Лемма 1. Обратное введение импликации - допустимое правило исчисления высказываний

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}$$

Доказательство. Пусть  $\varphi, \psi$  - формулы,  $\Gamma$  - последовательность формул

$$\frac{\varphi}{\varphi} \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \psi}$$

$$\Gamma, \varphi \vdash \psi$$

— (Свободная конкретизация)

Лемма 2. Секвенция  $x+a\approx x \vdash a\approx 0$  выводима в арифметике Пеано

 $\vdash a + 0 \approx 0 + a$ 

 $0+a\approx 0 \vdash a+0\approx 0+a$ 

Доказательство. Построим дерево вывода

$$\frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u + u + u}{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u + u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u} + \frac{s(x+u) \approx s(x) + u \approx u}{s(x+u) \approx s(x) + u \approx$$

**Утверждение 1.** Секвенция  $\vdash \neg s(x+v) \approx x$  выводима в арифметике Пеано

(Введение  $\rightarrow$ )  $0+a\approx 0 \vdash a\approx 0$  $\vdash 0+a\approx 0 \rightarrow a\approx 0$ 

 $a+0\approx 0 \vdash a\approx 0$ 

Доказательство. От противного

(Утончение) ${s(x+v)\approx x+s(v)\approx x\to s(v)\approx 0}$	(Симметрия равенства) $ \frac{\vdash x + s(v) \approx s(x+v)}{\vdash s(x+v) \approx x + s(v)} $ $ \frac{s(x+v) \approx x \vdash s(x+v) \approx x + s(v)}{s(x+v) \approx x \vdash s(x+v) \approx x} $ $ s(x+v) \approx x \vdash x + s(v) \approx x $	$\vdash \neg s(v) \approx 0$
(Modus Ponens)	$(c+v) \approx x + s(v) \approx 0$	$s(x+v) \approx x \vdash \neg s(v) \approx 0$ (Утончение) (Не правило)
	$\vdash \neg s(x+v) \approx x$	(The inpublished)