*K*9 (*a*)

geg.: $\varepsilon>0,\ f_\varepsilon\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \dfrac{1}{\varepsilon+x^2}$

z.z.: $f_\varepsilon\in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists L>0\ \forall x,y\in\mathbb{R}\colon \left|f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(y)\right|\leqslant L|x-y|$

B: $\left|f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(y)\right| = \left|\dfrac{1}{\varepsilon+x^2}-\dfrac{1}{\varepsilon+y^2}\right| = \left|\dfrac{\varepsilon+y^2-(\varepsilon+x^2)}{(\varepsilon+x^2)(\varepsilon+y^2)}\right| = \left|\dfrac{y^2-x^2}{(\varepsilon+x^2)(\varepsilon+y^2)}\right|$

$= \left|\dfrac{(y-x)(y+x)}{(\varepsilon+x^2)(\varepsilon+y^2)}\right| \underset{x^2,y^2>0}{\overset{\varepsilon>0}{=}} \dfrac{|y-x||y+x|}{(\varepsilon+x^2)(\varepsilon+y^2)}$

$|x+y| \overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leqslant} |x|+|y| \leqslant \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{x^2+\varepsilon}+\sqrt{y^2+\varepsilon} \leqslant (\varepsilon+x^2)+(\varepsilon+y^2)$

$\Rightarrow \left|f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(y)\right| \leqslant |y-x|\left(\dfrac{(\varepsilon+x^2)+(\varepsilon+y^2)}{(\varepsilon+x^2)(\varepsilon+y^2)}\right) = |y-x|\left(\dfrac{1}{\varepsilon+y^2}+\dfrac{1}{\varepsilon+x^2}\right) \overset{|y-x|=|x-y|}{\leqslant} \underbrace{2}_{\mathrm{L}_{f_\varepsilon}}|x-y|$

mit $|x|=\sqrt{x^2}<\sqrt{x^2+\varepsilon}<x^2+\varepsilon$ ■

geg.: $f\colon (0;+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$

z.z.: $f\notin \mathrm{Lip}((0;+\infty)) \Leftrightarrow \forall L>0\ \exists x,y\in(0;+\infty)\colon |f(x)-f(y)|\geqslant L|x-y|$

B (durch Widerspruch): Angenommen, $f\in\mathrm{Lip}((0;+\infty))$

$\Rightarrow \exists L>0\ \forall x,y\in(0;+\infty)\colon |f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$

$|f(x)-f(y)| = \left|\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right| = \left|\dfrac{y^2-x^2}{x^2y^2}\right| = \left|\dfrac{(y-x)(y+x)}{x^2y^2}\right| \overset{x^2,y^2>0}{=} |y-x|\cdot\dfrac{|x+y|}{x^2y^2} \leqslant L\cdot|y-x|$

$\overset{y\neq x}{\Leftrightarrow} L\geqslant \dfrac{|x+y|}{x^2y^2} = \left|\dfrac{x+y}{x^2y^2}\right| \overset{y=\frac{x}{2}}{\geqslant} \left|\dfrac{\frac{3}{2}x}{x^2\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right| = \left|\dfrac{3x\cdot 4}{2x^2x^2}\right| = \left|\dfrac{6}{x^3}\right| \overset{x>0}{=} \dfrac{6}{x}$

$\Leftrightarrow x\geqslant \dfrac{6}{L}>0 \Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{6}{L};+\infty\right) \Rightarrow x\in\left(0;\dfrac{6}{L}\right)$?! zu $x\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow f\notin\mathrm{Lip}((0;+\infty))$ ■

K 9 (*b*)

geg.: $f,g\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}\in\mathrm{Lip}(D)$

$\overset{\text{Lemma 3.10}}{\Rightarrow} |f-g|\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto |f(x)-g(x)|\in\mathrm{Lip}(D)$

$\Leftrightarrow \exists L_f>0\ \forall x,y\in D\colon |f(x)-f(y)|\leqslant L_f|x-y|$

