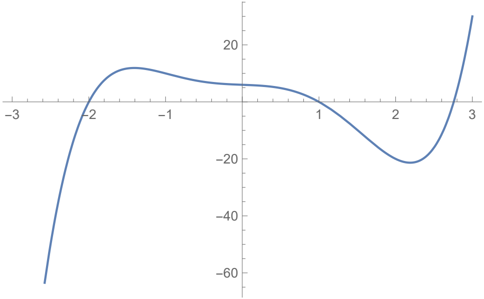
Teória grafov - základné pojmy

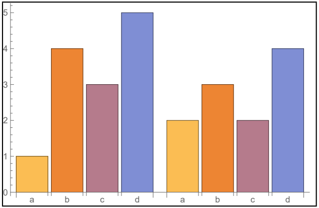
Algebra a diskrétna matematika

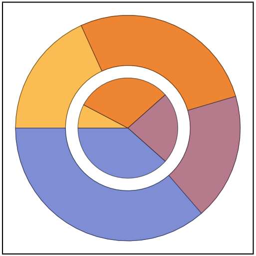
Prednáška č. 4

doc. RNDr. Jana Šiagiová, PhD.

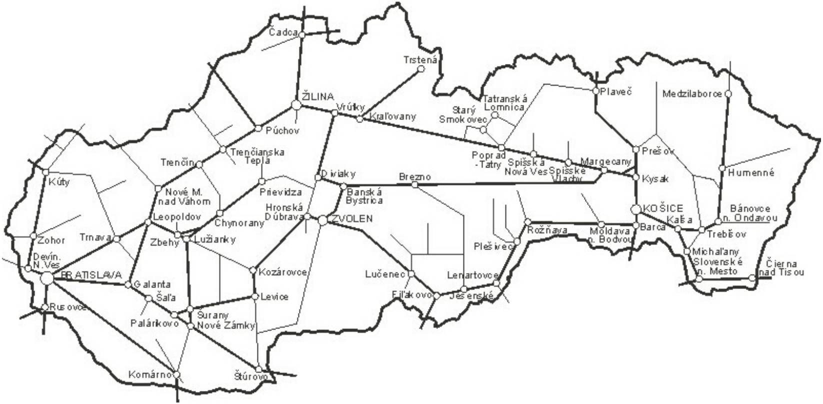
Teória grafov ???





