Algebra a diskrétna matematika

Prednáška č. 1

doc. RNDr. Jana Šiagiová, PhD.

Stavebná fakulta STU, Radlinského 11, C-412

jana.siagiova@stuba.sk

Konzultácie: podľa dohody

Podmienky úspešného absolvovania predmetu

- **Priebežný test - 20 bodov**
  v 9. týždni z učiva preberaného počas 1. až 8. týždňa
- **Záverečný test - 80 bodov**
  v skúškovom období
- **Podmienkou účasti na skúške** je získanie aspoň 8 bodov z priebežného testu.
- **Záverečné hodnotenie** sa počíta z celkového počtu bodov z oboch testov a hodnotí sa známkou podľa stupnice:

A – 92 - 100 %

B – 83 - 91 %

C – 74 - 82 %

D – 65 - 73 %

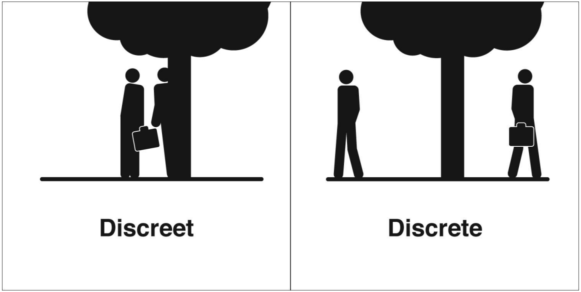
E – 56 - 64 %

FX – 0 - 55 %

Diskrétna matematika ???

diskrétny

1. zachovávajúci mlčanlivosť, takt, ohľaduplnosť; svedčiaci o tom (op. indiskrétny)



2. odb. nespojitý; oddelený:

Diskrétna matematika

Diskrétna matematika je pomerne nový odbor matematiky, ktorý sa zaoberá diskrétnymi matematickými štruktúrami, teda takými, ktoré môžu byť charakterizované celými číslami a sú teda „počítateľné“. Je to „opak“ matematiky, ktorá sa zaoberá spojitými štruktúrami charakterizovanými reálnymi číslami, kam patrí hlavne matematická analýza. Rozvoj diskrétnej matematiky podmienil predovšetkým rozvoj informatiky. V skutočnosti sa často diskrétna matematika chápe ako časť informatiky. Niektorí matematici zaraďujú do diskrétnej matematiky len nové matematické disciplíny, ktoré vznikli v súvislosti s rozvojom výpočtovej techniky (S. V. Jablonskij).

Disciplíny diskrétnej matematiky [upraviť | upraviť kód]

- Diskrétna pravdepodobnosť
- Kombinatorika
- Kombinatorická analýza
  - Konečný kalkul
  - Teória diferenčných rovníc
- Matematická logika
- Teória automatov
- Teória čísel
- Teória funkcionálnych systémov
- Teória grafov a sietí
- Teória hier
- Teória kódovania
- Teória vypočítateľnosti
- Teória zložitosti

Hlavné preberané témy

- **Lineárna algebra**
  sústavy lineárnych rovníc, Gaussova eliminačná metóda, matice, operácie s maticami, inverzná matica, determinanty, Cramerove pravidlo
- **Teória grafov**
  matica susednosti, sledy, cesty, kružnice, planárne grafy, izomorfizmus, stromy, kostry, enumerácia, prehľadávanie, najkratšia cesta, eulerovské ťahy, siete, toky, turnaje
- **Kombinatorika**
  binomické koeficienty, variácie, permutácie, kombinácie, lineárne rekurencie, princíp inklúzie a exklúzie, systémy rôznych reprezentantov
- **Algebraické štruktúry**
  binárna operácia a jej vlastnosti, grupy, permutačné grupy, konečné polia

Odporúčaná literatúra

- Kvasnička, V. - Pospíchal J.: Algebra a diskrétna matematika. Bratislava: STU v Bratislave, 2008. ISBN 978-80-227-2934-5

- http:www2.fiit.stuba.sk/$\sim$kvasnicka/Freebooks/AlgebraaDiskretnaMatematika$_$all.pdf

- Každý týždeň bude zverejnený zoznam príkladov na precvičenie a stručný prehľad z prednášky v akademickom informačnom systéme is.stuba.sk v sekcii Dokumenty

