

# Algebra a diskrétna matematika

## Prehľad z 9. prednášky

### Algebraické štruktúry - Úvod

#### Binárna relácia

Nech  $M$  je neprázdna množina a nech  $M \times M$  je **kartézsky súčin** množiny  $M$  samej so sebou, t.j.  $M \times M = \{(x, y); x, y \in M\}$ .

Pod **binárnou reláciou** na množine  $M$  rozumieme ľubovoľnú podmnožinu súčinu  $M \times M$ . Formálne,  $\mathcal{R}$  je binárna relácia na  $M$ , ak  $\mathcal{R} \subseteq M \times M$ .

Vzťah medzi  $x$  a  $y$  v relácii  $\mathcal{R}$  zapisujeme  $(x, y) \in \mathcal{R}$  alebo  $x\mathcal{R}y$ .

Ak  $M$  má veľkosť  $n$ , body v relácii môžeme znázorniť vyznačením zodpovedajúcich bodov na mriežke  $n \times n$  alebo pomocou orientovaného grafu s  $n$  vrcholmi, v ktorom je dvojica bodov  $x\mathcal{R}y$  reprezentovaná šípkou z  $x$  do  $y$ . Reláciu na  $n$  prvkovej množine  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je tiež možné popísať pomocou *matice*  $A$  relácie  $\mathcal{R}$ , pričom  $A_{n \times n} = (a_{ij})$ , kde  $a_{ij} = 1$ , ak  $x_i\mathcal{R}x_j$ , inak  $a_{ij} = 0$ .

Príklad 1: Ilustrácia binárnych relácií na daných množinách.

- a)  $M = \{0, 1, 2\}$ ,  $\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2)\}$ .
- b)  $M = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $\mathcal{R} = \{(a, b), (a, c), (b, b), (c, d), (e, b), (e, e)\}$
- c)  $M = \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{R} = \{(z, z + 9); z \in \mathbb{Z}\}$ .
- d)  $\mathcal{R}$  na  $\mathbb{R}$ :  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x^3 - x$

Poznámka: Funkcia je špeciálnym typom relácie.

#### Vlastnosti binárnej relácie

Hovoríme, že relácia  $\mathcal{R}$  je na množine  $M$

- (R) **reflexívna**, ak pre každé  $x \in M$  platí  $x\mathcal{R}x$
- (S) **symetrická**, ak  $x\mathcal{R}y$  implikuje  $y\mathcal{R}x$  pre každé  $x, y \in M$
- (A) **antisymetrická**, ak  $x\mathcal{R}y$  a  $y\mathcal{R}x$  implikuje  $x = y$  pre každé  $x, y \in M$
- (T) **tranzitívna**, ak  $x\mathcal{R}y$  a  $y\mathcal{R}z$  implikuje  $x\mathcal{R}z$  pre každé  $x, y, z \in M$

Príklad 2: Overte vlastnosti relácií na daných množinách

- a)  $M = \{0, 1, 2\}$ ,  $\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2)\}$
- b)  $\mathcal{R}$  na  $\mathbb{R}$ :  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x - y| \geq 6$
- c)  $\mathcal{R}$  na  $\mathbb{Z}$ :  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$
- d)  $M$  je množina všetkých priamok v rovine a  $\mathcal{R}$  je relácia rovnobežnosti priamok, t. j.  $\forall p, q \in M; p\mathcal{R}q \Leftrightarrow p \parallel q$

Odpoved':

- a) (R), (A), (T)
- b) (S)
- c) (R), (A), (T)
- d) (R), (S), (T)

### Čiastočne usporiadaná množina (poset)

Binárna relácia  $\mathcal{R} \subseteq M \times M$  sa nazýva **čiastočným usporiadaním** na  $M$ , ak je na  $M$  *reflexívna*, *antisymetrická* a *tranzitívna*.

Ak  $\mathcal{R}$  je čiastočné usporiadanie na  $M$ , tak namiesto  $x\mathcal{R}y$  používame označenie  $x \preceq_{\mathcal{R}} y$  alebo sa index  $\mathcal{R}$  vynecháva.

Často sa jednoducho píše  $x \leq y$ .

Vlastnosti z definície čiastočného usporiadania potom majú tvar

- (R)  $x \leq x$  (reflexívnosť)
- (A) ak  $x \leq y$  a  $y \leq x$ , tak  $x = y$  (antisymetria)
- (T) ak  $x \leq y$  a  $y \leq z$ , tak  $x \leq z$  (tranzitívnosť)

pre každé  $x, y, z \in M$ .

Dvojicu  $(M, \leq)$ , kde  $\leq$  je binárna relácia čiastočného usporiadania, nazývame **čiastočne usporiadaná množina**.

Príklad 3: Nech  $S$  je neprázdna množina a nech  $M$  je ľubovoľná množina *podmnožín* množiny  $S$ . Nech  $\leq$  je binárna relácia inklúzie, t.j. ak  $X, Y \in M$ , tak  $X \leq Y$ , ak  $X$  je podmnožinou množiny  $Y$ . Potom  $(M, \leq)$  je čiastočne usporiadaná množina.

Príklad 4: Nech  $M$  je ľubovoľná neprázdna podmnožina množiny  $\mathbb{N}$  a nech pre každé  $x, y \in M$  symbol  $x \leq y$  označuje fakt, že číslo  $x$  je deliteľom čísla  $y$ . Potom  $(M, \leq)$  je opäť čiastočne usporiadaná množina.

