1 Действие группы на множестве , орбиты

Определение 1.1. $\mathcal{G}$ - группа, A - множество, образующее группу, тогда определяющим соотношением называют равенство вида $t(a) = s(a)$, где t, s - термы, $a \in A$

Пример 1.1. $A = \{a, b\}$, $a^2 = b^2$, $a^3 b = ba$

Определение 1.2. A - множество элементов, X - множество определяющих соотношений. Группа, порождённая A и X - $\mathcal{G}$ такая, что

1. образована при помощи A
2. в $\mathcal{G}$ выполняются все определяющие соотношения из X
3. любая группа $\mathcal{H}$, удовлетворяющая условиям 1 и 2 является гомоморфным множеством $\mathcal{G}$

Пример 1.2.

$$\mathcal{D}_3 = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$$

$A = \{r_1, s_1\}$, $\langle A \rangle = \mathcal{D}_3$

$$\left[\begin{array}{l} r_1^3 = e \\ r_1 s_1 = s_1 r_1^2 \\ s_1^2 = e \end{array}\right.$$

$\mathcal{H}$ порождена A

$*$ - одноместная операция

$\mathcal{H}$?????? ??? слова, состоящие из $r_1, s_1, r_1^{-1}, s_1^{-1}$, пусть в $\mathcal{H}$ выполнены определяющие соотношения X

$$\begin{array}{lll} r_1^3 = e & r_1^{-1} = r_1^2 & r_1^{-1} = r_1 r_1 \\ s_1^2 = e & s_1^{-1} = s_1 & s_1^{-1} = s_1 \end{array}$$

$s_1 ... s_1 r_1 ... r_1$

$s_1^n r_1^m$

$s_1^n = s_1^{n \mod 2}$

$r_1^m = r^{m \mod 3}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} r_1^0 & s_1 r_1^0 \\ r_1^0 & s_1 r_1^0 \\ r_1^0 & s_1 r_1^0 \end{array}}$$

Теорема 1.1. *Для любого множества A и множества определяющих соотношений X существует группа, образованная A и X*

Доказательство. Пусть $A' = A \cup \{a{-}1 : a \in A^{\}}$. Нужно проверить три свойства

1. Если M - свободный моноид образованный A'(M - множество слов алфавита A' с конкатенацией), M' - моноид, порождённый A', то M' - гомоморфный образ M. $u, v \in M$, $u \equiv v \Leftrightarrow h(u) = h(v)$ для любого гомоморфизма $h : M \to \mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ - группа, порождённая A в которой ??? X.

   Надо доказать что $\equiv$ является конгруэнтностью

   (a) $a \equiv a$

   (b) $a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$

   (c) $a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$

   Пусть $a \equiv b$, $c \equiv d$, то есть $h(a) = h(b)$, $h(c) = h(d)$, тогда, так как h является гомоморфизмом

   $$h(ac) = h(a)h(c) = h(b)h(d) = h(bd)$$

   следовательно $ac \equiv bd$ и $\equiv$ - конгруэнтность

   Пусть группа $F = {}^{M}/_{\equiv}$, $\widehat{a} \in F$, $a = u_1 ... u_n$, $b = u_n^{-1} ... u_1^{-1}$, $a, b \in M$

   $h(a) = h(u_1) ... h(u_n)$

   $h(b) = h(u_n^{-1}) ... h(u_1^{-1})$

   $h(ab) = h(u_1) ... h(u_n) h(u_n^{-1}) ... h(u_1^{-1}) = e$

   $\widehat{a}\widehat{b} = \widehat{e}$

   F порождается A

2. Доказать $t(\overline{a}) = s(\overline{a}) \in X$

   $$\begin{aligned} h(t(a_1, ..., a_n)) = t(h(a_1), ..., h(a_n)) = s(h(a_1), ..., h(a_n)) \\ = h(s(a_1, ..., a_n)) \end{aligned}$$

   $t(\overline{a}) \equiv s(\overline{a}) \Rightarrow \widehat{t(\overline{a})} = widehats(\overline{a}) \Rightarrow t(\widehat{a_1}, ..., \widehat{a_n}) = s(\widehat{a_1}, ..., \widehat{a_n}$

3. Из чего следует?

