Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Lukas Bengel

WS 2022/2023

2. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Abgabe bis Freitag, 11.11.2022, 12 Uhr

T Aufgabe 4

Bestimmen Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern Sie existieren) der folgenden Mengen:

a) $A = \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} : x, y \in \mathbb{R} \text{ und } x, y \geq 1 \right\}$

b) $B = \left\{ \frac{|x|}{1 + |x|} : \ x \in \mathbb{R} \right\}$.

T Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

a) $\frac{2x+3}{|4x-6|} > 2$

b) $|x+2| > |x-3|$.

c) $\frac{ax - a^2}{x - b} > b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$.

T Aufgabe 6

Beweisen Sie die folgenden Gleichungen für Mengen A, B, C:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
c) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$
d) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

Bitte wenden!

K Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der folgenden Mengen:

(i) $A = \left\{ \varepsilon - \frac{1}{x} : \varepsilon \in \{-1, 1\}, x \geq 1 \right\}$

(ii) $B = \left\{ \frac{|x|x}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}$.

b) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen gelten:

(i) $\left| \frac{x+4}{x-2} \right| > x$ (ii) $|x+1| > \frac{6}{x}$.

K Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei X eine Menge und sei $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem bestehend aus Teilmengen von X. Zeigen Sie:

a) $\Big(\bigcup_{A \in \mathfrak{M}} A \Big)^{\mathrm{C}} = \bigcap_{A \in \mathfrak{M}} A^{\mathrm{C}}$

b) $\Big(\bigcap_{A \in \mathfrak{M}} A \Big)^{\mathrm{C}} = \bigcup_{A \in \mathfrak{M}} A^{\mathrm{C}}$

Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie:

c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Hinweis: Für eine Teilmenge $A \subset X$ wird die Menge $A^C := X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$ als Komplement von A bzgl. X bezeichnet.