1 Евклидовы кольца, кольца главных идеалов, факториальные кольца

Определение 1.1 (Евклидово кольцо)**.** R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, R - евклидово, если для каждого элемента a этого кольца существует его норма $\|a\|$.

Определение 1.2 (Евклидова норма)**.** Это некоторая функция элемента кольца, такая что

1. $\|a\| \in \omega$
2. если $a, b \neq 0$, то $\|ab\| \geq \max(\|a\|, \|b\|)$
3. если $a \neq 0$, то для любого b существуют d и r такие что $b = da + r$ и $\|r\| < \|a\|$ или $r = 0$

Определение 1.3 (Кольцо главных идеалов)**.** Кольцо главных идеалов - кольцо, в котором все идеалы главные

Теорема 1.1. *Каждое евклидово кольцо - кольцо главных идеалов*

Доказательство. □

Теорема 1.2. *В кольце главных идеалов не существует бесконечно возрастающей цепи идеалов*

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq ...$$

Доказательство. □

Определение 1.4 (Простой элемент)**.** Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда a - простой, если из $a = bc$ следует что b или c обратимы

Определение 1.5 (Факториальное кольцо)**.** Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда R - факториальное кольцо, если для каждого элемента $a \in R$

1. существует простые $b_1, ..., b_n$, такие что $a = b_1 ... b_n$
2. если $a =$

Теорема 1.3. R *- целостное кольцо и* $a \neq 0$*, Тогда следующие условия эквивалентны*

1. *a - необратимый*

2. $aR \neq R$

3. *Для любого* $b \neq 0$ $abr \neq bR$

4. *для некоторого* $b \neq 0$ $abr \neq bR$

Доказательство. □

Теорема 1.4. *пусть* R *- целостное кольцо главных идеалов, тогда* R *- факториальное*

Доказательство. □