Princíp inklúzie a exklúzie, systémy rôznych reprezentantov, lineárne rekurencie

Algebra a diskrétna matematika

Prednáška č. 8

Kombinatorika - zopakovanie

Variácie k-tej triedy z n prvkov s opakovaním: všetky možné usporiadané výbery k prvkov z n prvkov; prvky sa môžu opakovať

$$V^*(n,k) = n^k$$

Variácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania: všetky možné usporiadané výbery navzájom rôznych k prvkov z n prvkov

$$V(n,k) = n(n-1)...(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutácia n prvkov: variácia n-tej triedy z n prvkov bez opakovania

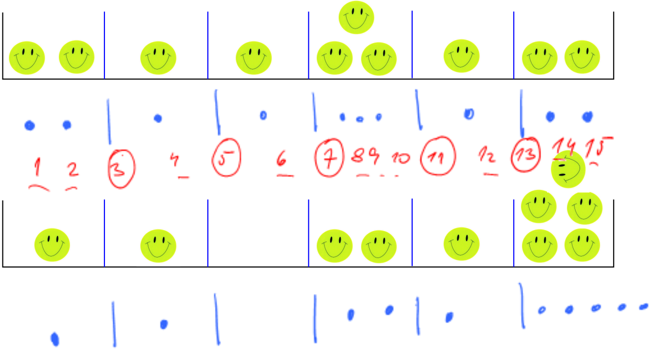
$$P(n) = V(n,n) = n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

Kombinácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania: všetky možné neusporiadané výbery *navzájom rôznych* k prvkov z n prvkov

$$C(n,k) = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Príklad

Príklad 1: Koľkými spôsobmi možno umiestniť $\overset{n}{10}$ smajlíkov do $\overset{k}{6}$ priečinkov?



$$\binom{\overset{n\ +\ k-1}{10+5}}{5} = \binom{10+5}{10} = \binom{15}{10} = \frac{15!}{10!\,5!} = 3003$$

Príklad 1 - zovšeobecnenie

Príklad 1z: Koľkými spôsobmi možno rozdeliť n identických objektov do k očíslovaných skupín?

Riešenie: Predstavme si, že máme $n+k-1$ vyhradených miest v jednom riadku.

Rozdeliť n identických objektov do k očíslovaných skupín je ekvivalentné umiestneniu $k-1$ priehradiek do našich $n+k-1$ vyhradených miest (a n nerozlíšiteľných objektov do zvyšných n miest).

Teda hľadaný počet je počet kombinácii $k-1$ miest spomedzi vyhradených $n+k-1$ miest, čiže

$$C(n+k-1, k-1) = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

Príklad 2: Koľkými rôznymi spôsobmi si môžeme vybrať 4 smajlíkov (nie nevyhnutne rôznych), ak máme k dispozícii 8 typov smajlíkov?

Riešenie:

$\rightarrow (8, 8, 8, 8)$

$\rightarrow (1, 1, 2, 1) = (1, 1, 1, 2)$

$\rightarrow (5, 2, 4, 8) = (2, 4, 5, 8)$

$$1 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le 8$$

$a \le b$

$a < b+1$

$$1 \le \underbrace{x_1}_{y_1} < \underbrace{x_2+1}_{y_2} < \underbrace{x_3+2}_{y_3} < \underbrace{x_4+3}_{y_4} \le 11$$

$y_1 \neq y_2 \neq y_3 \neq y_4$

$$\binom{11}{4} = \frac{11!}{4!\,7!} = 330$$

Kombinácie s opakovaním - zovšeobecnený príklad 2

Príklad 2z: Aký je počet tzv. kombinácií k-tej triedy z n prvkov *s opakovaním*, t.j. počet všetkých *neusporiadaných* výberov k prvkov (nie nutne navzájom rôznych) z n prvkov?

Ekvivalentne, aký je počet k-prvkových postupností $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ prirodzených čísel takých, že $1 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_k \le n$?

