Утверждение 1. *Секвенция* $\vdash\ (x+y)+z \approx x+(y+z)$ *выводима в ариметике Пеано*

Доказательство. Секвенция $\vdash\ (x+y)+0 \approx x+(y+0)$ выводима в ариметике Пеано:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash\ t+0\approx t}{\vdash\ (x+y)+0\approx x+y}\,\text{(Свободная конкретизация)}}{\vdash\ x+y\approx (x+y)+0}\,\text{(Симметричность равенства)} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash\ y+0\approx y}{\vdash\ y\approx y+0}\,\text{(Симметричность равенства)} \quad \vdash\ x+y\approx x+y}{\vdash\ x+y\approx x+(y+0)}\,\text{(Замена равных)}}{\vdash\ (x+y)+0\approx x+(y+0)}\,\text{(Замена равных)}$$

Секвенция $\vdash\ (\forall z)((x+y)+z\approx x+(y+z)\to (x+y)+s(z)\approx x+(y+s(z)))$ выводима в ариметике Пеано:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash\ (x+y)+s(z)\approx s((x+y)+z)}{\vdash\ s((x+y)+z)\approx (x+y)+s(z)}\,\text{(Симметричность равенства)}}{(x+y)+z\approx x+(y+z)\ \vdash\ s((x+y)+z)\approx (x+y)+s(z)}\,\text{(Утончение)} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash\ y+s(z)\approx s(y+z)}{\vdash\ s(y+z)\approx y+s(z)}\,\text{(Симметричность равенства)}}{(x+y)+z\approx x+(y+z)\ \vdash\ s(y+z)\approx y+s(z)}\,\text{(Утончение)}}{(x+y)+z\approx x+(y+z)\ \vdash\ s((x+y)+z)\approx x+(y+s(z))}\,\text{(Замена равных)}}{(x+y)+z\approx x+(y+z)\ \vdash\ (x+y)+s(z)\approx x+(y+s(z))}\,\text{(Введ. }\to\text{)}}{\vdash\ (x+y)+z\approx x+(y+z)\to (x+y)+s(z)\approx x+(y+s(z))}\,\text{(Введ. }\forall\text{ справа)}}{\vdash\ (\forall z)((x+y)+z\approx x+(y+z)\to (x+y)+s(z)\approx x+(y+s(z)))}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash\ x+s(y+z)\approx s(x+(y+z))}{\vdash\ s(x+(y+z))\approx x+s(y+z)}\,\text{(Симметричность равенства)}}{(x+y)+z\approx x+(y+z)\ \vdash\ s(x+(y+z))\approx x+s(y+z)}\,\text{(Утончение)} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash\ s((x+y)+z)\approx s((x+y)+z)}{(x+y)+z\approx x+(y+z)\ \vdash\ s((x+y)+z)\approx s((x+y)+z)}\,\text{(Утончение)}}{(x+y)+z\approx x+(y+z)\ \vdash\ (x+y)+z\approx x+(y+z) \qquad (x+y)+z\approx x+(y+z)\ \vdash\ s((x+y)+z)\approx s(x+(y+z))}\,\text{(Замена равных)}}{(x+y)+z\approx x+(y+z)\ \vdash\ s((x+y)+z)\approx x+s(y+z)}\,\text{(Замена равных)}}{(x+y)+z\approx x+(y+z)\ \vdash\ s((x+y)+z)\approx x+(y+s(z))}\,\text{(Замена равных)}$$

Секвенция $\vdash\ (x+y)+z\approx x+(y+z)$ выводима в ариметике Пеано:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash\ (x+y)+0\approx x+(y+0)\ \text{(базис)} \qquad \vdash\ (\forall z)((x+y)+z\approx x+(y+z)\to (x+y)+s(z)\approx x+(y+s(z)))\ \text{(индукционный шаг)}}{\vdash\ (x+y)+0\approx x+(y+0)\wedge(\forall z)((x+y)+z\approx x+(y+z)\to (x+y)+s(z)\approx x+(y+s(z)))}\,\text{(Введ. }\wedge\text{)} \qquad \dfrac{(x+y)+0\approx x+(y+0)\wedge(\forall z)((x+y)+z\approx x+(y+z)\to (x+y)+s(z)\approx x+(y+s(z)))\ \vdash\ (x+y)+z\approx x+(y+z)}{\vdash\ (x+y)+0\approx x+(y+0)\wedge(\forall z)((x+y)+z\approx x+(y+z)\to (x+y)+s(z)\approx x+(y+s(z)))\to (x+y)+z\approx x+(y+z)}\,\text{(Введ. }\to\text{)}}{\vdash\ (x+y)+z\approx x+(y+z)}\,\text{(Удаление }\to\text{)}$$

□