Nerovinné grafy, ofarbenia grafov stromy, kostry a ich konštruktívna enumerácia

Algebra a diskrétna matematika

Prednáška č. 5

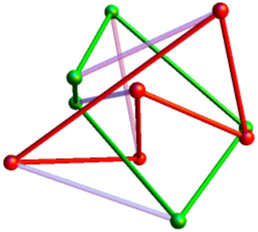
doc. RNDr. Jana Šiagiová, PhD.

Nerovinné grafy

Rovinný (planárny) graf je graf, ktorý sa dá nakresliť v rovine tak, že hrany majú spoločné nanajvýš krajné vrcholy.

Graf, ktorý nie je rovinný sa nazýva **nerovinný (neplanárny)**.

Z minula vieme, že grafy K_5, $K_{3,3}$ a Petersenov graf sú nerovinné.



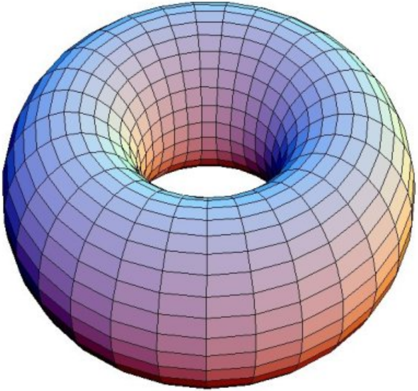
POČET VRCHOLOV = 10
STUPNE VRCHOLOV = 3
PRIEMER = 2

Petersenov graf v priestore

Plochy

Otázka: Je možné nakresliť nerovinné grafy *nejakým spôsobom (niekde)* tak, aby sa ich hrany nepretínali vo svojich vnútorných bodoch?

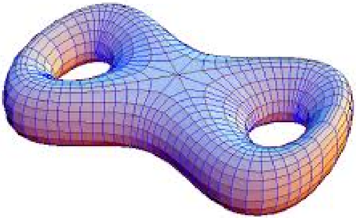
Odpoveď: Áno
- v R^3 - každý graf
- na **plochách** - ako ktoré



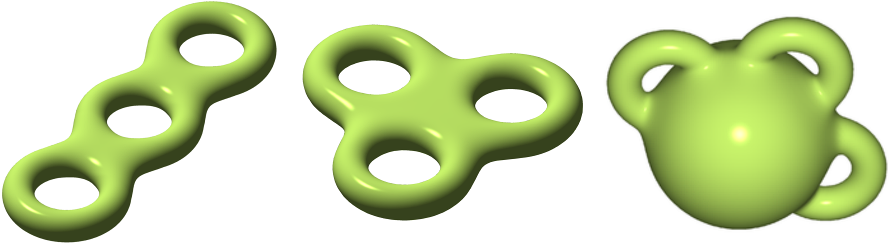
Torus (anuloid)

Torusy

Dvojitý torus

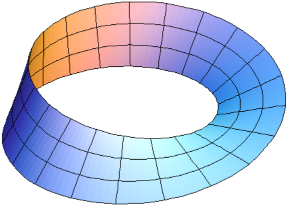


Trojitý torus

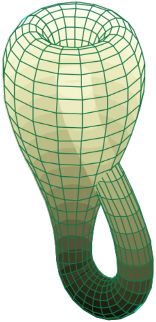


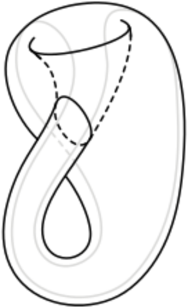
Ďalšie plochy

Möbiov pás



Kleinova fľaša



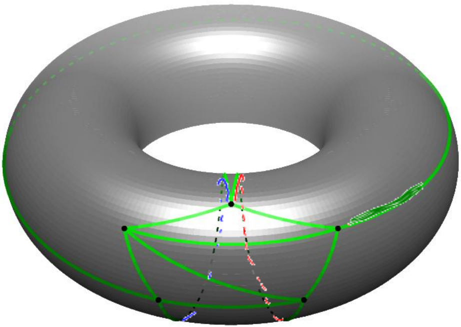


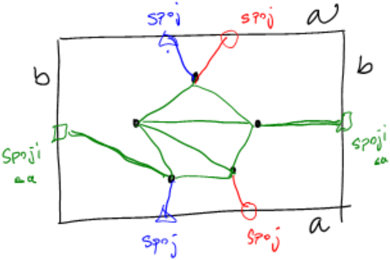
Grafy na plochách

Tvrdenie

Každý graf je možné nakresliť bez priesečníkov na guľu s dostatočným počtom "uší".