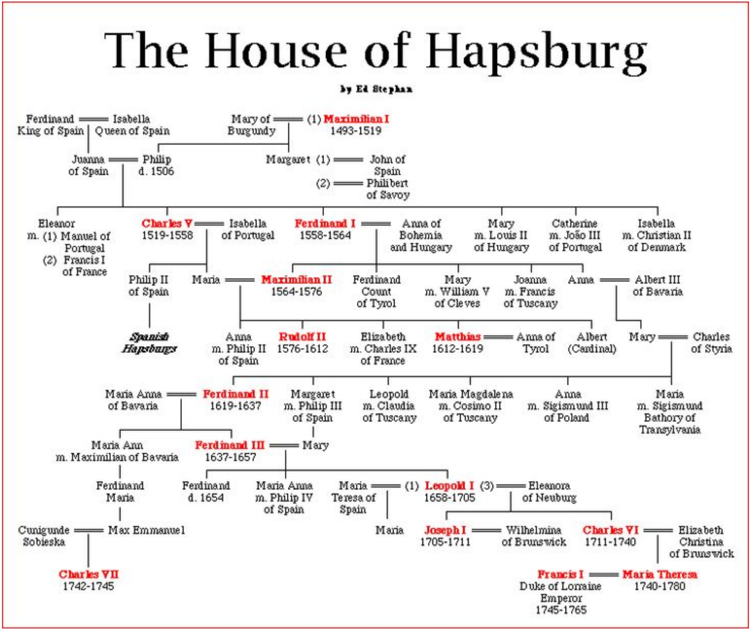


Dopravná sieť



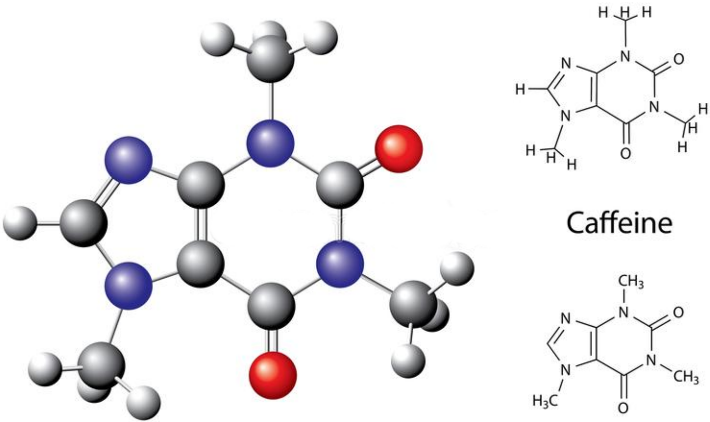
Sociálna sieť

Rodinný strom

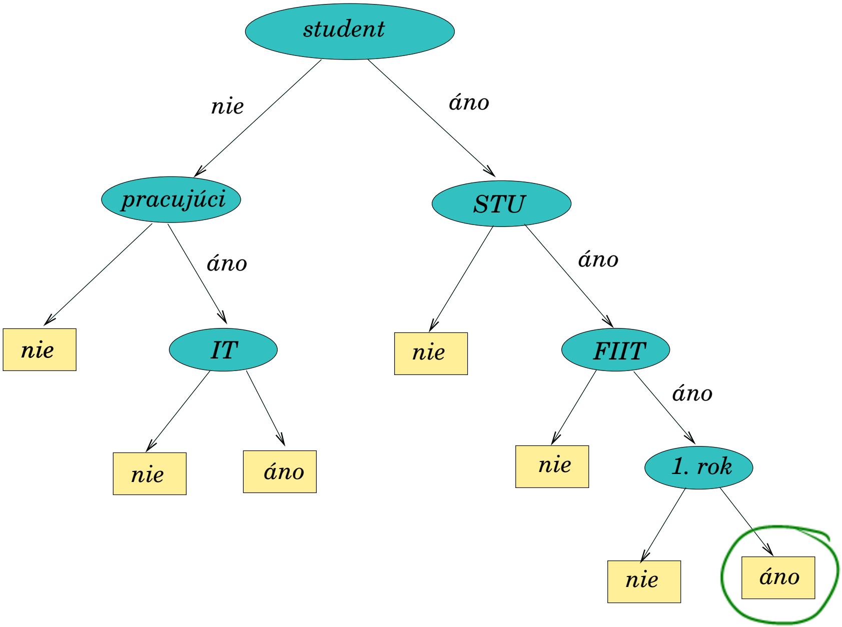


Neurónová sieť

Model molekuly



Rozhodovací strom



Teória grafov - úvod

Veľa situácií v matematike je možné vystihnúť pomocou schémy pozostávajúcej z

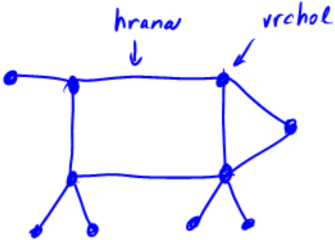
- množiny bodov
- spojníc medzi niektorými bodmi

Príklady aplikácií

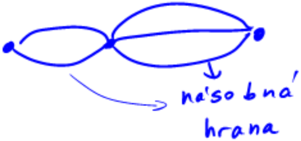
– sociálne siete; body reprezentujú ľudí a spojnice určité vzťahy medzi nimi (príbuzenstvo, priateľstvo)
– dopravné siete; križovatky a cesty
– komunikačné siete; počítače a ich prepojenia
– elektronické obvody; súčiastky a ich spojenia
– v chémii; zlúčeniny a reakcie medzi nimi
– v AI; rozhodovacie stromy

Príklady grafov

Obyčajné grafy



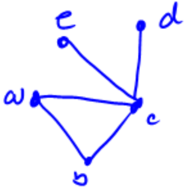
Grafy s násobnými hranami a slučkami



Reprezentácia grafu

Ako reprezentujeme grafy - napr. ako vstupy rôznych algoritmov?

