1 Подалгебры, порождающие элементы, вложения

Определение 1.1 (Подалгебра)**.** Подалгебра - алгебра $\mathcal{B} = (B, J)$ является подалдгеброй $\mathcal{A} = (A, I)$, если $B \subseteq A$ и $J(f)$ - ограничение $I(f)$ на B для всякого f

Определение 1.2 (Ограничение операции)**.** Ограничение операции - n-местная операция g на B является ограничением операции f множеством B если

$$g(b_1, ..., b_n) = f(b_1, ..., b_n)$$

для любых $b_1, ..., b_n$ из B

Пример 1.3 (Пример ограничения операции)**.**

Пример 1.4 (Пример подалгебры)**.** *Пример подалгебры:*

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \supseteq (\mathbb{R}, +, \cdot) \supseteq (\mathbb{Q}, +, \cdot)$$

Доказательство. □

Следствие 1.5. *Отношение "является подалгеброй"транзитивно*

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

Доказательство. □

Теорема 1.6. *Если $\mathcal{A} = (A, I)$ - алгебра, то B ($B \subseteq A; B \neq \emptyset$) является носителем некоторой подалгебры тогда и только тогда, когда B замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре $\mathcal{A}$*

Доказательство. 1. $\Rightarrow$

B - носитель некоторой подалгебры $\mathcal{B} = (B, J)$ и $B \subseteq A$, тогда

$$f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n) = f^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n) \in B$$

B замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре $\mathcal{A}$

2. $\Leftarrow$ B замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре $\mathcal{A}$, тогда

   $J(f)$ - функция на B

   $J(f)(b_1, ..., b_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n) \in B$

   $J(f)$ - ограниение $f^{\mathcal{A}}$ на B

   следовательно $\mathcal{B} = (B, J)$ - подалгебра и B - её носитель

□

Пример 1.7 (Пример на 1.6)**.**

Теорема 1.8. *Пусть $\mathcal{A} = (A, I)$ - алгебра, $\mathcal{B}_k$ - подалгебры, такие что $\bigcap\limits_k \mathcal{B}_k \neq \emptyset$, тогда $\bigcap\limits_k \mathcal{B}_k$ - носитель подалгебры*

Доказательство. Пусть $f^{(n)} \in \Sigma$, $b_1, ..., b_n \in \bigcap\limits_k \mathcal{B}_k$, тогда

$\Rightarrow$ по определению пересечения	$b_1, ..., b_n \in \mathcal{B}$	для всех k
$\Rightarrow$ по 1.6	$f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n) \in \mathcal{B}$	для всех k
$\Rightarrow$ по определению пересечения	$f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n) \in \bigcap\limits_k \mathcal{B}_k$	

□

Определение 1.9 (Порождённая подалгебра)**.** Пусть $\mathcal{A} = (A, I)$, $x \subseteq A$, $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B}_k$ - всевозможные подалгебры, включающие X, тогда $\bigcap \mathcal{B}_k$ - подалгебра, порождённвя X.

Теорема 1.10. *$\mathcal{A}$ - алгебра, $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B}$ - подалгебра, порождённвя X тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ состоит из всевозможных $t^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n)$ для $x_1, ..., x_n \in X$*

Доказательство. Достаточность($\Leftarrow$). Пусть $\mathcal{B}$ состоит из всевозможных $t^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n)$ для $x_1, ..., x_n \in X$. Пусть $B_k \in \mathcal{A}$ - подалгебры такие что $X \subseteq B_k$, тогда

$$\begin{aligned} x_1, ..., x_n &\in B_k \\ t^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n) &\in B_k \\ t^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n) &\in \bigcap_X B_k \\ t^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n) &\in \mathcal{B} \end{aligned}$$

Необходимость($\Rightarrow$). Предположим, что найдётся $b \in \mathcal{B}$, что $b \neq t^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n)$ для любых t и $x_1, ..., x_n \in X$, Пусть $C = \{t^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n) : t -$ терм, $x_1, ..., x_n \in X\}$, следовательно $b \notin C$, $x_i \in C$ и $X \subseteq C$.

C является подалгеброй: пусть $c_1, ..., c_m \in C$ и

$$c_1 = t_1^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n) \qquad \vdots c_m = t_m^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n)$$

$$f^{\mathcal{A}}(c_1, ..., c_m) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n), ..., t_m^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n))$$

По определению терма $f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n), ..., t_m^{\mathcal{A}}(x_1, ..., x_n))$ тоже является термом, содержащий переменные $x_1, ..., x_n$, следовательно C замкнуто по сигнатурной операции A и по 1.6 является подалгеброй.

$C = \mathcal{B}_k$ ждя некоторого k, $\mathcal{B} = \bigcap\limits_k \mathcal{B}_k$. Так как $b \notin C$, то $b \notin \mathcal{B}$, что является противоречием. □

Определение 1.11 (Разнозначное отображение)**.** f - разнозначное, если $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$

Определение 1.12 (Вложение)**.** $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ - вложение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, если h - разнозначное отображение и

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n))$$

говорят "$\mathcal{A}$ вкладывается в $\mathcal{B}$"

Теорема 1.13. *$h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ - вложение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, тогда*

1. *образ h - $\mathcal{C}$, подалгебра в $\mathcal{B}$*
2. *$h : \mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$*

Доказательство.

1. Пусть $c_1, ..., c_n \in \operatorname{rng} h$, тогда $c_1 = h(a_1), ..., c_n = h(a_n)$ и

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n)) = f^{\mathcal{B}}(c_1, ..., c_n) \in \operatorname{rng} h$$

Элементы образа h замкнуты относительно сигнатурных операций $\mathcal{B}$

2. $\mathcal{C} = \operatorname{rng} h$, $h : A \leftrightarrow C$, $\Rightarrow h$ - изоморфизм

□