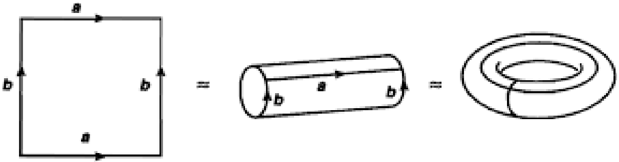
Úplný graf K_5 na toruse

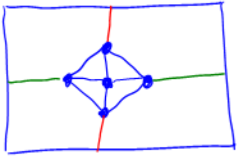


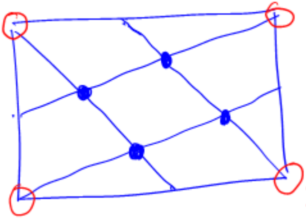


Kreslenie

Zostrojenie torusu

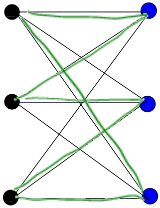


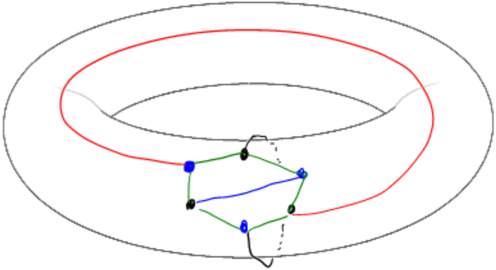


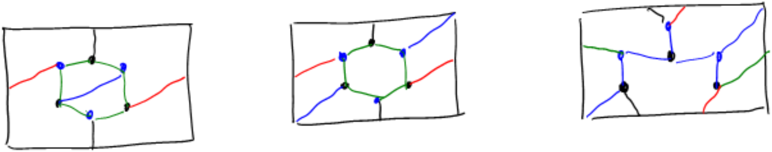


po zlepení dostaneme 1 vrchol

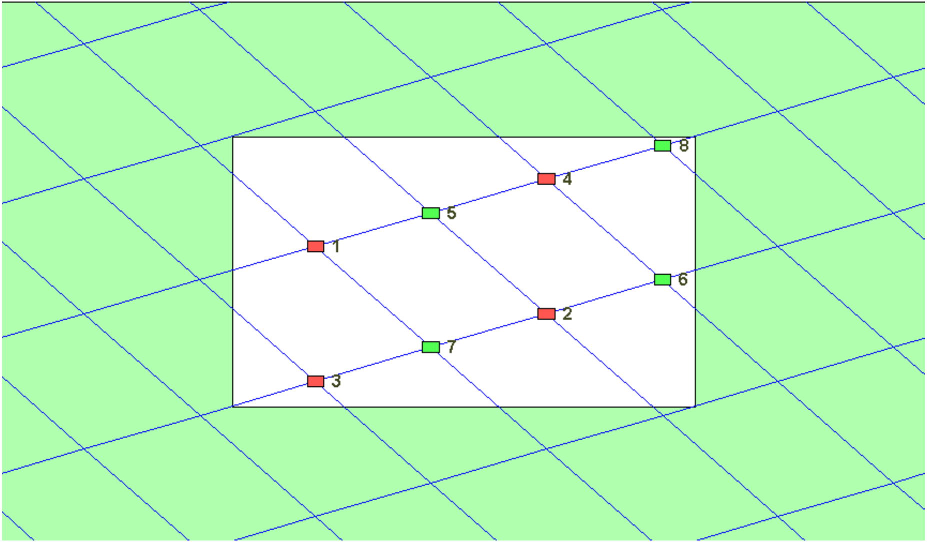
$K_{3,3}$ na toruse







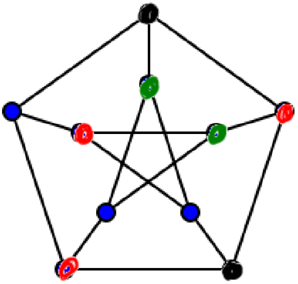
$K_{4,4}$ na toruse

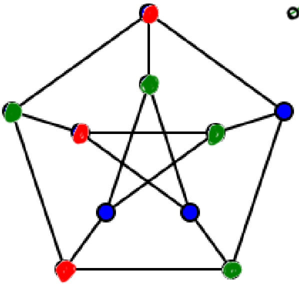


Ofarbenia grafov

Vrcholové ofarbenie grafu G: Zobrazenie $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ také, že pre každú $uv \in E(G)$ je $f(u) \neq f(v)$ (susedné vrcholy dostanú rôzne farby).

Najmenšie také k je **chromatické číslo** $\chi(G)$ grafu G.





