Algebra a diskrétna matematika
Úlohy na precvičenie
8. týždeň

Úloha 1. Určte koeficienty pri
a) x^2yz^3 vo výraze $(3x-y+2z)^6$,
b) $a^2b^2c^2d$ vo výraze $(a-2b+4c+d)^7$.

Úloha 2. Nájdite počet nezáporných celočíselných riešení danej rovnice a nerovnice.
a) $x_1+x_2+x_3+x_4=13$
b) $x_1+x_2+x_3+x_4<13$

Úloha 3. Nájdite počet nezáporných celočíselných riešení rovnice
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=19$, pričom $x_1 \geq 1, x_3 \geq 3, x_5 \geq 5$.

Úloha 4. Na oslave je k dispozícii 9 rôznych druhov nápojov. Koľkými rôznymi spôsobmi ich môžeme vybrať pre 21 ľudí za predpokladu, že každý z nich bude piť iba jeden druh?

Úloha 5. V škole pri slávnosti je k učiteľov a n detí. Každé dieťa má v rukách jeden vlastnoručne vyrobený darček, ktorý dá náhodne zvolenému učiteľovi. S akou pravdepodobnosťou dostane každý učiteľ aspoň jeden darček?

Úloha 6. Koľko rôznych slov dĺžky 11 môžeme vytvoriť zo slova POLOOBLAČNO? Ako by sa počítala pravdepodobnosť, že z tohto slova vytvoríme náhodne 6 písmenové slovo so všetkými rôznymi písmenami?

Úloha 7. 31 študentov riešilo 3 príklady z matematiky. Každý študent vyriešil aspoň jeden príklad správne, pritom prvý príklad malo správne 20 študentov, druhý príklad 16 a tretí príklad 15 študentov. Prvé dva príklady vyriešilo správne 10 študentov, prvý a tretí 8 študentov a druhý a tretí 9 študentov.
a) Koľko študentov malo správne vyriešené všetky tri príklady?
b) Koľko študentov malo správne vyriešené práve dva príklady?
c) Koľko študentov malo správne vyriešený len jeden príklad?

Úloha 8. Koľkými spôsobmi je možné usadiť do radu 7 detí a 4 dospelých, aby žiadni dvaja dospelí nesedeli vedľa seba?

Úloha 9. Na plese je n manželských párov. Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť n tanečných párov, ak žiadna manželská dvojica netancuje spolu?

Úloha 10. Koľko je kladných celých čísel menších alebo rovných 350, ktoré sú súdeliteľné s číslom 350?

Úloha 11. Koľko kladných celých čísel menších ako 5000 nie je deliteľných žiadnym z čísel $4, 5, 6$?

Úloha 12. Nájdite systém rôznych reprezentantov pre
a) $A_1 = \{1, 7\}$, $A_2 = \{3, 6, 8\}$, $A_3 = \{3, 7, 8\}$, $A_4 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $A_5 = \{2, 5\}$, $A_6 = \{2, 4, 6, 7, 8\}$,
b) $B_1 = \{2, 4, 5, 9\}$, $B_2 = \{2, 5, 9\}$, $B_3 = \{1, 9\}$, $B_4 = \{1, 5, 9\}$, $B_5 = \{2, 9\}$, $B_6 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $B_7 = \{1, 2, 9\}$.

Úloha 13. Koľko rôznych 10 miestnych kódov je možné utvoriť z núl a jednotiek, ak

- sú v kóde práve 3 nuly;
- sú v kóde práve 3 nuly a tie sú vedľa seba;
- v kóde nie sú žiadne dve nuly vedľa seba?

Úloha 14. Nájdite explicitné riešenie rekurentných rovníc s danými podmienkami
a) $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$; $a_1 = -3, a_2 = 3$
b) $a_n = -4a_{n-1} + 5a_{n-2}$; $a_1 = 0, a_2 = 30$
c) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$; $a_1 = 6, a_2 = -27$
d) $a_n = 5a_{n-1} + 14a_{n-2}$; $a_1 = 22, a_2 = 82$
e) $a_n = -2a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3}$; $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 4$