

# 1 Подалгебры, порождающие элементы, вложения

**Определение 1.1.** Подалгебра - алгебра  $\mathcal{B} = (B, J)$  является подалгеброй  $\mathcal{A} = (A, I)$ , если  $B \subseteq A$  и  $J(f)$  - ограничение на  $B$  для всякого  $f$

**Определение 1.2.** Ограничение операции -  $n$ -местная операция  $g$  на  $B$  является ограничением операции  $f$  множеством  $B$  если

$$g(b_1, \dots, b_n) = f(b_1, \dots, b_n)$$

для любых  $b_1, \dots, b_n$  из  $B$

**Пример 1.1.** Пример подалгебры:

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \supseteq (\mathbb{R}, +, \cdot) \supseteq (\mathbb{Q}, +, \cdot)$$

**Следствие 1.1.**

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

**Теорема 1.1.** Если  $\mathcal{A} = (A, I)$  - алгебра, то  $B$  ( $B \subseteq A; B \neq \emptyset$ ) является носителем некоторой подалгебры тогда и только тогда, когда  $B$  замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре  $\mathcal{A}$

*Доказательство.* 1.  $\Rightarrow$

$B$  - носитель подалгебры  $\mathcal{B} = (B, J)$  и  $B \subseteq A$ , тогда

$$f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n) = f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) \in B$$

$B$  замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре  $\mathcal{A}$

2.  $\Leftarrow$   $B$  замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре  $\mathcal{A}$ , тогда

$J(f)$  - функция на  $B$

$$J(f)(b_1, \dots, b_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n) \in B$$

$J(f)$  - ограничение  $f^{\mathcal{A}}$  на  $B$

следовательно  $\mathcal{B} = (B, J)$  - подалгебра и  $B$  - её носитель

□

**Пример 1.2.** Пример на теорему:

**Теорема 1.2.** Доказательство.

□