Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Lukas Bengel

WS 2022/2023

4. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 25.11.2022, 12 Uhr

T Aufgabe 10
Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{k+1}\binom{n}{k}$

T Aufgabe 11

a) Seien $0 < a < b$, sowie $c < d$ und $g : \mathbb{R} \to [a, b]$, $f : \mathbb{R} \to [c, d]$ surjektive Funktionen. Zeigen Sie, dass $\frac{f}{g}$ beschränkt ist und bestimmen Sie $\inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{f}{g}$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{f}{g}$.

b) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beschränkt, so ist $\frac{1}{f}$ beschränkt.

(ii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$f := \frac{h^2 + (g \circ h)^5}{1 + h^4}$$

beschränkt.

T Aufgabe 12
Sei

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{N} : x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0\} \subset \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{A}$ abzählbar ist.

Bitte wenden!

K Aufgabe 7 (6 Punkte)

a) (i) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \sum_{i=0}^{n} x^i$$

(ii) Berechnen Sie (ohne Zuhilfenahme eines Computers, Taschenrechners o.ä.) die folgenden Summen

$$\sum_{l=1}^{100} 3^{4-l} 2^l, \qquad \sum_{k=1}^{9999} \frac{1}{k(k+1)}.$$

b) Berechnen Sie die folgenden Summen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$$

K Aufgabe 8 (6 Punkte)

a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom von Grad n.

(i) Zeigen Sie, dass P nicht beschränkt ist.

(ii) Sie nun $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass P nach unten beschränkt ist.

b) Sei $n \geq 2$ und $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie:

$$\text{Ist } \xi \in \mathbb{R} \text{ Nullstelle von } P, \text{ so gilt } |\xi| \leq 1 \text{ oder } |\xi + a_{n-1}| \leq \sum_{i=0}^{n-2} |a_i|.$$

Was können Sie hieraus über die Lage der Nullstellen von $P(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1$ folgern, ohne die Nullstellen explizit zu berechnen?

Hinweis zu b): Setzen Sie ξ in P ein und isolieren Sie den Term $\xi + a_{n-1}$.

Die Anmeldung für die Klausur Analysis 1 am **21. März 2023** um 8:00 Uhr ist nun offen. Weitere Informationen dazu finden Sie unter `https://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de` oder durch Scannen des QR-Codes.