что нужно послать  $A$ . Т.е.  $P_A(k_1 \| k_2) = (63, 18)$  и

$$A \longleftarrow B : \quad (63, 18).$$

На третьем шаге  $A$  расшифровывает  $(63, 18)$ :

$$m' = e \cdot r^{p-1-c_A} \bmod p = 18 \cdot 63^{106-33} \bmod 107 = 37.$$

$A$  убеждается в том, что старшая цифра содержит  $k_1 = 3$  и извлекает  $k_2 = 7$ . Теперь  $A$  шифрует  $k_2$  для  $B$ :

$$\begin{aligned}k &= 41, & r &= g^k \bmod p = 2^{41} \bmod 107 = 82, \\e &= m \cdot d_B^k \bmod p = 7 \cdot 28^{41} \bmod 107 = 49,\end{aligned}$$

и посылает  $B$

$$A \longrightarrow B : \quad (82, 49).$$

На четвертом шаге  $B$  расшифровывает  $(82, 49)$ :

$$m' = e \cdot r^{p-1-c_B} \bmod p = 49 \cdot 82^{106-45} \bmod 107 = 7.$$

$B$  убеждается в том, что он получил свое число  $k_2 = 7$ .

Теперь  $A$  и  $B$  могут сформировать общий ключ по заранее оговоренной схеме, например,

$$k = k_1 \oplus k_2 \bmod 10 = 3 \oplus 7 = (011)_2 \oplus (111)_2 = (100)_2 = 4. \quad \square$$

## Задачи и упражнения

**5.1.** Для реализации протокола “ментальный покер” выбраны следующие общие параметры:  $p = 23$ ,  $\hat{\alpha} = 5$ ,  $\hat{\beta} = 7$ ,  $\hat{\gamma} = 14$ . Кроме того, имеются следующие варианты для Алисы и Боба:

- а.  $c_A = 13$ ,  $c_B = 5$ , Алиса перемешивает карты по правилу  $(1, 2, 3) \longrightarrow (3, 2, 1)$ , Боб выбирает первое число и использует перестановку  $(1, 2) \longrightarrow (2, 1)$ . Алиса выбирает второе из полученных чисел.
- б.  $c_A = 7$ ,  $c_B = 15$ , Алиса перемешивает карты по правилу  $(1, 2, 3) \longrightarrow (1, 3, 2)$ , Боб выбирает второе число и использует перестановку  $(1, 2) \longrightarrow (1, 2)$ . Алиса выбирает первое из полученных чисел.
- в.  $c_A = 19$ ,  $c_B = 3$ , Алиса перемешивает карты по правилу  $(1, 2, 3) \longrightarrow (2, 1, 3)$ , Боб выбирает второе число и использует перестановку  $(1, 2) \longrightarrow (2, 1)$ . Алиса выбирает второе из полученных чисел.
- г.  $c_A = 9$ ,  $c_B = 7$ , Алиса перемешивает карты по правилу  $(1, 2, 3) \longrightarrow (3, 2, 1)$ , Боб выбирает третье число и использует перестановку  $(1, 2) \longrightarrow (1, 2)$ . Алиса выбирает второе из полученных чисел.
- д.  $c_A = 15$ ,  $c_B = 5$ , Алиса перемешивает карты по правилу  $(1, 2, 3) \longrightarrow (1, 2, 3)$ , Боб выбирает первое число и использует перестановку  $(1, 2) \longrightarrow (2, 1)$ . Алиса выбирает первое из полученных чисел.



Определить, какие карты достанутся Алисе и Бобу. Какие передаваемые числа будет наблюдать Ева?

- 5.2.** В системе электронных денег выбраны секретные параметры банка  $P = 17$ ,  $Q = 7$ ,  $c = 77$ , а соответствующие им открытые параметры  $N = 119$ ,  $d = 5$ . Сформировать электронные банкноты со следующими номерами:

- а.  $n = 11$  при  $r = 5$ ,
- б.  $n = 99$  при  $r = 6$ ,
- в.  $n = 55$  при  $r = 10$ ,
- г.  $n = 44$  при  $r = 15$ ,
- д.  $n = 77$  при  $r = 30$ .

## Темы лабораторных работ

- 5.3.** Выполнить компьютерную реализацию протокола “Ментальный покер”, самостоятельно выбрав все необходимые параметры.
- 5.4.** Выполнить компьютерную реализацию протокола доказательства с нулевым знанием на основе задачи о раскраске графа, все необходимые параметры выбрать самостоятельно.
- 5.5.** Выполнить компьютерную реализацию протокола доказательства с нулевым знанием на основе задачи о гамильтоновом цикле в графе, все необходимые параметры выбрать самостоятельно.
- 5.6.** Выполнить компьютерную реализацию протокола “Электронные деньги”, все необходимые параметры выбрать самостоятельно.
- 5.7.** Выполнить компьютерную реализацию протокола Нидхама–Шредера, конкретный вид шифра с открытым ключом и все необходимые параметры выбрать самостоятельно.

## Глава 6. КРИПТОСИСТЕМЫ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

### 6.1. Введение

В этой главе мы рассмотрим одно из новых направлений криптографии с открытыми ключами — системы на эллиптических кривых. Эллиптические кривые давно изучались в математике, но их использование в криптографических целях было впервые предложено Коблицем (Neal Koblitz) и Миллером (Victor Miller) в 1985 году. Пятнадцать лет интенсивных исследований этих систем подтвердили их полезные свойства и привели к открытию множества эффективных методов их реализации. С 1998 года использование эллиптических кривых для решения криптографических задач, таких, как цифровая подпись, было закреплено в стандартах США ANSI X9.62 и FIPS 186-2, а в 2001 году аналогичный стандарт, ГОСТ Р34.10-2001, был принят и в России.

Основное достоинство криптосистем на эллиптических кривых состоит в том, что по сравнению с «обычными» криптосистемами, которые мы рассматривали в предыдущих главах, они обеспечивают существенно более высокую стойкость при равной трудоемкости или, наоборот, существенно меньшую трудоемкость при равной стойкости. Это объясняется тем, что для вычисления обратных функций на эллиптических кривых известны только алгоритмы с экспоненциальным ростом трудоемкости, тогда как для обычных систем предложены субэкспоненциальные методы. В результате тот уровень стойкости, который достигается, скажем, в RSA при использовании 1024-битовых модулей, в системах на эллиптических кривых реализуется при размере модуля 160 бит, что обеспечивает более простую как программную, так и аппаратную реализацию.

Детальное изучение эллиптических кривых требует знаний высшей алгебры, в особенности алгебраической геометрии. Мы, однако, постараемся изложить материал без привлечения сложных алгебраических конструкций и в объеме, достаточном для понимания прин-

ципов построения и работы соответствующих криптосистем. Более подробное изложение теории эллиптических кривых и их использования в криптографии может быть найдено, например, в [20, 27, 36].

## 6.2. Математические основы

Кривая третьего порядка  $E$ , задаваемая уравнением вида

$$E: Y^2 = X^3 + aX + b, \quad (6.1)$$

называется эллиптической кривой (на самом деле уравнение (6.1) получено путем замены переменных из более общего уравнения, которое нас не будет интересовать).

Поскольку  $Y = \pm\sqrt{X^3 + aX + b}$ , график кривой симметричен относительно оси абсцисс. Чтобы найти точки его пересечения с осью абсцисс, необходимо решить кубическое уравнение

$$X^3 + aX + b = 0. \quad (6.2)$$

Это можно сделать с помощью известных формул Кардано. Дискриминант этого уравнения

$$D = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2. \quad (6.3)$$

Если  $D < 0$ , то (6.2) имеет три различных действительных корня  $\alpha, \beta, \gamma$ ; если  $D = 0$ , то (6.2) имеет три действительных корня, скажем,  $\alpha, \beta, \beta$ , по крайней мере два из которых равны; наконец, если  $D > 0$ , уравнение (6.2) имеет один действительный корень  $\alpha$  и два комплексно сопряженных. Вид кривой во всех трех случаях представлен на рисунках 6.1–6.3.

Кривая, представленная на рис. 6.2, называется *сингулярной*. В ее точке сингулярности  $(\beta, 0)$  имеются две касательные. Сингулярные кривые мы будем исключать из нашего рассмотрения. Поэтому при задании кривой с помощью параметров  $a$  и  $b$  потребуем выполнения условия  $D \neq 0$ , что эквивалентно условию

$$4a^3 + 27b^2 \neq 0. \quad (6.4)$$

Итак, пусть эллиптическая кривая  $E$  задана уравнением (6.1) с ограничением на коэффициенты (6.4). Определим операцию композиции точек на кривой. Возьмем какие-либо две точки  $P = (x_1, y_1)$ ,

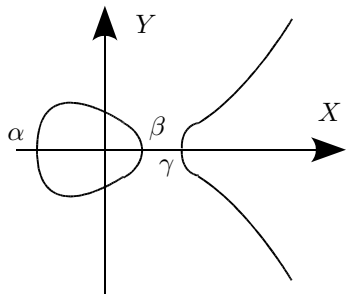


Рис. 6.1. Эллиптическая кривая  $D < 0$

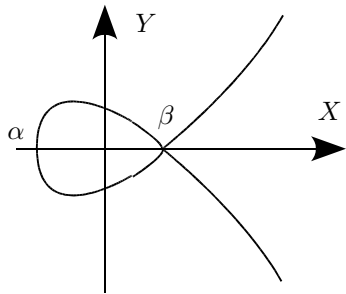


Рис. 6.2. Эллиптическая кривая  $D = 0$

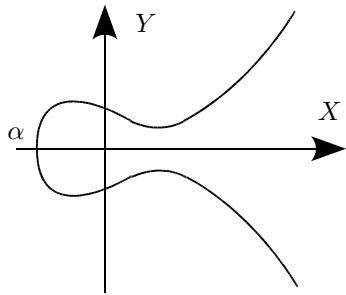
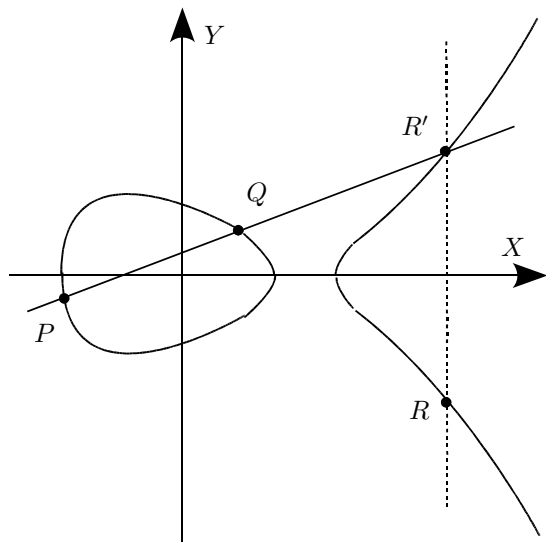


Рис. 6.3. Эллиптическая кривая  $D > 0$

Рис. 6.4. Композиция точек  $R = P + Q$ 

$Q = (x_2, y_2) \in E$  и проведем через них прямую (рис. 6.4). Эта прямая обязательно пересечет кривую в третьей точке, которую обозначим через  $R'$ . (Третья точка обязательно существует. Дело в том, что кубическое уравнение, получаемое после подстановки уравнения прямой в (6.1), имеет два действительных корня, соответствующих точкам  $P$  и  $Q$ , следовательно, его третий корень, соответствующий  $R'$ , также действителен.) Точку  $R = (x_3, y_3)$  получим путем изменения знака ординаты точки  $R'$ . Будем обозначать описанную операцию композиции точек следующим образом:  $R = P + Q$ .

Пусть точка  $P \in E$  имеет координаты  $(x, y)$ . Тогда точку с координатами  $(x, -y)$  будем обозначать  $-P$ . Будем считать, что вертикальная прямая, проходящая через  $P$  и  $-P$ , пересекает кривую в бесконечно удаленной точке  $\mathcal{O}$ , т.е.  $P + (-P) = \mathcal{O}$ . По соглашению  $P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P$ . Как мы увидим в дальнейшем, точка  $\mathcal{O}$  будет играть роль нуля в операциях на эллиптической кривой.

Теперь представим, что точки  $P$  и  $Q$  (рис. 6.4) сближаются

друг с другом и, наконец, сливаются в одну точку  $P = Q = (x_1, y_1)$ . Тогда композиция  $R = (x_3, y_3) = P + Q = P + P$  будет получена путем проведения касательной в точке  $P$  и отражения ее второго пересечения с кривой  $R'$  относительно оси абсцисс (рис. 6.5). Будем использовать следующее обозначение:  $R = P + P = [2]P$ .

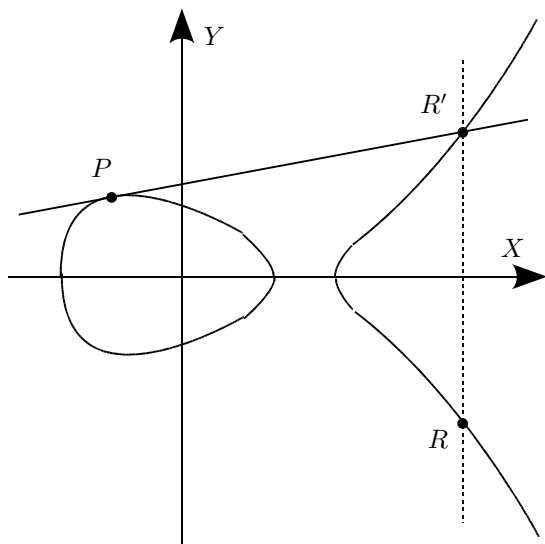


Рис. 6.5. Удвоение точки  $R = P + P = [2]P$

Выведем формулы для определения координат результирующей точки  $R = (x_3, y_3)$  на основе координат исходных точек  $P = (x_1, y_1)$  и  $Q = (x_2, y_2)$ . Рассмотрим вначале случай, когда  $P \neq \pm Q$ ,  $R = P + Q$  (рис. 6.4). Обозначим через  $k$  угловой коэффициент прямой, проходящей через  $P$  и  $Q$ . Очевидно, что

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (6.5)$$

Тогда уравнение прямой будет иметь вид  $Y - y_1 = k(X - x_1)$ , откуда

$$Y = y_1 + k(X - x_1). \quad (6.6)$$

Подставим найденное выражение для переменной  $Y$  в уравнение кривой (6.1). Получим

$$(y_1 + k(X - x_1))^2 = X^3 + aX + b.$$

Возводя в квадрат и группируя подобные члены, получим кубическое уравнение

$$X^3 - k^2X^2 + \dots = 0.$$

Известно, что сумма корней кубического уравнения равна коэффициенту при  $X^2$ , взятому с противоположным знаком (теорема Виета для кубических уравнений), т.е.

$$x_1 + x_2 + x_3 = k^2,$$

откуда

$$x_3 = k^2 - x_1 - x_2. \quad (6.7)$$

Подставив найденное значение  $x_3$  в уравнение прямой (6.6), найдем ординату точки  $R'$ ,  $y'_3 = y_1 + k(x_3 - x_1)$ , и, изменив знак, получим

$$y_3 = k(x_1 - x_3) - y_1. \quad (6.8)$$

Итак, мы нашли координаты интересующей нас точки  $R$ .

Теперь рассмотрим случай, когда  $P = Q$  и результирующая точка  $R = [2]P$  (рис. 6.5). Дифференцируя обе части (6.1) по  $X$ , получим

$$2YY' = 3X^2 + a.$$

Угловым коэффициентом касательной равен значению производной в точке  $P$ ,

$$k = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}. \quad (6.9)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны первому случаю, и координаты точки  $R$  определяются по тем же формулам (6.7) и (6.8). Заметим, что если ордината точки  $P$  равна нулю, то касательная проходит параллельно оси ординат и  $[2]P = \mathcal{O}$ .

Используя полученные формулы для вычисления композиции и принятые соглашения относительно точки в бесконечности, можно доказать следующие свойства точек на эллиптической кривой:

- 1)  $P + Q = Q + P$  для всех точек  $P, Q \in E$ ;

- 2)  $P + (Q + S) = (P + Q) + S$  для всех точек  $P, Q, S \in E$ ;
- 3) существует нулевой элемент  $\mathcal{O}$  (точка в бесконечности), такой, что  $P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P$  для всех  $P \in E$ ;
- 4) для каждой точки  $P \in E$  существует точка  $-P \in E$ , такая, что  $P + (-P) = \mathcal{O}$ .

Перечисленные свойства точек совпадают со свойствами целых чисел при использовании операции сложения. Поэтому композицию точек часто называют сложением точек, а операцию  $[2]P$  — удвоением точки.

Продолжая аналогию со сложением чисел, удобно ввести следующие обозначения. Для целого  $m$

$$\begin{aligned} [m]P &= \underbrace{P + P + \cdots + P}_m, \\ [0]P &= \mathcal{O}, \\ [-m]P &= -(\underbrace{P + P + \cdots + P}_m). \end{aligned}$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы сделать последний шаг, необходимый для криптографического использования эллиптических кривых. Мы видим, что при вычислении композиции точек на кривой (см. формулы (6.5), (6.9), (6.7) и (6.8)) используются только операции сложения, вычитания, умножения и деления чисел. Это значит, что все приведенные выше тождества сохранятся, если мы будем выполнять вычисления с целыми числами по модулю простого числа  $p$ . В этом случае сложение и умножение чисел выполняются по модулю  $p$ , разность  $u - v$  вычисляется как  $u + (p - v) \bmod p$ , а деление  $u/v$  выполняется путем умножения  $u$  на  $v^{-1} \bmod p$  (простота модуля гарантирует, что для любого положительного числа  $v < p$  существует число  $v^{-1}$ , такое, что  $vv^{-1} \bmod p = 1$ ).

В результате мы получаем кривую

$$E: Y^2 = X^3 + aX + b \pmod{p}. \quad (6.10)$$

В уравнении (6.10) переменные  $X, Y$  и коэффициенты  $a, b$  принимают целочисленные значения, а все вычисления выполняются по модулю  $p$ . В соответствии с (6.4) на  $a, b$  налагается ограничение

$$(4a^3 + 27b^2) \bmod p \neq 0. \quad (6.11)$$



Множество  $E_p(a, b)$  состоит из всех точек  $(x, y)$ ,  $0 \leq x, y < p$ , удовлетворяющих уравнению (6.10), и точки в бесконечности  $\mathcal{O}$ . Количество точек в  $E_p(a, b)$  будем обозначать  $\#E_p(a, b)$ . Эта величина имеет важное значение для криптографических приложений эллиптических кривых.

**Пример 6.1.** Рассмотрим кривую

$$E_7(2, 6) : Y^2 = X^3 + 2X + 6 \pmod{7}. \quad (6.12)$$

Проверим условие (6.11):

$$4 \cdot 2^3 + 27 \cdot 6^2 = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 3 \neq 0 \pmod{7}.$$

Итак, данная кривая несингулярна. Найдем какую-нибудь (случайную) точку в  $E_7(2, 6)$ . Пусть  $x = 5$ . Тогда

$$Y^2 = 5^3 + 2 \cdot 5 + 6 = 6 + 3 + 6 = 1 \pmod{7}$$

и  $y = 1 \pmod{7}$  или  $y = -1 = 6 \pmod{7}$ . Мы нашли сразу две точки:  $(5, 1)$  и  $(5, 6)$ . Найдем еще пару точек путем вычисления композиции. Вначале найдем  $[2](5, 1)$ . Используя (6.9), (6.7) и (6.8), вычисляем

$$k = \frac{3 \cdot 5^2 + 2}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0 \pmod{7},$$

$$x_3 = 0 - 2 \cdot 5 = 4 \pmod{7},$$

$$y_3 = 0 \cdot (5 - 4) - 1 = 6 \pmod{7}.$$

Мы получили  $[2](5, 1) = (4, 6)$  (можно убедиться, что полученная точка лежит на кривой, подставив ее координаты в уравнение (6.12)). Найдем еще одну точку  $[3](5, 1) = (5, 1) + (4, 6)$ . Используя (6.5), (6.7) и (6.8), вычисляем

$$k = \frac{6 - 1}{4 - 5} = \frac{5}{6} = 5 \cdot 6 = 2 \pmod{7},$$

$$x_3 = 2^2 - 5 - 4 = 2 \pmod{7},$$

$$y_3 = 2 \cdot (5 - 2) - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \pmod{7}.$$

Мы получили  $[3](5, 1) = (2, 5)$ . Итак, мы нашли четыре точки. Для криптографического использования кривой важно знать, сколько

всего точек в множестве  $E_7(2, 6)$ . Ответ на этот вопрос мы дадим в разд. 6.6.  $\square$

Скажем несколько слов о свойствах множества точек  $E_p(a, b)$ . Совершенно очевидно, что это множество конечно, так как в него входят только точки с целочисленными координатами  $0 \leq x, y < p$ . Существует прямая аналогия между  $E_p(a, b)$  и множеством степеней целых чисел, вычисляемых по модулю  $p$ . Так,  $E_p(a, b)$  имеет генератор, т.е. такую точку  $G$ , что ряд  $G, [2]G, [3]G, \dots, [n]G$ , где  $n = \#E_p(a, b)$ , содержит все точки множества  $E_p(a, b)$ , причем  $[n]G = \mathcal{O}$  (аналогично «действовал» параметр  $g$  в разд. 2.2). Число точек на кривой, при надлежащем выборе параметров  $p$ ,  $a$  и  $b$ , может быть простым числом,  $\#E_p(a, b) = q$ . В этом случае любая точка (кроме  $\mathcal{O}$ ) является генератором всего множества точек. Такая кривая предпочтительна во многих отношениях и всегда может быть найдена за практически приемлемое время. Если по каким-то причинам такую кривую найти не удалось и  $\#E_p(a, b) = hq$ , где  $q$  — опять простое число, то в  $E_p(a, b)$  существует подмножество из  $q$  точек (т.е. мощности  $q$ ), генератором которого может служить любая точка  $G \neq \mathcal{O}$ , такая, что  $[q]G = \mathcal{O}$ . В дальнейшем, без потери общности, мы будем считать, что работаем с таким подмножеством мощности  $q$  (а при выборе кривой будем стремиться получить  $q = \#E_p(a, b)$ ).

Основная криптографическая операция на эллиптической кривой —  $m$ -кратная композиция, т.е. вычисление

$$Q = [m]P = \underbrace{P + P + \dots + P}_m. \quad (6.13)$$

Эта операция выполняется очень эффективно и требует не более  $2 \log m$  композиций точек. Подходы к ее реализации абсолютно те же, что и к возведению в степень. Например, чтобы получить точку  $Q = [21]P$ , вычисляем  $[2]P$ ,  $[4]P$ ,  $[8]P$ ,  $[16]P$ , каждый раз удваивая предыдущую точку, и складываем  $P + [4]P + [16]P = Q$  (всего 4 удвоения и 2 сложения).

Обратная задача, которая по традиции называется дискретным логарифмированием на эллиптической кривой, формулируется следующим образом. Зная точки  $P$  и  $Q$ , найти такое число  $m$ , что  $[m]P = Q$ . Эта задача оказывается очень трудной. Если тщательно выбрать параметры кривой (как описывается в следующем разделе), то наилучшие известные в настоящее время алгоритмы для нахождения  $m$  требуют  $O(\sqrt{q})$  операций на кривой, где  $q$  — мощность

подмножества точек, которому принадлежат точки  $P$  и  $Q$ . Все вычисления на кривой проводятся по модулю  $p$ , т.е. с числами длины  $t \approx \log p$  бит. Для криптографических приложений  $\log q \approx \log p$ , поэтому  $O(\sqrt{q}) = O(2^{t/2})$  означает экспоненциальный рост трудоемкости при увеличении длины чисел.

### 6.3. Выбор параметров кривой

В этом разделе мы изложим основные рекомендации по выбору параметров эллиптической кривой, предназначенной для решения криптографических задач, а именно, по выбору коэффициентов  $a$ ,  $b$  и модуля  $p$ . Фактически критерием выбора служит невозможность осуществления определенного рода атак, предложенных для некоторых классов кривых. Излагаемые ниже рекомендации следуют стратегии выбора *случайной* кривой. Эта стратегия считается наиболее надежной с точки зрения обеспечения стойкости результирующей криптосистемы. Альтернативный подход, не рассматриваемый нами, состоит в систематическом конструировании кривой с заданными свойствами, что обычно оказывается более эффективным с вычислительной точки зрения. Для реализации этого подхода предложены специальные методы, но получаемые кривые фактически выбираются из относительно небольшого класса и вызывают подозрения на наличие некоторых специфических свойств, которые могут позволить со временем изобрести алгоритмы для их взлома.

Опишем по шагам процесс формирования хорошей случайной кривой.

1. Выбираем случайно простое число  $p$ . Как будет показано в разд. 6.6, количество точек на кривой — величина того же порядка, что и  $p$ . Поэтому битовая длина числа  $p$ ,  $t = \lfloor \log p \rfloor + 1$ , должна быть такой, чтобы сделать невозможным применение общих методов нахождения логарифмов на кривой, имеющих трудоемкость  $O(2^{t/2})$ . Величина  $t = 128$  бит (четыре машинных слова на 32-битовых компьютерах) сегодня недостаточна, так как имеются сообщения о взломе соответствующих кривых за несколько месяцев интенсивных распределенных вычислений. Но величина  $t = 160$  бит (пять машинных слов) в настоящее время недостижима для криптоаналитиков и может служить отправной точкой. Другое рассуждение основано на

том, что шифр на эллиптической кривой должен быть не менее стойким, чем блочный шифр AES (см. разд. 8.2). Считается, что стойкость AES обеспечивается полной длиной его ключа, которая составляет 128, 196 или 256 бит. Так как стойкость шифра на эллиптической кривой определяется величиной  $t/2$ , длина модулей эллиптических кривых должна составлять соответственно 256, 392 и 512 бит.

2. Выбираем случайные числа  $a$  и  $b$ , такие, что  $a, b \neq 0 \pmod{p}$  и  $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \pmod{p}$ . Обратим внимание на то, что при вычислении композиции точек параметр  $b$  нигде не фигурирует. Поэтому для повышения эффективности счета иногда рекомендуют случайно выбирать только  $b$ , а  $a$  принимать равным небольшому целому числу. Так, стандарт США FIPS 186-2 предполагает использование кривых с параметром  $a = -3$ , что, как мы увидим в разд. 6.5, немного упрощает вычисления.
3. Определяем число точек на кривой  $n = \#E_p(a, b)$  (это самый трудоемкий этап описываемого процесса, его базовый алгоритм будет рассмотрен в разд. 6.6). Важно, чтобы  $n$  имело большой простой делитель  $q$ , а лучше всего само было простым числом,  $n = q$ . Если  $n$  разлагается на маленькие множители, то в  $E_p(a, b)$  существует много маленьких подмножеств со своими генераторами, и алгоритм Полига–Хеллмана [28] быстро вычисляет логарифм на кривой через логарифмы в этих маленьких подмножествах. Если поиск кривой с  $n = q$  занимает слишком много времени, то можно допустить  $n = hq$ , где  $h$  — небольшое число. Еще раз подчеркнем, что стойкость криптосистемы на эллиптической кривой определяется не модулем  $p$ , а числом элементов  $q$  в подмножестве точек кривой. Но если множитель  $h$  — небольшое число, то  $q$  является величиной того же порядка, что и  $p$ . Если  $n$  не соответствует предъявляемым требованиям, то необходимо вернуться к шагу 2.
4. Проверяем, выполняются ли неравенства  $(p^k - 1) \bmod q \neq 0$  для всех  $k$ ,  $0 < k < 32$ . Если нет, то возвращаемся к шагу 2. Эта проверка предотвращает возможность MOV-атаки (названной по фамилиям ее авторов Menezes, Okamoto, Vanstone), а также исключает из рассмотрения так называемые суперсингулярные кривые и кривые с  $\#E_p(a, b) = p - 1$  (см. [20, 27]).

Метод MOV и указанные особые типы кривых позволяют свести задачу вычисления логарифма на кривой к более простым задачам.

5. Проверяем, выполняется ли неравенство  $q \neq p$ . Если нет, то возвращаемся к шагу 2. Дело в том, что для кривых с  $q = p$ , которые называются аномальными, предложены эффективные методы вычисления логарифмов (см. [20, 27]).
6. На данном шаге подходящая для криптографических приложений кривая получена. Мы имеем параметры  $p$ ,  $a$ ,  $b$ , число точек  $n$  и размер подмножества точек  $q$ . Обычно еще требуется найти точку  $G$  — генератор этого подмножества. Если  $q = n$ , то любая точка (кроме  $\mathcal{O}$ ) является генератором. Если  $q < n$ , то выбираем случайные точки  $G'$ , пока не получим  $G = [n/q]G' \neq \mathcal{O}$ . Чтобы получить случайную точку на кривой, берем случайное число  $x < p$ , вычисляем  $e = (x^3 + ax + b) \bmod p$  и пытаемся извлечь квадратный корень  $y = \sqrt{e} \bmod p$ . Если корень существует, то получаем точку  $(x, y)$ , в противном случае пробуем другое число  $x$ . Алгоритмы вычисления квадратных корней по модулю простого числа могут быть найдены, например, в [28, гл. 3].

## 6.4. Построение криптосистем

Любая криптосистема, основанная на дискретном логарифмировании, легко может быть перенесена на эллиптические кривые. Основной принцип построения системы состоит в замене операции  $y = g^x \bmod p$  на  $Y = [x]G \bmod p$  (во втором случае указание модуля не общепринято, хотя реально все вычисления на кривой проводятся по модулю  $p$ ). Переход наиболее непосредствен, когда показатель степени  $x$  приводится по модулю  $q$  (как, например, в стандарте цифровой подписи в разд. 4.3). На эллиптической кривой с мощностью рабочего множества точек  $q$  то же самое происходит с множителем  $[x]$ . Отличие состоит в том, что  $y$  — это число, а  $Y$  — точка, и обычно требуется переходить от точки к числу. Наиболее простой способ такого перехода — использовать абсциссу точки.

На эллиптических кривых можно построить и аналог системы RSA. В этом случае кривая определяется по модулю  $n$ , где  $n$  — составное число. Однако здесь не получается выигрыша, так как длина

модуля остается такой же, как в первоначальном варианте системы RSA, чтобы было невозможно разложить  $n$  на простые множители.

Мы продемонстрируем технику использования эллиптических кривых на примере аналогов шифра Эль-Гамала и цифровой подписи ГОСТ Р34.10-94.

### Шифр Эль-Гамала на эллиптической кривой

Для пользователей некоторой сети выбираются общая эллиптическая кривая  $E_p(a, b)$  и точка  $G$  на ней, такие, что  $G, [2]G, [3]G, \dots, [q]G$  суть различные точки и  $[q]G = \mathcal{O}$  для некоторого простого числа  $q$ .

Каждый пользователь  $U$  выбирает число  $c_U$ ,  $0 < c_U < q$ , которое хранит как свой секретный ключ, и вычисляет точку на кривой  $D_U = [c_U]G$ , которая будет его открытым ключом. Параметры кривой и список открытых ключей передаются всем пользователям сети.

Допустим, пользователь  $A$  хочет передать сообщение пользователю  $B$ . Будем считать, что сообщение представлено в виде числа  $m < p$ .  $A$  делает следующее:

- 1) выбирает случайное число  $k$ ,  $0 < k < q$ ;
- 2) вычисляет  $R = [k]G$ ,  $P = [k]D_B = (x, y)$ ;
- 3) шифрует  $e = mx \bmod p$ ;
- 4) посылает  $B$  шифротекст  $(R, e)$ .

Пользователь  $B$ , после получения  $(R, e)$ ,

- 1) вычисляет  $Q = [c_B]R = (x, y)$ ;
- 2) дешифрует  $m' = ex^{-1} \bmod p$ .

Дадим обоснование протокола. Для этого достаточно показать, что

$$[c_B]R = [c_B]([k]G) = [k]([c_B]G) = [k]D_B,$$

т.е.  $Q = P$ . Поэтому  $m' = m$ .

Координата  $x$  точки  $Q$  остается секретной для противника, так как он не знает числа  $k$ . Противник может попытаться вычислить  $k$

из точки  $R$ , но для этого ему нужно решить проблему дискретного логарифмирования на кривой, что считается невозможным.

Наиболее вероятным вариантом использования представленного протокола будет передача в качестве числа  $m$  секретного ключа для блочного или потокового шифра. В этом случае разумно выбирать параметры кривой так, чтобы  $\log q$  примерно вдвое превышал длину ключа шифра.

### Цифровая подпись по ГОСТ Р34.10-2001

Данный метод полностью аналогичен описанному ранее методу генерации и проверки подписи ГОСТ Р34.10-94, но возведение в степень заменяется операцией композиции на кривой [8]. Для сообщества пользователей выбирается общая эллиптическая кривая  $E_p(a, b)$  и точка  $G$  на ней, такая, что  $G, [2]G, [3]G, \dots, [q]G$  суть различные точки, и  $[q]G = \mathcal{O}$  для некоторого простого числа  $q$  (длина числа  $q$  равна 256 бит).

Каждый пользователь  $U$  выбирает случайное число  $x_U$  (секретный ключ),  $0 < x_U < q$ , и вычисляет точку на кривой  $Y_U = [x_U]G$  (открытый ключ). Параметры кривой и список открытых ключей передаются всем пользователям.

Чтобы подписать сообщение  $\bar{m}$ , пользователь  $A$  делает следующее:

- 1) вычисляет значение хеш-функции сообщения  $h = h(\bar{m})$ ;
- 2) выбирает случайно число  $k$ ,  $0 < k < q$ ;
- 3) вычисляет  $P = [k]G = (x, y)$ ;
- 4) вычисляет  $r = x \bmod q$  (при  $r = 0$  возвращается к шагу 2);
- 5) вычисляет  $s = (kh + rx_A) \bmod q$  (при  $s = 0$  возвращается к шагу 2);
- 6) подписывает сообщение парой чисел  $(r, s)$ .

Для проверки подписанного сообщения  $(\bar{m}; r, s)$  любой пользователь, знающий открытый ключ  $Y_A$ , делает следующее:

- 1) вычисляет  $h = h(\bar{m})$ ;
- 2) убеждается, что  $0 < r, s < q$ ;

- 3) вычисляет  $u_1 = s \cdot h^{-1} \bmod q$  и  $u_2 = -r \cdot h^{-1} \bmod q$ ;
- 4) вычисляет композицию точек на кривой  $P = [u_1]G + [u_2]Y_A = (x, y)$  и, если  $P = \mathcal{O}$ , отвергает подпись;
- 5) если  $x \bmod q = r$ , принимает подпись, в противном случае отвергает ее.

Доказательство корректности протокола абсолютно аналогично доказательству, приведенному в разд. 4.3.

## 6.5. Эффективная реализация операций

В этом разделе мы рассмотрим основной подход, обычно необходимый для эффективной реализации операций на эллиптической кривой. Как уже говорилось, вычисление  $m$ -кратной композиции ( $m$  — большое число) осуществляется с помощью тех же методов, которые используются для возведения в степень (умножение в них заменяется на сложение точек). Здесь для конкретности мы все же опишем наиболее простой алгоритм — двоичный левосторонний метод (ср. с алгоритмом 2.4). В литературе описаны более эффективные методы возведения в степень, которые с успехом могут быть применены и для вычисления композиций на эллиптических кривых. Эти методы обычно дают несущественный выигрыш во времени (порядка 25%), и их описание выходит за рамки нашей книги (см. описание этих методов, например, в [28]).

### Алгоритм 6.1. Вычисление $m$ -кратной композиции

ВХОД: Точка  $P$ , число  $m = (m_t m_{t-1} \dots m_1)_2$ .

ВЫХОД:  $Q = [m]P$ .

- (1)  $Q \leftarrow \mathcal{O}$ ;
- (2) FOR  $i = t, t-1, \dots, 1$  DO
- (3)      $Q \leftarrow [2]Q$ ,
- (4)     IF  $m_i = 1$  THEN  $Q \leftarrow Q + P$ ;
- (5) RETURN  $Q$ .

Данный алгоритм требует не более  $t$  сложений и  $t$  удвоений точек (в среднем  $t$  удвоений и  $t/2$  сложений).



