1 Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы, фактор-группа

Определение 1.1 (Нормальная подгруппа)**.** Нормальная подгруппа - подгруппа, у которой любой левый смежный класс совпадает с правым

Пример 1.1. *Пример нормальных групп*

$$\langle r_1 \rangle = \{r_0, r_1, r_2\} \subseteq \mathcal{D}_3$$

$$r_i\langle r_1 \rangle = r_i\{r_0, r_1, r_2\} = \{r_{0+i}, r_{1+i}, r_{2+i}\} = \langle r_1 \rangle$$
$$\langle r_1 \rangle r_i = \{r_0, r_1, r_2\}r_i = \{r_{0+i}, r_{1+i}, r_{2+i}\} = \langle r_1 \rangle$$
$$r_i\langle r_1 \rangle = \langle r_1 \rangle r_i$$
$$s_i\langle r_1 \rangle = \{s_i r_0, s_i r_1, s_i r_2\} = \{s_i, s_{i-1}, s_{i+1}\}$$
$$\langle r_1 \rangle s_i = \{r_0 s_i, r_1 s_i, r_2 s_i\} = \{s_i, s_{i+1}, s_{i-1}\}$$
$$s_i\langle r_1 \rangle = \langle r_1 \rangle s_i$$

$\langle r_1 \rangle$ *- нормальная подгруппа*

Теорема 1.1. *Если $\mathcal{G}$ - группа, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, и $\equiv$ - отношение принадлежности к одному левому смежному классу, то $\equiv$ - отношение эквивалентности*

Доказательство.

1. Рефлексивность $a \in a\mathcal{H} \Rightarrow a \equiv a$
2. Симметричность $a \equiv b \Rightarrow a \in x\mathcal{H}, b \in x\mathcal{H} \Rightarrow b \equiv a$
3. Транзитивность $a \equiv b$, $b \equiv c \Rightarrow$

$$\begin{matrix} a, b \in x\mathcal{H} & a = xh_a & b = xh_b \\ b, c \in y\mathcal{H} & b = yh'_b & c = yh_c \end{matrix}$$

$$xh_b = yh'_b \Rightarrow x = yh'_b h_b^{-1} \Rightarrow a = y \underbrace{h'_b h_b^{-1} h_a}_{\mathcal{H}}$$

$$\left.\begin{matrix} c \in y\mathcal{H} \\ a \in y\mathcal{H} \end{matrix}\right\} a \equiv c$$

□

Определение 1.2 (Факторгруппа)**.** Рассмотрим группу G и ее нормальную подгруппу H. Пусть G/H — множество смежных классов G по H. Определим в G/H операцию умножения по следующему правилу: $aH \cdot bH = (ab)H$

Теорема 1.2. *Определение произведения смежных классов корректно. То есть произведение смежных классов не зависит от выбранных представителей a и b*

Доказательство. Пусть $aH, bH \in G/H$, $a_1 = a \cdot h_a \in aH$, $b_1 = b \cdot h_b \in bH$. Докажем, что $abH = a_1 b_1 H$. Достаточно показать, что $a_1 \cdot b_1 \in abH$.

В самом деле, $a_1 \cdot b_1 = a \cdot h_a \cdot b \cdot h_b = a \cdot b \cdot (b^{-1} \cdot h_a \cdot b) \cdot h_b$. Элемент $h = (b^{-1} \cdot h_a \cdot b)$ лежит в H по свойству нормальности H. Следовательно, $a \cdot b \cdot h \cdot h_b \in abH$. □

Определение 1.3 (Гомоморфизм групп)**.** Если G и H - группа, $h : G \to H$ и $h(a * b) = h(a) * h(b)$, то h - гомоморфизм

Следствие 1.1. *Гомоморфизм групп обладает следующими свойствами:*

1. $h(e) = e$

2. $h(a^{-1}) = h(a)^{-1}$

Доказательство. $h(e) = h(e * e) = h(e) * h(e)$

$h(e)$ - идемпотент в $\mathcal{H}$, следовательно $h(e) = e$

$$h(a^{-1}) = h(a^{-1}) * e = h(a^{-1}) * h(a) * (h(a))^{-1} = \\ h(a^{-1} * a) * (h(a))^{-1} = h(e) * (h(a))^{-1} = e * (h(a))^{-1} = (h(a))^{-1}$$

□

Определение 1.4 (Порождённая конгруэнтность)**.** Конгруэнтность порождённая h - если $a \equiv b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$ - конгруэнтность, то $h[A] = {}^{A}/_{\equiv}$

Теорема 1.3. *Если $h : G \to H$ - гомоморфизм, $\equiv$ - конгруэнтность порождённая h, то классы эквивалентные e в G являются нормальными подгруппами*

