Matice, operácie s maticami, inverzná matica

Algebra a diskrétna matematika

Prednáška č. 2

doc. RNDr. Jana Šiagiová, PhD.

Matice

Matica

Usporiadaná obdĺžniková tabuľka čísel.

Prvky matice - jednotlivé čísla v matici

Príklady matíc

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0,3 \end{pmatrix}_{4\times 3} \quad \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 23 \\ 6 \end{pmatrix}_{4\times 1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 5} \quad \begin{pmatrix} \pi & -10 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Typ matice je určený počtom jej riadkov a stĺpcov. Označuje sa $m \times n$, kde m je počet riadkov a n je počet stĺpcov matice.

Všeobecný zápis matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad A = (a_{ij})_{m\times n}$$

Štvorcová matica rádu n je matica s n riadkami a n stĺpcami.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Hlavná diagonála pozostáva z prvkov $b_{11}, b_{22}, b_{33}, \dots, b_{nn}$.

Diagonálna matica, stopa matice

Diagonálna matica je štvorcová matica, ktorej všetky prvky nachádzajúce sa mimo hlavnej diagonály sú nulové.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Stopa matice: Ak A je štvorcová matica, tak jej stopa je súčet prvkov na hlavnej diagonále. Označujeme ju $\mathrm{tr}(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & 6 & -3 \\ 5 & 12 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$tr(A) = 1 + 3 + 2 + 1 = 7$ $\qquad$ $tr(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33}$

Rovnosť matíc

Rovnosť matíc: Dve matice A a B sa rovnajú, ak sú rovnakého typu $m \times n$ a majú rovnaké prvky na príslušných miestach, t. j. $a_{ij} = b_{ij}$, kde $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & \underline{2} \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & \underline{3} \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$A \neq B$

$A = D$

Súčet matíc

Súčtom matíc rovnakého typu je matica toho istého typu s prvkami získanými sčítaním prvkov daných matíc na príslušných pozíciách. T. j.: Ak $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a $B = (b_{ij})_{m\times n}$, tak $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$.

Rozdielom matíc $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a $B = (b_{ij})_{m\times n}$ je matica $C = A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n} = (c_{ij})_{m\times n}$.

Nie je možné sčítať ani odčítať matice rôznych typov!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2-8 & 0+3 & 9+0 \\ & \ldots & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & 9 \\ 8 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Nulová matica, násobenie matice skalárom

Nulová matica O je matica pozostávajúca zo samých núl.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pre každú maticu platí: $A_{m\times n} + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A_{m\times n} = A_{m\times n}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Násobenie matice $A = (a_{ij})_{m\times n}$ **konštantou** c znamená vynásobenie každého prvku danej matice číslom c, t. j. $c \cdot A = (c \cdot a_{ij})_{m\times n}$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad \underset{3\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underset{3\times 3}{C} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 9 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \underset{3\times 2}{D} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte $A + 3C$, $\underbrace{\underset{3\times 3}{C} - 5\underset{3\times 2}{B}}_{\text{nedá sa}}$ a $4(B - 2D)$.

$$A + 3C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 21 & 0 \\ 9 & 6 & -9 \\ 27 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 9 \\ 13 & 9 & -7 \\ 29 & -1 & 22 \end{pmatrix}$$

$$4(B - 2D) = 4\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 4 & -4 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}\right] = 4\begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 0 & 4 \\ -14 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -44 \\ 0 & 16 \\ -56 & -4 \end{pmatrix}$$

Násobenie matíc - Príklad

$$
\begin{array}{c}
 \\ \text{JANKO} \\ \text{MARIENKA}
\end{array}
\begin{array}{cc}
\text{HROŠKY} & \text{ZEMAKY} \\
\multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}
 \\ H \\ Z
\end{array}
\begin{array}{cc}
\text{OBCHOD1} & \text{OBCHOD2} \\
\multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1,4 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
 \\ J \\ M
\end{array}
\begin{array}{cc}
O1 & O2 \\
\multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 6 & 6,2 \\ 7 & 5,4 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