Lineárna algebra

Jedna zo základných tém:
lineárne vzťahy, systémy lineárnych rovníc a ich riešenia

Lineárny vzťah dvoch premenných x a y:

$$a_1 x + a_2 y = b; \quad a_1, a_2, b \in R$$

Lineárna rovnica o n premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na tvar

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b; \quad a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in R$$

Príklady lineárnych vzťahov:

$$x - 6y = 9, \quad y = \frac{5}{4}x - 11, \quad x_1 + 3x_2 - x_3 - 8x_4 = 0$$

Príklady nelineárnych vzťahov:

$$3x^2 - 9 = y, \quad 2x + \sqrt{y} = 2, \quad \sin x + \log y = 8, \quad e^x - \frac{1}{x} = 12$$

Počet riešení sústavy lineárnych rovníc v R

Riešením sústavy n lineárnych rovníc je usporiadaná n-tica reálnych čísel, ktorá vyhovuje každej rovnici danej sústavy.

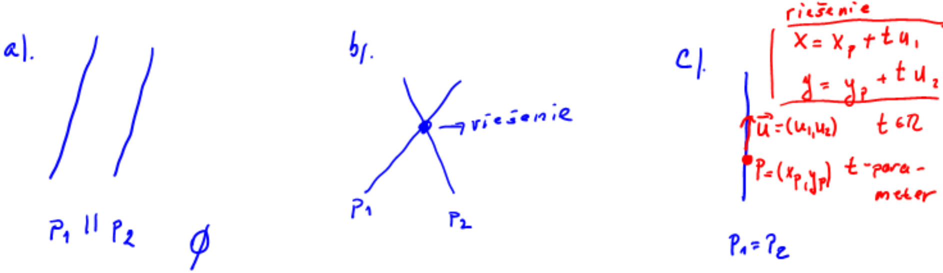
Počet riešení každej sústavy lineárnych rovníc v R je jedna z nasledujúcich možností:

- (a) Žiadne riešenie
- (b) Jediné riešenie
- (c) Nekonečne veľa riešení

2 rovnice

$a_1x + a_2y = b \rightarrow$ priamka p_1

$c_1x + c_2y = d \qquad p_2$

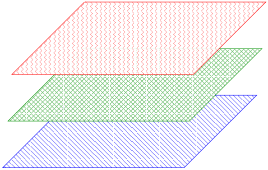


3 lineárne rovnice o 3 neznámych - počet riešení graficky

$$\begin{array}{ll} \rho_1 & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \rho_2 & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \rho_3 & a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array}$$

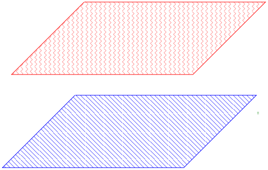
→ rovnica roviny

$\emptyset$

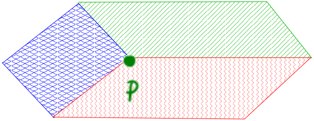


napr. $\rho_1 = \rho_2$

$\emptyset$



$\emptyset$



P – jediné riešenie

$P = (p_1, p_2, p_3)$ napr. $P = (1, 5, -3)$

3 lineárne rovnice o 3 neznámych - počet riešení graficky

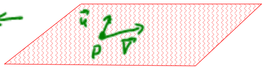
$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

∞ počet riešení

riešenia:

$x = x_p + t\,u_1 + s\,v_1$
$y = y_p + t\,u_2 + s\,v_2$
$z = z_p + t\,u_3 + s\,v_3$
$t, s \in \mathbb{R}$ → parametre

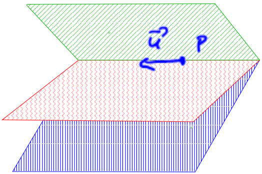
←

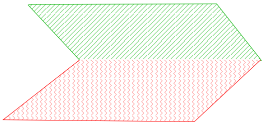


$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$

$P = (x_p, y_p, z_p)$ $\quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

∞





∞

$x = x_p + t\,u_1$
$y = y_p + t\,u_2$
$z = z_p + t\,u_3$

$t \in \ell$ ⟶ podobne

Elementárne operácie, ktoré nemenia množinu riešení sústavy rovníc:

- **ERO 1** - Výmena poradia ľubovoľných dvoch rovníc.
- **ERO 2** - Vynásobenie oboch strán rovnice nenulovou konštantou.
- **ERO 3** - Pripočítanie nenulového násobku jednej rovnice k inej rovnici.