Ilustrácia na grafe $H = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d, e\}$,
$E = \{ab, ac, bc, cd, ce\}$



1. **Zoznam susedov** $S = S(H)$:

$a : b, c;\ \ b : a, c;\ \ c : a, b, d, e;\ \ d : c;\ \ e : c$

2. **Matica susednosti** $A = A(H)$

- prvok $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } \{v_i v_j\} \in E(H) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$

$$A_{5x5} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dôležité triedy grafov

path

P_n – **cesta** s n vrcholmi; jej *dĺžka* je $n-1$ (počet jej hrán)

$V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ a $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4 \ldots, v_{n-1}v_n\}$

P_5

Matica susednosti $A(P_n)$

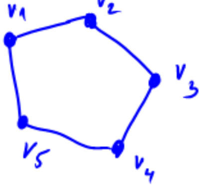
$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} \end{array}$$

cycle

C_n – **kružnica** rádu n, $(n \geq 3)$

$V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$; $E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4 \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$

C_5



Matica susednosti $A(C_n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Úplný graf

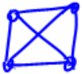
K_n – **úplný graf** rádu n (alebo: s n vrcholmi)

Každá dvojica vrcholov je spojená práve jednou hranou.

Matica susednosti $A(K_n)$

K_3

K_4



K_5

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Úplný bipartitný graf

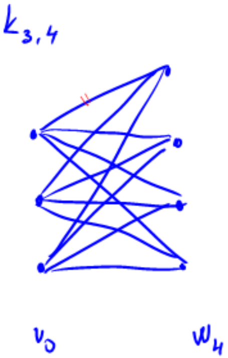
$K_{m,n}$ – **úplný bipartitný graf** rádu $m+n$ (alebo: s $m+n$ vrcholmi)

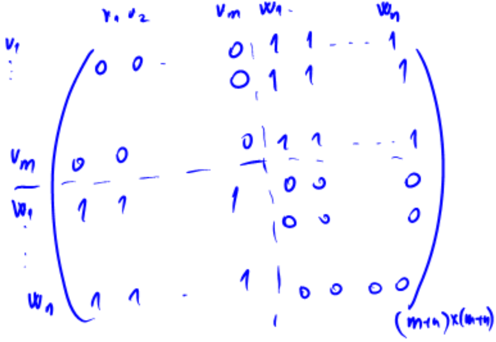
Množina vrcholov je rozdelená do dvoch disjunktných partií, s m a n vrcholmi. Každá dvojica vrcholov z rôznych partií je spojená hranou.

$V(K_{m,n}) = V_m \cup W_n$

$E(K_{m,n}) = \{v_i w_j; v_i \in V_m, i \in \{1,2,\dots m\}, w_j \in W_n, j \in \{1,2,\dots,n\}\}$

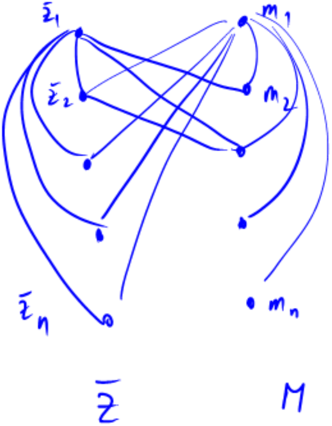
Matica susednosti $A(K_{m,n})$





Kokteilový graf

Kokteilový graf rádu n je graf pozostávajúci z n párov vrcholov, pričom každá dvojica vrcholov je spojená hranou okrem vrcholov tvoriacich páry.



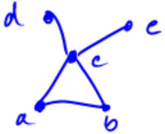
$$A$$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} \check{z}_1 & \cdots & \check{z}_n & m_1 & \cdots & m_n \end{matrix} \\
\begin{matrix} \check{z}_1 \\ \check{z}_2 \\ \vdots \\ \check{z}_n \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \; 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$2n \times 2n$

Stupeň vrchola

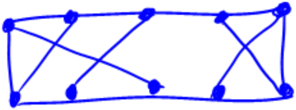
Stupeň vrchola $v \in V(G)$ je počet hrán **incidentných** s vrcholom v. Označuje sa $\deg(v)$



$\deg(a) = 2$
$\deg(c) = 4$
$\deg(d) = 1$

Pravidelný graf stupňa d je graf, ktorý má všetky stupne rovnaké.

stupeň 2



stupeň 3
pravidelný

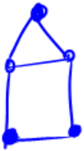
Stupeň vrchola - základné fakty

Fakt 1: V každom konečnom grafe je súčet stupňov všetkých vrcholov rovný dvojnásobku počtu hrán. Skrátene:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

→ každá hrana je v tom súčte započítaná 2x

Fakt 2: Každý konečný obyčajný graf má párny počet vrcholov nepárneho stupňa.