**Пример 6.2.** Проиллюстрируем работу алгоритма на примере вычисления  $[21]P$ . Здесь  $21 = (10101)_2$ ,  $t = 5$ . Покажем, что происходит на каждой итерации цикла алгоритма.

$$\begin{aligned}
 [i = 5 \ m_5 = 1] : & \quad Q \leftarrow \mathcal{O}, & \quad Q &\leftarrow Q + P = P; \\
 [i = 4 \ m_4 = 0] : & \quad Q \leftarrow [2]Q = [2]P; \\
 [i = 3 \ m_3 = 1] : & \quad Q \leftarrow [2]Q = [4]P, & \quad Q &\leftarrow Q + P = [5]P; \\
 [i = 2 \ m_2 = 0] : & \quad Q \leftarrow [2]Q = [10]P; \\
 [i = 1 \ m_1 = 1] : & \quad Q \leftarrow [2]Q = [20]P, & \quad Q &\leftarrow Q + P = [21]P.
 \end{aligned}$$

□

Напомним, что  $P_3 = P_1 + P_2$ , где  $P_1 \neq \pm P_2$  (строка 4 алгоритма) вычисляется с помощью формул

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \\
 x_3 &= k^2 - x_1 - x_2, \\
 y_3 &= k(x_1 - x_3) - y_1 \pmod{p}.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Удвоение  $P_3 = [2]P_1$  (строка 3 алгоритма) вычисляется с помощью формул

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}, \\
 x_3 &= k^2 - 2x_1, \\
 y_3 &= k(x_1 - x_3) - y_1 \pmod{p}.
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Говорят, что при вычислениях по формулам (6.14) и (6.15) используется аффинное представление для точек, т.е.  $P = (x, y)$ . Точка в бесконечности  $\mathcal{O}$  не имеет такого представления. Фактически в алгоритме 6.1 она является просто «флажком», показывающим, что нужно пропустить операции удвоения  $Q \leftarrow [2]Q$  до первого сложения  $Q \leftarrow Q + P$ , которое выполняется как простое присваивание  $Q \leftarrow P$ .

Вычисления по формулам (6.14) и (6.15) были нами рассмотрены в примере 6.1.

Обозначим через  $M$  и  $I$  стоимость (время) умножения и инверсии по модулю  $p$ . Тогда из (6.14) и (6.15) следует, что при аффинном представлении стоимость сложения точек равна  $1I + 3M$ , а стоимость удвоения равна  $1I + 4M$  (операции сложения и умножения на маленькие коэффициенты заметного влияния на время не оказывают).

Соотношение стоимости инверсии и умножения может быть различным в зависимости от реализации, но  $I$  всегда больше  $M$ . Если умножение реализуется за счет сложений и сдвигов, то оно, вероятнее всего, будет незначительно (в 2—3 раза) опережать инверсию. В этом случае использование аффинного представления для точек на кривой вполне оправдано. Однако, если процессор, на котором выполняются вычисления, имеет встроенный параллельный умножитель (как, например, Pentium®), то инверсия будет вычисляться существенно медленнее произведения. Можно дать грубую оценку стоимости соответствующих вычислений. Если  $t$  — длина чисел в битах, то умножение потребует порядка  $(t/32)^2 = t^2/1024$  машинных операций (32 бита — размер слова). С другой стороны, количество итераций в обобщенном алгоритме Евклида, вычисляющем инверсию, пропорционально  $t$  по своей природе. Даже если мы сможем на каждой итерации реализовать линейные по  $t$  вычисления с помощью 32-битовых машинных операций (что возможно), мы получим общую трудоемкость порядка  $t(t/32) = t^2/32$ , т.е. одна инверсия будет соответствовать тридцати двум умножениям. В действительности на каждой итерации алгоритма Евклида нужно делать несколько операций, а умножение может быть реализовано более быстрыми методами, так что  $I > 32M$ .

Мы можем избавиться от инверсий на каждом шаге алгоритма 6.1, если будем работать с координатами в виде рациональных чисел, производя вычисления отдельно с числителем и знаменателем. Наиболее выгодной оказывается следующая замена переменных:

$$x \rightarrow \frac{X}{Z^2}, \quad y \rightarrow \frac{Y}{Z^3}. \quad (6.16)$$

В этом случае точка на кривой представляется тройкой  $(X, Y, Z)$ , и говорят о переходе к взвешенному проективному представлению (далее для простоты будем опускать слово «взвешенное»). Переход от аффинной точки к проективной делается очень просто:

$$(x, y) \rightarrow (x, y, 1). \quad (6.17)$$

После этого все вычисления проводятся в проективных координатах (без вычисления инверсий). Обратный переход от проективного к аффинному представлению осуществляется следующим образом:

$$(X, Y, Z) \rightarrow (X/Z^2, Y/Z^3), \quad (6.18)$$

и стоит  $1I+4M$  (одно вычисление инверсии  $Z^{-1}$ , два умножения для получения  $Z^{-2}$  и  $Z^{-3}$  и, наконец, два умножения  $XZ^{-2}$  и  $YZ^{-3}$ ).

Получим формулы для сложения точек в проективном представлении. Вначале в выражении (6.14) для  $x_3$  произведем замену переменных в соответствии с (6.16). После приведения к общему знаменателю и сокращения дроби получим

$$x_3 = \frac{X_3}{Z_3^2} = \frac{(Y_2Z_1^3 - Y_1Z_2^3)^2 - (X_1Z_2^2 + X_2Z_1^2)(X_2Z_1^2 - X_1Z_2^2)^2}{Z_1^2Z_2^2(X_2Z_1^2 - X_1Z_2^2)^2}. \quad (6.19)$$

Отсюда находим выражения для  $X_3$  и  $Z_3$ , взяв соответственно числитель и квадратный корень из знаменателя правой части (6.19). Чтобы получить выражение для  $Y_3$ , прибегнем к хитрости, позволяющей в конечном итоге сэкономить одну операцию умножения. Заметим, что  $P_1 + P_2 = P_2 + P_1$  и

$$y_3 = \left( (x_1 - x_3) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - y_1 + (x_2 - x_3) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - y_2 \right) / 2.$$

Произведем замену переменных по правилу (6.16), причем вместо  $Z_3$  используем его представление из (6.19). После приведения к общему знаменателю, сокращения и приведения подобных членов получаем

$$y_3 = \frac{Y_3}{Z_3^3} = \frac{((X_1Z_2^2 + X_2Z_1^2)(X_2Z_1^2 - X_1Z_2^2)^2 - 2X_3)(Y_2Z_1^3 - Y_1Z_2^3)}{2Z_1^3Z_2^3(X_2Z_1^2 - X_1Z_2^2)^3} - \frac{(Y_1Z_2^3 + Y_2Z_1^3)(X_2Z_1^2 - X_1Z_2^2)^3}{2Z_1^3Z_2^3(X_2Z_1^2 - X_1Z_2^2)^3}. \quad (6.20)$$

На основании выражений (6.19) и (6.20) запишем следующий алгоритм.

**Алгоритм 6.2.** СЛОЖЕНИЕ В ПРОЕКТИВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИВХОД:  $P_1 = (X_1, Y_1, Z_1), P_2 = (X_2, Y_2, Z_2),$  $P_1, P_2 \neq \mathcal{O}, P_1 \neq \pm P_2$ ВЫХОД:  $P_3 = (X_3, Y_3, Z_3) = P_1 + P_2$ (все вычисления выполняются по модулю  $p$ )

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1 = X_1 Z_2^2 & 2M \\
\lambda_2 = X_2 Z_1^2 & 2M \\
\lambda_3 = \lambda_2 - \lambda_1 & \\
\lambda_4 = Y_1 Z_2^3 & 2M \\
\lambda_5 = Y_2 Z_1^3 & 2M \\
\lambda_6 = \lambda_5 - \lambda_4 & \\
\lambda_7 = \lambda_1 + \lambda_2 & \\
\lambda_8 = \lambda_4 + \lambda_5 & \\
Z_3 = Z_1 Z_2 \lambda_3 & 2M \\
X_3 = \lambda_6^2 - \lambda_7 \lambda_3^2 & 3M \\
\lambda_9 = \lambda_7 \lambda_3^2 - 2X_3 & \\
Y_3 = (\lambda_9 \lambda_6 - \lambda_8 \lambda_3^3)/2 & \frac{3M}{16M}
\end{array}$$

Как видно из описания алгоритма, трудоемкость сложения в проективных координатах равна  $16M$ . Мы не учитываем простые операции сложения, вычитания, а также умножения и деления на 2 (чтобы пояснить, как вычисляется  $v/2 \bmod p$ , заметим, что если  $v$  четно, то  $v/2 \bmod p = v/2$  (сдвиг вправо на один бит); если  $v$  нечетно, то  $v/2 \bmod p = (v + p)/2 \bmod p$ ,  $v + p$  четно, поэтому  $v/2 \bmod p = (v + p)/2$ ). Если одна из точек, скажем  $P_2$ , задана в аффинных координатах, т.е.  $Z_2 = 1$ , то стоимость сложения снижается до  $11M$ . Это называется смешанным сложением. Алгоритм 6.1 построен таким образом, что он всегда использует смешанные сложения, т.е. стоимость шага 4 алгоритма равна  $11M$ .

**Пример 6.3.** Рассмотрим вычисление суммы  $(5, 1) + (4, 6)$  в проективных координатах для кривой из примера 6.1 (все вычисления проводятся по модулю 7).

$$\begin{aligned}
P_1 &= (5, 1, 1), & P_2 &= (4, 6, 1). \\
\lambda_1 &= 5 \cdot 1 = 5, \\
\lambda_2 &= 4 \cdot 1 = 4, \\
\lambda_3 &= 4 - 5 = 6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= 1 \cdot 1 = 1, \\
\lambda_5 &= 6 \cdot 1 = 6, \\
\lambda_6 &= 6 - 1 = 5, \\
\lambda_7 &= 5 + 4 = 2, \\
\lambda_8 &= 1 + 6 = 0, \\
Z_3 &= 1 \cdot 1 \cdot 6 = 6, \\
X_3 &= 5^2 - 2 \cdot 6^2 = 2, \\
\lambda_9 &= 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot 2 = 2 - 4 = 5, \\
Y_3 &= (5 \cdot 5 - 0 \cdot 6^3)/2 = 25/2 = (25 + 7)/2 = 16 = 2; \\
P_3 &= (2, 2, 6).
\end{aligned}$$

Для проверки переведем точку  $P_3$  в аффинное представление. Для этого вычислим

$$6^{-1} = 6, \quad 6^{-2} = 6 \cdot 6 = 1, \quad 6^{-3} = 1 \cdot 6 = 6.$$

В итоге получаем

$$P_3 = (2 \cdot 1, 2 \cdot 6) = (2, 5),$$

что совпадает с результатом примера 6.1.  $\square$

Заметим, что условие  $P_1, P_2 \neq \mathcal{O}$  эквивалентно  $Z_1, Z_2 \neq 0$ , а условие  $P_1 \neq \pm P_2$  эквивалентно  $X_1 \neq X_2$ . Если вычисления на кривой проводятся, как это предполагалось нами, в подмножестве точек мощности  $q$ , причем  $q$  — простое число, и  $m \neq 0 \pmod q$ , то условия для сложения на шаге 4 алгоритма 6.1 автоматически выполняются (за исключением самого первого сложения, которое заменяется присваиванием).

Для удвоения точки в проективных координатах делаем замену (6.16) в (6.15):

$$x_3 = \frac{X_3}{Z_3^2} = \frac{(3X_1^2 + aZ_1^4)^2 - 8X_1Y_1^2}{(2Z_1Y_1)^2}, \quad (6.21)$$

$$y_3 = \frac{Y_3}{Z_3^3} = \frac{(4X_1Y_1^2 - X_3)(3X_1^2 + aZ_1^4)Z_1^2 - 8Y_1^4}{(2Z_1Y_1)^3}, \quad (6.22)$$

что приводит к следующему алгоритму.

**Алгоритм 6.3.** УДВОЕНИЕ В ПРОЕКТИВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИВХОД:  $P_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ ,  $P_1 \neq \mathcal{O}$ ВЫХОД:  $P_3 = (X_3, Y_3, Z_3) = [2]P_1$ 

$\lambda_1 = 3X_1^2 + aZ_1^4$	$4M$
$\lambda_2 = 4X_1Y_1^2$	$2M$
$Z_3 = 2Y_1Z_1$	$1M$
$X_3 = \lambda_1^2 - 2\lambda_2$	$1M$
$\lambda_3 = 8Y_1^4$	$1M$
$Y_3 = \lambda_1(\lambda_2 - X_3) - \lambda_3$	$1M$
	$10M$

Мы видим, что стоимость удвоения в проективных координатах в общем случае равна  $10M$ . Однако, если параметр кривой  $a = -3$ , то  $\lambda_1 = 3(X_1 - Z_1^2)(X_1 + Z_1^2)$ , и стоимость удвоения уменьшается до  $8M$ .

Отметим, что в вышеизложенных алгоритмах все вычисления проводятся по модулю  $p$ . Поэтому многое зависит от эффективной реализации модульной арифметики. Для случайно выбранных модулей наилучший на сегодняшний день подход — использование для чисел представления Монтгомери (см., например, [28]). В представлении Монтгомери умножение по модулю  $p$  эквивалентно двум обычным умножениям.

**6.6. Определение количества точек на кривой**

В этом разделе мы рассмотрим алгоритм Схоуфа (René Schoof, 1985) для определения  $\#E_p(a, b)$ , т.е. количества точек, координаты которых удовлетворяют уравнению кривой (6.10) и являются неотрицательными целыми числами, меньшими  $p$ . Алгоритм Схоуфа был первым полиномиальным алгоритмом подсчета количества точек на эллиптической кривой, его трудоемкость составляет  $O(\log^6 p)$  операций по модулю  $p$ . Этот алгоритм лежит в основе всех современных методов, применяемых для случайных кривых.

Мы начнем с теоремы, доказанной Хассе (Helmut Hasse) еще в 1933 году.

**Теорема 6.1 (Хассе).**  $\#E_p(a, b)$  удовлетворяет неравенствам

$$p + 1 - 2\sqrt{p} \leq \#E_p(a, b) \leq p + 1 + 2\sqrt{p}.$$

Оказывается удобным представлять  $\#E_p(a, b)$  в виде

$$\#E_p(a, b) = p + 1 - t. \quad (6.23)$$

Параметр  $t$  в (6.23) может принимать как положительные, так и отрицательные значения или быть равным нулю и называется следом Фробениуса для  $E_p(a, b)$ . В соответствии с теоремой Хассе

$$|t| \leq 2\sqrt{p}. \quad (6.24)$$

До сих пор нас интересовали только точки на кривой с целочисленными неотрицательными координатами, меньшими  $p$ . Но теперь мы рассмотрим все множество решений уравнения кривой (6.10) в комплексных числах. След Фробениуса замечательным образом связан с модулем  $p$ .

**Теорема 6.2.** *Для всех (комплексных чисел)  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих уравнению кривой (6.10) с параметрами  $0 \leq a, b < p$ , справедливо равенство*

$$(x^{p^2}, y^{p^2}) + [p](x, y) = [t](x^p, y^p) \quad (6.25)$$

(сложение в формуле означает композицию точек на кривой).

Чтобы научиться находить общее решение уравнения (6.25), заметим, что композиция точек вида  $Q = [m]P$  может быть выражена через координаты точки  $P$ . Например,

$$[2](x, y) = \left( x' = \left( \frac{3x^2 + a}{2y} \right)^2 - 2x, y' = \frac{3x^2 + a}{2y}(x - x') - y \right) =$$

$$\left( \frac{x^4 - 2ax^2 - 8bx + a^2}{4y^2}, \frac{x^6 + 5ax^4 + 20bx^3 - 5a^2x^2 - 4abx - 8b^2 - a^3}{8y^3} \right).$$

Точка  $[3](x, y)$  может быть получена как  $[2](x, y) + (x, y)$  путем подстановки найденных выражений для координат точки  $[2](x, y)$  в формулы (6.5), (6.7), (6.8) (желающие могут это проделать). Процесс получения выражений для следующих точек кажется довольно сложным, тем не менее он описывается следующей простой рекурсивной

схемой.

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= 0, \\
 \psi_1 &= 1, \\
 \psi_2 &= 2y, \\
 \psi_3 &= 3x^4 + 6ax^2 + 12bx - a^2, \\
 \psi_4 &= 4y(x^6 + 5ax^4 + 20bx^3 - 5a^2x^2 - 4abx - 8b^2 - a^3), \\
 \psi_{2m+1} &= \psi_{m+2}\psi_m^3 - \psi_{m-1}\psi_{m+1}^3, \quad m \geq 2, \\
 \psi_{2m} &= (\psi_{m+2}\psi_{m-1}^2 - \psi_{m-2}\psi_{m+1}^2)\psi_m/2y, \quad m > 2.
 \end{aligned}$$

Для  $m \geq 2$  и  $P = (x, y)$

$$[m]P = \left( \frac{\psi_m^2 x - \psi_{m-1}\psi_{m+1}}{\psi_m^2}, \frac{\psi_{m+2}\psi_{m-1}^2 - \psi_{m-2}\psi_{m+1}^2}{4y\psi_m^3} \right). \quad (6.26)$$

Полином  $\psi_m(x, y)$  называется полиномом деления порядка  $m$ . Поскольку точка  $[m]P$  лежит на кривой, приводимой по модулю  $p$ , вычисление коэффициентов полиномов  $\psi$  достаточно также выполнять по модулю  $p$ . С использованием приведенной выше рекурсивной схемы полином деления порядка  $m$  может быть вычислен за  $O(\log m)$  шагов (читатель, не знакомый с арифметикой полиномов, может обратиться к [9]). Заметим, что при нечетном  $m$  полиномы  $\psi_m$  зависят только от одной переменной  $x$ , так как вторая переменная  $y$  входит в них только в четных степенях, а  $y^2$  заменяется правой частью уравнения кривой (6.10). Заметим также, что полиномы «второго слоя» ( $\psi_{2m}, \psi_{2m+1}$ ) включают в себя произведения четырех полиномов «первого слоя» (от  $\psi_{m-2}$  до  $\psi_{m+2}$ ), поэтому степень полинома  $\psi_m$  растет как  $O(m^2)$ .

Комплексная точка  $P$  на кривой  $E$  называется торсионной точкой порядка  $m$ , если  $[m]P = \mathcal{O}$ . Множество торсионных точек порядка  $m$  будем обозначать как  $E[m]$ . Вследствие (6.26) достаточно очевидно, что точка  $P = (x, y)$  является торсионной порядка  $m$  тогда и только тогда, когда  $\psi_m(x, y) = 0$ .

Идея алгоритма Схоуфа состоит в нахождении решений уравнения (6.25) (относительно  $t$ ) на множествах торсионных точек малых порядков с последующим вычислением общего решения. Для торсионных точек порядка  $m$  множители приводятся по модулю  $m$ , а полиномы — по модулю  $\psi_m$ , так что уравнение (6.25) принимает вид

$$(x^{p^2}, y^{p^2})_m + [p_m](x, y) = [t_m](x^p, y^p)_m, \quad (6.27)$$



где  $p_m = p \bmod m$ ,  $t_m = t \bmod m$ ,  $(x^k, y^k)_m = (x^k \bmod \psi_m, y^k \bmod \psi_m)$ , кроме того,  $x$  и  $y$  связаны уравнением кривой  $y^2 = x^3 + ax + b$ . Возьмем в качестве модулей  $m$  простые числа вплоть до некоторого  $m_{\max}$ , такого, что

$$\prod_{\substack{m \text{ простое} \\ 2 \leq m \leq m_{\max}}} m > 4\sqrt{p}. \quad (6.28)$$

Тогда по найденным числам  $t_m$  мы однозначно восстановим след Фробениуса  $t$ , удовлетворяющий (6.24), по китайской теореме об остатках (см. [9, 28]).

Рассмотрим кратко метод решения уравнения (6.27) для случая  $m > 2$ . Вначале вычисляем полином  $\psi_m$ . Так как  $m$  нечетно, то  $\psi_m = \psi_m(x)$ . (Далее все действия с полиномами производятся по модулю  $\psi_m$ , степень  $y$  понижается до единицы с помощью уравнения кривой, коэффициенты вычисляются по модулю  $p$ .) Вычисляем полиномы  $x^p$ ,  $y^p$ ,  $x^{p^2}$ ,  $y^{p^2}$ , используя тот же алгоритм возведения в степень, что и для целых чисел. По формуле (6.26) вычисляем  $Q = [p_m](x, y)$  и, используя формулы сложения на кривой, находим в символическом виде композицию точек  $R = (x^{p^2}, y^{p^2})_m + Q$ . Если  $R = \mathcal{O}$ , то  $t_m = 0$ . В противном случае, чтобы найти  $t_m$ , вычисляем абсциссу точки  $P = [\tau](x^p, y^p)_m$  для всех  $\tau$ ,  $0 < \tau < m$ . Для каждого значения  $\tau$  нужно проверить равенство  $x_R$  и  $x_P$ . В общем случае разность абсцисс представляется в виде  $x_R - x_P = u(x) - yv(x) = 0$ . Берем отсюда  $y = u(x)/v(x)$ , подставляем в уравнение кривой и получаем некоторый полином  $h_x(x) = 0$ . Если  $h_x \bmod \psi_m \neq 0$ , то  $x_R$  и  $x_P$  не равны, и нужно пробовать другое значение  $\tau$ . Если же  $x_R = x_P$ , вычисляем ординату точки  $P$  и, пользуясь аналогичными приемами, переводим разность  $y_R - y_P$  в полином  $h_y(x) = 0$ . Если  $h_y \bmod \psi_m = 0$ , то  $t_m = \tau$ , иначе  $t_m = -\tau \bmod m$ .

Когда  $m = 2$ ,  $\psi_2 = y$  и возникает затруднение с вычислением  $x^p \bmod y$ . Однако в этом случае помогает одно простое рассуждение. Так как мы исключаем сингулярные кривые, то приведенная по модулю  $p$  эллиптическая кривая может иметь одно или три пересечения с осью  $x$ . Все другие точки идут парами  $(x, y)$ ,  $(x, -y)$ , и есть одна точка в бесконечности  $\mathcal{O}$ . Таким образом, количество точек на кривой четно или нечетно в зависимости от того, разлагается ли  $X^3 + aX + b$  на множители по модулю  $p$  или нет. Известен простой критерий неразложимости полинома по модулю  $p$  (см., например, [28, 4]).

**Теорема 6.3.** *Полином третьей степени  $F(X)$  неразложим на множители по модулю  $p$  тогда и только тогда, когда*

$$\gcd(F(X), X^p - X) = 1.$$

В результате имеем  $t_2 = 1$ , если  $\gcd(X^3 + aX + b, X^p - X) = 1$ , и  $t_2 = 0$  в противном случае.

Оценим трудоемкость алгоритма Схоуфа. Вначале сформулируем следующее известное свойство простых чисел.

**Утверждение 6.4 (о простых числах).** *Количество простых чисел, меньших  $n$ , примерно равно  $n/\ln n$ .*

(Точная формулировка и доказательство могут быть найдены в [3].) Из утверждения 6.4 следует, что  $m_{\max} = O(\log p)$  и количество модулей, для которых ведутся вычисления, равно  $O(\log p)$ . Наиболее трудоемкая операция в алгоритме — вычисление  $x^{p^2}$  и других аналогичных полиномов. При использовании быстрых алгоритмов возведения в степень эти вычисления требуют  $O(\log p)$  операций типа умножения с полиномами степени  $O(m^2) = O(\log^2 p)$ . Каждая такая операция требует  $O(\log^4 p)$  операций типа умножения по модулю  $p$ , т.е. всего получается  $O(\log^5 p)$  операций по модулю  $p$ . Одна операция по модулю  $p$  выполняется с помощью  $O(\log^2 p)$  битовых операций. Таким образом, вычисление  $x^{p^2}$  требует  $O(\log^7 p)$  битовых операций. Принимая во внимание число различных модулей, для которых нужно вычислять  $x^{p^2}$ , получаем общую трудоемкость  $O(\log^8 p)$  битовых операций.

**Пример 6.4.** Определим количество точек на кривой, использованной в примере 6.1 на стр.104:

$$Y^2 = X^3 + 2X + 6 \pmod{7} \quad (a = 2, b = 6).$$

Вначале воспользуемся алгоритмом, у которого время вычислений растет экспоненциально. Будем задавать значения  $X$  от 0 до 6 и вычислять соответствующие им значения  $Y$ . Запишем вначале

таблицу квадратов по модулю 7:

$$\begin{aligned} 0^2 &= 0, \\ 1^2 &= 1, \\ 2^2 &= 4, \\ 3^2 &= 9 = 2, \\ 4^2 &= 2, \\ 5^2 &= 4, \\ 6^2 &= 1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Используя эту таблицу, найдем множество точек  $E_7(2, 6)$ :

$$\begin{aligned} x = 0, \quad y^2 &= 6, & y \text{ не существует} \\ x = 1, \quad y^2 &= 1 + 2 + 6 = 9 = 2, & y = 3 \text{ и } y = -3 = 4, \\ x = 2, \quad y^2 &= 8 + 4 + 6 = 4, & y = 2 \text{ и } y = -2 = 5, \\ x = 3, \quad y^2 &= 27 + 6 + 6 = 4, & y = 2 \text{ и } y = -2 = 5, \\ x = 4, \quad y^2 &= 64 + 8 + 6 = 1, & y = 1 \text{ и } y = -1 = 6, \\ x = 5, \quad y^2 &= 125 + 10 + 6 = 1, & y = 1 \text{ и } y = -1 = 6, \\ x = 6, \quad y^2 &= 216 + 12 + 6 = 3, & y \text{ не существует.} \end{aligned}$$

Подсчитывая количество полученных точек и добавляя к ним точку в бесконечности, получаем

$$\#E_7(2, 6) = 11.$$

Ясно, что этот метод не годится при больших  $p$ , но мы будем использовать полученное значение для проверки.

Приступим к выполнению алгоритма Схоуфа. Нам достаточно будет трех модулей  $m = 2, 3, 5$ , так как  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 4\sqrt{7} = 10.58$  (на самом деле двух модулей  $m = 3, 5$  было бы достаточно, но мы используем еще  $m = 2$  для демонстрации алгоритма).

В целях упрощения обозначений договоримся записывать полиномы в виде десятичных чисел (величина модуля позволяет нам это сделать). Так, например,

$$\begin{aligned} x^4 + 5x^2 + 2 &= 1x^4 + 0x^3 + 5x^2 + 0x + 2 = 10502, \\ x^4 + x &= 1x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 1x + 0 = 10010. \end{aligned}$$

Все вычисления с коэффициентами полиномов мы будем проводить

по модулю 7. Вначале вычислим необходимые полиномы деления:

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= 0, \\
 \psi_1 &= 1, \\
 \psi_2 &= 2y, \\
 \psi_3 &= 30523, \\
 \psi_4 &= 4y \cdot 1031115 = 4054446y, \\
 \psi_5 &= \psi_4\psi_2^3 - \psi_1\psi_3^3 = 4054446 \cdot 1026^2 - 6025554626356 \\
 &= 5055036550230.
 \end{aligned}$$

Решим уравнение (6.27) для  $m = 3$ . Вычисляем по модулю  $\psi_3$ :

$$\begin{aligned}
 x^7 &= 1363, \\
 y^7 &= (y^2)^3 y = 1026^3 y = 1360y, \\
 x^{49} &= 10 = x, \\
 y^{49} &= 1026^{24} y = 6y, \\
 p_3 &= 7 \bmod 3 = 1.
 \end{aligned}$$

Левая часть (6.27) превращается в

$$R = (x, 6y) + (x, y) = \mathcal{O}.$$

Значит,  $t_3 = 0$ .

Теперь решим уравнение (6.27) для  $m = 5$ . Вычисляем по модулю  $\psi_5$ :

$$\begin{aligned}
 x^7 &= 10000000, \\
 y^7 &= 1064524266y, \\
 x^{49} &= 531353334500, \\
 y^{49} &= 650465522521y, \\
 p_5 &= 2.
 \end{aligned}$$

Находим точку  $Q = [2](x, y)$ . В общем случае это делается по формуле (6.26):

$$Q = \left( \frac{4y^2x - \psi_3}{4y^2}, \frac{\psi_4}{4y^4} \right) = \left( \frac{10314}{4013}, \frac{1031115y}{1045431} \right).$$

Видим, что  $x_Q \neq x^{49}$ , поэтому будем искать  $\tau > 0$ . Найдем точку  $R = (x^{49}, y^{49}) + Q$  по формулам (6.5), (6.7), (6.8):

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{\frac{1031115y}{1045431} - 650465522521y}{\frac{10314}{4013} - 531353334500} \\
 &= \frac{(1031115 - 650465522521 \cdot 1045431)4013y}{1045431(10314 - 531353334500 \cdot 4013)} \\
 &= \frac{541024434205y}{115461562234}, \\
 x_R &= \frac{541024434205^2 y^2}{115461562234^2} - 531353334500 - \frac{10314}{4013} \\
 &= \frac{552631612401}{533030166456}, \\
 y_R &= \left( 531353334500 - \frac{552631612401}{533030166456} \right) \cdot \frac{541024434205y}{115461562234} - \\
 &\quad - 650465522521y = \frac{515441613166y}{115165441243}.
 \end{aligned}$$

Пробуем  $\tau = 1$ ,  $P = (x^7, y^7)$ . Проверяем гипотезу  $x_R - x_P = 0$ :

$$\begin{aligned}
 h_x &= 552631612401 - 533030166456 \cdot 10000000 \\
 &= 61115566241 \neq 0 \pmod{\psi_5}.
 \end{aligned}$$

Пробуем  $\tau = 2$ . Вычисляем  $P = [2](x^7, y^7)$ . Здесь удобно использовать формулы сложения точек, так как мы прибавляем  $(x^7, y^7)$  к предыдущей точке  $P$ . Получаем

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{3 \cdot 10000000^2 + 2}{2 \cdot 1064524266y} = \frac{434232361462}{2051341455y}, \\
 x_P &= \frac{434232361462^2}{2051341455^2 y^2} - 2 \cdot 10000000 = \frac{213203662514}{220445441503}.
 \end{aligned}$$

Проверяем гипотезу  $x_R - x_P = 0$ :

$$\begin{aligned} h_x &= 552631612401 \cdot 220445441503 - 213203662514 \cdot 533030166456 \\ &= 0 \bmod \psi_5. \end{aligned}$$

Значит,  $x_R = x_P$ . Теперь нужно сравнить  $y_R$  и  $y_P$ . Имеем

$$\begin{aligned} y_P &= \left( 10000000 - \frac{213203662514}{220445441503} \right) \cdot \frac{434232361462}{2051341455y} - 1064524266y \\ &= \frac{510334350655}{221015611231y}. \end{aligned}$$

Проверяем гипотезу  $y_R - y_P = 0$ :

$$\begin{aligned} h_y &= 515441613166y \cdot 221015611231y - 510334350655 \cdot 115165441243 \\ &= 0 \bmod \psi_5. \end{aligned}$$

Значит,  $t_5 = 2$ .

Наконец, определим  $t_2$ . Нам нужно найти наибольший общий делитель для  $x^3 + ax + b$  и  $x^p - x$ . Сделаем это с помощью алгоритма Евклида для полиномов. Обратим внимание на то, что при больших  $p$ , используемых в криптографии, мы не сможем непосредственно записать полином  $x^p - x$ . Однако на первом шаге алгоритма Евклида вычисляется остаток  $(x^p - x) \bmod (x^3 + ax + b)$ , поэтому достаточно подать на вход алгоритма не сам полином  $x^p - x$ , а его остаток. Вычисляем  $x^p \bmod (x^3 + ax + b)$  с помощью быстрых методов возведения в степень и вычитаем  $x$ . После этого используем алгоритм Евклида. В нашем примере

$$\begin{aligned} x^7 &= 304 \bmod 1026, \\ x^7 - x &= 364, \\ \gcd(1026, 364) &= 1. \end{aligned}$$

Значит,  $t_2 = 1$ .

Теперь используем китайскую теорему об остатках [9, 28]. Имеем

$$\begin{aligned} t &= 1 \bmod 2, \\ t &= 0 \bmod 3, \\ t &= 2 \bmod 5, \\ N &= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30. \end{aligned}$$

Решение  $t' = t \bmod N$  находится по формуле

$$t' = \sum_{i=1}^3 a_i N_i M_i \bmod N,$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & N_1 &= 30/2 = 15, & M_1 &= 15^{-1} \bmod 2 = 1, \\ a_2 &= 0, & N_2 &= 30/3 = 10, & M_2 &= 10^{-1} \bmod 3 = 1, \\ a_3 &= 2, & N_3 &= 30/5 = 6, & M_3 &= 6^{-1} \bmod 5 = 1. \end{aligned}$$

Подставляя числа, получаем

$$t' = 1 \cdot 15 \cdot 1 + 0 \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \cdot 1 = 27.$$

Чтобы получить решение, удовлетворяющее неравенству (6.24), вычитаем модуль:

$$t = t' - N = -3.$$

По формуле (6.23) находим

$$\#E_7(2, 6) = 7 + 1 - (-3) = 11.$$

□

Как видим, определение числа точек на кривой — не слишком простая задача. Ее решение требует использования мощной вычислительной техники. На практике используются улучшенные варианты алгоритма Схоуфа, основанные на тонких конструкциях высшей алгебры, главное достоинство которых состоит в снижении степени полиномов деления с  $O(m^2)$  до  $O(m)$ . В результате трудоемкость снижается до  $O(\log^6 p)$  и может быть снижена до  $O(\log^{4+\epsilon} p)$  за счет использования асимптотически более быстрых методов умножения и деления (что обычно не оправдано при тех длинах чисел, которые актуальны для криптосистем на эллиптических кривых).

## 6.7. Использование стандартных кривых

Ввиду того, что формирование случайных кривых по рекомендациям разд. 6.3, особенно выполнение этапа подсчета количества точек на кривой, может быть слишком трудной задачей, на практике часто бывает достаточным использовать кривые, предлагаемые различными стандартами или другими источниками. Например, в американском стандарте FIPS 186-2 приводятся параметры эллиптических

кривых для различных длин модулей. Вообще говоря, нет никаких ограничений на использование всеми одной хорошо выбранной кривой. Однако такая кривая, при широком ее использовании, становится слишком притягательной для злоумышленников. Не исключено, что со временем они смогут найти какие-либо эффективные атаки именно на эту кривую, используя ее характерные особенности, не принятые ранее во внимание. Но все это лишь возможность, вероятность осуществления которой считается многими специалистами ничтожно малой.

Приведем пример реальной кривой, рекомендуемой в FIPS 186-2 (Curve P-256). Обратным слэшем \ обозначим продолжение числа на следующей строке. Предполагается, что кривая задана уравнением  $Y^2 = X^3 + aX + b \bmod p$ , число точек на кривой  $\#E_p(a, b) = n$ , точка  $G = (x_G, y_G)$  является генератором подмножества точек мощности  $q$ , где  $q$  — простое число.

```

p = 2256 - 2224 + 2192 + 296 - 1
  = 115792 089210356 248762697 446949407 573530086\
    143415290 314195533 631308867 097853951
a = -3
b = 0x 5ac635d8 aa3a93e7 b3ebbd55 769886bc 651d06b0\
    cc53b0f6 3bce3c3e 27d2604b
n = 115792 089210356 248762697 446949407 573529996\
    955224135 760342422 259061068 512044369
  (простое число)
q = n
x_G = 0x 6b17d1f2 e12c4247 f8bce6e5 63a440f2 77037d81\
    2deb33a0 f4a13945 d898c296
y_G = 0x 4fe342e2 fe1a7f9b 8ee7eb4a 7c0f9e16 2bce3357\
    6b315ece cbb64068 37bf51f5

```

Мы видим, что  $p$  и  $a$  вряд ли можно назвать случайно выбранными числами и вся «случайность» кривой определяется случайным выбором параметра  $b$  (это считается вполне обоснованным).

