Глава 2 Комбинаторика

2.1 Комбинаторные задачи и основные принципы

2.1.1 Комбинаторные задачи

Для формулировки и решения комбинаторных задач используются различные модели комбинаторных конфигураций. Рассмотрим две наиболее популярные.

1. Дано n предметов. Их нужно разместить по m ящикам так, чтобы выполнялись заданные ограничения. Сколькими способами это можно сделать?

Дано множество функций $F : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$,

$X = \{1,2,\ldots,n\}$ $Y = \{1,2,\ldots,m\}$, $F = [F(1),\ldots,F(n)]$, $1 \le F(i) \le m$.

Сколько существует функций, удовлетворяющих заданным ограничениям?

2.1.2 Основные комбинаторные принципы

Утверждение 2.1

Если $A \cap B = \varnothing$ и $|A| = m$, $|B| = n$,то

$|A \cup B| = n+m = |A| + |B|$

Теорема 2.1 (о произведении множеств):

Для любых множеств A и B $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Правило суммы (**комбинаторный принцип сложения**)

Если объект $\alpha \in A$ можно выбрать m способами, а объект $\beta \in B$, отличный от α, n способами, причем α и β нельзя выбрать одновременно, то осуществить выбор «либо α, либо β» можно $m+n$ способами.

Правило произведения (**комбинаторный принцип умножения**)

Если объект $\alpha \in A$ можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора можно выбрать n способами объект $\beta \in B$, то выбор обоих объектов α и β в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Пример: 1) в киоске 5 вариантов снеков, 6 различных напитков. Сколько вариантов выбрать снек и напиток?

5*6=30

2) В салоне связи 20 моделей телефонов, 15 чехлов, 6 тарифных планов.

20*15*6=1800

2.2 ***Комбинаторные конфигурации***

2.2.1 Перестановки и подстановки

Пусть дано множество $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Перестановкой* элементов множества M называется любой упорядоченный набор из n различных элементов множества M.

Перестановки различаются только порядком входящих в них элементов.

Число перестановок объема n принято обозначать как P_n.

Утверждение 2.3 $P_n = n!$

Перестановка элементов множества *M* может быть задана посредством *функции подстановки*.

Будем определять подстановку как биекцию $\sigma : M \to M$ и задавать ее с помощью матрицы, состоящей из двух строк.

Пусть множество M = {1,2,…,n}, а $\sigma(k) = s_k$, $1 \le s_k \le n$, k=1,…,n, $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} = \{1,2,\ldots,n\}$.

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{pmatrix}$$

перестановка столбцов в этой матрице не меняет задаваемой ею подстановки.

Если заданы две подстановки σ и τ своими матрицами $[\sigma]$ и $[\tau]$, то их *произведение* $\sigma\cdot\tau$ определяется следующим образом. В матрице $[\tau]$ столбцы переставляются так, чтобы ее первая строка совпала со второй строкой матрицы $[\sigma]$

$$[\sigma]\cdot[\tau] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

Тождественная подстановка – это такая подстановка *e*, что *e(x)*=*x* $\forall x$.

$$[e]=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

Обратная подстановка – это обратная функция.

Для получения таблицы обратной подстановки нужно поменять местами строки таблицы исходной подстановки.

$$[\sigma]=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix} \quad [\sigma^{-1}]=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

Подстановка σ называется *циклом длины r*, если матрицу [σ] перестановкой столбцов можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{r-1} & s_r & s_{r+1} & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_r & s_1 & s_{r+1} & \ldots & s_n \end{pmatrix}$$

Т.е. когда первые *r* элементов сменяют друг друга, а остальные неподвижны:

$\sigma(s_i) = s_{i+1}$, для $1 \le i \le r - 1$ и $\sigma(s_r) = s_1$

$\sigma(s_i) = s_i$, для $r+1 \le i \le n$

Пример:

1) $[\sigma] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Эта подстановка является циклом (2,5,3,6)

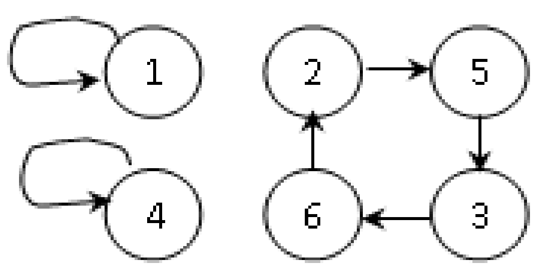
2) $[\tau] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

из нее можно выделить два цикла (1,4) и (2,5,6,3)

$\Rightarrow$ циклом не является

Графическое изображение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



Утверждение 2.2 Каждую подстановку можно однозначно (с точностью до порядка сомножителей) представить в виде произведения независимых циклов.

Двухэлементный цикл (i j) называется *транспозицией*. При транспозиции меняются местами только i-й и j-й элементы, а остальные сохраняют свое положение.

Используя только транспозиции, можно выполнить сортировку множества в определенном порядке (например, в лексикографическом). Известный алгоритм сортировки, основанный на этом принципе, на каждом шаге осуществляет перестановку только двух соседних элементов и носит название «пузырьковой сортировки».

2.2.2 Понятие выборки

$M = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, m ≤ n.

Набор, состоящий из m элементов множества *M*, называется выборкой объёма m из n элементов.

Выборки классифицируются по:

По критерию повторяемости элементов:

- с возвращением объема (с повторениями)
- без возвращения объема (без повторений).

По критерию упорядоченности:

- упорядоченные (размещения)
- неупорядоченные (сочетания).

2.2.3 Размещения и сочетания без повторений

Размещениями из n элементов по m называются упорядоченные выборки без повторений элементов множества, которые отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

A_n^m =A(n,m) (иногда обозначают P(n,m))

Пример: M={1,2,3,4,5}.

Тогда размещения из 5 элементов по 2 будут:

(1,2), (2,1), (2,4), (4,2) и т.п

Теорема 2.2

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

Сочетаниями без повторений из n элементов по m называются неупорядоченные выборки без повторений элементов множества, которые отличаются одна от другой только составом элементов.

Пример: $M=\{1,2,3,4,5\}$.

Тогда сочетаниями из 5 элементов по 2 будут: (1,2), (2,4), (5,2) и т.п. (Здесь (2,4)~(4,2)…)

Утверждение 2.3. $$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

2.2.4 Размещения и сочетания с повторениями

Размещениями с повторениями (упорядоченными выборками с возвращениями) из n элементов по k называются упорядоченные наборы из *k* элементов множества *M*, в которых элементы множества могут повторяться.

Пример: M={1,2,3,4,5}. Тогда размещениями с повторениями из 5 элементов по 2 будут:

(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), …,(5,1) и т.п. – любые упорядоченные пары из 2 элементов множества M.

Утверждение 2.4 $$\overline{A}_n^k = n^k$$

Теорема 2.3 (о мощности множества $\mathcal{P}$ (M))

Для конечного множества M $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Следствие: Можно сгенерировать все подмножества конечного множества M, перечислив некоторым способом все наборы из нулей и единиц длины n.