PRUEBAS DE HIPOTESIS

1. **Elementos De Una Prueba de Hipótesis**

   a) Hipótesis Nula, H_0.

   b) Hipótesis Alternativa, H_a.

   c) Estadístico de Prueba.

   d) Región de Rechazo, RR.

2. **Pruebas de Hipótesis con Nivel α con Muestras Grandes para μ. (Prueba Z)**

   a) Si la varianza σ^2 es conocida: $H_0 : \mu = \mu_0$

   $$H_a : \begin{cases} \mu > \mu_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola superior} \\ \mu < \mu_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola inferior} \\ \mu \neq \mu_0, & \text{Hipótesis alternativa de dos colas} \end{cases}$$

   Estadístico de Prueba: $Z = \frac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$

   $$\text{Región de Rechazo:} \begin{cases} RR = \{z > z_\alpha\} \\ RR = \{z < -z_\alpha\} \\ RR = \{|z| > z_{\alpha/2}\} \end{cases}$$

   b) Si la varianza σ^2 es desconocida: $H_0 : \mu = \mu_0$

   $$H_a : \begin{cases} \mu > \mu_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola superior} \\ \mu < \mu_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola inferior} \\ \mu \neq \mu_0, & \text{Hipótesis alternativa de dos colas} \end{cases}$$

   Estadístico de Prueba: $Z = \frac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n-1}}{s}$

   $$\text{Región de Rechazo:} \begin{cases} RR = \{z > z_\alpha\} \\ RR = \{z < -z_\alpha\} \\ RR = \{|z| > z_{\alpha/2}\} \end{cases}$$

3. **p-valor:**

   a) Prueba unilateral derecha:

   $$p - \text{valor} = P_{H_0}\left(T > T_{obs}\right)$$

   b) Prueba unilateral izquierda:

   $$p - \text{valor} = P_{H_0}\left(T < T_{obs}\right)$$

   c) Prueba bilateral:

   $$p - \text{valor} = P_{H_0}\left(|T| > |T_{obs}|\right)$$

   Donde T es el estadístico de la prueba de hipótesis correspondiente y T_{obs} es la evaluación de la muestra observada.
   En todos los casos se toma la siguiente decisión:
   Si el p-valor $\leq \alpha$ asumimos H_a.
   Si el p-valor $> \alpha$ asumimos H_0.

4. **Prueba con Muestras Pequeñas para μ a Nivel α (Prueba t)**

   Supuesto: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ muestra aleatoria de una distribución normal con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$

   $H_0 : \mu = \mu_0$

   $$H_a : \begin{cases} \mu > \mu_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola superior} \\ \mu < \mu_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola inferior} \\ \mu \neq \mu_0, & \text{Hipótesis alternativa de dos colas} \end{cases}$$

   Estadístico de Prueba: $T = \frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$

   $$\text{Región de Rechazo:} \begin{cases} RR = \{t > t_\alpha\} \\ RR = \{t < -t_\alpha\} \\ RR = \{|t| > t_{\alpha/2}\} \end{cases}$$

   Donde t_α es la distribución t-de Student con $\nu = n - 1$ grados de libertad

5. **Prueba para proporciones**

   $H_0 : p = p_0$

   $$H_a : \begin{cases} p > p_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola superior} \\ p < p_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola inferior} \\ p \neq p_0, & \text{Hipótesis alternativa de dos colas} \end{cases}$$

   Estadístico de Prueba: $P = \frac{(\hat{p}-p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$

   $$\text{Región de rechazo:} \begin{cases} RR = \{p > \phi_\alpha\} \\ RR = \{p < -\phi_\alpha\} \\ RR = \{|p| > \phi_{\alpha/2}\} \end{cases}$$

6. **Tamaño de la Muestra para una Prueba de Nivel α de Cola Superior**

   $$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 \sigma^2}{(\mu_a - \mu_0)^2}$$

7. **Prueba de Hipótesis sobre la Diferencia de Medias de Dos Poblaciones**

   Supuesto: Muestras independientes de distribución normal

   a) Varianzas poblacionales conocidas:

   $H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$

   $$H_a : \begin{cases} \mu_x - \mu_y > D_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola superior} \\ \mu_x - \mu_y < D_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola inferior} \\ \mu_x - \mu_y \neq D_0, & \text{Hipótesis alternativa de dos colas} \end{cases}$$