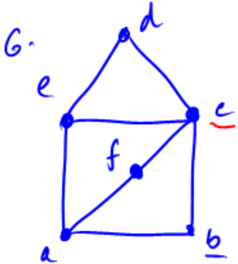
$$\underbrace{\sum \deg(v)}_{\text{aby bolo párne, tak ich je párny počet}} + \underbrace{\sum \deg(u)}_{\text{párne}} = \underbrace{2|E|}_{\text{párne}}$$

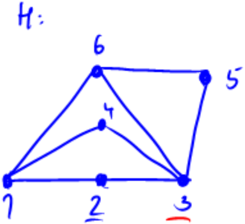
v → vrchol nepárneho stupňa

u - vrchol párneho stupňa

Izomorfné grafy

Dva grafy $G = (V, E)$ a $H = (V', E')$ sú **izomorfné**, ak existuje vzájomne jednoznačné zobrazenie (bijekcia) $f : V \to V'$ také, že pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ platí: $\{u, v\} \in E$ práve vtedy, keď $\{f(u), f(v)\} \in E'$.





IZOMORFIZMUS φ:

$a \to 1$
$b \to 2$
$c \to 3$
$d \to 5$
$e \to 6$
$f \to 4$

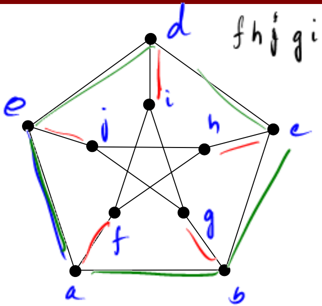
sú izomorfné?

$|V| = 6$ $\quad$ $|V'| = 6$

$|E| = 8$ $\quad$ $|E'| = 8$

max deg = 4 $\quad$ max deg 4

Petersenov graf



pravidelný stupňa 3

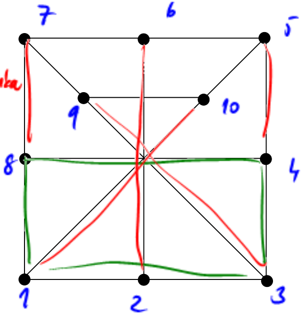
$|V| = 10$

$|E| = 15$

↓

nutná podmienka

↑



pravidelný stupňa 3

$|V'| = 10$

$|E'| = 15$

φ → izomorfizmus

a → 1

b → 2

c → 3

d → 4

e → 8

f → 10

g → 6

h → 9

i → 5

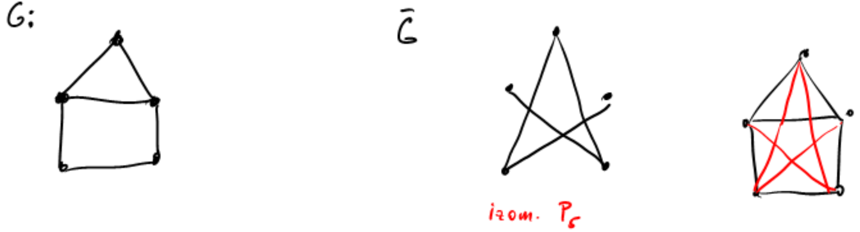
j → 7

↓

10 9 7 6 5

Komplement grafu

Ak $G = (V, E)$, tak jeho **komplement** je graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$, kde $\overline{E}$ je doplnok E v množine $V^{(2)}$ **všetkých** 2-prvkových podmnožín V.

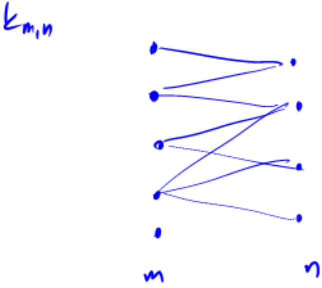


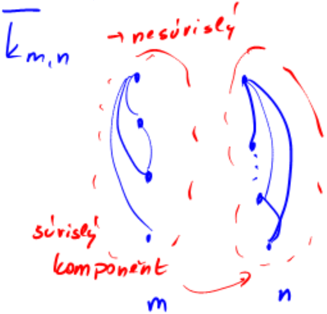
Graf sa nazýva **samokomplementárny** ak je izomorfný svojmu komplementu.

