1 Основные понятия

Определение 1.1. Сигнатура - множество имён операций с указанием их местности.

$$(f^{(2)}, g^{(3)}, h^{(0)}), (+^{(2)}, \cdot^{(3)})$$

$h^{(0)}$ - символ константы, V - имена переменных

Определение 1.2. Терм - выражение, составленное из символов сигнатуры и переменных

1. $x \in V$, x - терм
2. c - символ константы, с - терм
3. если $t_1, ..., t_n$ - термы и f - символ n-местной операции, то $f(t_1, ..., t_n)$ - терм

Пример 1.1. *Примеры термов:* $-(x), -(0), +(x, y), 2 + 3 + a$

Определение 1.3. Замкнутый терм - терм, не содержащий переменных

Определение 1.4. Универсальная алгебра - пусть Σ - сигнатура, тогда *универсальная алгебра* сигнатуры Σ - это пара вида (A, I), где A - произвольное непустое множество, а I - некоторое отображение, которое для всякого $p^{(m)} \in \Sigma$, $I(p^{(m)})$ - n-местной операции на множестве

Пример 1.2. *Пример универсальной алгебры: пусть* $\Sigma = (+^{(2)}, \cdot^{(2)}, -^{(1)}, 0^{(0)}, 1^{(0)})$, *тогда*

$$\begin{aligned} R = (\mathbb{R}, I) : & I(+) - \textit{сложение} \\ & I(\cdot) - \textit{умножение} \\ & I(-) - \textit{вычитание} \\ & I(0) - 0 \\ & I(1) - 1 \end{aligned}$$

Определение 1.5. $\mathbb{R}$ называется **основным множеством** или носителем алгебры, а I - интерпретацией или интерпретирующей функцией

Определение 1.6. Состояние - функция, приписывающая переменной некоторый элемент носителя $\sigma : V \to A$

Пример 1.3. *Пример состояний:* $\sigma = \{(x, 3), (y, -8)\}, \sigma(x) = 3$

Определение 1.7. Значение терма на состоянии - значение того выражения, в котором переменные заменены их значениями

1. t - переменная, $\sigma(t)$ - по определению состояния
2. t - символ константы, $I(t) = \sigma(t_1) = v_1$
3. если $t_1, ..., t_n$ - термы и $\sigma(t_1) = v_1, ..., \sigma(t_n) = v_n$, то $\sigma(t) = I(f)(v_1, ..., v_n)$

2 Изоморфизм

Определение 2.1. Изоморфизм - Пусть Σ - сигнатура, $\mathcal{A} = (A, I)$, $\mathcal{B} = (B, J)$ -
универсальные алгебры сигнатуры Σ, тогда изоморфизм между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - это $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ - биективная функция, которая удовлетворяет следующему условию:

$$h(I(f_i)(a_1, ..., a_n)) = J(f_i)(h(a_1), ..., h(a_n))$$

для любых $a_1, ..., a_n$ и $f_i \in \Sigma$

Пример 2.1. *Пример изоморфизма: пусть* $\Sigma = (f^{(2)})$, $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{R}, \cdot)$

Надо доказать:

$$h(a_1 + a_2) = h(a_1) \cdot h(a_2)$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Пусть $h(x) = e^x$, *тогда*

$$h(a_1 + a_2) = e^{a_1 + a_2} = e^{a_1} \cdot e^{a_2} = h(a_1) \cdot h(a_2) \blacksquare$$

Теорема 2.1. *h - изоморфизм между A и B, то h^{-1} - изоморфизм между B и A*

Доказательство. пусть $b_1, ..., b_{n_i} \in B$, тогда надо доказать

$$h^{-1}(J(f_i)(b_1, ..., b_{n_i})) = I(f_i)(h^{-1}(b_1), ..., h^{-1}(b_{n_i}))$$

Так как $b_1 = h(a_1), ..., b_{n_i} = h(a_{n_i})$,

$I(f_i)(h^{-1}(b_1), ..., h^{-1}(b_{n_i})) = I(f_i)(h^{-1}(h(a_1)), ..., h^{-1}(h(a_{n_i}))) = I(f_i)(a_1, ..., a_{n_i})$

По определению изоморфизма

$$h^{-1}(J(f_i)(b_1, ..., b_{n_i})) = h^{-1}(h(I(f_i)(a_1, ..., a_{n_1}))) = I(f_i)(a_1, ..., a_{n_1})$$

Из этих двух равенств следует то, что надо доказать $\square$

Определение 2.2. Системы, между которыми существует изоморфизм называют **изоморфными**

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$$

операции в изоморфных системах обладают одними и теми же свойствами

Определение 2.3. $t(x_1, ..., x_n)$ - терм t не содержит других переменных кроме $x_1, ..., x_n$

Определение 2.4. Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра, $a_1, ..., a_n$ - элементы алгебры $\mathcal{A}$, тогда

$$t(a_1, ..., a_n) = \sigma(t), \sigma(x_1) = a_1, ..., \sigma(x_n) = a_n$$

Теорема 2.2. *h - изоморфизм между $\mathcal{A} = (A, I)$ и $\mathcal{B} = (B, J)$, то для любого терма $t(x_1, ..., x_n)$ и любых $a_1, ..., a_n$ выполняется*

$$h(t^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = t^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n))$$

Доказательство. Индукция по построению терма t

1. $t = x$
$$t^{\mathcal{A}}(a) = a \Leftrightarrow h(t^{\mathcal{A}}(a)) = h(a) \Leftrightarrow t^{\mathcal{B}}(h(a)) = h(a)$$

2. $t = c$
$$\sigma(c) = I(c) = J(c) \Rightarrow t^{\mathcal{A}} = I(c), t^{\mathcal{B}} = J(c) \Rightarrow h(I(c)) = J(c)$$
по определению гомоморфизма

3. $t = f(t_1, ..., t_k)$
$$\begin{gathered} h(t^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = \\ h(I(f)(t_1^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), ..., t_k^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n))) = \\ J(f)(h(t_1^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)), ..., h(t_k^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n))) = \\ J(f)(t_1^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n)), ..., t_k^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n)) = \\ t^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n)) \end{gathered}$$

□

Пример 2.2. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{R}; \cdot) \not\simeq \mathcal{B} = (\mathbb{R}^+; \cdot)$

Доказательство. Предположим что существует изоморфизм $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, тогда

$h(0) = x, x \in \mathbb{R}^+$

$$x = h(0) = h(0 \cdot 0) = h(0) \cdot h(0) = x^2$$

$$x = x^2 \Rightarrow x = 1$$

$h(1) = y, y \in \mathbb{R}^+$

$$y = h(1) = h(1 \cdot 1) = h(1) \cdot h(1) = y^2$$

$$y = y^2 \Rightarrow y = 1$$

$h(0) = 1 = h(1)$ - противоречие (h не биективна). Утверждение не верно. □

Пример 2.3. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{R}; +) \ncong \mathcal{B} = (\mathbb{R}; \cdot)$

Доказательство. Предположим что существует изоморфизм $h : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, тогда

$h(0) = x, h(1) = y; x, y \in \mathbb{R}$

$$x = h(0) = h(0 \cdot 0) = h(0) + h(0) = 2x \Rightarrow x = 2x = 0$$

$$y = h(1) = h(1 \cdot 1) = h(1) + h(1) = 2y \Rightarrow y = 2y = 0$$

Противоречие (h должно быть биекцией) □

Пример 2.4. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{R}; \cdot) \cong \mathcal{B} = (\mathbb{C}; \cdot)$

Доказательство. Предположим что существует изоморфизм $h : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, тогда

$h(x) = -1; x \in \mathbb{C}, -1 \in \mathbb{R}$

□

Пример 2.5. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}; \min^{(2)}) \ncong \mathcal{B} = (\mathbb{Z}; \max^{(2)})$

Доказательство. □

Пример 2.6. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\omega; +) \ncong \mathcal{B} = (\omega^+; \cdot)$

Доказательство. □

Пример 2.7. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}; +) \ncong \mathcal{B} = (\mathbb{Q}^+; \cdot)$

Доказательство. □

Пример 2.8. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}; \cdot) \ncong \mathcal{B} = (\mathbb{G}; \cdot)$

Доказательство. □

3 Подалгебры и вложения

Определение 3.1. Подалгебра - алгебра $\mathcal{B} = (B, J)$ является подалдгеброй $\mathcal{A} = (A, I)$, если $B \subseteq A$ и $J(f)$ - ограничение на B для всякого f

Определение 3.2. Ограничение операции - n-местная операция g на B является ограничением операции f множеством B если

$$g(b_1, ..., b_n) = f(b_1, ..., b_n)$$

для любых $b_1, ..., b_n$ из B

Пример 3.1. *Пример подалгебры:*

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \supseteq (\mathbb{R}, +, \cdot) \supseteq (\mathbb{Q}, +, \cdot)$$

Следствие 3.1.

