1 Кольца и поля

Определение 1.1 (Кольцо)**.** Кольцо - алгебра сигнатуры

$$(+^{(2)}, 0^{(0)}, -^{(1)}, \cdot^{(2)})$$

обладающее свойствами:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. $a+0 = a$
3. $a+(-a) = 0$
4. $a+b = b+a$
5. $a(b+c) = ab+ac$

Определение 1.2 (Ассоциативное кольцо)**.** Кольцо с ассоциативностью умножения $(ab)c = a(bc)$

Определение 1.3 (Кольцо с единицей)**.** Кольцо, в котором существует элемент 1, такой что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Определение 1.4 (Коммутативное кольцо)**.** Кольцо с коммутативностью умножения $ab = ba$

Определение 1.5 (Кольцо с делением)**.** Если для любого элемента кольца $a\,(a \neq 0))$ существует $b : ab = 1$, то такое кольцо называется кольцом с делением

Определение 1.6 (Тело)**.** Тело - ассоциативное, коммутативное кольцо с делением

Определение 1.7 (Поле)**.** Поле - ассоциативное, коммутативное кольцо с делением и единицей

Пример 1.1 (Примеры колец)**.**

Теорема 1.1. *Для любых элементов кольца a, b справедливы следующие утверждения:*

1. $a0 = 0a = 0$

2. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

Доказательство. □

Следствие 1.1. *В кольце с 1 ноль необратим.*

Определение 1.8 (Делитель нуля)**.** Пусть $a \cdot b = 0\, a, b \neq 0$, тогда a - левый делитель нуля, b - правый делитель нуля.

Пример 1.2 (Пример делителей нуля)**.**

Теорема 1.2. *Делители нуля необратимы*

Доказательство. □

Определение 1.9 (Идемпотент кольца)**.** Такие элементы кольца, для которых выполняется $a = a^2$

Теорема 1.3. *Идемпотенты - делители нуля*

Доказательство. □

Определение 1.10 (Целостное кольцо)**.** Ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля

Теорема 1.4. *Конечное целое кольцо ?????*

Доказательство. □

Теорема 1.5. *Каждое целостное кольцо может быть достроено до поля*

Доказательство. □

Определение 1.11 (Гомоморфизм колец)**.** $h : R \to S$ - гомоморфизм, определённый так: $a \equiv b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$

Определение 1.12 (Ядро кольца)**.** $h : R \to S$ - гомоморфизм, тогда ядро кольца $\operatorname{Ker} h = \{a \in R : h(a) = 0\}$

Теорема 1.6. *Ядро кольца - подкольцо*

Определение 1.13 (Идеал)**.** R - кольцо, $\mathcal{I} \subseteq R$ - идеал (левый, правый, двусторонний), если

1. $\mathcal{I}$ - подкольцо
2. для любого $x \in R$ $x\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ (левый идеал), $\mathcal{I}x \subseteq \mathcal{I}$ (правый идеал)

Пример 1.3 (Пример идеалов)**.**

Теорема 1.7. *R - ассоциативное кольцо с единицей или R - тело или R тогда и только тогда когда в R Нет других идеалов, кроме $\{0\}$ и R*