**Задача.** Дадена е табулираната функция:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $1$ | $y_3$ |

Най-доброто средноквадратично приближение до табулираните данни сред полиномите от втора степен е параболата

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{10}x + \frac{19}{10}.$$

Пресметнете стойностите на $y_0, y_1$ и $y_3$.

**Решение.** Нека възлите за $x$ са $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$, а съответните им стойности на $y$ са $y_0, y_1, y_2 = 1, y_3$.

За функция $f(x)$, определена върху горните възли, пишем $f_i = f(x_i)$ за $0 \leq i \leq 3$. Определяме скаларно произведение на функциите $f(x)$ и $g(x)$ върху възлите като

$$(f(x), g(x)) = \sum_{i=0}^{3} f_i \cdot g_i.$$

Знаем, че полиномите $\{1, x, x^2\}$ образуват базис на пространството от полиноми от втора степен. Тогава условието $P_2$ да е най-добро средноквадратично приближение за табулираната функция е

$$(y(x) - P_2(x), x^k) = 0 \qquad \text{за } k = 0, 1, 2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{3} (y(x_i) - P_2(x_i)) \cdot x_i^k = 0 \qquad \text{за } k = 0, 1, 2.$$

За $k = 0$ това условие има вида

$$0 = \sum_{i=0}^{3} (y(x_i) - P_2(x_i)) \cdot 1 = \sum_{i=0}^{3} y_i - \sum_{i=0}^{3} P_2(x_i) = y_0 + y_1 + 1 + y_3 - 8$$

($\sum_{i=0}^{3} P_2(x_i) = P_2(-2) + P_2(-1) + P_2(0) + P_2(1) = 1{,}3 + 1{,}1 + 1{,}9 + 3{,}7 = 8$).

Така получаваме

$$y_0 + y_1 + y_3 = 7. \qquad (1)$$

За $k = 1$ условието има вида

$$0 = \sum_{i=0}^{3} (y(x_i) - P_2(x_i)) \cdot x_i = (y_0 - 1{,}3) \cdot (-2) + (y_1 - 1{,}1) \cdot (-1) + 0 + (y_3 - 3{,}7) \cdot 1 = -2y_0 - y_1 + y_3$$

и значи
$$2y_0 + y_1 - y_3 = 0. \qquad (2)$$
За $k = 2$ имаме
$$0 = \sum_{i=0}^{3}(y(x_i) - P_2(x_i)) \cdot x_i^2 = (y_0 - 1,3) \cdot 4 + (y_1 - 1,1) \cdot 1 + 0 + (y_3 - 3,7) \cdot 1,$$
откъдето
$$4y_0 + y_1 + y_3 = 10. \qquad (3)$$
Решаваме системата $(1), (2), (3)$ и намираме
$$y_0 = 1, y_1 = 2, y_3 = 4.$$