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

Теорема 3.1. *Если $\mathcal{A} = (A, I)$ - алгебра, то B ($B \subseteq A; B \neq \emptyset$) является носителем некоторой подалгебры тогда и только тогда, когда B замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре $\mathcal{A}$*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$

   B - носитель подалгебры $\mathcal{B} = (B, J)$ и $B \subseteq A$, тогда

   $$f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n) = f^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n) \in B$$

   B замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре $\mathcal{A}$

2. $\Leftarrow$ B замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре $\mathcal{A}$, тогда

   $J(f)$ - функция на B

   $J(f)(b_1, ..., b_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n) \in B$

   $J(f)$ - ограниение $f^{\mathcal{A}}$ на B

   следовательно $\mathcal{B} = (B, J)$ - подалгебра и B - её носитель

□

Пример 3.2. *Пример на теорему:*

Теорема 3.2. *Доказательство.* □

4 Гомоморфизм

5 Декартовы произведения

6 Полугруппы и моноиды

Определение 6.1 (Полугруппа)**.** Полугруппа - многообразие заданное множеством

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

Пример 6.1 (Примеры полугрупп)**.**

Теорема 6.1. *Значение терма не зависит от расстановки скобок (Ассоциативный закон)*

$$t = t_1 * t_2 = (a_1 a_2 ... a_m)(a_{m+1} ... a_n) = a_1 a_2 ... a_n$$

Доказательство. Индукция по длине t

Базис: $n = 1$, нет скобок

Шаг: для $n - 1$ верно, тогда

1. $m = n - 1$
$$t = t_1 * a_n = (a_1 a_2 ... a_m) * a_n = a_1 a_2 ... a_n$$

2. $1 \leq m \leq n - 1$
$$t = t_1 * t_2 = (a_1 a_2 ... a_m)(a_{m+1} ... a_n) = (a_1 a_2 ... a_m)(a_{m+1} ... a_{n-1}) a_n = (a_1 a_2 ... a_{n-1}) a_n = a_1 a_2 ... a_n$$

□

Определение 6.2 (Нейтральный элемент)**.** e_l называется **нейтральным слева** в полугруппе, если $e_l * a = a$ для всех a, e_r называется **нейтральным справа** в полугруппе, если $a * e_r = a$ для всех a, e - нейтральный слева и справа

Пример 6.2 (Примеры нейтрального элемента)**.** $(\omega, +)$ - 0, $(\omega, \cdot)$ - 1, (ω, max) - 0, (ω, min) - *нет нейтрального*

Теорема 6.2. *Если существуют нейтральный слева и нейтральный справа то они равны*

Доказательство.

$$e_l = e_l * e_r = e_r$$

$\square$

Следствие 6.1. *Если нейтральный элемент существует, то он единственный.*

Определение 6.3 (Моноид)**.** Моноид - полугруппа с нейтральным элементом ИЛИ

Моноид - это элементы многообразия, которые определяются равенствами

$$\begin{cases} x * (y * z) = (x * y) * z \\ x * e = x \\ e * x = x \end{cases}$$

Пример 6.3 (Примеры моноидов)**.** $(\omega, +, 0)$, $(\omega, \cdot, 1)$, $(\omega, max, 0)$

A^A - множество одноместных функций из A в A $h = f \circ g$, если $h(a) = g(f(a))$ для любого $a \in A$

Доказать что $(A^A, \circ)$ - моноид

Доказательство. $e(a) = a$ для всех a, тогда

$$\left.\begin{aligned} (e \circ f)(a) = f(e(a)) = f(a) \\ (f \circ e)(a) = e(f(a)) = f(a) \end{aligned}\right\} e \circ f = f \circ e = f$$

e - нейтральный элемент

$$((f \circ g)h)(a) = h(f \circ g)(a) = h(g(f(a)))$$
$$(f(g \circ h))(a) = (g \circ h)(f(a)) = h(g(f(a)))$$
$$((f \circ g)h)(a) = (f(g \circ h))(a)$$

Выполняется ассоциативность, соответственно $(A^A, \circ, e)$ - моноид

$\square$

Определение 6.4 (Свободный моноид)**.** Свободный моноид - моноид, элементами которого являются конечные последовательности (строки) элементов носителя моноида. Свободный моноид на множестве $A \neq \emptyset$ это $\mathcal{A} = (A^*; \&, \varepsilon)$, A^* - множество всех слов в алфавите A, $\&$ - конкатенация, ε - пустое слово.

Теорема 6.3. *Любой моноид, порождённый элементами множества, на котором есть свободный моноид, является гомоморфным образом этого моноида*

Доказательство. Пусть $A \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = (A^*; \&)$,
$\mathcal{B} = (\left\{t^{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_n) : a_1, ..., a_n \in A\right\}; *)$ и $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ - Гомоморфизм

$$h(a_1...a_n) = (a_1, ..., a_n)^{\mathcal{B}}$$

$$h(\varepsilon) = e^{\mathcal{B}}$$

Надо доказать свойство гомоморфизма:

$$h(u\&v) = h(u) * h(v)$$

Пусть $u = a_1...a_n$, $v = a'_1...a'_n$, тогда

$$h(u\&v) = h(uv) = h(a_1...a_n a'_1...a'_n) = (a_1...a_n a'_1...a'_n)^{\mathcal{B}}$$

$$h(u) * h(v) = h(a_1...a_n) * h(a'_1...a'_n) = \\ (a_1...a_n)^{\mathcal{B}} * (a'_1...a'_n)^{\mathcal{B}} = (a_1...a_n a'_1...a'_n)^{\mathcal{B}}$$

Из этого следует что $h(u\&v) = h(u) * h(v)$ □

Пример 6.4 (Примеры свободных моноидов и их гомоморфных образов)**.** *Пусть дан алфавит $A = \{1\}$, который образует $A^* = \{\varepsilon, 1, 11, ...\}$ и моноид $\mathcal{A} = (A^*; \&, \varepsilon)$, тогда*

1. *$mathcalB = (1; \cdot, 1)$, порождённый элементами A является гомоморфным образом $\mathcal{A}$, $h : A \to B$, $h(1...1) = 1$*

2. *$mathcalC = (\omega; +, 0)$, порождённый элементами A(натуральные числа можно получить сложением единицы) является гомоморфным образом $\mathcal{A}$, $h : A \to B$, $h(\underbrace{1...1}_{n}) = n$*

Определение 6.5 (Циклический моноид)**.** Циклический моноид - моноид порождённый одним элементом. $< a >$ - циклический моноид, порождённый элементом a.

$e, a, a^1, a^2, a^3, ...$ - элементы моноида $< a >$

1. $a^i \neq a^j$ при $i \neq j$

   $h :< a >\to (\{a\}^*; \&)$, $h(a^i) = i$ - изоморфизм.

2. $a^i = a^j$ при $i \neq j$

$$k = i + (k - i) = i + y(j - i) + r$$

$$r = (k-i) mod (j-i)$$
$$r < j - i$$

тогда

$$a^k = a^i \underbrace{a^{j-i}...a^{j-i}}_{y} a^r =$$

$$(a^i a^{j-i}) \underbrace{a^{j-i}...a^{j-i}}_{y-1} a^r \overset{(a^i a^{j-i} = a^{i+j-i} = a^j = a^i)}{=} a^i \underbrace{a^{j-i}...a^{j-i}}_{y-1} a^r =$$

$$a^i a^r = a^{i+r} (r < j-i; i+r < j)$$

к чему весь этот список?