Riešenie: Určenie počtu uvedených postupností je ekvivalentné určeniu počtu rastúcich postupností

$$1 \le x_1 < x_2 + 1 < x_3 + 2 < \dots < x_k + (k-1) \le n + k - 1,$$

a tých je toľko, koľko je neusporiadaných výberov k *navzájom rôznych* čísel z $\{1, 2, \dots, n+k-1\}$,

čo sú kombinácie k prvkov z $n + k - 1$ prvkov, čiže

$$C^*(n,k) = C(n+k-1, k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Príklady

Príklad 3: Peňaženka obsahuje aspoň 5 bankoviek z každej z týchto hodnôt: $5€, 10€, 20€, 50€$. Ak z nej náhodne vyberieme 5 bankoviek, koľko rôznych výberov môžeme urobiť?

$5, 10, 10, 50, 20$

$5, 10, 10, 20, 50$

$1 \quad x_2 \quad 2 \quad x_3 \quad 3 \quad x_4 \quad 4 \quad x_5$

$$1 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5 \le 4$$

$$1 \le x_1 < x_2+1 < x_3+2 < x_4+3 < x_5+4 \le 8$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} = 56$$

Príklad 4: Koľkými rôznymi spôsobmi je možné rozdeliť 5 bankoviek v hodnote $50€$ medzi 4 ľudí?

$$\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

$č_1$	$č_2$	$č_3$	$č_4$
1	1	0	3

$\bullet \mid \bullet \mid \mid \bullet \bullet \bullet$

Príklad 5: Koľko nových slov môžeme vytvoriť preusporiadaním písmen v slove ABRAKADABRA?

$n = 11$ - všetky písmená

A - 5x
B - 2x
R - 2x
K - 1x
D - 1x

$$\frac{11!}{5!\,2!\,2!} = 83160$$

Permutácie s opakovaním

Permutácie n objektov rozdelených na s *skupiniek* z k_i $(1 \leq i \leq s)$ nerozlíšiteľných objektov v každej skupinke, t.j. $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$: Ich počet je

$$P^*(n; k_1, k_2, \ldots, k_s) = \frac{n!}{k_1!k_2! \ldots k_s!} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_s}$$

Multinomická veta: Pre ľubovoľné čísla $x_1, x_2, \ldots, x_m \in R$ a celé n platí

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$$

Príklad

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$$

Príklad 6: Pomocou multinomickej vety rozpíšte

$$(x+y+z)^4 = \binom{4}{0,0,4} x^0 y^0 z^4 + \binom{4}{0,4,0} x^0 y^4 z^0 + \binom{4}{4,0,0} x^4 y^0 z^0 + \binom{4}{0,1,3} x^0 y^1 z^3 +$$

$$+ \binom{4}{1,0,3} x^1 y^0 z^3 + \binom{4}{0,3,1} x^0 y^3 z^1 + \binom{4}{1,3,0} x^1 y^3 z^0 + \binom{4}{3,0,1} x^3 y^0 z^1 +$$

$$+ \binom{4}{3,1,0} x^3 y^1 z^0 + \binom{4}{1,1,2} x^1 y^1 z^2 + \binom{4}{1,2,1} x^1 y^2 z^1 + \binom{4}{2,1,1} x^2 y^1 z^1 +$$

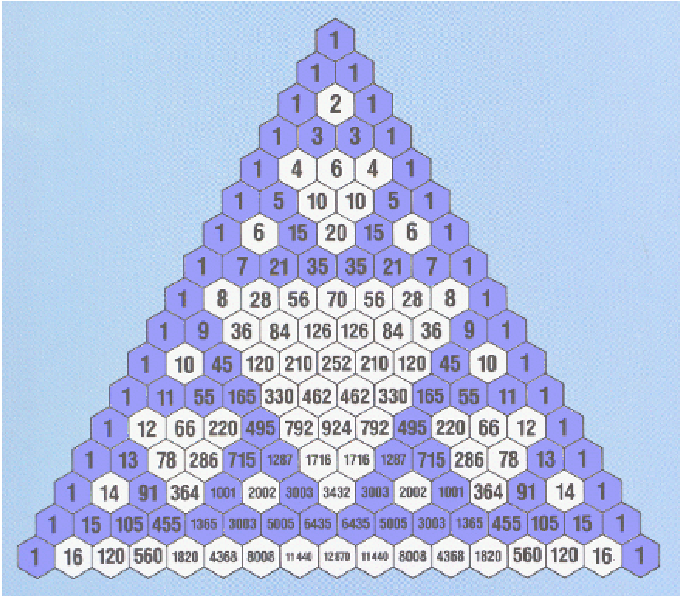
$$+ \binom{4}{0,2,2} x^0 y^2 z^2 + \binom{4}{2,0,2} x^2 y^0 z^2 + \binom{4}{2,2,0} x^2 y^2 z^0 = x^4 + y^4 + z^4 +$$

