1 Универсальные алгебры, сигнатуры, термы, изоморфизмы

Определение 1.1 (Сигнатура)**. Сигнатура** - множество имён операций с указанием их местности.

$$(f^{(2)}, g^{(3)}, h^{(0)}), (+^{(2)}, \cdot^{(3)})$$

$h^{(0)}$ - символ константы, V - имена переменных

Определение 1.2 (Терм)**. Терм** - выражение, составленное из символов сигнатуры и переменных

1. $x \in V$, x - терм
2. c - символ константы, с - терм
3. если $t_1, ..., t_n$ - термы и f - символ n-местной операции, то $f(t_1, ..., t_n)$ - терм

Пример 1.3. *Примеры термов:* $-(x), -(0), +(x, y), 2 + 3 + a$

Определение 1.4 (Замкнутый терм)**. Замкнутый терм** - терм, не содержащий переменных

Определение 1.5. Универсальная алгебра - пусть Σ - сигнатура, тогда *универсальная алгебра* сигнатуры Σ - это пара вида (A, I), где A - произвольное непустое множество, а I - некоторое отображение, которое для всякого $p^{(m)} \in \Sigma$, $I(p^{(m)})$ - n-местной операции на множестве

Пример 1.6 (Пример универсальной алгебры)**.** *Пусть*

$$\Sigma = (+^{(2)}, \cdot^{(2)}, -^{(1)}, 0^{(0)}, 1^{(0)})$$

тогда

$$\begin{aligned} R = (\mathbb{R}, I) : & I(+) - \textit{сложение} \\ & I(\cdot) - \textit{умножение} \\ & I(-) - \textit{вычитание} \\ & I(0) - 0 \\ & I(1) - 1 \end{aligned}$$

Определение 1.7 (Носитель алгебры). $\mathbb{R}$ называется **основным множеством** или носителем алгебры, а I - интерпретацией или интерпретирующей функцией

Определение 1.8 (Состояние). **Состояние** - функция, приписывающая переменной некоторый элемент носителя $\sigma : V \to A$

Пример 1.9. *Пример состояний:* $\sigma = \{(x, 3), (y, -8)\}, \sigma(x) = 3$

Определение 1.10 (Значение терма на состоянии). Значение терма t на состоянии σ - значение того выражения, в котором переменные заменены их значениями

1. t - переменная, $\sigma(t)$ - по определению состояния
2. t - символ константы, $I(t) = \sigma(t_1) = v_1$
3. если $t_1, ..., t_n$ - термы и $\sigma(t_1) = v_1, ..., \sigma(t_n) = v_n$, то $\sigma(t) = I(f)(v_1, ..., v_n)$

Определение 1.11 (Изоморфизм). **Изоморфизм** - Пусть $\Sigma = \{f_i^{(n_i)} : i \in I\}$ - сигнатура, $\mathcal{A} = (A, I)$, $\mathcal{B} = (B, J)$ - универсальные алгебры сигнатуры Σ, тогда изоморфизм между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - это $h : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ - биективная функция, которая удовлетворяет следующему условию:

$$h(I(f_i)(a_1, ..., a_n)) = J(f_i)(h(a_1), ..., h(a_n))$$

для любых $a_1, ..., a_n$ и $f_i \in \Sigma$

Пример 1.12 (Пример изоморфизма). *пусть* $\Sigma = (f^{(2)})$, $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{R}, \cdot)$

Надо доказать:

$$h(a_1 + a_2) = h(a_1) \cdot h(a_2)$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Пусть $h(x) = e^x$, *тогда*

$$h(a_1 + a_2) = e^{a_1 + a_2} = e^{a_1} \cdot e^{a_2} = h(a_1) \cdot h(a_2) \blacksquare$$

Теорема 1.13. *h - изоморфизм между A и B, то h^{-1} - изоморфизм между B и A*

Доказательство. пусть $b_1, ..., b_{n_i} \in B$, тогда надо доказать

$$h^{-1}(J(f_i)(b_1, ..., b_{n_i})) = I(f_i)(h^{-1}(b_1), ..., h^{-1}(b_{n_i}))$$

Так как $b_1 = h(a_1), ..., b_{n_i} = h(a_{n_i})$,

$$\begin{aligned} I(f_i)(h^{-1}(b_1), ..., h^{-1}(b_{n_i})) &= I(f_i)(h^{-1}(h(a_1)), ..., h^{-1}(h(a_{n_i}))) \\ &= I(f_i)(a_1, ..., a_{n_i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^{-1}(J(f_i)(b_1, ..., b_{n_i})) &= h^{-1}(J(f_i)(h(a_1), ..., h(a_{n_i}))) \\ &= h^{-1}(h(I(f_i)(a_1, ..., a_{n_1}))) \\ &= I(f_i)(a_1, ..., a_{n_1}) \end{aligned}$$