Riešte sústavu lineárnych rovníc č. 1

$$
\begin{aligned}
x + y - 2z &= -3\\
5x + 6y - 3z &= 4\\
3x - y - 4z &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
x & y & z & \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & -2 & -3\\
5 & 6 & -3 & 4\\
3 & -1 & -4 & 5
\end{array}\right)
$$

$$x + y - 2z = -3$$

$R_2 - 5R_1$ $$y + 7z = 19$$

$R_3 - 3R_1$ $$-4y + 2z = 14$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & -3 & -3\\
0 & 1 & 7 & 19\\
0 & -4 & 2 & 14
\end{array}\right)
$$

$$x + y - 2z = -3$$

$$y + 7z = 19$$

$R_3 + 4R_2$ $$30z = 90$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & -2 & -3\\
0 & 1 & 7 & 19\\
0 & 0 & 30 & 90
\end{array}\right)
$$

Pokračovanie riešenia sústavy č. 1

$$
\begin{aligned}
x + y - 2z &= -3 \\
y + 7z &= 19 \\
30z &= 90
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 30 & 90 \end{array}\right)
$$

$R_3 : 30$

$$
\begin{aligned}
x + y - 2z &= -3 \\
y + 7z &= 19 \\
z &= 3
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)
$$

$R_1 + 2R_3$

$R_2 - 7R_3$

$$
\begin{aligned}
x + y &= 3 \\
y &= -2 \\
z &= 3
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)
$$

$R_1 - R_2$

$$
\begin{aligned}
x &= 5 \\
y &= -2 \\
z &= 3
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{c} x \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}
\begin{array}{l} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}
$$

Riešte sústavu lineárnych rovníc č. 2

$$
\begin{aligned}
4x - 2y + 4z &= -8\\
3x - y + 4z &= -12\\
5x + 3y + z &= 14
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & -8\\ 3 & -1 & 4 & -12\\ 5 & 3 & 1 & 14 \end{array}\right)
\begin{array}{c} R_1\cdot\frac{1}{4} \\ \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 4 & -12\\ 5 & 3 & 1 & 14 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c} \\ R_2-3R_1 \\ R_3-5R_1 \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 1 & -2\\ 0 & 0{,}5 & 1 & -6\\ 0 & 5{,}5 & -4 & 24 \end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ 2R_2 \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -12\\ 0 & 5{,}5 & -4 & 24 \end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ \\ R_3-5{,}5R_2 \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -12\\ 0 & 0 & -15 & 90 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c} \\ \\ R_3:(-15) \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -12\\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)
\begin{array}{c} R_1-R_3 \\ R_2-2R_3 \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)
\begin{array}{c} R_1+0{,}5R_2 \\ \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)
$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 4\\ y &= 0\\ z &= -6 \end{aligned}}$$

SKÚŠKA SPRÁVNOSTI :

