# 1 Полугруппы и моноиды. Идемпотенты, сократимые и обратимые элементы.

**Определение 1.1** (Полугруппа)**.** Полугруппа - многообразие заданное множеством

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

**Пример 1.2** (Примеры полугрупп)**.**

**Теорема 1.3.** *Значение терма не зависит от расстановки скобок (Ассоциативный закон)*

$$t = t_1 * t_2 = (a_1a_2...a_m)(a_{m+1}...a_n) = a_1a_2...a_n$$

Доказательство. Индукция по длине $t$

Базис: $n = 1$, нет скобок

Шаг: для $n - 1$ верно, тогда

1. $m = n - 1$

$$t = t_1 * a_n = (a_1a_2...a_m) * a_n = a_1a_2...a_n$$

2. $1 \leq m \leq n - 1$

$$t = t_1 * t_2 = (a_1a_2...a_m)(a_{m+1}...a_n) = (a_1a_2...a_m)(a_{m+1}...a_{n-1})a_n$$

Так как длина $(a_1a_2...a_m)(a_{m+1}...a_{n-1})$ равна $n - 1$ то выполняется индукционное предположение и

$$(a_1a_2...a_m)(a_{m+1}...a_{n-1}) = (a_1a_2...a_{n-1})$$

соотвественно

$$(a_1a_2...a_m)(a_{m+1}...a_{n-1})a_n = (a_1a_2...a_{n-1})a_n = a_1a_2...a_n$$

по-моему он не так доказывал □

**Определение 1.4** (Нейтральный элемент)**.** $e_l$ называется **нейтральным слева** в полугруппе, если $e_l * a = a$ для всех $a$, $e_r$ называется **нейтральным справа** в полугруппе, если $a * e_r = a$ для всех $a$, $e$ - нейтральный слева и справа

**Пример 1.5** (Примеры нейтрального элемента)**.** $(\omega, +)$ - 0, $(\omega, \cdot)$ - 1, $(\omega, max)$ - 0, $(\omega, min)$ - *нет нейтрального*

**Теорема 1.6.** *Если существуют нейтральный слева и нейтральный справа то они равны*

Доказательство.

$$e_l = e_l * e_r = e_r$$

□

**Следствие 1.7.** *Если нейтральный элемент существует, то он единственный.*

**Определение 1.8** (Моноид)**.** Моноид - полугруппа с нейтральным элементом ИЛИ

Моноид - это элементы многообразия, которые определяются равенствами

$$\begin{cases} x * (y * z) = (x * y) * z \\ x * e = x \\ e * x = x \end{cases}$$

**Пример 1.9** (Примеры моноидов)**.** $(\omega, +, 0)$, $(\omega, \cdot, 1)$, $(\omega, max, 0)$

*$A^A$ - множество одноместных функций из $A$ в $A$ $h = f \circ g$, если $h(a) = g(f(a))$ для любого $a \in A$*

*Доказать что $(A^A, \circ)$ - моноид*

Доказательство. $e(a) = a$ для всех $a$, тогда

$$\left.\begin{aligned} (e \circ f)(a) &= f(e(a)) = f(a) \\ (f \circ e)(a) &= e(f(a)) = f(a) \end{aligned}\right\} e \circ f = f \circ e = f$$

$e$ - нейтральный элемент

$$((f \circ g)h)(a) = h(f \circ g)(a) = h(g(f(a)))$$

$$(f(g \circ h))(a) = (g \circ h)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

$$((f \circ g)h)(a) = (f(g \circ h))(a)$$

Выполняется ассоциативность, соответственно $(A^A, \circ, e)$ - моноид

□

**Определение 1.10** (Идемпотент)**.** Идемпотент - элемент моноида $a$, такой что $a^2 = a$

**Пример 1.11** (Примеры идемпотентов)**.** $(\omega; +)$ - 0

**Определение 1.12** (Обратный элемент)**.** $b_l$ - левый обратный для элемента $a$, если $b_l * a = e$,

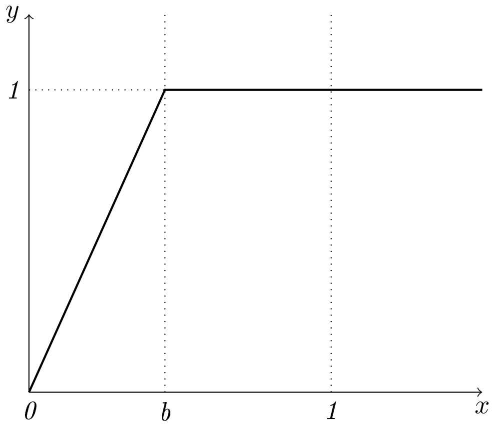
$b_r$ - правый обратный для элемента $a$, если $a * b_l = e$,