Первый вопрос, который возникает, когда мы видим кривую, подобную вышеприведенной, — это нет ли ошибки в записи параметров. Три проверки могут быть сделаны для выяснения этого вопроса.

1. Проверяем, является ли число  $p$  простым.



2. Проверяем, удовлетворяет ли точка  $G = (x_G, y_G)$  уравнению кривой.
3. Удостоверяемся в том, что  $n$  — это действительно количество точек на кривой. Заметим, что такую проверку целесообразно делать и в том случае, когда мы сами вычисляем  $n$ , например, с помощью алгоритма Схоуфа. В общем случае  $n = hq$ , где  $h$  — небольшое число, а  $q$  — простое. Прежде всего путем последовательного деления и проверки на простоту следует убедиться, что  $n$  соответствует заявленной форме. Затем выбираем случайно точку на кривой  $P$  (можно взять  $P = [k]G$ , где  $k$  — случайно выбранное число). Число  $n$  гарантированно является числом точек на кривой, если одновременно  $[n]P = \mathcal{O}$  и  $[h]P \neq \mathcal{O}$ . При невыполнении этого условия возможны два варианта. Если  $[n]P \neq \mathcal{O}$ , то  $n$  — это не число точек. Если же  $[h]P = \mathcal{O}$  (вероятность этого крайне мала), то нужно взять другую точку  $P$ .

В дополнение к указанным проверкам можно проверить выполнение всех других требований, изложенных в разд. 6.3.

Второй вопрос, который возникает, когда нам предъявляют «готовую» кривую, это действительно ли она была сгенерирована случайным образом. Этот вопрос вообще актуален для многих задач криптографии. Возможно, предложенная кривая обладает каким-либо редким свойством, позволяющим «взламывать» криптосистему, и человек, изготовивший эту кривую, может в дальнейшем получить доступ, скажем, к информации, зашифрованной при помощи этой кривой. Задача доказательства отсутствия заранее заданных специальных свойств кривой сводится к задаче подобного же доказательства для случайно выбираемых параметров. Например, для рекомендованной выше кривой мы должны доказать случайность выбора параметра  $b$ . Эту задачу можно решить следующим образом. Пусть  $h(x)$  — криптографически стойкая хеш-функция. Чтобы сгенерировать число  $b$ , вначале выбираем число  $s$ , а затем вычисляем  $b = h(s)$  и предъявляем оба числа  $b$  и  $s$ . Если хеш-функция удовлетворяет всем требованиям стойкости, то  $b$  не может иметь никаких заранее заданных свойств и мы можем спокойно им пользоваться. Число  $s$  является «сертификатом», доказывающим «чистоту» числа  $b$ . Приведенная выше эллиптическая кривая имеет подобный сертификат, основанный на хеш-функции SHA-1 [23], и стан-

дарт оговаривает процедуру использования этого сертификата. Так что мы можем быть уверены в том, что кривая была сформирована действительно случайным образом.

## Задачи и упражнения

- 6.1.** Эллиптическая кривая задана параметрами  $p = 11$ ,  $a = 4$ ,  $b = 7$ . Определить, принадлежат ли кривой следующие точки:  $(1,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(2,1)$ ,  $(2,2)$ ,  $(5,8)$ .
- 6.2.** Для эллиптической кривой с параметрами  $p = 7$ ,  $a = 2$ ,  $b = 6$  вычислить следующие композиции точек:  $[2](2,2)$ ,  $[2](4,6)$ ,  $(1,3) + (1,4)$ ,  $(2,2) + (3,2)$ ,  $(3,5) + (5,1)$ .

## Темы лабораторных работ

В лабораторных работах рекомендуется использовать эллиптическую кривую со следующими параметрами:

$$p = 31991, \quad a = -3 = 31988, \quad b = 1000.$$

Количество точек на этой кривой

$$n = 32089 \quad (\text{простое число}).$$

В качестве генератора можно взять точку

$$G = (0, 5585).$$

Точку в бесконечности  $\mathcal{O}$  удобно представлять как точку с координатами  $(0,0)$ .

- 6.3.** Написать набор подпрограмм для вычисления композиции и  $m$ -кратной композиции точек на эллиптической кривой. Приведем несколько тождеств для тестирования разработанных

подпрограмм:

$$\begin{aligned}(51, 7858) + (91, 5500) &= (7252, 18353), \\ (7777, 10935) + (16000, 20400) &= (12395, 26268), \\ (12405, 28624) + (2963, 16300) &= (14905, 2313), \\ (8020, 1740) + (8020, 30251) &= \mathcal{O},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[2](0, 5585) &= (8, 19435), \\ [2](23161, 17992) &= (26775, 10831), \\ [2](110, 13171) &= (26948, 16087),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[10000](31122, 9) &= (31180, 29596), \\ [12345](13140, 5033) &= (9362, 27046), \\ [11111](11007, 23704) &= (850, 6718).\end{aligned}$$

- 6.4.** Выполнить программную реализацию шифра Эль-Гамала на эллиптической кривой. При отладке и тестировании программы можно воспользоваться следующим примером построения шифра:

$$\begin{aligned}c &= 5103, \quad D = (12507, 2027); \\ m &= 10000, \quad k = 523; \\ R &= (9767, 11500), \quad P = (25482, 16638); \\ e &= 11685.\end{aligned}$$

Полученный шифротекст  $((9767, 11500), 11685)$  должен дешифроваться в сообщение 10000 при помощи секретного ключа 5103.

- 6.5.** Выполнить программную реализацию алгоритмов генерации и проверки цифровой подписи на эллиптической кривой (как обычно, полагаем  $h(m) = m$ ). В качестве  $q$  берем  $n = 32089$  (число точек на кривой). Подписанное сообщение

$$(1000; 4615, 5944)$$

должно признаваться подлинным для пользователя, имеющего открытый ключ  $Y = (12224, 7207)$ .

## Глава 7. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СТОЙКОСТЬ КРИПТОСИСТЕМ

### 7.1. Введение

По-видимому, одна из первых открытых работ по криптографии появилась в 1949 году и принадлежала Шеннону (Claude Shannon, см. [19]). В ней рассматривается классическая схема криптосистемы с секретным ключом, которая была представлена на рис. 1.1 (стр. 7).

В этой схеме имеется защищенный канал, предназначенный для передачи секретных ключей. Однако отметим, что в настоящее время можно рассмотреть в качестве защищенного канала схему вычисления секретного ключа на основе методов криптографии с открытым ключом, например, схему Диффи–Хеллмана или протокол Нидхама–Шредера. В дальнейшем мы будем рассматривать только классическую схему с секретным ключом, но многие результаты переносятся на случай создания секретного канала средствами криптографии с открытым ключом.

Все методы шифрования можно грубо разделить на два больших класса:

- 1) схемы, принципиально не вскрываемые, что доказывается строго;
- 2) схемы, стойкость которых основана на том, что дешифрование без ключа, вообще говоря, возможно, но для этого требуется перебор очень большого количества вариантов.

В этой главе мы будем заниматься системами первого типа, стойкость которых теоретически доказана. Системы второго типа будут рассмотрены в следующей главе.

## 7.2. Теория систем с совершенной секретностью

Пусть  $M = \{M_1, M_2, M_3, \dots, M_m\}$  — множество всех возможных сообщений (например, множество всех текстов длины не более, чем 1000 букв),  $K = \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_n\}$  — множество всех возможных ключей,  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$  — множество всех криптограмм (т.е. зашифрованных сообщений). Зашифрованные сообщения зависят от исходного сообщения и ключа, т.е.  $E_j = f(M_i, K_l)$ .

Мы будем считать, что на всем множестве сообщений  $M$  задано распределение вероятностей  $P$ , т.е. определены вероятности  $P(M_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Это априорное распределение вероятностей, которое известно и противнику. Запись вида  $P(A|B)$  будет, как обычно, обозначать условную вероятность события  $A$  при условии наступления события  $B$ .

**Определение 7.1.** Криптосистема называется *совершенно секретной*, если выполняется равенство

$$P(M_i|E_j) = P(M_i) \quad (7.1)$$

при всех  $M_i$ ,  $K_l$  и  $E_j = f(M_i, K_l)$ .

Поясним это определение. Пусть Ева перехватила криптограмму  $E_j$ . Если (7.1) выполняется для всех возможных сообщений, то это означает, что она не получила никакой информации о переданном сообщении, т.е. знание  $E_j$  совершенно бесполезно для нее. Рассмотрим схематичный пример. Пусть  $M$  — множество всех сообщений из шести букв на русском языке. Пусть априори известно, что для некоторой системы

$$\begin{aligned} P(\text{сообщение} = \text{«доллар»}) &= 0.00015, \\ P(\text{сообщение} = \text{«бутыль»}) &= 0.0000012 \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Допустим, мы имеем несовершенную систему, и Ева после перехвата и вычислений получила следующие данные:

$$\begin{aligned} P(\text{сообщение} = \text{«доллар»}) &= 10^{-20}, \\ P(\text{сообщение} = \text{«бутыль»}) &= 0.9999. \end{aligned}$$

Это означает, что Ева практически расшифровала сообщение: она практически уверена, что передано слово «бутыль», так как вероятность, что передано другое сообщение меньше 0.0001.

Если же для рассмотренной системы при любой перехваченной криптограмме  $E_j$  мы получаем

$$\begin{aligned} P(\text{сообщение} = \text{«доллар»} | E_j) &= 0.00015, \\ P(\text{сообщение} = \text{«бутыль»} | E_j) &= 0.0000012 \end{aligned}$$

и такие же равенства выполняются для всех остальных сообщений, то Ева вообще может не обращать внимание на перехваченный шифротекст  $E_j$ , а, например, отгадывать сообщение на основе исходных вероятностей. Другими словами, (7.1) — действительно разумное определение совершенно секретной системы.

Исследуем свойства совершенно секретной системы.

**Теорема 7.1.** *Если система является совершенно секретной (выполняется (7.1)), то справедливо равенство*

$$P(E_j | M_i) = P(E_j) \quad (7.2)$$

при всех  $i$  и  $j$ . Верно и обратное утверждение: если (7.2) выполняется, то система совершенно секретна.

**Доказательство.** По определению условной вероятности

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

при  $P(B) \neq 0$  (см., например, [17]). Поэтому при  $P(E_j) \neq 0$  можно записать

$$P(M_i | E_j) = \frac{P(M_i E_j)}{P(E_j)} = \frac{P(M_i) P(E_j | M_i)}{P(E_j)}.$$

Принимая во внимание (7.1), получаем

$$P(M_i | E_j) = \frac{P(M_i | E_j) P(E_j | M_i)}{P(E_j)},$$

т.е.

$$\frac{P(E_j | M_i)}{P(E_j)} = 1.$$

Таким образом, (7.2) доказано. Обратное утверждение теоремы доказывается «обратным ходом» приведенных равенств, см. [19].  $\square$

### 7.3. Шифр Вернама

Этот шифр был предложен в 1926 году американским инженером Вернамом (Gilbert Vernam) и использовался на практике, но доказательство его невскрываемости было получено значительно позже Шенноном [19]. Для шифра Вернама часто используется название «одноразовая лента» (one-time pad). Мы опишем этот шифр для случая двоичного алфавита, чтобы упростить обозначения.

Пусть множество сообщений  $M$  состоит из слов двоичного алфавита длины  $n$ , т.е. всего сообщений не более, чем  $2^n$ . В шифре Вернама множество ключей также состоит из слов той же длины  $n$  и каждый ключ используется с вероятностью  $1/2^n$ . Другими словами, все ключи используются с одинаковой вероятностью.

Пусть необходимо зашифровать сообщение  $\bar{m} = m_1 m_2 \dots m_n$  и пусть выбран ключ  $\bar{k} = k_1 k_2 \dots k_n$ . Тогда зашифрованное сообщение  $\bar{e} = e_1 e_2 \dots e_n$  получается по формуле:

$$e_i = m_i \oplus k_i, \quad (7.3)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $\oplus$  обозначает сложение по модулю 2. Другими словами, сообщение шифруется по схеме

$$\begin{array}{cccc} \oplus & m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ & k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \hline & e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{array}.$$

Так как сложение и вычитание по модулю 2 совпадают, то легко видеть, что дешифрование осуществляется по формуле

$$m_i = e_i \oplus k_i. \quad (7.4)$$

**Пример 7.1.** Пусть  $\bar{m} = 01001$ ,  $\bar{k} = 11010$ . Тогда получаем  $\bar{e} = 10011$ . Сложив  $\bar{e}$  с  $\bar{k}$ , восстанавливаем  $\bar{m}$ .  $\square$

**Теорема 7.2.** *Шифр Вернама является совершенно секретной криптосистемой.*

**Доказательство.** Согласно теореме 7.1 достаточно доказать справедливость (7.2). Имеем

$$\begin{aligned} P(E_j | M_i) &= P(e^n | m^n) = \\ &= P(k_1 = e_1 \oplus m_1; k_2 = e_2 \oplus m_2; \dots; k_n = e_n \oplus m_n) = \\ &= P(\text{ключ} = k_1 \dots k_n) = 2^{-n} \end{aligned}$$

(в последнем равенстве мы использовали то, что, по предположению, все ключи равновероятны).

Найдем  $P(E_j)$ . По формуле полной вероятности

$$P(E_j) = \sum_{i=1}^{2^n} P(M_i)P(E_j|M_i).$$

Учитывая, что  $P(E_j|M_i) = 2^{-n}$ , получаем

$$P(E_j) = 2^{-n} \sum_{i=1}^{2^n} P(M_i).$$

Так как сумма вероятностей всех возможных сообщений равна 1, получаем

$$P(E_j) = 2^{-n}.$$

Таким образом, справедливо (7.2). Теорема доказана.  $\square$

Известно, что шифр Вернама использовался при защите правительственной связи: например, на так называемой горячей линии «Москва – Вашингтон» [28], а также в других системах, где можно позволить дорогой способ доставки секретного ключа. Однако шифр Вернама можно использовать во многих других практически важных ситуациях. Например, на основе этого шифра легко организовать связь между банком и его филиалами (или связи между банком и клиентами), когда они находятся в одном городе, или защитить электронные письма, скажем, для студентов Алисы и Боба, расстающихся на каникулы (мы предлагаем читателю придумать схему и написать программу, считая, что общая длина писем, которыми они будут обмениваться во время каникул, не превосходит 1.44 Мбайт, т.е. объема стандартной дискеты).

## 7.4. Элементы теории информации

Мы доказали, что шифр Вернама совершенен, однако при его использовании длина ключа равна длине сообщения. К. Шеннон [19] показал, что у любой совершенной системы длина ключа должна быть больше энтропии сообщения (с которой мы кратко познакомимся ниже), т.е. пропорциональна его длине. Во многих практически



важных ситуациях приходится использовать короткие ключи (скажем, сотни или тысячи бит) для шифрования длинных сообщений (сотни килобайт и более). В этом случае можно построить только так называемые идеальные системы, впервые описанные Шенноном. Для построения идеальных систем и исследования их свойств Шеннон предложил использовать понятия теории информации. В этом разделе мы определим и кратко проиллюстрируем эти понятия. Достаточно полное и строгое их изложение может быть найдено, например, в [4].

Начнем с определения основного понятия — энтропии Шеннона. Пусть дана дискретная случайная величина  $\xi$ , принимающая значения  $a_1, a_2, \dots, a_r$  с вероятностями  $P_1, P_2, \dots, P_r$ .

**Определение 7.2.** Энтропия случайной величины  $\xi$  определяется равенством

$$H(\xi) = - \sum_{i=1}^r P_i \log P_i, \quad (7.5)$$

где  $0 \log 0 = 0$ .

Если используется двоичный логарифм, то энтропия измеряется в битах, что общепринято в криптографии, теории информации и в компьютерных науках. В случае натуральных логарифмов единица измерения — нат, в случае десятичных — дит.

При  $r = 2$  можно (7.5) записать иначе, введя следующие обозначения:  $P_1 = p$ ,  $P_2 = 1 - p$ . Тогда

$$H = -(p \log p + (1 - p) \log (1 - p)). \quad (7.6)$$

График энтропии для этого случая приведен на рис. 7.1.

Рассмотрим простейшие свойства энтропии.

**Утверждение 7.3.**

- 1)  $H(\xi) \geq 0$ ;
- 2)  $H(\xi) \leq \log r$ ;
- 3)  $H(\xi) = \log r$  при  $P_i = 1/r$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

**Доказательство.** Первое свойство довольно очевидно (см. (7.5)). Второе свойство докажем только для случая  $r = 2$ , так как

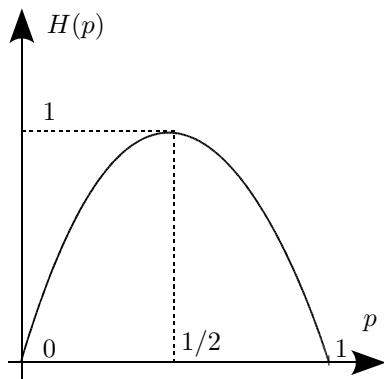


Рис. 7.1. График двоичной энтропии

общий случай аналогичен. Исследуем график энтропии. Нужно найти максимум функции (7.6). Для этого мы найдем первую и вторую производные  $H(p)$ , считая, что логарифм натуральный.

$$H'(p) = - \left( \ln p + p \cdot \frac{1}{p} - \ln(1-p) - \frac{1-p}{1-p} \right) = -\ln p + \ln(1-p).$$

Отсюда  $H'(p) = 0$  при  $p = 1/2$ . Найдем вторую производную

$$H''(p) = -\frac{1}{p} - \frac{1}{1-p}.$$

Мы видим, что  $H''(p) < 0$  при  $p \in (0; 1)$ . Это означает, что функция  $H(p)$  достигает максимума в точке  $1/2$  и выпукла на отрезке  $(0; 1)$ . Таким образом, график, изображенный на рис. 7.1, обоснован. Очевидно, при любом основании логарифма график будет аналогичный.

Для доказательства третьего свойства заметим, что наибольшее значение энтропии для  $r = 2$  равно

$$\max H(p) = H(1/2) = -((1/2) \log(1/2) + (1/2) \log(1/2)) = 1,$$

т.е. составляет один бит в случае двоичного логарифма.  $\square$

«Физический» смысл энтропии состоит в том, что энтропия — это количественная мера неопределенности. В качестве примера рассмотрим три случайные величины для  $r = 2$ . Иными словами, будем

считать, что у нас есть три источника сообщений, которые порождают буквы  $a_1$ ,  $a_2$ , т.е. имеются три случайные величины  $\xi_i, i = 1, 2, 3$ , принимающие значения  $a_1$  или  $a_2$ :

$$\begin{aligned}\xi_1 : P(a_1) &= 1, & P(a_2) &= 0; \\ \xi_2 : P(a_1) &= 0.5, & P(a_2) &= 0.5; \\ \xi_3 : P(a_1) &= 0.01, & P(a_2) &= 0.99.\end{aligned}$$

Интуитивно ясно, что неопределенность случайной величины  $\xi_1$  равна нулю. И действительно,

$$H(\xi_1) = -(1 \cdot \log 1 + 0 \cdot \log 0) = 0.$$

Посмотрим на  $\xi_2$  и  $\xi_3$ . Интуитивно кажется, что неопределенность у  $\xi_2$  выше неопределенности у  $\xi_3$ . Вычислим энтропии:

$$H(\xi_2) = 1 \text{ бит}$$

(уже считали выше),

$$H(\xi_3) = -(0.01 \cdot \log 0.01 + 0.99 \cdot \log 0.99) \approx 0.08 \text{ бит}.$$

Мы видим, что энтропия действительно является разумной мерой неопределенности. Но главное, конечно, не примеры такого типа, а то, что эта величина играет ключевую роль во многих задачах теории передачи и хранения информации. В частности, энтропия характеризует максимальную степень сжатия данных. Точнее, если источник сообщений порождает текст достаточно большой длины  $n$  с определенной ниже предельной энтропией  $h$  на бит сообщения, то этот текст может быть «сжат» в среднем до величины сколь угодно близкой к  $nh$ . Например, если  $h = 1/2$ , то текст сжимается вдвое и т.п.. Подчеркнем, что речь идет о так называемом неискажающем сжатии, когда по «сжатому» сообщению можно восстановить исходное.

Рассмотрим теперь двумерную случайную величину, заданную рядом распределения

$$P_{ij} = P(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j), \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq s. \quad (7.7)$$

**Пример 7.2.** Из многолетнего опыта преподавания в некотором вузе известно, что оценки за первый и второй контрольный срок

Т а б л и ц а 7.1. Распределение оценок  
за контрольный срок

$\xi_1 \downarrow \xi_2 \rightarrow$	0	1	2
0	0.20	0.05	0
1	0.05	0.30	0.05
2	0	0.05	0.30

по математике (соответственно  $\xi_1$  и  $\xi_2$ ) подчиняются закону распределения, задаваемому табл. 7.1.  $\square$

Введем следующие обозначения:

$$P_{i\cdot} = P(\xi_1 = a_i) = \sum_{j=1}^s P_{ij},$$

$$P_{\cdot j} = P(\xi_2 = b_j) = \sum_{i=1}^r P_{ij}.$$

Напомним некоторые элементарные соотношения, известные из теории вероятностей (см. [17]):

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad (7.8)$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B), \quad (7.9)$$

$$P(A) = \sum_i P(H_i)P(A|H_i) \quad (7.10)$$

((7.10) — уже встречавшаяся формула полной вероятности, в которой  $H_i$  — попарно несовместные события, сумма которых содержит событие  $A$ ).

В соответствии с (7.5) определим энтропию двумерной случайной величины

$$H(\xi_1, \xi_2) = - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s P_{ij} \log P_{ij}. \quad (7.11)$$

Аналогично для трехмерной случайной величины  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  и распределения вероятностей  $P_{ijk}$  определим

$$H(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = - \sum_i \sum_j \sum_k P_{ijk} \log P_{ijk}. \quad (7.12)$$

Подобным же образом определяется энтропия для  $n$ -мерной случайной величины.

Представим теперь, что значение случайной величины  $\xi_1$  известно, а  $\xi_2$  — неизвестно. Тогда естественно определить условную энтропию

$$H(\xi_2|\xi_1) = - \sum_{i=1}^r P_{i\cdot} \sum_{j=1}^s \frac{P_{ij}}{P_{i\cdot}} \log \frac{P_{ij}}{P_{i\cdot}}. \quad (7.13)$$

Это — средняя условная энтропия случайной величины  $\xi_2$  при условии, что значение  $\xi_1$  известно.

**Утверждение 7.4 (свойство двумерной энтропии).**

$$H(\xi_1, \xi_2) = H(\xi_1) + H(\xi_2|\xi_1), \quad (7.14)$$

в частности, для независимых случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$

$$\begin{aligned} H(\xi_2|\xi_1) &= H(\xi_2), \\ H(\xi_1, \xi_2) &= H(\xi_1) + H(\xi_2). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Напомним, что  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  независимы, если  $P_{ij} = P_i P_j$  для всех  $i$  и  $j$ . Доказательство утверждения достаточно просто и может быть найдено в [4]. Мы ограничимся только его интерпретацией. Пусть в первом опыте порождается  $\xi_2$ , во втором —  $\xi_1$ . Тогда общая неопределенность эксперимента должна быть равна неопределенности первого опыта, сложенной с условной неопределенностью второго опыта. В случае независимых  $\xi_1$  и  $\xi_2$  знание одной величины не несет никакой информации о другой, что соответствует (7.15).

Пусть дана  $n$ -мерная случайная величина  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Справедливо следующее соотношение [4]:

$$H(\xi_1, \dots, \xi_n) = H(\xi_1) + H(\xi_2|\xi_1) + H(\xi_3|\xi_1, \xi_2) + \dots + H(\xi_n|\xi_1, \dots, \xi_{n-1}). \quad (7.16)$$

Для независимых случайных величин

$$H(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n H(\xi_i) \quad (7.17)$$

(заметим, что (7.14), (7.15) — частный случай (7.16), (7.17)).

В общем случае

$$H(\xi_k|\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \leq H(\xi_k). \quad (7.18)$$

Рассмотрим последовательность случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  ( $\xi_i$  принимают значения в  $A$ ), которую можно рассматривать как случайный процесс с дискретным временем. Мы будем считать, что этот процесс стационарный, т.е., неформально, вероятностные характеристики для  $(\xi_1 \dots \xi_n)$  те же, что и для  $(\xi_{\Delta+1} \dots \xi_{\Delta+n})$  при всех положительных  $n$  и  $\Delta$  (точное определение дано в [4]).

Пусть  $H(\xi_1, \dots, \xi_n)$  — энтропия  $n$ -мерной случайной величины  $(\xi_1 \dots \xi_n)$ . Обозначим через

$$h_n^+ = \frac{1}{n} H(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

удельную энтропию  $n$ -го порядка и определим

$$h_n^- = H(\xi_n | \xi_1, \dots, \xi_{n-1}).$$

Отметим следующие свойства:

$$h_n^+ \leq h_{n-1}^+, \quad n > 1, \quad (7.19)$$

$$h_n^- \leq h_n^+, \quad (7.20)$$

$$h_n^- \leq h_{n-1}^-, \quad n > 1. \quad (7.21)$$

Их доказательство может быть найдено в [4].

Для независимых  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  справедливы равенства

$$h_n^+ = h_n^- = h.$$

(Процесс, порождающий независимые случайные величины, называется процессом без памяти.)

**Теорема 7.5.** *Для стационарного процесса существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^+$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^-$ , причем эти пределы равны.*

Доказательство теоремы см. в [4].

Обозначим общее значение этих пределов через  $h_\infty$ ,

$$h_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^-. \quad (7.22)$$

Пусть дан алфавит  $A = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ . Мы знаем, что

$$\max H(\xi_1) = \log r$$

для процесса без памяти, поэтому, принимая во внимание (7.21) и (7.22), получаем  $\max h_\infty = \log r$ , причем максимум достигается для процессов без памяти, у которых все буквы порождаются с равными вероятностями  $1/r$ . Естественно ввести величину

$$R = \log r - h_\infty, \quad (7.23)$$

называемую избыточностью (на букву сообщения). Неформально, это как бы неиспользованная часть алфавита. Избыточность — количественная мера взаимной зависимости символов и их «неравновероятности». Отметим, что в примере из первой главы во втором случае, когда даже простой шифр Цезаря не вскрываем, избыточность шифруемого сообщения равна нулю, так как все десять символов независимы и равновероятны, т.е.  $h_\infty = \log 10$  и  $R = 0$ .

## 7.5. Расстояние единственности шифра с секретным ключом

Рассмотрим криптосистему с секретным ключом, схема которой показана на рис. 1.1 (стр. 7). Пусть источник порождает сообщение  $\bar{m} = m_1 m_2 \dots m_n$ . Например,  $m_i$  при каждом  $i$  — это буква из русского алфавита или знак пробела, а  $\bar{m}$  — сообщение на русском языке. Алиса и Боб обладают секретным ключом  $k$ , известным только им, и пусть  $\bar{e} = e_1 e_2 \dots e_n$  — сообщение, зашифрованное при помощи этого ключа.

**Пример 7.3.** Пусть источник порождает буквы из алфавита  $A = \{a, b, c\}$  с вероятностями  $P(a) = 0.8$ ,  $P(b) = 0.15$ ,  $P(c) = 0.05$ , и пусть это источник без памяти. Пусть шифратор, применяя ключ  $k$ , заменяет буквы в исходном сообщении, используя какую-либо перестановку символов:

$(a, b, c)$	$k = 1$
$(a, c, b)$	$k = 2$
$(b, a, c)$	$k = 3$
$(b, c, a)$	$k = 4$
$(c, a, b)$	$k = 5$
$(c, b, a)$	$k = 6$ ,

т.е. ключ принимает значения от 1 до 6, и если, например,  $k = 5$ ,

то в исходном тексте осуществляется следующая замена символов:  
 $a \rightarrow c, b \rightarrow a, c \rightarrow b$ .

Пусть Ева перехватила зашифрованное сообщение

$$\bar{e} = cccbc$$

и хочет определить значение ключа. Оценим количественно вероятности использования всех возможных ключей, используя формулу Байеса

$$P(K_i|E) = \frac{P(K_i)P(E|K_i)}{\sum_{j=1}^t P(K_j)P(E|K_j)},$$

где  $E, K_1, \dots, K_t$  — некоторые события, причем  $K_i$  попарно несовместны и  $E \subset \sum_{i=1}^t K_i$ . В нашем случае событие  $E$  — это получение зашифрованного сообщения  $\bar{e} = cccbc$ ,  $t = 6$ , а  $K_i$  означает, что выбран ключ  $k = i$ .

Мы предполагаем, что все ключи равновероятны, т.е.

$$P(K_1) = P(K_2) = P(K_3) = P(K_4) = P(K_5) = P(K_6) = 1/6.$$

Тогда

$$P(E|K_1) = P(\bar{m} = cccbc) = 0.05^4 \cdot 0.15 \approx 0.000001,$$

$$P(E|K_2) = P(\bar{m} = bbbcb) = 0.15^4 \cdot 0.05 \approx 0.000025,$$

$$P(E|K_3) = P(\bar{m} = cccac) = 0.8 \cdot 0.05^4 \approx 0.000005,$$

$$P(E|K_4) = P(\bar{m} = bbbab) = 0.8 \cdot 0.15^4 \approx 0.000405,$$

$$P(E|K_5) = P(\bar{m} = aaaca) = 0.8^4 \cdot 0.05 \approx 0.020480,$$

$$P(E|K_6) = P(\bar{m} = aaaba) = 0.8^4 \cdot 0.15 \approx 0.061440.$$

Отсюда легко находим

$$\sum_{j=1}^6 P(K_j) P(E|K_j) \approx 0.013726,$$

и получаем по формуле Байеса апостериорную вероятность того, что был использован ключ  $k = 1$ , при условии, что получено сообщение  $\bar{e} = cccbc$ :

$$P(K_1|E) = P(\bar{m} = cccbc|\bar{e} = cccbc) \approx \frac{(1/6) \cdot 0.000001}{0.013726} \approx 0.000011.$$



Продолжая аналогично, находим, что наиболее вероятны ключи  $k = 5$  и  $k = 6$ :

$$P(K_5|E) = P(\bar{m} = aaaca|\bar{e} = ccabc) \approx 0.25,$$

$$P(K_6|E) = P(\bar{m} = aaaba|\bar{e} = ccabc) \approx 0.75,$$

а вероятности всех остальных ключей меньше 0.01.  $\square$

Мы видим, что, перехватив всего 5 букв, Ева может определить ключ почти однозначно. Таким образом, из этого примера и из примера с шифром Цезаря в первой главе мы заключаем, что, по-видимому, существует некоторая длина перехваченного сообщения, после которой ключ может быть найден с вероятностью, близкой к единице.

**Утверждение 7.6 (о расстоянии единственности шифра (Шеннон [19])).** Пусть рассматривается система с секретным ключом, и пусть  $H(K)$  — энтропия ключа. Пусть  $R$  — избыточность шифруемого сообщения, а  $n$  — длина сообщения, такая, что

$$H(K|e_1, \dots, e_n) \approx 0, \quad (7.24)$$

т.е. при этой длине перехваченного сообщения ключ почти однозначно восстановлен. Тогда справедливо неравенство

$$n \geq \frac{H(K)}{R}. \quad (7.25)$$

Дадим несколько замечаний к этому утверждению.

1. Число  $n$ , удовлетворяющее неравенству (7.25), называется расстоянием единственности шифра. Это означает, что в среднем достаточно перехватить  $n$  букв зашифрованного сообщения для восстановления ключа.
2. Мы видим, что если избыточность сообщения  $R = 0$ , то ключ никогда не будет определен, так как  $n = \infty$ . Т.е. шифр невозможно взломать (мы видели это в примере с номером замка из первой главы).
3. Уменьшение избыточности может быть достигнуто за счет сжатия данных. Дело в том, что при сжатии данных энтропия

«сжатого» текста сохраняется, а длина уменьшается. Следовательно, энтропия на букву в сжатом тексте больше, чем в исходном, а избыточность меньше, см. (7.23). Значит, после сжимающего кодирования расстояние единственности шифра увеличивается.

4. С практической точки зрения лучше использовать системы, в которых ключ меняется задолго до достижения расстояния единственности шифра.

**Доказательство.** Мы дадим здесь только основную идею доказательства. Пусть противник, перехватив переданный шифротекст  $\bar{e} = e_1 e_2 \dots e_n$ , однозначно восстановил ключ, а тем самым и исходное сообщение. Значит, неопределенность противника уменьшилась на  $H(K) + H(m_1, \dots, m_n)$ , так как он узнал и ключ, и исходное сообщение. При этом он получил  $n$  букв из  $r$ -буквенного алфавита  $\{a_1, \dots, a_r\}$ . Мы знаем, что максимальное значение энтропии  $h_\infty = \log r$ , значит, неопределенность противника не может уменьшаться больше, чем на  $n \log r$ . Отсюда

$$n \log r \geq H(K) + H(m_1, \dots, m_n),$$

следовательно,

$$n (\log r - H(m_1, \dots, m_n)/n) \geq H(K),$$

откуда получаем, что

$$n \geq \frac{H(K)}{\log r - H(m_1, \dots, m_n)/n} = \frac{H(K)}{R}$$

(здесь мы воспользовались тем, что  $H(m_1, \dots, m_n)/n \rightarrow h_\infty$ , и определением избыточности (7.23)).  $\square$

**Пример 7.4.** Оценим расстояние единственности для шифра из примера 7.3. Имеем  $H(K) = \log 6 \approx 2.58$ ,  $\log r = \log 3 \approx 1.58$ , и энтропия на букву источника равна

$$H = -(0.8 \log 0.8 + 0.15 \log 0.15 + 0.05 \log 0.05) \approx 0.88.$$

Поэтому

$$n \geq \frac{2.58}{1.58 - 0.88} \approx 3.7.$$

Мы видели, что пяти букв было практически достаточно для раскрытия ключа. И неравенство (7.25) хорошо согласуется с нашим примером.  $\square$

Поясним еще на одном примере, как взаимная зависимость символов увеличивает избыточность и тем самым уменьшает расстояние единственности.

**Пример 7.5.** Пусть дан марковский источник, т.е. источник с памятью, в котором вероятность появления очередного символа зависит только от предыдущего символа. Источник описывается следующей матрицей переходов:

	$a$	$b$	$c$
$a$	0	0.9	0.1
$b$	0	0.1	0.9
$c$	0.4	0.3	0.3

и начальными вероятностями  $P(a) = 0.19$ ,  $P(b) = 0.34$ ,  $P(c) = 0.47$ . Пусть, как и в примере 7.3, используется шифр с шестью возможными ключами, и пусть перехвачен зашифрованный текст

$$\bar{e} = bbacbac.$$

Мы видим по матрице переходов, что сочетание  $aa$  невозможно (после буквы  $a$  вероятность появления снова буквы  $a$  равна нулю), а сочетание  $bb$  — маловероятно (вероятность появления  $b$  после  $b$  равна 0.1). Следовательно, скорее всего первая пара букв соответствует буквам  $cc$  исходного сообщения, т.е. при шифровании была использована подстановка  $c \rightarrow b$ . Тогда  $ac$  соответствует исходным парам  $ab$  или  $ba$ . По матрице мы видим, что сочетание  $ba$  невозможно, а возможно только  $ab$ . Поэтому мы можем предположить, что в качестве ключа была использована перестановка номер 2:

$$k = 2 \quad (a \rightarrow a, b \rightarrow c, c \rightarrow b).$$

Вычислим точные вероятности использования различных ключей, как в примере 7.3. Заметим, что вероятность конкретного сообщения источника равна произведению вероятности начальной буквы

и вероятностей переходов от одной буквы к другой.

$$\begin{aligned}
 P(E|K_1) &= P(\bar{m} = bbacbac) = 0.34 \cdot 0.1 \cdot 0 = 0, \\
 P(E|K_2) &= P(\bar{m} = ccabcbab) = 0.47 \cdot 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.4 \cdot 0.9 = \\
 &= 0.016446, \\
 P(E|K_3) &= P(\bar{m} = aabcabc) = 0.19 \cdot 0 = 0, \\
 P(E|K_4) &= P(\bar{m} = aacbcb) = 0.19 \cdot 0 = 0, \\
 P(E|K_5) &= P(\bar{m} = ccbacba) = 0.47 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0 = 0, \\
 P(E|K_6) &= P(\bar{m} = bbcabca) = 0.34 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.4 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.4 = \\
 &= 0.003966.
 \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\sum_{j=1}^6 P(K_j) P(E|K_j) \approx 0.003402,$$

и получаем по формуле Бейеса апостериорные вероятности использованных ключей при условии, что получено сообщение  $\bar{e} = bbacbac$ :

$$\begin{aligned}
 P(K_1|E) &= 0, \\
 P(K_2|E) &= P(\bar{m} = ccabcbab|\bar{e} = bbacbac) \approx 0.8, \\
 P(K_3|E) &= 0, \\
 P(K_4|E) &= 0, \\
 P(K_5|E) &= 0, \\
 P(K_6|E) &= P(\bar{m} = bbcabca|\bar{e} = bbacbac) \approx 0.2.
 \end{aligned}$$

Эти вычисления подтверждают справедливость приведенного ранее неформального рассуждения.  $\square$

Оценку расстояния единственности шифра можно использовать при конструировании криптосистем. Например, кажется разумным менять ключ на новый, когда общая длина зашифрованных с его помощью сообщений приближается к величине расстояния единственности.

