1 Группы, абелевы группы, циклические группы. Вложение моноида в группу

Определение 1.1 (Группа)**.** Группа - моноид, в котором все элементы обратимы

Определение 1.2 (Тривиальная группа)**.** Тривиальная группа - группа, состоящая из одного элемента

Теорема 1.3. *Если M - моноид и $G \subseteq M$ - подмножество обратимых элементов, то G - группа*

Доказательство. $G \subseteq M$ следовательно G ассоциативна, e - обратимый следовательно G имеет нейтральный элемент. Надо доказать замкнутость: $x * y \in G$

x', y' - обратные к x и y элементы, тогда

$$(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x' = x * e * x' = x * x' = e$$

$$(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * x) * y = y * e * y' = y * y' = e$$

$x * y$ обратим $\Rightarrow xy \in G$

если $x \in G$, то $x' * x = x * x' = e$, тогда x' имеет обратный элемент, тогда $x' \in G$. Любой элемент G имеет обратный.

G - группа. Теорема доказана.

□

Определение 1.4 (Абелева группа)**.** Абелева группа - группа, в которой $xy = yx$

Определение 1.5 (Циклическая группа)**.**

Теорема 1.6 (Теорема Гротендика)**.** *Каждый коммутативный моноид, в котором все элементы сократимы можно вложить в группу*

Доказательство. Пусть M - коммутативный моноид, $G' = M \times M = (a, b)$, где $a, b \in M$, $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$, (e_1, e_2) - нейтральный элемент.

Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Является ли $\equiv$ конгруэнтностью?

1. $(a, b) \equiv (a, b)$, $ab = ba$

2. $(a, b) \equiv (c, d)$, $ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c, d) \equiv (a, b)$

3. $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (u, v) \Rightarrow (a, b) \equiv (u, v)$

Надо доказать:

$$(a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2), (c_1, d_1) \equiv (c_2, d_2) \Rightarrow (a_1c_1, b_1d_1) \equiv (a_2c_2, b_2d_2)$$

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2), (c_1, d_1) \equiv (c_2, d_2) \Rightarrow \\ a_1b_2 = b_1a_2, c_1d_2 = d_1c_2 \Rightarrow a_1b_2c_1d_2 = b_1a_2d_1c_2 \Rightarrow \\ (a_1c_1)(b_2d_2) = (b_1d_1)(a_2c_2) \Rightarrow \\ (a_1c_1, b_1d_1) \equiv (a_2c_2, b_2d_2)\end{aligned}$$

$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ - конгруэнтность

Пусть $G = {G'}/_{\equiv}$ надо доказать что G - группа и M вкладывается в G

$$ab = ba \Rightarrow abe = ab = ba = bae \Rightarrow (ab, ba) \equiv (e, e)$$

$$\widehat{(a, b)} * \widehat{(b, a)} = \widehat{(ab, ba)} = \widehat{(e, e)}$$

$\Rightarrow$ каждый элемент G имеет обратный $\Rightarrow$ G - группа

Пусть $h : M \to G$ и $h(a) = \widehat{(a, e)}$, тогда

$$h(ab) = \widehat{(ab, e)} = \widehat{(a, e)}\widehat{(b, e)} = h(a)h(b)$$

$$h(e) = \widehat{(e, e)}$$

h - гомоморфизм

Пусть $h(a) = h(b)$

$$\widehat{(a, e)} = \widehat{(b, e)} \Rightarrow (a, e) \equiv (b, e) \Rightarrow ae = eb \Rightarrow a = b$$

следовательно h - инъекция, следовательно h - вложение

□

Пример 1.7 (Пример на теорему Гротендика).