Пример 6.5 (Пример циклического моноида)**.** $< a >= (\{e, a, ...\}; *)$
Таблица умножения $(*)$ *-*

	e	a	a^2
e	a	a	a^2
a	a	a^2	a
a^2	a^2	a	a^2

Теорема 6.4. *Если j - наименьшее число такое что $a^i = a^j$ для какого-то $i < j$, то $< a >$ содержит ровно j элементов*

Доказательство.

$$\underbrace{e, a^1, ..., a^{j-1}}_{\text{нет равных}}, \underbrace{a^j = a^i, a^{j+1} = a^{i+1}, ...}_{\text{повоторяющиеся}}$$

если j - номер наименьшего повтора, тогда

$$a^x * a^y = \begin{cases} a^{x+y}, & \text{если } x + y < j \\ a^{i+(x+y-i) mod (j-i)}, & \text{если } x + y \geq i \end{cases}$$

$$x + y = k, \qquad k = i + (k - i \cdot z + r$$
$$r = (k-i) mod (j-i)$$
$$a^k = a^{i+z}$$

$$a^{x+y} = a^k = a^{i+(x+y-i) mod (j-i)}$$

□

Определение 6.6 (Идемпотент)**.** Идемпотент - элемент моноида a, такой что $a^2 = a$

Пример 6.6 (Примеры идемпотентов)**.** $(\omega; +)$ - 0

Определение 6.7 (Моноид типа $(i, j-i)$)**.** Моноид типа $(i, j-i)$ - моноид с элементами

$$???$$

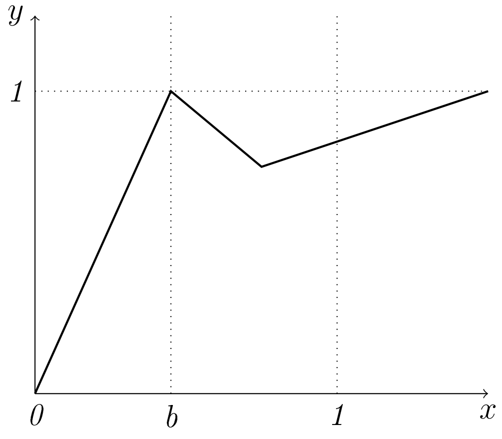
Теорема 6.5. *В моноиде типа $(i, j-i)$, где $i > 0$ существует идемпотент $b \neq e$*

Доказательство. □

Определение 6.8 (Обратный элемент)**.** b_l - левый обратный для элемента a, если $b_l * a = e$, b_r - правый обратный для элемента a, если $a * b_l = e$, b - обратный для элемента a, если $b * a = a * b = e$

Пример 6.7. *Пример чего-то: Доказать что множество функций этого вида замкнуты относительно композиции:*

$$f(x) = \begin{cases} ax & \textit{при } x < b \\ ab & \textit{при } x \geq b \end{cases}$$



Доказательство. □

Пример 6.8 (Пример изоморфизма)**.** *Доказать*

$$(P(A \cup B); \cup, \cap) \cong (P(A); \cup, \cap) \times (P(B); \cup, \cap)$$

где $P(A)$ - множество всех подмножеств множества A

Доказательство. Надо доказать

$$h(x_1 \cup x_2) = h(x_1) \cup h(x_2)$$

$$h(x_1 \cap x_2) = h(x_1) \cap h(x_2)$$

и h - биекция

По сути функция h должна выдавать пару, первая часть которой состоит из элементов A, вторая из B □

Пример 6.9 (Пример полугруппы)**.** *Является ли* $(\omega, \text{НОД}())$ *полугруппой*

Доказательство. Предположим что является, надо доказать

$$\text{НОД}(\text{НОД}(x, y), z) = \text{НОД}(x, \text{НОД}(y, z))$$

1. $\Rightarrow$ Пусть $d : d| \text{НОД}(x, y), d|z$

   Надо доказать $d| \text{НОД}(y, z)$, $d|x$

$$d| \text{НОД}(x, y) \Rightarrow d|x$$
$$d| \text{НОД}(x, y) \Rightarrow d|y$$
$$d|x, d|y \Rightarrow d| \text{НОД}(y, z)$$

2. $\Leftarrow$ также

□

Пример 6.10 (Построение моноидов)**.** *Построить все моноиды из двух элементов* $\{e, x\}$

$$A_1 = (\{e, x\}; *_1), A_2 = (\{e, x\}; *_2)$$

Таблица умножения $(*_1)$

	e	x
e	e	x
x	x	e

Доказать их ассоциативность: $a * (b * c) = (a * b) * c$

Таблица умножения ($*_2$)

	e	x
e	e	x
x	x	x

1. $a = e$

$$e * (b * c) = b * c = (e * b) * c$$

2. $b = e$ *также*

3. $c = e$ *также*

4. $a = b = c = x$

$$x * (x * x) = x * e = e * x = (x * x) * x$$

Все остальные моноиды или изоморфны или тривиальны

Теорема 6.6. *Если в конечном моноиде каждый элемент имеет левый обратный, то существует правый обратный*

Доказательство. Предположим обратное: Если в конечном моноиде каждый элемент имеет левый обратный, то хотя бы для одного не существует правый обратный: $ab_r \neq e$ для всех b_r

НЕ ДОКАЗАНО □

Определение 6.9 (Сократимый элемент)**.** Сократимый слева (справа) - такой элемент моноида, что из $ax = ay$ ($xa = ya$) следует $x = y$

Пример 6.11 (Пример сократимого элемента)**.** $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $x + a = y + a \Rightarrow x = y$

Теорема 6.7. *Неединичные идемпотенты несократимы*

Доказательство. $a \cdot a = a = e \cdot a$ но $a \neq e$, соответственно a несократим справа, $a \cdot a = a = a \cdot e$ но $a \neq e$, соответственно a несократим слева

a несократим □

Теорема 6.8. *Все обратимые слева(справа) элементы сократимы слева(справа)*

Доказательство. Пусть a - обратимый слева, тогда $ax = ay \Rightarrow b_l ax = b_l ay \Rightarrow ex = ey \Rightarrow x = y$, следовательно a - сократимый слева □

Пример 6.12 (Пример обратимого элемента)**.** $(\mathbb{Z}^+, \cdot, 1)$, *обратимый только* 1, *сократимы все. (Какой к половым органам это пример?)*

7 Группы

Определение 7.1 (Группа)**.** Группа - моноид, в котором все элементы обратимы

Определение 7.2 (Тривиальная группа)**.** Тривиальная группа - группа, состоящая из одного элемента

Теорема 7.1. *Если M - моноид и $G \subseteq M$ - подмножество обратимых элементов, то G - группа*

Доказательство. $G \subseteq M$ следовательно G ассоциативна, e - обратимый следовательно G имеет нейтральный элемент. Надо доказать замкнутость: $x * y \in G$

x', y' - обратные к x и y элементы, тогда

$$(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x' = x * e * x' = x * x' = e$$

$$(y' * x') * (x' * y') = y' * (x' * x) * y = y * e * y' = y * y' = e$$

$x * y$ обратим $\Rightarrow xy \in G$

если $x \in G$, то $x' * x = x * x' = e$, тогда x' имеет обратный элемент, тогда $x' \in G$. Любой элемент G имеет обратный.

G - группа. Теорема доказана.

□

Теорема 7.2 (Теорема Гротендика)**.** *Каждый коммутативный моноид, в котором все элементы сократимы можно вложить в группу*

Доказательство. Пусть M - коммутативный моноид, $G' = M \times M = (a, b)$, где $a, b \in M$, $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$, (e_1, e_2) - нейтральный элемент.

Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Является ли $\equiv$ конгруэнтностью?

1. $(a, b) \equiv (a, b)$, $ab = ba$
2. $(a, b) \equiv (c, d)$, $ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c, d) \equiv (a, b)$
3. $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (u, v) \Rightarrow (a, b) \equiv (u, v)$

Надо доказать:

$$(a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2), (c_1, d_1) \equiv (c_2, d_2) \Rightarrow (a_1c_1, b_1d_1) \equiv (a_2c_2, b_2d_2)$$

$$
\begin{aligned}
&(a_1,b_1)\equiv(a_2,b_2),(c_1,d_1)\equiv(c_2,d_2)\Rightarrow\\
&\qquad a_1b_2=b_1a_2, c_1d_2=d_1c_2\Rightarrow a_1b_2c_1d_2=b_1a_2d_1c_2\Rightarrow\\
&\qquad\qquad (a_1c_1)(b_2d_2)=(b_1d_1)(a_2c_2)\Rightarrow\\
&\qquad\qquad\qquad (a_1c_1,b_1d_1)\equiv(a_2c_2,b_2d_2)
\end{aligned}
$$

$(a,b)\equiv(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$ - конгруэнтность

Пусть $G={G'}/_{\equiv}$ надо доказать что G - группа и M вкладывается в G

$$ab=ba\Rightarrow abe=ab=ba=bae\Rightarrow(ab,ba)\equiv(e,e)$$
$$\widehat{(a,b)}*\widehat{(b,a)}=\widehat{(ab,ba)}=\widehat{(e,e)}$$

$\Rightarrow$ каждый элемент G имеет обратный $\Rightarrow G$ - группа

Пусть $h:M\to G$ и $h(a)=\widehat{(a,e)}$, тогда

$$h(ab)=\widehat{(ab,e)}=\widehat{(a,e)}\widehat{(b,e)}=h(a)h(b)$$

$$h(e)=\widehat{(e,e)}$$

h - гомоморфизм

Пусть $h(a)=h(b)$

$$\widehat{(a,e)}=\widehat{(b,e)}\Rightarrow(a,e)\equiv(b,e)\Rightarrow ae=eb\Rightarrow a=b$$