Súvislý graf

Graf G je **súvislý**, ak každé dva jeho vrcholy sú spojené cestou v G.

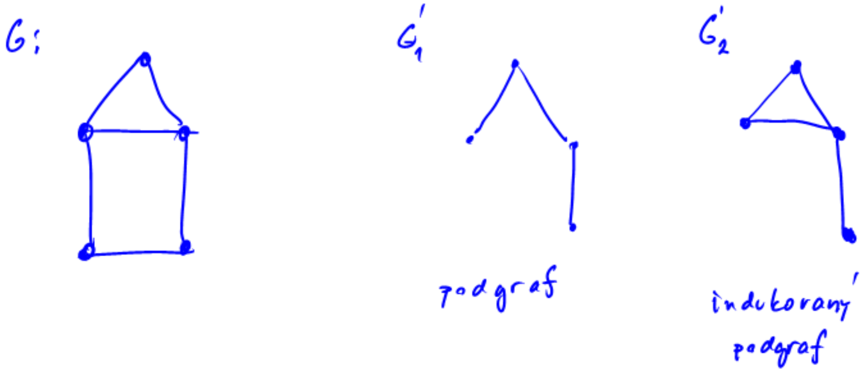
Príklad: Čo sú súvislé komponenty grafu $\overline{K_{m,n}}$?





Podgraf grafu

$G' = (V', E')$ je **podgraf** grafu $G = (V, E)$, ak $V' \subseteq V$ a $E' \subset E$. Tento podgraf je **indukovaný**, ak $E' = E \cap V'^{(2)}$.



Rád, vzdialenosť, priemer, obvod

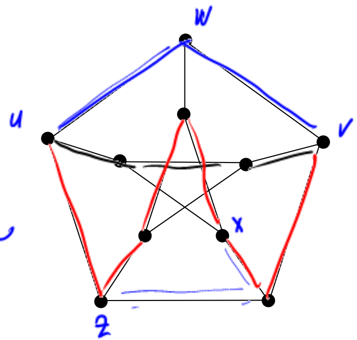
Rád grafu je počet vrcholov grafu $|V(G)|$.

Vzdialenosť $d(u,v)$ vrcholov $u, v \in V(G)$ v súvislom G je dĺžka *najkratšej* cesty spájajúcej u a v.

Priemer $\mathrm{diam}(G)$ súvislého grafu G je *najväčšia* vzdialenosť "nameraná" v G: $\mathrm{diam}(G) = \max\{d(u,v);\ u, v \in V(G)\}$.

Obvod $g(G)$ grafu G je dĺžka najmenšej kružnice v grafe G.

girth



diam (Petersen) = 2

g (Petersen) = 5

$d(u,v) = 2$

$d(u,w) = 1$

$d(z,u) = 1$

$d(z,v) = 2$

$d(z,w) = 2$

$d(x,z) = 2$

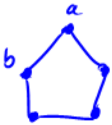
Príklad

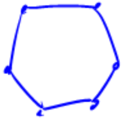
Určte priemery cesty, kružnice, úplného grafu, úplného bipartitného grafu a kokteilového grafu.

$diam(P_n) = n-1$

$diam(C_n) = \frac{n}{2}$ → n párne

$= \frac{n-1}{2}$ → n nepárne





$diam(K_{m,n}) = 2$

$diam(kokteil) = 2$

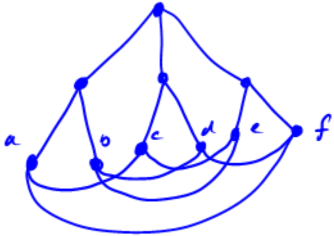
$diam(K_n) = 1$

Problém motivovaný navrhovaním sietí

Navrhnite sieť tak, aby jeden uzol bol pevnou linkou spojený s najviac 3 inými, ale aby ľubovoľná dvojica nespojených uzlov bola pevnými spojmi dosiahnuteľná len cez jeden uzol.

