1. Вывести $\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta \ \vdash\ (\exists y)\theta \to (\forall x)[(\exists z)\neg\psi \vee \varphi]$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta, (\exists y)\theta \ \vdash\ (\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi} \quad \dfrac{}{\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta, (\exists y)\theta \ \vdash\ (\forall x)(\neg(\varphi \wedge (\exists x)\psi)) \to (\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi}}{\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta, (\exists y)\theta \ \vdash\ (\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi}}{\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta, (\exists y)\theta \ \vdash\ (\forall x)[(\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi]}}{\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta \ \vdash\ (\exists y)\theta \to (\forall x)[(\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi]}$$

2. Доказать что введение $\exists$ слева обратимо. Сначала докажем, что $(\exists x)\varphi \ \vdash\ \varphi$ выводимо:

$$\dfrac{\varphi \ \vdash\ \varphi}{(\exists x)\varphi \ \vdash\ \varphi}\ (\text{вв } \exists \text{ лев})$$

Теперь можно воспользоваться допустимым правилом:

$$\dfrac{\Gamma, (\exists x)\varphi \ \vdash\ \psi}{\Gamma, \varphi \ \vdash\ \psi}\ (\text{доп. выв.})$$

3. Доказать что введение $\exists$ справа необратимо. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = (\leq^{(2)}; +^{(2)}, 0^{(0)}, 1^{(0)})$ и алгебраическую систему в этой сигнатуре: $\mathcal{A} = (\omega, \leq; +, 0, 1)$.

Пусть "введение $\exists$ справа обратимое правило, тогда верно

$$\dfrac{\vdash\ (\exists x)x \leq 0}{\vdash\ x \leq 0}$$

следовательно $\vdash\ x \leq 0$ выводима и является тождественно истинной. Но $\vdash\ x \leq 0$ не является тождественно истинной секвенцией, так как существует состояние $\sigma : \sigma(x) = 1$, на котором формула $x \leq 0$ ложна.