Новые подходы к построению теоретически стойких криптосистем, связанные с применением методов специального кодирования, изложены в работах [10, 15, 16, 18, 30, 31] авторов данной книги.

Предлагаемые там методы достаточно сложны для описания, однако они эффективны с вычислительной точки зрения и позволяют строить невскрываемые шифры с секретным ключом. Основная идея этих методов состоит в обеспечении путем кодирования нулевой избыточности сообщения, которое подлежит шифрованию. Один из таких методов будет рассмотрен в следующем разделе.

## 7.6. Идеальные криптосистемы

В разд. 7.2 было введено понятие совершенной секретности, а затем было показано, что шифр Вернама совершенно секретен. Мы видели, что в этом шифре длина ключа равна длине сообщения и ключ используется всего один раз. Если же мы хотим использовать короткий многоразовый ключ (что актуально для большинства практических приложений), то какой наилучший результат в смысле стойкости шифра мы можем достичь? При обсуждении утверждения 7.6 указывалось, что при нулевой избыточности сообщения расстояние единственности шифра бесконечно. Это означает, что даже короткий (или, что эквивалентно, применяемый много раз) ключ, используемый для шифрования очень длинного сообщения нулевой избыточности, не может быть раскрыт. А это, в свою очередь, означает, что у противника, пытающегося разгадать зашифрованный текст, остается неопределенность, равная неопределенности ключа. Очевидно, это лучшее, что может быть достигнуто в данных условиях (здесь можно снова вспомнить пример с кодовым замком из первой главы). Эти рассуждения подводят нас к понятию строго идеального шифра, впервые введенному Шенноном [19].

Пусть сообщение  $m_1 m_2 \dots m_t$  шифруется при помощи секретного ключа  $\bar{k} = k_1 k_2 \dots k_s$ , в результате чего получается зашифрованное сообщение  $\bar{e} = e_1 e_2 \dots e_t$ . Обозначим через  $H(m_1 m_2 \dots m_t)$  энтропию сообщения, через  $H(\bar{e})$  и  $H(\bar{k})$  — соответственно энтропии шифротекста и ключа. Тогда  $H(m_1 m_2 \dots m_t | \bar{e})$  представляет неопределенность сообщения, а  $H(\bar{k} | \bar{e})$  — неопределенность ключа при условии, что известен шифротекст  $\bar{e}$ .

**Определение 7.3.** Шифр называется *строго идеальным*, если

$$H(m_1 m_2 \dots m_t | \bar{e}) = H(\bar{k} | \bar{e}) = \min\{H(m_1 m_2 \dots m_t), H(\bar{k})\}. \quad (7.26)$$

Если энтропия ключа меньше энтропии сообщения источника, то (7.26) упрощается:

$$H(m_1 m_2 \dots m_t | \bar{e}) = H(\bar{k} | \bar{e}) = H(\bar{k}) \quad (7.27)$$

при всех достаточно больших  $t$ . Так как мы будем рассматривать случай, когда длина сообщения  $t$  велика, то в качестве определения строго идеального шифра будем использовать (7.27).

Неформально, строгая идеальность шифра означает, что количество решений криптограммы равно количеству различных ключей и все решения равновероятны, как в примере с кодовым замком.

В этом разделе мы рассмотрим конструкцию идеальной системы, недавно предложенную в [10], ограничившись описанием только основной идеи применительно к случаю, когда сообщение порождается двоичным источником без памяти с неизвестной статистикой, иными словами, делается последовательно и независимо случайный выбор буквы из алфавита  $A = \{a_1, a_2\}$ , причем вероятности выбора букв неизвестны.

Пусть источник порождает потенциально неограниченные сообщения  $m_1 m_2 \dots m_t$ ,  $t \rightarrow \infty$ , и имеется ключ фиксированной длины  $\bar{k} = k_1 k_2 \dots k_s$ ,  $s \geq 1$ . (Как мы упомянули выше, предполагается также, что энтропия источника на букву отлична от нуля, так как в противном случае вообще нет необходимости в передаче сообщений.) Будем последовательно разбивать сообщение источника на блоки символов длины  $n$ , где  $n > 1$  — параметр метода. Обозначим один из таких блоков через  $\bar{m}$ . Опишем преобразования, выполняемые над каждым таким  $n$ -буквенным блоком.

Вначале определим количество букв  $a_1$  и  $a_2$  в блоке  $\bar{m}$ . Пусть, скажем, имеется  $n_1$  букв  $a_1$  и  $n_2 = n - n_1$  букв  $a_2$ . Определим  $u(\bar{m})$  как слово длины  $\lceil \log(n+1) \rceil$  бит, кодирующее  $n_1$ .

Теперь рассмотрим множество  $S$  всех последовательностей, состоящих из  $n_1$  букв  $a_1$  и  $n_2$  букв  $a_2$ . В этом множестве

$$|S| = C_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!}$$

элементов. Несмотря на то, что нам не известны вероятности последовательностей из множества  $S$ , одно мы можем сказать точно — все они равны между собой (в силу независимости выбора отдельных букв сообщения). Зададим на множестве  $S$  некоторый порядок, на-

пример, расположим сообщения в порядке возрастания соответствующих им двоичных чисел (считая, что  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ). Вычислим номер данного конкретного блока  $\tilde{m}$  внутри упорядоченного множества  $S$  (для вычисления такого номера известен эффективный алгоритм [11], описание которого выходит за рамки нашей книги). Обозначим этот номер через  $\omega(\tilde{m})$ .

Разобьем множество  $S$  на непересекающиеся подмножества  $S_0, S_1, \dots, S_\nu$  с числами элементов, равными различным степеням двойки (например, если  $|S| = 21$ , то получаем три подмножества с числами элементов 16, 4 и 1). По  $\omega(\tilde{m})$  определим, какому подмножеству принадлежит  $\tilde{m}$  (обозначим номер такого подмножества через  $v(\tilde{m})$ ), и найдем номер  $\tilde{m}$  внутри данного подмножества (обозначим этот номер через  $w(\tilde{m})$ ).

Посмотрим внимательно на номер сообщения внутри подмножества,  $w(\tilde{m})$ . Замечательно то, что  $w(\tilde{m})$  — это полностью случайная последовательность нулей и единиц (т.е. такая, где символы независимы, а вероятности нуля и единицы равны). Действительно,  $w(\tilde{m})$  — это номер одной из равновероятных последовательностей букв в подмножестве из  $2^b$  элементов (для некоторого  $b$ ). Номера всех таких последовательностей — это всевозможные последовательности из  $b$  двоичных цифр. Но если все последовательности из  $b$  двоичных цифр равновероятны, то отдельные символы равновероятны и независимы.

Итак, обрабатывая описанным образом последовательные блоки сообщения, мы представляем сообщение в виде

$$u(\tilde{m}_1)v(\tilde{m}_1)w(\tilde{m}_1)u(\tilde{m}_2)v(\tilde{m}_2)w(\tilde{m}_2)\dots$$

Теперь перейдем к описанию процесса шифрования преобразованного сообщения. На первый взгляд это может показаться странным, но слова  $u(\cdot)$  и  $v(\cdot)$  вообще не шифруются! Шифруются только слова  $w(\cdot)$  с использованием секретного ключа  $\bar{k}$ . В качестве шифра можно, например, использовать побитовое сложение по модулю 2 с периодически продолженным ключом. Для описания этого шифра удобно занумеровать символы слов  $w(\cdot)$  подряд и обозначить их через  $w_1w_2w_3\dots$ . Тогда шифрование проводится по формуле

$$z_i = w_i \oplus k_{i \bmod s}.$$

В результате применения описанного метода мы зашифровали сообщение следующим образом:

$$m_1 m_2 \dots m_t \longrightarrow \bar{e} = u(\bar{m}_1) v(\bar{m}_1) z(\bar{m}_1) u(\bar{m}_2) v(\bar{m}_2) z(\bar{m}_2) \dots \quad (7.28)$$

По построению алгоритма ясно, что из правой части (7.28) можно восстановить сообщение, если знать  $\bar{k}$ . Вначале нужно дешифровать символы слов  $w(\cdot)$ , используя формулу

$$w_i = z_i \oplus k_{i \bmod s}, \quad (7.29)$$

а затем из слов  $u(\cdot)v(\cdot)w(\cdot)$  восстанавливаются последовательные блоки сообщения.

**Пример 7.6.** Пусть требуется зашифровать сообщение

$$a_2 a_2 a_1 a_2 a_2 a_2 a_1 a_2 a_2 a_1$$

с трехбитовым ключом  $\bar{k} = 011$ . Разобьем сообщение на два блока по пять символов,  $n = 5$ .

Выполним преобразование для первого блока  $\bar{m}_1 = a_2 a_2 a_1 a_2 a_2$ . Для этого блока  $n_1 = 1$  и  $u(\bar{m}_1) = (001)_2$ . Рассмотрим теперь упорядоченное множество всех сообщений, состоящих из одной буквы  $a_1$  и четырех букв  $a_2$  (табл. 7.2). Всего таких сообщений  $\frac{5!}{1!4!} = 5$ , поэтому имеем два подмножества  $S_0$  и  $S_1$  с числом элементов соответственно 4 и 1. Мы видим, что  $\bar{m}_1$  входит в  $S_0$  под номером  $2 = (10)_2$ .

**Таблица 7.2. Множество равновероятных сообщений;  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 4$**

Сообщение	Номер в $S$	$S_v$	$w$
$a_1 a_2 a_2 a_2 a_2$	000	$S_0$	00
$a_2 a_1 a_2 a_2 a_2$	001		01
$a_2 a_2 a_1 a_2 a_2$	010		10
$a_2 a_2 a_2 a_1 a_2$	011		11
$a_2 a_2 a_2 a_2 a_1$	100	$S_1$	-

Таким образом, мы получаем следующие два слова:  $v(\bar{m}_1) = 0$ ,  $w(\bar{m}_1) = (10)_2$ .

Теперь выполним преобразование для второго блока сообщения  $\bar{m}_2 = a_2 a_1 a_2 a_2 a_1$ . Для этого блока  $n_1 = 2$  и  $u(\bar{m}_2) = (010)_2$ . Рассмотрим упорядоченное множество всех сообщений, состоящих из двух



букв  $a_1$  и трех букв  $a_2$  (табл. 7.3). Всего таких сообщений  $\frac{5!}{2!3!} = 10$ , поэтому имеем два подмножества  $S_0$  и  $S_1$  с числом элементов соответственно 8 и 2. Мы видим, что  $\bar{m}_2$  входит под номером  $6 = (110)_2$

Т а б л и ц а 7.3. Множество равновероятных сообщений;  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$

Сообщение	Номер в $S$	$S_v$	$w$
$a_1 a_1 a_2 a_2 a_2$	0000	$S_0$	000
$a_1 a_2 a_1 a_2 a_2$	0001		001
$a_1 a_2 a_2 a_1 a_2$	0010		010
$a_1 a_2 a_2 a_2 a_1$	0011		011
$a_2 a_1 a_1 a_2 a_2$	0100		100
$a_2 a_1 a_2 a_1 a_2$	0101		101
$a_2 a_1 a_2 a_2 a_1$	0110		110
$a_2 a_2 a_1 a_1 a_2$	0111		111
$a_2 a_2 a_1 a_2 a_1$	1000	$S_1$	0
$a_2 a_2 a_2 a_1 a_1$	1001		1

в  $S_0$ . Таким образом, мы получаем  $v(\bar{m}_2) = 0$ ,  $w(\bar{m}_2) = (110)_2$ .

В результате мы получили следующий двоичный код преобразованного сообщения:

001 0 10 010 0 110

(пробелы здесь поставлены только для удобства чтения; для однозначного декодирования они не нужны).

Теперь зашифруем преобразованное сообщение. Периодически продолженный ключ имеет вид  $\bar{k} = 011011 \dots$ . Сложение битов слов  $w(\cdot)$  с этим ключом дает

$$\oplus \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \end{array}.$$

Зашифрованное сообщение выглядит следующим образом:

$$\bar{e} = 001 0 11 010 0 011.$$

□

Остановимся теперь на основных свойствах рассмотренного метода.

**Утверждение 7.7.** *Построенный шифр строго идеален.*

**Доказательство.** Как уже отмечалось при изложении метода, слово  $w(\bar{m})$  для каждого блока  $\bar{m}$  состоит из равновероятных и независимых символов 0 и 1, другими словами, «полностью» случайно. Так как блоки в сообщении независимы, то в преобразованном сообщении последовательность слов  $w(\bar{m}_1)w(\bar{m}_2)\dots = w_1w_2w_3\dots$  также полностью случайна. Но любая последовательность  $w_1w_2w_3\dots$  соответствует некоторому сообщению, и все такие сообщения равновероятны. Поэтому при подстановке любого ключа в дешифрующее выражение (7.29) мы получаем какое-либо решение, причем все решения равновероятны. В результате, имея только шифротекст  $\bar{e}$ , мы ничего не можем сказать об использованном ключе, т.е.

$$H(\bar{k}|\bar{e}) = H(\bar{k}).$$

Далее, каждому конкретному сообщению  $m_1m_2\dots m_t$  соответствует одна и только одна последовательность  $w_1w_2w_3\dots$ , и при достаточно большом  $t$ , а именно, таком, что длина последовательности  $w_1w_2w_3\dots$  не меньше длины ключа, каждому ключу, подставляемому в (7.29), соответствуют различные равновероятные сообщения. Поэтому

$$H(m_1m_2\dots m_t|\bar{e}) = H(\bar{k}).$$

Ненулевая энтропия источника гарантирует то, что требуемое достаточно большое  $t$  всегда существует.

Таким образом, мы доказали, что (7.27) выполняется.  $\square$

Особенностью предложенного шифра является то, что шифрованию подвергается не все преобразованное сообщение, а только его часть. В приведенном примере даже может показаться, что слишком много информации остается «открытой». Какая все-таки доля информации скрывается этим шифром? Следующее утверждение дает ответ на этот вопрос.

**Утверждение 7.8.** *Пусть сообщение порождается источником без памяти с энтропией  $h$  на букву. Тогда для каждого блока  $\bar{m}$  из  $n$  символов сообщения средняя длина шифруемого слова  $w(\bar{m})$  удовлетворяет неравенству*

$$E(|w(\bar{m})|) > nh - 2\log(n+1) \quad (7.30)$$

(здесь  $E(\cdot)$  — математическое ожидание, а  $|\cdot|$  — длина).

**Доказательство.** Компонента кода  $u(\bar{m})$  может принимать любое значение от 0 до  $n$ , и поэтому ее максимальная энтропия равна  $\log(n+1)$ .

Слово  $v(\bar{m})$  может принимать любое значение от 0 до  $\nu$ , что связано с разбиением  $S$  на подмножества  $S_0, S_1, \dots, S_\nu$ . Очевидно, что  $\nu \leq \lfloor \log |S| \rfloor$ . Из известного неравенства  $|S| = C_n^{n_1} < 2^n$  получаем  $\log |S| < n$  и  $\nu \leq \log |S| < n$ . Поэтому максимальная энтропия слова  $v(\bar{m})$  строго меньше  $\log(n+1)$ .

Энтропия блока равна  $H(\bar{m}) = nh$  (так как символы порождаются источником без памяти). При преобразовании блока энтропия не изменяется, поэтому для энтропии слова  $w(\bar{m})$  имеем

$$H(w(\bar{m})) > nh - 2\log(n+1)$$

(из общей энтропии мы вычли верхнюю границу максимальной энтропии слов  $u(\bar{m})$  и  $v(\bar{m})$ ). Но так как слово  $w(\bar{m})$  состоит из равновероятных и независимых символов 0 и 1, его средняя длина совпадает с энтропией, что завершает доказательство.  $\square$

Неформально, утверждение 7.8 говорит о том, что «почти вся» информация сообщения содержится в шифруемой компоненте кода  $w$ , если длина блока  $n$  достаточно велика. Иными словами, представленный шифр скрывает «почти всю» информацию. Причем даже полный перебор ключей не позволяет вскрыть шифр.

Конечно, рассмотренная конструкция идеальной криптосистемы может иметь различные варианты построения. Например, может представлять интерес вариант, в котором часть ключа используется для «закрытия» префикса (т.е. компонент  $u$  и  $v$  кода). Правда, в этом случае система будет «просто» идеальной (не строго идеальной).

## Задачи и упражнения

**7.1.** Зашифровать сообщение  $\bar{m}$  шифром Вернама с ключом  $\bar{k}$ :

а.  $\bar{m} = 1001101011, \bar{k} = 0110100101,$

б.  $\bar{m} = 0011101001, \bar{k} = 1100011100,$

в.  $\bar{m} = 1000011100, \bar{k} = 1001011010,$

г.  $\bar{m} = 0011100010$ ,  $\bar{k} = 0110111001$ ,

д.  $\bar{m} = 1001101011$ ,  $\bar{k} = 1000111010$ .

**7.2.** Пусть источник без памяти порождает буквы из алфавита  $A = \{a, b, c\}$  с вероятностями  $P(a)$ ,  $P(b)$ ,  $P(c)$ . Шифратор заменяет буквы, используя одну из шести возможных перестановок, как это делалось в примере 7.3. Определить апостериорные вероятности использованных ключей для заданного зашифрованного сообщения  $\bar{e}$ :

а.  $P(a) = 0.1$ ,  $P(b) = 0.7$ ,  $P(c) = 0.2$ ,  $\bar{e} = abaacac$ ,

б.  $P(a) = 0.9$ ,  $P(b) = 0.09$ ,  $P(c) = 0.01$ ,  $\bar{e} = cbaccca$ ,

в.  $P(a) = 0.14$ ,  $P(b) = 0.06$ ,  $P(c) = 0.8$ ,  $\bar{e} = bbabbcab$ ,

г.  $P(a) = 0.7$ ,  $P(b) = 0.05$ ,  $P(c) = 0.25$ ,  $\bar{e} = cccacbbc$ ,

д.  $P(a) = 0.1$ ,  $P(b) = 0.7$ ,  $P(c) = 0.2$ ,  $\bar{e} = abbbbab$ .

**7.3.** Для источников задачи 7.2 вычислить энтропию и расстояние единственности.

**7.4.** По имеющемуся зашифрованному сообщению  $\bar{e}$  найти апостериорные вероятности использованных ключей и соответствующие им сообщения, если известно, что используется шифр примера 7.3, а сообщения порождаются марковским источником, описанным в примере 7.5:

а.  $\bar{e} = bcacbcacc$ ,

б.  $\bar{e} = caaabaaba$ ,

в.  $\bar{e} = aacabcaac$ ,

г.  $\bar{e} = bcaaaaaca$ ,

д.  $\bar{e} = aaacaaca$ .

## Глава 8. СОВРЕМЕННЫЕ ШИФРЫ С СЕКРЕТНЫМ КЛЮЧОМ

### 8.1. Введение

В этой главе мы рассмотрим вычислительно стойкие шифры с секретным ключом, которые, в принципе, могут быть вскрыты, но требуют для этого очень большого количества вычислений, скажем,  $10^{20}$  лет для суперкомпьютера. Эти шифры обеспечивают шифрование и дешифрование данных со скоростями, значительно превышающими скорости шифров с открытыми ключами и теоретически стойких шифров, что и объясняет их широкое практическое использование. В последующих разделах мы опишем некоторые наиболее популярные шифры и режимы их функционирования, однако вначале, чтобы пояснить принципы построения этих шифров, продолжим пример с шифром Цезаря, начатый в первой главе.

Там мы рассмотрели атаку по шифротексту на шифр Цезаря. Было показано, что в случае избыточных сообщений шифр легко вскрывается путем перебора ключей. Поищем возможности повышения стойкости шифра Цезаря. Пожалуй, самое простое, что приходит в голову — увеличить количество возможных значений ключа. В этом случае Еве придется перебирать больше ключей, прежде чем она найдет единственный правильный.

Естественный способ увеличить количество возможных значений ключа для шифра Цезаря — использовать разные ключи для разных букв сообщения. Например, мы можем шифровать каждую нечетную букву ключом  $k_1$ , а четную ключом  $k_2$ . Тогда секретный ключ  $k = (k_1, k_2)$  будет состоять из двух чисел, и количество возможных ключей будет  $32^2 = 1024$ . Зашифруем наше прежнее сообщение из первой главы ключом  $k = (3, 5)$ :

$$\text{ПЕРЕМЕНА} \xrightarrow{3,5} \text{ТКУКПКРЕ}. \quad (8.1)$$

Эта схема легко обобщается на произвольную длину секретно-

го ключа  $k = (k_1, k_2, \dots, k_t)_{32}$ . При  $t$  порядка 10 и выше задача полного перебора ключей становится практически нерешаемой.

Тем не менее, данный шифр легко вскрывается путем так называемого частотного криптоанализа. Для этого используется статистика языка, на котором написано передаваемое сообщение. При использовании частотного криптоанализа перебор начинают с ключей, соответствующих наиболее часто встречающимся буквам и их сочетаниям. Например, известно, что в типичном тексте на русском языке буква О встречается чаще других. Смотрим на ТКУКПКРЕ в (8.1) и определяем, какие буквы встречаются чаще других на четных и нечетных местах. На четных местах это К. Предполагаем, что это код О, следовательно,  $k_2 = \text{К} - \text{О} = 28 \pmod{32}$ . На нечетных местах все буквы различны, поэтому для поиска  $k_1$  знание частот букв языка не помогает (дело в том, что для нашего примера взято очень короткое сообщение). Пытаемся, как и прежде, найти  $k_1$  путем перебора, но убеждаемся, что приемлемых расшифровок не получается. Это означает, что наша гипотеза о том, что О заменяется в шифре на К, неверна. Берем вместо О другую часто встречающуюся букву — букву Е. Вычисляем  $k_2 = \text{К} - \text{Е} = 5$ . Повторяем аналогичные действия для поиска  $k_1$  и на этот раз находим решение  $k_1 = 3$ . В результате, чтобы расшифровать сообщение, из всех возможных 1024 ключей нам понадобилось проверить только 36 (мы проверяли  $(0, 28), \dots, (31, 28), (0, 5), \dots, (3, 5)$ ).

Попробуем слегка усложнить шифр, чтобы затруднить частотный криптоанализ. Нам нужно каким-то образом перемешать символы сообщения, заставить их влиять друг на друга, чтобы скрыть индивидуальные частоты их появления. По-прежнему будем использовать ключ  $k = (k_1, k_2)$  и шифровать сообщение блоками по два символа  $m_i, m_{i+1}$ . Один из простейших вариантов шифра может выглядеть так:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_i &= m_i + m_{i+1}, \\ \tilde{m}_{i+1} &= m_{i+1} + \tilde{m}_i, \\ c_i &= \tilde{m}_i + k_1, \\ c_{i+1} &= \tilde{m}_{i+1} + k_2 \pmod{32} \end{aligned} \tag{8.2}$$

(все суммы вычисляются по модулю 32). Здесь  $m_i$  — нечетная буква исходного текста,  $m_{i+1}$  — четная буква,  $k_1, k_2$  — символы ключа, а  $c_i, c_{i+1}$  — получаемые символы шифротекста. Например, пара

символов ПЕ шифруется ключом  $k = (3, 5)$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{m}_i &= \Pi + \text{Е} = \Phi, \\ \tilde{m}_{i+1} &= \text{Е} + \Phi = \text{Щ}, \\ c_i &= \Phi + 3 = \text{Ч}, \\ c_{i+1} &= \text{Щ} + 5 = \text{Ю},\end{aligned}$$

т.е. ПЕ превращается в ЧЮ.

Отметим, что этот шифр можно дешифровать. Алгоритм дешифрования, называемый обычно обратным шифром, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{i+1} &= c_{i+1} - k_2, \\ \tilde{m}_i &= c_i - k_1, \\ m_{i+1} &= \tilde{m}_{i+1} - \tilde{m}_i, \\ m_i &= \tilde{m}_i - m_{i+1} \pmod{32}.\end{aligned}\tag{8.3}$$

Применяя к нашему сообщению шифр (8.2) с ключом  $(3, 5)$ , получаем

$$\text{ПЕРЕМЕНА} \longrightarrow \text{ФЩХЪСЦНН} \xrightarrow{3,5} \text{ЧЮШЯФЫРТ}.\tag{8.4}$$

Здесь для наглядности после первой стрелки показан промежуточный результат, получающийся после выполнения первых двух операций в (8.2) (это «перемешанный», но еще не зашифрованный текст сообщения). Мы видим, что данный шифр скрывает частоты появления отдельных символов, затрудняя частотный анализ. Конечно, он сохраняет частоты появления пар символов, но мы можем скрыть и их, если будем шифровать сообщения блоками по три символа и т.д.

Вообще, шифр (8.2) выглядит более сложным для Евы по сравнению с шифром (8.1), и он дает нам возможность рассмотреть еще одну ситуацию, связанную с ее действиями. До сих пор мы рассматривали атаки только по шифротексту. Но что произойдет, если Ева каким-то образом достала открытый текст, соответствующий ранее переданному зашифрованному сообщению? (Т.е. мы находимся в условиях атаки второго типа, см. главу 1, стр. 10.) Например, Ева имеет пару (ПЕРЕМЕНА, ТКУКПКРЕ) для шифра (8.1). Тогда она сразу вычисляет секретный ключ,  $k_1 = \text{Т} - \text{П} = 3$ ,  $k_2 = \text{К} - \text{Е} = 5$ , и легко расшифровывает все последующие сообщения от Алисы к Бобу. При использовании шифра (8.2) пара (ПЕРЕМЕНА, ЧЮШЯФЫРТ) уже не дает такого очевидного решения, хотя и здесь оно

довольно просто. Ева применяет две первые операции из (8.2) (не требующие секретного ключа) к слову ПЕРЕМЕНА, получает промежуточный результат ФЦХЪСЦНН и уже по паре (ФЦХЪСЦНН, ЧЮШЯФЫРТ), как и в первом случае, находит ключ  $k = 3, 5$ .

Как затруднить такие действия Евы? Идея проста. Будем при шифровании сообщения использовать шифр (8.2) два раза. Тогда получим:

$$\text{ПЕРЕМЕНА} \xrightarrow{3,5} \text{ЧЮШЯФЫРТ} \xrightarrow{3,5} \text{ШШЪЫТПЕЩ}. \quad (8.5)$$

Теперь, имея пару (ПЕРЕМЕНА, ШШЪЫТПЕЩ), Ева не может вычислить ключ, по крайней мере алгоритм ее действий не очевиден (она не может получить промежуточное значение ЧЮШЯФЫРТ, так как при его построении был использован секретный ключ, ей не известный).

В представленной схеме (8.5) отдельная реализация алгоритма (8.2) называется *раундом* или *циклом* шифра.

Мы проиллюстрировали влияние на стойкость шифра таких параметров, как длина ключа, размер блока, количество раундов, а также показали необходимость введения «перемешивающих» преобразований. В реальных шифрах используются, в принципе, те же преобразования, но над более длинными цепочками символов и обладающие целым рядом дополнительных свойств. Это связано с наличием развитых методов криптоанализа, таких, как дифференциальный и линейный криптоанализ, описание которых выходит за рамки нашей книги, но может быть найдено в [35].

## 8.2. Блочные шифры

*Блочный шифр* можно определить как зависящее от ключа  $K$  обратимое преобразование слова  $X$  из  $n$  двоичных символов. Преобразованное с помощью шифра слово (или блок) будем обозначать через  $Y$ . Для всех рассматриваемых в этом разделе шифров длина слова  $Y$  равна длине слова  $X$ .

Таким образом, блочный шифр — это обратимая функция  $E$  (другим словами, такая, для которой существует обратная функция). Конкретный вид  $E_K$  этой функции определяется ключом  $K$ ,

$$\begin{aligned} Y &= E_K(X), \\ X &= E_K^{-1}(Y) \quad \text{для всех } X. \end{aligned}$$



Здесь  $E_K^{-1}$  обозначает дешифрующее преобразование и называется *обратным шифром*.

Для криптографических приложений блочный шифр должен удовлетворять ряду требований, зависящих от ситуации, в которой он используется. В большинстве случаев достаточно потребовать, чтобы шифр был стоек по отношению к атаке по выбранному тексту. Это автоматически подразумевает его стойкость по отношению к атакам по шифротексту и по известному тексту. Следует заметить, что при атаке по выбранному тексту шифр всегда может быть взломан путем перебора ключей. Поэтому требование стойкости шифра можно уточнить следующим образом.

Шифр *стойк* (при атаке по выбранному тексту), если для него *не существуют* алгоритмы взлома, существенно более быстрые, чем прямой перебор ключей.

Нам будет достаточно такого нестроого определения стойкости. На самом деле, по состоянию на сегодняшний день, ни для одного используемого шифра не доказано соответствие этому определению стойкости. Реально можно говорить о следующем.

Шифр *считается стойким* (при атаке по выбранному тексту), если для него *неизвестны* алгоритмы взлома, существенно более эффективные, чем прямой перебор ключей.

Ниже мы приведем примеры некоторых практически используемых блочных шифров. Наша задача будет состоять не только в том, чтобы дать достаточно подробное описание алгоритмов (их описание может быть найдено в литературе), но и в объяснении основных принципов построения блочных шифров. Кроме того, наше описание может облегчить понимание материала, изложенного в официальных документах (ГОСТах и т.п.). Далее, на протяжении всей главы, мы будем изучать технику использования блочных шифров для решения различных задач криптографии.

До недавнего времени ни одна книга по криптографии не обходилась без описания шифра DES (Data Encryption Standard). Этот шифр был принят в качестве стандарта США в 1977 году. Его основные параметры: размер блока 64 бита, длина ключа 56 бит, 16 раундов. Этот шифр интенсивно использовался более двух десятков лет и еще сегодня встречается во многих работающих системах. Несмотря на многочисленные атаки против DES, он так и не был взломан. Однако высокий уровень развития вычислительных средств позволяет сегодня вскрывать DES путем перебора ключей. Например, еще

в 1993 году было опубликовано техническое описание системы стоимостью в один миллион долларов, позволяющей взламывать любой ключ DES за 7 часов. В результате DES не рекомендуется использовать во вновь создаваемых криптографических системах, и поэтому мы не описываем этот шифр. В 2001 году после специально объявленного конкурса в США был принят новый стандарт на блочный шифр, названный AES (Advanced Encryption Standard), в основу которого был положен шифр Rijndael, разработанный бельгийскими специалистами.

Большинство современных блочных шифров строятся по схемам, значительно отличающимся от DES. Тем не менее есть один действующий шифр, построенный на тех же принципах, что и DES, и представляющий для нас особый интерес. Это российский блочный шифр ГОСТ 28147-89.

### Шифр ГОСТ 28147-89

Шифр ГОСТ 28147-89 [5], как следует из его обозначения, был принят в качестве стандарта в 1989 году. Основные параметры ГОСТ 28147-89: длина ключа 256 бит, размер блока 64 бита, 32 раунда. ГОСТ 28147-89 более удобен для программной реализации, чем DES, имеются сведения о выигрыше по времени примерно в 1.5 раза. В отличие от DES, ГОСТ 28147-89, по-видимому, не был предметом столь глубокого анализа со стороны мирового криптологического сообщества. Тем не менее, как отмечают специалисты, консервативный дизайн и величина основных параметров (длина ключа, размер блока, количество раундов) позволяют утверждать, что шифр вряд ли может быть слабым. Никаких эффективных атак против шифра ГОСТ 28147-89 не опубликовано.

В основе ГОСТ 28147-89, так же как и DES, лежит так называемая структура Фейстела. Блок разбивается на две одинаковые части, правую  $R$  и левую  $L$ . Правая часть объединяется с ключевым элементом и посредством некоторого алгоритма шифрует левую часть. Перед следующим раундом левая и правая части меняются местами. Такая структура позволяет использовать один и тот же алгоритм как для шифрования, так и для дешифрования блока. Это особенно важно при аппаратной реализации, так как прямой и обратный шифры формируются одним и тем же устройством (различается только порядок подачи элементов ключа).

Перейдем к непосредственному описанию шифра ГОСТ 28147-89. Введем необходимые определения и обозначения. Последовательность из 32 бит будем называть словом. Блок текста  $X$  (64 бита), также как блок шифротекста  $Y$ , состоит из двух слов — левого  $L$  и правого  $R$ , причем  $L$  — старшее слово, а  $R$  — младшее. Секретный ключ  $K$  (256 бит) рассматривается состоящим из восьми слов  $K = K_0 K_1 \dots K_7$ . На его основе строится так называемый раундовый ключ  $W = W_0 W_1 \dots W_{31}$ , состоящий из 32 слов (метод построения раундового ключа будет дан позже).

Для работы шифра нужны 8 таблиц  $S_0, S_1, \dots, S_7$  (называемых также S-блоками). Каждая таблица содержит 16 четырехбитовых элементов, нумеруемых с 0 по 15. Будем обозначать через  $S_i[j]$   $j$ -й элемент  $i$ -й таблицы. ГОСТ рекомендует заполнять каждую таблицу различными числами из множества  $\{0, 1, \dots, 15\}$ , переставленными случайным образом. Содержимое таблиц формирует дополнительный секретный параметр шифра, общий для большой группы пользователей. Заметим, что в DES аналогичные S-блоки фиксированы и несекретны.

В шифре используются следующие операции:

- $+$  сложение слов по модулю  $2^{32}$ ;
- $\leftarrow$  циклический сдвиг слова влево на указанное число бит;
- $\oplus$  побитовое «исключающее или» двух слов, т.е. побитовое сложение по модулю 2.

### Алгоритм 8.1. Базовый цикл шифра ГОСТ 28147-89

ВХОД: Блок  $L, R$ , раундовый ключ  $W$ .

ВЫХОД: Преобразованный блок  $L, R$ .

1.     FOR  $i = 0, 1, \dots, 31$  DO
2.          $k \leftarrow R + W_i, \quad k = (k_7 \dots k_0)_{16}$ ;
3.         FOR  $j = 0, 1, \dots, 7$  DO
4.              $k_j \leftarrow S_j[k_j]$ ;
5.          $L \leftarrow L \oplus (k \leftarrow 11)$ ;
6.          $L \longleftrightarrow R$ ;
7.     RETURN  $L, R$ .

(На шаге 4 алгоритма используются отдельные четырехбитовые элементы переменной  $k$ .)

С помощью базового цикла осуществляется шифрование и дешифрование блока. Чтобы зашифровать блок, строим раундовый ключ

$$W = K_0 K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7 K_0 K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7 \\ K_0 K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7 K_6 K_5 K_4 K_3 K_2 K_1 K_0, \quad (8.6)$$

подаем на вход  $X$  и на выходе получаем  $Y$ .

Чтобы дешифровать блок, строим раундовый ключ

$$W = K_0 K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7 K_7 K_6 K_5 K_4 K_3 K_2 K_1 K_0 \\ K_7 K_6 K_5 K_4 K_3 K_2 K_1 K_0 K_7 K_6 K_5 K_4 K_3 K_2 K_1 K_0, \quad (8.7)$$

подаем на вход  $Y$  и на выходе получаем  $X$ .

