# 1 Группы

**Определение 1.1** (Группа)**.** Группа - моноид, в котором все элементы обратимы

**Определение 1.2** (Тривиальная группа)**.** Тривиальная группа - группа, состоящая из одного элемента

**Теорема 1.1.** *Если $M$ - моноид и $G \subseteq M$ - подмножество обратимых элементов, то $G$ - группа*

*Доказательство.* $G \subseteq M$ следовательно $G$ ассоциативна, $e$ - обратимый следовательно $G$ имеет нейтральный элемент. Надо доказать замкнутость: $x * y \in G$

$x', y'$ - обратные к $x$ и $y$ элементы, тогда

$$(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x' = x * e * x' = x * x' = e$$

$$(y' * x') * (x' * y') = y' * (x' * x) * y = y * e * y' = y * y' = e$$

$x * y$ обратим $\Rightarrow xy \in G$

если $x \in G$, то $x' * x = x * x' = e$, тогда $x'$ имеет обратный элемент, тогда $x' \in G$. Любой элемент $G$ имеет обратный.

$G$ - группа. Теорема доказана.

□

**Теорема 1.2** (Теорема Гротендика)**.** *Каждый коммутативный моноид, в котором все элементы сократимы можно вложить в группу*

*Доказательство.* Пусть $M$ - коммутативный моноид, $G' = M \times M = (a, b)$, где $a, b \in M$, $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$, $(e_1, e_2)$ - нейтральный элемент.

Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Является ли $\equiv$ конгруэнтностью?

1. $(a, b) \equiv (a, b)$, $ab = ba$
2. $(a, b) \equiv (c, d)$, $ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c, d) \equiv (a, b)$
3. $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (u, v) \Rightarrow (a, b) \equiv (u, v)$

Надо доказать:

$$(a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2), (c_1, d_1) \equiv (c_2, d_2) \Rightarrow (a_1 c_1, b_1 d_1) \equiv (a_2 c_2, b_2 d_2)$$

$$(a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2), (c_1, d_1) \equiv (c_2, d_2) \Rightarrow$$
$$a_1 b_2 = b_1 a_2, c_1 d_2 = d_1 c_2 \Rightarrow a_1 b_2 c_1 d_2 = b_1 a_2 d_1 c_2 \Rightarrow$$
$$(a_1 c_1)(b_2 d_2) = (b_1 d_1)(a_2 c_2) \Rightarrow$$
$$(a_1 c_1, b_1 d_1) \equiv (a_2 c_2, b_2 d_2)$$

$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ - конгруэнтность

Пусть $G = {}^{G'}/_{\equiv}$ надо доказать что $G$ - группа и $M$ вкладывается в $G$

$$ab = ba \Rightarrow abe = ab = ba = bae \Rightarrow (ab, ba) \equiv (e, e)$$
$$\widehat{(a, b)} * \widehat{(b, a)} = \widehat{(ab, ba)} = \widehat{(e, e)}$$

$\Rightarrow$ каждый элемент $G$ имеет обратный $\Rightarrow G$ - группа

Пусть $h : M \to G$ и $h(a) = \widehat{(a, e)}$, тогда

$$h(ab) = \widehat{(ab, e)} = \widehat{(a, e)}\widehat{(b, e)} = h(a)h(b)$$
$$h(e) = \widehat{(e, e)}$$

$h$ - гомоморфизм

Пусть $h(a) = h(b)$

$$\widehat{(a, e)} = \widehat{(b, e)} \Rightarrow (a, e) \equiv (b, e) \Rightarrow ae = eb \Rightarrow a = b$$

следовательно $h$ - инъекция, следовательно $h$ - вложение

□

**Пример 1.1.** *Пример на теорему Гротендика:*

**Теорема 1.3.** *$G$ - группа тогда и только тогда, когда*

1. $(xy)z = x(yz)$
2. $xe = x$
3. $xx^{-1} = e$

*Доказательство.* 1. $\Rightarrow$ по определению группы

2. $\Leftarrow$

   $(xy)z = x(yz) \Rightarrow G$ ассоциативна

   $xx^{-1} = e \Rightarrow x^{-1}x = e$

   Надо доказать: $ex = x$ для любого $x$

$$x^{-1}x = x^{-1}xe = x^{-1}x(x^{-1}x)(x^{-1}x)^{-1} = x^{-1}(xx^{-1})x(x^{-1}x)^{-1} = x^{-1}ex(x^{-1}x)^{-1} = (x^{-1}x)(x^{-1}x)^{-1} = e \quad (1)$$

