Vorlesung 2: Wie löst man ein LGS?

28.10.2022

Erinnerung 1: die allgemeine Form eines LGS

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

Erinnerung 2: Elementar-Operationen

- (I) Vertauschen von zwei Gleichungen.
- (II) Ersetzen einer Gleichung durch ihr λ-faches mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \neq 0$.
- (III) Ersetzen der i-ten Gleichung durch die Summe der i-ten und dem λ-fachen der j-ten Gleichung ($i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

Die entscheidende Beobachtung

Satz 3.4

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ eines LGS bleibt bei Elementar-Operationen unverändert.

Die wesentlichen Daten: Matrizen

Eine **Matrix** mit m **Zeilen** und n **Spalten** ist ein rechteckiges Schema von m mal n Zahlen a_{ij} der Form

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.

Merkregel für die Reihenfolge der Indizes

Zeile **z**uerst, **Sp**alte **sp**äter.

Koeffizienten eines LGS $\rightsquigarrow$ Matrix des LGS

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.
$$

Erweiterte Matrix eines LGS

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}.
$$

Ziel: Erweiterte Matrix durch elementare Zeilenoperationen vereinfachen, (möglichst viele Einträge zu 0 oder 1 machen).

Annahme: mindestens ein $a_{ik} \neq 0$.

Zuerst ein Beispiel

Zuerst ein Beispiel

Gauß Algorithmus: 1. Schritt

1.Fall: Ein Element a_{i1} in der 1. Spalte ist von Null verschieden, dann lässt sich (evt. Vertauschung (I)) erreichen, dass $a_{11} \neq 0$.

Gauß Algorithmus: 1. Schritt

1.Fall: Ein Element a_{i1} in der 1. Spalte ist von Null verschieden, dann lässt sich (evt. Vertauschung (I)) erreichen, dass $a_{11} \neq 0$.

Durch Elementaroperationen (II) und (III) kann man erreichen, dass $a_{11} = 1$ und $a_{i1} = 0$:

Gauß Algorithmus: 1. Schritt

1.Fall: Ein Element a_{i1} in der 1. Spalte ist von Null verschieden, dann lässt sich (evt. Vertauschung (I)) erreichen, dass $a_{11} \neq 0$.

Durch Elementaroperationen (II) und (III) kann man erreichen, dass $a_{11} = 1$ und $a_{i1} = 0$:
Man multipliziert dazu die 1. Zeile mit $\frac{1}{a_{11}}$ und addiert zur i-ten Zeile das $-a_{i1}$-fache der 1. Zeile $(i = 2, \ldots, m)$.

Gauß Algorithmus: 1. Schritt

1.Fall: Ein Element a_{i1} in der 1. Spalte ist von Null verschieden, dann lässt sich (evt. Vertauschung (I)) erreichen, dass $a_{11} \neq 0$.

Durch Elementaroperationen (II) und (III) kann man erreichen, dass $a_{11} = 1$ und $a_{i1} = 0$:
Man multipliziert dazu die 1. Zeile mit $\frac{1}{a_{11}}$ und addiert zur i-ten Zeile das $-a_{i1}$-fache der 1. Zeile ($i = 2, \ldots, m$).

2.Fall: Alle Elemente der 1. Spalte sind Null; ein von Null verschiedenes Element kommt in der k-ten Spalte zum ersten Mal vor.

Gauß Algorithmus: 1. Schritt

1.Fall: Ein Element a_{i1} in der 1. Spalte ist von Null verschieden, dann lässt sich (evt. Vertauschung (I)) erreichen, dass $a_{11} \neq 0$.

Durch Elementaroperationen (II) und (III) kann man erreichen, dass $a_{11} = 1$ und $a_{i1} = 0$:
Man multipliziert dazu die 1. Zeile mit $\frac{1}{a_{11}}$ und addiert zur i-ten Zeile das $-a_{i1}$-fache der 1. Zeile $(i = 2, \ldots, m)$.

2.Fall: Alle Elemente der 1. Spalte sind Null; ein von Null verschiedenes Element kommt in der k-ten Spalte zum ersten Mal vor. Man kann dann wie im 1.Fall $a_{1k} = 1$, $a_{ik} = 0 \quad (i = 2, \ldots, m)$ erreichen.

Fazit 1. Schritt

:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & & \vdots & 0 & a'_{2,k+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{m,k+1} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}.$$

Gauß Algorithmus: 2. Schritt

Ist mindestens eins der a'_{ij} mit $i \geq 2$ und $j \geq k+1$ von Null verschieden, so verfährt man wie beim 1. Schritt und erhält eine erweiterte Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}.$$

Gauß Algorithmus: 3. Schritt etc.

