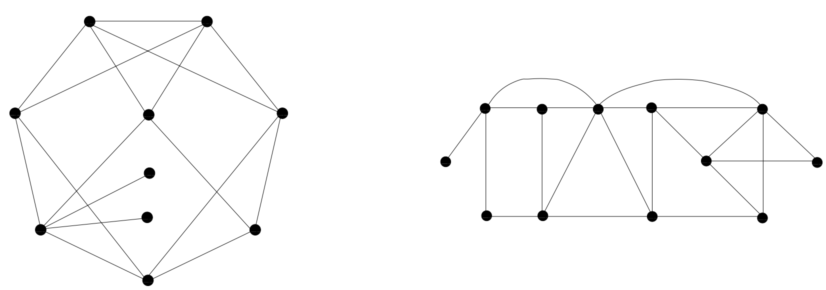
Algebra a diskrétna matematika

Úlohy na precvičenie

6. týždeň

Úloha 1. Zostrojte kostru Petersenovho grafu pomocou
(a) prehľadávania do hĺbky
(b) prehľadávania do šírky.
Riešte analogickú úlohu pre K_n pre ľubovolné $n \geq 3$.

Úloha 2. Pre dané grafy zostrojte kostru pomocou prehľadávania do hĺbky a taktiež pomocou prehľadávania do šírky.

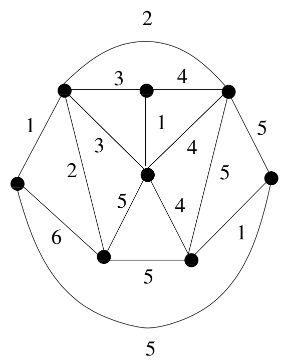


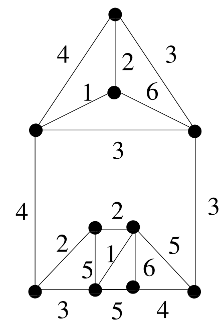
Úloha 3. Ukážte, že ak G je súvislý graf, tak kostra vybudovaná z vrchola v prehľadávaním do šírky nám určuje vzdialenosť vrchola v v grafe G a ľubovoľného iného vrchola v G (ako?).

Úloha 4. Čo všetko z uvedeného platí o výsledkoch prehľadávania do hĺbky a do šírky úplného grafu K_9?

a) prehľadávanie do hĺbky nájde vždy cestu
b) prehľadávanie do šírky nájde vždy hviezdu
c) prehľdávaním do hĺbky nevznikne nikdy húsenica neizomorfná s cestou
d) výsledok prehľadávania do šírky nebude nikdy cesta
e) prehľadávania do hĺbky aj do šírky môžu dať izomorfné grafy
f) prehľadávanie do hĺbky môže, ale nemusí nájsť cestu

Úloha 5. Pomocou Kruskalovho algoritmu nájdite najlacnejšiu kostru v daných grafoch.





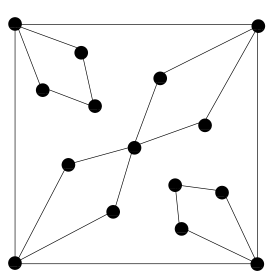
Úloha 6. Nájdite perfektné párovanie ku grafom z príkladu 2.

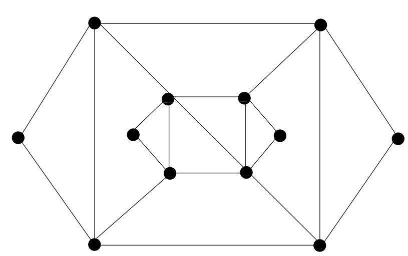
Úloha 7. Ukážte, že ak v strome existuje perfektné párovanie, tak je jediné.

Úloha 8. Zostrojte graf na aspoň $3t$ vrcholoch, v ktorom má každý vrchol stupeň aspoň 2 a ktorého najväčšie párovanie obsahuje nanajvýš $2t$ vrcholov.

Úloha 9. Zistite, či Petersenov graf má
(a) hamiltonovskú kružnicu,
(b) hamiltonovskú cestu.

Úloha 10. Nakreslite dané grafy jedným ťahom.





Úloha 11. Nech G je graf s vrcholom v stupňa 3 a nech okolie bodu v tvoria vrcholy x, y, z. Nech H je graf, ktorý z G vznikne vynechaním vrchola v a hrán incidentných s ním a pridaním 3 nových vrcholov a, b, c a 6 nových hrán ax, by, cz, ab, bc, ca. Ukážte, že G má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď ju má H. Ukážte, že analogické tvrdenie platí pre hamiltonovské cesty.

Úloha 12. Pomocou Petersenovho grafu zostrojte pre každé párne $n \geq 10$ súvislý graf na n vrcholoch bez hamiltonovskej kružnice, v ktorom má každý vrchol stupeň 3.

Úloha 13. Nech G je graf s hamiltonovskou cestou. Ukážte na príklade, že kostra v G zostrojená pomocou prehľadávania do hĺbky nemusí nutne byť hamiltonovskou cestou.

Úloha 14. Ukážte, že každý súvislý graf na aspoň 2 vrcholoch obsahuje aspoň 2 vrcholy v také, že graf $G - v$ je súvislý.

Úloha 15. Ukážte, že v pravidelnom grafe G stupňa d platí: G má chromatický index d vtedy a len vtedy, keď jeho hranovú množinu možno rozlozit' na d perfektných párovaní.

Úloha 16. Graf G nazveme maximálny nehamiltonovský, ak nemá hamiltonovskú kružnicu, ale zároveň ak pre každé 2 nesusedné vrcholy u, v platí, že $G + uv$ (pridáme 'novú' hranu uv) má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte, že Petersenov graf je maximálny nehamiltonovský.

Úloha 17. V danom grafe nájdite najlacnejšiu hamiltonovskú kružnicu.