$b$ - обратный для элемента $a$, если $b * a = a * b = e$

**Определение 1.13** (Обратимый элемент)**.** Элемент, для которого существует обратный

**Пример 1.14.** *Пример чего-то: Доказать что множество функций этого вида замкнуты относительно композиции:*

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{при } x < b \\ ab & \text{при } x \geq b \end{cases}$$




Доказательство. $\square$

**Пример 1.15** (Пример изоморфизма)**.** *Доказать*

$$(P(A \cup B); \cup, \cap) \cong (P(A); \cup, \cap) \times (P(B); \cup, \cap)$$

*где $P(A)$ - множество всех подмножеств множества $A$*

Доказательство. Надо доказать

$$h(x_1 \cup x_2) = h(x_1) \cup h(x_2)$$

$$h(x_1 \cap x_2) = h(x_1) \cap h(x_2)$$

и $h$ - биекция

По сути функция $h$ должна выдавать пару, первая часть которой состоит из элементов $A$, вторая из $B$ $\square$

**Пример 1.16** (Пример полугруппы). *Является ли* $(\omega, \text{НОД}())$ *полугруппой*

Доказательство. Предположим что является, надо доказать

$$\text{НОД}(\text{НОД}(x, y), z) = \text{НОД}(x, \text{НОД}(y, z))$$

1. $\Rightarrow$ Пусть $d : d| \text{НОД}(x, y), d|z$

   Надо доказать $d| \text{НОД}(y, z)$, $d|x$

$$d| \text{НОД}(x, y) \Rightarrow d|x$$
$$d| \text{НОД}(x, y) \Rightarrow d|y$$
$$d|x, d|y \Rightarrow d| \text{НОД}(y, z)$$

2. $\Leftarrow$ также

$\square$

**Пример 1.17** (Построение моноидов). *Построить все моноиды из двух элементов* $\{e, x\}$

$$A_1 = (\{e, x\}; *_1), A_2 = (\{e, x\}; *_2)$$

Таблица умножения $(*_1)$

| | $e$ | $x$ |
|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $x$ |
| $x$ | $x$ | $e$ |

Таблица умножения $(*_2)$

| | $e$ | $x$ |
|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $x$ |
| $x$ | $x$ | $x$ |

*Доказать их ассоциативность:* $a * (b * c) = (a * b) * c$

*1.* $a = e$

$$e * (b * c) = b * c = (e * b) * c$$

*2.* $b = e$ *также*

*3.* $c = e$ *также*

*4.* $a = b = c = x$

$$x * (x * x) = x * e = e * x = (x * x) * x$$

*Все остальные моноиды или изоморфны или тривиальны*

**Теорема 1.18.** *Если в конечном моноиде каждый элемент имеет левый обратный, то существует правый обратный*

Доказательство. Предположим обратное: Если в конечном моноиде каждый элемент имеет левый обратный, то хотя бы для одного не существует правый обратный: $ab_r \neq e$ для всех $b_r$

НЕ ДОКАЗАНО □

**Определение 1.19** (Сократимый элемент)**.** Сократимый слева (справа) - такой элемент моноида, что из $ax = ay$ $(xa = ya)$ следует $x = y$

**Пример 1.20** (Пример сократимого элемента)**.** $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $x + a = y + a \Rightarrow x = y$

**Теорема 1.21.** *Неединичные идемпотенты несократимы*

Доказательство. $a \cdot a = a = e \cdot a$ но $a \neq e$, соответственно $a$ несократим справа, $a \cdot a = a = a \cdot e$ но $a \neq e$, соответственно $a$ несократим слева

$a$ несократим □

**Теорема 1.22.** *Все обратимые слева(справа) элементы сократимы слева(справа)*

Доказательство. Пусть $a$ - обратимый слева, тогда $ax = ay \Rightarrow b_l ax = b_l ay \Rightarrow ex = ey \Rightarrow x = y$, следовательно $a$ - сократимый слева □

**Пример 1.23** (Пример обратимого элемента)**.** $(\mathbb{Z}^+, \cdot, 1)$, *обратимый только* 1, *сократимы все. (Какой к половым органам это пример?)*