   Estadístico de Prueba:

   $$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}$$

   $$\text{Región de Rechazo:} \begin{cases} RR = \{Z > z_\alpha\} \\ RR = \{Z < -z_\alpha\} \\ RR = \{|Z| > z_{\alpha/2}\} \end{cases}$$

b) Varianzas poblacionales desconocidas:

$H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$

$$H_a : \begin{cases} \mu_x - \mu_y > D_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola superior} \\ \mu_x - \mu_y < D_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola inferior} \\ \mu_x - \mu_y \neq D_0, & \text{Hipótesis alternativa de dos colas} \end{cases}$$

Estadístico de Prueba:

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - D_0}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x - 1} + \frac{s_y^2}{n_y - 1}}}$$

$$\text{Región de Rechazo:} \begin{cases} RR = \{Z > z_\alpha\} \\ RR = \{Z < -z_\alpha\} \\ RR = \{|Z| > z_{\alpha/2}\} \end{cases}$$

c) Varianzas poblacionales desconocidas pero iguales:

$H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$

$$H_a : \begin{cases} \mu_x - \mu_y > D_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola superior} \\ \mu_x - \mu_y < D_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola inferior} \\ \mu_x - \mu_y \neq D_0, & \text{Hipótesis alternativa de dos colas} \end{cases}$$

Estadístico de Prueba:

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y} - D_0}{S\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \text{ donde } S = \sqrt{\frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2}}$$

$$\text{Región de Rechazo:} \begin{cases} RR = \{T > t_\alpha\} \\ RR = \{T < -t_\alpha\} \\ RR = \{|T| > t_{\alpha/2}\} \end{cases}$$

Donde t_α es la distribución t-de Student con $\nu = n_x + n_y - 2$ grados de libertad

8. **Prueba de Hipótesis sobre la Diferencia de Proporciones de Dos Poblaciones**

$H_0 : p_x - p_y = D_0$

$$H_a : \begin{cases} p_x - p_y > D_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola superior} \\ p_x - p_y < D_0, & \text{Hipótesis alternativa de cola inferior} \\ p_x - p_y \neq D_0, & \text{Hipótesis alternativa de dos colas} \end{cases}$$

Estadístico de Prueba:

$$P = \frac{\hat{p_x} - \hat{p_y} - D_0}{\sqrt{\widetilde{p}(1 - \widetilde{p})\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} \text{ donde } \widetilde{p} = \frac{x + y}{n_x + n_y}$$

$$\text{Región de Rechazo:} \begin{cases} RR = \{P > \phi_\alpha\} \\ RR = \{P < -\phi_\alpha\} \\ RR = \{|P| > \phi_{\alpha/2}\} \end{cases}$$

9. **Prueba de Hipótesis referente a una Varianza Poblacional**

   Supuesto: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ muestra aleatoria de una distribución normal, $N(\mu, \sigma^2)$

   $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

   $$H_a : \begin{cases} \sigma^2 > \sigma_0^2, \text{ Hipótesis alternativa de cola superior} \\ \sigma^2 < \sigma_0^2, \text{ Hipótesis alternativa de cola inferior} \\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2, \text{ Hipótesis alternativa de dos colas} \end{cases}$$

   Estadístico de Prueba: $\chi^2 = \frac{(n-1)s_1^2}{\sigma_0^2}$

   $$\text{Región de Rechazo:} \begin{cases} RR = \{\chi^2 > \chi^2_\alpha\} \\ RR = \{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}\} \\ RR = \{\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2} \text{ ó } \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}\} \end{cases}$$

   Donde χ^2_α es la distribución Chi-cuadrado con $\nu = n - 1$ grados de libertad

10. **Prueba de Hipótesis para Comparación de Varianzas ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2$)**

    Supuesto: Muestras independientes de poblaciones normales.

    $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$

    $H_a : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$

    Estadístico de Prueba: $F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$.

    Región de Rechazo: $RR = \{F > F^{\nu_x}_{\nu_y,\alpha}\}$

    Donde $F^{\nu_x}_{\nu_y,\alpha}$ es la distribución F de Snedecor con $\nu_x = n_x - 1$ grados de libertad en el numerador y $\nu_y = n_y - 1$ grados de libertad en el denominador.