

# 1 Полугруппы и моноиды. Идеммпотенты, сократимые и обратимые элементы.

**Определение 1.1** (Полугруппа). Полугруппа - многообразие заданное множеством

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

**Пример 1.1** (Примеры полугрупп).

**Теорема 1.1.** *Значение терма не зависит от расстановки скобок (Ассоциативный закон)*

$$t = t_1 * t_2 = (a_1 a_2 \dots a_m)(a_{m+1} \dots a_n) = a_1 a_2 \dots a_n$$

*Доказательство.* Индукция по длине  $t$

Базис:  $n = 1$ , нет скобок

Шаг: для  $n - 1$  верно, тогда

1.  $m = n - 1$

$$t = t_1 * a_n = (a_1 a_2 \dots a_m) * a_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

2.  $1 \leq m \leq n - 1$

$$t = t_1 * t_2 = (a_1 a_2 \dots a_m)(a_{m+1} \dots a_n) = (a_1 a_2 \dots a_m)(a_{m+1} \dots a_{n-1})a_n = (a_1 a_2 \dots a_{n-1})a_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

□

**Определение 1.2** (Нейтральный элемент).  $e_l$  называется **нейтральным слева** в полугруппе, если  $e_l * a = a$  для всех  $a$ ,  $e_r$  называется **нейтральным справа** в полугруппе, если  $a * e_r = a$  для всех  $a$ ,  $e$  - нейтральный слева и справа

**Пример 1.2** (Примеры нейтрального элемента).  $(\omega, +)$  - 0,  $(\omega, \cdot)$  - 1,  $(\omega, \max)$  - 0,  $(\omega, \min)$  - нет нейтрального

**Теорема 1.2.** *Если существуют нейтральный слева и нейтральный справа то они равны*

*Доказательство.*

$$e_l = e_l * e_r = e_r$$

□

**Следствие 1.1.** Если нейтральный элемент существует, то он единственный.

**Определение 1.3** (Моноид). Моноид - полугруппа с нейтральным элементом ИЛИ

Моноид - это элементы многообразия, которые определяются равенствами

$$\begin{cases} x * (y * z) = (x * y) * z \\ x * e = x \\ e * x = x \end{cases}$$

**Пример 1.3** (Примеры моноидов).  $(\omega, +, 0)$ ,  $(\omega, \cdot, 1)$ ,  $(\omega, \max, 0)$

$A^A$  - множество одноместных функций из  $A$  в  $A$   $h = f \circ g$ , если  $h(a) = g(f(a))$  для любого  $a \in A$

Доказать что  $(A^A, \circ)$  - моноид

Доказательство.  $e(a) = a$  для всех  $a$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} (e \circ f)(a) &= f(e(a)) = f(a) \\ (f \circ e)(a) &= e(f(a)) = f(a) \end{aligned} \right\} e \circ f = f \circ e = f$$

$e$  - нейтральный элемент

$$\begin{aligned} ((f \circ g)h)(a) &= h(f \circ g)(a) = h(g(f(a))) \\ (f(g \circ h))(a) &= (g \circ h)(f(a)) = h(g(f(a))) \\ ((f \circ g)h)(a) &= (f(g \circ h))(a) \end{aligned}$$

Выполняется ассоциативность, соответственно  $(A^A, \circ, e)$  - моноид

□

**Определение 1.4** (Идемпотент). Идемпотент - элемент моноида  $a$ , такой что  $a^2 = a$

**Пример 1.4** (Примеры идемпотентов).  $(\omega; +)$  - 0

**Определение 1.5** (Моноид типа  $(i, j-i)$ ). Моноид типа  $(i, j-i)$  - моноид с элементами

???

**Теорема 1.3.** В моноиде типа  $(i, j-i)$ , где  $i > 0$  существует идемпотент  $b \neq e$

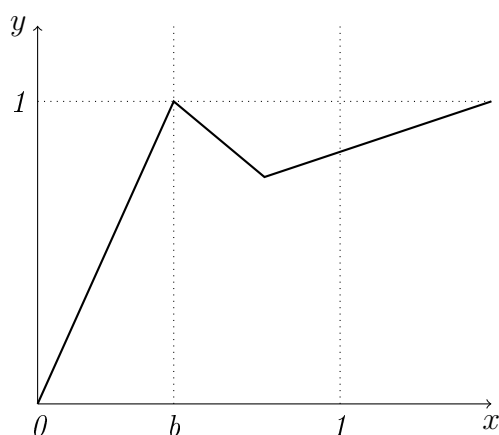
Доказательство.

