Vorlesung 12: Lineare Hüllen, Basen, Dimension.

02.12.2022

Was ist eine lineare Hülle?

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subset V$ eine beliebige Teilmenge.

Was ist eine lineare Hülle?

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subset V$ eine beliebige Teilmenge.

Die **lineare Hülle** oder der **Spann** $[M]$ von M ist für $M \neq \emptyset$ die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus M.

Was ist eine lineare Hülle?

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subset V$ eine beliebige Teilmenge.

Die **lineare Hülle** oder der **Spann** $[M]$ von M ist für $M \neq \emptyset$ die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus M.

Für $M = \emptyset$ setzen wir $[\emptyset] = \{0\}$.

Was ist eine lineare Hülle?

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subset V$ eine beliebige Teilmenge.

Die **lineare Hülle** oder der **Spann** $[M]$ von M ist für $M \neq \emptyset$ die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus M.

Für $M = \emptyset$ setzen wir $[\emptyset] = \{0\}$.

Ist $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$, so schreibt man auch $[v_1, \ldots, v_k]$ statt $[\{v_1, \ldots, v_k\}]$.

Beispiele

- Die lineare Hülle der Vektoren $v_1 = (1, 2)$ und $v_2 = (0, 1)$ in $\mathbb{R}^2$ ist der gesamte $\mathbb{R}^2$

Beispiele

- Die lineare Hülle der Vektoren $v_1 = (1, 2)$ und $v_2 = (0, 1)$ in $\mathbb{R}^2$ ist der gesamte $\mathbb{R}^2$
- Die lineare Hülle $[X^0, X^1, X^2, X^3]$ ist die Menge der Polynome vom Grad kleiner gleich 3. Die Menge *aller* Polynome $\mathbb{K}[X]$ ist die lineare Hülle *aller* Monome $X^0, X^1, X^2, \dots$.

Allgemeine Eigenschaften

Gegeben: $V =$ Vektorraum, $M \subset V$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} M \quad &\subset \quad [M] \\ M_1 \subset M_2 \quad &\Longrightarrow \quad [M_1] \subset [M_2]. \end{aligned}$$

Erzeugende Mengen

Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

Erzeugende Mengen

Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

Eine Menge $M \subset V$ mit $[M] = V$ heißt **erzeugende Menge** oder **Erzeugendensystem** von V.

Erzeugende Mengen

Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

Eine Menge $M \subset V$ mit $[M] = V$ heißt **erzeugende Menge** oder **Erzeugendensystem** von V.

Eine erzeugende Menge M von V heißt **minimal**, wenn es keine echte Teilmenge M' von M gibt, für die $[M'] = V$ gilt.

Beispiel

Die Menge $M = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit
$v_1 = (1,2)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (0,2)$ ist eine erzeugende Menge des $\mathbb{R}^2$, denn jedes $v \in \mathbb{R}^2$ ist als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 darstellbar.

Beispiel

Die Menge $M = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit
$v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (0, 2)$ ist eine erzeugende Menge des $\mathbb{R}^2$, denn jedes $v \in \mathbb{R}^2$ ist als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 darstellbar.

M ist nicht minimal, denn für die echten Teilmengen
$M' = \{v_1,\ v_2\}$ und $M'' = \{v_1,\ v_3\}$ gilt ebenfalls $[M'] = [M''] = \mathbb{R}^2$.

Beispiel

Die Menge $M = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit
$v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (0, 2)$ ist eine erzeugende Menge des $\mathbb{R}^2$, denn jedes $v \in \mathbb{R}^2$ ist als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 darstellbar.

M ist nicht minimal, denn für die echten Teilmengen
$M' = \{v_1, v_2\}$ und $M'' = \{v_1, v_3\}$ gilt ebenfalls $[M'] = [M''] = \mathbb{R}^2$.

Die Mengen M' und M'' sind minimale erzeugende Mengen von $\mathbb{R}^2$.

Maximal linear unabhängig

Eine linear unabhängige Menge $B \subset V$ heißt **maximal**, wenn jede linear unabhängige Teilmenge $B \subset B' \subset V$ mit B übereinstimmt.

Basis

Eine Teilmenge $B \subset V$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt eine **Basis**, wenn B linear unabhängig und erzeugend ist.

Beispiel: Standardbasis

$B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ist die **Standardbasis** des $\mathbb{K}^n$.

Beispiel

Eine weitere Basis des $\mathbb{K}^n$ ist $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mit

$$\begin{aligned}
b_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots, 0) \\
b_2 &= (1, 1, 0, 0, \ldots, 0) \\
b_3 &= (1, 1, 1, 0, \ldots, 0) \\
&\vdots \\
b_n &= (1, 1, 1, 1, \ldots, 1):
\end{aligned}$$

Beispiel

Eine weitere Basis des $\mathbb{K}^n$ ist $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ mit

$$\begin{aligned} b_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots, 0) \\ b_2 &= (1, 1, 0, 0, \dots, 0) \\ b_3 &= (1, 1, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ b_n &= (1, 1, 1, 1, \dots, 1) : \end{aligned}$$

