

1 Полугруппы и моноиды. Идеммпотенты, сократимые и обратимые элементы.

Определение 1.1 (Полугруппа). Полугруппа - многообразие заданное множеством

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

Пример 1.1 (Примеры полугрупп).

Теорема 1.1. *Значение терма не зависит от расстановки скобок (Ассоциативный закон)*

$$t = t_1 * t_2 = (a_1 a_2 \dots a_m)(a_{m+1} \dots a_n) = a_1 a_2 \dots a_n$$

Доказательство. Индукция по длине t

Базис: $n = 1$, нет скобок

Шаг: для $n - 1$ верно, тогда

1. $m = n - 1$

$$t = t_1 * a_n = (a_1 a_2 \dots a_m) * a_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

2. $1 \leq m \leq n - 1$

$$t = t_1 * t_2 = (a_1 a_2 \dots a_m)(a_{m+1} \dots a_n) = (a_1 a_2 \dots a_m)(a_{m+1} \dots a_{n-1})a_n = (a_1 a_2 \dots a_{n-1})a_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

□

Определение 1.2 (Нейтральный элемент). e_l называется **нейтральным слева** в полугруппе, если $e_l * a = a$ для всех a , e_r называется **нейтральным справа** в полугруппе, если $a * e_r = a$ для всех a , e - нейтральный слева и справа

Пример 1.2 (Примеры нейтрального элемента). $(\omega, +)$ - 0, (ω, \cdot) - 1, (ω, \max) - 0, (ω, \min) - нет нейтрального

Теорема 1.2. *Если существуют нейтральный слева и нейтральный справа то они равны*

Доказательство.

$$e_l = e_l * e_r = e_r$$

□

Следствие 1.1. Если нейтральный элемент существует, то он единственный.

Определение 1.3 (Моноид). Моноид - полугруппа с нейтральным элементом ИЛИ

Моноид - это элементы многообразия, которые определяются равенствами

$$\begin{cases} x * (y * z) = (x * y) * z \\ x * e = x \\ e * x = x \end{cases}$$

Пример 1.3 (Примеры моноидов). $(\omega, +, 0)$, $(\omega, \cdot, 1)$, $(\omega, \max, 0)$

A^A - множество одноместных функций из A в A $h = f \circ g$, если $h(a) = g(f(a))$ для любого $a \in A$

Доказать что (A^A, \circ) - моноид

Доказательство. $e(a) = a$ для всех a , тогда

$$\left. \begin{aligned} (e \circ f)(a) &= f(e(a)) = f(a) \\ (f \circ e)(a) &= e(f(a)) = f(a) \end{aligned} \right\} e \circ f = f \circ e = f$$

e - нейтральный элемент

$$\begin{aligned} ((f \circ g)h)(a) &= h(f \circ g)(a) = h(g(f(a))) \\ (f(g \circ h))(a) &= (g \circ h)(f(a)) = h(g(f(a))) \\ ((f \circ g)h)(a) &= (f(g \circ h))(a) \end{aligned}$$

Выполняется ассоциативность, соответственно (A^A, \circ, e) - моноид

□

Определение 1.4 (Идемпотент). Идемпотент - элемент моноида a , такой что $a^2 = a$

Пример 1.4 (Примеры идемпотентов). $(\omega; +)$ - 0

Определение 1.5 (Моноид типа $(i, j-i)$). Моноид типа $(i, j-i)$ - моноид с элементами

???

Теорема 1.3. В моноиде типа $(i, j-i)$, где $i > 0$ существует идемпотент $b \neq e$

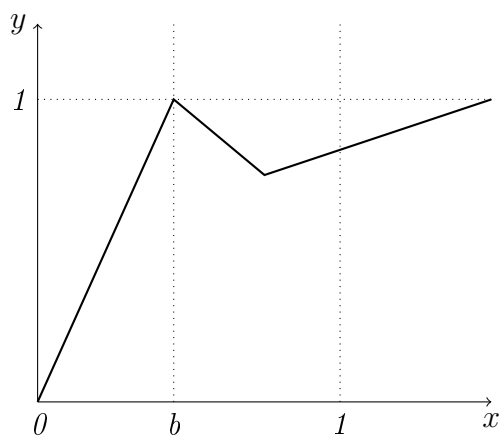
Доказательство.

