

## Algebra a diskrétna matematika

### Príklady na precvičenie

#### 7. týždeň

**Úloha 1.** Určte počet všetkých usporiadaných dvojíc  $(A, B)$ , kde  $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Úloha 2.** Koľko päťciferných čísel deliteľných piatimi môžeme vytvoriť z čísiel 0, 2, 4, 5, 6, 8?

**Úloha 3.** Koľko existuje  $n \times n$  matíc s prvkami z množiny  $\{0, 1, \dots, q-1\}$ ?

**Úloha 4.** Koľko je 4-ciferných čísel  $abcd$  spĺňajúcich podmienku  $|b-c| = 2$ ?

**Úloha 5.** Aký je počet podmnožín množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ , ktoré obsahujú len nepárne čísla  $\leq n$ ?

**Úloha 6.** Koľko existuje permutácií množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  s jediným cyklom?

**Úloha 7.** Koľko existuje permutácií množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  s dvoma cyklami?

**Úloha 8.** Aký je počet variácií  $k$ -tej triedy z množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  bez opakovania a permutácii z  $\{1, 2, \dots, n\}$  takých, že 1 je vľavo od 2?

**Úloha 9.** Koľko je rôznych preusporiadaní písmen P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z, v ktorých sa nachádza reťazec STU?

**Úloha 10.** Aký je počet slov dĺžky  $k$  nad abecedou z  $n$  písmen, v ktorých každé 2 za sebou idúce písmená sú rôzne?

**Úloha 11.** Aký je počet slov dĺžky  $k$  nad abecedou  $\{0, 1\}$ , v ktorých je párny počet jednotiek?

**Úloha 12.** Katedra matematiky má 29 členov, z toho 10 žien. Koľkými spôsobmi je možné zostaviť z katedry 5-člennú komisiu, ak

- a) vedúci katedry v komisii nebude?
- b) v komisii bude práve jedna žena?
- c) v komisii bude práve jedna žena, ale nebudú tam spolu pán Novák a pán Kávon?
- d) v komisii bude aspoň jedna žena?

**Úloha 13.** Aký je počet kódov dĺžky 13 tvorených z  $\{0, 1\}$ , v ktorých je nula na začiatku aj na konci a vyskytuje sa tam nepárny počet jednotiek?

**Úloha 14.** Ak sa zvýši počet prvkov o 4, zväčší sa počet kombinácií druhej triedy 3-krát. Určte počet prvkov množiny.

**Úloha 15.** Koľkými nulami končí číslo  $30!$ ?

**Úloha 16.** Podľa šachových pravidiel útočí veža na najbližšiu figúrku stojacu v tom istom rade alebo stĺpci. Koľkými spôsobmi je možné umiestniť 8 veží na šachovnicu tak, aby žiadne dve na seba neútočili? Ako sa zmení riešenie pri tom istom počte veží a veľkosti šachovnice  $10 \times 10$ ?

**Úloha 17.** Aký je počet ciest na štvorčekovom papieri (štvorce s jednotkovou dĺžkou umiestnené v súradnicovej sústave) z bodu  $(0, 0)$  do bodu  $(m, n)$  pre  $m, n \geq 0$ , ak je dovolené postupovať len vpravo a nahor?

**Úloha 18.** Z definície kombinačného čísla  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  odvodte súčtový vzorec

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

**Úloha 19.** Ukážte, že platí

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + \binom{n}{1}^3$$

**Úloha 20.** Odvoďte nasledujúcu identitu

$$\sum_{j=0}^r \binom{m}{j} \binom{n}{r-j} = \binom{m+n}{r}$$

**Úloha 21.** Ukážte, že platí

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

**Úloha 22.** Koľko racionálnych členov obsahujú dané rozklady?

a)  $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5})^{15}$

b)  $(\sqrt{7} + \sqrt[4]{5})^{88}$

c)  $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})^{100}$