следовательно h - инъекция, следовательно h - вложение

□

Пример 7.1 (Пример на теорему Гротендика)**.**

Теорема 7.3. *G - группа тогда и только тогда, когда*

1. $(xy)z=x(yz)$
2. $xe=x$
3. $xx^{-1}=e$

Доказательство. 1. $\Rightarrow$ по определению группы

2. $\Leftarrow$

   $(xy)z = x(yz) \Rightarrow G$ ассоциативна

   $xx^{-1} = e \Rightarrow x^{-1}x = e$

   Надо доказать: $ex = x$ для любого x

$$x^{-1}x = x^{-1}xe = x^{-1}x(x^{-1}x)(x^{-1}x)^{-1} = x^{-1}(xx^{-1})x(x^{-1}x)^{-1} = x^{-1}ex(x^{-1}x)^{-1} = (x^{-1}x)(x^{-1}x)^{-1} = e \quad (1)$$

$$ex = (xx^{-1})x = x(x^{-1}x) = xe = x$$

   G - группа

□

Следствие 7.1. *Группы образуют многообразие в сигнатуре* $(*, e, ^{-1})$

Определение 7.3 (Аддитивная группа)**.** Аддитивная группа - группа со сложением

Пример 7.2 (Примеры аддитивных групп)**.** $(\mathbb{Z}; +)$

Определение 7.4 (Мультипликативная группа)**.** Мультипликативная группа - группа с умножением

Пример 7.3 (Примеры мультипликативных групп)**.** $(\mathbb{Q}; \cdot)$

Определение 7.5 (Множество вычетов)**.**

Пример 7.4 (Пример Множества вычетов)**.**

Определение 7.6 (Матричная группа)**.** Матричные группы: носитель группы - $M_n^*(R)$ и $det \neq 0$

Пример 7.5 (Примеры матричных групп)**.**

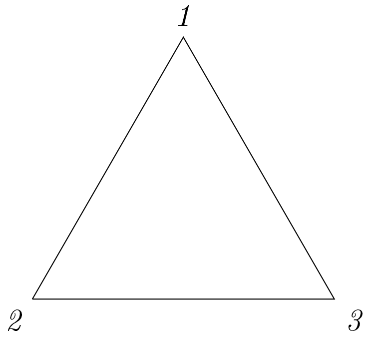
1. $(M_n^*, \cdot, E, ^{-1})$ *- группа, не коммутативная*
2. $det = \pm 1$ *- группа*
3. O_n *- ортогональные,* $(O_n, \cdot, E, ^{-1})$ *- группа*

Определение 7.7 (Группа перестановок)**.** Группа перестановок - группа перестановок множества S называется группа всех биекций $f : S \to S$. $(F, \circ, e, ^{-1})$

Пример 7.6 (Пример группы перестановок)**.**

Определение 7.8 (Симметрическая группа порядка)**.** Симметрическая группа порядка n: S - конечно и состоит из n элементов. $(A, \circ, e, ^{-1})$, A - множество автоморфизмов $h : S \to S$

Пример 7.7 (Пример симметрической группы)**.** *Пример симметрической группы:*



$A = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$

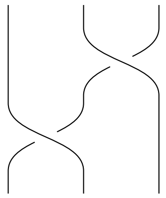
- e - *тождественное преобразование*
- r_1, r_2 - *поворот на* $120°$ *и* $240°$ *соответственно*
- s_1, s_2, s_3 - *оборот вокруг высоты, идущей из первой, второй и третьей вершины соответственно*

$$\mathbf{D}_3 = (A, \circ)$$

Таблица умножения $\circ$

	e	r_1	r_2	s_1	s_2	s_3
e	e	x	e	x	e	x
r_1	e	x	e	x	e	x
r_2	e	x	e	x	e	x
s_1	e	x	e	x	e	x
s_2	e	x	e	x	e	x
s_3	x	x	e	x	e	x

Определение 7.9 (Группа кос)**.** Группа кос -



ещё:

потом соображу как длиннее сделать

Теорема 7.4. *Если G - полугруппа, то G является группой тогда и только тогда, когда любое уравнение вида $ax = b$ или $xa = b$, $(a, b \in G)$ имеет в G решение*

Доказательство. 1. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} ax &= b & xa &= b \\ a^{-1}ax &= a^{-1}b & xaa^{-1} &= ba^{-1} \\ x &= a^{-1}b & x &= ba^{-1} \end{aligned}$$

любое уравнение вида $ax = b$ или $xa = b$, $(a, b \in G)$ имеет в G решение

2. $\Leftarrow$ по теореме 7.3

   (a) по определению полугруппы

   (b) $ax = a \Rightarrow x = e$ $ya = b$, имеет решение $y = d$, $da = b$

   $$be = dae = da = b \Rightarrow be = b$$

   (c) для любых $ax = e$ существует решение $x = a^{-1}$ - обратное к a

□

Теорема 7.5. *1.* $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

2. $(a^{-1})^{-1} = a$

Определение 7.10 (Абелева группа)**.** Абелева группа - группа, в которой $xy = yx$

8 Подгруппы

Определение 8.1 (Подгруппа)**.** Подгруппа - подмножество H группы G, само являющееся группой относительно операции, определяющей G
Подгруппа - подалгебра в группе

Следствие 8.1. *Подгруппа является группой*

Определение 8.2 (Тривиальная подгруппа)**.** Тривиальная подгруппа - подгруппа, состоящая только из одного нейтрального элемента группы или равна самой группе

Пример 8.1 (Пример подгрупп)**.**

Пример 8.2. $(\mathbb{Z}_p; +, 0, -)$*, p - простое число*
В этой группе нет нетривиальных подгрупп

Доказательство. $A \subseteq \mathbb{Z}_p$, $x \in A$, x $x, 2x, 3x, ..., px$ - все разные
предположим, что $ix = jx(i < j)$, тогда $jx - ix = 0 \Rightarrow (j - i)x = 0$
$(j - i)xmodp = 0$
$(j - i)modp = 0$
$j - i = 0$ ПОЧЕМУ
$j = i$
$A = \mathbb{Z}_p$

□

Теорема 8.1. *Любая бесконечная группа имеет нетривиальную подгруппу*

Доказательство. Пусть $a \in G$, $a \neq e$, тогда
$A = \{a^0 = e, a^1, a^2, ..., a^{-1}, a^{-2}, ...\}$

1. $A \neq G$ A - нетривиальная подгруппа
2. $A = G$ $A' = \{a^0, a^2, a^4, ..., a^{-2}, a^{-4}, ...\}$

□

Пример 8.3 (Пример подгрупп)**.** *Возьмём группу из 7.7 и выпишем подгруппы:*

1. $\{e\}$ *- тривиальная подгруппа*
2. $\{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$ *- тривиальная подгруппа*
3. $\{e, r_1, r_2\}$

4. $\{e, s_1\}$, $\{e, s_2\}$, $\{e, s_3\}$

Пример 8.4. *Группа операций над треугольником - подгруппа*

Пример 8.5. *Является ли группой моноид $(\mathcal{A}; \cap, e)$, где $\mathcal{A}$ - множество фигур на плоскости, e - вся плоскость.*

Доказательство. $A \cap A^{-1} = e$, этого не может быть, $(\mathcal{A}; \cap, e)$ - не группа □

Является ли группой алгебра $(\mathcal{A}; \dot{-})$, где $\mathcal{A}$ - множество фигур на плоскости.