$$+ 4yz^3 + 4xz^3 + 4y^3z + 4xy^3 + 4x^3z + 4x^3y + 12xyz^2 + 12xy^2z +$$

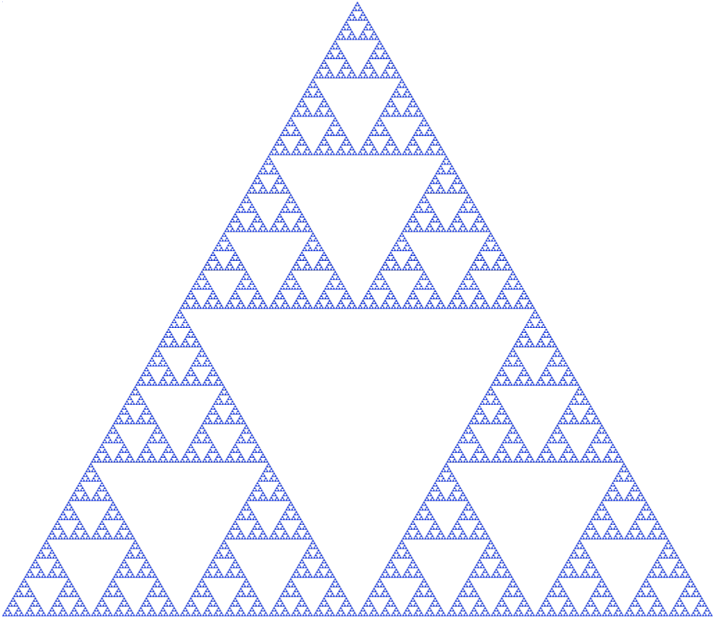
$$+ 12x^2yz + 6y^2z^2 + 6x^2z^2 + 6x^2y^2$$

$$\binom{4}{0,0,4} = \frac{4!}{0!\,0!\,4!} = 1 \qquad \binom{4}{0,1,3} = \frac{4!}{0!\,1!\,3!} = 4 \qquad \binom{4}{1,1,2} = \frac{4!}{1!\,1!\,2!} = 12 \qquad \binom{4}{2,2,0} = \frac{4!}{2!\,2!\,0!} = 6$$

Pascalov trojuholník



Sierpińského trojuholník

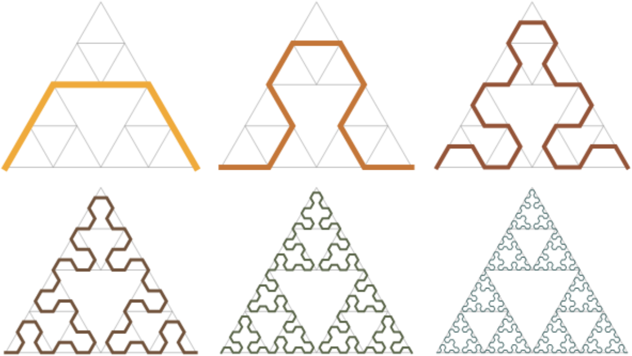


Sierpińského trojuholník - fraktál

Sierpińského trojuholník je **fraktál** - štruktúra, ktorá sa 'samoopakuje' v čoraz menšej mierke.

Sierpińského krivka

Sierpińského trojuholník sa dá zostrojiť ako **krivka** v rovine.



Je to príklad krivky nekonečnej dĺžky, ktorá ohraničuje plochu konečného obsahu. Jej dĺžka rastie exponenciálne s počtom iterácií.

Historická poznámka

Wacław Sierpiński (1882-1969) - poľský matematik

Mozaiky v talianskych katedrálach (12. stor.).

