1 Кольца, тела, поля. Делители нуля. Тело кватернионов

Определение 1.1 (Кольцо)**.** Кольцо - алгебра сигнатуры

$$(+^{(2)}, 0^{(0)}, -^{(1)}, \cdot^{(2)})$$

обладающее свойствами:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. $a+0 = a$
3. $a+(-a) = 0$
4. $a+b = b+a$
5. $a(b+c) = ab+ac$

Определение 1.2 (Ассоциативное кольцо)**.** Кольцо с ассоциативностью умножения $(ab)c = a(bc)$

Определение 1.3 (Кольцо с единицей)**.** Кольцо, в котором существует элемент 1, такой что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Определение 1.4 (Коммутативное кольцо)**.** Кольцо с коммутативностью умножения $ab = ba$

Определение 1.5 (Кольцо с делением)**.** Если для любого элемента кольца $a\,(a \neq 0))$ существует $b : ab = 1$, то такое кольцо называется кольцом с делением

Определение 1.6 (Тело)**.** Тело - ассоциативное, коммутативное кольцо с делением

Определение 1.7 (Поле)**.** Поле - ассоциативное, коммутативное кольцо с делением и единицей

Пример 1.1 (Примеры колец)**.**

Теорема 1.1. *Для любых элементов кольца a, b справедливы следующие утверждения:*

1. $a0 = 0a = 0$

2. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

Доказательство. а ☐

Следствие 1.1. *В кольце с* 1 *ноль необратим.*

Определение 1.8 (Делитель нуля)**.** Пусть $a \cdot b = 0\, a, b \neq 0$, тогда a - левый делитель нуля, b - правый делитель нуля.

Пример 1.2 (Пример делителей нуля)**.**

Теорема 1.2. *Делители нуля необратимы*

Доказательство. ☐

Определение 1.9 (Идемпотент кольца)**.** Такие элементы кольца, для которых выполняется $a = a^2$

Теорема 1.3. *Идемпотенты - делители нуля*

Доказательство. ☐

Определение 1.10 (Тело кватернионов)**.**

Определение 1.11 (Подкольцо)**.**

Теорема 1.4. *Пусть S - подмножество кольца $(R, +, \circ)$, тогда $(S, +, \circ)$ - подкольцо $(R, +, \circ)$ тогда и только тогда когда*

1. $S \neq \emptyset$
2. $\forall x, y \in S : x + (-y) \in S$
3. $\forall x, y \in S : x \circ y \in S$

Доказательство. Необходимое условие выполняется по определению кольца.

Достаточное условие:

По **??** и условиям 1 и 2 $(S, +)$ является группой, то есть замкнута по сложению, ассоциативна, имеет нейтральный по сложению и обратный по сложению. По условию 3 $(S, \circ)$ замкнута. Так как $S \subset R$, то на S выполняются дистрибутивность и коммутативность.

Следовательно $(S, +, \circ)$ - кольцо. ☐