□

Определение 1.6 (Обратный элемент). b_l - левый обратный для элемента a , если $b_l * a = e$, b_r - правый обратный для элемента a , если $a * b_r = e$, b - обратный для элемента a , если $b * a = a * b = e$

Пример 1.5. *Пример чего-то: Доказать что множество функций этого вида замкнуты относительно композиции:*

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{при } x < b \\ ab & \text{при } x \geq b \end{cases}$$



Доказательство.

□

Пример 1.6 (Пример изоморфизма). *Доказать*

$$(P(A \cup B); \cup, \cap) \cong (P(A); \cup, \cap) \times (P(B); \cup, \cap)$$

где $P(A)$ - множество всех подмножеств множества A

Доказательство. Надо доказать

$$h(x_1 \cup x_2) = h(x_1) \cup h(x_2)$$

$$h(x_1 \cap x_2) = h(x_1) \cap h(x_2)$$

и h - биекция

По сути функция h должна выдавать пару, первая часть которой состоит из элементов A , вторая из B

□

Пример 1.7 (Пример полугруппы). *Является ли $(\omega, \text{НОД}())$ полугруппой*

Доказательство. Предположим что является, надо доказать

$$\text{НОД}(\text{НОД}(x, y), z) = \text{НОД}(x, \text{НОД}(y, z))$$

1. \Rightarrow Пусть $d : d \mid \text{НОД}(x, y), d \mid z$

Надо доказать $d \mid \text{НОД}(y, z), d \mid x$

$$d \mid \text{НОД}(x, y) \Rightarrow d \mid x$$

$$d \mid \text{НОД}(x, y) \Rightarrow d \mid y$$

$$d \mid x, d \mid y \Rightarrow d \mid \text{НОД}(y, z)$$

2. \Leftarrow также

□

Пример 1.8 (Построение моноидов). *Построить все моноиды из двух элементов $\{e, x\}$*

$$A_1 = (\{e, x\}; *_1), A_2 = (\{e, x\}; *_2)$$

Таблица умножения $(*_1)$

	e	x
e	e	x
x	x	e

Таблица умножения $(*_2)$

	e	x
e	e	x
x	x	x

*Доказать их ассоциативность: $a * (b * c) = (a * b) * c$*

1. $a = e$

$$e * (b * c) = b * c = (e * b) * c$$

2. $b = e$ также

3. $c = e$ также

4. $a = b = c = x$

$$x * (x * x) = x * e = e * x = (x * x) * x$$

Все остальные моноиды или изоморфны или тривиальны

Теорема 1.4. Если в конечном моноиде каждый элемент имеет левый обратный, то существует правый обратный

Доказательство. Предположим обратное: Если в конечном моноиде каждый элемент имеет левый обратный, то хотя бы для одного не существует правый обратный: $ab_r \neq e$ для всех b_r

НЕ ДОКАЗАНО

□

Определение 1.7 (Сократимый элемент). Сократимый слева (справа) - такой элемент моноида, что из $ax = ay$ ($xa = ya$) следует $x = y$

Пример 1.9 (Пример сократимого элемента). $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $x + a = y + a \Rightarrow x = y$

Теорема 1.5. Неединичные идемпотенты несократимы

Доказательство. $a \cdot a = a = e \cdot a$ но $a \neq e$, соответственно a несократим справа, $a \cdot a = a = a \cdot e$ но $a \neq e$, соответственно a несократим слева
 a несократим

□

Теорема 1.6. Все обратимые слева(справа) элементы сократимы слева(справа)

Доказательство. Пусть a - обратимый слева, тогда $ax = ay \Rightarrow b_1ax = b_1ay \Rightarrow ex = ey \Rightarrow x = y$, следовательно a - сократимый слева

□

Пример 1.10 (Пример обратимого элемента). $(\mathbb{Z}^+, \cdot, 1)$, обратимый только 1, сократимы все. (Какой к половым органам это пример?)