Из этих двух равенств следует то, что надо доказать $\square$

Определение 1.14. Системы, между которыми существует изоморфизм называют **изоморфными**

$$(\mathbf{R}, +) \simeq (\mathbf{R}^+, \cdot)$$

операции в изоморфных системах обладают одними и теми же свойствами

Определение 1.15 (Терм, содержащий переменные)**.** Пусть t - терм, $x_1, ..., x_n$ - переменные, $t(x_1, ..., x_n)$ - терм t не содержит других переменных кроме $x_1, ..., x_n$

Определение 1.16. Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра, $a_1, ..., a_n$ - элементы алгебры $\mathcal{A}$, тогда

$$t(a_1, ..., a_n) = \sigma(t), \sigma(x_1) = a_1, ..., \sigma(x_n) = a_n$$

Пример: В алгебре $(\mathbf{R}, +)$:

$$t(x, y) = x + y \quad t(4, 8) = 4 + 8 = 12$$

Теорема 1.17. *h - изоморфизм между $\mathcal{A} = (A, I)$ и $\mathcal{B} = (B, J)$, то для любого терма $t(x_1, ..., x_n)$ и любых $a_1, ..., a_n$ выполняется*

$$h(t^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = t^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n))$$

Доказательство. Индукция по построению терма t

1. $t = x$

$$t^{\mathcal{A}}(a) = a = t^{\mathcal{B}}(a) \Rightarrow h(t^{\mathcal{A}}(a)) = h(a),\ t^{\mathcal{B}}(h(a)) = h(a)$$

2. $t = c$

$$\sigma(c) = I(c) = J(c) \Rightarrow t^{\mathcal{A}} = I(c), t^{\mathcal{B}} = J(c) \Rightarrow h(I(c)) = J(c)$$

по определению гомоморфизма

3. $t = f(t_1, ..., t_k)$

$$\begin{aligned} h(t^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = \\ h(I(f)(t_1^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n), ..., t_k^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n))) = \\ J(f)(h(t_1^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)), ..., h(t_k^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n))) = \\ J(f)(t_1^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n)), ..., t_k^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n)) = \\ t^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n)) \end{aligned}$$

□

Пример 1.18. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{R}; \cdot) \ncong \mathcal{B} = (\mathbb{R}^+; \cdot)$

Доказательство. Предположим что существует изоморфизм $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, тогда

$h(0) = x, x \in \mathbb{R}^+$

$$x = h(0) = h(0 \cdot 0) = h(0) \cdot h(0) = x^2$$

$$x = x^2 \Rightarrow x = 1$$

$h(1) = y, y \in \mathbb{R}^+$

$$y = h(1) = h(1 \cdot 1) = h(1) \cdot h(1) = y^2$$

$$y = y^2 \Rightarrow y = 1$$

$h(0) = 1 = h(1)$ - противоречие (h не биективна). Утверждение не верно. □

Пример 1.19. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{R}; +) \ncong \mathcal{B} = (\mathbb{R}; \cdot)$

Доказательство. Предположим что существует изоморфизм $h : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, тогда

$h(0) = x, h(1) = y; x, y \in \mathbb{R}$

$$x = h(0) = h(0 \cdot 0) = h(0) + h(0) = 2x \Rightarrow x = 2x = 0$$

$$y = h(1) = h(1 \cdot 1) = h(1) + h(1) = 2y \Rightarrow y = 2y = 0$$

Противоречие (h должно быть биекцией) □

1.13

Пример 1.20. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{R}; \cdot) \cong \mathcal{B} = (\mathbb{C}; \cdot)$

Доказательство. Предположим что существует изоморфизм $h : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, тогда

$h(x) = -1; x \in \mathbb{C}, -1 \in \mathbb{R}$

□

Пример 1.21. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}; \min^{(2)}) \ncong \mathcal{B} = (\mathbb{Z}; \max^{(2)})$

Доказательство. □

Пример 1.22. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\omega; +) \ncong \mathcal{B} = (\omega^+; \cdot)$

Доказательство. □

Пример 1.23. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}; +) \ncong \mathcal{B} = (\mathbb{Q}^+; \cdot)$

Доказательство. □

Пример 1.24. *Доказать что* $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}; \cdot) \ncong \mathcal{B} = (\mathbb{G}; \cdot)$

Доказательство. □