

1 Группы

Определение 1.1:

Группа - моноид, в котором все элементы обратимы

Теорема 1.1. Если M - моноид и $G \subseteq M$ - подмножество обратимых элементов, то G - группа

Доказательство. $G \subseteq M$ следовательно G ассоциативна, e - обратимый следовательно G имеет нейтральный элемент. Надо доказать замкнутость: $x * y \in G$

x', y' - обратные к x и y элементы, тогда

$$(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x' = x * e * x' = x * x' = e$$

$$(y' * x') * (x' * y') = y' * (x' * x) * y = y' * e * y = y' * y = e$$

$x * y$ обратим $\Rightarrow xy \in G$

если $x \in G$, то $x' * x = x * x' = e$, тогда x' имеет обратный элемент, тогда $x' \in G$. Любой элемент G имеет обратный.

G - группа. Теорема доказана.

□

Теорема 1.2 (Теорема Гротендика). Каждый коммутативный моноид, в котором все элементы сократимы можно вложить в группу

Доказательство. Пусть M - коммутативный моноид, $G' = M \times M = (a, b)$, где $a, b \in M$, $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$, (e_1, e_2) - нейтральный элемент.

Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Является ли \equiv конгруэнтностью?

1. $(a, b) \equiv (a, b)$, $ab = ba$
2. $(a, b) \equiv (c, d)$, $ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c, d) \equiv (a, b)$
3. $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (u, v) \Rightarrow (a, b) \equiv (u, v)$

Надо доказать:

$$(a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2), (c_1, d_1) \equiv (c_2, d_2) \Rightarrow (a_1 c_1, b_1 d_1) \equiv (a_2 c_2, b_2 d_2)$$

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2), (c_1, d_1) \equiv (c_2, d_2) &\Rightarrow \\
a_1 b_2 = b_1 a_2, c_1 d_2 = d_1 c_2 &\Rightarrow a_1 b_2 c_1 d_2 = b_1 a_2 d_1 c_2 \Rightarrow \\
(a_1 c_1)(b_2 d_2) = (b_1 d_1)(a_2 c_2) &\Rightarrow \\
(a_1 c_1, b_1 d_1) \equiv (a_2 c_2, b_2 d_2) &
\end{aligned}$$

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc - \text{конгруэнтность}$$

Пусть $G = G' / \equiv$ надо доказать что G - группа и M вкладывается в G

$$\begin{aligned}
ab = ba &\Rightarrow abe = ab = ba = bae \Rightarrow (ab, ba) \equiv (e, e) \\
\widehat{(a, b)} * \widehat{(b, a)} &= \widehat{(ab, ba)} = \widehat{(e, e)}
\end{aligned}$$

\Rightarrow каждый элемент G имеет обратный $\Rightarrow G$ - группа

Пусть $h : M \rightarrow G$ и $h(a) = \widehat{(a, e)}$, тогда

$$\begin{aligned}
h(ab) &= \widehat{(ab, e)} = \widehat{(a, e)} \widehat{(b, e)} = h(a)h(b) \\
h(e) &= \widehat{(e, e)}
\end{aligned}$$

h - гомоморфизм

Пусть $h(a) = h(b)$

$$\widehat{(a, e)} = \widehat{(b, e)} \Rightarrow (a, e) \equiv (b, e) \Rightarrow ae = eb \Rightarrow a = b$$

следовательно h - инъекция, следовательно h - вложение

□

Пример 1.1:

Пример на теорему Гротендика:

