Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2022/23
Prof. Dr. Alexander Lytchak

Lineare Algebra 1

Übungsblatt 5

Die Abgabe ist bis zum **05.12.2022 um 12 Uhr** möglich.
Bitte beachten Sie die Vorgaben zur Abgabe auf **Merkblatt 1** im Ilias.

Aufgabe 1 (2+8 Punkte)
Wir betrachten

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, a+d \in \mathbb{R} \right\}$$

zusammen mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation auf $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

a) Zeigen Sie, dass V kein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

b) Wir schränken nun die Menge der Skalare auf $\mathbb{R}$ ein. Zeigen Sie, dass V dann ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)
Entscheiden Sie, ob es möglich ist, den Nullvektor nichttrivial als Linearkombination der folgenden Vektoren darzustellen, und beweisen Sie Ihre Antwort:

a) Die Vektoren $(\tilde{3},\tilde{2},\tilde{1}), (\tilde{4},\tilde{1},\tilde{2}), (\tilde{1},\tilde{2},\tilde{4}) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$.

b) Die Vektoren $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3
Sei M eine nichtleere Menge. Wir betrachten $\mathbb{R}^M$ zusammen mit der üblichen punktweisen Addition und der punktweisen Multiplikation definiert durch:

$$(f\cdot g)(x) := f(x)g(x) \quad ,\forall f,g \in \mathbb{R}^M, x \in M.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^M$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

b) Sei $f \in \mathbb{R}^M$ mit $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Nullteiler ist, wenn f kein multiplikatives Inverses besitzt.