$\Leftrightarrow \exists L_g>0\ \forall x,y\in D\colon |g(x)-g(y)|\leqslant L_g|x-y|$

$\Leftrightarrow \exists L_{f-g}>0\ \forall x,y\in D\colon ||f(x)-g(x)|-|f(y)-g(y)||\leqslant L_{f-g}|x-y|$

$\max\{f,g\}\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\max\{f(x),g(x)\}$

$\min\{f,g\}\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\min\{f(x),g(x)\}$

z.z.: $\max\{f,g\},\min\{f,g\}\in\mathrm{Lip}(D)$

B: $\max\{f,g\}\in\mathrm{Lip}(D) \Leftrightarrow \exists L_{\max\{f,g\}}>0\ \forall x,y\in D\colon |\max\{f,g\}(x)-\max\{f,g\}(y)|\leqslant L_{\max\{f,g\}}|x-y|$:

$(\max\{f,g\})(x) = \max\{f(x),g(x)\} = \dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$

$|(\max\{f,g\})(x)-(\max\{f,g\})(y)| = \left|\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}-\dfrac{f(y)+g(y)+|f(y)-g(y)|}{2}\right|$

$= \left|\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|-(f(y)+g(y)+|f(y)-g(y)|)}{2}\right| = \left|\dfrac{f(x)-f(y)+g(x)-g(y)+|f(x)-g(x)|-|f(y)-g(y)|}{2}\right|$

$= \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{2}+\dfrac{g(x)-g(y)}{2}+\dfrac{|f(x)-g(x)|-|f(y)-g(y)|}{2}\right|$

$\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leqslant} \dfrac{1}{2}|f(x)-f(y)|+\dfrac{1}{2}|g(x)-g(y)|+\dfrac{1}{2}||f(x)-g(x)|-|f(y)-g(y)||$

$\leqslant \dfrac{L_f}{2}\cdot|x-y|+\dfrac{L_g}{2}\cdot|x-y|+\dfrac{L_{f-g}}{2}\cdot|x-y|$

$= \left(\dfrac{L_f+L_g+L_{f-g}}{2}\right)\cdot|x-y| = L_{\max\{f,g\}}\cdot|x-y|$

$\Rightarrow \max\{f,g\}\in\mathrm{Lip}(D)$ ■

$\min\{f,g\}\in\mathrm{Lip}(D) \Leftrightarrow \exists L_{\min\{f,g\}}>0\ \forall x,y\in D\colon |\min\{f,g\}(x)-\min\{f,g\}(y)|\leqslant L_{\min\{f,g\}}|x-y|$:

$(\min\{f,g\})(x) = \min\{f(x),g(x)\} = \dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$

$|(\min\{f,g\})(x)-(\min\{f,g\})(y)| = \left|\dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}-\dfrac{f(y)+g(y)-|f(y)-g(y)|}{2}\right|$

$= \left|\dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|-(f(y)+g(y)-|f(y)-g(y)|)}{2}\right| = \left|\dfrac{f(x)-f(y)+g(x)-g(y)-|f(x)-g(x)|+|f(y)-g(y)|}{2}\right|$

$= \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{2}+\dfrac{g(x)-g(y)}{2}+\dfrac{|f(y)-g(y)|-|f(x)-g(x)|}{2}\right|$

$\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leqslant} \dfrac{1}{2}|f(x)-f(y)|+\dfrac{1}{2}|g(x)-g(y)|+\dfrac{1}{2}||f(y)-g(y)|-|f(x)-g(x)||$

$\leqslant \frac{L_f}{2} \cdot |x-y| + \frac{L_g}{2} \cdot |x-y| + \frac{L_{f-g}}{2} \cdot |y-x|$

$\overset{|y-x|=|x-y|}{=} \leqslant \frac{L_f}{2} \cdot |x-y| + \frac{L_g}{2} \cdot |x-y| + \frac{L_{f-g}}{2} \cdot |x-y|$

