Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2022/23
Prof. Dr. Alexander Lytchak

Lineare Algebra 1

Übungsblatt 2

Die Abgabe ist bis zum **14.11.2022 um 12 Uhr** möglich.
Bitte beachten Sie die Vorgaben zur Abgabe auf **Merkblatt 1** im Ilias.

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

a) Sei M eine Menge und seien $A, B \subset M$. Zeigen Sie die folgende Regel von de Morgan:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

b) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren das Urbild einer Teilmenge $A \subset Y$ unter f durch:

$$f^{-1}(A) := \{x \in X \mid f(x) \in A\}.$$

Zeigen Sie die folgende Identität:

$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c.$$

Aufgabe 2 (2+2+4 Punkte)

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g\colon Y \to X$ existiert, sodass $g \circ f = id_X$.

b) Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn eine Abbildung $g\colon Y \to X$ existiert, sodass $f \circ g = id_Y$.

c) Überprüfen Sie die folgende Abbildung auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

Entscheiden Sie für die nachfolgenden Relationen, ob es sich um Ordnungs- oder Äquivalenzrelationen handelt, und beweisen Sie Ihre Antwort:

a) Die Anzahl der Elemente einer Menge X notieren wir durch $|X|$. Sei M eine endliche Menge. Wir definieren eine Relation R auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ wie folgt: Für alle $A, B \in \mathscr{P}(M)$ gilt $(A, B) \in R$ genau dann, wenn $|A| \geq |B|$.

b) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren eine Relation R auf X wie folgt: Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $x_1 R x_2$ genau dann, wenn $f(x_1) = f(x_2)$.