1 Евклидовы кольца, кольца главных идеалов, факториальные кольца

Определение 1.1 (Евклидово кольцо)**.** R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, R - евклидово, если для каждого элемента a этого кольца существует его норма $\|a\|$.

Определение 1.2 (Евклидова норма)**.** Это некоторая функция элемента кольца, такая что

1. $\|a\| \in \omega$
2. если $a, b \neq 0$, то $\|ab\| \geq \max(\|a\|, \|b\|)$
3. если $a \neq 0$, то для любого b существуют d и r такие что $b = da + r$ и $\|r\| < \|a\|$ или $r = 0$

Определение 1.3 (Кольцо главных идеалов)**.** Кольцо главных идеалов - кольцо, в котором все идеалы главные

Теорема 1.4. *Каждое евклидово кольцо - кольцо главных идеалов*

Доказательство. □

Теорема 1.5. *В кольце главных идеалов R не существует бесконечно возрастающей цепи идеалов*

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq ...$$

Доказательство. Пусть $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq ...$ - возрастающая цепь идеалов и $I = \cup_{i=0}^{\infty} I_i$, докажем что I - идеал

1. докажем что I - подкольцо по теореме **??**
   (a) I замкнут по сложению и умножению, покажем на элементах $a, b \in I$. В таком случае в цепи есть идеалы I_j и I_k, такие что $a \in I_j$ и $b \in I_k$. Если $m \geq \max(j, k)$ то оба элемента a и b принадлежат I_m, поэтому принадлежат и $a + b$ и ab. Поэтому $a + b \in I$ и $ab \in I$
   (b) $0 \in I$ потому что $0 \in I_i$ для всякого i
   (c) Пусть $a \in I$. Тогда $a \in I_j$ Для какого-то j, в этом случае $-a \in I_j$, следовательно $-a \in I$

следовательно I - подкольцо

2. Пусть $a \in I$. Тогда $a \in I_j$ Для какого-то j. Пусть r - любой элемент R, тогда $ra \in I_j$, следовательно $ra \in I$. Следовательно $rI \subseteq I$

по определению **??** I - идеал.

Так как R - КГИ и I - идеал, то существует $a \in R$, такое что $I = aR$. Так как $a \in I$ существует n такой что $a \in I_n$. Следовательно $aR \subseteq I_n$. По определению I $I_n \subset I = aR$. I_n и I входят друг в друга следовательно $I = I_n$. Если брать любое $m \geq n$ то должно выполнятся условие $I \subseteq I_m$. Это возможно только если $I_m = I$.

Следовательно после некоторого конечного элемента n цепь идеалов перестаёт возрастать □

Определение 1.6 (Простой элемент)**.** Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда a - простой, если из $a = bc$ следует что b или c обратимы

Определение 1.7 (Факториальное кольцо)**.** Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда R - факториальное кольцо, если для каждого элемента $a \in R$

1. существует простые $b_1, ..., b_n$, такие что $a = b_1...b_n$

2. если $a = c_1...c_m$, где $c_1, ..., c_m$ - простые, то $m = n$, существует перестановка σ, Такая что $c_i = e_i b_{\sigma(i)}$ Для обратимого e_i

Теорема 1.8. *Существует нефакториальное кольцо*

Лемма 1.9. *Если R - кольцо, $a \in R$ и $1 \in aR$, то $aR = R$*

Доказательство. Так как $1 \in aR$, то a обратим, то есть существует $a^{-1} \in R$,следовательно

$$aR \supseteq aa^{-1}R = R$$

Так как $R \subseteq aR$ и $aR \subseteq R$, то $aR = R$ □

Теорема 1.10. *R - целостное кольцо и $a \neq 0$, Тогда следующие условия эквивалентны*

1. *a - необратимый*

2. *$aR \neq R$*

3. *Для любого $b \neq 0$ $abr \neq bR$*

4. *для некоторого* $b \neq 0$ $abr \neq bR$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$

$ab \neq 1$ для любого b, соответствено $aR \not\ni 1$, следовательно $aR \neq R$

$2 \Rightarrow 3$

Пусть $b \neq 0$. Допустим $abR = br \ni b$. Пусть для некоторого $r \in R$ верно $abr = b$, следовательно

$$arb - b = 0 \Rightarrow (ar - 1)b = 0 \Rightarrow ar - 1 = 0 \Rightarrow ar = 1$$

то есть $1 \in aR$, следовательно $aR = R$, Противоречие.

$3 \Rightarrow 4$

Если для любого $b \neq 0$ верно $abr \neq bR$, то верно и для некоторого

$4 \Rightarrow 1$

Допустим a - обратимый, то есть существует $r \in R$, такой что $ar = 1$, получается

$$abR = baR \subseteq bR$$

и

$$bR = 1 \cdot bR = arbR = abrR \subseteq abR$$

следовательно $bR = abR$, что противоречит 4, следовательно a необратим

□

Теорема 1.11. *Если R - КГИ, то каждый необратимый элемент отличный от нуля раскладывается в конечное произведение простых элементов*

Доказательство. □

Лемма 1.12. *Пусть I - идеал КГИ R. Тогда I является максимальным тогда и только тогда когда $I = pR$, где p - простой*

Доказательство. □

Теорема 1.13. *пусть R - целостное кольцо главных идеалов, тогда R - факториальное*

Доказательство. □