2x2 2x2

MNOŽSTVO CENA

JANKO: $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1,5 = 6$

$3 \cdot 1,4 + 2 \cdot 1 = 6,2$

MARIENKA: $1 \cdot 1 + 4 \cdot 1,5 = 7$

$1 \cdot 1,4 + 4 \cdot 1 = 5,4$

Násobenie matíc - Príklady

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} H & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} J \\ M \\ Eva \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ & 3 \times 2 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} O1 & O2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1{,}4 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix} \\ 2 \times 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 6 & 6{,}2 \\ 7 & 5{,}4 \\ 7 & 7{,}6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

Eva: $4 \cdot 1 + 2 \cdot 1{,}5 = 7$

$4 \cdot 1{,}4 + 2 \cdot 1 = 7{,}6$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} H & Z & B & V \end{array} \\ \begin{array}{c} J \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ & 2 \times 4 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} O1 & O2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1{,}4 \\ 1{,}5 & 1 \\ 2 & 2{,}1 \\ 1{,}1 & 1 \end{pmatrix} \\ 4 \times 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 8 & 8{,}8 \\ 11{,}2 & 9{,}5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

J: $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1{,}5 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1{,}1 = 8$

$3 \cdot 1{,}4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2{,}1 + 0 \cdot 1 = 8{,}8$

M: $1 \cdot 1 + 4 \cdot 1{,}5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1{,}1 = 11{,}2$

$1 \cdot 1{,}4 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2{,}1 + 2 \cdot 1 = 9{,}5$

Násobenie matíc

Súčin matíc $A = (a_{ik})_{m\times s}$ a $B = (b_{kj})_{s\times n}$ v poradí $A \cdot B$ je matica $C = (c_{ij})_{m\times n}$, kde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$. → s násobení

s-1 sčítaní

Vo výslednej matici súčinu je prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci skalárnym súčinom vektora tvoreného i-tym riadkom ľavej matice s vektorom tvoreným j-tym stĺpcom pravej matice.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3j} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sj} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

m×n

celkovo: násobení m.n.s

sčítaní m.n(s-1)

Príklad

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$3 \times \underline{3}$ $\quad$ $\underline{3} \times 2$ $\quad$ 3×2

$-1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 6 \cdot 2 = -3 + 12 = 9$

$-1 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 = -4 + 6 = 2$

$3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 2 = 9 - 6 = 3$

$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 = 12 - 4 - 3 = 5$

$0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 = -4$

$0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = -2 - 2 = -4$

Príklady

$$E = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

4×1 2×4 2×2 3×2

$F.E$, $H \cdot G$, $H \cdot F$, $G \cdot F$, G^2 $\to$ môžeme násobiť

$$H \cdot G = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$G \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot G = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -11 & -18 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G \cdot F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 21 & -6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte $(HG)F$ a $H(GF)$.

PLATÍ ASOCIATIVITA NÁSOBENIA MATÍC (UKÁŽKA)

$$HG = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -11 & -18 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad GF = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 21 & -6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

násobení: $16 + 24 = \underline{\underline{40}}$

$$\underbrace{(HG)F}_{3\times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -11 & -18 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{2\times 4} = \underbrace{H \cdot (GF)}_{3\times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 21 & -6 & 9 & 12 \end{pmatrix}}_{2\times 4}$$

$2\cdot 4\cdot 2$

$2\times 2 \quad 2\times 4$

$3\times 2 \quad 2\times 4$

$3\cdot 2\cdot 4$

$(HG)F \to$ násobení

$12 + 24 = \underline{\underline{36}}$

$3\times 2 \quad 2\times 2 \quad 2\times 4$

$3\cdot 2\cdot 2$

$3\times 2 \cdot 2\times 4$

$3\cdot 4\cdot 2$

$$(HG)F = \begin{pmatrix} 29 & -10 & 9 & 32 \\ -40 & 11 & -18 & -19 \\ 6 & -3 & 0 & 15 \end{pmatrix} = H(GF)$$

Príklad

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte GK a KG.

$$G \cdot K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 42 \end{pmatrix}$$

rôzne

$$K \cdot G = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 36 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$$

- Násobenie matíc nie je komutatívne. $AB \neq BA$
- Násobenie matíc je asociatívne. $(AB)C = A(BC)$

Jednotková matica

Jednotková matica je štvorcová matica, ktorá má jednotky na hlavnej diagonále a inde nuly. Označuje sa I, prípadne špecifikujeme jej typ.

