Vorlesung 13: Wozu sind Basen gut? Basenwechsel.

07.12.2022

Erinnerung

Erinnerung

Eine Teilmenge B eines Vektorraumes V heißt **Basis** von V, wenn sie erzeugend und linear unabhängig ist.

Erinnerung

Eine Teilmenge B eines Vektorraumes V heißt **Basis** von V, wenn sie erzeugend und linear unabhängig ist.

Satz 7.8: Eine Basis existiert immer

Jeder Vektorraum V hat eine Basis.

Erinnerung

Satz 7.3: Basis = minimal erzeugend

Eine Teilmenge B eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist eine Basis genau dann, wenn B ein minimales Erzeugendensystem ist.

Erinnerung

Satz 7.3: Basis = minimal erzeugend

Eine Teilmenge B eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist eine Basis genau dann, wenn B ein minimales Erzeugendensystem ist.

Satz 7.4: Basis = maximal linear unabhängig

Eine Teilmenge B eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist eine Basis genau dann, wenn B maximal linear unabhängig ist.

Erinnerung

Ist $\dim(V) = n$, so ist jede Teilmenge $\{v_1, ..., v_n\}$, die *entweder* linear unabhängig *oder* erzeugend ist, eine Basis von V.

Darstellung bezüglich einer Basis

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V.

Darstellung bezüglich einer Basis

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V.

B ist erzeugend, also ist jedes $v \in V$ eine Linearkombonation

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i,$$

mit $v_1, ..., v_n \in \mathbb{K}$.

Eindeutige Basisdarstellung

Satz 7.15

Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Sei $v \in V$ beliebig. Dann ist die Darstellung von v als Linearkombination der Vektoren b_i eindeutig.

Bezeichnungen

Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V und $v \in V$ ein beliebiger Vektor mit der eindeutigen **Basisdarstellung**

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i .$$

Bezeichnungen

Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V und $v \in V$ ein beliebiger Vektor mit der eindeutigen **Basisdarstellung**

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i .$$

Die Koeffizienten $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}$ heißen **Komponenten** von v in der Basis B.

Bezeichnungen

Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V und $v \in V$ ein beliebiger Vektor mit der eindeutigen **Basisdarstellung**

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i .$$

Die Koeffizienten $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}$ heißen **Komponenten** von v in der Basis B.

Das n-Tupel $\Theta_B(v) := (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ heißt **Komponentenvektor** von v bezüglich B.

Technisches

Wir identifizieren die Komponentenvektoren $\Theta_B(v) = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ im Folgenden oft mit $n \times 1$-Matrizen, d.h. wir schreiben auch

$$\Theta_B(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Technisches

Wir identifizieren die Komponentenvektoren $\Theta_B(v) = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ im Folgenden oft mit $n \times 1$-Matrizen, d.h. wir schreiben auch

$$\Theta_B(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Allgemein: Elemente von $\mathbb{K}^n$ werden oft mit **Spaltenvektoren**, d.h. $n \times 1$-Matrizen identifiziert.

Wichtige Bemerkungen

Die Abbildung $\Theta_B : V \to \mathbb{K}^n$ ist eine Bijektion!

Wichtige Bemerkungen

Die Abbildung $\Theta_B : V \to \mathbb{K}^n$ ist eine Bijektion!

Die Wahl der Basis B in V versieht V mit "Koordinaten".

Wichtige Bemerkungen

Die Abbildung $\Theta_B : V \to \mathbb{K}^n$ ist eine Bijektion!

Die Wahl der Basis B in V versieht V mit "Koordinaten".

Die Koordinaten hängen von der Wahl von B ab!

Verschiedene Basen

Gegeben: n-dimensionaler Vektorraum V und zwei Basen von V

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\} \quad \text{und} \quad \overline{B} = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n\}.$$

Verschiedene Basen

Gegeben: n-dimensionaler Vektorraum V und zwei Basen von V

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\} \quad \text{und} \quad \overline{B} = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n\}.$$

Gesucht: Eine Beziehung zwischen den durch die Basis B und durch die Basis $\bar{B}$ gegebenen "Koordinaten".

Verschiedene Basen

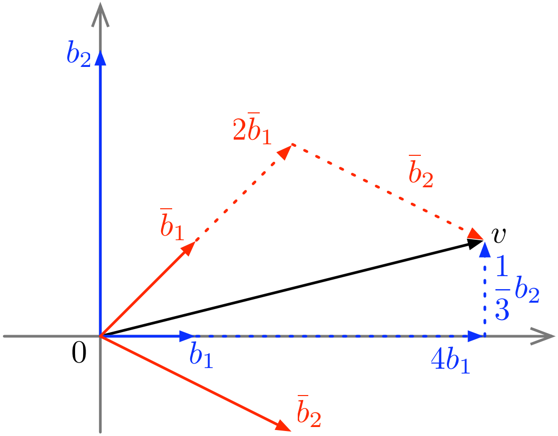
Gegeben: n-dimensionaler Vektorraum V und zwei Basen von V

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\} \quad \text{und} \quad \overline{B} = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n\}.$$

Gesucht: Eine Beziehung zwischen den durch die Basis B und durch die Basis $\bar{B}$ gegebenen "Koordinaten".