Princíp zapojenia a vypojenia (inclusion-exclusion principle)

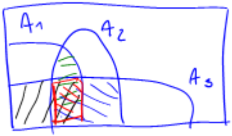
Pre konečné množiny A_1 a A_2 platí:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Zložitejší príklad pre 3 konečné množiny:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$



Princíp zapojenia a vypojenia

Vo všeobecnosti máme tzv. **princíp zapojenia a vypojenia** pre konečné množiny $A_1, \ldots, A_n$:

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k < \ell \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

Kratší zápis:

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{\emptyset \ne I \subset \{1,2,\ldots n\}} (-1)^{|I|-1} |\cap_{i \in I} A_i|$$

Princíp zapojenia a vypojenia - odvodenie

$$|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,2,\ldots n\}} (-1)^{|I|-1} |\cap_{i \in I} A_i|$$

<u>Krátke odvodenie:</u>

Každý prvok $x \in \cup_{i=1}^{n} A_i$ je na ľavej strane započítaný presne raz.
Stačí ukázať, že x je presne raz započítaný aj na pravej strane.

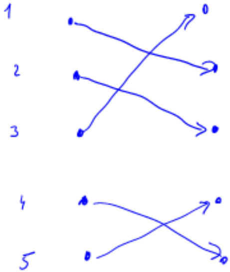
Nech x patrí do presne t množín spomedzi A_i; môžeme predpokladať, že x je v $A_1, \ldots, A_t$ a nie v $A_{t+1}, \ldots, A_n$. Uvedomme si, že x sa vyskytuje v prieniku každého výberu z množín $A_1, \ldots, A_t$. *Počet* prienikov i množín z výberu $A_1, \ldots, A_t$ vyjadruje číslo $\binom{t}{i}$.
Prepíšeme binomickú vetu pre $(1-1)^t$ do tvaru

$$1 = \binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \ldots + (-1)^{t-1} \binom{t}{t}$$

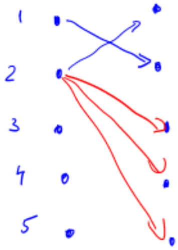
Z toho vyplýva, že prvok x sa celkovo započíta len raz na pravej strane v rovnosti zapojenia-vypojenia.

Príklad 7: Koľkými spôsobmi si 5 pánov môže preusporiadať svoje klobúky, aby žiaden z nich nemal na hlave svoj vlastný klobúk?

$n = 5$



páni klobúky



$P_1: \; 4 \cdot \begin{cases} 2 \cdot 1 \\ \text{alebo} \\ 3 \cdot 3 \end{cases}$

$4 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\underline{44}}$

$120\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right)$

$120 \cdot \frac{60 - 20 + 5 - 1}{120}$

$5!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = \underline{\underline{44}}$

Princíp zapojenia a vypojenia - Páni s klobúkmi

Všeobecná formulácia: Aký je počet usporiadaní n prvkov na očíslovaných miestach $1, \ldots, n$ pričom sa žiaden prvok i neocitne na mieste s číslom i?

Riešenie: Nech A_i je množina permutácií fixujúcich i.

$|A_i| = (n-1)! \qquad |A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$|A_i \cap A_j \cap A_m| = (n-3)! \qquad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}| = (n-k)!,$

Podľa princípu zapojenia a vypojenia máme

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!}$$

$n! - 1$ fixovaný $(n-1)! \cdot n + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)!$

$P_i \Leftrightarrow k_i$ 2 fixované 3 fix

Odpoveď:

$$n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = n! \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{1}{k!} \right)$$

$P_i \Leftrightarrow k_i$

$P_j \Leftrightarrow k_j$

Príklad 8: S akou pravdepodobnosťou "chaos v šatni" skončí tak, že žiaden z n pánov nedostane svoj vlastný klobúk?

Riešenie:

Pravdepodobnosť chápeme intuitívne ako pomer počtu priaznivých možností (viď vyššie) ku počtu všetkých možností.

