

# 1 Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы, фактор-группа

**Определение 1.1** (Нормальная подгруппа). Нормальная подгруппа - подгруппа, у которой любой левый смежный класс совпадает с правым

**Пример 1.2.** *Пример нормальных групп*

$$\langle r_1 \rangle = \{r_0, r_1, r_2\} \subseteq \mathcal{D}_3$$

$$r_i \langle r_1 \rangle = r_i \{r_0, r_1, r_2\} = \{r_{0+i}, r_{1+i}, r_{2+i}\} = \langle r_1 \rangle$$

$$\langle r_1 \rangle r_i = \{r_0, r_1, r_2\} r_i = \{r_{0+i}, r_{1+i}, r_{2+i}\} = \langle r_1 \rangle$$

$$r_i \langle r_1 \rangle = \langle r_1 \rangle r_i$$

$$s_i \langle r_1 \rangle = \{s_i r_0, s_i r_1, s_i r_2\} = \{s_i, s_{i-1}, s_{i+1}\}$$

$$\langle r_1 \rangle s_i = \{r_0 s_i, r_1 s_i, r_2 s_i\} = \{s_i, s_{i+1}, s_{i-1}\}$$

$$s_i \langle r_1 \rangle = \langle r_1 \rangle s_i$$

$\langle r_1 \rangle$  - нормальная подгруппа

**Теорема 1.3.** Если  $\mathcal{G}$  - группа,  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ , и  $\equiv$  - отношение принадлежности к одному левому смежному классу, то  $\equiv$  - отношение эквивалентности

Доказательство. 1. Рефлексивность  $a \in a\mathcal{H} \Rightarrow a \equiv a$

2. Симметричность  $a \equiv b \Rightarrow a \in x\mathcal{H}, b \in x\mathcal{H} \Rightarrow b \equiv a$

3. Транзитивность  $a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow$

$$\begin{array}{lll} a, b \in x\mathcal{H} & a = xh_a & b = xh_b \\ b, c \in y\mathcal{H} & b = yh'_b & c = yh_c \end{array}$$

$$xh_b = yh'_b \Rightarrow x = yh'_b h_b^{-1} \Rightarrow a = y \underbrace{h'_b h_b^{-1} h_a}_{\mathcal{H}}$$

$$\left. \begin{array}{l} c \in y\mathcal{H} \\ a \in y\mathcal{H} \end{array} \right\} a \equiv c$$

□

**Определение 1.4** (Факторгруппа). Рассмотрим группу  $G$  и ее нормальную подгруппу  $H$ . Пусть  $G/H$  — множество смежных классов  $G$  по  $H$ . Определим в  $G/H$  операцию умножения по следующему правилу:  $aH \cdot bH = (ab)H$

**Теорема 1.5.** *Определение произведения смежных классов корректно. То есть произведение смежных классов не зависит от выбранных представителей  $a$  и  $b$*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $aH, bH \in G/H$ ,  $a_1 = a \cdot h_a \in aH$ ,  $b_1 = b \cdot h_b \in bH$ . Докажем, что  $abH = a_1b_1H$ . Достаточно показать, что  $a_1 \cdot b_1 \in abH$ .

В самом деле,  $a_1 \cdot b_1 = a \cdot h_a \cdot b \cdot h_b = a \cdot b \cdot (b^{-1} \cdot h_a \cdot b) \cdot h_b$ . Элемент  $h = (b^{-1} \cdot h_a \cdot b)$  лежит в  $H$  по свойству нормальности  $H$ . Следовательно,  $a \cdot b \cdot h \cdot h_b \in abH$ .  $\square$

**Определение 1.6** (Гомоморфизм групп). Если  $G$  и  $H$  - группа,  $h : G \rightarrow H$  и  $h(a * b) = h(a) * h(b)$ , то  $h$  - гомоморфизм

**Следствие 1.7.** *Гомоморфизм групп обладает следующими свойствами:*

1.  $h(e) = e$
2.  $h(a^{-1}) = h(a)^{-1}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.  $h(e) = h(e * e) = h(e) * h(e)$   
 $h(e)$  - идемпотент в  $\mathcal{H}$ , следовательно  $h(e) = e$

$$\begin{aligned} h(a^{-1}) &= h(a^{-1}) * e = h(a^{-1}) * h(a) * (h(a))^{-1} = \\ &= h(a^{-1} * a) * (h(a))^{-1} = h(e) * (h(a))^{-1} = e * (h(a))^{-1} = (h(a))^{-1} \end{aligned}$$

$\square$

**Определение 1.8** (Порождённая конгруэнтность). Конгруэнтность порождённая  $h$  - если  $a \equiv b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$  - конгруэнтность, то  $h[A] = A / \equiv$