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vynásobenie ľubovoľnej matice A jednotkovou maticou zodpovedajúceho typu maticu A nezmení.

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -9 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} \cdot I_{n\times n} = A_{m\times n} \qquad I_{m\times m} \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$$

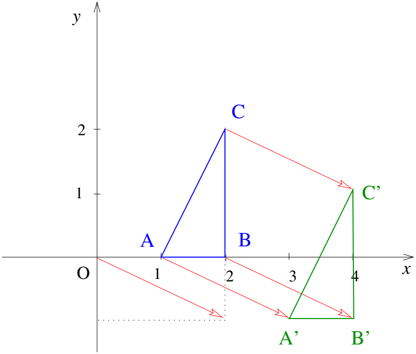
Transponovaná matica

Transponovaná matica A^T sa získa z matice A výmenou riadkov so stĺpcami.
Ak $A = (a_{ij})_{m \times n}$, potom $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$.

$$\underset{2\times4}{F} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{4\times2}{F^T} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad G^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad H^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformácia roviny - posunutie



POSUN O VEKTOR $(2,-1)$

$\triangle ABC \to \triangle A'B'C'$

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

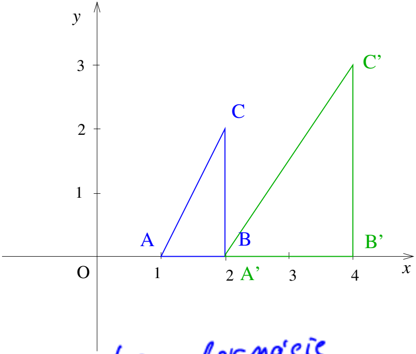
$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to B' = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$C = (2,2) \to C' = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

SÚRADNICE   POSUN   NOVÉ SÚRADNICE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Škálovanie v smere súradnicových osí so stredom v $(0,0)$



ŠKÁLOVANIE

V SMERE OSI X → 2 násobok

V SMERE OSI y → 1,5 násobok

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1{,}5\end{pmatrix}$$

T - matica transformácie

$$T = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$$

2×2

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$a \cdot 1 + b \cdot 0 = 2$

$a = 2$

$c \cdot 1 + d \cdot 0 = 0$

$c = 0$

$$\begin{pmatrix}2 & b\\0 & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$4 + 2b = 4$

$b = 0$

$2 \cdot 0 + d \cdot 2 = 3$

$d = 1{,}5$

súradnice bodov   nové súradnice

$$\boxed{T \cdot S = N}$$

Delenie matíc

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte $G : F$, $H : G$, prípadne ďalšie podiely.

DELENIE (:) MATÍC NIE JE DEFINOVANÉ.

Inverzná matica

Inverzná matica k matici $A_{n\times n}$ je matica $X_{n\times n}$, ktorá vyhovuje rovnici

$$A \cdot X = X \cdot A = I$$

Ak inverzná matica k štvorcovej matici A existuje, je jednoznačne určená. Označujeme ju A^{-1} a platí

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \text{a} \quad A^{-1} \cdot A = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Inverzná matica existuje iba k štvorcovej matici, ktorá po úprave na redukovaný tvar (pomocou ERO 1 - 3) nemá nulové riadky.

Taká matica sa nazýva regulárna.

Matica, ktorá nie je regulárna, sa nazýva singulárna.