V našom prípade je všetkých možností $n!$.

$$P = n!\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\right)/n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!} \approx 1/e \approx 0.368 \quad \text{pre} \quad n \to \infty$$

Princíp zapojenia a vypojenia - Príklad

Príklad 9: Koľkými spôsobmi je možné rozdeliť 6 riešiteľov na riešenie 4 projektov tak, aby každý projekt niekto riešil?

$n = 4$

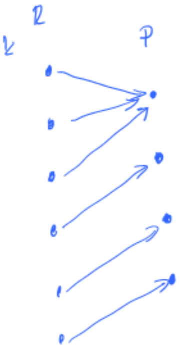
$k = 6$

POMOCOU VZORCA

$$\binom{4}{0}4^6 - \binom{4}{1}3^6 + \binom{4}{2}2^6 - \binom{4}{3}1^6$$

$$= 4^6 - 4\cdot 3^6 + 6\cdot 2^6 - 4$$

$$= \underline{\underline{1560}}$$



$$\binom{6}{3}\cdot 4\cdot 3! + \binom{6}{2}\cdot 2\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}$$

$$480 + 1080 = 1560$$

Princíp zapojenia a vypojenia - zovšeobecnený príklad

Všeobecná formulácia:
Aký je počet všetkých surjektívnych zobrazení $[k] \to [n]$?

Riešenie:
Ak A značí všetky zobrazenia $[k] \to [n]$, tak $|A| = n^k$.

Nech $A_i = \{f : [k] \to [n];\ f(x) \neq i \ \text{ pre } \ x \in [k]\}$.

Potom $|A_i| = (n-1)^k$, $\quad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = (n-j)^k$

Podľa princípu inklúzie a exklúzie

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k$$

Počet všetkých surjekcií je

$$|S| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = n^k - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k$$

$$|S| = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \binom{n}{j} (n-j)^k$$

Systémy rôznych reprezentantov, alebo **Transverzály**

Hovoríme, že sústava množín $A_1, A_2, \ldots, A_n$ má **systém rôznych reprezentantov**, alebo **transverzálu**, ak existuje n *navzájom rôznych* prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takých, že $a_i \in A_i$ pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Príklad 10: Nájdite systém rôznych reprezentantov pre $A_1 = \{1, 3, 6\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 8\}$, $A_3 = \{3, 5\}$, $A_4 = \{4, 8\}$, $A_5 = \{1, 5\}$.

$a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_3 = 3$ $a_4 = 4$ $a_5 = 5$

iný systém: $a_1 = 3$ $a_2 = 8$ $a_3 = 5$ $a_4 = 4$ $a_5 = 1$

Príklad 11: Nájdite transverzálu pre
$A_1 = \{1, 3\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 8\}$, $A_3 = \{3, 5\}$, $A_4 = \{2, 3, 4, 5\}$, $A_5 = \{1, 5\}$, $A_6 = \{2, 5, 6, 7, 8\}$, $A_7 = \{2, 4, 6, 7\}$, $A_8 = \{1, 3, 5\}$.

$a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_3 = 3$ $a_4 = 4$ $a_5 = 5$ $a_6 = 6$ $a_7 = 7$ $a_8 = ?$

3 5 1

neexistuje

Systémy rôznych reprezentantov

Veta (Ph. Hall, 1935)

Sústava množín $A_1, A_2, \ldots, A_n$ má **systém rôznych reprezentantov** práve vtedy, keď pre každú $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ platí:

$$|\cup_{i \in I} A_i| \geq |I| \qquad \text{(Hallova podmienka).}$$

V našom príklade 11, kde

$A_1 = \{1, 3\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 8\}$, $A_3 = \{3, 5\}$, $A_4 = \{2, 3, 4, 5\}$,
$A_5 = \{1, 5\}$, $A_6 = \{2, 5, 6, 7, 8\}$, $A_7 = \{2, 4, 6, 7\}$, $A_8 = \{1, 3, 5\}$,

vezmime $I = \{1, 3, 5, 8\}$,

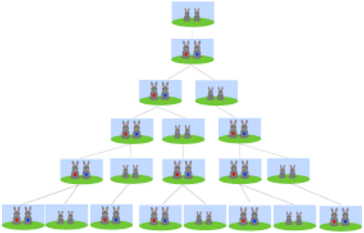
vidíme, že $3 = |A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_8| < |I| = 4$,

t.j. nie je splnená Hallova podmienka, a teda v tomto prípade systém rôznych reprezentantov neexistuje.

