

1 Евклидовы кольца, кольца главных идеалов, факториальные кольца

Определение 1.1 (Евклидово кольцо). R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, R - евклидово, если для каждого элемента a этого кольца существует его норма $\|a\|$.

Определение 1.2 (Евклидова норма). Это некоторая функция элемента кольца, такая что

1. $\|a\| \in \omega$
2. если $a, b \neq 0$, то $\|ab\| \geq \max(\|a\|, \|b\|)$
3. если $a \neq 0$, то для любого b существуют d и r такие что $b = da + r$ и $\|r\| < \|a\|$ или $r = 0$

Определение 1.3 (Кольцо главных идеалов). Кольцо главных идеалов - кольцо, в котором все идеалы главные

Теорема 1.1. Каждое евклидово кольцо - кольцо главных идеалов
Доказательство.

□

Теорема 1.2. В кольце главных идеалов не существует бесконечно возрастающей цепи идеалов

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$$

Доказательство.

□

Определение 1.4 (Простой элемент). Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда a - простой, если из $a = bc$ следует что b или c обратимы

Определение 1.5 (Факториальное кольцо). Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда R - факториальное кольцо, если для каждого элемента $a \in R$

1. существует простые b_1, \dots, b_n , такие что $a = b_1 \dots b_n$

2. если $a = c_1 \dots c_m$, где c_1, \dots, c_m - простые, то $m = n$, существует перестановка σ , Такая что $c_i = e_i b_{\sigma(i)}$ Для обратимого e_i

Теорема 1.3. Существует нефакториальное кольцо

Теорема 1.4. R - целостное кольцо и $a \neq 0$, Тогда следующие условия эквивалентны

1. a - необратимый
2. $aR \neq R$
3. Для любого $b \neq 0$ $abr \neq bR$
4. для некоторого $b \neq 0$ $abr \neq bR$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$1 \Rightarrow 2$$

$ab \neq 1$ для любого b , соответственно $aR \not\supset 1$, следовательно $aR \neq R$

$$2 \Rightarrow 3$$

Пусть $b \neq 0$. Допустим $abR = bR \ni b$. Пусть для некоторого $e \in R$ верно $abr = b$, следовательно

$$arb - b = 0 \Rightarrow (ar - 1)b = 0 \Rightarrow ar - 1 = 0 \Rightarrow ar = 1$$

□

Теорема 1.5. пусть R - целостное кольцо главных идеалов, тогда R - факториальное

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

□