$4\cdot 4 - 2\cdot 0 + 4\cdot(-6) = -8$ ✓

$3\cdot 4 - 0 + 4\cdot(-6) = -12$ ✓

$5\cdot 4 + 3\cdot 0 + (-6) = 14$ ✓

Riešte sústavu lineárnych rovníc č. 3

$$
\begin{aligned}
x - y + 2z - v &= -5\\
2x + y + 3z + v &= 10\\
3x + 2y - z - 2v &= -5\\
-x + 3y + z + 4v &= 15
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & -5\\
2 & 1 & 3 & 1 & 10\\
3 & 2 & -1 & -2 & -5\\
-1 & 3 & 1 & 4 & 15
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\\ R_2-2R_1\\ R_3-3R_1\\ R_4+R_1
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & -5\\
0 & 3 & -1 & 3 & 20\\
0 & 5 & -7 & 1 & 10\\
0 & 2 & 3 & 3 & 10
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c}
\\ R_2-R_4\\ \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & -5\\
0 & 1 & -4 & 0 & 10\\
0 & 5 & -7 & 1 & 10\\
0 & 2 & 3 & 3 & 10
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\\ \\ R_3-5R_2\\ R_4-2R_2
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & -5\\
0 & 1 & -4 & 0 & 10\\
0 & 0 & 13 & 1 & -40\\
0 & 0 & 11 & 3 & -10
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\\ \\ R_3-R_4\\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & -5\\
0 & 1 & -4 & 0 & 10\\
0 & 0 & 2 & -2 & -30\\
0 & 0 & 11 & 3 & -10
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ R_3:2\\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & -5\\
0 & 1 & -4 & 0 & 10\\
0 & 0 & 1 & -1 & -15\\
0 & 0 & 11 & 3 & -10
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ R_4-11R_3
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & -5\\
0 & 1 & -4 & 0 & 10\\
0 & 0 & 1 & -1 & -15\\
0 & 0 & 0 & 14 & 155
\end{array}\right)
\longrightarrow
\begin{array}{l}
x = \frac{115}{14}\\[4pt]
y = -\frac{40}{7}\\[4pt]
z = -\frac{55}{14}\\[4pt]
v = \frac{155}{14}
\end{array}
$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1 \\ R_4+R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 4 & -7 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ R_2-R_4 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & -7 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ R_3-4R_2 \\ R_4-2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -30 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ R_4-R_3 \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -30 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ R_3:2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -30 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ R_4-9R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -120 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \frac{R_4}{-8} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1+R_4 \\ \\ R_3-R_4 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1-2R_3 \\ R_2+4R_3 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1+R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \qquad \boxed{x=10,\ y=-10,\ z=-5,\ v=15}$$

Riešte sústavu lineárnych rovníc č. 4

$$\begin{aligned} 6x + 3y + 2z &= 6 \\ 7x + 2y - z &= 9 \\ 5x + 4y + 5z &= -4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 2 & -1 & 9 \\ 5 & 4 & 5 & -4 \end{array}\right) \overset{R_1 - R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 10 \\ 7 & 2 & -1 & 9 \\ 5 & 4 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 - 7R_1 \\ R_3 - 5R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 10 \\ 0 & 9 & 20 & -61 \\ 0 & 9 & 20 & -54 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 10 \\ 0 & 9 & 20 & -61 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

$$0x + 0y + 0z = 7$$

$$0 = 7$$

neplatí

$$\emptyset$$

Riešte sústavu lineárnych rovníc č. 5

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad z &= \quad 7 \\ -2x + \ 4y + \quad z &= -5 \\ 5x + 11y + 8z &= \ 44 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & -5 \\ 5 & 11 & 8 & 44 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2+2R_1 \\ R_3-5R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ R_3-R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \; R_2 : 6 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \; R_1 - R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x + \frac{1}{2} z = \frac{11}{2}$$

$$y + \frac{1}{2} z = \frac{3}{2}$$

$$z = t \qquad \underline{t \in R}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 5{,}5 - 0{,}5t \\ y &= 1{,}5 - 0{,}5t \\ z &= t \end{aligned}}$$

∞ VEĽA RIEŠENÍ

NAPR. $t = 1 \rightarrow$ $\begin{array}{l|l} & t=2 \\ x = 5 & x = 4{,}5 \\ y = 1 & y = 0{,}5 \\ z = 1 & z = 2 \end{array}$

Skúška správnosti riešenia sústavy č. 5

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad z &= \quad 7 \\ -2x + \quad 4y + \quad z &= -5 \\ 5x + 11y + 8z &= \ 44 \end{aligned}$$

Riešenie: $x = 5.5 - 0.5t;\ y = 1.5 - 0.5t;\ z = t; \quad t \in R$

$5{,}5 - 0{,}5t + 1{,}5 - 0{,}5t + t = 7$ ✓

$-2(5{,}5 - 0{,}5t) + 4(1{,}5 - 0{,}5t) + t = -11 + t + 6 - 2t + t = -5$ ✓

$5(5{,}5 - 0{,}5t) + 11(1{,}5 - 0{,}5t) + 8t = 27{,}5 - 2{,}5t + 16{,}5 - 5{,}5t + 8t = 44$ ✓

Gaussova eliminačná metóda - neformálny opis

Systém lineárnych rovníc riešime v tabuľkovej forme pomocou elementárnych riadkových operácií v dvoch hlavných etapách.

