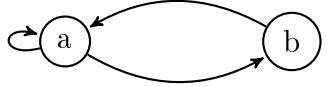


1. Вывести $(\forall x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x)), (\exists y)(\forall x)R(x, y) \vdash (\forall x)R(x, x)$

Утверждение 1. Секвенция $(\forall x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x)), (\exists y)(\forall x)R(x, y) \vdash (\forall x)R(x, x)$ не выводима.

Доказательство. Рассмотрим алгебраическую систему $\mathcal{A} = (A, I)$, где $I(R)$ - отношение, заданное графом:



$(\forall x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ является тождественно истинной формулой, для любого ребра есть ему обратное. $(\exists y)(\forall x)R(x, y)$ является тождественно истинной формулой, существует вершина, с которой все остальные соединены рёбрами (включая её саму). $(\forall x)R(x, x)$ является тождественно ложной формулой, петель нет.

Секвенция $(\forall x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x)), (\exists y)(\forall x)R(x, y) \vdash (\forall x)R(x, x)$ ложна на алгебраической системе \mathcal{A} , следовательно □

2. Вывести $(\forall x)(\exists y)x \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash (\forall x)(\exists y)(\exists z)R(z, y) \wedge R(y, x)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{R(y, x)_t^x, t \approx y \vdash R(y, x)_y^x}{R(y, t), t \approx y \vdash R(y, y)}{t \approx y, R(y, t) \vdash R(y, y)}{y \approx t, R(y, t) \vdash R(y, y)}}{y \approx g(y), R(y, g(y)) \vdash R(y, y)}}{y \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash R(y, y)} \\
 \frac{(\exists y)y \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash R(y, y)}{(\forall x)(\exists y)x \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash R(y, y)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{R(y, x)_t^x, t \approx x \vdash R(y, x)_x^x}{R(y, t), t \approx x \vdash R(y, x)}}{R(y, g(y)), g(y) \approx x \vdash R(y, x)} \\
 \frac{R(y, g(y)), x \approx g(y) \vdash R(y, x)}{x \approx g(y), R(y, g(y)) \vdash R(y, x)} \\
 \frac{x \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash R(y, x)}{(\exists y)x \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash R(y, x)} \\
 \frac{(\exists y)x \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash R(y, x)}{(\forall x)(\exists y)x \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash R(y, x)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\forall x)(\exists y)x \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash R(y, y) \wedge R(y, x)}{(\forall x)(\exists y)x \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash (\exists z)R(z, y) \wedge R(y, x)} \\
 \frac{(\forall x)(\exists y)x \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash (\exists y)(\exists z)R(z, y) \wedge R(y, x)}{(\forall x)(\exists y)x \approx g(y), (\forall x)R(x, g(x)) \vdash (\forall x)(\exists y)(\exists z)R(z, y) \wedge R(y, x)}
 \end{array}$$