

# 1 Гомоморфизмы колец, идеалы, фактор-кольца

**Определение 1.1** (Гомоморфизм колец).  $h : R \rightarrow S$  - гомоморфизм, определённый так:  $a \equiv b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$

**Определение 1.2** (Ядро кольца).  $h : R \rightarrow S$  - гомоморфизм, тогда ядро кольца  $\text{Ker } h = \{a \in R : h(a) = 0\}$

**Теорема 1.3.** Ядро кольца - подкольцо

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\text{Ker } h$  - ядро кольца  $R$  по гомоморфизму  $R \rightarrow S$ , тогда

1.  $\text{Ker } h \neq \emptyset$
2.  $\forall x, y \in \text{Ker } h : h(x + (-y)) = h(x) + h(-y) \stackrel{??}{=} h(x) - h(y) \stackrel{1.2}{=} 0 \Rightarrow x + (-y) \in \text{Ker } h$
3.  $\forall x, y \in \text{Ker } h : h(x \circ y) = h(x) \circ h(y) = 0 \circ 0 = 0 \Rightarrow x \circ y \in \text{Ker } h$

По ?? ядро  $\text{Ker } h$  является группой

□

**Определение 1.4** (Идеал).  $R$  - кольцо,  $\mathcal{I} \subseteq R$  - идеал (левый, правый, двусторонний), если

1.  $\mathcal{I}$  - подкольцо
2. для любого  $x \in R$   $x\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$  (левый идеал),  $\mathcal{I}x \subseteq \mathcal{I}$  (правый идеал)

**Теорема 1.5.** Ядро кольца - идеал

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\text{Ker } h$  - ядро кольца  $R$  по гомоморфизму  $R \rightarrow S$ , тогда

1. по теореме 1.3
2. (a)  $\forall x \in R, y \in \text{Ker } h : h(xy) = h(x)h(y) = h(x) * 0 = 0 \Rightarrow xy \in \text{Ker } h \Rightarrow x \text{Ker } h \subseteq \text{Ker } h$   
(b)  $\forall x \in R, y \in \text{Ker } h : h(yx) = h(y)h(x) = 0 * h(x) = 0 \Rightarrow yx \in \text{Ker } h \Rightarrow \text{Ker } h * x \subseteq \text{Ker } h$

По определению идеала ядро  $\text{Ker } h$  является идеалом

□

**Пример 1.6** (Пример идеалов).

**Теорема 1.7.** Пусть  $R, S$  - кольца,  $h : R \rightarrow S$  - гомоморфизм. Если  $\text{Ker } h = \{0\}$ , то  $h$  - вложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\text{Ker } h = \{0\}$ ,  $x, y \in A$ . Пусть  $h(x) = h(y) = b$ , тогда

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= b - b \\ &= 0 \\ \Rightarrow h(x - y) &= 0 && ?? \\ \Rightarrow (x - y) &\in \text{Ker } h && 1.2 \\ \Rightarrow x - y &= 0h \\ \Rightarrow x &= y \end{aligned}$$

Так как  $x, y$  были произвольными, то  $h$  - вложение □

**Лемма 1.8.** Если  $R$  - кольцо,  $a \neq 0$ ,  $a \in R$  и  $1 \in aR$ , то  $aR = R$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как  $1 \in aR$ , то  $a$  обратим, то есть существует  $a^{-1} \in R$ , следовательно

$$aR \supseteq aa^{-1}R = R$$

Так как  $R \subseteq aR$  и  $aR \subseteq R$ , то  $aR = R$  □

**Теорема 1.9.**  $R$  - ассоциативное кольцо с единицей или  $R$  - тело или  $R$  тогда и только тогда когда в  $R$  Нет других идеалов, кроме  $\{0\}$  и  $R$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как  $R$  - ассоциативное кольцо с единицей или тело, то для каждого  $a$  существует обратное  $a^{-1}$ . По лемме 1.8 для всех  $a \neq 0$   $aR = R$ . Остаётся только  $a = 0$ , который образует идеал  $\{0\}$  □

**Определение 1.10** (Булево кольцо).

**Теорема 1.11.** Пусть  $I$  - двухсторонний идеал в  $R$ , тогда отношение  $\equiv$ :  $x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in I$  является конгруэнтностью

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

**Следствие 1.12.** Существует фактор-алгебра  $R/\equiv$ , такая что ???

**Следствие 1.13.**  $I = \text{Ker } h$ , где  $h : R \rightarrow R/\equiv$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

**Определение 1.14** (Простой идеал). Пусть  $R$  - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда  $I$  - простой идеал, если  $ab \in I \Leftrightarrow a \in I$  или  $b \in I$

**Определение 1.15** (Максимальный идеал). Пусть  $R$  - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда  $I$  - максимальный идеал, если для любого идеала  $J : I \subseteq J, I \neq J$  выполняется  $J = R$

**Определение 1.16** (Главный идеал). Пусть  $R$  - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, тогда  $I$  - главный идеал, если для некоторого  $a \in R$   $I = aR$

**Пример 1.17** (?????).

**Лемма 1.18.** Если  $I$  и  $J$  - идеалы, то  $I + J$  тоже идеал

Доказательство.

□

**Теорема 1.19.** Пусть  $R$  - ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей,  $I$  - идеал, тогда

1.  $I$  - простой идеал  $\Leftrightarrow R/I$  - целостное
2.  $I$  - максимальный идеал  $\Leftrightarrow R/I$  - поле

Доказательство.

□