Программная реализация обычно требует переработки цикла 3 алгоритма 8.1, так как работа с полубайтами неэффективна. Ясно, что то же самое преобразование может быть выполнено с использованием четырех таблиц по 256 байт или двух таблиц по 65536 полуслов. Например, при работе с байтами имеем  $k = (k_3 \cdots k_0)_{256}$ , и шаги 3–4 алгоритма 8.1 переписываются следующим образом:

3.           FOR  $j = 0, 1, 2, 3$  DO
4.            $k_j \leftarrow T_j[k_j]$ .

Таблицы  $T_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , вычисляются предварительно из S-боксов:

$$\text{FOR } i = 0, 1, \dots, 255 \text{ DO} \\ T_j[i] \leftarrow S_{2j}[i \bmod 16] + 16S_{2j+1}[i \operatorname{div} 16].$$

ГОСТ ничего не говорит о правилах формирования ключевой информации, кроме требования, чтобы каждый S-блок содержал перестановку различных чисел. В то же время ясно, что, например, нулевой ключ или тривиально заданные S-боксы (отображающие  $k$  в себя) не обеспечивают секретности шифра.

## Шифр RC6

Это один из новейших шифров, предложенный Ривестом (Ronald Rivest) в 1998 году. Этот шифр принимал участие в конкурсе на новый стандарт блочного шифра США, проводимом в 1999–2001 годах, прошел в финал, но по совокупности таких показателей, как быстродействие, удобство использования и т.п., уступил первое место другому шифру (Rijndael). Тем не менее, активные исследования RC6 в ходе проведения конкурса не выявили в нем каких-либо слабых мест, и данный шифр высоко оценивается многими специалистами.

В RC6 пользователь задает размер слова ( $w$ ) 16, 32 или 64 бита, количество раундов ( $r$ ), длину ключа ( $l$ ) от 0 до 255 байт. Размер блока всегда составляет четыре слова. Конкретный вариант шифра обозначается по схеме RC6- $w/r/l$ . Например, RC6-32/20/16 — размер блока 128 бит, длина ключа 128 бит, 20 раундов (такой шифр исследовался в качестве кандидата на стандарт США).

В шифре используются следующие операции:

- $+$ ,  $-$  сложение и вычитание слов по модулю  $2^w$ ;
- $*$  умножение по модулю  $2^w$ ;
- $\oplus$  побитовое сложение по модулю 2 или, что то же самое, «исключающее или» двух слов;
- $\leftrightarrow$ ,  $\hookrightarrow$  циклические сдвиги слова влево или вправо на указанное число бит (заметим, что при длине слова  $w$  бит величина циклического сдвига фактически приводится по модулю  $w$ , причем, как правило, это приведение выполняется автоматически на машинном уровне, т.е. не требует дополнительных вычислений — процессор просто использует младшие  $\log w$  бит числа, задающего величину сдвига).

Шифрование и дешифрование блока данных производится с использованием одного и того же раундового ключа  $W$  длиной  $2r + 4$  слова (нумерация слов с нуля), получаемого из секретного ключа  $K$  (метод формирования раундового ключа будет рассмотрен ниже).

**Алгоритм 8.2.** RC6: ШИФРОВАНИЕ БЛОКА ДАННЫХ

ВХОД: Блок из четырех слов  $(a, b, c, d)$ , раундовый ключ  $W$ .

ВЫХОД: Зашифрованный блок  $(a, b, c, d)$ .

1.  $b \leftarrow b + W_0, d \leftarrow d + W_1;$
2. FOR  $i = 1, 2, \dots, r$  DO
3.  $t \leftarrow (b * (2b + 1)) \leftrightarrow \log w,$
4.  $u \leftarrow (d * (2d + 1)) \leftrightarrow \log w,$
5.  $a \leftarrow ((a \oplus t) \leftrightarrow u) + W_{2i},$
6.  $c \leftarrow ((c \oplus u) \leftrightarrow t) + W_{2i+1},$
7.  $(a, b, c, d) \leftarrow (b, c, d, a);$
8.  $a \leftarrow a + W_{2r+2}, c \leftarrow c + W_{2r+3};$
9. RETURN  $(a, b, c, d).$

Для дешифрования просто «прокручиваем» процесс в обратном порядке.

**Алгоритм 8.3.** RC6: ДЕШИФРОВАНИЕ БЛОКА ДАННЫХ

ВХОД: Блок из четырех слов  $(a, b, c, d)$ , раундовый ключ  $W$ .

ВЫХОД: Дешифрованный блок  $(a, b, c, d)$ .

1.  $c \leftarrow c - W_{2r+3}, a \leftarrow a - W_{2r+2};$
2. FOR  $i = r, r - 1, \dots, 1$  DO
3.  $(a, b, c, d) \leftarrow (d, a, b, c),$
4.  $t \leftarrow (b * (2b + 1)) \leftrightarrow \log w,$
5.  $u \leftarrow (d * (2d + 1)) \leftrightarrow \log w,$
6.  $a \leftarrow ((a - W_{2i}) \hookrightarrow u) \oplus t,$
7.  $c \leftarrow ((c - W_{2i+1}) \hookrightarrow t) \oplus u;$
8.  $d \leftarrow d - W_1, b \leftarrow b - W_0;$
9. RETURN  $(a, b, c, d).$

Расписание раундового ключа в RC6 более сложно, чем в ГОСТ 28147-89, что характерно для большинства современных шифров. По сути дела речь идет о развертывании секретного ключа  $K$  в более длинную псевдослучайную последовательность  $W$  с целью затруднить криптоанализ шифра.

Обозначим через  $s$  число слов в ключе,  $s = 8l/w$ . Посредством нижеприведенного алгоритма секретный ключ  $K$  разворачивается в

раундовый ключ  $W$ :

$$K_0 K_1 \cdots K_{c-1} \longrightarrow W_0 W_1 \cdots W_{2r+3}.$$

В алгоритме используются «магические» числа:  $P_w$  — первые  $w$  бит двоичного разложения числа  $e - 2$ , где  $e$  — число Эйлера, служащее основанием натурального логарифма, и  $Q_w$  — первые  $w$  бит двоичного разложения числа  $\phi - 1$ , где  $\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$  — «золотое сечение». В табл. 8.1 значения  $P_w$  и  $Q_w$  приведены в шестнадцатиричной системе счисления для различных длин слов  $w$ .

#### Алгоритм 8.4. RC6: ФОРМИРОВАНИЕ РАУНДОВОГО КЛЮЧА

ВХОД: Секретный ключ  $K$ .

ВЫХОД: Раундовый ключ  $W$ .

1.  $W_0 \leftarrow P_w$ ;
2. FOR  $i = 1, 2, \dots, 2r + 3$  DO  $W_i \leftarrow W_{i-1} + Q_w$ ;
3.  $a \leftarrow 0, b \leftarrow 0, i \leftarrow 0, j \leftarrow 0$ ;
4.  $k \leftarrow 3 \max(c, 2r + 4)$ ;
5. DO  $k$  раз
6.  $W_i \leftarrow (W_i + a + b) \leftrightarrow 3, \quad a \leftarrow W_i,$
7.  $K_j \leftarrow (K_j + a + b) \leftrightarrow (a + b), \quad b \leftarrow K_j,$
8.  $i \leftarrow i + 1 \bmod 2r + 4, \quad j \leftarrow j + 1 \bmod c$ ;
9. RETURN  $W$ .

Т а б л и ц а 8.1. «Магические» числа для RC6

$w$	16	32	64
$P_w$	b7e1	b7e15163	b7e15162 8aed2a6b
$Q_w$	9e37	9e3779b9	9e3779b9 7f4a7c15

Рассмотрим кратко основные идеи построения алгоритма шифрования RC6. Заметим прежде всего, что, как и в шифрах DES и ГОСТ 28147-89, в каждом раунде RC6 одна половина блока используется для шифрования другой. Действительно, значение переменных  $t$  и  $u$  (строки 3–4 алгоритма 8.2) определяется только словами  $b$  и  $d$  соответственно. Затем эти переменные используются для модификации слов  $a$  и  $c$  перед сложением с элементами ключа (строки 5–6). Таким образом, в  $a$  и  $c$  вносится зависимость от  $b$  и  $d$ . В следующем раунде пары  $a, c$  и  $b, d$  меняются ролями, причем  $b$  и  $d$

переставляются между собой (строка 7 алгоритма). Вследствие такой структуры шифра количество раундов должно быть четным.

Выбранная для вычисления переменных  $t$  и  $u$  функция вида  $f(x) = (2x^2 + x) \bmod 2^w$  характеризуется сильной зависимостью старших бит своего значения от всех бит аргумента. Именно старшие биты  $f$  должны определять величину сдвига в строках 5–6 алгоритма. Поэтому необходимое их количество переносится в младшие разряды  $t$  и  $u$  посредством вращения  $\leftarrow \log w$ . При модификации  $a$  и  $c$  использование «исключающего или» достаточно традиционно, тогда как зависимое от данных вращение (операция  $\leftarrow$ ) — характерная особенность RC6 (заимствованная у его более простого предшественника RC5).

Строки 1 и 8 алгоритма 8.2 скрывают значения слов, которые не изменялись в ходе первого и последнего раундов.

Рекомендуемое количество раундов  $r = 20$  связано с результатами исследования стойкости шифра по отношению к дифференциальному и линейному криптоанализу.

В ходе исследований шифра слабых ключей не обнаружено, т.е. любой ключ, даже нулевой, обеспечивает заявляемую высокую стойкость шифра. Предполагается, что для RC6 не существует алгоритма взлома, лучшего, чем перебор ключей.

## Шифр Rijndael (AES)

Авторами шифра Rijndael (читается «Рейндал») являются бельгийские специалисты В. Рейман (Vincent Rijmen) и Й. Даман (Joan Daemen). Этот шифр победил в упомянутом выше конкурсе AES и в 2001 году был принят в качестве нового стандарта США. Возможно, он будет играть такую же важную роль в практической криптографии, какая на протяжении десятилетий принадлежала DES. Rijndael заметно сложнее для описания, чем RC6 и ГОСТ 28147-89, хотя его компьютерная реализация достаточно эффективна. Мы представим только основную идею построения шифра. Детальное описание и примеры реализации Rijndael даны в [21, 25].

Шифр Rijndael/AES характеризуется размером блока 128 бит, длиной ключа 128, 192 или 256 бит и количеством раундов 10, 12 или 14 в зависимости от длины ключа.

Договоримся об основных обозначениях. Под словом будем понимать последовательность из четырех байт (32 бита). Байты в слове



нумеруются с 0 (младший байт) по 3 (старший байт). Блок данных состоит из четырех слов, которые нумеруются также с 0 по 3. Для упрощения обозначений условимся, что номера байтов в слове и слов в блоке всегда приводятся по модулю 4 без явного указания на это. Блок данных рассматривается как матрица размером  $4 \times 4$  байта, причем слова соответствуют не строкам (как это обычно принято), а столбцам. Например  $X_{2,3}$  обозначает второй байт третьего слова блока  $X$ . Однако запись с одним индексом обозначает слово, например,  $X_3$  — третье слово блока. Мы будем следовать этому соглашению, чтобы не менять связанной с ним терминологии Rijndael.

Для выполнения преобразований в блоке используется раундовый ключ  $W$ , получаемый из секретного ключа  $K$ . Размер секретного ключа  $l$  определяет общее число раундов шифра  $r$ :

$$l = 128 \Rightarrow r = 10,$$

$$l = 192 \Rightarrow r = 12,$$

$$l = 256 \Rightarrow r = 14.$$

Раундовый ключ состоит из блоков (по 128 бит), количество которых равно числу раундов плюс 1,

$$W = W_0, W_1, \dots, W_r.$$

В основу разработки Rijndael были положены три критерия: стойкость по отношению ко всем известным атакам, скорость и компактность кода, простота дизайна. В отличие от предыдущих рассмотренных нами шифров, Rijndael не использует какой-либо аналог структуры Фейстела. Каждый раунд состоит из трех различных обратимых преобразований, называемых слоями:

- 1) линейный смешивающий слой гарантирует высокую степень взаимопроникновения символов блока для маскировки статистических связей;
- 2) нелинейный слой реализован с помощью S-боксов, имеющих оптимальную нелинейность, и предотвращает возможность использования дифференциального, линейного и других современных методов криптоанализа;
- 3) слой сложения с ключом выполняет непосредственно шифрование.

Шифр начинается и заканчивается сложением с ключом. Это позволяет закрыть вход первого раунда при атаке по известному тексту и сделать криптографически значимым результат последнего раунда.

**Алгоритм 8.5.** Rijndael: шифрование блока

ВХОД: Блок  $X$ , раундовый ключ  $W$ .

ВЫХОД: Блок  $Y$ .

1.  $Y \leftarrow X \oplus W_0$ ;
2. FOR  $i = 1, 2, \dots, r - 1$  DO
3.      $Y \leftarrow \text{SubBytes}(Y)$ ,
4.      $Y \leftarrow \text{ShiftRows}(Y)$ ,
5.      $Y \leftarrow \text{MixColumns}(Y)$ ,
6.      $Y \leftarrow Y \oplus W_i$ ;
7.  $Y \leftarrow \text{SubBytes}(Y)$ ,
8.  $Y \leftarrow \text{ShiftRows}(Y)$ ,
9.  $Y \leftarrow Y \oplus W_r$ ;
10. RETURN  $Y$ .

Процедура SubBytes (замена байтов) реализует слой нелинейного преобразования. Две другие процедуры ShiftRows (сдвиг строк) и MixColumns (перемешивание столбцов) представляют линейный смешивающий слой. Слой сложения с ключом реализован с помощью побитового «исключающего или»  $\oplus$ .

Обратим внимание на то, что в последнем раунде отсутствует преобразование MixColumns. На первый взгляд это кажется странным решением, ухудшающим структуру шифра. Но это не так. Обозначим шаги с 3 по 6 алгоритма соответственно через В, R, С и К, и запишем всю последовательность действий в виде линейной цепочки:

$$\text{KBRCCKBRCK} \dots \text{BRCKBRK}. \quad (8.8)$$

Чтобы расшифровать блок, нужно выполнить все действия в обратном порядке, используя обратные операции. Как будет показано ниже, преобразования В и R можно поменять местами без изменения результата, преобразования С и К также можно поменять местами при условии некоторого изменения раундового ключа. При выполнении такой перестановки последовательность (8.8) запишется в виде

$$\text{KRBKCRBK} \dots \text{RBKCRBK}. \quad (8.9)$$

Последовательность (8.9), прочитанная справа налево, теперь точно совпадает с (8.8). Это означает, что блок можно дешифровать, используя ту же последовательность действий, что и при его шифровании. Здесь важно то, что, как будет показано ниже, последовательность действий BRCK может быть эффективно реализована с помощью табличных вычислений, причем все необходимые таблицы задаются константно, т.е. не зависят ни от ключа, ни от данных. Сейчас мы перейдем непосредственно к описанию преобразований BRC, хотя в интересах практической реализации шифра Rijndael можно просто использовать табличные алгоритмы, приведенные ниже, и не вдаваться в подробности выполнения преобразований.

Чтобы понять, как выполняются преобразования блока в шифре Rijndael, необходимо освоить арифметику полиномов (см., например, [9]).

Каждый байт данных рассматривается как полином с коэффициентами 0 и 1, действия с коэффициентами производятся по модулю 2. Например,

$$\begin{aligned} 10010011 &= x^7 + x^4 + x + 1, \\ 10010011 + 01010001 &= 11000010, \\ 10010011 \cdot 00000010 &= 100100110. \end{aligned}$$

В шифре Rijndael полиномы-байты умножаются по модулю полинома  $m(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$ . Например,

$$10010011 \cdot 00000010 \bmod m(x) = 100100110 - 100011011 = 000111101$$

(вычитание по модулю 2 эквивалентно сложению). Выбранный полином  $m(x)$  нельзя представить как произведение других полиномов с двоичными коэффициентами (это аналог простого числа в арифметике полиномов). В результате любой полином  $a(x) \neq 0$  имеет инверсию, т.е. полином  $a^{-1}(x)$ , такой, что  $a(x) \cdot a^{-1}(x) \bmod m(x) = 1$  (инверсия вычисляется с помощью обобщенного алгоритма Евклида, в котором все числа заменены на полиномы). На языке теории групп говорят, что в этом случае полиномы-байты образуют поле  $\mathbb{F}_{2^8}$ .

Каждое слово данных представляется уже как полином с коэффициентами в  $\mathbb{F}_{2^8}$ . Например,

$$0x7500a302 = (0x75)x^3 + (0xa3)x + 2$$

(префикс 0x означает запись числа в шестнадцатичной системе).

Преобразование  $\text{SubBytes}(Y)$  действует независимо на каждый байт  $b$  в  $Y$ :

$$\begin{aligned} b(x) &\leftarrow b^{-1}(x) \bmod m(x) \quad (0 \leftarrow 0), \\ b(x) &\leftarrow ((x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 1)b(x) + (x^7 + x^6 + x^2 + x)) \bmod (x^8 + 1). \end{aligned}$$

Результаты этого преобразования, заранее подсчитанные для каждого байта от 0 до 255, заносятся в таблицу  $S$ . Тогда преобразование  $\text{SubBytes}(Y)$  сводится к выполнению для каждого байта  $b$  в  $Y$  операции

$$b \leftarrow S[b].$$

Содержимое таблицы  $S$  в явном виде приведено в [21].

Преобразование  $\text{ShiftRows}(Y)$  действует на каждую строку  $r_i$  в  $Y$ , т.е. на  $i$ -ю ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) последовательность байт слов блока, по правилу

$$r_i \leftarrow r_i \leftrightarrow i$$

(операция  $\leftrightarrow$  означает циклический сдвиг влево на указанное число байт).

Преобразование  $\text{MixColumns}(Y)$  действует на каждый столбец  $c_i$  в блоке  $Y$ , т.е. на каждое машинное слово,  $i = 0, 1, 2, 3$ , по правилу

$$c_i(x) \leftarrow a(x) \cdot c_i(x) \bmod (x^4 + 1),$$

где  $a(x) = 3x^3 + x^2 + x + 2$ . Эта операция может быть записана в матричном виде

$$c_i = \begin{bmatrix} c_{0,i} \\ c_{1,i} \\ c_{2,i} \\ c_{3,i} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{0,i} \\ c_{1,i} \\ c_{2,i} \\ c_{3,i} \end{bmatrix}. \quad (8.10)$$

Очевидно, что операцию  $\text{SubBytes}$  можно поменять местами с  $\text{ShiftRows}$ , не изменяя результат, так как эти преобразования воздействуют только на индивидуальные байты. Далее, используя дистрибутивность умножения полиномов можем записать

$$\text{MixColumns}(Y \oplus W_i) = \text{MixColumns}(Y) \oplus \text{MixColumns}(W_i).$$

Таким образом,  $\text{MixColumns}$  и сложение с ключом также можно поменять местами при условии, что соответствующие блоки раундового ключа (кроме первого и последнего) были предварительно подвергнуты обратному преобразованию  $\text{MixColumns}^{-1}(W_i)$ . Все это

служит обоснованием идентичности последовательностей действий (8.8) и (8.9) с модифицированным ключом. В результате получаем следующий алгоритм обратного шифра.

**Алгоритм 8.6.** RIJNDAEL: ДЕШИФРОВАНИЕ БЛОКА

ВХОД: Блок  $Y$ , раундовый ключ  $W$ .

ВЫХОД: Блок  $X$ .

1.  $X \leftarrow Y \oplus W_r$ ;
2. FOR  $i = r - 1, r - 2, \dots, 1$  DO
3.      $X \leftarrow \text{SubBytes}^{-1}(X)$ ,
4.      $X \leftarrow \text{ShiftRows}^{-1}(X)$ ,
5.      $X \leftarrow \text{MixColumns}^{-1}(X)$ ,
6.      $X \leftarrow X \oplus W_i$ ;
7.  $X \leftarrow \text{SubBytes}^{-1}(X)$ ,
8.  $X \leftarrow \text{ShiftRows}^{-1}(X)$ ,
9.  $X \leftarrow X \oplus W_0$ ;
10. RETURN  $X$ .

Обратные преобразования, использованные в алгоритме, определяются естественным образом.

Преобразование  $\text{SubBytes}^{-1}(X)$  действует на каждый байт  $b$  в  $X$ :

$$b(x) \leftarrow (b(x) - (x^7 + x^6 + x^2 + x))(x^7 + x^5 + x^2) \bmod (x^8 + 1),$$

$$b(x) \leftarrow b^{-1}(x) \bmod m(x) \quad (0 \leftarrow 0),$$

где  $x^7 + x^5 + x^2 = (x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 1)^{-1} \bmod (x^8 + 1)$ . Результаты этого преобразования заносятся в таблицу  $S^{-1}$ . Содержимое таблицы  $S^{-1}$  в явном виде приведено в [21].

Преобразование  $\text{ShiftRows}^{-1}(X)$  действует на каждую строку  $r_i$  в  $X$  по правилу

$$r_i \leftarrow r_i \hookrightarrow i$$

(операция  $\hookrightarrow$  означает циклический сдвиг вправо на указанное число байт).

Преобразование  $\text{MixColumns}^{-1}(X)$  действует на каждый столбец  $c_i$  в блоке  $X$  по правилу

$$c_i(x) \leftarrow a^{-1}(x) \cdot c_i(x) \bmod (x^4 + 1),$$

где  $a^{-1}(x) = 11x^3 + 13x^2 + 9x + 14$ . То же самое в матричной записи выглядит так:

$$c_i = \begin{bmatrix} c_{0,i} \\ c_{1,i} \\ c_{2,i} \\ c_{3,i} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 14 & 11 & 13 & 09 \\ 09 & 14 & 11 & 13 \\ 13 & 09 & 14 & 11 \\ 11 & 13 & 09 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{0,i} \\ c_{1,i} \\ c_{2,i} \\ c_{3,i} \end{bmatrix}. \quad (8.11)$$

Теперь перейдем к эффективной табличной реализации шифра на компьютере с длиной слова 32 бита. Обозначим текущее состояние блока через  $U$ . Последовательность шагов 3–6 алгоритма шифрования переводит блок данных из состояния  $U$  в новое состояние  $Y$ . С учетом характера преобразований, выполняемых на шагах 3–6, мы можем записать, как вычисляется каждое  $j$ -е слово (т.е. каждый столбец) в  $Y$ :

$$\begin{bmatrix} Y_{0,j} \\ Y_{1,j} \\ Y_{2,j} \\ Y_{3,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S[U_{0,j}] \\ S[U_{1,j-1}] \\ S[U_{2,j-2}] \\ S[U_{3,j-3}] \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} W_{i,0,j} \\ W_{i,1,j} \\ W_{i,2,j} \\ W_{i,3,j} \end{bmatrix}$$

(самый правый столбец в выражении — это  $j$ -е слово  $W_i$ ). Раскрывая матричное умножение, получаем

$$Y_j = S[U_{0,j}] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \oplus S[U_{1,j-1}] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus S[U_{2,j-2}] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \\ \oplus S[U_{3,j-3}] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \oplus W_{i,j}.$$

Определим четыре таблицы

$$T_0[b] = \begin{bmatrix} S[b] \cdot 2 \\ S[b] \\ S[b] \\ S[b] \cdot 3 \end{bmatrix}, \quad T_1[b] = \begin{bmatrix} S[b] \cdot 3 \\ S[b] \cdot 2 \\ S[b] \\ S[b] \end{bmatrix}, \\ T_2[b] = \begin{bmatrix} S[b] \\ S[b] \cdot 3 \\ S[b] \cdot 2 \\ S[b] \end{bmatrix}, \quad T_3[b] = \begin{bmatrix} S[b] \\ S[b] \\ S[b] \cdot 3 \\ S[b] \cdot 2 \end{bmatrix}.$$

Каждая таблица строится для  $b$ , пробегающего значения от 0 до 255, и состоит из 256 четырехбайтовых слов. Операция умножения при вычислении таблиц — это умножение полиномов по модулю  $m(x)$ . Таблицы  $T$  не зависят ни от ключа, ни от данных и могут быть сформированы заранее. С использованием этих таблиц  $j$ -е слово блока вычисляется следующим образом:

$$Y_j = T_0[U_{0,j}] \oplus T_1[U_{1,j-1}] \oplus T_2[U_{2,j-2}] \oplus T_3[U_{3,j-3}] \oplus W_{i,j}.$$

Сейчас мы готовы записать алгоритм шифрования в табличной форме.

**Алгоритм 8.7.** RIJNDAEL: ШИФРОВАНИЕ БЛОКА  
(БЫСТРЫЙ ВАРИАНТ)

ВХОД: Блок  $X$ , раундовый ключ  $W$ .

ВЫХОД: Блок  $Y$ .

1.  $U \leftarrow X \oplus W_0$ ;
2. FOR  $i = 1, 2, \dots, r - 1$  DO
3.     FOR  $j = 0, 1, 2, 3$  DO
4.          $Y_j \leftarrow T_0[U_{0,j}] \oplus T_1[U_{1,j-1}] \oplus T_2[U_{2,j-2}] \oplus$   
 $\oplus T_3[U_{3,j-3}] \oplus W_{i,j}$ ;
5.      $U \leftarrow Y$ ;
6.     FOR  $i = 0, 1, 2, 3$  DO
7.         FOR  $j = 0, 1, 2, 3$  DO
8.              $Y_{i,j} \leftarrow S[U_{i,j-i}]$ ;
9.      $Y \leftarrow Y \oplus W_r$ ;
10. RETURN  $Y$ .

Заметим, что S-боксы в большом количестве содержатся в таблицах  $T$ . Например, в качестве S-бокса на шаге 8 можно использовать младшие байты таблицы  $T_2$ .

Чтобы построить табличный алгоритм для обратного шифра, нужно повторить рассуждения, приведенные выше, по отношению к обратным преобразованиям. В результате мы получаем обратные

таблицы  $T^{-1}$ :

$$T_0^{-1}[b] = \begin{bmatrix} S^{-1}[b] \cdot 14 \\ S^{-1}[b] \cdot 9 \\ S^{-1}[b] \cdot 13 \\ S^{-1}[b] \cdot 11 \end{bmatrix}, \quad T_1^{-1}[b] = \begin{bmatrix} S^{-1}[b] \cdot 11 \\ S^{-1}[b] \cdot 14 \\ S^{-1}[b] \cdot 9 \\ S^{-1}[b] \cdot 13 \end{bmatrix},$$

$$T_2^{-1}[b] = \begin{bmatrix} S^{-1}[b] \cdot 13 \\ S^{-1}[b] \cdot 11 \\ S^{-1}[b] \cdot 14 \\ S^{-1}[b] \cdot 9 \end{bmatrix}, \quad T_3^{-1}[b] = \begin{bmatrix} S^{-1}[b] \cdot 9 \\ S^{-1}[b] \cdot 13 \\ S^{-1}[b] \cdot 11 \\ S^{-1}[b] \cdot 14 \end{bmatrix}.$$

**Алгоритм 8.8.** RIJNDAEL: ДЕШИФРОВАНИЕ БЛОКА  
(БЫСТРЫЙ ВАРИАНТ)

ВХОД: Блок  $Y$ , раундовый ключ  $W$ .

ВЫХОД: Блок  $X$ .

1.  $U \leftarrow Y \oplus W_0$ ;
2. FOR  $i = r - 1, r - 2, \dots, 1$  DO
3.     FOR  $j = 0, 1, 2, 3$  DO
4.          $X_j \leftarrow T_0^{-1}[U_{0,j}] \oplus T_1^{-1}[U_{1,j+1}] \oplus T_2^{-1}[U_{2,j+2}] \oplus$   
 $\oplus T_3^{-1}[U_{3,j+3}] \oplus W_{i,j}$ ;
5.      $U \leftarrow X$ ;
6. FOR  $i = 0, 1, 2, 3$  DO
7.     FOR  $j = 0, 1, 2, 3$  DO
8.          $X_{i,j} \leftarrow S^{-1}[U_{i,j+i}]$ ;
9.  $X \leftarrow X \oplus W_r$ ;
10. RETURN  $X$ .

Последнее, что нам осталось рассмотреть, это процесс формирования раундового ключа. В прямом и обратном шифре нам было удобно делить раундовый ключ  $W$  на блоки по четыре слова. Однако формирование ключа проходит в пословном режиме, поэтому условимся обозначать буквой  $w$  с индексом отдельное слово в  $W$ , нумеруя слова с нуля. Как следует из описания шифра, раундовый ключ  $W$  должен состоять из  $r + 1$  блоков, где  $r$  — количество раундов в шифре. Поэтому количество слов в  $W$  равно  $4(r + 1)$ . Число же слов в секретном ключе  $K$ , которое будем обозначать через  $s$ , равно 4, 6 или 8. Вначале опишем алгоритм построения  $W$ , затем дадим некоторые пояснения.



**Алгоритм 8.9.** RIJNDAEL: ФОРМИРОВАНИЕ РАУНДОВОГО КЛЮЧА

ВХОД: Секретный ключ  $K$  из  $c$  слов.

ВЫХОД: Раундовый ключ  $W$  из  $4(r+1)$  слов.

```

1.    $W \leftarrow K$  ( $c$  слов);
2.   FOR  $i = c, c+1, \dots, 4(r+1)-1$  DO
3.        $t \leftarrow w_{i-1}$ ;
4.       IF  $i \bmod c = 0$  THEN
5.            $t \leftarrow \text{SubWord}(\text{RotWord}(t)) \oplus \text{Rcon}[i \text{ div } c]$ ;
6.       ELSE IF  $c = 8$  AND  $i \bmod c = 4$  THEN
7.            $t \leftarrow \text{SubWord}(t)$ ;
8.        $w_i \leftarrow w_{i-c} \oplus t$ ;
9.   RETURN  $w_0 \dots w_{4(r+1)-1}$ .
```

В данном алгоритме  $\text{SubWord}(t)$  — функция, применяющая S-бокс шифра к каждому байту слова  $t$

$$[t_0, t_1, t_2, t_3] \longrightarrow [S[t_1], S[t_2], S[t_3], S[t_0]].$$

Преобразование  $\text{RotWord}(t)$  осуществляет циклический сдвиг слова  $t$  на один байт влево

$$[t_0, t_1, t_2, t_3] \longrightarrow [t_1, t_2, t_3, t_0].$$

Массив раундовых констант  $\text{Rcon}$  состоит из слов

$$\text{Rcon}[i] = [y_i, 0, 0, 0],$$

где

$$y_i = x^{i-1} \bmod m(x).$$

Выбранный метод построения раундового ключа должен способствовать решению следующих задач:

- 1) затруднить атаки на шифр при частично известном секретном ключе или при использовании зависимых (связанных общими правилами построения) ключей;
- 2) устранить имеющиеся симметрии внутри раунда шифра и между раундами (для этого используется массив раундовых констант  $\text{Rcon}$ ).

Как отмечалось при рассмотрении обратного шифра, чтобы получить раундовый ключ для дешифрования, необходимо подвергнуть преобразованию  $\text{MixColumns}^{-1}$  блоки  $W$  с первого по предпоследний.

### 8.3. Основные режимы функционирования блочных шифров

Блочные шифры применяются для решения многих задач криптографии. В этом разделе мы рассмотрим основные режимы их использования.

В предыдущем разделе были даны примеры реальных блочных шифров. Теперь мы можем думать о (идеализированном) блочном шифре, как о преобразовании входного блока  $X$  в выходной блок  $Y$  с участием секретного ключа  $K$ ,

$$Y = E_K(X),$$

причем это преобразование должно иметь следующие свойства:

- 1) при известном  $Y$ , но неизвестном  $K$  практически невозможно узнать  $X$ ;
- 2) при произвольных известных  $X$  и  $Y$ , но неизвестном  $K$  практически невозможно узнать  $K$ .

Вначале рассмотрим классическую задачу шифрования сообщений при помощи блочных шифров.

#### Режим ECB

Название режима ECB (Electronic CodeBook) можно перевести как электронная кодовая книга.

Сообщение  $X$  разбивается на блоки  $X = X_1, X_2, \dots, X_t$ . Каждый блок шифруется блочным шифром

$$Y_i = E_K(X_i), \quad 1 \leq i \leq t.$$

Получаем зашифрованное сообщение  $Y = Y_1, Y_2, \dots, Y_t$ . Дешифрование выполняется по правилу

$$X_i = E_K^{-1}(Y_i), \quad 1 \leq i \leq t.$$

Нетрудно видеть, что дешифрование сообщения можно производить, выбирая блоки шифротекста в произвольном порядке. Такой режим удобен во многих реальных ситуациях. Например, можно работать с базой данных, хранящейся в зашифрованном виде. Однако при таком использовании одинаковые записи будут зашифрованы одинаково. Говорят, что в режиме ЕСВ шифр сохраняет «образ данных», т.е. некий «рисунок» или шаблон, характерный для данных. Это может дать некоторую информацию противнику. Например, если количество *различных* записей в базе данных невелико (что нередко случается), то противник может составить словарь шифротекстов и вскрыть базу на основе частотного анализа. Заметим, что ему в этом случае не понадобится вскрывать сам шифр.

Некоторые авторы рекомендуют использовать режим ЕСВ только в случаях, когда размер отдельного элемента данных в сообщении, к которому требуется осуществлять непосредственный (прямой) доступ, меньше размера блока. Остаток блока, свободный от данных, рекомендуется заполнять случайно выбираемыми битами. Тогда даже одинаковые элементы данных будут иметь разные шифротексты. При дешифровании биты заполнения просто отбрасываются.

Если размер элемента данных превышает размер блока, то часто рекомендуют использовать режим СВС.

### Режим СВС

Название режима СВС (Cipher-Block Chaining) переводится как сцепление блоков шифра.

Зашифрованное сообщение получается по следующему правилу:

$$Y_i = E_K(X_i \oplus Y_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq t,$$

т.е. каждый последующий блок открытого текста предварительно закрывается предыдущим зашифрованным блоком. Слово  $Y_0$  должно быть определено заранее и известно при шифровании и дешифровании. Полученное зашифрованное сообщение можно дешифровать следующим образом:

$$X_i = Y_{i-1} \oplus E_K^{-1}(Y_i), \quad 1 \leq i \leq t.$$

Мы получаем шифротекст, в котором каждый следующий блок зависит от предыдущих. Данный режим разрушает «образ данных».

Даже если все блоки  $X$  идентичны, шифротекст будет состоять из различных блоков  $Y$ . Этот режим предпочтителен при шифровании сообщений, размер которых превышает размер блока. Однако дешифровать сообщение можно только последовательно, начиная с первого блока.

## 8.4. Потокковые шифры

В главе 7 мы рассмотрели шифр Вернама и установили, что он является совершенно секретным, т.е. при его использовании противник, перехвативший зашифрованное сообщение, не получает никакой информации об исходном сообщении. В шифре Вернама зашифрованное сообщение  $y_1, y_2, \dots, y_k$  получается из исходного сообщения  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и ключа  $z_1, z_2, \dots, z_k$  при помощи операции шифрования, задаваемой равенством

$$y_i = x_i \oplus z_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (8.12)$$

Мы видели, что данный шифр совершенен только в том случае, если ключ  $z_1, z_2, \dots, z_k$  образован из независимых и равновероятных символов и используется только один раз. Это приводит к необходимости генерировать случайные последовательности очень большого объема и передавать их по закрытым каналам связи, что весьма затруднительно. Поэтому давно была высказана идея использовать в качестве ключа последовательности не случайные, а порожденные при помощи генераторов псевдослучайных чисел. В этом случае в качестве секретного ключа используется начальное значение или состояние генератора. Однако надо четко осознавать, что в этом случае система уже не будет совершенно секретной. Максимум на что мы можем надеяться, это то, что для раскрытия этой системы потребуется очень много времени (например, нужно будет выполнить перебор всех возможных начальных состояний генератора). В качестве возмещения за потерю совершенности мы получаем возможность использовать короткие (обычно несколько сотен бит) секретные ключи, которые значительно проще распределять и хранить (а при использовании систем с открытым ключом их можно и вычислять).

