Дана алгебраическая система $A = (\{a, b, c\}; P^{(2)})$

| $P_A$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 0 | 1 |
| $b$ | 1 | 1 | 1 |
| $c$ | 0 | 1 | 1 |

Найти значение $\varphi = (\forall x)(\exists y)(P(x, y) \wedge (\exists z)P(y, z))$.

$$\sigma(\varphi) = \sigma(\forall x)(\exists y)(P(x, y) \wedge (\exists z)P(y, z)) = (\sigma)^x_\alpha(\exists y)(P(x, y) \wedge (\exists z)P(y, z)) = ((\sigma)^x_\alpha)^y_\beta(P(x, y) \wedge (\exists z)P(y, z)) = (((\sigma)^x_\alpha)^y_\beta)^z_\gamma(P(x, y) \wedge P(y, z))$$

Для каждого $\alpha$ существуют такие $\beta$ и $\gamma$, что $(((\sigma)^x_\alpha)^y_\beta)^z_\gamma(P(x, y) \wedge P(y, z)) = 1$

1. если $\alpha = a$, то при $\beta = a$ и $\gamma = a$ $P(\alpha, \beta) \wedge P(\beta, \gamma) = 1$
2. если $\alpha = b$, то при $\beta = b$ и $\gamma = b$ $P(\alpha, \beta) \wedge P(\beta, \gamma) = 1$
3. если $\alpha = c$, то при $\beta = b$ и $\gamma = b$ $P(\alpha, \beta) \wedge P(\beta, \gamma) = 1$

Из этого следует, что

$$(((\sigma)^x_\alpha)^y_\beta)^z_\gamma(P(x, y) \wedge P(y, z)) = 1$$

Найти значение $\varphi = (\exists y)(\forall x)((\exists y)P(x, y) \to P(y, x))$

$$\sigma(\varphi) = \sigma(\exists y)(\forall x)((\exists y)P(x, y) \to P(y, x)) = ((\sigma)^y_\alpha)^x_\beta((\sigma)^y_\gamma P(x, y) \to P(y, x))$$

Существует $\alpha$ , что для каждого $\beta$ существует $\gamma$ такой что $(((\sigma)^y_\alpha)^x_\beta((\sigma)^y_\gamma P(x, y) \to P(y, x)) = 1$. Рассмотрим $\alpha = b$, тогда при любом $\beta$ $P(\alpha, \beta) = 1$. Следствие истинно, значит вся импликация истинна. Из этого следует

$$(((\sigma)^y_\alpha)^x_\beta((\sigma)^y_\gamma P(x, y) \to P(y, x)) = 1$$