Aký najväčší počet uzlov môže taká sieť mať?

Grafová formulácia: Aký **najväčší rád** má graf priemeru 2 s maximálnym stupňom vrchola $d \leq 3$?



Petersenov graf

vrcholov = 10
hrán = 15
stupne = 3

Problém navrhovania sietí pre $d \geq 4$

Aký **najväčší rád** n má graf priemeru 2 s maximálnym stupňom vrchola $d \geq 4$?

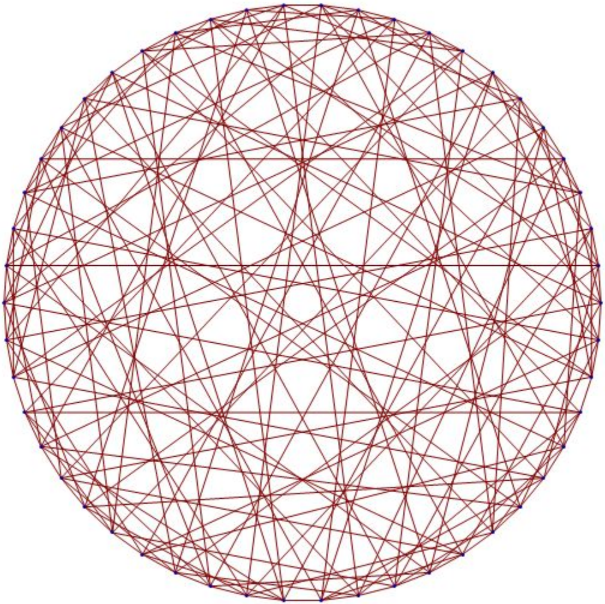
- Pre stupeň $d = 4$: **DÚ** $(12 \leq n \leq 20)$
- Pre stupeň $d = 5$: $n = 24$ – ťažké !
- Pre stupeň $d = 6$: Odpoveď nepoznáme!!! Najlepšia známa hodnota je 32 vrcholov.
- Pre stupeň $d = 7$: $n = 50$ – veľmi slávny Hoffman-Singletonov graf.
- Pre stupne $d > 7$: Slávny otvorený problém – maximum nepoznáme pre žiadnu hodnotu $d > 7$.

Malá výskumná úloha: Odvoďte horný odhad pre najväčší počet vrcholov grafu

(a) priemeru 2 a maximálneho stupňa d,

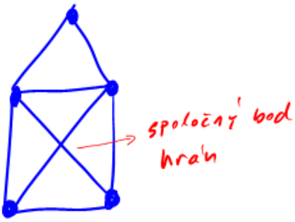
(b) priemeru k a maximálneho stupňa d.

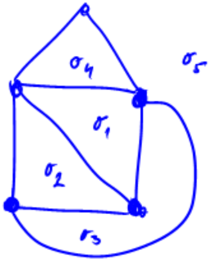
Hoffman-Singletonov graf



Rovinný graf

Graf je **rovinný**, ak ho je možné znázorniť v rovine tak, aby žiadne 2 krivky reprezentujúce jeho hrany nemali spoločný bod, ktorý by bol vnútorným bodom jednej z nich.





graf je rovinný

Oblasti grafu sú vymedzené rovinným grafom (t.j. jeho znázornením v rovine).

hranami

Odbočka - Dôkaz matematickou indukciou

Matematickou indukciou dokazujeme tvrdenia, ktoré platia pre všetky *prirodzené čísla* alebo pre určitú *nekonečnú postupnosť*.

Tvrdenie: Pre každé prirodzené číslo $n \geq k_0$ platí $T(n)$.

Dôkaz sa skladá z dvoch krokov:

1. Báza:

Ukážeme, že tvrdenie platí pre najmenšie číslo z postupnosti, tj. dokazujeme platnosť $T(k_0)$.

2. Indukčný krok:

Ukážeme, že pre ľubovolné $k \geq k_0$ z platnosti $T(k)$ vyplýva platnosť $T(k+1)$.

$\forall k \geq k_0 : \quad T(k) \Rightarrow T(k+1)$

Predpoklad platnosti $T(k)$ sa nazýva *indukčný predpoklad*.

