1 Полугруппы и моноиды. Идемпотенты, сократимые и обратимые элементы.

Определение 1.1 (Полугруппа)**.** Полугруппа - многообразие заданное множеством

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

Пример 1.1 (Примеры полугрупп)**.**

Теорема 1.1. *Значение терма не зависит от расстановки скобок (Ассоциативный закон)*

$$t = t_1 * t_2 = (a_1 a_2 ... a_m)(a_{m+1} ... a_n) = a_1 a_2 ... a_n$$

Доказательство. Индукция по длине t

Базис: $n = 1$, нет скобок

Шаг: для $n - 1$ верно, тогда

1. $m = n - 1$
$$t = t_1 * a_n = (a_1 a_2 ... a_m) * a_n = a_1 a_2 ... a_n$$

2. $1 \leq m \leq n - 1$
$$t = t_1 * t_2 = (a_1 a_2 ... a_m)(a_{m+1} ... a_n) = (a_1 a_2 ... a_m)(a_{m+1} ... a_{n-1}) a_n$$
Так как длина $(a_1 a_2 ... a_m)(a_{m+1} ... a_{n-1})$ равна $n - 1$ то выполняется индукционное предположение и
$$(a_1 a_2 ... a_m)(a_{m+1} ... a_{n-1}) = (a_1 a_2 ... a_{n-1})$$
соотвественно
$$(a_1 a_2 ... a_m)(a_{m+1} ... a_{n-1}) a_n = (a_1 a_2 ... a_{n-1}) a_n = a_1 a_2 ... a_n$$

□

Определение 1.2 (Нейтральный элемент)**.** e_l называется **нейтральным слева** в полугруппе, если $e_l * a = a$ для всех a, e_r называется **нейтральным справа** в полугруппе, если $a * e_r = a$ для всех a, e - нейтральный слева и справа

Пример 1.2 (Примеры нейтрального элемента)**.** $(\omega, +)$ - 0, $(\omega, \cdot)$ - 1, (ω, max) - 0, (ω, min) - *нет нейтрального*

Теорема 1.2. *Если существуют нейтральный слева и нейтральный справа то они равны*

Доказательство.
$$e_l = e_l * e_r = e_r$$
□

Следствие 1.1. *Если нейтральный элемент существует, то он единственный.*

Определение 1.3 (Моноид)**.** Моноид - полугруппа с нейтральным элементом ИЛИ

Моноид - это элементы многообразия, которые определяются равенствами
$$\begin{cases} x * (y * z) = (x * y) * z \\ x * e = x \\ e * x = x \end{cases}$$

Пример 1.3 (Примеры моноидов)**.** $(\omega, +, 0)$, $(\omega, \cdot, 1)$, $(\omega, max, 0)$

A^A - множество одноместных функций из A в A $h = f \circ g$, если $h(a) = g(f(a))$ для любого $a \in A$

Доказать что $(A^A, \circ)$ - моноид

Доказательство. $e(a) = a$ для всех a, тогда
$$\left.\begin{aligned} (e \circ f)(a) &= f(e(a)) = f(a) \\ (f \circ e)(a) &= e(f(a)) = f(a) \end{aligned}\right\} e \circ f = f \circ e = f$$

e - нейтральный элемент
$$((f \circ g)h)(a) = h(f \circ g)(a) = h(g(f(a)))$$
$$(f(g \circ h))(a) = (g \circ h)(f(a)) = h(g(f(a)))$$
$$((f \circ g)h)(a) = (f(g \circ h))(a)$$
Выполняется ассоциативность, соответственно $(A^A, \circ, e)$ - моноид

□

Определение 1.4 (Идемпотент)**.** Идемпотент - элемент моноида a, такой что $a^2 = a$

Пример 1.4 (Примеры идемпотентов)**.** $(\omega; +)$ - 0

Определение 1.5 (Обратный элемент)**.** b_l - левый обратный для элемента a, если $b_l * a = e$,

