Analysis 1-Kurzskript

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Wintersemester 2022/2023

– In LaTeX gesetzt von Norman Weik –

Liebe Studierende der Vorlesung Analysis 1,

in diesem Kurzskript finden Sie alle Sätze, Hilfssätze, Definitionen und Aussagen der Vorlesung. Beweise, Rechnungen, Kommentare und Erläuterungen, die in der Vorlesung dargestellt werden, finden Sie hier nicht.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen, Funktionen, reelle Zahlen

1.1 Mengen

Es ist nicht einfach, den Begriff **Menge** zu definieren. Wir benutzen die folgende (naive) Vorstellung von Mengen:

> *Eine Menge ist eine Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte (Elemente) zu einem Ganzen.*

Schreibweisen

$x \in A$ (Element x gehört zu A)

$x \notin A$ (Element x gehört nicht zu A)

$A \subset B$ (A ist Teilmenge von B, d.h. für jedes $x \in A$ gilt auch $x \in B$)

$\emptyset$ leere Menge, für jede Menge A gilt $\emptyset \subset A$

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$ (Vereinigung)

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$ (Durchschnitt)

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$ (Differenz)

$P(A) = \{M : M \subset A\}$ (Potenzmenge von A)

$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ Menge aller geordneten Paare (a, b)

1.2 Funktionen

Definition 1.1 *X, Y seien Mengen. Eine Funktion (Abbildung) f von X nach Y ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zu.*

Schreibweise: $f : \begin{cases} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ *oder* $f : X \to Y$

Die Menge

$$\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

ist eine Teilmenge von $X \times Y$ und heißt Graph der Funktion f.

Merke:

- Eine Funktion besteht aus drei „Objekten“
  - X Definitionsbereich (Definitionsmenge)
  - Y Wertebereich
  - $x \mapsto f(x)$ Abbildungsvorschrift

  Um also unmissverständlich von einer „Funktion“ zu sprechen, muss man deren Definitionsbereich, Wertebereich und Abbildungsvorschrift angeben. Sind diese drei „Objekte“ eindeutig und unmissverständlich festgelegt, so kann man zu der Funktion $f : X \to Y$ auch einfach f sagen.

- zwei Funktionen $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ heißen gleich, falls gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Bezeichnungen

Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

- Sei $A \subset X$. Dann heißt $f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}$ Bild von A.
- Sei $B \subset Y$. Dann heißt $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ Urbild von B.
- die Funktion $f : X \to Y$ heißt
  - **injektiv**, wenn gilt: aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.

    (alternativ: aus $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$)
  - **surjektiv**, wenn gilt: $f(X) = Y$.
  - **bijektiv**, falls f surjektiv und injektiv ist.

Umkehrfunktion

Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann gibt es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Die Funktion

$$g : \begin{cases} Y & \to & X \\ y & \mapsto & x \quad \text{mit } y = f(x) \end{cases}$$

heißt Umkehrfunktion von f und wird mit $f^{-1} : Y \to X$ bezeichnet.

Komposition

$f : X \to Y$ und $g : W \to Z$ seien Funktionen mit $f(X) \subset W$. Die Funktion

$$h : \begin{cases} X & \to & Z \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}$$

heißt Komposition von f und g. Sie wird bezeichnet mit: $h = g \circ f$.

Identitätsabbildung

Die Funktion

$$\mathrm{id}_X : \begin{cases} X & \to & X \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

heißt Identitätsabbildung (Identitätsfunktion, identische Abbildung).

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$

1.3 Reelle Zahlen

Wir betrachten nun eine Menge $\mathbb{R}$, die wir die Menge der reellen Zahlen nennen werden. Die Existenz dieser Menge wird nicht bewiesen, sondern es wird vorausgesetzt, dass es eine Menge $\mathbb{R}$ gibt, welche den folgenden 13 Axiomen (A1)-(A13) genügt.

Körperaxiome (A1)-(A9)

Es gibt Operationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$, die zwei Elementen $a, b \in \mathbb{R}$ ein Element $a + b \in \mathbb{R}$ bzw. $a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen mit folgenden Eigenschaften:

(A1)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	(Assoziativität)
(A2)	$a + b = b + a$	(Kommutativität)
(A3)	es gibt $0 \in \mathbb{R}$ mit $a + 0 = a$	(neutrales Element bzgl. $+$)
(A4)	zu $a \in \mathbb{R}$ gibt es $(-a) \in \mathbb{R}: \quad a + (-a) = 0$	(Inverses Element bzgl. $+$)
(A5)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	(Assoziativität)
(A6)	$a \cdot b = b \cdot a$	(Kommutativität)
(A7)	es gibt $1 \in \cancel{\mathbb{R}}\, \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $a \cdot 1 = a$	(neutrales Element bzgl. $\cdot$)
(A8)	zu $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es $a^{-1} \in \mathbb{R}: \quad a \cdot a^{-1} = 1$	(Inverses Element bzgl. $\cdot$)
(A9)	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	(Distributivität)

Konventionen:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $a - b := a + (-b)$.