**Теорема 1.9.** *Если  $h : G \rightarrow H$  - гомоморфизм,  $\equiv$  - конгруэнтность порождённая  $h$ , то классы эквивалентные  $e$  в  $G$  являются нормальными подгруппами*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $a, b \in f \Rightarrow ab^{-1} \in f$ ,  $a \equiv e$ ,  $b \equiv e$ ,  $b^{-1} \equiv e^{-1} \equiv e$ ,  $ab^{-1} \equiv ee \equiv e$

$$a\{b \in \mathcal{G} : b \equiv e\} \ni c$$

$$aba^{-1} \in \{b \in \mathcal{G} : b \equiv e\} a \ni c$$

$$c = ab = abe = aba^{-1}a$$

$$b \equiv e \quad a \equiv a \quad a^{-1} \equiv a^{-1}$$

$$aba^{-1} \equiv aea^{-1} = e$$

$$aba^{-1} \equiv e$$

$$aba^{-1}a = abe = ab = c$$

□

"И в обратную сторону". Хотя я в душе не знаю как в эту получилось.

**Определение 1.10** (Ядро подгруппы). Ядро подгруппы - множество элементов эквивалентных  $e$ .  $\text{Ker } h$

**Теорема 1.11.**  $G$  - группа,  $H$  - нормальная подгруппа,  $a \equiv b \Leftrightarrow a$  и  $b$  принадлежат одному левому классу, то  $\equiv$  - конгруэнтность

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $a \equiv b$ ,  $c \equiv d$ , надо доказать

$$1. \quad ac \equiv bd$$

$$2. \quad a^{-1} \equiv b^{-1} \text{ (зачем)}$$

1.

$$a, b \in x\mathcal{H}$$

$$a = xh_a, b = xh_b$$

$$c, d \in y\mathcal{H}$$

$$c = yh_c, d = yh_d$$

$$ac = xh_a \cdot yh_c, h_a y = yh', h_a y \in \mathcal{H}y = y\mathcal{H}$$

$$\left. \begin{aligned} ac &= xh_a y h_c = xy \underbrace{h' h_c}_{\in \mathcal{H}} \in xy\mathcal{H} \\ bd &= xh_b y h_d = xy \underbrace{h'' h_d}_{\in \mathcal{H}} \in xy\mathcal{H} \end{aligned} \right\} \text{эквивалентные}$$

$$h_b y = yh'', h_b y \in \mathcal{H}y = y\mathcal{H}$$

2.

$$\begin{array}{ll} h_a & h_b \\ h_a^{-1} & h_b^{-1} \\ \mathcal{H}x^{-1} & \mathcal{H}x^{-1} \end{array}$$

$$a^{-1}, b^{-1} \in x^{-1}\mathcal{H}$$

□

**Определение 1.12** (щито).  $\mathcal{G}$  - группа,  $\mathcal{H}$  - нормальная подгруппа,  $\equiv$  - отношение конгруэнтности. Тогда  $\hat{\mathcal{G}}/\equiv = \mathcal{G}/\mathcal{H}$

**Следствие 1.13.** Если  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  - гомоморфизм, тогда  $h[\mathcal{G}] = \mathcal{G}/\text{Ker } h$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.  $h[\mathcal{G}] = \mathcal{G}/\equiv = \mathcal{G}/\text{Ker } h$

□

**Пример 1.14.**

$$\mathcal{D}_3 = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$$

$\langle r_1 \rangle$  - подгруппа вращений

$$\langle r_1 \rangle$$

$$S_1 \langle r_1 \rangle$$

Таблица умножения (ЧЕГО???)

	$\langle r_1 \rangle$	$S_1 \langle r_1 \rangle$
$\langle r_1 \rangle$	$\langle r_1 \rangle$	$S_1 \langle r_1 \rangle$
$S_1 \langle r_1 \rangle$	$S_1 \langle r_1 \rangle$	$\langle r_1 \rangle$

**Пример 1.15.**  $(\mathbb{R}, +) \supseteq (\mathbb{Z}, +)$

$$a + \mathbb{Z}$$

$$ba \in \mathbb{Z}$$

$$a + \mathbb{Z} = b + \mathbb{Z}$$

$$a \in [0, 1)$$

$$(a + \mathbb{Z}) + (b + \mathbb{Z}) = (a + b) = (a + b) \mod 1$$

$$\mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}, (\mathbb{C}_1, \cdot)$$

$$h(x) = e^{2nix}$$

$$x \in \mathbb{R} = e^{2nix} \in \mathbb{C}_1$$

$$h(x + y) = e^{2ni(x+y)} = e^{2nix}e^{2niy} = h(x)h(y)$$

$$h : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$$

$$r \in \text{Ker } h \Leftrightarrow r \equiv e$$

$$h(r) = h(e)$$

$$h(r) = h(0)$$

$$e^{2nix} = e^{2nix} = 1$$

$$e^{2nix} = 2n \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

$$r \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ker } h \in \mathbb{Z}$$