1 Подалгебры, порождающие элементы, вложения

Определение 1.1 (Подалгебра)**.** Подалгебра - алгебра $\mathcal{B} = (B, J)$ является подалдгеброй $\mathcal{A} = (A, I)$, если $B \subseteq A$ и $J(f)$ - ограничение на B для всякого f

Определение 1.2 (Ограничение операции)**.** Ограничение операции - n-местная операция g на B является ограничением операции f множеством B если

$$g(b_1, ..., b_n) = f(b_1, ..., b_n)$$

для любых $b_1, ..., b_n$ из B

Пример 1.1 (Пример ограничения операции)**.**

Пример 1.2 (Пример подалгебры)**.** *Пример подалгебры:*

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \supseteq (\mathbb{R}, +, \cdot) \supseteq (\mathbb{Q}, +, \cdot)$$

Доказательство.

$\square$

Следствие 1.1. *Отношение "является подалгеброй"транзитивно*

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

Доказательство.

$\square$

Теорема 1.1. *Если $\mathcal{A} = (A, I)$ - алгебра, то B ($B \subseteq A; B \neq \emptyset$) является носителем некоторой подалгебры тогда и только тогда, когда B замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре $\mathcal{A}$*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$

   B - носитель подалгебры $\mathcal{B} = (B, J)$ и $B \subseteq A$, тогда

   $$f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n) = f^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n) \in B$$

   B замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре $\mathcal{A}$

2. $\Leftarrow$ B *замкнута относительно сигнатурной операции в алгебре* $\mathcal{A}$, *тогда*

   $J(f)$ - *функция на* B

   $J(f)(b_1, ..., b_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n) \in B$

   $J(f)$ - *ограниение* $f^{\mathcal{A}}$ *на* B

   следовательно $\mathcal{B} = (B, J)$ - *подалгебра и* B - *её носитель*

□

Пример 1.3 (Пример на 1.1)**.**

Теорема 1.2.
Доказательство.

□