Доказательство. Пусть $a, b \in f \Rightarrow ab^{-1} \in f$, $a \equiv e$, $b \equiv e$, $b^{-1} \equiv e^{-1} \equiv e$, $ab^{-1} \equiv ee \equiv e$

$$a\{b \in \mathcal{G} : b \equiv e\} \ni c$$

$$aba^{-1} \in \{b \in \mathcal{G} : b \equiv e\} a \ni c$$

$$c = ab = abe = aba^{-1}a$$

$$b \equiv e \quad a \equiv a \quad a^{-1} \equiv a^{-1}$$

$$aba^{-1} \equiv aea^{-1} = e$$

$$aba^{-1} \equiv e$$

$$aba^{-1}a = abe = ab = c$$

$\square$

"И в обратную сторону". Хотя я в душе не знаю как в эту получилось.

Определение 1.5 (Ядро подгруппы)**.** Ядро подгруппы - множество элементов эквивалентных e. $\operatorname{Ker} h$

Теорема 1.4. *G - группа, H - нормальная подгруппа, $a \equiv b \Leftrightarrow a$ и b принадлежат одному левому классу, то $\equiv$ - конгруэнтность*

Доказательство. Пусть $a \equiv b$, $c \equiv d$, надо доказать

1. $ac \equiv bd$
2. $a^{-1} \equiv b^{-1}$ (зачем)

1.

$$\begin{aligned} a, b &\in x\mathcal{H} & a &= xh_a, b = xh_b \\ c, d &\in y\mathcal{H} & c &= yh_c, d = yh_d \end{aligned}$$

$ac = xh_a \cdot yh_c$, $h_a y = yh'$, $h_a y \in \mathcal{H}y = y\mathcal{H}$

$$\left.\begin{aligned} ac &= xh_a y h_c = xy \underbrace{h' h_c}_{\in \mathcal{H}} \in xy\mathcal{H} \\ bd &= xh_b y h_d = xy \underbrace{h'' h_d}_{\in \mathcal{H}} \in xy\mathcal{H} \end{aligned}\right\} \text{эквивалентные}$$

$h_b y = yh''$, $h_b y \in \mathcal{H}y = y\mathcal{H}$

2.

$$h_a \qquad\qquad h_b$$
$$h_a^{-1} \qquad\qquad h_b^{-1}$$
$$\mathcal{H}x^{-1} \qquad\qquad \mathcal{H}x^{-1}$$

$a^{-1}, b^{-1} \in x^{-1}\mathcal{H}$

$\square$

Определение 1.6 (щито). $\mathcal{G}$ - группа, $\mathcal{H}$ - нормальная подгруппа, $\equiv$ - отношение конгруэнтности. Тогда ${}^{\mathcal{G}}/_{\equiv} = {}^{\mathcal{G}}/_{\mathcal{H}}$

Следствие 1.2. *Если $h : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ - гомоморфизм, тогда* $h[\mathcal{G}] = {}^{\mathcal{G}}/_{\operatorname{Ker} h}$

Доказательство. $h[\mathcal{G}] = {}^{\mathcal{G}}/_{\equiv} = {}^{\mathcal{G}}/_{\operatorname{Ker} h}$ $\square$

Пример 1.2.

$$\mathcal{D}_3 = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$$

$\langle r_1 \rangle$ - *подгруппа вращений*
$\langle r_1 \rangle$
$S_1\langle r_1 \rangle$

Таблица умножения (ЧЕГО???)

	$\langle r_1 \rangle$	$S_1\langle r_1 \rangle$
$\langle r_1 \rangle$	$\langle r_1 \rangle$	$S_1\langle r_1 \rangle$
$S_1\langle r_1 \rangle$	$S_1\langle r_1 \rangle$	$\langle r_1 \rangle$

Пример 1.3. $(\mathbb{R}, +) \supseteq (\mathbb{Z}, +)$
$a + \mathbb{Z}$
$ba \in \mathbb{Z}$
$a + \mathbb{Z} = b + \mathbb{Z}$
$a \in [0, 1)$
$(a + \mathbb{Z}) + (b + \mathbb{Z}) = (a + b) = (a + b) \mod 1$
$\mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, $(\mathbb{C}_1, \cdot)$
$h(x) = e^{2nix}$
$x \in \mathbb{R} = e^{2nix} \in \mathbb{C}_1$
$h(x + y) = e^{2ni(x+y)} = e^{2nix}e^{2niy} = h(x)h(y)$

$h : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}, \cdot)$
$r \in \operatorname{Ker} h \Leftrightarrow r \equiv e$
$h(r) = h(e)$
$h(r) = h(0)$
$e^{2nix} = e^{2nix} = 1$
$e^{2nix} = 2n \cdot k, k \in \mathbb{Z}$
$r \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Ker} h \in \mathbb{Z}$