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \ldots$$

Úloha z r. 1202 - **Fibonacci**

Pár králikov privádza raz za mesiac na svet dve mláďatá (samčeka a samičku). Novonarodené králiky prinedú na svet ďalší pár králikov dva mesiace po svojom narodení. Ak na začiatku bol jeden pár králikov, koľko ich bude o rok?



Nech F_n označuje počet párov králikov v n-tom mesiaci od začiatku roka.

Potom $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ a $F_0 = 1, F_1 = 1$.

Uvedený vzťah nazývame **lineárna rekurencia**.

Hodnoty pre F_0, F_1 sú **počiatočné podmienky**.

Lineárne rekurencie

Vedeli by sme vyriešiť

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (*)$$

bez hodnôt $F_0 = 1, F_1 = 1$?

Riešenie skúsime hľadať v tvare r^n.

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$$
$$r^2 = r + 1$$

Kvadratická rovnica s koreňmi r_1, r_2.

Ak r_1, r_2 spĺňajú kvadratickú rovnicu, tak r_1^n, r_2^n spĺňajú rovnicu $(*)$:

$$r_1^2 = r_1 + 1$$
$$r_1^n = r_1^{n-1} + r_1^{n-2}$$
$$\alpha r_1^n = \alpha r_1^{n-1} + \alpha r_1^{n-2}$$

Podobne $$\beta r_2^n = \beta r_2^{n-1} + \beta r_2^{n-2}$$

Z uvedeného vyplýva, že aj $F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ spĺňajú $(*)$.

Teraz chceme vypočítať α, β tak, aby $F_0 = 1, F_1 = 1$.

Pre $n = 0$ a $n = 1$ dostaneme

$$F_0 = \alpha + \beta = 1$$
$$F_1 = \alpha r_1 + \beta r_2 = 1$$

Pomocou Cramerovho pravidla nájdeme riešenie

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{r_2 - 1}{r_2 - r_1} \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1}$$

$$F_n = \frac{r_2 - 1}{r_2 - r_1}\, r_1^n + \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1}\, r_2^n$$

Lineárne rekurencie

$$F_n = \frac{r_2 - 1}{r_2 - r_1}\, r_1^n + \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1}\, r_2^n$$

Aké hodnoty majú r_1, r_2?

Platí pre ne $r_i^2 = r_i + 1$.

Sú teda koreňmi **charakteristickej rovnice**

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Príklad 12: Nájdite explicitné riešenie rekurentnej rovnice

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$$

s podmienkami $a_0 = 6, a_1 = -1$.

$r^n = 4r^{n-1} - 3r^{n-2} \quad / : r^{n-2}$

$r^2 = 4r - 3 \qquad r^2 - 4r + 3 = 0$

$(r-3)(r-1) = 0$

$r_1 = 1 \quad r_2 = 3$

$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$

$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 3^n = \alpha + \beta \cdot 3^n$

$a_0 = 6 \Rightarrow n = 0 \qquad 6 = \alpha + \beta \cdot 3^0 = \alpha + \beta$

$a_1 = -1 \Rightarrow n = 1 \qquad -1 = \alpha + \beta \cdot 3^1 = \alpha + 3\beta$

$6 = \alpha + \beta$

$-1 = \alpha + 3\beta$

$-7 = 2\beta$

$\beta = -3{,}5$

$\alpha = 6 - \beta = 6 - (-3{,}5) = 9{,}5$

$$\boxed{a_n = 9{,}5 - 3{,}5 \cdot 3^n}$$

Lineárne rekurencie - zovšeobecnenie

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_k a_{n-k} = 0$$

Riešenie hľadáme v tvare x^n.

$$x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \cdots - c_k x^{n-k} = 0$$

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x - c_k = 0$$

Vo všeobecnosti dostenme k riešení $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Ak sú všetky rôzne, tak **všeobecné riešenie** má tvar

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

Hodnoty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dopočítame z počiatočných podmienok pre $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.