Für $a \neq 0$ sei $\frac{1}{a} := a^{-1}$ und $\frac{b}{a} := a^{-1} \cdot b$.

$(a \cdot b) + (a \cdot c) = \cancel{a \cdot c + b \cdot c}\ a \cdot b + a \cdot c$.

Anordnungsaxiome (A10)-(A12)

Es existiert eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$ (die Menge der positiven reellen Zahlen) mit:

(A10) für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Beziehungen: $-a \in P$; $a \in P$; $a = 0$

(A11) Aus $a, b \in P$ folgt $a + b \in P$.

(A12) Aus $a, b \in P$ folgt $a \cdot b \in P$.

Schreibweise

Wir schreiben $a > 0$ anstelle von $a \in P$ sowie $a > b$ (oder $b < a$) anstelle von $a - b \in P$.

Konvention

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ bedeutet $a \leq b$, dass entweder $a = b$ oder $a < b$ gilt.
- Für $A \subset \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}$ bedeutet:
  - $A \leq \xi$: für alle $a \in A$ gilt $a \leq \xi$
  - $A < \xi$: für alle $a \in A$ gilt $a < \xi$
  - $\xi \leq A$: für alle $a \in A$ gilt $\xi \leq a$
  - $\xi < A$: für alle $a \in A$ gilt $\xi < a$

Definition 1.2 (obere und untere Schranken) *Sei $A \subset \mathbb{R}$.*

*a) ξ heißt **obere Schranke** von A, falls $A \leq \xi$ gilt.*

*b) ξ heißt **untere Schranke** von A, falls $\xi \leq A$ gilt.*

c) A heißt nach oben beschränkt, wenn eine obere Schranke von A existiert.

d) A heißt nach unten beschränkt, wenn eine untere Schranke von A existiert.

e) A heißt beschränkt, falls A nach oben und nach unten beschränkt ist.

Definition 1.3 (Maximum, Minimum) *Sei $A \subset \mathbb{R}$.*

a) $\eta \in \mathbb{R}$ *heißt Maximum von A, falls $A \leq \eta$ und $\eta \in A$.*

b) $\eta \in \mathbb{R}$ *heißt Minimum von A, falls $\eta \leq A$ und $\eta \in A$.*

Bezeichnung: $\max A$ bzw. $\min A$

Definition 1.4 (Supremum, Infimum) *Sei $A \subset \mathbb{R}$.*

a) $\eta \in \mathbb{R}$ *heißt Supremum (kleinste obere Schranke) von A, falls gilt:*

  i) $A \leq \eta$

  ii) aus $A \leq \xi$ *folgt* $\eta \leq \xi$

b) $\eta \in \mathbb{R}$ *heißt Infimum (größte untere Schranke) von A, falls gilt:*

  i) $\eta \leq A$

  ii) aus $\xi \leq A$ *folgt* $\xi \leq \eta$

Bezeichnung: $\sup A$ bzw. $\inf A$

Vollständigkeitsaxiom (A13)

(A13) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum. Diese reelle Zahl wird mit $\sup A$ bezeichnet.

Betrag und Dreiecksungleichung

Für $a \in \mathbb{R}$ sei $\mid a \mid = \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{falls} \quad a < 0. \end{cases}$

Rechenregeln:

i) Es gilt: $\mid a \mid = 0$ genau dann wenn $a = 0$.

ii) $\mid a \cdot b \mid = \mid a \mid \cdot \mid b \mid$

iii) $\dfrac{\mid a \mid}{\mid b \mid} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$, falls $b \neq 0$.

iv) $\mid a + b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$ (Dreiecksungleichung)

v) $\Big| \mid a \mid - \mid b \mid \Big| \leq \mid a + b \mid$ (Umgekehrte Dreiecksungleichung)

Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$$\begin{aligned}
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ heißt offenes Intervall} \\
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ heißt abgeschlossenes Intervall} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
(-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\
(-\infty,\infty) &:= \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^- := (-\infty, 0), \quad \mathbb{R}^+ := (0,\infty) \\
\text{Für } \epsilon > 0 \text{ heißt } B_\epsilon(a) &:= (a-\epsilon, a+\epsilon) \epsilon\text{-Umgebung von } a.
\end{aligned}$$

Mengensysteme

Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt Mengensystem, wenn die Elemente von $\mathfrak{M}$ selbst wieder Mengen sind.

Sei $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem:

$\bigcap\limits_{B \in \mathfrak{M}} B := \{x : x \in B \text{ für jedes } B \in \mathfrak{M}\}$

$\bigcup\limits_{B \in \mathfrak{M}} B := \{x : x \in B \text{ für mindestens ein } B \in \mathfrak{M}\}$

Index