Also eine Beziehung zwischen $\Theta_B(v)$ und $\Theta_{\overline{B}}(v)$.

Verschiedene Basen: ein Beispiel



Beispiel

Allgemeine Lösung

Jedes b_i lässt sich eindeutig als Linearkombination der $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ darstellen:

Allgemeine Lösung

Jedes b_i lässt sich eindeutig als Linearkombination der $\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ darstellen:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}\,\overline{b}_1 + a_{21}\,\overline{b}_2 + \cdots + a_{n1}\,\overline{b}_n \\ b_2 &= a_{12}\,\overline{b}_1 + a_{22}\,\overline{b}_2 + \cdots + a_{n2}\,\overline{b}_n \\ &\vdots \\ b_n &= a_{1n}\,\overline{b}_1 + a_{2n}\,\overline{b}_2 + \cdots + a_{nn}\,\overline{b}_n. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung

Jedes b_i lässt sich eindeutig als Linearkombination der $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ darstellen:

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_{11}\,\overline{b}_1 + a_{21}\,\overline{b}_2 + \cdots + a_{n1}\,\overline{b}_n \\
b_2 &= a_{12}\,\overline{b}_1 + a_{22}\,\overline{b}_2 + \cdots + a_{n2}\,\overline{b}_n \\
&\vdots \\
b_n &= a_{1n}\,\overline{b}_1 + a_{2n}\,\overline{b}_2 + \cdots + a_{nn}\,\overline{b}_n.
\end{aligned}$$

In Kurzform:

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\,\overline{b}_j, \qquad i = 1, \ldots, n; \quad a_{ji} \in \mathbb{K}.$$

Daten: Basiswechsel $B \rightsquigarrow \overline{B}$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

Daten: Basiswechsel $B \rightsquigarrow \overline{B}$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

Die Matrix A heißt **Übergangsmatrix** des Basiswechsels von B nach $\overline{B}$.

Daten: Basiswechsel $B \rightsquigarrow \overline{B}$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n},$$

Die Matrix A heißt **Übergangsmatrix** des Basiswechsels von B nach $\overline{B}$.

Merkregel: Die zur Linearkombination von b_i aus den $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n$ benötigten Koeffizienten $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$ stehen in der i-ten Spalte von A.

Umkehrung: Basiswechsel $\overline{B} \rightsquigarrow B$

Jedes $\bar{b}_j$ hat eine eindeutige Basisdarstellung bezüglich B:

$$\bar{b}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, b_i, \qquad j = 1, \ldots, n; \quad c_{ij} \in \mathbb{K}$$

mit der zum Basiswechsel von $\overline{B}$ nach B gehörigen Übergangsmatrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Sprechweise

„alte“ Basis: $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, „neue“ Basis: $\overline{B} = \{\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_n\}$

Sprechweise

„alte“ Basis: $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, „neue“ Basis: $\overline{B} = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n\}$

Basiswechsel von der alten Basis B zur neuen Basis $\overline{B}$ ist gegeben durch

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\,\overline{b}_j, \qquad i = 1, \ldots, n; \quad a_{ji} \in \mathbb{K}.$$

und von der neuen Basis $\overline{B}$ zur alten Basis B durch

$$\overline{b}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\,b_i, \qquad j = 1, \ldots, n; \quad c_{ij} \in \mathbb{K}$$

Satz 7.19: Übergangsmatrizen eines Basiswechsels

Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B, \overline{B}$ zwei Basen von V.
Dann ist die Übergangsmatrix C des Basiswechsels von $\overline{B}$ nach B die Inverse der Übergangsmatrix A des Basiswechsels von B nach $\overline{B}$, d.h. es gilt $C = A^{-1}$.

Beweis

Satz 7.20: Komponentenvektoren eines Basiswechsels

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B, \overline{B}$ Basen von V.
Für $v \in V$ seien $\Theta_B(v)$ und $\Theta_{\overline{B}}(v)$ die Komponentenvektoren bezüglich B bzw. $\overline{B}$.
Dann gilt in Matrixschreibweise

$$\Theta_{\overline{B}}(v) = A \cdot \Theta_B(v) \quad \text{und} \quad \Theta_B(v) = A^{-1} \cdot \Theta_{\overline{B}}(v).$$

Dabei ist A die Übergangsmatrix des Basiswechsels von B nach $\overline{B}$.

Beweis

Vorlesung 15: Untervektorräume

9.12.2021

Als Vorbereitung lesen Sie bitte im Skript: Seiten 88-95