Доказательство. Сперва докажем ассоциативность $\dot{-}$: $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$

$A \dot{-} B = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A)$

$$
\begin{gathered}
A \dot{-} (B \dot{-} C) = (\overline{A} \cap (B \dot{-} C)) \cup (A \cap (\overline{B \dot{-} C})) = \\
(\overline{A} \cap ((\overline{B} \cap C) \cup (\overline{C} \cap B)) \cup (A \cap (\overline{(\overline{B} \cap C) \cup (\overline{C} \cap B)})) = \\
(\overline{A} \cap ((\overline{B} \cap C) \cup (\overline{C} \cap B)) \cup (A \cap (\overline{(\overline{B} \cap C)} \cap \overline{(\overline{C} \cap B)}) = \\
(\overline{A} \cap ((\overline{B} \cap C) \cup (\overline{C} \cap B)) \cup (A \cap ((B \cup \overline{C}) \cap (C \cup \overline{B})) = \\
(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap ((B \cup \overline{C}) \cap (C \cup \overline{B})) = \\
(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) = \\
(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(A \dot{-} B) \dot{-} C = C \dot{-} (A \dot{-} B) = \ldots = \\
(\overline{C} \cap \overline{B} \cap A) \cup (\overline{C} \cap B \cap \overline{A}) \cup (C \cap B \cap A) \cup (C \cap \overline{B} \cap \overline{A})
\end{gathered}
$$

$$A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$$

теперь доказать существование обратного

Пусть $e = \emptyset$, Тогда $A \dot{-} \emptyset = A$

$A \dot{-} A^{-1} = \emptyset \Rightarrow (\overline{A} \cap A^{-1}) \cup (\overline{A^{-1}} \cap A) = \emptyset \Rightarrow A^{-1} = A$

$(\mathcal{A}; \dot{-})$ - группа □

Пример 8.6. *Конечные группы*

1. $\mathcal{G}_1 = (\{e\}; *)$

Таблица умножения $*$

	e
e	e

2. $\mathcal{G}_2 = (\{e, a\}; *)$

Таблица умножения $*$

	e	a
e	e	a
a	a	e

3. $\mathcal{G}_3 = (\{e, a, b\}; *)$

Таблица умножения $*$

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

4. $\mathcal{A} = (\{e, a, b, c\}, *)$

Таблица умножения $*$

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	b	c
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Пример 8.7. *Построить группу симметрии правильного n-угольника (Диэдрическая группа)*

$\mathcal{D}_n = (r_0, ..., r_{n-1}, s_1, ..., s_n; \circ, e, ^{-1})$, где $r_0, ..., r_{n-1}$ - повороты, $s_1, ..., s_n$ - отражения, эти элементы множсетва являются автоморфизмами, композиция задана следующей таблицей умножения:

Таблица умножения $\circ$

	r_i	s_i
r_j	$r_{(i+j) \bmod n}$	$s_{(i+j) \bmod n}$
s_j	$s_{(j-i) \bmod n}$	$r_{(i-j) \bmod n}$

нейтральным элементом является r_0, обратным к любому отражению s_i само отражение s_i, обратным к повороту r_i поворот r_{n-i}

Определение 8.3 (Рекурсивная перестановка)**.** Рекурсивная перестановка - разнозначная общерекурсивная функция, область значений которой - множество ω

Теорема 8.2. *Рекурсивные перестановки с операцией композиции образуют группу*

Доказательство. Надо доказать ассоциативность $\circ$, существование нейтрального и обратных

1. $a \in \omega$, $a = g(b)$, $b = f(c)$, $a = g(f(c)) = (f \circ g)(c)$, $\circ$ ассоциативна
2. $e = \mathrm{Id}_1^1$, $(f \circ e)(a) = e(f(a)) = f(a)$
3. $f^{-1} =$

□

Теорема 8.3. *Любая группа вкладывается в группу перестановок*

Доказательство. Пусть $\mathcal{G} = (G, *)$, S - множество перестановок G, надо доказать

$$h(x * y) = h(x) \circ h(y)$$

Пусть $h(x) = f_x$, такой что $f_x(y) = y * x$ (А существует ли f_x для каждого x?). h разнозначна, так как $f_x(e) = f_y(e) \Rightarrow ex = ey \Rightarrow x = y$,

$$h(x * y)(a) = f_{x*y}(a) = a * (x * y) = (a * x) * y = f_x(a) * y = f_y(f_x(a)) = (f_x \circ f_y)(a) = (h(x) \circ h(y))(a)$$

□

Теорема 8.4. *Любой конечный моноид, в котором нет нееединичных идемпотентов является группой*

Доказательство. Пусть M - конечный моноид, $a \in M$, $a * a^-1 = e$

Индукция по количеству элементов

Базис: $n = 1$, $a = e$, $M = \{e\}$

Шаг индукции: пусть для моноидов с $k < n$ верно. Тогда для $k = n$

Пусть $a \in M$, A - циклический моноид, порождённый a

1. $A \neq M$, $|A| < n$, по индукционному предположению

2. $A = M$, так как M не содержит нееединичных идемпотентов, то A - это моноид типа $(0, n)$

$$a^x a^y = \begin{cases} a^{x+y} & \text{, если } x + y < n, y < n - 1 \\ a^{j+(x+y-i)} & \text{, если } x + y \geq n \end{cases}$$

следовательно $a^x a^y = a^{(x+y)\mathrm{mod} n}$ и $a^{-1} = a^{n-1}$

□

Пример 8.8. *Построить группу симметричную чему-то там*

Теорема 8.5. *Любая чётная перестановка является произведением циклов длины 3*

Доказательство. Любую чётную перестановку можно разложить в произведение циклов длины 2. Таких циклов будет чётное число, соответственно будет n произведений циклов вида $(ab)(cd)$

1. $b = c$, тогда $(ab)(cd) = (abd)$

2. $b \neq c$, тогда $(ab)(cd) = (ab)(bc)(bc)(cd) = (abc)(bcd)$

□

Теорема 8.6. *Если $\mathcal{G}$ - группа, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, $\mathcal{H} \neq \emptyset$, $a, b \in \mathcal{H} \to ab^{-1} \in \mathcal{H}$, тогда $\mathcal{H}$ является подгруппой*

Доказательство. Пусть $a, b \in H$

1. $H \neq \emptyset$, $a \in H \Rightarrow aa^{-1} \in H \Rightarrow e \in H$ есть нейтральный элемент

2. $a \in H \Rightarrow ea^{-1} \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$, есть обратные

3. $a, b \in H$, $b^{-1} \in H \Rightarrow a(b^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow ab \in H$, замкнуто по операции группы $\mathcal{G}$

   $\mathcal{H}$ - подгруппа

$\square$

Определение 8.4 (Центр группы)**.** Центр группы - $\mathcal{Z} = \{a \in G, ab = ba$ для всех $b \in G\}$

Пример 8.9. $\mathcal{M} = (M_2^*(\mathbb{R}); \cdot)$, *невырожденные матрицы*

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in R \right\}$$

Теорема 8.7. *Центр группы - подгруппа*

Доказательство. $a, b \in \mathcal{Z}$, $ab^{-1} \in \mathcal{Z}$

Надо доказать: $x \in \mathcal{G}$, $(ab^{-1})x = x(ab^{-1})$

$$(ab^{-1})x = ab^{-1}xe = ab^{-1}xbb^{-1} = ab^{-1}bxb^{-1} = axb^{-1} = x(ab)^{-1}$$

следует что $x \in \mathcal{Z}$ (что это вообще доказывает) $\square$

Определение 8.5 (Циклическая группа)**.** Циклическая группа - группа, порождённая одним элементом. $< a >$ - циклическая группа порождённая a.

$(\omega, +, 0)$ изоморфно бесконечной циклической группе

моноид типа (i, j) изоморфен конечной циклической группе

Теорема 8.8. $\mathcal{G} = \langle a \rangle$, *тогда* $\mathcal{G} \cong (\mathbb{Z}, +)$ *или* $\mathcal{G} \cong (\mathbb{Z}_n, +)$ *для некоторого* n

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ - подмоноид, порождённый a. M - циклический

1. $\mathcal{M} \cong (\omega, +, 0)$

   $x \in \mathcal{M}$ x^{-1} $xx^{-1} = e$

   $x \in \mathcal{M}$ $x \neq e$ $x^{-1} \neq \mathcal{M}$

$$0 = h(x) + h(x^{-1}) = h(xx^{-1}) = h(e) = 0$$

   Доказать что изоморфизм

2. $\mathcal{M}$ - конечный (i, j) моноид, если $i > 0$, то в $\mathcal{M}$ есть нееденичный идемпотент, следовательно он необратимый, следовательно в группе должно быть $i = 0$

$$a^x a^y = \begin{cases} a^{x+y} & \text{, если } x + y < j \\ a^{(x+y) \pmod j} & \text{, если } x + y \geq j \end{cases}$$

$\mathcal{M}$ - группа

$$a^x = a^{j-x} = a^{j \pmod j} = e$$

$\mathcal{M}$ - группа порождённая a, $\mathcal{M} = \mathcal{G}$

$h : a^x \to x$

□

Теорема 8.9. *В циклической группе существуют нетривиальные группы тогда и только тогда когда она бесконечна или n в $(\mathbb{Z}_n, +)$ составное*

Доказательство. 1. $\Rightarrow$ пусть имеется $(\mathbb{Z}_n, +)$, n - простое, $a \neq 0$, $a < n$, a и n взаимно простые, следовательно $xa + yn = 1$. пусть $b \in \mathbb{Z}$, тогда

$$b = b \cdot 1 = b(ax + yn) = (bx)a + (by)n$$

$$(\underbrace{a + a + ... + a}_{bx}) \mod n = (b - (by)n) \mod n = b \mod n = b$$