Теорема 1.3. G - группа тогда и только тогда, когда

1. $(xy)z = x(yz)$
2. $xe = x$
3. $xx^{-1} = e$

Доказательство. 1. \Rightarrow по определению группы

2. \Leftarrow

$(xy)z = x(yz) \Rightarrow G$ ассоциативна

$xx^{-1} = e \Rightarrow x^{-1}x = e$

Надо доказать: $ex = x$ для любого x

$$\begin{aligned} x^{-1}x &= x^{-1}xe = x^{-1}x(x^{-1}x)(x^{-1}x)^{-1} = x^{-1}(xx^{-1})x(x^{-1}x)^{-1} = \\ &= x^{-1}ex(x^{-1}x)^{-1} = (x^{-1}x)(x^{-1}x)^{-1} = e \quad (1) \end{aligned}$$

$$ex = (xx^{-1})x = x(x^{-1}x) = xe = x$$

G - группа

□

Следствие. Группы образуют многообразие в сигнатуре $(*, e, ^{-1})$

Определение 1.2:

Аддитивная группа - группа со сложением

Пример 1.2:

Примеры аддитивных групп:

Определение 1.3:

Мультипликативная группа - группа с умножением

Пример 1.3:

Примеры мультипликативных групп:

Определение 1.4:

Множество вычетов -

Пример 1.4:

Определение 1.5:

Матричные группы: носитель группы - $M_n^*(R)$ и $\det \neq 0$

Пример 1.5:

Примеры матричных групп:

1. $(M_n^*, \cdot, E, {}^{-1})$ - группа, не коммутативная

2. $\det = \pm 1$ - группа

3. O_n - ортогональные, $(O_n, \cdot, E, {}^{-1})$ - группа

Определение 1.6:

Группа перестановок - группа перестановок множества S называется группа всех биекций $f : S \rightarrow S$. $(F, \circ, e, {}^{-1})$

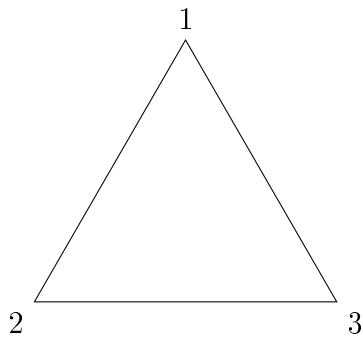
Пример 1.6:

Определение 1.7:

Симметрическая группа порядка n : S - конечно и состоит из n элементов. $(A, \circ, e, {}^{-1})$, A - множество автоморфизмов $h : S \rightarrow S$

Пример 1.7:

Пример симметрической группы:



$$A = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$$

- e - тождественное преобразование
- r_1, r_2 - поворот на 120° и 240° соответственно
- s_1, s_2, s_3 - оборот вокруг высоты, идущей из первой, второй и третьей вершины соответственно

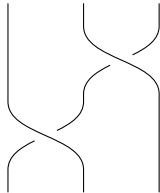
$$Tri = (A, \circ)$$

Таблица умножения \circ

	e	r_1	r_2	s_1	s_2	s_3
e	e	x	e	x	e	x
r_1	e	x	e	x	e	x
r_2	e	x	e	x	e	x
s_1	e	x	e	x	e	x
s_2	e	x	e	x	e	x
s_3	x	x	e	x	e	x

Определение 1.8:

Группа кос -



ещё:



потом соображу как длиннее сделать

Теорема 1.4. Если G - полугруппа, то G является группой тогда и только тогда, когда любое уравнение вида $ax = b$ или $xa = b$, $(a, b \in G)$ имеет в G решение

Доказательство. 1. \Rightarrow

$$\begin{array}{ll}
 ax = b & xa = b \\
 a^{-1}ax = a^{-1}b & xaa^{-1} = ba^{-1} \\
 x = a^{-1}b & x = ba^{-1}
 \end{array}$$

любое уравнение вида $ax = b$ или $xa = b$, $(a, b \in G)$ имеет в G решение

2. \Leftarrow по теореме 1.3

(a) по определению полугруппы

(b) $ax = a \Rightarrow x = e$ $ya = b$, имеет решение $y = d$, $da = b$

$$be = dae = da = b \Rightarrow be = b$$

(c) для любых $ax = e$ существует решение $x = a^{-1}$ - обратное к a

□

Теорема 1.5. 1. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

2. $(a^{-1})^{-1} = a$

Определение 1.9:

Абелева группа - группа, в которой $xy = yx$