$\forall k \geq k_0+1 \quad T(k-1) \Rightarrow T(k)$

Eulerov vzorec

V súvislom rovinnom grafe s n vrcholmi, h hranami a o oblasťami platí
$$n - h + o = 2 \quad .$$

Dôkaz: Indukciou podľa počtu hrán h grafu G

Ak $h = 0$, potom $n = 1$, $o = 1$ a vzorec platí.

V súvislom rovinnom grafe s n vrcholmi, h hranami a o oblasťami platí

$$n - h + o = 2$$

.

Dôkaz: Indukciou podľa počtu hrán h grafu G

Ak $h = 0$, potom $n = 1$, $o = 1$ a vzorec platí.

1. Veta platí pre súvislé grafy bez kružníc.

$n = 5$ | n

$h = 4$ | $h = n-1$

$o = 1$ | $o = 1$

$5 - 4 + 1 = 2$ ✓

$n - (n-1) + 1 = 2$ ✓

Eulerov vzorec

V súvislom rovinnom grafe s n vrcholmi, h hranami a o oblasťami platí
$$n - h + o = 2$$
.

Dôkaz: Indukciou podľa počtu hrán h grafu G

Ak $h = 0$, potom $n = 1$, $o = 1$ a vzorec platí.

1. Veta platí pre súvislé grafy bez kružníc.
2. Uvažujme súvislý rovinný graf G, ktorý obsahuje kružnicu, napr. C.

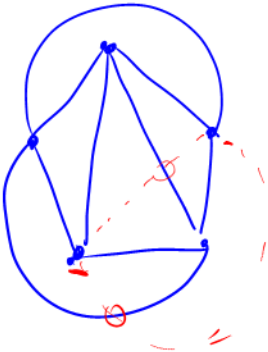
Nech e je hrana v C; potom $G - e$ vzniknutý z G odstránením e ostane súvislý, ale odstránením e sa spoja dve oblasti do jednej.

Teda pre rovinný $G - e$ s n vrcholmi, $h - 1$ hranami a $o - 1$ oblasťami podľa indukčného predpokladu platí $n - (h - 1) + (o - 1) = 2$.

Ale potom triviálne $n - h + o = 2$.

Úloha: Overte rovinnosť úplného grafu K_5.

$n - h + \sigma = 2$?



$n = 5$

$h = 10$

$\sigma = ?$

$5 - 10 + \sigma = 2$

$\sigma = 7$

graf nie je rovinný

$\rightarrow \quad 3\sigma \leq 2h$

vzťah medzi h a σ?

$\sigma \leq \frac{2h}{3}$

$\sigma \leq \frac{20}{3} \Rightarrow \sigma < 7$

$\sigma \leq 6.6$

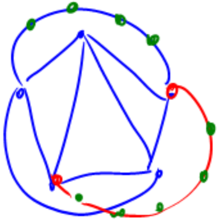
Kuratowského veta

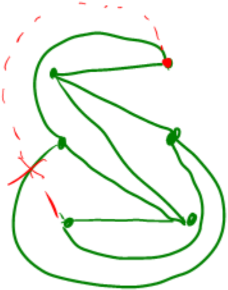
Cvičenie: Ukážte, že podgraf rovinného grafu je rovinný.

Graf H je **homeomorfný** grafu G, ak H vznikne z G nahradením ľubovoľnej podmnožiny hrán cestami (ľubovoľnej dĺžky).

H je homeomorfný s G

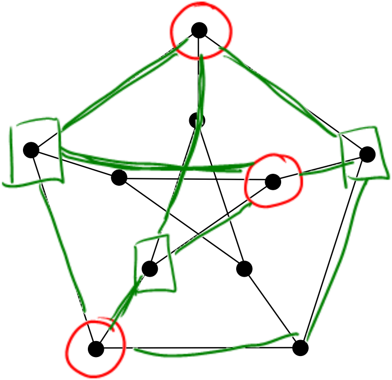
Kuratowského veta (1930) Graf je rovinný práve vtedy, keď neobsahuje podgraf homeomorfný grafu K_5 alebo $K_{3,3}$.





Kuratowského veta - príklad

V Petersenovom grafe nájdite podgraf homeomorfný grafu $K_{3,3}$.



Kazimierz Kuratowski (1896 - 1980)

Poľský matematik.
Venoval sa topológii a teórii metrických priestorov.