Таким (КАКИМ) образом любые подгруппы, содержащие не только 0 содержат $\mathbb{Z}_n$

2. $\Leftarrow$

   (a) бесконечная циклическая группа имеет нетривиальную подгруппу

   (b) пусть $n = xy$, тогда $(\mathbb{Z}_{xy}, +) \supseteq \{0, x, 2x, ..., (y-1)x\}$

□

Определение 8.6 (Порядок группы)**.** Порядок группы - количество элементов группы. $ord\mathcal{G}$

Определение 8.7 (Порядок элемента)**.** Порядок элемента - порядок порождённой им циклической подгруппы $orda = ord\langle a \rangle$

Пример 8.10. *Пример на порядок через группу треугольника*

$$\mathcal{D}_3 = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$$
$$\operatorname{ord} \mathcal{D}_3 = 6$$

$$\begin{aligned}
\langle r_0 \rangle &= \{r_0\} & \operatorname{ord} r_0 &= 1 \\
\langle r_1 \rangle &= \{r_0, r_1, r_2\} & \operatorname{ord} r_1 &= 3 \\
\langle r_2 \rangle &= \{r_0, r_1, r_2\} & \operatorname{ord} r_2 &= 3 \\
\langle s_1 \rangle &= \{r_0, s_1\} & \operatorname{ord} s_1 &= 2 \\
\langle s_2 \rangle &= \{r_0, s_2\} & \operatorname{ord} s_2 &= 2 \\
\langle s_3 \rangle &= \{r_0, s_3\} & \operatorname{ord} s_3 &= 2
\end{aligned}$$

Следствие 8.2. $\operatorname{ord} e = 1$, $\langle e \rangle = \{e\}$

Определение 8.8 (Смежный класс)**.** Пусть $\mathcal{G}$ - группа, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, $a \in \mathcal{G}$
Левый смежный класс a по $\mathcal{H}$ - $a\mathcal{H} = \{ab : b \in \mathcal{H}\}$
Правый смежный класс a по $\mathcal{H}$ - $\mathcal{H}a = \{ba : b \in \mathcal{H}\}$

Пример 8.11. *Пример смежных классов:*
$\langle s_1 \rangle \subseteq \mathcal{D}_3$, $r_1 \in \mathcal{D}_3$

$$r_1\langle s_1 \rangle = r_1\{r_0, s_1\} = \{r_1, s_2\}$$
$$\langle s_1 \rangle r_1 = \{r_0, s_1\}r_1 = \{r_1, s_3\}$$
$$r_1\langle s_1 \rangle \neq \langle s_1 \rangle r_1$$

Определение 8.9 (Нормальная подгруппа)**.** Нормальная подгруппа - подгруппа, у которой любой левый смежный класс совпадает с правым

Пример 8.12. *Пример нормальных групп*

$$\langle r_1 \rangle = \{r_0, r_1, r_2\} \subseteq \mathcal{D}_3$$
$$r_i\langle r_1 \rangle = r_i\{r_0, r_1, r_2\} = \{r_{0+i}, r_{1+i}, r_{2+i}\} = \langle r_1 \rangle$$
$$\langle r_1 \rangle r_i = \{r_0, r_1, r_2\}r_i = \{r_{0+i}, r_{1+i}, r_{2+i}\} = \langle r_1 \rangle$$
$$r_i\langle r_1 \rangle = \langle r_1 \rangle r_i$$
$$s_i\langle r_1 \rangle = \{s_i r_0, s_i r_1, s_i r_2\} = \{s_i, s_{i-1}, s_{i+1}\}$$
$$\langle r_1 \rangle s_i = \{r_0 s_i, r_1 s_i, r_2 s_i\} = \{s_i, s_{i+1}, s_{i-1}\}$$
$$s_i\langle r_1 \rangle = \langle r_1 \rangle s_i$$

$\langle r_1 \rangle$ *- нормальная подгруппа*

Теорема 8.10. *Если $\mathcal{G}$ - группа, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, и $\equiv$ - отношение принадлежности к одному левому смежному классу, то $\equiv$ - отношение эквивалентности*

Доказательство. 1. Рефлексивность $a \in a\mathcal{H} \Rightarrow a \equiv a$

2. Симметричность $a \equiv b \Rightarrow a \in x\mathcal{H}, b \in x\mathcal{H} \Rightarrow b \equiv a$

3. Транзитивность $a \equiv b$, $b \equiv c \Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} a, b \in x\mathcal{H} & a = xh_a & b = xh_b \\ b, c \in y\mathcal{H} & b = yh'_b & c = yh_c \end{array}$$

$$xh_b = yh'_b \Rightarrow x = yh'_b h_b^{-1} \Rightarrow a = y\underbrace{h'_b h_b^{-1} h_a}_{\mathcal{H}}$$

$$\left.\begin{array}{r} c \in y\mathcal{H} \\ a \in y\mathcal{H} \end{array}\right\} a \equiv c$$

□

Следствие 8.3. *Каждый левый смежный класс является классом эквивалентности*

Следствие 8.4. *Левые смежные классы или совпадают или не пересекаются*

Следствие 8.5. *Количество элементов в левом смежном классе совпадает с* $\operatorname{ord}\mathcal{H}$

Доказательство. Пусть $f : \mathcal{H} \to a\mathcal{H}$, $f(x) = ax$, тогда

$$f(x) = f(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow = a^{-1}ax = a^{-1}ay \Rightarrow x = y$$

f - взаимооднозначная функция, соответственно $\operatorname{ord} a\mathcal{H} = \operatorname{ord}\mathcal{H}$ □

Определение 8.10 (Индекс подгруппы)**.** Индекс подгруппы - количество левых смежных классов $\operatorname{ind} H$

Теорема 8.11. *Если H - подгруппа G, то* $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} H \cdot \operatorname{ind} H$

Доказательство. Разобьём группу G на левые смежные классы. Их количество - $\operatorname{ind} H$, каждый содержит $\operatorname{ord} H$ элементов. Общее количество этих элементов - $\operatorname{ind} H \cdot \operatorname{ord} H$

□

Следствие 8.6. $\operatorname{ind} H = \dfrac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord} H}$

Следствие 8.7. $\operatorname{ord} H | \operatorname{ord} G$

Следствие 8.8. $\operatorname{ord} a | \operatorname{ord} \mathcal{G}$

Доказательство. $\mathcal{H} = \langle a \rangle$, $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} \mathcal{H}$

□

Теорема 8.12. $a^{\operatorname{ord} a} = e$

Доказательство. $\langle a \rangle = \{\underbrace{a^0, a^1, ..., a^{\operatorname{ord} a - 1}}_{\operatorname{ord} a}\}$, $a^{\operatorname{ord} a} = a^0 = e$

□

Теорема 8.13. $a^n = e \Leftrightarrow \operatorname{ord} a | n$

Доказательство. Пусть $x = \operatorname{ord} a + r = n$, $(0 \leq r < \operatorname{ord} a)$, тогда

$$e = a^n = a^{x \operatorname{ord} a} \cdot a^r = (a^{\operatorname{ord} a})^x \cdot a^r = e^x \cdot a^r = a^r$$

$a^r = e \Rightarrow r = 0 \Rightarrow n = x \cdot \operatorname{ord} a \Rightarrow \operatorname{ord} a | n$

□

Теорема 8.14. $a^{\operatorname{ord} G} = e$

Доказательство. $\operatorname{ord} a | \operatorname{ord} \mathcal{G} \Rightarrow \operatorname{ord} \mathcal{G} = x \cdot \operatorname{ord} a \Rightarrow a^{\operatorname{ord} \mathcal{G}} = (a^{\operatorname{ord} a})^x = e$

□

Пример 8.13. $\mathcal{A}_5$ *- группа чётных перестановок из 5 элементов. В* $\mathcal{A}_5$ *нет нормальных подгрупп*

Доказательство. ДОКАЖИ ДОМА))))))))))))))))) □

Теорема 8.15. *Любая подгруппа индекса 2 является нормальной*

Доказательство.

1. (a) $e\mathcal{H} = \mathcal{H}$
   (b) $a\mathcal{H} \neq \mathcal{H}$
   $a\mathcal{H} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$
2. (a) $\mathcal{H}e = \mathcal{H}$
   (b) $\mathcal{H}a \neq \mathcal{H}$
   $\mathcal{H}a = \mathcal{G}/\mathcal{H}$

□

9 Гомоморфизмы группы

Определение 9.1 (Факторгруппа)**.** Рассмотрим группу G и ее нормальную подгруппу H. Пусть G/H — множество смежных классов G по H. Определим в G/H операцию умножения по следующему правилу: $aH \cdot bH = (ab)H$

Теорема 9.1. *Определение произведения смежных классов корректно. То есть произведение смежных классов не зависит от выбранных представителей a и b*

Доказательство. Пусть $aH, bH \in G/H$, $a_1 = a \cdot h_a \in aH$, $b_1 = b \cdot h_b \in bH$. Докажем, что $abH = a_1 b_1 H$. Достаточно показать, что $a_1 \cdot b_1 \in abH$.