**Определение 8.1.** Шифр, построенный на основе (8.12), где в

качестве  $z_1, z_2, \dots, z_k$  используется псевдослучайная последовательность, называется *потокowym шифром* (stream cipher).

Как правило, исходное сообщение и ключевая последовательность представляют собой независимые потоки бит. Так как шифрующее (и дешифрующее) преобразование для всех потоковых шифров одно и то же, они различаются только способом построения генераторов псевдослучайных чисел. Действительно, чтобы из шифротекста  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , полученного по формуле (8.12), восстановить сообщение  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , необходимо сгенерировать точно такую же последовательность  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , что и при шифровании, и использовать для дешифрования формулу

$$x_i = y_i \oplus z_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (8.13)$$

**Пример 8.1.** Один из самых простых генераторов псевдослучайных чисел (линейный конгруэнтный генератор) работает по схеме

$$z_{i+1} = (az_i + b) \bmod c, \quad (8.14)$$

где  $a, b, c$  — некоторые константы, а  $z_{i+1}$  — очередное псевдослучайное число, вычисляемое по предыдущему  $z_i$ . Обязательно задается начальное значение  $z_0$ . Возьмем в качестве примера  $a = 5$ ,  $b = 12$ ,  $c = 23$ , и пусть  $z_0 = 4$ . Вычислим несколько элементов последовательности:

$$\begin{aligned} z_1 &= (4 \cdot 5 + 12) \bmod 23 = 9, \\ z_2 &= (9 \cdot 5 + 12) \bmod 23 = 11, \\ z_3 &= (11 \cdot 5 + 12) \bmod 23 = 21, \\ z_4 &= (21 \cdot 5 + 12) \bmod 23 = 2, \\ z_5 &= (2 \cdot 5 + 12) \bmod 23 = 22, \\ z_6 &= (22 \cdot 5 + 12) \bmod 23 = 7, \\ z_7 &= (7 \cdot 5 + 12) \bmod 23 = 1. \end{aligned}$$

Полученная последовательность внешне выглядит как довольно случайная.  $\square$

Для использования в криптографических целях генератор должен удовлетворять следующим основным требованиям:

- 1) период последовательности должен быть очень большой;

- 2) порождаемая последовательность должна быть «почти» неотличима от действительно случайной, в частности, вычисление числа  $z_{i+1}$  по известным предыдущим элементам последовательности без знания ключа должно быть трудной, практически нерешаемой задачей.

Рассмотренный выше линейный конгруэнтный генератор совершенно не годится для криптографических целей, так как известны простые алгоритмы, позволяющие полностью восстановить параметры генератора всего по нескольким элементам порождаемой им последовательности.

В качестве примеров криптостойких генераторов псевдослучайных чисел мы рассмотрим режимы OFB и CTR блочных шифров и алгоритм RC4.

### Режим OFB блочного шифра

Название режима OFB (Output FeedBack) переводится как обратная связь по выходу. В этом режиме блочный шифр на основе секретного ключа  $K$  и некоторого инициализирующего вектора  $Y_0$  формирует псевдослучайную последовательность  $r$ -битовых чисел  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , которая может использоваться в (8.12) и (8.13) соответственно для шифрования и дешифрования сообщения. Будем считать, как и ранее, что размер блока шифра равен  $n$  бит.

Псевдослучайная последовательность получается по схеме

$$Y_i = E_K(Y_{i-1}),$$

$$z_i = r \text{ старших бит } Y_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

(здесь  $r$ ,  $1 \leq r \leq n$ , — параметр метода).

При использовании стойкого блочного шифра можно получить криптостойкий генератор, отвечающий приведенным выше требованиям. А именно, средняя длина периода псевдослучайной последовательности (при случайно выбранных  $K$  и  $Y_0$ ) составляет примерно  $r2^{n-1}$  бит [28]. Кроме того, псевдослучайная последовательность «непредсказуема» для противника, так как возможность предсказания (вычисления)  $z_{i+1}$  на основе  $z_1, \dots, z_i$  означала бы нестойкость шифра по отношению к атаке по известному тексту. Предсказание  $z_{i+1}$  становится даже более трудной задачей, чем взлом блочного шифра, если  $r < n$  [28].

Обратим внимание на одну особенность, характерную для всех потоковых шифров. Для шифрования каждого отдельного сообщения необходимо использовать разные  $K$  и/или  $Y_0$ . В противном случае несколько сообщений будут шифроваться с помощью одних и тех же последовательностей  $z$ , и такой шифр может быть раскрыт. Поясним суть проблемы. Пусть два сообщения  $u_1, u_2, \dots, u_k$  и  $v_1, v_2, \dots, v_k$  зашифрованы с помощью одной и той же последовательности  $z$ . Тогда шифротексты будут иметь вид

$$u_1 \oplus z_1, u_2 \oplus z_2, \dots, u_k \oplus z_k \quad \text{и} \\ v_1 \oplus z_1, v_2 \oplus z_2, \dots, v_k \oplus z_k.$$

Сложим оба шифротекста и, с учетом равенства  $z_i \oplus z_i = 0$ , получим последовательность

$$u_1 \oplus v_1, u_2 \oplus v_2, \dots, u_k \oplus v_k.$$

Мы получили аналог так называемого «шифра с бегущим ключом», когда один текст шифруется с помощью другого текста, взятого из определенного места определенной книги. Известно, что такой шифр не стоек, хотя использовался в эпоху «донаучной» криптографии [28]. Статистический анализ, основанный на избыточности текстов, позволяет в большинстве случаев достаточно точно восстановить оба сообщения.

Дешифрование сообщений для описанного режима блочного шифра может производиться только с начала, так как невозможно получить произвольный элемент последовательности  $z$ , не вычислив предыдущие. В этом смысле режим аналогичен режиму CBC. Преимущество режима OFB заключается в том, что последовательность  $z$  может быть сформирована заранее для того, чтобы быстро шифровать или дешифровать сообщения с помощью (8.12), (8.13) в момент их поступления. Это может быть актуально для систем, обрабатывающих данные в реальном масштабе времени.

### Режим CTR блочного шифра

Название данного режима происходит от слова CounteR — счетчик. Этот режим очень похож на OFB, но в нем шифруется не предыдущий выход шифра, а просто счетчик, увеличиваемый на каждом

шаге на постоянное число (обычно 1). Точнее, схема выглядит следующим образом:

$$z_i = r \text{ старших бит } E_K(Y_0 + i), \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $r$  — параметр.

При использовании «идеального» блочного шифра режим CTR обеспечивает те же параметры стойкости, что и OFB. Преимущество режима CTR состоит в том, что любой элемент последовательности  $z$  может быть вычислен непосредственно. Это дает возможность шифровать и дешифровать любые фрагменты сообщения независимо друг от друга.

### Алгоритм RC4

Алгоритм RC4, предложенный Ривестом в 1994 году, относится к классу алгоритмов, разработанных специально для потоковых шифров. Генераторы псевдослучайных чисел, построенные с помощью таких алгоритмов, как правило, значительно быстрее генераторов, основанных на блочных шифрах.

Алгоритм RC4 работает с  $n$ -битовыми словами (обычно  $n = 8$ ). Все вычисления проводятся по модулю  $2^n$  (остаток  $x \bmod 2^n$  вычисляется очень быстро путем выделения  $n$  младших бит в  $x$  с помощью логической операции «и»). RC4 использует  $L$ -словный ключ  $K = K_0 K_1 \dots K_{L-1}$  и генерирует последовательность слов  $\bar{z} = z_1 z_2 z_3 \dots$ , конкретный вид которой определяется ключом  $K$ . Состояние генератора задается таблицей  $S$  из  $2^n$  слов и двух переменных  $i$  и  $j$ . В каждый момент времени таблица  $S$  содержит все возможные  $n$ -битовые числа в перемешанном виде. Так как каждый элемент таблицы принимает значения в промежутке  $[0, 2^n - 1]$ , то его можно трактовать двояко: либо как число, либо как номер другого элемента в таблице. Секретный ключ задает только начальное перемешивание чисел в таблице, которое формируется с помощью следующего алгоритма:

```

j ← 0,   S ← (0, 1, ..., 2^n - 1);
FOR i = 0, 1, ..., 2^n - 1 DO
    j ← (j + S_i + K_{i mod L}) mod 2^n,
    S_j ↔ S_i;
i ← 0,   j ← 0.
```



После этого генератор готов к работе. Генерация очередного псевдослучайного слова  $z_i$  осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} i &\leftarrow (i+1) \bmod 2^n; \\ j &\leftarrow (j+S_i) \bmod 2^n; \\ S_j &\leftrightarrow S_i; \\ t &\leftarrow (S_i+S_j) \bmod 2^n; \\ z_i &\leftarrow S_t. \end{aligned}$$

**Пример 8.2.** Пусть  $n = 3$ ,  $K = 25$  ( $L = 2$ ).

Сформируем начальную перестановку чисел в таблице  $S$  (все вычисления проводим по модулю 8):

$$\begin{array}{lll} & j = 0, & S = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), \\ i = 0, & j = 0 + 0 + 2 = 2, & S = (2, 1, 0, 3, 4, 5, 6, 7), \\ i = 1, & j = 2 + 1 + 5 = 0, & S = (1, 2, 0, 3, 4, 5, 6, 7), \\ i = 2, & j = 0 + 0 + 2 = 2, & S = (1, 2, 0, 3, 4, 5, 6, 7), \\ i = 3, & j = 2 + 3 + 5 = 2, & S = (1, 2, 3, 0, 4, 5, 6, 7), \\ i = 4, & j = 2 + 4 + 2 = 0, & S = (4, 2, 3, 0, 1, 5, 6, 7), \\ i = 5, & j = 0 + 5 + 5 = 2, & S = (4, 2, 5, 0, 1, 3, 6, 7), \\ i = 6, & j = 2 + 6 + 2 = 2, & S = (4, 2, 6, 0, 1, 3, 5, 7), \\ i = 7, & j = 2 + 7 + 5 = 6, & S = (4, 2, 6, 0, 1, 3, 7, 5). \end{array}$$

Теперь вычислим несколько первых элементов псевдослучайной последовательности  $\bar{z}$ :

$$\begin{aligned} i = 1, j = 0 + 2 = 2, S = (4, 6, 2, 0, 1, 3, 7, 5), t = 2 + 6 = 0, z_1 = 4, \\ i = 2, j = 2 + 2 = 4, S = (4, 6, 1, 0, 2, 3, 7, 5), t = 1 + 2 = 3, z_2 = 0, \\ i = 3, j = 4 + 0 = 4, S = (4, 6, 1, 2, 0, 3, 7, 5), t = 2 + 0 = 2, z_3 = 1, \\ i = 4, j = 4 + 0 = 4, S = (4, 6, 1, 2, 0, 3, 7, 5), t = 0 + 0 = 0, z_4 = 4, \\ i = 5, j = 4 + 3 = 7, S = (4, 6, 1, 2, 0, 5, 7, 3), t = 5 + 3 = 0, z_5 = 4, \\ i = 6, j = 7 + 7 = 6, S = (4, 6, 1, 2, 0, 5, 7, 3), t = 7 + 7 = 6, z_6 = 7 \end{aligned}$$

и т.д. Чтобы воспользоваться формулой (8.12) для получения шифра, числа  $z_i$  записываем в двоичном виде. В рассмотренном примере каждое число  $z_i$  представляется тремя битами, и мы получаем последовательность

$$\bar{z} = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ \dots$$

□

## 8.5. Криптографические хеш-функции

Мы уже встречались с понятием хеш-функции (hash function) в главе 4 при рассмотрении методов генерации электронной подписи. Там хеш-функции использовались в качестве «представителей» подписываемых сообщений, т.е. подпись реально вычислялась только для значения хеш-функции, но предполагалось, что это значение существенным образом зависит от всех символов сообщения и никто не может изменить сообщение так, чтобы это значение сохранилось. В этом разделе мы более точно сформулируем основные требования к криптографически стойким хеш-функциям и рассмотрим один из способов их вычисления.

**Определение 8.2.** *Хеш-функцией* называется любая функция

$$y = h(x_1x_2 \dots x_n),$$

которая строке (сообщению)  $x_1x_2 \dots x_n$  произвольной длины  $n$  ставит в соответствие целое число *фиксированной* длины.

Примером хеш-функции может служить контрольная сумма для сообщения. В этом случае

$$h(x_1x_2 \dots x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \bmod 2^w,$$

где  $w$  — размер машинного слова. Длина слова, получаемого как значение этой хеш-функции, составляет  $w$  бит независимо от длины сообщения. Контрольные суммы очень часто используются для обнаружения непреднамеренных ошибок в сообщении (при изменении одного символа контрольная сумма изменится). Однако очень легко внести *преднамеренную* ошибку в сообщение и сохранить при этом значение контрольной суммы. Если бы такая хеш-функция использовалась, например, при генерации электронной подписи, то было бы очень легко изменить содержание подписанного сообщения. Поэтому рассмотренная хеш-функция не годится для криптографических применений.

Сформулируем основные требования, предъявляемые к криптографическим хеш-функциям. Пусть  $x$  — некоторая строка (сообщение). Тогда

- 1) для любого заданного  $x$  вычисление  $h(x)$  должно выполняться относительно быстро;

- 2) при известном  $y$  должно быть трудно (практически невозможно) найти  $x$ , для которого  $y = h(x)$ ;
- 3) при известном сообщении  $x$  должно быть трудно найти другое сообщение  $x' \neq x$ , такое, что  $h(x') = h(x)$ ;
- 4) должно быть трудно найти какую-либо пару различных сообщений  $x$  и  $x'$ , для которых  $h(x') = h(x)$ .

Отметим, что первое требование должно выполняться всегда, в противном случае хеш-функция теряет какое-либо практическое значение. Остальные требования важны для тех или иных приложений. Например, если пароли для входа в систему хранятся в виде значений соответствующих им хеш-функций, то хеш-функция должна удовлетворять второму требованию. В схеме электронной подписи актуально третье требование. Четвертое требование важно в некоторых криптографических протоколах. Заметим, что четвертое требование более сильное, чем третье (т.е. при выполнении четвертого автоматически выполняется и третье).

Разработка хеш-функции, удовлетворяющей всем четырем требованиям — задача непростая. В настоящее время предложены и практически используются хеш-функции (например, MD5, SHA-1, RIPEMD-160 и др., см., например, [23, 28]), которые считаются отвечающими перечисленным выше требованиям (хотя это строго не доказано). Описание этих и подобных им функций усложнено в деталях и громоздко. Мы рассмотрим универсальный способ построения хеш-функций на базе блочных шифров, который представляет практический интерес, хотя получаемые хеш-функции и не являются очень быстро вычислимыми. Именно такой подход использован в российском стандарте на криптографическую хеш-функцию (ГОСТ Р34.11-94 [7]).

Пусть дан блочный шифр  $E$ , который для заданного блока  $X$  и ключа  $K$  формирует шифротекст  $Y$ ,

$$Y = E_K(X).$$

Мы представим два алгоритма, для которых длина слова, получаемого как значение хеш-функции, равна размеру блока в шифре, но отметим, что известны конструкции, позволяющие получать хеш-функции с длинами слов, кратными размеру блока.

В первом алгоритме сообщение вначале представляется в виде последовательности блоков  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Последний блок при необходимости дополняется нулями, иногда в последний блок приписывают длину сообщения в виде двоичного числа. Значение хеш-функции  $h$  получается как результат выполнения следующего итерационного процесса:

```

$$h \leftarrow 0;$$

$$\text{FOR } i = 1, 2, \dots, n \text{ DO}$$

$$h \leftarrow E_h(X_i) \oplus X_i.$$

```

В качестве начального значения  $h$  можно использовать не нуль, а какое-либо «магическое» число, но это не имеет большого значения. В данном алгоритме значение  $h$ , полученное на предыдущей итерации, используется в качестве ключа шифра в следующей итерации. Поэтому неявно полагается, что длина ключа в шифре равна длине блока. Однако, как мы видели при изучении шифра RC6, длина ключа может значительно превышать размер блока (в RC6 при максимальной длине блока 256 бит длина ключа может достигать 255 байт, или 2040 бит). В таких случаях более эффективен другой алгоритм.

В этом алгоритме сообщение вначале представляется в виде последовательности  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , в которой размер каждого элемента равен длине ключа в шифре. Последний элемент заполняется так же, как и в первом алгоритме. Значение хеш-функции  $h$  вычисляется следующим образом:

```

$$h \leftarrow 0;$$

$$\text{FOR } i = 1, 2, \dots, m \text{ DO}$$

$$h \leftarrow E_{X_i}(h) \oplus h.$$

```

Здесь уже элементы сообщения выполняют роль ключей в шифре.

Представленные алгоритмы вычисления хеш-функций удовлетворяют всем четырем требованиям, предъявляемым к криптографическим хеш-функциям, в предположении стойкости используемых блочных шифров (см. [26, 28]).

## Глава 9. СЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА В КРИПТОГРАФИИ

### 9.1. Введение

Мы видели в предыдущих главах, что случайные и псевдослучайные числа играют довольно важную роль в криптографии. Например, при описании многих протоколов мы встречались с необходимостью генерировать большие случайные числа или слова, используемые как секретные ключи. Вспомним также и шифр Вернама, совершенная секретность которого базируется на том, что ключевая последовательность состоит из равновероятных и независимых символов. Естественно, что задача генерирования последовательностей случайных чисел представляет большой интерес для разработчиков криптосистем. Более того, с развитием криптографии выяснилось, что многие фундаментальные проблемы этой науки тесно связаны с генерированием и тестированием случайных чисел. Например, возможность построения надежных генераторов псевдослучайных чисел связана с проблемой существования односторонних функций, а одна из атак на блочные шифры базируется на статистических тестах, предназначенных для выявления отклонений от случайности.

В данной главе мы попытаемся познакомить читателя с основными задачами, идеями и методами, связанными с генерированием и тестированием случайных чисел в криптографии. Мы начнем с основного вопроса: что такое случайное число или, более общо, последовательность случайных чисел? Пожалуй, первое, что приходит в голову — это последовательность, полученная при помощи подбрасываний симметричной монеты, если ее стороны пометить, скажем, нулем и единицей. Именно это определение, или, скорее понятие, и взято за основное, «первичное». Более формально, в качестве случайных чисел в криптографии рассматриваются последовательности из нулей и единиц, в которых появление символов независимо и их вероятности равны. (Мы иногда для краткости будем называть такие последовательности «абсолютно» случайными или просто случайны-

ми, если это не будет приводить к путанице.) Другие случайные числа, скажем, целые числа из некоторого диапазона, легко получить из последовательности случайных нулей и единиц и мы не будем останавливаться на этом вопросе.

Следующий вопрос, на котором мы остановимся — как генерировать случайные числа? В «обычной» жизни люди иногда используют случайные числа, получая их путем подбрасывания монеты или игральной кости, «вытягивания» игральной карты из колоды и т.п. Очевидно, эти способы мало пригодны в криптосистемах, где требуется производить большие последовательности случайных чисел с высокой скоростью. Для этой цели можно использовать другие физические процессы, обладающие высокой производительностью и сравнительно легко сочетающиеся с компьютерными системами. Например, в качестве физических процессов, содержащих «случайную» составляющую, можно использовать шумы, возникающие в электрических цепях и их элементах, счетчики физических частиц, движения манипулятора-мыши в руке человека, работающего за компьютером, и т.д. и т.п. Одна из основных задач, возникающих при использовании «физических» генераторов — преобразование порождаемых ими последовательностей в абсолютно случайные. Она будет кратко рассмотрена в следующем разделе.

Пожалуй самый популярный способ получения случайных чисел не связан с наблюдениями за каким-либо сложным физическим процессом, а базируется на проведении вычислений, (например, как в рассмотренном ранее потоковом шифре RC4). Получаемые таким способом числа называются псевдослучайными, что подчеркивает некоторое присущее им радикальное отличие от «истинно» случайных чисел. Действительно, мы не можем предсказать значение «истинно» случайного числа (генерируемого, скажем, физическим датчиком) до его появления, однако можем легко вычислить все значения, порождаемые псевдослучайным генератором. Это кардинальное различие легко видеть в случае генерирования ключа в системах передачи информации: даже если передатчик и приемник используют идентичные физические генераторы для символов ключа, они не получают одинаковые последовательности чисел (а если это маловероятное событие и произойдет, то они не узнают о его наступлении). Поэтому-то и требуется передавать порожденную физическим генератором последовательность от передатчика к приемнику по защищенному каналу. С другой стороны, используя одинаковые генера-

торы псевдослучайных чисел, приемник и передатчик могут легко получить одинаковые последовательности. В разд. 9.3 мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с псевдослучайными числами.

К качеству случайных чисел, используемых в криптографии, предъявляются высокие требования. Прежде всего, требуется исключить возможные статистические отклонения от эталона: вероятности порождения нуля и единицы должны быть в точности равны  $1/2$  и генерируемые числа должны быть независимы. Для выявления таких отклонений используются специальные статистические методы, или тесты, которых к настоящему времени разработано довольно много. Так, Национальный институт стандартов и технологий США (NIST) рекомендует 16 таких тестов для применения в криптосистемах [29]. Мы также рассмотрим некоторые тесты в разд. 9.4.

Как мы уже отмечали ранее, многие разделы криптографии идейно связаны, причем иногда эти связи далеко не очевидны. Пример такой взаимосвязи дан в последнем разделе этой главы, где мы опишем атаку на блочные шифры, которая тесно связана со случайными числами и статистическими тестами.

## 9.2. Задачи, возникающие при использовании физических генераторов случайных чисел

Мы будем считать, что физический генератор первоначально порождает последовательность из нулей и единиц, которые, вообще говоря, могут быть неравновероятны и/или зависимы. Такие последовательности необходимо преобразовывать в равновероятные и независимые и только после этого применять в криптосистемах. (Иногда такое преобразование называется «очисткой» или «стандартизацией».) При этом обычно рассматриваются отдельно методы преобразования для двух случаев: в первом считают, что символы исходной последовательности независимы, но, возможно, не равновероятны, а во втором случае предполагают, что символы могут быть и зависимы. Мы рассмотрим только методы решения первой задачи, что объясняется двумя причинами: во-первых, для многих физических генераторов (скажем, базирующихся на оценке интенсивности какого-либо физического процесса) показания, полученные в разные, непересекающиеся, интервалы времени, можно считать независимыми. Во-вторых, известные методы преобразования зависимых последовательностей

в независимые являются только приближенными — у них символы получаемой последовательности только «почти» независимы. Кроме того, авторам неизвестны примеры практического применения в криптосистемах методов преобразования зависимых последовательностей символов в независимые. Хотя отметим, что эта задача привлекает внимание многих исследователей и для ее решения предложено много интересных и остроумных алгоритмов.

Итак, в оставшейся части этого раздела мы рассмотрим методы преобразования последовательностей независимых нулей и единиц, вероятности порождения которых, возможно, не равны.

Фон Нейман (John von Neumann) впервые рассмотрел эту задачу и предложил первый алгоритм для ее решения. Для его описания мы введем следующие обозначения: дан бернуллиевский источник, порождающий символы из алфавита  $\{0, 1\}$  с вероятностями  $1 - p$  и  $p$  соответственно,  $0 < p < 1$ , причем  $p$  может быть неизвестно. Требуется преобразовать (или закодировать) порождаемую источником последовательность в такую, где вероятности появления нуля и единицы равны, т.е. в абсолютно случайную.

Фон Нейман предложил следующий метод: исходная последовательность разбивается на блоки (слова) длины 2, которые кодируются по следующему правилу:

$$00 \rightarrow \Lambda, \quad 01 \rightarrow 0, \quad 10 \rightarrow 1, \quad 11 \rightarrow \Lambda, \quad (9.1)$$

где  $\Lambda$  обозначает пустое слово. Например, порождаемая последовательность 00 01 11 10 00 00 01 будет трансформирована в абсолютно случайную последовательность 010. Здесь первый ноль соответствует второму блоку, т.е. 01, единица соответствует четвертому блоку, а второй ноль — последнему блоку. Так как вероятности порождения слов 01 и 10 совпадают (они равны  $p(1 - p)$  и  $(1 - p)p$ ), то, очевидно, в результате преобразования получается абсолютно случайная последовательность.

Из приведенного примера виден и недостаток метода, задаваемого правилом (9.1) — результирующая последовательность намного короче исходной. Точнее, легко видеть, что из  $t$  исходных символов получается последовательность из  $tp(1 - p)$  независимых символов. Например, если  $p$  близко к  $1/2$ , то из  $t$  символов в среднем получается  $t/4$ .

Элайес (Peter Elias) предложил метод преобразования, более экономно расходующий символы исходной последовательности, что



достигается за счет перехода к кодированию блоков длины  $n$ ,  $n > 2$  (при  $n = 2$  методы Элайеса и фон Неймана совпадают). Для количественной оценки эффективности метода Элайес ввел величину  $\eta_n$ , определяемую как отношение среднего значения длины получаемого кодового слова к длине блока  $n$ . Он показал, что естественной верхней границей для величины  $\eta_n$  является энтропия источника  $h(p)$ , которая, напомним, определяется равенством  $h(p) = -(p \log p + (1 - p) \log(1 - p))$ . (Впрочем, легко понять, что  $h(p)$  — это максимально возможное значение отношения длин выходной и входной последовательностей, так как, неформально, энтропия — это мера неопределенности, или случайности исходной последовательности, с другой стороны, энтропия выходной абсолютно случайной последовательности равна ее длине, так как для нее энтропия одного символа составляет 1 бит.)

В методе Элайеса величина  $\eta_n$  приближается к энтропии Шеннона с ростом длины блока  $n$ , но при этом и сложность алгоритма быстро возрастает. Точнее, объем используемой памяти растет как  $2^n$ , что делает его практически неприменимым при длине блока несколько десятков. В работе Б. Я. Рябко и Е. П. Мачикиной [32] предложен метод, сложность которого существенно меньше — объем требуемой памяти растет как  $n \log^2 n$ , что позволяет применять его и при больших  $n$ . В этой же работе можно найти более подробное описание метода Элайеса.

### 9.3. Генераторы псевдослучайных чисел

Мы уже говорили о генераторах псевдослучайных чисел, когда рассматривали потоковые шифры (разд. 8.4). Практически все используемые в криптографии генераторы псевдослучайных чисел могут быть схематически представлены как некоторая функция от двух переменных  $F(s, i)$ , где  $i$  — номер генерируемого случайного двоичного слова некоторой фиксированной длины, а  $s$  — параметр или секретный ключ, часто называемый «семенем» (seed). Обычно  $s$  — двоичное слово, выбираемое случайно. Генерируемая псевдослучайная последовательность образуется как цепочка двоичных слов  $F(s, 1)$ ,  $F(s, 2)$ ,  $F(s, 3)$ , ...,  $F(s, k)$ , где  $k$  — требуемая длина последовательности. В разд. 8.4 были даны четыре примера таких генераторов (линейный конгруэнтный, RC4 и получаемые при использовании блочных шифров в режимах OFB и CTR), поэтому мы не будем

рассматривать новые примеры, а сформулируем более точно требования, предъявляемые к генераторам.

Любой генератор должен удовлетворять двум основным требованиям: во-первых, генерируемая псевдослучайная последовательность должна быть статистически неотличима от абсолютно случайной и, во-вторых, знание какой-либо начальной части последовательности (скажем,  $F(s, 1)$ ,  $F(s, 2)$ , ...,  $F(s, k - 1)$ ) не должно позволять предсказывать следующий бит этой последовательности (точнее, наилучшее возможное предсказание должно быть таким: "очередной бит последовательности с вероятностью 0.5 принимает значение нуль и с вероятностью 0.5 — единица"). Здесь сразу следует отметить, что эти требования невыполнимы даже при неизвестном значении слова  $s$ , если не ограничивать сложность тестов и методов прогноза, измеряемую объемом памяти и/или временем вычислений. Для объяснения этого явления мы сначала заметим, что представляют интерес только такие генераторы, у которых длина выходной последовательности больше длины семени  $s$  (в противном случае генератор был бы не нужен — можно было бы использовать  $s$  как случайную последовательность). Теперь предположим, что дана последовательность бит  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , порожденная генератором, причем ее длина ( $k$ ) больше длины слова  $s$ . Тогда для предсказания следующего символа  $z_{k+1}$  можно поступить следующим образом: будем поочередно подавать на вход генератора всевозможные значения ключа  $s$  (скажем, в лексикографическом порядке) и генерировать первые  $k$  бит. Если полученные символы при некотором  $s = u$  совпадают с  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , то значение ключа равно  $u$  (точнее, это справедливо при выполнении некоторых естественных условий, на которых мы не будем останавливаться, ограничившись неформальным рассмотрением). Естественно, при найденном ключе можно вычислить следующий порождаемый символ  $z_{k+1}$ , т.е. однозначно предсказать его значение.

Таким образом, мы видим, что метод прямого перебора ключей позволяет предсказать следующий бит последовательности, порождаемой генератором псевдослучайных чисел, поэтому-то она и не является «истинно» случайной. Однако время прямого перебора ключей пропорционально  $2^{|s|}$ , где,  $|s|$  — длина слова  $s$  и, очевидно, оно может быть сделано сколь угодно большим при увеличении  $|s|$ . (Это и определяет выбор длины ключа — время выполнения  $2^{|s|}$  операций должно быть гигантским для лучших современ-

ных компьютеров. В настоящее время  $|s|$  должна быть не меньше нескольких сотен бит.) Поэтому в криптографии оба вышеупомянутых требования к генераторам псевдослучайных чисел несколько модифицированы: генерируемая псевдослучайная последовательность должна быть статистически неотличима от абсолютно случайной *за небольшое время вычислений* и, во-вторых, знание какой-либо начальной части последовательности не позволяет предсказать следующий бит этой последовательности *за небольшое время вычислений* (здесь «большое время» обычно означает «требуются годы вычислений на суперкомпьютерах»).

Для многих, если не для всех реально используемых генераторов предполагается, что оба эти условия выполняются, но это предположение не доказано математически, а базируется на здравом смысле и опыте (это относится, например, к RC4).

С другой стороны, существует изящная теория, позволяющая связать задачу генерирования псевдослучайных чисел с другими разделами криптографии и с теорией сложности. В рамках этой теории «небольшое время вычислений» означает «вычисления, проводимые за полиномиальное время». Изложение этой теории может быть найдено, например, в [26], а здесь мы только отметим ряд основных результатов. Во-первых, показано, что существуют генераторы псевдослучайных чисел, чьи последовательности не отличимы от случайных за полиномиальное время любым тестом. Это, в частности, означает, что такие последовательности можно использовать как «истинно» случайные при решении любой задачи, требующей не более чем полиномиальное время вычислений. Во-вторых, показано что оба требования, предъявляемые к генерируемым последовательностям (статистическая неотличимость от абсолютно случайной последовательности и непредсказуемость), эквивалентны. В-третьих, установлена связь между генераторами псевдослучайных чисел и односторонними функциями, которая, в частности, позволяет строить «доказуемо надежные» генераторы на основе односторонних функций. Кавычки здесь означают, что доказательства справедливы при некоторых условиях, типичных для теории сложности алгоритмов, например, базируются на недоказанных предположениях об односторонности некоторых функций.

Мы остановимся на описании нескольких генераторов, базирующихся на односторонних функциях. Прежде всего отметим, что два класса таких генераторов описаны ранее в разд. 8.4. Действительно,

режимы OFB и CTR описаны в общем виде и могут применяться для любых блочных шифров, которые, в свою очередь, могут рассматриваться как односторонние функции. Другие конструкции генераторов базируются на теоретико-числовых односторонних функциях, знакомых нам по предыдущим разделам. В качестве примера мы рассмотрим генератор, базирующийся на системе RSA.

Параметры генератора — два больших простых числа  $P$  и  $Q$  ( $P \neq Q$ ), их произведение  $N = PQ$  и число  $e > 1$ , взаимнопростое с  $(P-1)(Q-1)$ . Семя  $x_0$  — случайно выбранное число из диапазона  $(1, N-1)$ . Генератор формирует последовательность бит  $z_1, z_2, \dots, z_k$  по следующей схеме:

$$\begin{aligned} x_i &\leftarrow x_{i-1}^e \bmod N, \\ z_i &\leftarrow \text{младший бит } x_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Отметим, что число  $e$  можно взять равным трем, что упрощает операцию возведения в степень.

Целый ряд других генераторов, базирующихся на теоретико-числовых односторонних функциях описан в литературе; см., например, [26, 28].

## 9.4. Тесты для проверки генераторов случайных и псевдослучайных чисел

Случайные и псевдослучайные числа находят самое широкое применение не только в криптографических системах, но и в вычислительных методах, и при имитационном моделировании. Это делает актуальной задачу построения эффективных статистических тестов, предназначенных для выявления возможных отклонений от случайности. Так, Национальный институт стандартов и технологий США (NIST) недавно провел исследование известных статистических тестов для проверки случайных и псевдослучайных чисел, результаты которого вместе с рекомендациями по практическому применению опубликованы в [29]. В ходе этого исследования были выделены 16 методов, которые NIST рекомендует для применения в криптографии.

В серии статей [13, 14, 33] авторы, во-первых, показали теоретически и экспериментально, что эффективные тесты могут быть построены на основе так называемых архиваторов и, во-вторых, пред-

ложили три теста, мощность которых существенно выше, чем у всех методов, рекомендованных NIST. В этом разделе мы опишем один из этих трех тестов.

Предлагаемый статистический тест базируется на конструкции адаптивного кода «стопка книг», предложенного в [12] (позднее этот код был переоткрыт и в англоязычной литературе получил название «move-to-front»).

Для описания теста нам понадобятся некоторые определения. Пусть источник порождает буквы из алфавита  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_S\}$ , и требуется по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  проверить гипотезу

$$H_0 : p(a_1) = p(a_2) = \dots = p(a_S) = 1/S,$$

против альтернативной гипотезы  $H_1$ , являющейся отрицанием  $H_0$ .

При тестировании по предлагаемому методу буквы алфавита  $A$  упорядочены (и занумерованы в соответствии с этим порядком от 1 до  $S$ ), причем этот порядок меняется после анализа каждого выборочного значения  $x_i$  следующим образом: буква  $x_i$ , которую мы обозначим через  $a$  ( $x_i = a$ ), получает номер 1, номера тех букв, которые были меньше, чем номер  $a$ , увеличиваются на 1, а у остальных букв номера не меняются. Для более формального описания этого преобразования обозначим через  $\nu^t(a)$  номер буквы  $a \in A$  после анализа  $x_1, x_2, \dots, x_{t-1}$ , и пусть начальный порядок  $\nu^1(\cdot)$  на буквах  $A$  задан произвольно. Тогда нумерация после анализа  $x_t$  определяется следующим образом:

$$\nu^{t+1}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_t = a, \\ \nu^t(a) + 1, & \text{если } \nu^t(a) < \nu^t(x_t), \\ \nu^t(a), & \text{если } \nu^t(a) > \nu^t(x_t). \end{cases} \quad (9.2)$$

(Все происходит как в стопке книг, если считать, что номер книги совпадает с положением в стопке. Книга извлекается и кладется наверх. Ее номер становится первым; книги, которые первоначально были над ней, сдвигаются вниз, а остальные остаются на месте.)

Основная идея метода — подсчитывается не частота встречаемости букв в выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а частота встречаемости номеров букв (при описанном упорядочивании). В том случае, когда выполнена гипотеза  $H_1$ , вероятность (и частота встречаемости в выборке) некоторых букв больше  $1/S$  и их номера, в среднем, будут меньше, чем у букв с меньшими вероятностями. (Другими словами, книги,

к которым обращаются чаще, проводят в верхней части стопки значительно большее время, чем остальные. И, следовательно, вероятность обнаружить требуемую книгу в верхней части стопки больше, чем в нижней.) Если же выполнена гипотеза  $H_0$ , то, очевидно, вероятность появления в выборке буквы с любым номером равна  $1/S$ .