Ak  $(M, \leq)$  je čiastočne usporiadaná množina, tak dva rôzne prvky  $x, y \in M$  sú **porovnateľné**, ak buď  $x \leq y$ , alebo  $y \leq x$ .

(Oba vzt'ahy nemôžu platiť súčasne pre  $x \neq y$ .)

Budeme písať  $x < y$ , ak  $x \leq y$  a  $x \neq y$ .

- Prvok  $a \in M$  sa nazýva **najmenší**, ak  $a \leq x$  pre každé  $x \in M$ .
- Prvok  $b \in M$  sa nazýva **najväčší**, ak  $x \leq b$  pre každé  $x \in M$ .
- Prvok  $a \in M$  je **minimálny**, ak neexistuje žiadne  $x \in M$ , že  $x < a$ .
- Prvok  $b \in M$  je **maximálny**, ak neexistuje žiadne  $x \in M$ , že  $b < x$ .

Ak v  $(M, \leq)$  existuje najmenší (najväčší) prvok, tak tento je určený *jednoznačne*.

Najmenší (najväčší) prvok v  $(M, \leq)$  je zároveň minimálnym (maximálnym) prvkom; vo všeobecnosti to neplatí obrátene.

Ak  $(M, \leq)$  obsahuje viac ako jeden minimálny (maximálny) prvok, tak žiadne dva minimálne (maximálne) prvky nemôžu byť porovnateľné.

Príklad 5: Pre čiastočne usporiadanú množinu  $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$ , kde  $x | y$  označuje fakt, že  $x$  delí  $y$ , nájdite všetky minimálne a maximálne prvky, najmenší a najväčší prvok.

Odpoveď: Najmenší a zároveň minimálny prvok je 1, maximálne prvky sú 6, 7, 8, 9, 10 a najväčší prvok neexistuje.

Čiastočne usporiadané množiny znázorňuje pomocou **Hasseho diagramu**.

V Hasseho diagrame čiastočne usporiadanej množiny  $(M, \leq)$ :

- sa nevyskytujú slučky,
- spojnice je medzi  $x, y$  iba ak  $x$  je bezprostredným predchodcom prvku  $y$ , t.j.  $x < y$  a neexistuje žiadne  $z \in M$ , že  $x < z < y$ ,
- ak  $x < y$ , tak  $x$  sa umiestňuje pod  $y$ .

Z Hasseho diagramu je možné jednoznačne zrekonštruovať reláciu  $\leq$  čiastočného uporiadania na množine  $M$ .

## Zväzy

Nech  $(M, \leq)$  je čiastočne usporiadaná množina a nech  $x, y \in M$ .

- Prvok  $z \in M$  je **dolným ohraničením** prvkov  $x$  a  $y$ , ak  $z \leq x$  a  $z \leq y$ .
- Prvok  $c \in M$  je **najväčším dolným ohraničením** prvkov  $x$  a  $y$ , ak  $c \leq x$ ,  $c \leq y$ , a ak  $z \leq c$  pre každé dolné ohraničenie  $z$  prvkov  $x, y$ .

Označenie:  $c = \inf(x, y)$ , alebo  $c = x \wedge y$ , *priesek*  $x$  a  $y$ .

- Prvok  $z \in M$  je **horným ohraničením** prvkov  $x$  a  $y$ , ak  $x \leq z$  a  $y \leq z$ .
- Prvok  $d \in M$  je **najmenším horným ohraničením** prvkov  $x$  a  $y$ , ak  $x \leq d$ ,  $y \leq d$ , a ak  $d \leq z$  pre každé horné ohraničenie  $z$  prvkov  $x, y$ .

Označenie:  $d = \sup(x, y)$ , alebo  $d = x \vee y$ , *spojenie* prvkov  $x$  a  $y$ .

Čiastočne usporiadaná množina  $(M, \leq)$  sa nazýva **zväz**, ak pre každé  $x, y \in M$  existuje ich priesek  $x \wedge y$  a aj ich spojenie  $x \vee y$ .

Príklad 6: Nech  $M = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}$  a relácia usporiadania  $\leq$  je daná predpisom  $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c$  a  $b \leq d$ . Dvojica  $(M, \leq)$  tvorí zväz.

Príklad 7: Nech  $(\mathbb{N}, |)$  je čiastočne usporiadaná množina, kde  $\mathbb{N}$  je množina prirodzených čísel a  $x | y$  označuje fakt, že  $x$  delí  $y$ . Potom  $x \wedge y$  je najväčší spoločný deliteľ a  $x \vee y$  je najmenší spoločný násobok čísel  $x$  a  $y$ ; čiastočne usporiadaná množina  $(\mathbb{N}, |)$  je tiež zväz.

Príklad 8: Nech  $S$  je neprázdna množina a nech  $2^S$  označuje množinu *všetkých* podmnožín množiny  $S$ . V čiastočne usporiadanej množine  $(2^S, \subseteq)$  je priesek dvoch prvkov rovný prieniku a spojenie je rovné zjednoteniu príslušných množín a teda  $(2^S, \subseteq)$  je zväz.

Takéto zväzy sa nazývajú **boolovské**.

Čiastočne usporiadaná množina  $(M, \leq)$  sa nazýva **ret'azec**, ak pre každé  $x, y \in M$  platí, že  $x \leq y$  alebo  $y \leq x$ ; skráteno, ak každé dva prvky v  $M$  sú *porovnateľné*.

Príslušné čiastočné usporiadanie  $\leq$  sa nazýva aj **lineárne**.

**Tvrdenie:** Každý ret'azec je zväz.