В самом деле, $a_1 \cdot b_1 = a \cdot h_a \cdot b \cdot h_b = a \cdot b \cdot (b^{-1} \cdot h_a \cdot b) \cdot h_b$. Элемент $h = (b^{-1} \cdot h_a \cdot b)$ лежит в H по свойству нормальности H. Следовательно, $a \cdot b \cdot h \cdot h_b \in abH$. □

Теорема 9.2. *Если G и H - группа, $h : G \to H$ и $h(a * b) = h(a) * h(b)$, то h - гомоморфизм*

Доказательство. $h(e) = h(e * e) = h(e) * h(e)$

$h(e)$ - идемпотент в $\mathcal{H}$, следовательно $h(e) = e$

$$h(a^{-1}) = h(a^{-1}) * e = h(a^{-1}) * h(a) * (h(a))^{-1} = \\ h(a^{-1} * a) * (h(a))^{-1} = h(e) * (h(a))^{-1} = e * (h(a))^{-1} = (h(a))^{-1}$$

□

Определение 9.2 (Порождённая конгруэнтность)**.** Конгруэнтность порождённая h - если $a \equiv b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$ - конгруэнтность, то $h[A] = {}^{A}/_{\equiv}$

Теорема 9.3. *Если $h : G \to H$ - гомоморфизм, $\equiv$ - конгруэнтность порождённая h, то классы эквивалентные e в G являются нормальными подгруппами*

Доказательство. Пусть $a, b \in f \Rightarrow ab^{-1} \in f$, $a \equiv e$, $b \equiv e$, $b^{-1} \equiv e^{-1} \equiv e$, $ab^{-1} \equiv ee \equiv e$

$$a\{b \in \mathcal{G} : b \equiv e\} \ni c$$
$$aba^{-1} \in \{b \in \mathcal{G} : b \equiv e\}a \ni c$$

$$c = ab = abe = aba^{-1}a$$

$$b \equiv e \quad a \equiv a \quad a^{-1} \equiv a^{-1}$$
$$aba^{-1} \equiv aea^{-1} = e$$
$$aba^{-1} \equiv e$$
$$aba^{-1}a = abe = ab = c$$

□

"И в обратную сторону". Хотя я в душе не знаю как в эту получилось.

Определение 9.3 (Ядро подгруппы)**.** Ядро подгруппы - множество элементов эквивалентных e. $\operatorname{Ker} h$

Теорема 9.4. *G - группа, H - нормальная подгруппа, $a \equiv b \Leftrightarrow a$ и b принадлежат одному левому классу, то $\equiv$ - конгруэнтность*

Доказательство. Пусть $a \equiv b$, $c \equiv d$, надо доказать

1. $ac \equiv bd$
2. $a^{-1} \equiv b^{-1}$ (зачем)

1.

$$\begin{array}{ll} a, b \in x\mathcal{H} & a = xh_a, b = xh_b \\ c, d \in y\mathcal{H} & c = yh_c, d = yh_d \end{array}$$

$ac = xh_a \cdot yh_c$, $h_a y = yh'$, $h_a y \in \mathcal{H}y = y\mathcal{H}$

$$\left.\begin{array}{r} ac = xh_a yh_c = xy \underbrace{h'h_c}_{\in\mathcal{H}} \in xy\mathcal{H} \\ bd = xh_b yh_d = xy \underbrace{h''h_d}_{\in\mathcal{H}} \in xy\mathcal{H} \end{array}\right\} \text{эквивалентные}$$

$h_b y = yh''$, $h_b y \in \mathcal{H}y = y\mathcal{H}$

2.

$$\begin{array}{ll} h_a & h_b \\ h_a^{-1} & h_b^{-1} \\ \mathcal{H}x^{-1} & \mathcal{H}x^{-1} \end{array}$$

$a^{-1}, b^{-1} \in x^{-1}\mathcal{H}$

$\square$

Определение 9.4 (щито)**.** $\mathcal{G}$ - группа, $\mathcal{H}$ - нормальная подгруппа, $\equiv$ - отношение конгруэнтности. Тогда ${}^{\mathcal{G}}/_{\equiv} = {}^{\mathcal{G}}/_{\mathcal{H}}$

Следствие 9.1. *Если* $h : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *- гомоморфизм, тогда* $h[\mathcal{G}] = {}^{\mathcal{G}}/_{\operatorname{Ker} h}$

Доказательство. $h[\mathcal{G}] = {}^{\mathcal{G}}/_{\equiv} = {}^{\mathcal{G}}/_{\operatorname{Ker} h}$ $\square$

Пример 9.1.

$$\mathcal{D}_3 = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$$

$\langle r_1 \rangle$ *- подгруппа вращений*

$\langle r_1 \rangle$

$S_1 \langle r_1 \rangle$

Таблица умножения (ЧЕГО???)

	$\langle r_1 \rangle$	$S_1\langle r_1 \rangle$
$\langle r_1 \rangle$	$\langle r_1 \rangle$	$S_1\langle r_1 \rangle$
$S_1\langle r_1 \rangle$	$S_1\langle r_1 \rangle$	$\langle r_1 \rangle$

Пример 9.2. $(\mathbb{R}, +) \supseteq (\mathbb{Z}, +)$

$a + \mathbb{Z}$

$ba \in \mathbb{Z}$

$a + \mathbb{Z} = b + \mathbb{Z}$

$a \in [0, 1)$

$(a + \mathbb{Z}) + (b + \mathbb{Z}) = (a + b) = (a + b) \mod 1$

$\mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, $(\mathbb{C}_1, \cdot)$

$h(x) = e^{2nix}$

$x \in \mathbb{R} = e^{2nix} \in \mathbb{C}_1$

$h(x + y) = e^{2ni(x+y)} = e^{2nix}e^{2niy} = h(x)h(y)$

$h : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}, \cdot)$

$r \in \operatorname{Ker} h \Leftrightarrow r \equiv e$

$h(r) = h(e)$

$h(r) = h(0)$

$e^{2nix} = e^{2nix} = 1$

$e^{2nix} = 2n \cdot k, k \in \mathbb{Z}$

$r \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{Ker} h \in \mathbb{Z}$

Определение 9.5. $\mathcal{G}$ - группа, A - множество, образующее группу, тогда определяющим соотношением называют равенство вида $t(a) = s(a)$, где t, s - термы, $a \in A$

Пример 9.3. $A = \{a, b\}$, $a^2 = b^2$, $a^3 b = ba$

Определение 9.6. A - множество элементов, X - множество определяющих соотношений. Группа, порождённая A и X - $\mathcal{G}$ такач, что

1. образована при помощи A
2. в $\mathcal{G}$ выполняются все определяющие соотношения из X
3. любая группа $\mathcal{H}$, удовлетворяющая условиям 1 и 2 является гомоморфным множеством $\mathcal{G}$

Пример 9.4.

$$\mathcal{D}_3 = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$$

$A = \{r_1, s_1\}$, $\langle A \rangle = \mathcal{D}_3$

$$\left[\begin{array}{l} r_1^3 = e \\ r_1 s_1 = s_1 r_1^2 \\ s_1^2 = e \end{array}\right.$$

$\mathcal{H}$ порождена A

$*$ - одноместная операция

$\mathcal{H}$?????? ??? слова, состоящие из $r_1, s_1, r_1^{-1}, s_1^{-1}$, пусть в $\mathcal{H}$ выполнены определяющие соотношения X

$$\begin{array}{lll} r_1^3 = e & r_1^{-1} = r_1^2 & r_1^{-1} = r_1 r_1 \\ s_1^2 = e & s_1^{-1} = s_1 & s_1^{-1} = s_1 \end{array}$$

$s_1 ... s_1 r_1 ... r_1$

$s_1^n r_1^m$

$s_1^n = s_1^{n \mod 2}$

$r_1^m = r^{m \mod 3}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} r_1^0 & s_1 r_1^0 \\ r_1^0 & s_1 r_1^0 \\ r_1^0 & s_1 r_1^0 \end{array}}$$

Теорема 9.5. *Для любого множества A и множества определяющих соотношений X существует группа, образованная A и X*

Доказательство. Пусть $A' = A \cup \{a{-}1 : a \in A\}$. Нужно проверить три свойства

1. Если M - свободный моноид образованный $A'(M$ - множество слов алфавита A' с конкатенацией), M' - моноид, порождённый A', то M' - гомоморфный образ M. $u, v \in M$, $u \equiv v \Leftrightarrow h(u) = h(v)$ для любого гомоморфизма $h : M \to \mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ - группа, порождённая A в которой ??? X.