При применении описываемого теста множество всех номеров  $\{1, \dots, S\}$  заранее, до анализа выборки, разбивается на  $r$ ,  $r > 1$ , непересекающихся частей  $A_1 = \{1, 2, \dots, k_1\}$ ,  $A_2 = \{k_1 + 1, \dots, k_2\}$ ,  $\dots$ ,  $A_r = \{k_{r-1} + 1, \dots, k_r\}$ . Затем по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  подсчитывается количество номеров  $\nu^t(x_t)$ , принадлежащих подмножеству  $A_j$ , которое мы обозначим через  $n_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ . При выполнении  $H_0$  вероятность того, что  $\nu^t(x_t)$  принадлежит множеству  $A_j$  пропорциональна количеству элементов этого подмножества, т.е. равна  $|A_j|/S$ . Затем по значениям  $n_1, \dots, n_r$  проверяется гипотеза

$$H_0^* : P\{\nu^t(x_t) \in A_j\} = |A_j|/S \quad (9.3)$$

против альтернативной гипотезы  $H_1^* = \neg H_0^*$ . Очевидно, что при выполнении исходной гипотезы  $H_0$  выполняется и  $H_0^*$  и, наоборот, при выполнении гипотезы  $H_1^*$  выполняется  $H_1$ . Поэтому применение описанного критерия корректно.

При проверке гипотез используется хорошо известный в статистике критерий хи-квадрат ( $\chi^2$ ), описание которого может быть найдено, например, в [9]. При применении критерия  $\chi^2$  вычисляется величина (статистика)

$$x^2 = \sum_{j=1}^r \frac{(n_j - nP_j^0)^2}{nP_j^0}, \quad (9.4)$$

где  $P_j^0 = |A_j|/S$ , см. (9.3). Известно, что распределение случайной величины  $x^2$  асимптотически приближается к распределению  $\chi^2$  с  $(r - 1)$  степенью свободы при выполнении  $H_0$ .

Мы не описываем какой-либо алгоритм выбора количества подмножеств  $A_j$  и их величины, а предлагаем определять эти характеристики экспериментально. Дело в том, что при тестировании генераторов случайных и псевдослучайных чисел, как и в некоторых других задачах, возможно проведение специальных экспериментов для определения значений этих величин, а затем проведение проверки гипотез по независимым данным (или по участкам последова-

тельности псевдослучайных чисел, не использовавшимся при подборе указанных значений). Такие эксперименты направлены на поиск значений параметров, позволяющих выявить отклонения от случайности (т.е. от  $H_0$ ) при приемлемых объемах выборки (или за приемлемое время вычислений).

В качестве примера покажем, что дает описанный метод тестирования применительно к генераторам, предложенным в [9]. Д. Кнут [9] применяет различные статистические тесты к нескольким генераторам псевдослучайных чисел, которые он обозначил буквами  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Генераторы  $B$ – $E$  порождаются так называемыми линейными конгруэнтными последовательностями по формуле

$$x_{i+1} = (ax_i + b) \bmod m, \quad (9.5)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $m$  и  $x_0$  — параметры метода, а генератор  $F$  основан на так называемом методе Фибоначчи (полное описание всех генераторов дано в [9]).

Все эти генераторы предназначены для получения равномерно распределенных целых чисел из множества  $\{0, \dots, m-1\}$ , где  $m$  — параметр метода, см. (9.5). Известно, что младшие знаки порождаемых по (9.5) чисел часто далеки от абсолютно случайных, поэтому обычно рекомендуется использовать только старшие знаки в качестве случайных чисел [9]. Следуя этой рекомендации, из порождаемых генератором значений выделялся старший бит, или старший байт (варианты, обозначаемые в дальнейшем  $R_1$  и  $R_8$  соответственно). Точнее, в режиме  $R_1$  для *четного*  $m$  старший бит  $z_i$  вычислялся по формуле

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i < m/2, \\ 1, & \text{если } x_i \geq m/2, \end{cases}$$

а для *нечетного* — как

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i < (m-1)/2, \\ 1, & \text{если } x_i > (m-1)/2, \\ \Lambda, & \text{если } x_i = (m-1)/2, \end{cases}$$

где  $\Lambda$  — пустое слово.

В режиме  $R_8$  восьмибитовое слово  $\hat{z}_i$  «извлекается» из  $x_i$  по формуле

$$\hat{z}_i = \begin{cases} \lfloor 256x_i/m^* \rfloor, & \text{если } x_i < m^*, \\ \Lambda, & \text{если } x_i \geq m^*, \end{cases}$$

где  $m^* = 256 \lfloor m/256 \rfloor$ , а целое число  $\lfloor 256x_i/m^* \rfloor$  записано как 8-битовое слово.

Последовательность  $z_i \in \{0, 1\}$  разбивалась на блоки длины  $s$  и при тестировании рассматривалась как выборка из алфавита размера  $S = 2^s$ , состоящего из всех двоичных слов длины  $s$ . Множество всех позиций в «стопке книг» разбивалось или на два подмножества  $A_1 = \{a_1, \dots, a_{k_1}\}$ ,  $A_2 = \{a_{k_1+1}, \dots, a_S\}$ , или на три:  $A_1 = \{a_1, \dots, a_{k_1}\}$ ,  $A_2 = \{a_{k_1+1}, \dots, a_{k_2}\}$ ,  $A_3 = \{a_{k_2+1}, \dots, a_S\}$ .

В табл. 9.1 приведены данные по тестированию датчиков, описанных в книге Д. Кнута [9]. При проведении экспериментов каждый генератор тестировался в режиме  $R_1$  при разных длинах выборки. Если удавалось найти длину выборки, при которой генерируемые последовательности отличались от случайных (при применении «стопки книг»), все вычисления повторялись при этой длине выборки по другим 100 последовательностям, ранее не использовавшимся для тестирования. При этом вычислялись величины  $Q_\alpha$ , равные количеству тех случаев, когда вычисленное по выборке значение  $x^2$  (см.(9.4)) превосходило значение квантиля уровня  $\alpha$  распределения  $\chi^2$  с соответствующим числом степеней свободы для двух значений  $\alpha = 0.5$  и  $\alpha = 0.95$ . Если же не удавалось найти отклонений на исследуемых длинах выборок, то все вычисления повторялись в режиме  $R_8$ .

Д. Кнут [9] протестировал указанные датчики другими методами и пришел к выводу, что генераторы  $D$  и особенно  $E$  и  $F$  должны быть забракованы,  $B$  прошел испытания удовлетворительно, а  $C$  «находится на грани». Полученные нами данные хорошо согласуются с этими результатами. Действительно, применение нового теста показывает, что генератор  $F$  должен быть забракован уже при длине выборки 240 бит: при ста испытаниях вычисленное по (9.4) значение  $x^2$  превосходит квантили порядка 0.95 и 0.5 соответственно 80 и 83 раза из 100 (тогда как для «идеальных» случайных бит это должно происходить, в среднем, в 5 и в 50 из 100 случаев). Генераторы  $C$  и  $D$  также бракуются описанным тестом, правда при больших длинах выборки. Это можно показать строго, используя, скажем, тот же критерий  $\chi^2$ . Как мы отмечали, при абсолютно случайных числах вероятность «попадания» в колонку  $Q_{0.95}$  должна быть равна 0.05. Прямое вычисление показывает, что гипотеза о равенстве вероятности попадания 0.05 должна быть отвергнута по критерию  $\chi^2$  при уровне значимости 0.01, если число попаданий превышает 11 из



100. Из табл. 9.1 видно, что во всех случаях гипотеза об абсолютной случайности чисел, порождаемых генераторами  $C—F$  должна быть отвергнута при уровне значимости 0.01, так как  $Q_{0.95}$  во всех случаях больше 11. Интересно отметить, что датчик  $C$  не бракуется ни одним статистическим тестом из [9]. Однако описанный нами тест забраковал этот датчик даже в режиме  $R_1$ . Таким образом, предложенный тест оказался более мощным, чем методы, традиционно используемые для тестирования генераторов случайных чисел.

Т а б л и ц а 9.1. Тестирование генераторов из [9]

Гене- ратор	Режим	$s$	Длина выборки, бит	$k_1$	$k_2$	$Q_{0.5}$	$Q_{0.95}$
$B$	$R_8$	24	1680000	$2^{17}$	-	52	4
$C$	$R_1$	24	7920000	$2^{17}$	-	70	17
$D$	$R_1$	16	160000	$2^{10}$	$2^{14}$	74	16
$E$	$R_1$	12	12000	$2^3$	$2^5$	99	97
$F$	$R_1$	8	240	$2^1$	$2^2$	83	80

Как уже отмечалось, в [13, 33] тест «стопка книг» сравнивался с методами, рекомендованными Национальным институтом стандартов и технологий США (NIST). Оказалось, что его мощность существенно выше, чем у всех 16 методов, рекомендованных NIST; подробности можно найти в [33].

## 9.5. Статистическая атака на блочные шифры

Как отмечалось в главе 8, блочные шифры с секретным ключом находят самое широкое применение в системах защиты передаваемой и хранимой информации, что делает актуальными как задачи построения надежных блочных шифров, так и поиск эффективных криптологических атак на эти шифры (т.е. методов определения секретного ключа шифра на основе экспериментов с зашифрованными сообщениями). Исследования в этих областях ведутся параллельно и часто одними и теми же специалистами и, как правило, изобретение новой атаки приводит к появлению шифров, к ней устойчивых. Отметим сразу, что для криптографии представляют интерес атаки, которые менее трудоемки, чем метод прямого перебора ключей.

Мы видели в предыдущей главе, что блочные шифры описываются как функция, определенная на множестве всех двоичных слов длины  $(n+k)$  и принимающая значения в множестве двоичных слов длины  $n$ , где  $n$  — размер блока, а  $k$  — длина (секретного) ключа. Мы видели, что в современных шифрах длина блока обычно составляет 128 или 64 бита, а длина ключа принимает значения от нескольких десятков до нескольких тысяч бит. Например, у шифра AES (Rijndael) длина блока  $n = 128$  бит, а длина ключа может принимать три значения — 128, 196 и 256 бит. У других популярных шифров RC5 и RC6, предложенных Р. Ривестом, длина блока может быть 32, 64 или 128 бит, а длина ключа в разных вариантах принимает значения от 64 до нескольких тысяч бит.

Как было показано в главе 8, процесс шифрования в современных блочных шифрах обычно разбивается на последовательность сравнительно простых этапов, называемых раундами. В ходе каждого нового раунда проводится шифрование данных, полученных на предыдущем этапе с так называемым ключом раунда. В RC5, RC6 и многих других шифрах количество раундов является параметром и часто криптоаналитики исследуют стойкость шифров как функцию числа раундов. Одна из целей такого анализа — нахождение числа раундов, гарантирующих высокую надежность шифра. Таким образом, схематично процесс шифрования можно представить как цепочку «элементарных» этапов (или раундов) шифрования

$$x_1 = E_1(x_0, k_1), x_2 = E_2(x_1, k_2), \dots, x_r = E_r(x_{r-1}, k_r), \quad (9.6)$$

где  $x_0$  — исходное  $n$ -битовое слово, которое необходимо зашифровать,  $E_i$  — операция (функция) шифрования на  $i$ -м этапе,  $k_i$  — ключ, используемый на  $i$ -м этапе,  $x_i$  —  $n$ -битовое слово, являющееся «выходом»  $i$ -го этапа и «входом»  $(i+1)$ -го, и, наконец,  $x_r$  — результат шифрования.

Как отмечалось при изучении блочных шифров, для них известны *специальные* виды атак, такие как дифференциальный и линейный криптоанализ и их разновидности. Для иллюстрации связи случайных чисел с многими задачами криптографии в данном разделе мы опишем *универсальную* атаку на блочные шифры, названную градиентной статистической атакой, и в качестве примера исследуем возможность ее применения для криптоанализа шифра RC5. Приведенные экспериментальные данные позволяют сделать вывод о том, что эта атака может быть применена, и что для некоторых режи-

мов шифра ее трудоемкость может быть существенно меньше, чем у прямого перебора ключей.

Описываемый нами метод относится к классу атак с выбираемым текстом (chosen plaintext attack), см. главы 1 и 8. При реализации этой атаки криптоаналитик может подавать на вход шифра любой текст и анализировать полученное зашифрованное сообщение. Цель атаки — нахождение (секретного) ключа, причем при этом предполагается, что криптоаналитик знает все характеристики шифра, кроме этого ключа. Такие атаки представляют практический интерес и, как отмечалось в главе 8, современные блочные шифры должны быть стойки к ним.

У большинства современных шифров начальный ключ  $K$  длиной в  $|K|$  бит преобразуется в последовательность так называемых раундовых ключей  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , которые используются последовательно для шифрования на разных этапах, см. (9.6). В разных шифрах эта процедура осуществляется по-разному, причем это зависит не только от шифра, но и от значений длин блока, ключа и числа раундов, которые для многих шифров являются параметрами. Например, для шифра RC5 длина блока может принимать значения 32, 64 или 128 бит, количество раундов может быть любым целым числом, а длина ключа должна быть кратна 8 и может принимать любое значение, начиная с 8 бит. Отметим, что значения  $n = 64$ ,  $r = 12$ ,  $|K| = 128$  рекомендованы разработчиками и широко исследованы. Часто рассматриваются и схемы, в которых длина ключа  $K$  равна суммарной длине ключей раундов,  $|K| = \sum_{i=1}^r |k_i|$ .

Дешифрование проводится по схеме, обратной к шифрованию (9.6):

$$x_{r-1} = D_r(x_r, k_r), \quad x_{r-2} = D_{r-1}(x_{r-1}, k_{r-1}), \dots, \quad x_0 = D_1(x_1, k_1), \quad (9.7)$$

где используются те же ключи раундов, а операции  $D_i$  обратны этапам шифрования  $E_i$ .

Оценим трудоемкость атаки путем полного перебора ключей. Для ее проведения достаточно иметь одно зашифрованное сообщение (двоичное слово), длина которого не меньше длины ключа. Затем необходимо пытаться дешифровать это зашифрованное сообщение, последовательно перебирая все возможные ключи в каком-либо порядке и сравнивая полученный результат с исходным, незашифрованным, текстом; совпадение означает, что неизвестный ключ най-

ден. Обычно предполагается, что ключ принимает любое значение из множества всех двоичных слов длины  $|K|$  с вероятностью  $2^{-|K|}$ , поэтому среднее значение числа перебираемых ключей равно  $2^{|K|}/2$ .

Одно из требований, предъявляемых к блочным шифрам, можно сформулировать следующим образом: любое зашифрованное сообщение должно быть неотличимо от абсолютно случайной последовательности. В частности, все шифры, принимавшие участие в конкурсе на шифр 21-го века, проводившемся в США в 1999–2001 годах, проверялись на выполнение этого условия. Мы не будем останавливаться на логическом анализе этого требования (которое, в некотором смысле, вообще не выполнимо), а приведем пример, поясняющий его смысл. Для этого мы определим  $n$ -битовое слово  $\alpha_i$  как двоичную запись числа  $i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$ , где, как и ранее,  $n$  — длина блока рассматриваемого шифра (т.е.  $\alpha_0$  состоит из  $n$ -битовой цепочки нулей,  $\alpha_1$  из  $(n-1)$  нуля и единицы,  $\alpha_2$  — из  $(n-2)$  нулей, после которых идет последовательность 10 и т.д.). От современного блочного шифра требуется, чтобы при любом значении ключа последовательность  $n$ -битовых слов  $E(\alpha_0), E(\alpha_1), E(\alpha_2), \dots$ , рассматриваемая как двоичная последовательность, была статистически неотличима от случайной. (Здесь  $E(\alpha_i)$  означает зашифрованное слово  $\alpha_i$ .) Это требование, в частности, позволяет использовать блочные шифры как генераторы псевдослучайных чисел, как было показано в разд. 8.4.

Перейдем теперь к описанию статистической атаки на блочные шифры, у которых кодирование и декодирование разбивается на последовательность раундов (9.6) и (9.7), начав с неформального предварительного рассмотрения. При этом мы будем использовать совершенно не строгие термины «более» и «менее» случайные последовательности, понимая под этим, что некоторая последовательность более случайна, чем другая, если отклонения от случайности у первой достоверно выявляются при большей длине, чем у второй. (При этом предполагается, что используется некоторый статистический тест при одном и том же уровне значимости. Другое «определение» более случайной последовательности — величина статистики критерия для этой последовательности меньше, чем для менее случайной.) Предположим, что на вход шифра, ключ которого неизвестен, подаются последовательно слова  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ . Очевидно,

эта последовательность очень неслучайна. Последовательность

$$E_1(\alpha_0, k_1), E_1(\alpha_1, k_1), E_1(\alpha_2, k_1), \dots$$

после первого раунда шифрования, которую мы обозначим через  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\dots$ , более случайна, чем исходная; получаемая после второго раунда последовательность

$$E_2(\beta_0, k_2), E_2(\beta_1, k_2), E_2(\beta_2, k_2), \dots$$

еще более случайна и т.д. Наконец, полученная после последнего раунда последовательность  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$  более случайна, чем предыдущая. Это неформальное утверждение подтверждается экспериментально в приведенных ниже данных для шифра RC5 и в довольно многочисленных работах по анализу блочных шифров. Объяснение этого факта довольно очевидно: шифрование на каждом раунде приводит к «перемешиванию» и, тем самым, повышает «случайность» шифруемых данных. Отметим и очевидное следствие — при дешифровании последовательности  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$  по схеме (9.7) случайность получаемых данных последовательно уменьшается. Это, конечно, справедливо только в том случае, когда при дешифровании используются «истинные» ключи раундов. Если же при дешифровании, скажем,  $x_{r-1} = D_r(x_r, k_r)$  вместо истинного ключа  $k_r$  используется какое-либо другое слово  $k_r^*$  той же длины, то эффект преобразования  $D_r(x_r, k_r^*)$  будет таков же, как при шифровании — выходная последовательность станет более случайна, чем входная. Это важное для нас наблюдение в общем виде состоит в следующем: при дешифровании на  $j$ -м раунде при использовании «неправильного» ключа  $k_j^*$  (вместо «правильного» ключа  $k_j$ ) случайность выходной последовательности возрастает, тогда как при использовании правильного  $k_j$  — убывает. На этом наблюдении и базируется предлагаемая атака, которую мы теперь можем схематично описать.

Вначале уточним формулировку задачи. Дан шифр, для которого шифрование и дешифрование проводятся по схемам (9.6), (9.7) соответственно. Предполагается, что все параметры шифра, кроме ключа  $K$ , известны. Цель атаки — найти неизвестные ключи раундов  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , где, как и ранее,  $r$  — число раундов (что эквивалентно нахождению  $K$ , так как дает возможность дешифровать любое сообщение, зашифрованное с этим ключом).

При проведении описываемой атаки сначала на вход шифра подается «простая» последовательность из  $m_r$   $n$ -битовых слов (на-

пример, вышеописанная  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_r}$ ), где  $m_r$  — параметр метода. Обозначим полученную на выходе зашифрованную последовательность через  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m_r}$ . Предполагается, что используется некоторая количественная мера случайности, которую мы обозначим через  $\gamma(w)$ , где  $w$  — двоичная последовательность, причем, чем больше  $\gamma(w)$ , тем последовательность менее случайна (в дальнейшем в качестве такой меры будет использоваться статистика  $x^2$ ).

После этого для всех возможных значений ключа  $r$ -го раунда  $k_r$  поочередно вычисляем последовательность  $\Gamma_r(u)$ , определяемую как

$$\Gamma_r(u) = D_r(\omega_0, u), D_r(\omega_1, u), D_r(\omega_2, u), \dots, D_r(\omega_{m_r}, u), \quad (9.8)$$

где  $u \in \{0, 1\}^{|k_r|}$ , и оцениваем степень ее случайности. Затем находим такое значение  $u^*$ , для которого статистика  $\gamma(\Gamma_r(u^*))$  максимальна среди всех значений  $\gamma(\Gamma_r(u))$ ,  $u \in \{0, 1\}^{|k_r|}$ , и полагаем, что (неизвестный) ключ  $r$ -го раунда равен  $u^*$ :  $k_r = u^*$ . Отметим сразу, что количество операций дешифрования на этом этапе пропорционально  $2^{|k_r|} m_r$ .

Затем повторяем аналогичные вычисления для поиска ключа  $(r-1)$ -го раунда ( $k_{r-1}$ ), используя в качестве исходной последовательность  $\Gamma_r(k_r) = \Gamma_r(u^*)$ , см. (9.8). Точнее, вычисляем последовательность

$$\Gamma_{r-1}(u) = D_{r-1}(D_r(\omega_0, k_r), u), D_{r-1}(D_r(\omega_1, k_r), u), \dots, \quad (9.9)$$

где теперь  $u \in \{0, 1\}^{|k_{r-1}|}$  и оцениваем случайность этой последовательности. Мы считаем, что количество  $n$ -битовых слов в этой последовательности, которое мы обозначим через  $m_{r-1}$ , не превосходит  $m_r$  (в противном случае можно вычислить недостающие слова, хотя, как будет видно из последующих данных,  $m_{r-1}$  будет обычно меньше  $m_r$ , так как последовательность  $\Gamma_{r-1}(u)$  менее случайна, чем  $\Gamma_r(u)$ ). Слово  $u^{**}$ , минимизирующее случайность последовательности  $\Gamma_{r-1}(u)$  и будет значением ключа  $(r-1)$ -го раунда. Отметим, что на этом этапе количество операций дешифрования пропорционально  $2^{|k_{r-1}|} m_{r-1}$ .

Повторяя описанные вычисления последовательно, мы найдем значения ключей раундов  $k_{r-1}, k_{r-2}, k_{r-3}, \dots, k_1$ . Суммарное количество операций при нахождении всех ключей раундов пропорционально  $\sum_{i=1}^r 2^{|k_i|} m_i$  или в типичном случае, когда длины ключей

раундов равны ( $|k_i| = |k|$ ), количество операций пропорционально величине  $rm_{max}2^{|k|}$ , тогда как для прямого перебора это величина порядка  $2^{|K|}$  (где  $m_{max} = \max_{i=1,\dots,r} m_i$  и  $K$  — ключ шифра). Эта разница в показателях степени и определяет область применимости предлагаемой атаки: если  $rm_{max}$  меньше  $2^{|K|-|k|}$ , то количество операций у предлагаемого метода меньше, чем у полного перебора ключей.

Теперь обсудим возможные модификации, параметры и варианты описанного метода. Мы описали идею метода в «чистом» виде, а здесь остановимся на возможных вариантах его реализации.

Во-первых, мера случайности  $\gamma(\cdot)$  является параметром метода, причем можно использовать не только различные меры для разных шифров, но и для разных раундов. Как указано выше, любой статистический тест, который применим для проверки основной гипотезы ( $H_0$ ) о том, что двоичная последовательность порождается бернуллиевским источником с равными вероятностями для нуля и единицы, против альтернативной гипотезы  $H_1$ , являющейся отрицанием  $H_0$ , может быть использован для этой цели. При этом  $\gamma(\cdot)$  может быть равна величине статистики критерия (скажем, величине  $\chi^2$ , используемой в критерии хи-квадрат; именно такая мера будет использована в нижеприведенных примерах.)

Во-вторых, в отличие от описанного выше варианта, при поиске ключа  $j$ -го раунда можно выбирать не один истинный ключ, а несколько «подозрительных» значений  $u$ , т.е. таких слов, у которых мера случайности  $\gamma(\Gamma_j(u))$  минимальна (среди  $u \in \{0, 1\}^{|k_j|}$ ). Кроме того, при поиске простых последовательностей и ключей раундов естественно использовать последовательные методы, аналогичные последовательным критериям в математической статистике.

В третьих, начальная «очень неслучайная» последовательность  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_r}$  может выбираться различными способами. Например, кажется разумным выбирать последовательность, в которой соседние слова  $(\alpha_i, \alpha_{i+1})$  не только содержат много одинаковых символов, но и отличаются только одним знаком (так называемый код Грея). Наконец, часть двоичных символов в словах последовательности  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_r}$  могут выбираться случайно, а оставшиеся полагаться равными нулю и т.д.

Последняя модификация связана с тем фактом, что у многих современных шифров при большом числе раундов даже «очень» неслучайная последовательность после шифрования статистически не от-

личима от случайной (при использовании известных статистических тестов и при приемлемом времени вычислений). Пусть, например, шифр использует  $r$  раундов и для некоторой «простой» начальной последовательности  $\alpha^0 = \alpha_0^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_m^0$  последовательности

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= E_1(\alpha_0^0, k_1), E_1(\alpha_1^0, k_1), E_1(\alpha_2^0, k_1), \dots, E_1(\alpha_m^0, k_1) \\ \alpha^2 &= E_2(\alpha_0^1, k_2), E_2(\alpha_1^1, k_2), E_2(\alpha_2^1, k_2), \dots, E_2(\alpha_m^1, k_2) \\ &\dots \\ \alpha^d &= E_d(\alpha_0^{d-1}, k_d), E_d(\alpha_1^{d-1}, k_d), \dots, E_d(\alpha_m^{d-1}, k_d)\end{aligned}$$

неслучайны при всех ключах раундов  $k_1, \dots, k_d$ ,  $d < r$ . Тогда описанная выше атака может быть модифицирована следующим образом: для каждого набора ключей  $k_{d+1}, \dots, k_r$  раундов  $d+1, \dots, r$  повторяем описанную выше процедуру нахождения неизвестных ключей  $k_1, \dots, k_d$  раундов  $1, \dots, d$ . Другими словами, ключи  $k_{d+1}, \dots, k_r$  находим полным перебором, а  $k_1, \dots, k_d$  — по описанному выше методу. Для проведения такой комбинированной атаки потребуется количество операций

$$m 2^{\sum_{j=d+1}^r |k_j|} \sum_{j=1}^d 2^{|k_j|},$$

что при некоторых соотношениях параметров может быть меньше, чем количество операций, необходимое при прямом переборе всех ключей.

В качестве объекта экспериментального исследования предложенной атаки был взят шифр RC5. В этом шифре, как видно из его описания, каждый раунд может быть легко разделен на две части, называемые полураундами. Мы в дальнейшем часто будем использовать выражения типа «3.5 раунда» вместо «7 полураундов» (эта терминология является общепринятой в работах, касающихся RC5, RC6 и ряда других шифров). Описание экспериментального исследования мы начнем с анализа степени случайности зашифрованных сообщений в зависимости от числа раундов шифра.

Первый вопрос, который исследовался экспериментально<sup>1</sup>, касался возможности различения зашифрованных при помощи RC5

<sup>1</sup>Вычисления проводились на суперкомпьютерах Института вычислительных технологий СО РАН и Новосибирского государственного университета.



«простых», явно не случайных, последовательностей при разном числе (полу)раундов. Для этого мы использовали в качестве исходной вышеупомянутую последовательность  $\alpha_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , где  $\alpha_i$  — запись числа  $i$  в двоичной системе счисления, под которую отводится 64 бита. (Напомним, что мы рассматриваем RC5 с длиной шифруемого блока 64 бита.) Во всех случаях указанная последовательность зашифровывалась при помощи указанного шифра с заданным количеством полураундов и по полученной последовательности проверялась гипотеза  $H_0$  о том, что двоичная последовательность порождается бернуллиевским источником с равными вероятностями нуля и единицы, против альтернативной гипотезы  $H_1$ , являющейся отрицанием  $H_0$ . В дальнейшем, для того чтобы избежать длинных повторов, мы будем называть эту задачу «гипотезой о случайности». Для проверки этой статистической гипотезы использовался описанный в [14] тест «адаптивный хи-квадрат».

В табл. 9.2 приведены данные по проверке гипотезы о случайности при использовании адаптивного критерия хи-квадрат для RC5 с разным количеством раундов.

**Таблица 9.2. Количество последовательностей (из 100), для которых гипотеза о случайности была отвергнута**

Номер ключа	Число раундов $r$ и длина последовательностей $t$				
	$r = 1$ $t = 2^{18}$	$r = 1.5$ $t = 2^{18}$	$r = 2$ $t = 2^{18}$	$r = 2.5$ $t = 2^{20}$	$r = 3$ $t = 2^{20}$
1	100	63	64	51	52
2	100	100	100	74	70
3	100	61	61	17	17
4	100	81	78	62	64
5	100	100	100	65	6
6	100	85	86	12	9
7	100	100	100	11	8
8	100	98	99	99	99
9	100	80	79	14	14
10	100	100	100	7	5

Все вычисления проводились для 10 случайно выбранных ключей и повторялись 100 раз при шифровании 100 следующих после-

довательностей слов длины  $t$  :

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}, \quad \alpha_t, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{2t-1}, \quad \dots, \\ \alpha_{99t}, \alpha_{99t+1}, \dots, \alpha_{100t-1}.$$

(9.10)

В табл. 9.2 указано количество случаев, когда гипотеза о случайности отвергалась при уровне значимости 0.0001. Например, мы видим из таблицы, что гипотеза о случайности была отвергнута 100 раз из 100 при использовании первого (случайно выбранного) ключа и при длине последовательности  $t = 2^{18}$  слов. Таким образом, мы видим из этой таблицы, что зашифрованные последовательности явно не случайны, так как в противном случае в среднем гипотеза отвергалась бы приблизительно в  $0.0001 \cdot 100 = 0.1$  случаях из 100.

Для большого числа раундов вычисления проводились с меньшим числом вариантов (или повторностей), так как в этом случае требовались последовательности большей длины и соответственно большее время вычислений. Снова проверялась гипотеза о случайности для той же зашифрованной последовательности  $\alpha_0, \dots, \alpha_{t-1}$  с разными (случайно выбранными) ключами и разным числом раундов; результаты приведены в табл. 9.3. Мы видим, что зашифро-

Т а б л и ц а 9.3. Проверка гипотезы о случайности для  
большого числа раундов при уровне  
значимости 0.01

Число раундов	$t$	Количество тестов	Количество случаев, в которых гипотеза о случайности отвергнута
5	$2^{28}$	30	30
5.5	$2^{29}$	22	10
6	$2^{31}$	6	6
6.5	$2^{32}$	6	6
7	$2^{32}$	6	5
7.5	$2^{33}$	3	3
8	$2^{37}$	3	2

ванная последовательность  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}$  довольно надежно отличается от случайной до восьмого раунда.

Как уже было сказано, главное предположение, без выполнения которого градиентная статистическая атака была бы невозможна, состоит в следующем: при дешифровании на любом раунде при

использовании «неправильного» ключа  $k^*$  (вместо «правильного» ключа  $k$ ) случайность выходной последовательности возрастает, тогда как при использовании «правильного»  $k$  — убывает. Выполнение этого предположения проверялось экспериментально по следующей схеме: для трех случайно выбранных ключей 100 вышеописанных сообщений (9.10) шифровались при помощи RC5 до  $j$ -го полураунда. Затем проводилось дешифрование на один полураунд с «истинным» ключом полураунда и с 10 случайно выбранными «неправильными» ключами, и для всех 11 последовательностей оценивалась степень случайности полученных после этого преобразования данных. Отметим, что, в соответствии с нашей гипотезой, разница в степени случайности последовательности, дешифрованной с «правильным» ключом и 10 других, дешифрованных со случайными ключами, должна соответствовать различиям в случайности, получаемым при шифровании в один дополнительный раунд. (Действительно, правильный ключ уменьшает случайность на полураунда, а неправильный — увеличивает случайность на полураунда.)

В табл. 9.4 приведены данные экспериментов для различного количества раундов ( $r$ ) при уровне значимости 0.0001. Параметры теста и длины последовательностей  $t$  определялись в ходе предварительных экспериментов, проводимых по независимым данным, полученным с использованием других случайных ключей.

Поясним результаты первой серии опытов для 2.5 раундов. Оказалось, что среди 100 последовательностей, расшифрованных с правильным ключом полураунда, неслучайными признаны 54 из 100 (при уровне значимости 0.0001), тогда как из 100 последовательностей дешифрованных с первым «неправильным» ключом признано неслучайными только 9 последовательностей, со вторым — 10, с третьим — 10 и т.д.; т.е. последовательности, дешифрованные с правильным ключом, менее случайны, чем последовательности, дешифрованные с неправильными ключами.

Мы видим, что данные, приведенные в таблицах 9.2—9.4, подтверждают предположения, выполнение которых необходимо для принципиальной возможности проведения градиентной статистической атаки: во-первых, случайность зашифрованной последовательности возрастает при увеличении числа полураундов и, во-вторых, случайность последовательности, дешифрованной с неправильным ключом полураунда, больше, чем у дешифрованной с правильным ключом.

Т а б л и ц а 9.4. **Количество «неслучайных» последовательностей (из 100) при дешифровании с истинным и 10 случайными ключами полураундов**

$r = 2.5, \quad t = 2^8$ 

Серия	Истинный ключ	Случайные ключи									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	54	9	10	10	15	13	13	8	10	19	12
2	69	34	34	35	34	36	33	34	36	39	33
3	87	44	37	36	38	38	37	41	42	42	41

$r = 3, \quad t = 2^{16}$ 

Серия	Истинный ключ	Случайные ключи									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	97	81	84	84	81	84	83	84	82	83	83
2	73	35	39	36	32	36	32	33	40	39	42
3	94	0	1	2	0	1	1	0	4	0	1

$r = 3.5, \quad t = 2^{19}$ 

Серия	Истинный ключ	Случайные ключи									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	100	28	16	23	9	15	26	18	17	22	22
2	48	9	10	9	11	10	8	9	10	10	11
3	65	20	21	18	20	19	20	19	19	18	17

Таким образом, градиентная атака на шифр RC5 была реализована. Оказалось, что она позволяет достаточно надежно находить ключи четырех раундов при приемлемом времени вычислений.

Описание шифра RC5

Ввиду того, что градиентная атака рассматривалась по отношению к шифру RC5, мы для полноты изложения приводим описание этого шифра, достаточное для его компьютерной реализации.

Шифр RC5 является предшественником шифра RC6, рассмотренного нами в разд. 8.2. При описании RC5 будем использовать те же обозначения параметров шифра и операций, как ранее для RC6.

В RC5 пользователь задает размер слова  $w$  (16, 32 или 64 бита), количество раундов  $r$  и длину ключа  $l$ . Размер блока составляет два слова. Шифрование и дешифрование блока данных производится с использованием одного и того же так раундового ключа  $W$  длиной

$2r + 2$  слова (нумерация слов с нуля), получаемого из секретного ключа  $K$ .

**Алгоритм 9.1.** RC5: ШИФРОВАНИЕ БЛОКА ДАННЫХ

ВХОД: Блок из двух слов  $(a, b)$ , раундовый ключ  $W$ .

ВЫХОД: Зашифрованный блок  $(a, b)$ .

1.  $a \leftarrow a + W_0, b \leftarrow b + W_1;$
2. FOR  $i = 1, 2, \dots, r$  DO
3.  $a \leftarrow ((a \oplus b) \leftarrow b) + W_{2i},$
4.  $b \leftarrow ((b \oplus a) \leftarrow a) + W_{2i+1};$
5. RETURN  $(a, b)$ .

Для дешифрования «прокручиваем» этот процесс в обратном порядке.

**Алгоритм 9.2.** RC5: ДЕШИФРОВАНИЕ БЛОКА ДАННЫХ

ВХОД: Блок из двух слов  $(a, b)$ , раундовый ключ  $W$ .

ВЫХОД: Дешифрованный блок  $(a, b)$ .

1. FOR  $i = r, r - 1, \dots, 1$  DO
2.  $b \leftarrow ((b - W_{2i+1}) \leftarrow a) \oplus a,$
3.  $a \leftarrow ((a - W_{2i}) \leftarrow b) \oplus b;$
4.  $b \leftarrow b - W_1, a \leftarrow a - W_0;$
5. RETURN  $(a, b)$ .

Для полноты описания шифра приведем также алгоритм формирования раундового ключа. Он практически полностью совпадает с соответствующим алгоритмом для RC6. Как и ранее, обозначим через  $s$  число слов в секретном ключе  $K$ ,  $K = K_0 K_1 \dots K_{s-1}$ . В алгоритме используются «магические» числа  $P_w$  и  $Q_w$ , имеющие те же значения, что и для шифра RC6 (см. табл. 8.1 на стр. 166).

