1 Декартовы произведения, тождества, многообразия

Определение 1.1 (Декартово произведение)**.** Пусть $\mathcal{A} = (A, I)$, $\mathcal{B} = (B, J)$ - алгебры одной сигнатуры Σ, декартово произведение $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ - это

$$\mathcal{C} = (C, K),\ C = A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

где определены операции $f^{(n)} \in \Sigma$

$$f^{\mathcal{C}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) = (f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), f^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n))$$

Пример 1.2 (Пример декартова произведения)**.**

Теорема 1.3. *Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $h_1(a, b) = a$, $h_2(a, b) = b$, тогда $h_1 : C \to A$ и $h_2 : C \to B$ - гомоморфизмы.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} h_1(f^{\varepsilon}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n))) &= h_1(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), f^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)) \\ &= f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n) \\ &= f^{\mathcal{A}}(h_1(a_1, b_1), ..., h_1(a_n, b_n)) \end{aligned}$$

□

Определение 1.4 (Тождество)**.** Пусть Σ - сигнатура, t_1, t_2 - термы в Σ, тогда тождество - формула вида $t_1 = t_2$.

В $\mathcal{A}$ выполнено $t_1 = t_2$, если оно выполнено для любых значений переменных.

Определение 1.5 (Многообразие)**.** Пусть T - множество тождеств, многообразие задаваемое(определяемое) T - это класс всех алгебр, в котором выполнены все тождества из T.

$\mathcal{A} \in M \Leftrightarrow$ в $\mathcal{A}$ выполнены $t_1 = t_2 \in T$

Пример 1.6 (Пример многообразия)**.**

Лемма 1.7. *Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Тогда для любого терма $t(x_1, ..., x_n)$:*

$$t^{\mathcal{C}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) = (t^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), t^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n))$$

Доказательство. Индукция по построению t

1. $t = x$, $t^{\mathcal{C}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) = (a_i, b_i)$, $(a_i, b_i) = (t^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), t^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n))$
2. $t = d$ - константа, $t^{\mathcal{C}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) = (d^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{B}})$, $(t^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), t^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)) = (d^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{B}})$
3. пусть $s_1, ..., s_k$ - термы, $t = f(s_1, ..., s_k) = (s_i^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), s_i^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n))$, тогда

$$
\begin{gathered}
t^{\mathcal{C}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) = \\
f^{\mathcal{C}}(s_1^{\mathcal{C}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)), ..., s_n^{\mathcal{C}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n))) = \\
f^{\mathcal{C}}((s_i^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), s_i^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)), ..., (s_k^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), s_k^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n))) = \\
(f^{\mathcal{A}}(s_i^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), ..., s_k^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)), f^{\mathcal{B}}(s_i^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n), ..., s_k^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n))) = \\
(t^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), t^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n))
\end{gathered}
$$

$\square$

Теорема 1.8 (Теорема Бишопа). *Пусть M - многообразие, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M$, тогда*

1. *$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C} \in M$ (замкнутость относительно подалгебры)*
2. *$\mathcal{C}$ - гомоморфный образ $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C} \in M$ (замкнутость относительно гомоморфизма)*
3. *$\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \in M$ (замкнутость относительно декартовых произвелений)*

Доказательство. Пусть $T = \{t_1(x_1, ..., x_n) = t_2(x_1, ..., x_n)\}$ - множество тождеств

1. пусть $c_1, ..., c_n \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, тогда $c_1, ..., c_n \in \mathcal{A}$ и

$$
\begin{aligned}
t_1^{\mathcal{C}}(c_1, ..., c_n) &= t_1^{\mathcal{A}}(c_1, ..., c_n) \\
&= t_2^{\mathcal{A}}(c_1, ..., c_n) \\
&= t_2^{\mathcal{C}}(c_1, ..., c_n)
\end{aligned}
$$

   это и значит что $\mathcal{C} \in M$

2. пусть $c_1, ..., c_n \in \mathcal{C}$ и $h : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, тогда $c_1 = h(a_1), ..., c_n = h(a_n)$, $a_1, ..., a_n \in \mathcal{A}$ и

$$\begin{aligned} t_1^{\mathcal{C}}(c_1, ..., c_n) &= t_1^{\mathcal{C}}(h(a_1), ..., h(a_n)) \\ &= h(t_1^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) \\ &= h(t_2^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) \\ &= t_2^{\mathcal{C}}(h(a_1), ..., h(a_n)) \\ &= t_2^{\mathcal{C}}(c_1, ..., c_n) \end{aligned}$$

3. пусть $c_1, ..., c_n \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, тогда $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) \in \mathcal{C}$ и

$$\begin{aligned} t_1^{\mathcal{C}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) &= (t_1^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), t_1^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)) \\ &= (t_2^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), t_2^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)) \\ &= t_2^{\mathcal{C}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) \end{aligned}$$

$\square$