

1 Кольца и поля

Определение 1.1 (Кольцо). Кольцо - алгебра сигнатуры

$$(+^{(2)}, 0^{(0)}, -^{(1)}, \cdot^{(2)})$$

обладающее свойствами:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. $a + 0 = a$
3. $a + (-a) = 0$
4. $a + b = b + a$
5. $a(b + c) = ab + ac$

Определение 1.2 (Ассоциативное кольцо). Кольцо с ассоциативностью умножения $(ab)c = a(bc)$

Определение 1.3 (Кольцо с единицей). Кольцо, в котором существует элемент 1, такой что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Определение 1.4 (Коммутативное кольцо). Кольцо с коммутативностью умножения $ab = ba$

Определение 1.5 (Кольцо с делением). Если для любого элемента кольца a ($a \neq 0$) существует $b : ab = 1$, то такое кольцо называется кольцом с делением

Определение 1.6 (Тело). Тело - ассоциативное, коммутативное кольцо с делением

Определение 1.7 (Поле). Поле - ассоциативное, коммутативное кольцо с делением и единицей

Пример 1.1 (Примеры колец).

Теорема 1.1. Для любых элементов кольца a, b справедливы следующие утверждения:

1. $a0 = 0a = 0$
2. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

Доказательство.

□

Следствие 1.1. *В кольце с 1 ноль необратим.*

Определение 1.8 (Делитель нуля). Пусть $a \cdot b = 0$, $a, b \neq 0$, тогда a - левый делитель нуля, b - правый делитель нуля.

Пример 1.2 (Пример делителей нуля).

Теорема 1.2. *Делители нуля необратимы*

Доказательство. □

Определение 1.9 (Идемпотент кольца). Такие элементы кольца, для которых выполняется $a = a^2$

Теорема 1.3. *Идемпотенты - делители нуля*

Доказательство. □

Определение 1.10 (Целостное кольцо). Ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля

Теорема 1.4. *Конечное целое кольцо ?????*

Доказательство. □

Теорема 1.5. *Каждое целостное кольцо может быть построено до поля*

Доказательство. □

Определение 1.11 (Гомоморфизм колец). $h : R \rightarrow S$ - гомоморфизм, определённый так: $a \equiv b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$

Определение 1.12 (Ядро кольца). $h : R \rightarrow S$ - гомоморфизм, тогда ядро кольца $\text{Ker } h = \{a \in R : h(a) = 0\}$

Теорема 1.6. *Ядро кольца - подкольцо*

Определение 1.13 (Идеал). R - кольцо, $\mathcal{I} \subseteq R$ - идеал (левый, правый, двусторонний), если

1. \mathcal{I} - подкольцо

2. для любого $x \in R$ $x\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ (левый идеал), $\mathcal{I}x \subseteq \mathcal{I}$ (правый идеал)

Пример 1.3 (Пример идеалов).

Теорема 1.7. R - ассоциативное кольцо с единицей или R - тело или R тогда и только тогда когда в R Нет других идеалов, кроме $\{0\}$ и R

Определение 1.14 (Булево кольцо).

Теорема 1.8. Пусть I - двухсторонний идеал в R , тогда отношение $\equiv: x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in I$ является конгруэнтностью

Доказательство. □

Следствие 1.2. Существует фактор-алгебра R/\equiv , такая что
 ??????????????????

Следствие 1.3. $I = \text{Ker } h$, где $h: R \rightarrow R/\equiv$

Доказательство. □

Определение 1.15 (Простой идеал). Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда I - простой идеал, если $ab \in I \Leftrightarrow a \in I$ или $b \in I$

Определение 1.16 (Максимальный идеал). Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда I - максимальный идеал, если для любого идеала $J: I \subseteq J, I \neq J$ выполняется $J = R$

Определение 1.17 (Главный идеал). Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда I - главный идеал, если для некоторого $a \in R$ $I = aR$

Пример 1.4 (?????).

Лемма 1.1. Если I и J - идеалы, то $I + J$ тоже идеал

Доказательство. □

Теорема 1.9. Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, I - идеал, тогда

1. I - простой идеал $\Leftrightarrow R/I$ - целостное

2. I - максимальный идеал $\Leftrightarrow R/I$ - поле

Доказательство. □

Определение 1.18 (Евклидово кольцо). R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, R - евклидово, если для каждого элемента a этого кольца существует его норма $\|a\|$.

Определение 1.19 (Евклидова норма). Это некоторая функция элемента кольца, такая что

1. $\|a\| \in \omega$
2. если $a, b \neq 0$, то $\|ab\| \geq \max(\|a\|, \|b\|)$