1 Подалгебры и вложения

Определение 1.1:
Подалгебра - алгебра $\mathcal{B} = (B, J)$ является подалдгеброй $\mathcal{A} = (A, I)$, если $B \subseteq A$ и $J(f)$ - ограничение на B для всякого f

Определение 1.2:
Ограничение операции - n-местная операция g на B является ограничением операции f множеством B если

$$g(b_1, ..., b_n) = f(b_1, ..., b_n)$$

для любых $b_1, ..., b_n$ из B

Пример 1.1:
Пример подалгебры:

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \supseteq (\mathbb{R}, +, \cdot) \supseteq (\mathbb{Q}, +, \cdot)$$

Следствие.

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

Теорема 1.1. *Если $\mathcal{A} = (A, I)$ - алгебра, то B ($B \subseteq A; B \neq \emptyset$) является носителем некоторой подалгебры тогда и только тогда, когда B замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре $\mathcal{A}$*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$

   B - носитель подалгебры $\mathcal{B} = (B, J)$ и $B \subseteq A$, тогда

   $$f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n) = f^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n) \in B$$

   B замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре $\mathcal{A}$

2. $\Leftarrow$ B замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре $\mathcal{A}$, тогда

   $J(f)$ - функция на B

   $J(f)(b_1, ..., b_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n) \in B$

   $J(f)$ - ограниение $f^{\mathcal{A}}$ на B

   следовательно $\mathcal{B} = (B, J)$ - подалгебра и B - её носитель

$\square$

Пример 1.2:
Пример на теорему:

Теорема 1.2. *Доказательство.* $\square$