1 Гомоморфизмы, гомоморфные образы, конгруэнтности, фактор-алгебры

Определение 1.1 (Гомоморфизм)**.** Отображение $f\colon G_1 \to G_2$ называется гомоморфизмом групп $(G_1, *)$, $(G_2, \times)$, если оно одну групповую операцию переводит в другую: $f(a * b) = f(a) \times f(b)$, $a, b \in G_1$.

Следствие 1.2. *Изоморфизм и вложение - частный случай изоморфизма*

Определение 1.3 (Единичаня алгебра)**.** Единичная алгебра - алгебра, содержащая всего один элемент. Σ - сигнатура, e - единственный элемент, $f^{(n)}(e, ..., e) = e$

Пример 1.4 (Пример единичной алгебры)**.** $(\{0\}; +, \cdot)$, $(\{1\}; \cdot)$

Следствие 1.5. *Все единичные алгебры одной сигнатуры изоморфны между собой*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 = (\{e_1\}; I)$, $\varepsilon_2 = (\{e_2\}; J)$, тогда

$$h(f^{\varepsilon_1}(e_1, ..., e_1)) = h(e_1) = e_2$$

$$f^{\varepsilon_2}(h(e_1), ..., h(e_1)) = f^{\varepsilon_2}(e_2, ..., e_2) = e_2$$

следовательно

$$h(f^{\varepsilon_1}(e_1, ..., e_1)) = f^{\varepsilon_2}(h(e_1), ..., h(e_1))$$

□

Теорема 1.6. *Из любой алгебры существует изоморфизм в единичную алгебру и только один*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = (A, I)$, $\varepsilon = (\{e\}, J)$ и $h : \mathcal{A} \to \varepsilon$ определено так: $h(a) = e$, для всех $a \in A$. Тогда

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = e$$

$$f^{\varepsilon}(h(a_1), ..., h(a_n)) = f^{\varepsilon}(e, ..., e) = e$$

следовательно

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\varepsilon}(h(a_1), ..., h(a_n))$$

□

Теорема 1.7. *Пусть* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *- гомоморфизм,* $t(x_1, ..., x_n)$ *- терм,* $a_1, ..., a_n \in \mathcal{A}$*, тогда* $h(t^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = t^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n))$

Доказательство. Так же как для изоморфизма □

Теорема 1.8. *Пусть* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *- гомоморфизм, тогда образ множества* A *при отображении* h *образует подалгебру в* $\mathcal{B}$

Доказательство. Так же как для вложения □

Определение 1.9 (Эпиморфизм)**.** сюръективный гомоморфизм

Пример 1.10 (Пример на Эпиморфизм)**.**

Определение 1.11 (Эндоморфизм)**.** гомоморфизм в само множество

Пример 1.12 (Пример на Эндоморфизм)**.**

Определение 1.13 (Автоморфизм)**.** взаимно однозначный гомоморфизм в само множество

Пример 1.14 (Пример на Автоморфизм)**.**

Определение 1.15 (Отношение эквивалентности)**.** пока нет

Определение 1.16 (Класс эквивалентности)**.** пока нет

Теорема 1.17. *Любое отношение эквивалентности получается из функции*

Доказательство. Пусть $\equiv$ - отношение эквивалентности на $A \neq \emptyset$. $B = A| \equiv$ - множество классов эквивалентности. Для $a \in A$, $h(a) = \{b \in A : a \equiv b\}$. Пусть $R(a, b) \Leftrightarrow h(a) = h(b)$, тогда

$$R(a, b) \Leftrightarrow h(a) = h(b) \Leftrightarrow \{c \in A : a \equiv c\} = \{c \in A : b \equiv c\}$$

Из этого следует

$$b \in \{c \in A : a \equiv c\} \Rightarrow b \equiv a$$

Следовательно

$$a \equiv b \Rightarrow h(a) = h(b) \Rightarrow R(a, b)$$

Любое отношение эквивалентности можно получить таким образом □

Теорема 1.18. $h : A \to B$ *- гомоморфизм, тогда* $x \equiv y \Leftrightarrow h(x) = h(y)$ *- отношение эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $f^{(n)}$ - сигнаутрная операция, $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in A$ и $x_1 \equiv y_1, ..., x_n \equiv y_n$, тогда

$$h(f^A(x_1, ..., x_n)) = f^B(h(x_1), ..., h(x_n))$$

$$h(f^A(y_1, ..., y_n)) = f^B(h(y_1), ..., h(y_n))$$

Так как $x_i \equiv y_i \Leftrightarrow h(x_i) = h(y_i)$, то

$$h(f^A(x_1, ..., x_n)) = h(f^A(y_1, ..., y_n)) \Leftrightarrow f^A(x_1, ..., x_n) \equiv f^A(y_1, ..., y_n)$$

□

Определение 1.19 (Конгруэнтность). $\mathcal{A}$ - алгебра с сигнатурой Σ, Отношение $\equiv$ - конгруэнтность в $\mathcal{A}$, если

1. $\equiv$ - эквивалентность
2. если $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathcal{A}$, $f^{(n)} \in \Sigma$, $x_1 \equiv y_1, ..., x_n \equiv y_n$, то

$$f^A(x_1, ..., x_n) \equiv f^A(y_1, ..., y_n)$$

Следствие 1.20. *Пусть $h : A \to B$ - гомоморфизм, то $x \equiv y \Leftrightarrow h(a) = h(b)$ - отношение конгруэнтности на A*

Определение 1.21 (Фактор-алгебра). Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра с сигнатурой Σ, Отношение $\equiv$ - конгруэнтность в $\mathcal{A}$, тогда фактор-алгебра - $B = \mathcal{A}/_{\equiv}$ - множество классов эквивалентности по отношению к конгруэнтности

Теорема 1.22. *Для каждого отношения конгруэнтности существует порождающий его гомоморфизм*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра с сигнатурой Σ, Отношение $\equiv$ - конгруэнтность в $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \mathcal{A}/_{\equiv}$ - множество классов эквивалентности.

$f^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n) = b \Leftrightarrow f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n) = a$ для некоторых $a_1 \in b_1, ..., a_n \in b_n, a \in b$. Докажем что от выбора $a_1, ..., a_n$ значение $f^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)$ не зависит.

Предположим что зависит, выберем значения $a'_1, ..., a'_n$, такие что $a'_1 \in b_1, ..., a'_n \in b_n$, тогда $f^{\mathcal{A}}(a'_1, ..., a'_n) = a' \notin b$, но так как $a_1 \equiv a'_1, ..., a_n \equiv a'_n$ и $\equiv$ - конгруэнтность, то $a \equiv a'$, но при этом $a' \notin b$. Противоречие.

Возьмём $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $h(a)$ =класс эквивалентности a

$$h(a) = h(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n)) = h(a)$$

$f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n) = a$, $h(a) = b$, к чему всё это

□

Теорема 1.23. *Пусть* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *- эпиморфизм,* $\equiv$ *- отношение конгруэнтности для* h*, тогда* ${}^{\mathcal{A}}/_{\equiv} \simeq \mathcal{B}$

Доказательство. не уверен что вообще нужно $\square$

Следствие 1.24. $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_1$ *и* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_2$ *- эпиморфзмы, если* $\equiv_1$ *и* $\equiv_2$ *совпадают, то* $\mathcal{B}_1 \simeq \mathcal{B}_2$

Доказательство. не уверен что вообще нужно $\square$