B ist erzeugend:
man kann die Standardbasisvektoren $e_1, \dots, e_n$ alle durch die b_i linear kombinieren: $e_1 = b_1,\ e_2 = b_2 - b_1,\ \dots,\ e_n = b_n - b_{n-1}$;

Beispiel

Eine weitere Basis des $\mathbb{K}^n$ ist $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ mit

$$\begin{aligned} b_1 &= (1,0,0,0,\dots,0) \\ b_2 &= (1,1,0,0,\dots,0) \\ b_3 &= (1,1,1,0,\dots,0) \\ &\vdots \\ b_n &= (1,1,1,1,\dots,1): \end{aligned}$$

B ist erzeugend:
man kann die Standardbasisvektoren $e_1, \dots, e_n$ alle durch die b_i linear kombinieren: $e_1 = b_1,\ e_2 = b_2 - b_1,\ \dots,\ e_n = b_n - b_{n-1}$;
somit kann man auch alle Vektoren in $\mathbb{K}^n$ aus Vektoren in B linear kombinieren.

Beispiel

Eine weitere Basis des $\mathbb{K}^n$ ist $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mit

$$\begin{aligned} b_1 &= (1,0,0,0,\ldots,0) \\ b_2 &= (1,1,0,0,\ldots,0) \\ b_3 &= (1,1,1,0,\ldots,0) \\ &\vdots \\ b_n &= (1,1,1,1,\ldots,1): \end{aligned}$$

B ist erzeugend:
man kann die Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ alle durch die b_i linear kombinieren: $e_1 = b_1,\ e_2 = b_2 - b_1,\ \ldots,\ e_n = b_n - b_{n-1}$; somit kann man auch alle Vektoren in $\mathbb{K}^n$ aus Vektoren in B linear kombinieren.

B ist auch linear unabhängig.

Beispiel

Analog: Im Vektorraum $\mathbb{K}[X]$ aller Polynome über $\mathbb{K}$ ist die Menge aller Monome $B = \{m_i := X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ eine (unendliche) Basis.

Beispiel

Analog: Im Vektorraum $\mathbb{K}[X]$ aller Polynome über $\mathbb{K}$ ist die Menge aller Monome $B = \{m_i := X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ eine (unendliche) Basis.

Der Nullraum $\{0\}$ hat die Basis $B = \emptyset$.

Satz 7.3: Basis = minimal erzeugend

Eine Teilmenge B eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist eine Basis genau dann, wenn B eine minimale erzeugende Menge ist.

Satz 7.4: Basis = maximal linear unabhängig

Eine Teilmenge B eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist eine Basis genau dann, wenn B maximal linear unabhängig ist.

Satz 7.5: Basisergänzungssatz

Es sei V ein *endlich* erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $V \neq \{0\}$. Weiter sei $E \subset V$ ein endliches Erzeugendensystem von V und $L \subset E$ eine linear unabhängige Menge. Dann gibt es eine Basis B von V mit $L \subset B \subset E$.

Beweis

Folgerung 7.6

Ist V ein endlich erzeugter Vektorraum und $V \neq \{0\}$, so hat V eine endliche Basis.

Beweis

E nicht endlich ?

Der Basisergänzungssatz gilt auch, wenn E unendlich ist.

E nicht endlich ?

Der Basisergänzungssatz gilt auch, wenn E unendlich ist.

Der Beweis ist komplizierter, man benötigt das Auswahlaxiom (bzw. das „Lemma von Zorn").

Satz 7.8: Eine Basis existiert immer

Jeder Vektorraum V hat eine Basis.

Bemerkung

Die nach dem Basisergänzungssatz mögliche Ergänzung zu einer Basis ist nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel

Satz 7.10: Anzahl Basiselemente ist immer gleich

Hat ein Vektorraum V eine endliche Basis B mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen, so hat jede Basis B' von V ebenfalls n Elemente.

Beweis

Dimension

Ein Vektorraum mit einer endlichen Basis heißt **endlich dimensional**.

Dimension

Ein Vektorraum mit einer endlichen Basis heißt **endlich dimensional**.

Die für alle Basen von V übereinstimmende Anzahl $n \in \mathbb{N}$ der Elemente heißt **Dimension** von V.
Schreibweise: $\dim V = n$.

Dimension

Ein Vektorraum mit einer endlichen Basis heißt **endlich dimensional**.

Die für alle Basen von V übereinstimmende Anzahl $n \in \mathbb{N}$ der Elemente heißt **Dimension** von V.
Schreibweise: $\dim V = n$.

Ein Vektorraum, der keine endliche Basis hat, heißt **unendlich dimensional**.

Beispiele

- $\dim \mathbb{K}^n = n$

Beispiele

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}[X] = \infty$

Beispiele

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}[X] = \infty$
- Der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner gleich g hat die Dimension $g + 1$.

Satz 7.13

Für einen n-dimensionalen Vektorraum V gilt:

(a) $n+1$ Vektoren aus V sind immer linear abhängig.

(b) n linear unabhängige Vektoren aus V bilden immer eine Basis von V.

Beweis

Vorlesung 13: Basisdarstellung und Basiswechsel

7.12.2021

Als Vorbereitung lesen Sie bitte im Skript: Seiten 83-87