- **Etapa 1:** Postupne identifikujeme pivotné prvky (prvé nenulové prvky v riadku) a pomocou ERO 2 z nich produkujeme pivotné jednotky, počnúc ľavým horným prvkom (jeho získanie môže vyžadovať použitie ERO 1) a pokračujúc postupne vpravo a nadol. Ihneď po získaní pivotnej jednotky vyprodukujeme pomocou ERO 3 nuly v stĺpci pod ňou. Prípadné nulové riadky umiestnime pod nenulovými riadkami pomocou ERO 1.

- **Etapa 2:** Pomocou ERO 3 postupne produkujeme nuly nad pivotnými jednotkami, počnúc stĺpcom s poslednou pivotnou jednotkou vpravo dolu a pokračujúc smerom vľavo a nahor.

Výsledná tabuľka, kde v každom stĺpci s pivotnou jednotkou sú všetky ostatné prvky nulové, sa nazýva tabuľkou v **redukovanom tvare**.

Redukovaný tvar je pre každý systém rovníc jednoznačne určený.

Redukovaný tvar?

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \checkmark \qquad B = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \times$$

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \times \qquad D = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \times$$

$$E = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \times \qquad F = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \checkmark$$

Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$

Riešte sústavu lineárnych rovníc č. 6

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - 7v &= 5 \\ 2x - y + z - 4v &= 5 \\ x - 2y - z + v &= 1 \\ -2x + 3y + z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -7 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 + 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 7 & 7 & -14 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ R_2 : (-5) \\ R_3 : (-4) \\ R_4 : 7 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Pokračovanie riešenia sústavy č. 6

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3-R_2 \\ R_4-R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1-2R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

REDUKOVANÝ TVAR

$$x + z - 3v = 3$$
$$y + z - 2v = 1$$

$$x = 3 - z + 3v \qquad z = s$$
$$y = 1 - z + 2v \qquad v = t$$

∞ VEĽA

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 3 - s + 3t \\ y &= 1 - s + 2t \\ z &= s \\ v &= t \end{aligned}} \qquad s, t \in \mathbb{R} \text{ parametre}$$

napr. $s = 1$ $t = 0$ 1 z ∞

$\boxed{x = 2 \quad y = 0 \quad z = 1 \quad v = 0}$

Riešte sústavu lineárnych rovníc č. 7

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 &= 19\\
x_1 - 2x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 &= 17\\
-x_1 + 2x_2 - 4x_4 + x_5 &= -2\\
4x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 22x_4 + 2x_5 &= 53\\
3x_1 - 6x_2 + x_3 + 14x_4 &= 20
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
2 & -4 & 1 & 10 & 0 & 19\\
1 & -2 & 1 & 6 & 1 & 17\\
-1 & 2 & 0 & -4 & 1 & -2\\
4 & -8 & 3 & 22 & 2 & 53\\
3 & -6 & 1 & 14 & 0 & 20
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{r}
-R_3\\ R_1+2R_3\\ R_2+R_3\\ R_4+4R_3\\ R_5+3R_3
\end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 2\\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 15\\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 15\\
0 & 0 & 3 & 6 & 6 & 45\\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 14
\end{array}\right)
\qquad
\begin{array}{r}
\\ \\ R_3-R_2\\ R_4-3R_2\\ R_5-R_2
\end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 2\\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 15\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
R_5 \\
\\
\\
\end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\quad
\begin{array}{c}
R_1+R_3 \\
R_2-2R_3 \\
\\
\\
\\
\end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 17 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

REDUKOVANÝ TVAR

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 4x_4 &= 1 & \rightarrow \quad x_1 &= 1 + 2x_2 - 4x_4 \\
x_3 + 2x_4 &= 17 & x_3 &= 17 - 2x_4 \\
x_5 &= -1
\end{aligned}
$$

RIEŠENIE $\boxed{x_1 = 1 + 2t - 4s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 17 - 2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = -1 \qquad t, s \in R}$

Riešte sústavu lineárnych rovníc č. 8

$$
\begin{aligned}
3x + y + 2z &= 0\\
3x + 5y + 4z &= 0\\
4x + 4y + 3z &= 0
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & 4 & 0\\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)
$$

→ vždy 0

→ nie je potrebné to písať

$$
\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 4\\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}
\overset{R_3 - R_1}{\sim}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ 3 & 5 & 4\\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\overset{\substack{R_2 - 3R_1\\ R_3 - R_2}}{\sim}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}
$$

$$
\overset{\substack{R_2 \cdot (-\frac{1}{4})\\ R_3 - R_2}}{\sim}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}
\cdots\cdots
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\rightarrow
$$

nie je potrebné!

