Vorlesung 1: Was ist lineare Algebra?

26.10.2022

Was ist lineare Algebra?

Was ist lineare Algebra?

„Lineare Algebra ist die Theorie linearer Gleichungen.“

Identitäten

Beispiele

- Für den Umfang U eines Kreises vom Radius R gilt $U = 2\pi R$.

Identitäten

Beispiele

- Für den Umfang U eines Kreises vom Radius R gilt $U = 2\pi R$.
- Für ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen a, b und Hypothenusenlänge c gilt der Satz von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$.

Identitäten

Beispiele

- Für den Umfang U eines Kreises vom Radius R gilt $U = 2\pi R$.
- Für ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen a, b und Hypothenusenlänge c gilt der Satz von Pythagoras
  $a^2 + b^2 = c^2$.
- Für die Zahlen $0, 1, e, \pi$ und die imaginäre Einheit i gilt die Eulersche Identität $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Bestimmungsgleichungen

Beispiele

1. Die Gleichung $\boxed{x^2 = 2}$ hat

Bestimmungsgleichungen

Beispiele

1. Die Gleichung $\boxed{x^2 = 2}$ hat
   - keine Lösung in der Grundmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

Bestimmungsgleichungen

Beispiele

1. Die Gleichung $\boxed{x^2 = 2}$ hat
   - keine Lösung in der Grundmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
   - aber die Lösungen $+\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ in der Grundmenge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Bestimmungsgleichungen

Beispiele

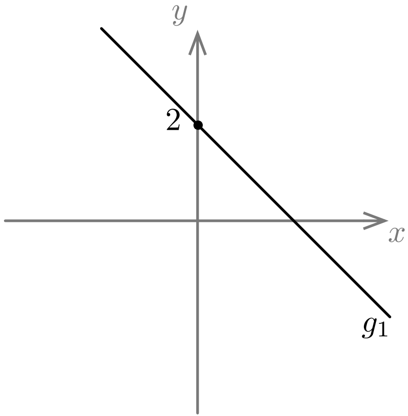
1. Die Gleichung $\boxed{x^2 = 2}$ hat
   - keine Lösung in der Grundmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
   - aber die Lösungen $+\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ in der Grundmenge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

2. $\boxed{x^2 + y^2 = 1}$ gilt genau für alle Punkte (x, y) auf dem Kreis mit Radius 1 und Zentrum $(0, 0)$ in der xy-Ebene.

Lineare Gleichungen

Beispiel: eine Gerade in der Ebene

$x + y = 2.$



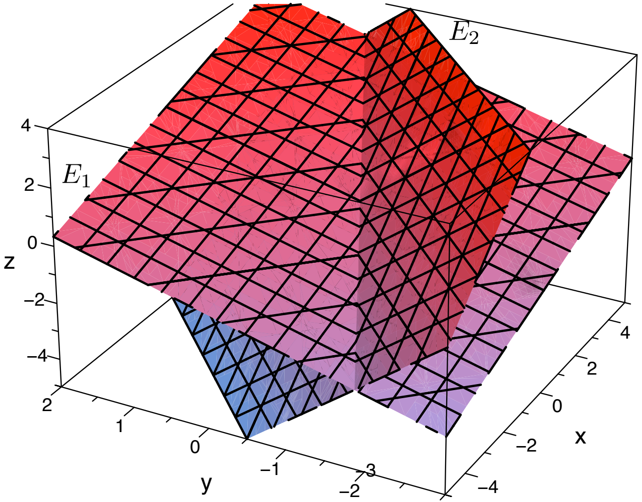
verschiedene Fälle

noch mehr Fälle

Beispiel: 3 Unbekannte: Ebenen im Raum

$$x + y + z = -6 \tag{1}$$

$$x + 2y + 3z = -10. \tag{2}$$



E_1
E_2
z
x
y
4
2
0
−2
−4
2
1
0
−1
−2
−3
4
2
0
−2
−4

Lösungsmenge $\mathcal{L}$:
alle Tripel (x, y, z), die (simultan) beide Gleichungen erfüllen

Lösungsmenge $\mathcal{L}$:
alle Tripel (x, y, z), die (simultan) beide Gleichungen erfüllen

Lösungsmenge (algebraisch) = Schnittgerade (geometrisch)

Lösungsmenge $\mathcal{L}$:
alle Tripel (x, y, z), die (simultan) beide Gleichungen erfüllen

Lösungsmenge (algebraisch) $=$ Schnittgerade (geometrisch)

Parametrisierung:

$$\mathcal{L} = \{(t-2, -2t-4, t) \mid t \text{ eine beliebige reelle Zahl}\}.$$

Herleitung der Parametrisierung

Verallgemeinerung: „Viele“ Variablen

Verallgemeinerung: „Viele“ Variablen

Die Verallgemeinerung von Ebene und Raum:

Sei n eine beliebige natürliche Zahl.
Der reelle **Standardraum** $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller reellen n-Tupel,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Die allgemeine Form eines LGS

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS)
mit m Gleichungen und n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ hat die Form:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Die allgemeine Form eines LGS

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS)
mit m Gleichungen und n Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$ hat die Form:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

gegeben: **Koeffizienten** a_{ij}, b_i (reelle Zahlen).
gesucht: **Unbestimmte** (oder **Variablen**) $x_1, \dots, x_n$

weitere Definitionen

das LGS heißt **homogen** wenn alle $b_i = 0$, sonst **inhomogen**.

Lösungsmenge des LGS $=$ Teilmenge $\mathcal{L}$ von $\mathbb{R}^n$ bstehend aus allen n-Tupeln $(x_1, \ldots, x_n)$, die alle m Gleichungen simultan erfüllen.

Fragen

Wann ist ein LGS lösbar?

Wie löst man ein (allgemeines) LGS?

Fragen

Wann ist ein LGS lösbar?

Wie löst man ein (allgemeines) LGS?

- Werkzeug: spezielle Umformungen der Gleichungen

Fragen

Wann ist ein LGS lösbar?

Wie löst man ein (allgemeines) LGS?

- Werkzeug: spezielle Umformungen der Gleichungen
- Methode: Algorithmus von Gauß

Das Werkzeug:

Elementar-Operationen für ein LGS sind:

Das Werkzeug:

Elementar-Operationen für ein LGS sind:

- (I) Vertauschen von zwei Gleichungen.

Das Werkzeug:

Elementar-Operationen für ein LGS sind:

- (I) Vertauschen von zwei Gleichungen.
- (II) Ersetzen einer Gleichung durch ihr λ-faches mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \neq 0$.

Das Werkzeug:

Elementar-Operationen für ein LGS sind:

- (I) Vertauschen von zwei Gleichungen.
- (II) Ersetzen einer Gleichung durch ihr λ-faches mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \neq 0$.
- (III) Ersetzen der i-ten Gleichung durch die Summe der i-ten und dem λ-fachen der j-ten Gleichung ($i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

Wozu sind Elementar-Operationen gut?

Satz 3.4

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ eines LGS wird bei einer bzw. endlich vielen Elementar-Operation nicht geändert.

Beweis von Satz 3.4

Beweis von Satz 3.4

Zusammenfassung

- Lineare Gleichungssysteme
- Umformungen durch Elementar-Operationen

Vorlesung 2: Wie man ein LGS systematisch lösen kann

28.10.2022

Als Vorbereitung lesen Sie bitte im Skript: Seiten 10–17