1 Гомоморфизмы колец, идеалы, фактор-кольца

Определение 1.1 (Гомоморфизм колец). $h : R \to S$ - гомоморфизм, определённый так: $a \equiv b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$

Определение 1.2 (Ядро кольца). $h : R \to S$ - гомоморфизм, тогда ядро кольца $\operatorname{Ker} h = \{a \in R : h(a) = 0\}$

Теорема 1.3. *Ядро кольца - подкольцо*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Ker} h$ - ядро кольца R по гомоморфизму $R \to S$, тогда

1. $\operatorname{Ker} h \neq \emptyset$
2. $\forall x, y \in \operatorname{Ker} h : h(x + (-y)) = h(x) + h(-y) \overset{??}{=} h(x) - h(y) \overset{1.2}{=} 0 \Rightarrow x + (-y) \in \operatorname{Ker} h$
3. $\forall x, y \in \operatorname{Ker} h : h(x \circ y) = h(x) \circ h(y) = 0 \circ 0 = 0 \Rightarrow x \circ y \in \operatorname{Ker} h$

По **??** ядро $\operatorname{Ker} h$ является группой □

Определение 1.4 (Идеал). R - кольцо, $\mathcal{I} \subseteq R$ - идеал (левый, правый, двусторонний), если

1. $\mathcal{I}$ - подкольцо
2. для любого $x \in R$ $x\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ (левый идеал), $\mathcal{I}x \subseteq \mathcal{I}$ (правый идеал)

Теорема 1.5. *Ядро кольца - идеал*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Ker} h$ - ядро кольца R по гомоморфизму $R \to S$, тогда

1. по теореме 1.3
2. (a) $\forall x \in R, y \in \operatorname{Ker} h : h(xy) = h(x)h(y) = h(x) * 0 = 0 \Rightarrow xy \in \operatorname{Ker} h \Rightarrow x \operatorname{Ker} h \subseteq \operatorname{Ker} h$

   (b) $\forall x \in R, y \in \operatorname{Ker} h : h(yx) = h(y)h(x) = 0 * h(x) = 0 \Rightarrow yx \in \operatorname{Ker} h \Rightarrow \operatorname{Ker} h * x \subseteq \operatorname{Ker} h$

По определению идеала ядро $\operatorname{Ker} h$ является идеалом □

Пример 1.6 (Пример идеалов).

Теорема 1.7. *Пусть R, S - кольца, $h : R \to S$ - гомоморфизм. Если $\operatorname{Ker} h = \{0\}$, то h - вложение*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Ker} h = \{0\}$, $x, y \in A$. Пусть $h(x) = h(y) = b$, тогда

$$\begin{aligned} && h(x) - h(y) &= b - b && \\ && &= 0 && \\ \Rightarrow && h(x-y) &= 0 && \textbf{??} \\ \Rightarrow && (x-y) &\in \operatorname{Ker} h && 1.2 \\ \Rightarrow && x - y &= 0h && \\ \Rightarrow && x &= y && \end{aligned}$$

Так как x, y были произвольными, то h - вложение □

Лемма 1.8. *Если R - кольцо, $a \neq 0$, $a \in R$ и $1 \in aR$, то $aR = R$*

Доказательство. Так как $1 \in aR$, то a обратим, то есть существует $a^{-1} \in R$,следовательно

$$aR \supseteq aa^{-1}R = R$$

Так как $R \subseteq aR$ и $aR \subseteq R$, то $aR = R$ □

Теорема 1.9. *R - ассоциативное кольцо с единицей или R - тело или R тогда и только тогда когда в R Нет других идеалов, кроме $\{0\}$ и R*

Доказательство. Так как R - ассоциативное кольцо с единицей или или тело, то для каждого a существует обратное a^{-1}. По лемме 1.7 для всех $a \neq 0$ $aR = R$. Остаётся только $a = 0$, который образует идеал $\{0\}$ □

Определение 1.10 (Булевое кольцо)**.**

Теорема 1.11. *Пусть I - двухсторонний идеал в R, тогда отношение $\equiv$: $x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in I$ является конгруэнтностью*

Доказательство. □

Следствие 1.12. *Существует фактор-алгебра ${}^{R}/_{\equiv}$, такая что ???*

Следствие 1.13. *$I = \operatorname{Ker} h$, где $h : R \to {}^{R}/_{\equiv}$*

Доказательство. □

Определение 1.14 (Простой идеал)**.** Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда I - простой идеал, если $ab \in I \Leftrightarrow a \in I$ или $b \in I$

Определение 1.15 (Максимальный идеал)**.** Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда I - максимальный идеал, если для любого идеала $J : I \subseteq J, I \neq J$ выполняется $J = R$

Определение 1.16 (Главный идеал)**.** Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда I - главный идеал, если для некоторого $a \in R\ I = aR$

Пример 1.17 (??????)**.**

Лемма 1.18. *Если I и J - идеалы, то $I + J$ тоже идеал*

Доказательство. □

Теорема 1.19. *Пусть R - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, I - идеал, тогда*

1. *I - простой идеал $\Leftrightarrow {}^{R}/_{I}$ - целостное*
2. *I - максимальный идеал $\Leftrightarrow {}^{R}/_{I}$ - поле*

Доказательство. □