JEDINÉ RIEŠENIE

$$
\boxed{\begin{aligned} x &= 0\\ y &= 0\\ z &= 0 \end{aligned}}
$$

Homogénna sústava lineárnych rovníc

Homogénna sústava lineárnych rovníc je sústava, ktorá má všetky konštantné členy (pravé strany) nulové.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \ 0 \\
a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \ 0 \\
\vdots \qquad \quad \vdots \qquad \quad \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

Pre homogénnu sústavu lineárnych rovníc platí jedna z nasledujúcich možností :

- Sústava má iba triviálne riešenie $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.
- Sústava má nekonečne veľa riešení vrátane triviálneho.

Sústavy rovníc s iným počtom rovníc ako neznámych

Ak má lineárna sústava rovníc **viac rovníc ako neznámych**, počet riešení bude jedna z možností

- žiadne
- jediné
- nekonečne veľa

Ak má lineárna sústava rovníc **menej rovníc ako neznámych**, počet riešení bude jedna z možností

- žiadne
- nekonečne veľa

Riešte sústavu lineárnych rovníc č. 9

$$
\begin{aligned}
x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\
-x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= -1 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5 \\
-2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -4 \\
x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

$x_1 = \frac{7}{4} - 3t$

$x_2 = 0$

$x_3 = -\frac{1}{4} + t$

$x_4 = t$

$t \in \mathbb{R}$

Riešenie Gaussovou eliminačnou metódou

Prevedieme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 24 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-1}{3}\right) \underset{R_2-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 24 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-1}{3}\right) \underset{R_3-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot R_1 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 24 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-1}{3}\right) \underset{R_4-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot R_1 \to R_4}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 8 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 24 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-1}{3}\right) \underset{R_5-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot R_1 \to R_5}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 8 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 11 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 20 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-2}{5}\right) \underset{R_3-\left(\frac{2}{5}\right)\cdot R_2 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 11 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 20 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-2}{5}\right) \underset{R_4-\left(\frac{2}{5}\right)\cdot R_2 \to R_4}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & \frac{51}{5} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 20 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-2}{5}\right) \underset{R_5-\left(\frac{2}{5}\right)\cdot R_2 \to R_5}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & \frac{51}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{12}{5} & \frac{96}{5} \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-1}{6}\right) \underset{R_4-\left(\frac{1}{6}\right)\cdot R_3 \to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 9 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{12}{5} & \frac{96}{5} \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-1}{6}\right) \underset{R_5-\left(\frac{1}{6}\right)\cdot R_3 \to R_5}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 18 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-1}{4}\right) \underset{R_5-\left(\frac{1}{4}\right)\cdot R_4 \to R_5}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{63}{4} \end{array}\right)$$

Matrix solver - pokračovanie

$$\begin{cases} 3\cdot x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 12 \\ & \frac{5}{3}\cdot x_2 & +\frac{2}{3}\cdot x_3 & +\frac{2}{3}\cdot x_4 & +\frac{2}{3}\cdot x_5 & = & 2 \\ & & \frac{12}{5}\cdot x_3 & +\frac{2}{5}\cdot x_4 & +\frac{2}{5}\cdot x_5 & = & \frac{36}{5} \\ & & & \frac{4}{3}\cdot x_4 & +\frac{1}{3}\cdot x_5 & = & 9 \\ & & & & \frac{9}{4}\cdot x_5 & = & \frac{63}{4} \end{cases} \quad (1)$$

- Z rovnice 5 sústavy (1) zistíme premennú x_5:

  $\frac{9}{4}\cdot x_5 = \frac{63}{4}$

  $\mathbf{x_5 = 7}$
- Z rovnice 4 sústavy (1) zistíme premennú x_4:

