Algebra a diskrétna matematika
Príklady na precvičenie
10. týždeň

Príklad 1: Nech $S = \{1, 2, 3\}$ a M je množina všetkých podmnožín množiny S. Na množine M máme danú binárnu operáciu symetrický rozdiel množín $\oplus$, ktorý je definovaný nasledovne

$\forall A, B \in M : A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Overte, či $\oplus$ je komutatívna a asociatívna.

Príklad 2: Uvažujme množinu $\mathbb{Z}$ spolu s binárnymi operáciami $*$ a $\ominus$ definovanými vzťahmi

a) $a * b = (a + b)^2$

b) $a \ominus b = a + b - 6$

Pre obidve operácie overte komutativitu a asociativitu.

Príklad 3: Uvažujme množinu $\mathbb{Q}$ racionálnych čísel spolu s binárnymi operáciami $*$, $\ominus$, $\otimes$ definovanými vzťahmi

a) $a * b = \frac{a+b}{7}$

b) $a \ominus b = a + b - ab$

c) $a \otimes b = |a \cdot b|$

Pre každú operáciu rozhodnite, či sa jedná o pologrupu, monoid alebo grupu.

Príklad 4: Nech M je množina binárnych reťazcov

$$M = \{(\text{prázdny reťazec}), 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, ...\}.$$

Definujme na M binárnu operácu $\oplus$ ako pripojenie dvoch po sebe nasledujúcich reťazcov $a \oplus b = ab$. Rozhodnite, či sa jedná o pologrupu, monoid alebo grupu.

Príklad 5: Pre každú z nasledujúcich podmnožín množiny $\mathbb{Z}$ určte, o akú algebraickú štruktúru sa jedná vzhľadom na operáciu sčítania.

A = množina párnych čísel

B = množina nepárnych čísel

C = množina nezáporných celých čísel

$D = \{0\}$

Príklad 6: Tvorí množina všetkých racionálnych čísel, ktoré majú v menovateli 1 alebo 2, grupu vzhľadom na operáciu sčítania? Ak z tej istej množiny vynecháme nulu, bude tvoriť grupu vzhľadom na operáciu násobenia?

Príklad 7: Akú algebraickú štruktúru tvorí množina 2×2 matíc s reálnymi koeficientami vzhľadom na násobenie?

Príklad 8: Nech $G = \{x \in \mathbb{R} \,|x \neq 1\}$ a definujme $x * y = xy - x - y + 2$. Dokážte, že $(G, *)$ je grupa.

Príklad 9: Pre každú z nasledujúcich podmnožín množiny všetkých komplexných čísel s komplexnou jednotkou i určte, o akú algebraickú štruktúru sa jedná vzhľadom na operáciu násobenia.

$A =$ množina nenulových racionálnych čísel

$B =$ množina kladných celých čísel

$C = \{1, -1, i, -i\}$,

$D = \{1, \frac{1}{2}, 2\}$,

$E = \{a + bi \mid a > 0\}$.

Príklad 10: Ukážte, že množina všetkých reálnych matíc tvaru $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je grupa vzhľadom na operáciu násobenia. Spĺňa komutatívny zákon?

Príklad 11: Ktoré z nasledujúcich množín tvoria grupy spolu s operáciou sčítania polynónov?

$A =$ množina všetkých polynómov párneho stupňa

$B =$ množina všetkých polynómov, ktorých súčet koeficientov je párny

$C =$ množina všetkých polynómov, ktoré majú iba nepárne koeficienty

Príklad 12: Nájdite všetky riešenia každej z daných rovníc.

a) $x + x = 6 \pmod 7$

b) $x + x = 3 \pmod 6$

c) $x + x + x + x + x = 8 \pmod 9$

d) $x + x + 9 = 7 \pmod{15}$

Príklad 13: Nájdite všetky riešenia daných sústav rovníc.

a) $x + x + x = 7 \pmod{10}$
$x + x + x + x + x + x + x = 11 \pmod{12}$

b) $x = 3 \pmod{5}$
$x = 6 \pmod{7}$
$x = 2 \pmod{11}$

Príklad 14: Ukážte, že množina všetkých matíc nad Z_2 tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je grupa vzhľadom na operáciu násobenia. Aký je rád tejto grupy? Spĺňa komutatívny zákon?