$$ex = (xx^{-1})x = x(x^{-1}x) = xe = x$$

   $G$ - группа

□

**Следствие.** *Группы образуют многообразие в сигнатуре* $(*, e, ^{-1})$

**Определение 1.3** (Аддитивная группа)**.** Аддитивная группа - группа со сложением

**Пример 1.2.** *Примеры аддитивных групп:* $(\mathbb{Z}; +)$

**Определение 1.4** (Мультипликативная группа)**.** Мультипликативная группа - группа с умножением

**Пример 1.3.** *Примеры мультипликативных групп:* $(\mathbb{Q}; \cdot)$

**Определение 1.5** (Множество вычетов)**.**

**Пример 1.4.**

**Определение 1.6** (Матричная группа)**.** Матричные группы: носитель группы - $M_n^*(R)$ и $det \neq 0$

**Пример 1.5.** *Примеры матричных групп:*

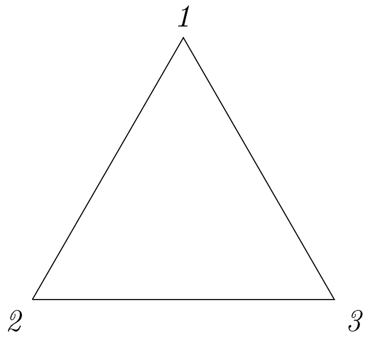
1. $(M_n^*, \cdot, E, ^{-1})$ *- группа, не коммутативная*
2. $det = \pm 1$ *- группа*
3. $O_n$ *- ортогональные,* $(O_n, \cdot, E, ^{-1})$ *- группа*

**Определение 1.7** (Группа перестановок)**.** Группа перестановок - группа перестановок множества $S$ называется группа всех биекций $f : S \to S$. $(F, \circ, e, ^{-1})$

**Пример 1.6.**

**Определение 1.8** (Симметрическая группа порядка)**.** Симметрическая группа порядка $n$: $S$ - конечно и состоит из $n$ элементов. $(A, \circ, e, ^{-1})$, $A$ - множество автоморфизмов $h : S \to S$

**Пример 1.7.** *Пример симметрической группы:*




$A = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$

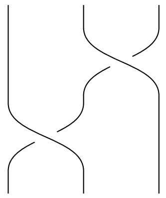
- $e$ *- тождественное преобразование*
- $r_1, r_2$ *- поворот на* $120°$ *и* $240°$ *соответственно*
- $s_1, s_2, s_3$ *- оборот вокруг высоты, идущей из первой, второй и третьей вершины соответственно*

$$\mathbf{D}_3 = (A, \circ)$$

Таблица умножения $\circ$

| | $e$ | $r_1$ | $r_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $x$ | $e$ | $x$ | $e$ | $x$ |
| $r_1$ | $e$ | $x$ | $e$ | $x$ | $e$ | $x$ |
| $r_2$ | $e$ | $x$ | $e$ | $x$ | $e$ | $x$ |
| $s_1$ | $e$ | $x$ | $e$ | $x$ | $e$ | $x$ |
| $s_2$ | $e$ | $x$ | $e$ | $x$ | $e$ | $x$ |
| $s_3$ | $x$ | $x$ | $e$ | $x$ | $e$ | $x$ |

**Определение 1.9.** Группа кос -



ещё:

потом соображу как длиннее сделать

**Теорема 1.4.** *Если $G$ - полугруппа, то $G$ является группой тогда и только тогда, когда любое уравнение вида $ax = b$ или $xa = b$, $(a, b \in G)$ имеет в $G$ решение*

*Доказательство.*

1. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} ax &= b \\ a^{-1}ax &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} xa &= b \\ xaa^{-1} &= ba^{-1} \\ x &= ba^{-1} \end{aligned}$$

   любое уравнение вида $ax = b$ или $xa = b$, $(a, b \in G)$ имеет в $G$ решение

2. $\Leftarrow$ по теореме 1.3

   (a) по определению полугруппы

   (b) $ax = a \Rightarrow x = e$ $ya = b$, имеет решение $y = d$, $da = b$

   $$be = dae = da = b \Rightarrow be = b$$

   (c) для любых $ax = e$ существует решение $x = a^{-1}$ - обратное к $a$

$\square$

**Теорема 1.5.**

*1.* $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

*2.* $(a^{-1})^{-1} = a$

**Определение 1.10** (Абелева группа)**.** Абелева группа - группа, в которой $xy = yx$