Metóda hľadania inverznej matice

Ak hľadáme inverznú maticu k matici $A_{n\times n}$, tak riešime rovnicu

$$A \cdot X = I$$

Rozpísaním rovnice po stĺpcoch ($\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_n$ pre X a $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ pre I) dostaneme n sústav lineárnych rovníc

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1,\ A\vec{x}_2 = \vec{e}_2,\ \ldots,\ A\vec{x}_n = \vec{e}_n$$

Riešime ich spolu Gaussovou eliminačnou metódou.

$$\left(A \,\middle|\, I \right) \to (\mathrm{ERO}\ 1-3) \to \left(I \,\middle|\, A^{-1} \right)$$

Nájdite inverznú maticu k matici K

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{array}{c} -R_2 \\ R_1+3R_2 \\ R_3+4R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ R_3-R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1+3R_3 \\ R_2-8R_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad K^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 9 & -5 & -8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Skúška správnosti

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad K^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 9 & -5 & -8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K \cdot K^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 9 & -5 & -8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$3 \cdot (-3) + 1 \cdot 9 + (-1)(-1) = 1$

$3 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 = 6 - 5 - 1 = 0$

$3 \cdot 3 + 1 \cdot (-8) + (-1) \cdot 1 = 9 - 8 - 1 = 0$

$$K^{-1} \cdot K = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 9 & -5 & -8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nájdite inverznú maticu k matici L

$$L = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 1 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 9 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_1 - 6R_3 \\ R_2 - R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 6 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 10 & 6 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \frac{R_1 - R_3}{5} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 10 & 6 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ \\ R_3 - 10R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 3 & 9 \end{array}\right) \; R_3 : 6 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Nájdite inverznú maticu k matici M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 9 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ +R_3 \\ R_2+R_3 \\ R_4+4R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 9 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ -R_4 \\ R_3 \div 2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 9 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1-6R_4 \\ \\ R_3+4R_4 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 9 & 0 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1-9R_3 \\ R_2+R_3 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 15 & -21 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Pokračovanie výpočtu inverznej matici k matici M

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 15 & -21 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \qquad R_1 - R_2 \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 17 & -24 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 17 & -24 & 10 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie sústavy lineárnych rovníc pomocou inverznej

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sústava prepísaná do maticovej formy:

$$A \cdot X = B$$

Vynásobíme A^{-1} zľava

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Riešte sústavu lineárnych rovníc pomocou inverznej matice

$$
\begin{aligned}
3x + y + z &= 0\\
-x - 2y + z &= 1\\
3x \phantom{{}-2y} + 2z &= -2
\end{aligned}
$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\begin{array}{c} \cdot R_2 \\ R_1+3R_2 \\ R_3-R_1 \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ R_3 \\ R_2-5R_3 \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1-R_3 \\ R_2-R_3 \\ -R_3 \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -6 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -3 & 5 \end{array}\right)
\begin{array}{c} R_1-2R_2 \\ \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -3 & 5 \end{array}\right)
\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -5 & -3 & 4 \\ -6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -5 & -3 & 4 \\ -6 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -13 \end{pmatrix}$$

výhodné, ak meníme pravú stranu

Šifrovanie pomocou násobenia matíc

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Zašifrujte text pomocou danej matice S a následne dešifrujte.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & +1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Text = september

$$T = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 16 \\ 20 & 5 & 13 \\ 2 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

ZAŠIFRUJEME

$$\boxed{S \cdot T = Z}$$

šifrovacia matica

text

zašifrovaná

$$S^{-1} \cdot S \cdot T = S^{-1} Z$$

dešifrujeme

$$\boxed{T = S^{-1} \cdot Z}$$

Dešifrovanie

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 16 \\ 20 & 5 & 13 \\ 2 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

$$S \cdot T = Z$$

$$Z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 5 & 16 \\ 20 & 5 & 13 \\ 2 & 5 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 15 & 45 \\ 22 & 10 & 31 \\ 21 & 10 & 34 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_3 \\ R_1 - 2R_3 \\ R_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{R_3 : 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1 - R_3 \\ R_2 + 2R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 58 & 15 & 45 \\ 22 & 10 & 31 \\ 21 & 10 & 34 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} \cdot Z = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 58 & 15 & 45 \\ 22 & 10 & 31 \\ 21 & 10 & 34 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 19 & 5 & 16 \\ 20 & 5 & 13 \\ 2 & 5 & 18 \end{pmatrix}}}$$

$(58 - 22 + 21) : 3$

$-45 + 31 + 68$

$58 + 44 - 42$

$45 + 62 - 68$

$-58 + 22 + 42$