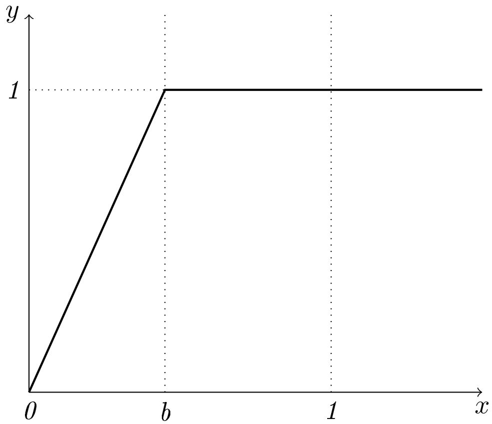
b_r - правый обратный для элемента a, если $a * b_l = e$,

b - обратный для элемента a, если $b * a = a * b = e$

Определение 1.6 (Обратимый элемент)**.** Элемент, для которого существует обратный

Пример 1.5. *Пример чего-то: Доказать что множество функций этого вида замкнуты относительно композиции:*

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{при } x < b \\ ab & \text{при } x \geq b \end{cases}$$



Доказательство. $\square$

Пример 1.6 (Пример изоморфизма)**.** *Доказать*

$$(P(A \cup B); \cup, \cap) \cong (P(A); \cup, \cap) \times (P(B); \cup, \cap)$$

где $P(A)$ - множество всех подмножеств множества A

Доказательство. Надо доказать

$$h(x_1 \cup x_2) = h(x_1) \cup h(x_2)$$

$$h(x_1 \cap x_2) = h(x_1) \cap h(x_2)$$

и h - биекция

По сути функция h должна выдавать пару, первая часть которой состоит из элементов A, вторая из B $\square$

Пример 1.7 (Пример полугруппы)**.** *Является ли* $(\omega, \text{НОД}())$ *полугруппой*

Доказательство. Предположим что является, надо доказать

$$\text{НОД}(\text{НОД}(x,y),z) = \text{НОД}(x, \text{НОД}(y,z))$$

1. $\Rightarrow$ Пусть $d : d|\text{НОД}(x,y), d|z$

   Надо доказать $d|\text{НОД}(y,z)$, $d|x$

$$d|\text{НОД}(x,y) \Rightarrow d|x$$
$$d|\text{НОД}(x,y) \Rightarrow d|y$$
$$d|x, d|y \Rightarrow d|\text{НОД}(y,z)$$

2. $\Leftarrow$ также

$\square$

Пример 1.8 (Построение моноидов)**.** *Построить все моноиды из двух элементов* $\{e, x\}$

$$A_1 = (\{e,x\}; *_1), A_2 = (\{e,x\}; *_2)$$

Таблица умножения $(*_1)$

	e	x
e	e	x
x	x	e

Таблица умножения $(*_2)$

	e	x
e	e	x
x	x	x

Доказать их ассоциативность: $a * (b * c) = (a * b) * c$

1. $a = e$

$$e * (b * c) = b * c = (e * b) * c$$

2. $b = e$ *также*

3. $c = e$ *также*

4. $a = b = c = x$

$$x * (x * x) = x * e = e * x = (x * x) * x$$

Все остальные моноиды или изоморфны или тривиальны

Теорема 1.3. *Если в конечном моноиде каждый элемент имеет левый обратный, то существует правый обратный*

Доказательство. Предположим обратное: Если в конечном моноиде каждый элемент имеет левый обратный, то хотя бы для одного не существует правый обратный: $ab_r \neq e$ для всех b_r

НЕ ДОКАЗАНО □

Определение 1.7 (Сократимый элемент)**.** Сократимый слева (справа) - такой элемент моноида, что из $ax = ay$ $(xa = ya)$ следует $x = y$

Пример 1.9 (Пример сократимого элемента)**.** $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $x + a = y + a \Rightarrow x = y$

Теорема 1.4. *Неединичные идемпотенты несократимы*

Доказательство. $a \cdot a = a = e \cdot a$ но $a \neq e$, соответственно a несократим справа, $a \cdot a = a = a \cdot e$ но $a \neq e$, соответственно a несократим слева

a несократим □

Теорема 1.5. *Все обратимые слева(справа) элементы сократимы слева(справа)*

Доказательство. Пусть a - обратимый слева, тогда $ax = ay \Rightarrow b_l ax = b_l ay \Rightarrow ex = ey \Rightarrow x = y$, следовательно a - сократимый слева □

Пример 1.10 (Пример обратимого элемента)**.** $(\mathbb{Z}^+, \cdot, 1)$, *обратимый только* 1*, сократимы все. (Какой к половым органам это пример?)*