   Надо доказать что $\equiv$ является конгруэнтностью

   (a) $a \equiv a$

   (b) $a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$

   (c) $a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$

   Пусть $a \equiv b$, $c \equiv d$, то есть $h(a) = h(b)$, $h(c) = h(d)$, тогда, так как h является гомоморфизмом

   $$h(ac) = h(a)h(c) = h(b)h(d) = h(bd)$$

   следовательно $ac \equiv bd$ и $\equiv$ - конгруэнтность

   Пусть группа $F = {}^{M}/_{\equiv}$, $\widehat{a} \in F$, $a = u_1 ... u_n$, $b = u_n^{-1} ... u_1^{-1}$, $a, b \in M$

   $h(a) = h(u_1)...h(u_n)$

   $h(b) = h(u_n^{-1})...h(u_1^{-1})$

   $h(ab) = h(u_1)...h(u_n)h(u_n^{-1})...h(u_1^{-1}) = e$

   $\widehat{a}\widehat{b} = \widehat{e}$

   F порождается A

2. Доказать $t(\overline{a}) = s(\overline{a}) \in X$

   $h(t(a_1, ..., a_n)) = t(h(a_1), ..., h(a_n)) = s(h(a_1), ..., h(a_n)) = h(s(a_1, ..., a_n))$
   $t(\overline{a}) \equiv s(\overline{a}) \Rightarrow \widehat{t(\overline{a})} = widehats(\overline{a}) \Rightarrow t(\widehat{a_1}, ..., \widehat{a_n}) = s(\widehat{a_1}, ..., \widehat{a_n}$

3. Из чего следует?

и WTF в общем □

Пример 9.5. *Про пирамиду рубика. Конём.*

Пример 9.6. *Дана "головоломка"*

1	2
3	4

Построить группу $\mathcal{G}$
a - перестановка двух столбцов
b - перестановка строк

e:

1	2
3	4

a:

2	3
4	1

b:

3	4
1	2

ab:

4	1
2	3

$a^2 = e,\ b^2 = e,\ ab = ba$

	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ba	e	a
ab	ab	b	a	e

$\mathcal{G} = (\{e, a, b, ab\}, \circ)$

Пример 9.7. *Таблица 8x8. Конём.*

Пример 9.8. $Z = 1, -1$

Пример 9.9.

Пример 9.10.

Пример 9.11.

Пример 9.12.

Определение 9.7. Если $X = \emptyset$, то $M/_{\equiv}$ - свободная группа порождённая A

Следствие 9.2. *Любая группа порождённая A - гомоморфный образ свободной группы*

Определение 9.8. $\mathcal{G}$ - группа, $S \neq \emptyset$. Действие группы $\mathcal{G}$ на S - это отображение $h : S \times \mathcal{G} \to S$ и

1. $h(S, e) = S$
2. $h(h(S, a), b) = h(S, ab)$

Эти два условия по другому:

1. $Se = S$
2. $(Sa)b = S(ab)$

Пример 9.13. *$\mathcal{G}$ действует на себя правыми умножениями*

Определение 9.9. Сопряжение - действие группы $\mathcal{G}$ на себя или множество подмножеств $P(\mathcal{G}) : h(S, a) = a^{-1}Sa$

Теорема 9.6. *Сопряжение - действие*

Доказательство. Проверим условия сопряжения

1. $e^{-1}Se = eSe = S$
2. $h(h(S, a)b) = h(a^{-1}Sa, b) = b^{-1}a^{-1}Sab = (ab)^{-1}Sab = h(S, ab)$
   $a^{-1}Aa = A \subseteq \mathcal{G}$

□

Теорема 9.7. *Любая подгруппа при сопряжении переходит в подгруппу*

Доказательство. Пусть A - подгруппа $\mathcal{G}$ □

Теорема 9.8. *Пусть A - подгруппа, то A неподвижна при всех сопряжениях тогда и только тогда когда A - нормальная подгруппа*

Доказательство.

- $\Rightarrow a^{-1}Aa = a \Rightarrow aa^{-1}Aa = aA \Rightarrow Aa = aA$
- $\Leftarrow Aa = aA \Rightarrow a^{-1}Aa = a^{-1}aA \Rightarrow a^{-1}Aa = A$

□

Определение 9.10 (Стабилизатор)**.** $\mathcal{G}$ действует на S, $s \in S$. Стабилизатор s - $\operatorname{stab} s = \{a \in \mathcal{G}, h(s, a) = s\}$

Теорема 9.9. $\operatorname{stab} s$ *- подгруппа $\mathcal{G}$*

Доказательство. пусть $b, c \in \operatorname{stab} s$, тогда □

Определение 9.11 (Орбита)**.** Пусть G действует на S, $s \in S$. Орбита s - $\operatorname{orb} s = \{sa : a \in G\}$

Теорема 9.10. *Орбиты - классы эквивалентности*

Теорема 9.11. *Количество элементов орбиты равняется индексу стабилизатора*

Теорема 9.12 (Формула орбит)**.** *G действует на множестве S, тогда* $|S| = \sum\limits_{\textit{орбиты}} \dfrac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord} q_0}$

Следствие 9.3. *Если* $\operatorname{ord} G = p^k$*, p - простое, то* $Z \neq \{e\}$

10 Кольца и поля

Определение 10.1 (Кольцо)**.** Кольцо - алгебра сигнатуры

$$(+^{(2)}, 0^{(0)}, -^{(1)}, \cdot^{(2)})$$

обладающее свойствами:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. $a + 0 = a$
3. $a + (-a) = 0$
4. $a + b = b + a$
5. $a(b + c) = ab + ac$

Определение 10.2 (Ассоциативное кольцо)**.** Кольцо с ассоциативностью умножения $(ab)c = a(bc)$

Определение 10.3 (Кольцо с единицей)**.** Кольцо, в котором существует элемент 1, такой что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Определение 10.4 (Коммутативное кольцо)**.** Кольцо с коммутативностью умножения $ab = ba$

Определение 10.5 (Кольцо с делением)**.** Если для любого элемента кольца $a\,(a \neq 0))$ существует $b : ab = 1$, то такое кольцо называется кольцом с делением

Определение 10.6 (Тело)**.** Тело - ассоциативное, коммутативное кольцо с делением

Определение 10.7 (Поле)**.** Поле - ассоциативное, коммутативное кольцо с делением и единицей

Пример 10.1 (Примеры колец)**.**

Теорема 10.1. *Для любых элементов кольца a, b справедливы следующие утверждения:*

1. $a0 = 0a = 0$
2. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

Доказательство. □

Следствие 10.1. *В кольце с 1 ноль необратим.*

Определение 10.8 (Делитель нуля)**.** Пусть $a \cdot b = 0\, a, b \neq 0$, тогда a - левый делитель нуля, b - правый делитель нуля.

Пример 10.2 (Пример делителей нуля)**.**

Теорема 10.2. *Делители нуля необратимы*

Доказательство. □

Определение 10.9 (Идемпотент кольца)**.** Такие элементы кольца, для которых выполняется $a = a^2$

Теорема 10.3. *Идемпотенты - делители нуля*

Доказательство. □

Определение 10.10 (Целостное кольцо)**.** Ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля

Теорема 10.4. *Конечное целое кольцо ?????*

Доказательство. □

Теорема 10.5. *Каждое целостное кольцо может быть достроено до поля*

Доказательство. □

Определение 10.11 (Гомоморфизм колец)**.** $h : R \to S$ - гомоморфизм, определённый так: $a \equiv b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$

Определение 10.12 (Ядро кольца)**.** $h : R \to S$ - гомоморфизм, тогда ядро кольца $\operatorname{Ker} h = \{a \in R : h(a) = 0\}$

Теорема 10.6. *Ядро кольца - подкольцо*

Определение 10.13 (Идеал)**.** R - кольцо, $\mathcal{I} \subseteq R$ - идеал (левый, правый, двусторонний), если

1. $\mathcal{I}$ - подкольцо

2. для любого $x \in R$ $x\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ (левый идеал), $\mathcal{I}x \subseteq \mathcal{I}$ (правый идеал)

Пример 10.3 (Пример идеалов)**.**

Теорема 10.7. *R - ассоциативное кольцо с единицей или R - тело или R тогда и только тогда когда в R Нет других идеалов, кроме $\{0\}$ и R*

Определение 10.14 (Булевое кольцо)**.**