

Hessian Matrisi

Bir fonksiyonun "Hessian matrisi" $f(x, y, z, \dots)$ tüm ikinci kısmi türevleri bir matriste düzenler; Bu farklı kişiler tarafından $H(f)$, Hf , veya H_f şeklinde yazılabilir.

$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Buna göre, burada dikkat edilmesi gereken iki nokta:

- Bu sadece skaler-değerli fonksiyonlar için anlamlı
- Hf sıradan bir matris değil; ancak girdileri fonksiyonlar olan bir matristir. Başka bir şekilde ifade edersek, bir (x_0, y_0, \dots) noktasında hesaplanmak içindir

$$Hf(x_0, y_0, \dots) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, \dots) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \dots) & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, \dots) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, \dots) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Böylece, bu Hf matrisini "matris-değerli" bir fonksiyon olarak nitelendirebilirsiniz.

Soru:

$f(x,y) = x^3 - 2xy - y^6$ 'nin $(1,2)$ noktasındaki hessian'ını hesaplayın.

Çöz: bize f 'nin ikinci kısmi türevlerinin tümü gerekcek önce kısmi türevlerin ikisini hesaplayalım:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 - 2xy - y^6) = 3x^2 - 2y$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} (x^3 - 2xy - y^6) = -2x - 6y^5$$

bunlarla ikinci kısmi türevlerin dördünü hesapla;

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 2y) = 6x$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 - 2y) = -2$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} (-2x - 6y^5) = -2$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} (-2x - 6y^5) = -30y^4$$

bu durumda Hessian matrisi 2×2 bir matristir ve fonk girdileri;

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -30y^4 \end{bmatrix}$$

biz de $(x,y) = (1,2)$ noktasında hesaplanmasını istedik

$$Hf(1,2) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -480 \end{bmatrix}$$