**Алгоритм 9.3.** RC5: ФОРМИРОВАНИЕ РАУНДОВОГО КЛЮЧАВХОД: Секретный ключ  $K$ .ВЫХОД: Раундовый ключ  $W$ .

1.  $W_0 \leftarrow P_w$ ;
2. FOR  $i = 1, 2, \dots, 2r + 1$  DO  $W_i \leftarrow W_{i-1} + Q_w$ ;
3.  $a \leftarrow 0, b \leftarrow 0, i \leftarrow 0, j \leftarrow 0$ ;
4.  $k \leftarrow 3 \max(c, 2r + 2)$ ;
5. DO  $k$  раз
6.  $W_i \leftarrow (W_i + a + b) \leftrightarrow 3, \quad a \leftarrow W_i$ ,
7.  $K_j \leftarrow (K_j + a + b) \leftrightarrow (a + b), \quad b \leftarrow K_j$ ,
8.  $i \leftarrow i + 1 \bmod 2r + 2, \quad j \leftarrow j + 1 \bmod c$ ;
9. RETURN  $W$ .

# ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ И УПРАЖНЕНИЯМ

**1.1.** а.  $k = 17$ . б.  $k = 27$ .

**1.2.** а. ПРИВЕТ ( $k = 5$ ). б. ВЕСНА ( $k = 20$ ).

**2.1.** а.  $5 = 5$ ,  $16 = 6$ ,  $27 = 7$ ,  $-4 = 6$ ,  $-13 = -3 = 7$ ,  $3 + 8 = 1$ ,  $3 - 8 = 5$ ,  $3 \cdot 8 = 4$ ,  $3 \cdot 8 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 0 \pmod{10}$ . б.  $5 = 5$ ,  $16 = 5$ ,  $27 = 5$ ,  $-4 = 7$ ,  $-13 = -2 = 9$ ,  $3 + 8 = 0$ ,  $3 - 8 = 6$ ,  $3 \cdot 8 = 2$ ,  $3 \cdot 8 \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10 \pmod{11}$ .

**2.2.**  $2^8 \pmod{10} = 6$ ,  $3^7 \pmod{10} = 7$ ,  $7^{19} \pmod{100} = 43$ ,  $7^{57} \pmod{100} = 7$ .

**2.3.**  $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ ,  $77 = 7 \cdot 11$ ,  $65 = 5 \cdot 13$ ,  $30 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ ,  $159 = 3 \cdot 53$ .

**2.4.** пары  $(25, 12)$  и  $(40, 27)$  взаимно просты, другие — нет (числа  $(25, 15)$  делятся на 5,  $(13, 39)$  делятся на 13).

**2.5.**  $\varphi(14) = 6$ ,  $\varphi(20) = 8$ .

**2.6.**  $\varphi(53) = 52$ ,  $\varphi(21) = \varphi(7) \cdot \varphi(3) = 6 \cdot 2 = 12$ ,  $\varphi(159) = 2 \cdot 52 = 104$ .

**2.7.**  $3^{13} \pmod{13} = 3 \cdot 3^{12} \pmod{13} = 3$ ,  $5^{22} \pmod{11} = 5^2 \cdot 5^{10} \cdot 5^{10} \pmod{11} = 25 \pmod{11} = 3$ ,  $3^{17} \pmod{5} = 3$ .

**2.8.**  $3^9 \pmod{20} = 3 \cdot 3^8 \pmod{20} = 3$ ,  $2^{14} \pmod{21} = 2^2 \cdot 2^{12} \pmod{21} = 4$ ,  $2^{107} \pmod{159} = 2^3 \cdot 2^{104} \pmod{159} = 8$ .

**2.9.**  $\gcd(21, 12) = 3$ ,  $\gcd(30, 12) = 6$ ,  $\gcd(24, 40) = \gcd(40, 24) = 8$ ,  $\gcd(33, 16) = 1$ .

**2.10.** а.  $x = -1$ ,  $y = 2$ . б.  $x = 1$ ,  $y = -2$ . в.  $x = 2$ ,  $y = -1$ . г.  $x = 1$ ,  $y = -2$ .

**2.11.**  $3^{-1} \pmod{7} = 5$ ,  $5^{-1} \pmod{8} = 5$ ,  $3^{-1} \pmod{53} = 18$ ,  $10^{-1} \pmod{53} = 16$ .

**2.12.** Простые числа, меньшие 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 73, 79, 83, 89, 97. Из них числа 5, 7, 11, 23, 47, 59 и 83 соответствуют виду  $p = 2q + 1$ .

**2.13.** При  $p = 11$  в качестве параметра  $g$  могут быть выбраны числа 2, 6, 7 и 8.

**2.14.** а.  $Y_A = 20$ ,  $Y_B = 17$ ,  $Z_{AB} = 21$ . б.  $Y_A = 13$ ,  $Y_B = 14$ ,  $Z_{AB} = 10$ . в.  $Y_A = 21$ ,  $Y_B = 9$ ,  $Z_{AB} = 16$ . г.  $Y_A = 8$ ,  $Y_B = 5$ ,  $Z_{AB} = 9$ . д.  $Y_A = 6$ ,  $Y_B = 17$ ,  $Z_{AB} = 16$ .

**2.15.** а.  $d_A = 11$ ,  $d_B = 13$ ,  $x_1 = 17$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 6$ ,  $x_4 = 4$ . б.  $d_A = 3$ ,  $d_B = 19$ ,  $x_1 = 8$ ,  $x_2 = 12$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 6$ . в.  $d_A = 5$ ,  $d_B = 11$ ,  $x_1 = 14$ ,  $x_2 = 10$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 10$ . г.  $d_A = 5$ ,  $d_B = 15$ ,  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = 21$ ,  $x_3 = 14$ ,  $x_4 = 17$ . д.  $d_A = 11$ ,  $d_B = 5$ ,  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 8$ ,  $x_4 = 9$ .

**2.16.** а.  $d_B = 13$ ,  $r = 14$ ,  $e = 12$ ,  $m' = 5$ . б.  $d_B = 16$ ,  $r = 9$ ,  $e = 15$ ,  $m' = 10$ . в.  $d_B = 15$ ,  $r = 16$ ,  $e = 14$ ,  $m' = 10$ . г.  $d_B = 21$ ,  $r = 14$ ,  $e = 12$ ,  $m' = 5$ . д.  $d_B = 8$ ,  $r = 5$ ,  $e = 5$ ,  $m' = 10$ .

**2.17.** а.  $N_A = 55$ ,  $\varphi(N_A) = 40$ ,  $c_A = 27$ ,  $e = 23$ ,  $m' = 12$ . б.  $N_A = 65$ ,  $\varphi(N_A) = 48$ ,  $c_A = 29$ ,  $e = 50$ ,  $m' = 20$ . в.  $N_A = 77$ ,  $\varphi(N_A) = 60$ ,  $c_A = 43$ ,  $e = 52$ ,  $m' = 17$ . г.  $N_A = 91$ ,  $\varphi(N_A) = 72$ ,  $c_A = 29$ ,  $e = 88$ ,  $m' = 30$ . д.  $N_A = 33$ ,  $\varphi(N_A) = 20$ ,  $c_A = 7$ ,  $e = 9$ ,  $m' = 15$ .

**2.18.**  $m = 111$ .

**3.1.** а.  $x = 17$ . б.  $x = 10$ . в.  $x = 28$ . г.  $x = 14$ . д.  $x = 30$ .

**3.2.** а.  $x = 20$ . б.  $x = 45$ . в.  $x = 34$ . г.  $x = 53$ . д.  $x = 25$ .

**3.3.** а.  $x = 10000$ . б.  $x = 20000$ . в.  $x = 1000$ . г.  $x = 12345$ . д.  $x = 25000$ .

**4.1.** а.  $s = 28$ . б.  $s = 30$ . в.  $s = 26$ . г.  $s = 71$ . д.  $s = 18$ .

**4.2.** а.  $\langle 7, 28 \rangle$  подлинно,  $\langle 22, 15 \rangle$  нет,  $\langle 16, 36 \rangle$  подлинно. б.  $\langle 6, 42 \rangle$  нет,  $\langle 10, 30 \rangle$  да,  $\langle 6, 41 \rangle$  да. в.  $\langle 13, 41 \rangle$  да,  $\langle 11, 28 \rangle$  нет,  $\langle 5, 26 \rangle$  да. г.  $\langle 15, 71 \rangle$  да,  $\langle 11, 46 \rangle$  нет,  $\langle 16, 74 \rangle$  да. д.  $\langle 10, 14 \rangle$  нет,  $\langle 24, 18 \rangle$  да,  $\langle 17, 8 \rangle$  да.

**4.3.** а.  $y = 22$ ,  $r = 10$ ,  $u = 15$ ,  $k^{-1} = 15$ ,  $s = 5$ . б.  $y = 9$ ,  $r = 19$ ,  $u = 13$ ,  $k^{-1} = 3$ ,  $s = 17$ . в.  $y = 10$ ,  $r = 21$ ,  $u = 11$ ,  $k^{-1} = 17$ ,  $s = 11$ . г.  $y = 6$ ,  $r = 17$ ,  $u = 7$ ,  $k^{-1} = 19$ ,  $s = 1$ . д.  $y = 11$ ,  $r = 7$ ,  $u = 18$ ,  $k^{-1} = 7$ ,  $s = 16$ .



**4.4. а.**  $\langle 15; 20, 3 \rangle$  да ( $y^r = 1$ ,  $r^s = 19$ ,  $g^h = 19$ ),  $\langle 15; 10, 5 \rangle$  да ( $y^r = 1$ ,  $r^s = 19$ ,  $g^h = 19$ ),  $\langle 15; 19, 3 \rangle$  нет ( $y^r = 22$ ,  $r^s = 5$ ,  $g^h = 19 \neq 18$ ). **б.**  $\langle 5; 19, 17 \rangle$  да ( $y^r = 13$ ,  $r^s = 21$ ,  $g^h = 20$ ),  $\langle 7; 17, 8 \rangle$  нет ( $y^r = 3$ ,  $r^s = 18$ ,  $g^h = 17 \neq 8$ ),  $\langle 6; 17, 8 \rangle$  да ( $y^r = 3$ ,  $r^s = 18$ ,  $g^h = 8$ ). **в.**  $\langle 3; 17, 12 \rangle$  да ( $y^r = 17$ ,  $r^s = 6$ ,  $g^h = 10$ ),  $\langle 2; 17, 12 \rangle$  нет ( $y^r = 17$ ,  $r^s = 6$ ,  $g^h = 2 \neq 10$ ),  $\langle 8; 21, 11 \rangle$  да ( $y^r = 7$ ,  $r^s = 22$ ,  $g^h = 16$ ). **г.**  $\langle 5; 17, 1 \rangle$  да ( $y^r = 12$ ,  $r^s = 17$ ,  $g^h = 20$ ),  $\langle 5; 11, 3 \rangle$  да ( $y^r = 1$ ,  $r^s = 20$ ,  $g^h = 20$ ),  $\langle 5; 17, 10 \rangle$  нет ( $y^r = 12$ ,  $r^s = 4$ ,  $g^h = 20 \neq 2$ ). **д.**  $\langle 15; 7, 1 \rangle$  нет ( $y^r = 7$ ,  $r^s = 7$ ,  $g^h = 19 \neq 3$ ),  $\langle 10; 15, 3 \rangle$  да ( $y^r = 10$ ,  $r^s = 17$ ,  $g^h = 9$ ),  $\langle 15; 7, 16 \rangle$  да ( $y^r = 7$ ,  $r^s = 6$ ,  $g^h = 19$ ).

**4.5. а.**  $y = 14$ ,  $r = 3$ ,  $s = 8$ . **б.**  $y = 24$ ,  $r = 3$ ,  $s = 5$ . **в.**  $y = 40$ ,  $r = 9$ ,  $s = 2$ . **г.**  $y = 22$ ,  $r = 9$ ,  $s = 5$ . **д.**  $y = 64$ ,  $r = 7$ ,  $s = 10$ .

**4.6. а.**  $\langle 10; 4, 5 \rangle$  нет ( $h^{-1} = 10$ ,  $u_1 = 6$ ,  $u_2 = 4$ ,  $a^{u_1} = 62$ ,  $y^{u_2} = 25$ ,  $v = 9 \neq 4$ ),  $\langle 10; 7, 5 \rangle$  да ( $h^{-1} = 10$ ,  $u_1 = 6$ ,  $u_2 = 7$ ,  $a^{u_1} = 62$ ,  $y^{u_2} = 59$ ,  $v = 7$ ),  $\langle 10; 3, 8 \rangle$  да ( $h^{-1} = 10$ ,  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 3$ ,  $a^{u_1} = 14$ ,  $y^{u_2} = 64$ ,  $v = 3$ ). **б.**  $\langle 1; 3, 5 \rangle$  да ( $h^{-1} = 1$ ,  $u_1 = 5$ ,  $u_2 = 8$ ,  $a^{u_1} = 40$ ,  $y^{u_2} = 64$ ,  $v = 3$ ),  $\langle 1; 4, 3 \rangle$  да ( $h^{-1} = 1$ ,  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 7$ ,  $a^{u_1} = 14$ ,  $y^{u_2} = 25$ ,  $v = 4$ ),  $\langle 1; 4, 5 \rangle$  нет ( $h^{-1} = 1$ ,  $u_1 = 5$ ,  $u_2 = 7$ ,  $a^{u_1} = 40$ ,  $y^{u_2} = 25$ ,  $v = 7 \neq 4$ ). **в.**  $\langle 7; 7, 4 \rangle$  да ( $h^{-1} = 8$ ,  $u_1 = 10$ ,  $u_2 = 10$ ,  $a^{u_1} = 59$ ,  $y^{u_2} = 62$ ,  $v = 7$ ),  $\langle 7; 9, 2 \rangle$  нет ( $h^{-1} = 8$ ,  $u_1 = 5$ ,  $u_2 = 5$ ,  $a^{u_1} = 40$ ,  $y^{u_2} = 14$ ,  $v = 2 \neq 9$ ),  $\langle 5; 9, 2 \rangle$  да ( $h^{-1} = 9$ ,  $u_1 = 7$ ,  $u_2 = 7$ ,  $a^{u_1} = 9$ ,  $y^{u_2} = 22$ ,  $v = 9$ ). **г.**  $\langle 6; 9, 5 \rangle$  да ( $h^{-1} = 2$ ,  $u_1 = 10$ ,  $u_2 = 4$ ,  $a^{u_1} = 59$ ,  $y^{u_2} = 24$ ,  $v = 9$ ),  $\langle 8; 8, 3 \rangle$  нет ( $h^{-1} = 7$ ,  $u_1 = 10$ ,  $u_2 = 10$ ,  $a^{u_1} = 59$ ,  $y^{u_2} = 64$ ,  $v = 2 \neq 8$ ),  $\langle 7; 4, 1 \rangle$  да ( $h^{-1} = 8$ ,  $u_1 = 8$ ,  $u_2 = 1$ ,  $a^{u_1} = 24$ ,  $y^{u_2} = 22$ ,  $v = 4$ ). **д.**  $\langle 10; 7, 3 \rangle$  да ( $h^{-1} = 10$ ,  $u_1 = 8$ ,  $u_2 = 7$ ,  $a^{u_1} = 24$ ,  $y^{u_2} = 24$ ,  $v = 7$ ),  $\langle 7; 7, 10 \rangle$  да ( $h^{-1} = 8$ ,  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 10$ ,  $a^{u_1} = 14$ ,  $y^{u_2} = 22$ ,  $v = 7$ ),  $\langle 8; 7, 5 \rangle$  нет ( $h^{-1} = 7$ ,  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 6$ ,  $a^{u_1} = 22$ ,  $y^{u_2} = 59$ ,  $v = 3 \neq 7$ ).

**5.1. а.**  $d_A = 17$ ,  $d_B = 9$ , Алиса получает  $\gamma$ , Боб —  $\beta$ ; по каналу связи передаются числа (11, 20, 21), (11), (14, 10), (17). **б.**  $d_A = 19$ ,  $d_B = 3$ , Алиса получает  $\gamma$ , Боб —  $\alpha$ ; по каналу связи передаются числа (17, 19, 5), (19), (15, 19), (19). **в.**  $d_A = 7$ ,  $d_B = 15$ , Алиса получает  $\alpha$ , Боб —  $\beta$ ; по каналу связи передаются числа (11, 7, 10), (7), (11, 20), (21). **г.**  $d_A = 5$ ,  $d_B = 19$ , Алиса получает  $\alpha$ , Боб —  $\beta$ ; по каналу связи передаются числа (21, 15, 11), (11), (10, 11), (5).

д.  $d_A = 3$ ,  $d_B = 9$ , Алиса получает  $\alpha$ , Боб —  $\gamma$ ; по каналу связи передаются числа  $(19, 14, 17)$ ,  $(19)$ ,  $(21, 15)$ ,  $(15)$ .

**5.2.** а.  $\hat{n} = 103$ ,  $\hat{s} = 52$ ,  $r^{-1} = 24$ , банкнота  $\langle 11, 58 \rangle$ . б.  $\hat{n} = 13$ ,  $\hat{s} = 13$ ,  $r^{-1} = 20$ , банкнота  $\langle 99, 22 \rangle$ . в.  $\hat{n} = 58$ ,  $\hat{s} = 74$ ,  $r^{-1} = 12$ , банкнота  $\langle 55, 55 \rangle$ . г.  $\hat{n} = 37$ ,  $\hat{s} = 46$ ,  $r^{-1} = 8$ , банкнота  $\langle 44, 11 \rangle$ . д.  $\hat{n} = 49$ ,  $\hat{s} = 70$ ,  $r^{-1} = 4$ , банкнота  $\langle 77, 42 \rangle$ .

**6.1.** Из указанного списка кривой принадлежат только точки  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$  и  $(5, 8)$ .

**6.2.**  $[2](2, 2) = (3, 5)$ ,  $[2](4, 6) = (1, 3)$ ,  $(1, 3) + (1, 4) = \mathcal{O}$ ,  $(2, 2) + (3, 2) = (2, 5)$ ,  $(3, 5) + (5, 1) = (3, 2)$ .

**7.1.** а.  $\bar{e} = 1111001110$ . б.  $\bar{e} = 1111110101$ . в.  $\bar{e} = 0001000110$ . г.  $\bar{e} = 0101011011$ . д.  $\bar{e} = 0001010001$ .

**7.2.** а.  $P_1 \approx 0.002$ ,  $P_2 \approx 0.006$ ,  $P_3 \approx 0.623$ ,  $P_4 \approx 0.051$ ,  $P_5 \approx 0.311$ ,  $P_6 \approx 0.007$ . б.  $P_1 \approx 0.000$ ,  $P_2 \approx 0.009$ ,  $P_3 \approx 0.000$ ,  $P_4 \approx 0.000$ ,  $P_5 \approx 0.892$ ,  $P_6 \approx 0.099$ . в.  $P_1 \approx 0.000$ ,  $P_2 \approx 0.697$ ,  $P_3 \approx 0.000$ ,  $P_4 \approx 0.004$ ,  $P_5 \approx 0.299$ ,  $P_6 \approx 0.000$ . г.  $P_1 \approx 0.003$ ,  $P_2 \approx 0.000$ ,  $P_3 \approx 0.036$ ,  $P_4 \approx 0.000$ ,  $P_5 \approx 0.801$ ,  $P_6 \approx 0.160$ . д.  $P_1 \approx 0.196$ ,  $P_2 \approx 0.000$ ,  $P_3 \approx 0.001$ ,  $P_4 \approx 0.000$ ,  $P_5 \approx 0.018$ ,  $P_6 \approx 0.785$ .

**7.3.** а.  $H \approx 1.16$ ,  $n \approx 6.04$ . б.  $H \approx 0.52$ ,  $n \approx 2.42$ . в.  $H \approx 0.9$ ,  $n \approx 3.76$ . г.  $H \approx 1.08$ ,  $n \approx 5.08$ . д.  $H \approx 1.16$ ,  $n \approx 6.04$ .

**7.4.** а.  $P_1 \approx 0.7$  ( $\bar{m} = bcacbcacc$ ),  $P_2 = 0$ ,  $P_3 \approx 0.3$  ( $\bar{m} = acbcacbcc$ ),  $P_4 = 0$ ,  $P_5 = 0$ ,  $P_6 = 0$ . б.  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 0$ ,  $P_3 = 0$ ,  $P_4 \approx 0.21$  ( $\bar{m} = bccccaccac$ ),  $P_5 \approx 0.20$  ( $\bar{m} = abbbcbcb$ ),  $P_6 \approx 0.59$  ( $\bar{m} = acccbccbc$ ). в.  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 0$ ,  $P_3 = 0$ ,  $P_4 = 1$  ( $\bar{m} = ccbcabccb$ ),  $P_5 = 0$ ,  $P_6 = 0$ . г.  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 0$ ,  $P_3 \approx 0.000$  ( $\bar{m} = acbbbbbcb$ ),  $P_4 \approx 1.000$  ( $\bar{m} = abccccbcc$ ),  $P_5 = 0$ ,  $P_6 = 0$ . д.  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 0$ ,  $P_3 \approx 0.009$  ( $\bar{m} = bbbcbcbcb$ ),  $P_4 \approx 0.970$  ( $\bar{m} = cccbccbcb$ ),  $P_5 = 0$ ,  $P_6 \approx 0.021$  ( $\bar{m} = cccaccacc$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.** Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 383 с.
2. **Введение в криптографию** / Под общ. ред. В. В. Яценко. – М.: МЦНМО: «ЧеРо», 2000. – 287 с.
3. **Виноградов И. М.** Основы теории чисел. – М.: Наука, 1972. – 402 с.
4. **Галлагер Р.** Теория информации и надежная связь. – М.: Советское радио, 1974. – 425 с.
5. **ГОСТ 28147-89.** Системы обработки информации. Защита криптографическая. Алгоритм криптографического преобразования данных.
6. **ГОСТ Р34.10-94.** Информационная технология. Криптографическая защита информации. Процедуры выработки и проверки электронной цифровой подписи на базе асимметричного криптографического алгоритма.
7. **ГОСТ Р34.11-94.** Информационная технология. Криптографическая защита информации. Функция хэширования.
8. **ГОСТ Р34.10-2001.** Процессы формирования и проверки электронной цифровой подписи.
9. **Кнут Д.** Искусство программирования для ЭВМ. В 3-х томах. Т. 2. Получисленные алгоритмы. – М.: Мир, 1977. – 724 с.
10. **Рябко Б. Я.** Просто реализуемая идеальная криптографическая система // Проблемы передачи информации. – 2000. – Т. 36, № 1. – С. 90–104.
11. **Рябко Б. Я.** Быстрая нумерация комбинаторных объектов // Дискретная математика. – 1998. – Т. 10, № 2. – С. 101–119.

12. **Рябко Б. Я.** Сжатие данных с помощью стопки книг // Проблемы передачи информации. – 1980. – Т. 16, № 4. – С. 16–21.
13. **Рябко Б. Я., Пестунов А. И.** «Сторка книг» как новый статистический тест для случайных чисел // Проблемы передачи информации. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 73–78.
14. **Рябко Б. Я., Стогниенко В. С., Шокин Ю. И.** Адаптивный критерий хи-квадрат для различения близких гипотез при большом числе классов и его применение к некоторым задачам криптографии // Проблемы передачи информации. – 2003. – Т. 30, № 2. – С. 53–62.
15. **Рябко Б. Я., Фионов А. Н.** Быстрый метод полной рандомизации сообщений // Проблемы передачи информации. – 1997. – Т. 33, № 3. – С. 3–14.
16. **Рябко Б. Я., Фионов А. Н.** Эффективный метод адаптивного арифметического кодирования для источников с большими алфавитами // Проблемы передачи информации. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 1–14.
17. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. – М.: Мир, 1984. – Т 1. – 527 с.
18. **Фионов А. Н.** Эффективный метод рандомизации сообщений на основе арифметического кодирования // Дискретный анализ и исследование операций. – 1997. – Т. 4, № 2. – С. 51–74.
19. **Шеннон К.** Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИЛ, 1963. – С. 333–369 (Теория связи в секретных системах).
20. **Blake I., Seroussi G., Smart N.** Elliptic Curves in Cryptography. – Cambridge University Press, 1999. – 204 p.
21. **Daemen J., Rijmen V.** The Rijndael Block Cipher.  
см. <http://csrc.nist.gov/encryption/aes/rijndael/>.
22. **Diffie W., Hellman M. E.** New directions in cryptography // IEEE Transactions on Information Theory. – 1976. – V. 22. – P. 644–654.

23. **FIPS 180-1**. Secure hash standard.  
см. <http://csrc.nist.gov/publications/>.
24. **FIPS 186-2**. Digital signature standard.  
см. <http://csrc.nist.gov/publications/>.
25. **FIPS 197**. Advanced encryption standard.  
см. <http://csrc.nist.gov/publications/>.
26. **Goldwasser S., Bellare M.** Lecture notes on cryptography.  
<http://www-cse.ucsd.edu/users/mihir/crypto-lecnotes.html>
27. **Menezes A.** Elliptic Curve Public Key Cryptosystems. – Kluwer Academic Publishers, 1993.
28. **Menezes A., van Oorschot P., Vanstone S.** Handbook of Applied Cryptography. – CRC Press, 1996. – 661 p.  
<http://www.cacr.math.uwaterloo.ca/hac/>.
29. **Rukhin A. et al.** A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications // NIST Special Publication 800-22 (rev. May,15,2001).  
<http://csrc.nist.gov/rng/SP800-22b.pdf>.
30. **Ryabko B., Fionov A.** Efficient homophonic coding // IEEE Transactions on Information Theory. – 1999. – V. 45, N. 6. – P. 2083–2091.
31. **Ryabko B., Fionov A.** Fast and space-efficient adaptive arithmetic coding // Cryptography and Coding. – Berlin: Springer, 1999. – P. 270–279 (Lecture Notes in Computer Science; V. 1746).
32. **Ryabko B., Matchikina E.** Fast and efficient construction of an unbiased random sequence // IEEE Transactions on Information Theory. – 2000. – V. 46, N 3. – P. 1090–1093.
33. **Ryabko B. Ya., Monarev V. A.** Using information theory approach to randomness testing // Journal of Statistical Planning and Inference. – 2005.
34. **Schneier B.** Applied Cryptography, Second Edition: Protocols, Algorithms, and Source Code in C. – Wiley, 1996.

35. **Schneier B.** Self-study course in block cipher cryptanalysis // Cryptologia. – 2000. – V. 24, N. 1. – P. 18–34.  
<http://www.counterpane.com/self-study.html>.
36. **Silverman J. H.** The Arithmetic of Elliptic Curves. – Springer-Verlag, GTM 106, 1986.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

## алгоритм (algorithm)

возведения в степень (exponentiation), 27, 28

Евклида (Euclidean algorithm), 24

исчисления порядка (index-calculus algorithm), 45

обобщенный Евклида (extended Euclidean algorithm), 24, 25

Схоуфа (Schoof's algorithm), 117

«шаг младенца, шаг великана»

(“baby-step, giant-step” algorithm), 15, 43

Number Field Sieve, 49

RC4, 183

## атака (attack), 8

методом грубой силы (brute-force attack), 8

на систему Диффи–Хеллмана, 89

по выбранному тексту (chosen-plaintext attack), 10, 202

по известному тексту (known-plaintext attack), 10

по шифротексту (ciphertext-only attack), 10

статистическая (statistical attack), 201

## генератор (generator)

линейный конгруэнтный (linear congruential generator), 180, 198

псевдослучайных чисел (pseudo-random number generator), 192

случайных чисел (random number generator), 190

## дискретный логарифм (discrete logarithm), 13, 46

Диффи–Хеллмана система, 19, 89

доказательство с нулевым знанием (zero-knowledge proof), 70

## Евклида

алгоритм, 24

алгоритм обобщенный, 24, 25

## задача

- дискретного логарифмирования (discrete logarithm problem), 41
- дискретного логарифмирования на эллиптической кривой (elliptic curve discrete logarithm problem), 105
- о нахождении гамильтонова цикла (Hamiltonian cycle problem), 75
- о раскраске графа (graph coloring problem), 71

избыточность (redundancy), 10, 86, 142

инверсия (inverse), 26, 56

## канал (channel)

- закрытый (secure channel), 6
- защищенный (secure channel), 6
- открытый (open channel), 5

## ключ (key)

- открытый (public key), 19, 32, 35, 55
- раундовый (round key), 162
- секретный (secret key, private key), 7, 19, 32, 35, 55
- шифра (cipher key), 7

## криптосистема (cryptosystem), 7

- строго идеальная (strongly ideal cryptosystem), 148

наибольший общий делитель (greatest common divisor), 23

Нидхама–Шредера протокол, 92

правило Керкхоффа (Kerckhoffs' assumption), 8

## протокол (protocol)

- взаимной идентификации (mutual identification), 88
- идентификации (identification protocol), 88
- криптографический (cryptographic protocol), 29, 65
- ментальный покер (mental poker), 66
- Нидхама–Шредера (Needham–Schroeder protocol), 92
- электронные деньги (digital cash protocol), 82

расстояние единственности (unicity distance), 144

раунд шифра (cipher round), 159



режим (mode)

СВС (сцепления блоков шифра), 178

CTR (счетчика), 182

ЕСВ (электронной кодовой книги), 177

OFB (обратной связи по выходу), 181

блокового шифра (block cipher mode), 177

сертификация открытых ключей (public key certification), 59, 89

система

RSA, 34, 72, 78, 84, 85, 195

Диффи–Хеллмана, 19, 89

слепая подпись (blind signature), 84

совершенная секретность (perfect secrecy), 133, 134

сообщение (message, plaintext), 7

подписанное (signed message), 54, 56, 60

статистический тест (statistical test), 195

стойкость шифра (cipher security), 9

структура Фейстела (Feistel structure), 161

Схоуфа алгоритм, 117

теорема

Ферма (Fermat theorem), 22

Эйлера (Euler theorem), 22

теоретическая стойкость (theoretical security), 132

удельная энтропия (entropy rate), 141

Фейстела структура, 161

Ферма теорема, 22

функция

односторонняя (one-way function), 13

односторонняя с лазейкой (trapdoor function), 34, 36

Эйлера (Euler totient function), 21

хеш-функция (hash function), 53, 128, 185

цифровая подпись (digital signature), 53

DSA, 59, 62

RSA, 53

ГОСТ Р34.10-2001, 110

ГОСТ Р34.10-94, 59

Эль-Гамала, 56

числа

взаимнопростые (coprime, relatively prime numbers), 21

гладкие (smooth numbers), 45

число

простое (prime number), 21

псевдослучайное (pseudo-random number), 189

случайное (random number), 188

Шамира шифр, 29

Шеннона

теория секретных систем, 131, 134, 144, 148

энтропия, 136

шифр (cipher), 6

DES, 160

RC5, 207, 211

RC6, 164

Rijndael, 107, 167

блоковый (block cipher), 159

Вернама, 134

ГОСТ 28147-89, 161

поточковый (stream cipher), 180

строго идеальный (strongly ideal cipher), 148

Цезаря, 6

Шамира, 29

Эль-Гамала, 31

Эль-Гамала на эллиптической кривой, 109

шифротекст (ciphertext), 7

Эйлера

теорема, 22

функция, 21

электронная подпись, *см.* цифровая подпись

- эллиптическая кривая (elliptic curve), 98
  - аффинное представление (affine representation), 112
  - композиция точек (point composition, point addition), 100
  - полином деления (division polynomial), 119
  - проективное представление (projective representation), 113
  - сингулярная (singular), 98
  - торсионная точка (torsion point), 119
  - точка в бесконечности (point at infinity), 100
  - удвоение точки (point doubling), 101
- Эль-Гамаль
  - подпись, 53
  - шифр, 31, 109
- энтропия, *см.* энтропия Шеннона
- энтропия Шеннона (Shannon entropy), 136
- S-бокс, 163, 168

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . . 3

1. Введение . . . . . 5

    Задачи и упражнения . . . . . 11

2. Криптосистемы с открытым ключом . . . . . 12

    2.1. Предыстория и основные идеи . . . . . 12

    2.2. Первая система с открытым ключом — система Диффи–Хеллмана . . . . . 18

    2.3. Элементы теории чисел . . . . . 21

    2.4. Шифр Шамира . . . . . 28

    2.5. Шифр Эль-Гамала . . . . . 31

    2.6. Односторонняя функция с «лазейкой» и шифр RSA . . 34

    Задачи и упражнения . . . . . 38

    Темы лабораторных работ . . . . . 40

3. Методы взлома шифров, основанных на дискретном логарифмировании . . . . . 41

    3.1. Постановка задачи . . . . . 41

    3.2. Метод «шаг младенца, шаг великана» . . . . . 43

    3.3. Алгоритм исчисления порядка . . . . . 45

    Задачи и упражнения . . . . . 50

    Темы лабораторных работ . . . . . 51

4. Электронная, или цифровая подпись . . . . . 52

    4.1. Электронная подпись RSA . . . . . 52

    4.2. Электронная подпись на базе шифра Эль-Гамала . . . 55

    4.3. Стандарты на электронную (цифровую) подпись . . . . 58

    Задачи и упражнения . . . . . 62

    Темы лабораторных работ . . . . . 64

<b>5. Криптографические протоколы . . . . .</b>	<b>65</b>
5.1. Ментальный покер . . . . .	65
5.2. Доказательства с нулевым знанием . . . . .	70
Задача о раскраске графа . . . . .	71
Задача о нахождении гамильтонова цикла в графе . . . . .	75
5.3. Электронные деньги . . . . .	82
5.4. Взаимная идентификация . . . . .	с
установлением ключа . . . . .	88
Задачи и упражнения . . . . .	95
Темы лабораторных работ . . . . .	96
<b>6. Криптосистемы на эллиптических кривых . . . . .</b>	<b>97</b>
6.1. Введение . . . . .	97
6.2. Математические основы . . . . .	98
6.3. Выбор параметров кривой . . . . .	106
6.4. Построение криптосистем . . . . .	108
Шифр Эль-Гамала на эллиптической кривой . . . . .	109
Цифровая подпись по ГОСТ Р34.10-2001 . . . . .	110
6.5. Эффективная реализация операций . . . . .	111
6.6. Определение количества точек на кривой . . . . .	117
6.7. Использование стандартных кривых . . . . .	126
Задачи и упражнения . . . . .	129
Темы лабораторных работ . . . . .	129
<b>7. Теоретическая стойкость криптосистем . . . . .</b>	<b>131</b>
7.1. Введение . . . . .	131
7.2. Теория систем с совершенной секретностью . . . . .	132
7.3. Шифр Вернама . . . . .	134
7.4. Элементы теории информации . . . . .	135
7.5. Расстояние единственности шифра с секретным ключом . . . . .	142
7.6. Идеальные криптосистемы . . . . .	148
Задачи и упражнения . . . . .	154
<b>8. Современные шифры с секретным ключом . . . . .</b>	<b>156</b>
8.1. Введение . . . . .	156
8.2. Блочные шифры . . . . .	159
Шифр ГОСТ 28147-89 . . . . .	161
Шифр RC6 . . . . .	164
Шифр Rijndael (AES) . . . . .	167

8.3. Основные режимы функционирования блочных шифров . . . . .	177
Режим ECB . . . . .	177
Режим CBC . . . . .	178
8.4. Поточковые шифры . . . . .	179
Режим OFB блочного шифра . . . . .	181
Режим CTR блочного шифра . . . . .	182
Алгоритм RC4 . . . . .	183
8.5. Криптографические хеш-функции . . . . .	185
<b>9. Случайные числа в криптографии . . . . .</b>	<b>188</b>
9.1. Введение . . . . .	188
9.2. Задачи, возникающие при использовании физических генераторов случайных чисел . . . . .	190
9.3. Генераторы псевдослучайных чисел . . . . .	192
9.4. Тесты для проверки генераторов случайных и псевдослучайных чисел . . . . .	195
9.5. Статистическая атака на блочные шифры . . . . .	200
<b>Ответы к задачам и упражнениям . . . . .</b>	<b>214</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>218</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>222</b>

Учебное издание

Борис Яковлевич **Рябко**

Андрей Николаевич **Фионов**

Криптографические методы защиты информации

*Учебное пособие*