Даны алгебраическая системы одной сигнатуры $\Sigma = (P^{(2)})$ $A = (\{a, b, c\}; P_A^{(2)})$ и $B = (\{a, b, c\}; P_B^{(2)})$

P_A	a	b	c
a	1	0	1
b	1	1	1
c	0	1	1

P_B	a	b	c
a	1	0	1
b	1	1	0
c	0	1	1

Найти формулу φ такую, что $\sigma_A((\exists x)(\forall y)\varphi) = 0$ и $\sigma_B((\forall y)(\exists x)\varphi) = 1$. Этой формулой является

$$\varphi = P(x, y) \wedge P(y, x)$$

Доказательство. Рассмотрим $\sigma_A((\exists x)(\forall y)\varphi)$.

1. если $\sigma_A(x) = a$, то при $\sigma_A(y) = c$ будет $\sigma_A(P(x, y)) = 1$, а $\sigma(P(y, x)) = 0$, следовательно $\sigma(\varphi) = 0$
2. если $\sigma_A(x) = b$, то при $\sigma_A(y) = a$ будет $\sigma_A(P(x, y)) = 1$, а $\sigma(P(y, x)) = 0$, следовательно $\sigma(\varphi) = 0$
3. если $\sigma_A(x) = c$, то при $\sigma_A(y) = a$ будет $\sigma_A(P(x, y)) = 0$, а $\sigma(P(y, x)) = 1$, следовательно $\sigma(\varphi) = 0$

Из этого следует, что $\sigma_A((\exists x)(\forall y)\varphi) = 0$.

Рассмотрим $\sigma_B((\forall y)(\exists x)\varphi)$.

1. если $\sigma_B(y) = a$, то при $\sigma_B(x) = a$ будет $\sigma_A(P(x, y)) = 1$, а $\sigma(P(y, x)) = 1$, следовательно $\sigma(\varphi) = 1$
2. если $\sigma_B(y) = b$, то при $\sigma_B(x) = b$ будет $\sigma_A(P(x, y)) = 1$, а $\sigma(P(y, x)) = 1$, следовательно $\sigma(\varphi) = 1$
3. если $\sigma_B(y) = c$, то при $\sigma_B(x) = c$ будет $\sigma_A(P(x, y)) = 1$, а $\sigma(P(y, x)) = 1$, следовательно $\sigma(\varphi) = 1$

Из этого следует, что $\sigma_B((\forall y)(\exists x)\varphi) = 1$. □

1. Формула, которая истинна на состояниях σ таких, что $\sigma(x)$ - чётное

$$(\exists z) 2 \cdot z \approx x$$

2. Формула, которая истинна на состояниях σ таких, что $\sigma(x)$ - простое
$$(\forall z)(\forall y)(z \cdot y \approx x \rightarrow (z \approx 1 \vee y \approx 1))$$

3. Формула, которая истинна на состояниях σ таких, что $\sigma(x) < \sigma(y)$
$$(\exists z)(\neg(z \approx 0) \wedge x + z \approx y)$$

4. Формула, которая истинна на состояниях σ таких, что $\sigma(z)$ делит $\sigma(x)$ и $\sigma(y)$
$$(\exists a)(\exists b)(a \cdot z \approx x \wedge b \cdot z \approx y)$$

5. Формула, которая истинна на состояниях σ таких, что $\sigma(x)$ и $\sigma(y)$ - взаимно простые
$$(\forall z)(\exists a)(\exists b)((a \cdot z \approx x \wedge b \cdot z \approx y) \rightarrow z \approx 1)$$

6. Формула, которая истинна в алгебраических системах, в которых выполняется дистрибутивность сложения относительно умножения
$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a + b) \cdot c \approx (a \cdot c) + (b \cdot c))$$

7. Формула, которая истинна в алгебраических системах, в которых существует самое большое простое число
$$\begin{aligned}&(\exists x)((\forall z)(\forall y)(z \cdot y \approx x \rightarrow (z \approx 1 \vee y \approx 1)) \rightarrow \\ &\qquad (\forall u)((\forall z)(\forall y)(z \cdot y \approx u \rightarrow (z \approx 1 \vee y \approx 1)) \rightarrow \\ &\qquad\qquad (\exists v)(\neg(v \approx 0) \wedge u + v \approx x)))\end{aligned}$$