  $\frac{4}{3}\cdot x_4 = 9 - \frac{1}{3}\cdot x_5 = 9 - \frac{1}{3}\cdot 7 = \frac{20}{3}$

  $\mathbf{x_4 = 5}$
- Z rovnice 3 sústavy (1) zistíme premennú x_3:

  $\frac{12}{5}\cdot x_3 = \frac{36}{5} - \frac{2}{5}\cdot x_4 - \frac{2}{5}\cdot x_5 = \frac{36}{5} - \frac{2}{5}\cdot 5 - \frac{2}{5}\cdot 7 = \frac{12}{5}$

  $\mathbf{x_3 = 1}$
- Z rovnice 2 sústavy (1) zistíme premennú x_2:

  $\frac{5}{3}\cdot x_2 = 2 - \frac{2}{3}\cdot x_3 - \frac{2}{3}\cdot x_4 - \frac{2}{3}\cdot x_5 = 2 - \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 5 - \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{-20}{3}$

  $\mathbf{x_2 = -4}$
- Z rovnice 1 sústavy (1) zistíme premennú x_1:

  $3x_1 = 12 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 12 - (-4) - 1 - 5 - 7 = 3$

  $\mathbf{x_1 = 1}$

Výsledok:

$x_1 = 1$

$x_2 = -4$

$x_3 = 1$

$x_4 = 5$

$x_5 = 7$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 24 \end{array}\right)
\begin{array}{c} R_5 \\ R_2-R_5 \\ R_3-R_5 \\ R_4-R_5 \\ R_1-3R_5 \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -8 & -60 \end{array}\right)
\begin{array}{c} R_1-R_2 \\ \\ R_3:2 \\ \\ R_5:(-2) \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & 42 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1-R_3 \\ \\ \\ \\ R_5-(R_2+R_3+R_4) \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 48 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 63 \end{array}\right)
\begin{array}{c} R_1-R_4 \\ \\ \\ \\ R_5:9 \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 57 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1-8R_5 \\ R_2+2R_5 \\ R_3+R_5 \\ R_4+2R_5 \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$x_1 = 1$

$x_2 = -4$

$x_3 = 1$

$x_4 = 5$

$x_5 = 7$

Gaussova eliminácia - zložitosť algoritmu

Koľko aritmetických operácií je potrebných vykonať na nájdenie rešenia pomocou Gaussovej eliminácie?

Ak riešime n lineárnych rovníc o n neznámych s reálnymi koeficientami a výsledok dopočítame spätnou substitúciou, tak potrebujeme:

- $\frac{n(n+1)}{2}$ delení
- $\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$ násobení
- $\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$ odčítaní

Celkovo zhruba $\frac{2n^3}{3}$ operácií.
Hovoríme, že algoritmus má zložitosť $O(n^3)$.
Dopočítaním do redukovaného tvaru sa počet operácií zdvojnásobí.

Pozor: Ak pripustíme iba **celočíslené** alebo racionálne koeficienty a celočíselné výpočty, zložitosť algoritmu bude **exponenciálna**.

Bareissov algoritmus - variant Gaussovej eliminácie - zložitosť $O(n^5)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_3-R_1 \\ R_4+2R_1}}{\dashrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & -7 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -8 & 7 \end{array}\right)$$

KOREKTNÉ, ALE ZACYKLÍME SA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 9 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_3-R_4 \\ R_4-R_3}}{\dashrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

HRUBÁ CHYBA

Ešte trochu na zamyslenie

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 2 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

VYNULOVAŤ LEN 1 RIADOK

HRUBÁ CHYBA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 8 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{R_1 : R_2}{\dashrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

HRUBÁ CHYBA

(podobne $R_i : R_2$)

Na precvičenie - riešte Gaussovou elimináciou

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 3 \\ x - 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 3y - z &= 5 \\ 4x + 3y - 2z &= 7 \\ 5x + 2y - 6z &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= 9 \end{aligned}$$

Riešenia: $x = 1, y = 1, z = 0$
$x_1 = r + 3s - 2t, x_2 = t, x_3 = 1 - 2r, x_4 = s, x_5 = 2 - r, x_6 = r;\ r, s, t \in R$