□

**Определение 1.6** (Обратный элемент).  $b_l$  - левый обратный для элемента  $a$ , если  $b_l * a = e$ ,  $b_r$  - правый обратный для элемента  $a$ , если  $a * b_r = e$ ,  $b$  - обратный для элемента  $a$ , если  $b * a = a * b = e$

**Пример 1.5.** *Пример чего-то: Доказать что множество функций этого вида замкнуты относительно композиции:*

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{при } x < b \\ ab & \text{при } x \geq b \end{cases}$$



*Доказательство.*

□

**Пример 1.6** (Пример изоморфизма). *Доказать*

$$(P(A \cup B); \cup, \cap) \cong (P(A); \cup, \cap) \times (P(B); \cup, \cap)$$

где  $P(A)$  - множество всех подмножеств множества  $A$

*Доказательство.* Надо доказать

$$h(x_1 \cup x_2) = h(x_1) \cup h(x_2)$$

$$h(x_1 \cap x_2) = h(x_1) \cap h(x_2)$$

и  $h$  - биекция

По сути функция  $h$  должна выдавать пару, первая часть которой состоит из элементов  $A$ , вторая из  $B$

□

**Пример 1.7** (Пример полугруппы). *Является ли  $(\omega, \text{НОД}())$  полугруппой*

*Доказательство.* Предположим что является, надо доказать

$$\text{НОД}(\text{НОД}(x, y), z) = \text{НОД}(x, \text{НОД}(y, z))$$

1.  $\Rightarrow$  Пусть  $d : d \mid \text{НОД}(x, y), d \mid z$

Надо доказать  $d \mid \text{НОД}(y, z), d \mid x$

$$d \mid \text{НОД}(x, y) \Rightarrow d \mid x$$

$$d \mid \text{НОД}(x, y) \Rightarrow d \mid y$$

$$d \mid x, d \mid y \Rightarrow d \mid \text{НОД}(y, z)$$

2.  $\Leftarrow$  также

□

**Пример 1.8** (Построение моноидов). *Построить все моноиды из двух элементов  $\{e, x\}$*

$$A_1 = (\{e, x\}; *_1), A_2 = (\{e, x\}; *_2)$$

Таблица умножения  $(*_1)$

	$e$	$x$
$e$	$e$	$x$
$x$	$x$	$e$

Таблица умножения  $(*_2)$

	$e$	$x$
$e$	$e$	$x$
$x$	$x$	$x$

*Доказать их ассоциативность:  $a * (b * c) = (a * b) * c$*

1.  $a = e$

$$e * (b * c) = b * c = (e * b) * c$$

2.  $b = e$  также

3.  $c = e$  также

4.  $a = b = c = x$

$$x * (x * x) = x * e = e * x = (x * x) * x$$

Все остальные моноиды или изоморфны или тривиальны

**Теорема 1.4.** Если в конечном моноиде каждый элемент имеет левый обратный, то существует правый обратный

*Доказательство.* Предположим обратное: Если в конечном моноиде каждый элемент имеет левый обратный, то хотя бы для одного не существует правый обратный:  $ab_r \neq e$  для всех  $b_r$

НЕ ДОКАЗАНО

□

**Определение 1.7** (Сократимый элемент). Сократимый слева (справа) - такой элемент моноида, что из  $ax = ay$  ( $xa = ya$ ) следует  $x = y$

**Пример 1.9** (Пример сократимого элемента).  $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ,  $x + a = y + a \Rightarrow x = y$

**Теорема 1.5.** Неединичные идемпотенты несократимы

*Доказательство.*  $a \cdot a = a = e \cdot a$  но  $a \neq e$ , соответственно  $a$  несократим справа,  $a \cdot a = a = a \cdot e$  но  $a \neq e$ , соответственно  $a$  несократим слева  
 $a$  несократим

□

**Теорема 1.6.** Все обратимые слева(справа) элементы сократимы слева(справа)

*Доказательство.* Пусть  $a$  - обратимый слева, тогда  $ax = ay \Rightarrow b_1ax = b_1ay \Rightarrow ex = ey \Rightarrow x = y$ , следовательно  $a$  - сократимый слева

□

**Пример 1.10** (Пример обратимого элемента).  $(\mathbb{Z}^+, \cdot, 1)$ , обратимый только 1, сократимы все. (Какой к половым органам это пример?)