$= \left(\frac{L_f + L_g + L_{f-g}}{2} \right) \cdot |x-y| = L_{\min\{f,g\}} \cdot |x-y|$

$\Rightarrow \min\{f,g\} \in \mathrm{Lip}(D)$ ■

$K\ 10\ (a)$

geg.: $f : [0;+\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$

z.z.: $f \in H^{1/2}([0;+\infty)) \Leftrightarrow \exists C > 0\ \forall x,y \in [0;+\infty) : |f(x) - f(y)| \leqslant C \cdot |x-y|^{\alpha}$ (mit $\alpha \in \mathbb{Q}^+$)

B: $|f(x)-f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}\,| = \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}||\sqrt{x}+\sqrt{y}|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} \overset{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}{=} \frac{|x-y|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt{|x-y|} \cdot \frac{\sqrt{|x-y|}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \overset{\sqrt{|x-y|} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}}{\leqslant} 1 \cdot \sqrt{|x-y|} = 1 \cdot |x-y|^{1/2} = C \cdot |x-y|^{1/2}$

$\Rightarrow f \in H^{1/2}([0;+\infty))$ ■

$K\ 10\ (b)$

geg.: D beschraenkt, $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$

z.z.: $f \in H^{\beta}(D) \Rightarrow f \in H^{\alpha}(D)$

B: D beschraenkt $\Leftrightarrow \exists M > 0\ \forall x \in D : |x| \leqslant M$

$f \in H^{\beta}(D)$:

$|f(x)-f(y)| \leqslant C \cdot |x-y|^{\beta} \overset{\beta > \alpha}{=} C \cdot |x-y|^{\beta-\alpha} |x-y|^{\alpha}$

$\overset{\text{Dreicksungl.}}{\leqslant} C(|x|+|y|)^{\beta-\alpha} |x-y|^{\alpha}$

$\leqslant \underbrace{C(2M)^{\beta-\alpha}}_{\text{konstant}} |x-y|^{\alpha}$

$\Rightarrow f \in H^{\alpha}(D)$ ■

$K\ 10\ (c)$

geg.: Intervall D, $\alpha > 1$, $f \in H^{\alpha}(D)$

z.z.: f ist konstant auf D

B: $f \in H^{\alpha}(D) \Leftrightarrow \exists C > 0\ \forall x,y \in D : |f(x)-f(y)| \leqslant C \cdot |x-y|^{\alpha}$ (mit $\alpha > 1$)

Sei ohne Verlust der Allgemeinheit $x < y$.

Sei nun $x_0 := x$; $x_1 := x + \frac{y-x}{n}$; $x_2 := x + 2\frac{y-x}{n}$; ... ; $x_n := x + n\frac{y-x}{n} = y$

Es gilt: $x_{i+1} - x_i = \frac{y-x}{n}$

Es gilt weiterhin die Aufspaltung der Differenz $|f(x)-f(y)|$ in Summation von Teildifferenzen $\left|f(x_{i+1}) - f(x_i)\right|$:

$|f(x)-f(y)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left|f(x_{i+1}) - f(x_i)\right|$

$\overset{f \in H^{\alpha}(D)}{\leqslant} \sum_{i=0}^{n-1} \left|x_{i+1} - x_i\right|^{\alpha} = \sum_{i=0}^{n-1} \left|\frac{y-x}{n}\right|^{\alpha} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{y-x}{n}\right)^{\alpha} = n \cdot \left(\frac{y-x}{n}\right)^{\alpha} = \frac{(x-y)^{\alpha}}{n^{\alpha-1}} \underset{\infty-\text{kleiner Abstand zwischen } x_{i+1} \text{ und } x_i}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0$

$\overset{n \to \infty \Leftrightarrow \text{Betrachte das Intervall D vollkommen}}{\Rightarrow} |f(x)-f(y)| \leqslant 0 \Rightarrow |f(x)-f(y)| = 0 \quad (x < y)$

$\Rightarrow$ Damit ist f konstant auf D. ■

!!!SCHOENES WOCHENENDE!!!