Gibt es noch von Null verschiedene Koeffizienten in den Zeilen $3, 4, \ldots$ (mit Ausnahme der Elemente in der letzten Spalte), so folgt in entsprechender Weise ein **3. Schritt** usw.

Gauß Algorithmus: Ende

Das Verfahren ist beendet, wenn

(a) in den letzten Zeilen nur noch Nullen stehen (bis evt. auf die Elemente in der letzten Spalte) oder

Gauß Algorithmus: Ende

Das Verfahren ist beendet, wenn

(a) in den letzten Zeilen nur noch Nullen stehen (bis evt. auf die Elemente in der letzten Spalte) oder

(b) wenn man mit der zuletzt erhaltenen Eins die letzte Spalte oder Zeile der einfachen (d.h. nicht erweiterten) Matrix erreicht hat.

Zeilen-Stufen-Form

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & *\cdots* & * & * & \cdots & * & c_1 \\
\vdots & & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & *\cdots* & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & * & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & * & \cdots & * & c_r \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_m
\end{array}\right).
$$

Info Zeilen-Stufen-Form (ZSF)

Aus der ZSF liest man ab:

Folgerung 3.8

Das zur ZSF gehörige LGS (und damit nach Satz 3.5 auch das ursprüngliche LGS) ist genau dann lösbar, wenn gilt $c_{r+1} = c_{r+2} = \ldots = c_m = 0$.

Gaußsche Normalform des LGS

Durch weitere Zeilenumformungen kann man erreichen, dass oberhalb der Einsen überall Nullen stehen:

Gaußsche Normalform des LGS

Durch weitere Zeilenumformungen kann man erreichen, dass oberhalb der Einsen überall Nullen stehen:

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & \color{red}{0} & *\cdots* & \color{red}{0} & * & \cdots & * & d_1 \\
\vdots & & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & *\cdots* & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \color{red}{0} & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & * & \cdots & * & d_r \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m
\end{array}\right).
$$

Lösungsmenge

Falls das zur GNF gehörige LGS (und damit auch das ursprüngliche LGS) lösbar ist (also $d_{r+1} = \ldots = d_m = 0$), so lassen sich alle Lösungen des LGS an der GNF ablesen.

Annahme (zur Vereinfachung):

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a''_{1,r+1} & \cdots & a''_{1,n} & d_1 \\
0 & 1 & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & & & 0 & 1 & a''_{r,r+1} & & a''_{r,n} & d_r \\
\hline
\vdots & & & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

Freie Parameter

Man wählt $t_1, \ldots, t_{n-r} \in \mathbb{R}$ als **Parameter** und setzt

$$x_{r+1} := t_1,\; x_{r+2} := t_2,\; \ldots,\; x_n := t_{n-r}.$$

Parametrisierung der Lösungsmenge

Aus der GNF erhält man dann für die restlichen r Unbekannten:

$$
\begin{array}{lcccccccl}
x_1 & = & d_1 & - & t_1\, a''_{1,r+1} & - & \cdots & - & t_{n-r}\, a''_{1,n} \\
 & \vdots & & & & & & & \\
x_r & = & d_r & - & t_1\, a''_{r,r+1} & - & \cdots & - & t_{n-r}\, a''_{r,n}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccccl}
x_{r+1} & = & & & t_1 & & & & \\
 & \vdots & & & & & \ddots & & \\
x_n & = & & & & & & & t_{n-r}
\end{array}
$$

Parametrisierung der Lösungsmenge

Aus der GNF erhält man dann für die restlichen r Unbekannten:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & = & d_1 & - & t_1\, a''_{1,r+1} & - & \cdots & - & t_{n-r}\, a''_{1,n} \\
 & \vdots & & & & & & & \\
x_r & = & d_r & - & t_1\, a''_{r,r+1} & - & \cdots & - & t_{n-r}\, a''_{r,n} \\
 & & & & & & & & \\
x_{r+1} & = & & & t_1 & & & & \\
 & \vdots & & & & & \ddots & & \\
x_n & = & & & & & & & t_{n-r}
\end{array}
$$

Durchlaufen $t_1, \ldots, t_{n-r}$ jeweils alle reellen Zahlen, so erhält man alle Lösungen des LGS.

Homogene LGS mit nichttrivialer Lösung

Folgerung 3.9

Ein *homogenes* LGS mit mehr Unbekannten als Gleichungen ($n > m$) ist immer nichttrivial lösbar (d.h. hat nicht nur die Null-Lösung).

Zusammenfassung

- Gaußscher Algorithmus zum Lösen eines LGS

Vorlesung 3: Logik und Mengenlehre

02.11.2022

Als Vorbereitung lesen Sie bitte im Skript: Seiten 18–26