Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Lukas Bengel

WS 2022/2023

7. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 16.12.2022, 12 Uhr

T Aufgabe 19

Überprüfen Sie, welche der rekursiv definierten Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

a) $a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n^2}{4} \quad (n \in \mathbb{N})$

b) $a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n^2}{4} \quad (n \in \mathbb{N}).$

c) $a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{2 + a_n} + 2} \quad (n \in \mathbb{N}).$

T Aufgabe 20

a) Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen. Zeigen Sie:

(i) (a_n) ist eine Teilfolge von (a_n).

(ii) Ist (b_n) eine Teilfolge von (a_n) und (c_n) eine Teilfolge von (b_n), so ist (c_n) eine Teilfolge von (a_n).

(iii) Es existieren Folgen (a_n) und (b_n), so dass (b_n) Teilfolge von (a_n) ist, aber (a_n) keine Teilfolge von (b_n) ist.

b) Finden Sie zwei Folgen (a_n) und (b_n), welche nicht identisch sind und für die gilt, dass (a_n) eine Teilfolge von (b_n) und (b_n) eine Teilfolge von (a_n) ist.

T Aufgabe 21

Seien $a \in (0, \infty)$ und $b, c > 1$. Zeigen Sie $\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$.

T Aufgabe 22

Babylonisches Wurzelziehen: Für ein $x > 0$ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_1 > 0, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist sowie $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$.

Bitte wenden!

K Aufgabe 13 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die folgende rekursiv definierte Folge konvergiert und bestimmen Sie deren Grenzwert.

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

b) Zu einer Folge (a_n) definiert man die Folge der *Cesàro-Mittel* durch

$$c_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie: Konvergiert (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{R}$, dann konvergiert auch (c_n) gegen a.

(ii) Geben Sie eine divergente Folge (a_n) an deren Folge von Cesàro-Mitteln konvergiert. Beweisen Sie die Konvergenz.

K Aufgabe 14 (6 Punkte)

a) Sei (a_n) eine unbeschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass eine Teilfolge (b_n) von (a_n) existiert, so dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$ gilt.

b) Sei (a_n) eine Folge mit der Eigenschaft, dass jede der Teilfolgen (a_{2k}), (a_{2k+1}) und (a_{3k}) konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch (a_n) konvergiert. Zeigen Sie ferner, dass die Behauptung falsch ist, wenn nur die Teilfolgen (a_{2k}), (a_{2k+1}), aber nicht (a_{3k}) als konvergent angenommen werden.