

1. Вывести  $\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta \vdash (\exists y)\theta \rightarrow (\forall x)[(\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi]$

$$\frac{\frac{\frac{\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta, (\exists y)\theta \vdash (\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi}{\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta, (\exists y)\theta \vdash (\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi} \quad \frac{\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta, (\exists y)\theta \vdash (\forall x)(\neg(\varphi \wedge (\exists z)\psi)) \rightarrow (\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi}{\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta, (\exists y)\theta \vdash (\forall x)[(\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi]}}{\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta \vdash (\exists y)\theta \rightarrow (\forall x)[(\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi]}$$

Бесперспективно.

**Утверждение 1.** Секвенция  $\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta \vdash (\exists y)\theta \rightarrow (\forall x)[(\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi]$  не является выводимой.

*Доказательство.* Возьмём формулы  $\varphi = x \approx x, \psi = z \approx z, \theta = y \approx y$  Тогда для любого состояния  $\sigma$  верно  $\sigma(\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi]) = 0$  и  $\sigma((\forall y)\theta) = 1$ . Заметим, что

(a)  $\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \equiv (\forall x)[(\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi]$ , следовательно  $\sigma((\forall x)[(\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi]) = 1$

(b)  $\sigma((\forall y)\theta) = 1 \Rightarrow \sigma((\exists y)\theta) = 1$

Левая часть секвенции тождественно истинна. Правая часть секвенции тождественно ложна, так как посылка тождественно истинна и следствие тождественно ложно. Следовательно вся секвенция тождественно ложна.

Исчисление высказываний является непротиворечивым, следовательно секвенция  $\neg(\exists x)[\varphi \wedge (\exists z)\psi] \vee (\forall y)\theta \vdash (\exists y)\theta \rightarrow (\forall x)[(\forall z)\neg\psi \vee \neg\varphi]$  не является выводимой.  $\square$

2. Доказать что введение  $\exists$  слева обратимо. Сначала докажем, что  $(\exists x)\varphi \vdash \varphi$  выводимо:

$$\frac{\varphi \vdash \varphi}{(\exists x)\varphi \vdash \varphi} \text{ (вв } \exists \text{ лев)}$$

Теперь можно воспользоваться допустимым правилом:

$$\frac{\Gamma, (\exists x)\varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi} \text{ (доп. выв.)}$$

3. Доказать что введение  $\exists$  справа необратимо. Рассмотрим сигнатуру  $\Sigma = (\leq^{(2)}; 0^{(0)}, 1^{(0)})$  и алгебраическую систему в этой сигнатуре:  $\mathcal{A} = (\omega, \leq; 0, 1)$ .

Пусть "введение  $\exists$  справа" обратимое правило, тогда верно

$$\frac{\vdash (\exists x)x \leq 0}{\vdash x \leq 0}$$

следовательно  $\vdash x \leq 0$  выводима и является тождественно истинной. Но  $\vdash x \leq 0$  не является тождественно истинной секвенцией, так как существует состояние  $\sigma : \sigma(x) = 1$ , на котором формула  $x \leq 0$  ложна.