и WTF в общем $\square$

Пример 1.3. *Про пирамиду рубика. Конём.*

Пример 1.4. *Дана "головоломка"*

1	2
3	4

Построить группу $\mathcal{G}$
a - перестановка двух столбцов
b - перестановка строк

e: $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$ a: $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline\end{array}$ b: $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$ ab: $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$

$a^2 = e,\ b^2 = e,\ ab = ba$

	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ba	e	a
ab	ab	b	a	e

$\mathcal{G} = (\{e, a, b, ab\}, \circ)$

Пример 1.5. *Таблица 8x8. Конём.*

Пример 1.6. $Z = 1, -1$

Пример 1.7.

Пример 1.8.

Пример 1.9.

Пример 1.10.

Определение 1.3. Если $X = \emptyset$, то $^{M}/_{\equiv}$ - свободная группа порождённая A

Следствие 1.1. *Любая группа порождённая A - гомоморфный образ свободной группы*

Определение 1.4. $\mathcal{G}$ - группа, $S \neq \emptyset$. Действие группы $\mathcal{G}$ на S - это отображение $h : S \times \mathcal{G} \to S$ и

1. $h(S, e) = S$
2. $h(h(S, a), b) = h(S, ab)$

Эти два условия по другому:

1. $Se = S$
2. $(Sa)b = S(ab)$

Пример 1.11. *$\mathcal{G}$ действует на себя правыми умножениями*

Определение 1.5. Сопряжение - действие группы $\mathcal{G}$ на себя или множество подмножеств $P(\mathcal{G}) : h(S, a) = a^{-1}Sa$

Теорема 1.2. *Сопряжение - действие*

Доказательство. Проверим условия сопряжения

1. $e^{-1}Se = eSe = S$
2. $h(h(S, a)b) = h(a^{-1}Sa, b) = b^{-1}a^{-1}Sab = (ab)^{-1}Sab = h(S, ab)$
   $a^{-1}Aa = A \subseteq \mathcal{G}$

□

Теорема 1.3. *Любая подгруппа при сопряжении переходит в подгруппу*

Доказательство. Пусть A - подгруппа $\mathcal{G}$ □

Теорема 1.4. *Пусть A - подгруппа, то A неподвижна при всех сопряжениях тогда и только тогда когда A - нормальная подгруппа*

Доказательство.

- $\Rightarrow a^{-1}Aa = a \Rightarrow aa^{-1}Aa = aA \Rightarrow Aa = aA$
- $\Leftarrow Aa = aA \Rightarrow a^{-1}Aa = a^{-1}aA \Rightarrow a^{-1}Aa = A$

□

Определение 1.6 (Стабилизатор)**.** $\mathcal{G}$ действует на S, $s \in S$. Стабилизатор s - $\operatorname{stab} s = \{a \in \mathcal{G}, h(s, a) = s\}$

Теорема 1.5. $\operatorname{stab} s$ *- подгруппа $\mathcal{G}$*

Доказательство. пусть $b, c \in \operatorname{stab} s$, тогда □

Определение 1.7 (Орбита)**.** Пусть G действует на S, $s \in S$. Орбита s - $\operatorname{orb} s = \{sa : a \in G\}$

Теорема 1.6. *Орбиты - классы эквивалентности*

Теорема 1.7. *Количество элементов орбиты равняется индексу стабилизатора*

Теорема 1.8 (Формула орбит)**.** *G действует на множестве S, тогда* $|S| = \sum\limits_{\textit{орбиты}} \dfrac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord} q_0}$

Следствие 1.2. *Если* $\operatorname{ord} G = p^k$, *$p$ - простое, то* $Z \neq \{e\}$