VRCHOLOVÉ OFARBENIE PETERSENOVHO GRAFU 4 FARBAMI

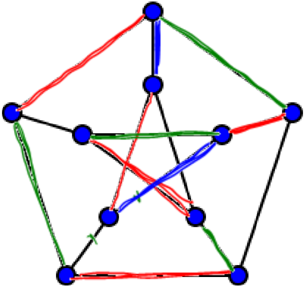
χ(Petersen) = 3

nemôže byť 2, lebo obvod = 5

Ofarbenia grafov

Hranové ofarbenie grafu je priradenie k farieb hranám grafu, pričom hrany incidentné s rovnakým vrcholom dostanú rôzne farby.

Najmenšie také k je **chromatický index** (hranové chromatické číslo) $\chi'(G)$ grafu G.



$\chi'(\text{Petersen}) = 4$

FAKT: $\Delta(G)$ – max stupeň vrchola v grafe G : $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Veta o 5 farbách

Tvrdenie

Pre každý konečný rovinný graf platí, že $\chi(G) \leq 5$.

Dôkaz (náčrt): Indukciou podľa počtu vrcholov.

Využijeme fakt, že v rovinnom grafe existuje vrchol stupňa nanajvýš 5.

Uvažujme vrchol v najmenšieho stupňa (je to ≤ 5).

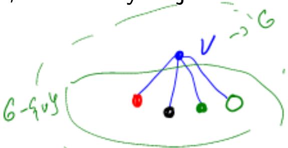
Odstránime z grafu G vrchol v a máme menší rovinný graf $G - \{v\}$.

Ten podľa predpokladu vieme ofarbiť 5 farbami.

1. Ak je $\deg(v) \leq 4$

Keď vrchol v pridáme späť, vieme ho ofarbiť farbou, ktorá chýba jeho nanajvýš 4 susedom.

Graf G sa teda dá zafarbiť 5 farbami.

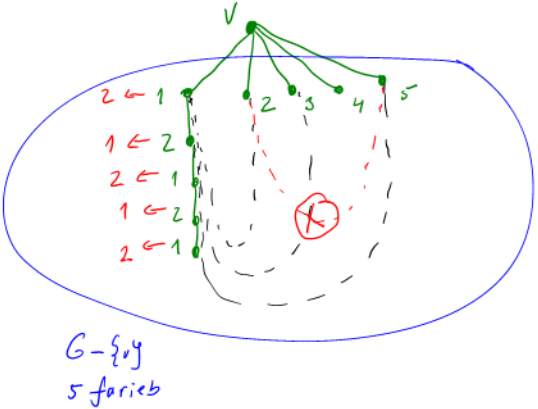


Veta o 5 farbách - pokračovanie

2. Ak je $\deg(v) = 5$

Ak na susedoch vrchola v boli použité nanajvýš 4 farby, ofarbíme v v grafe G zvyšnou $5.$ farbou.

Ak sú susedné vrcholy vrchola v ofarbené 5 farbami:



hľadáme cestu s alternujúcimi hranami

vymeníme farby a „ušetrenú" použijeme na v

taká cesta existuje vďaka predpokladu rovinnosti

Slávny problém

Formulovaný r. 1852 – Francis Guthrie

Problém 4 farieb

Je pravda, že $\chi(G) \leq 4$ pre každý rovinný graf?

Odpoveď: Áno

1976 – Appel a Haken - prvý dôkaz, nie všetkými matematikmi prijatý. Použili počítačové výpočty (overovanie 1,936 typov máp)

1996 – Robertson, Sanders, Seymour, Thomas - všeobecne prijatý dôkaz

Robin Thomas

Svetoznámy český matematik, žijúci v USA.

Narodil sa v r. 1962.

Vyštudoval Karlovu Univerzitu.

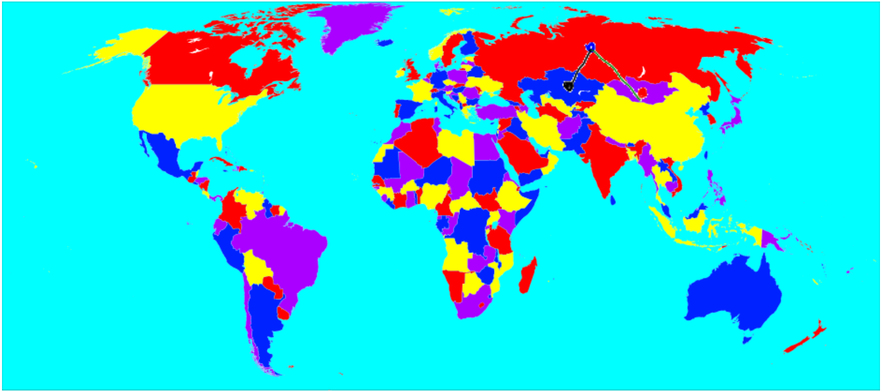
Dlho pôsobil na Georgia Institute of Technology, USA.

Paul Seymour

Narodený v 1950 v Anglicku.
Aktuálne je profesorom na Princeton University.

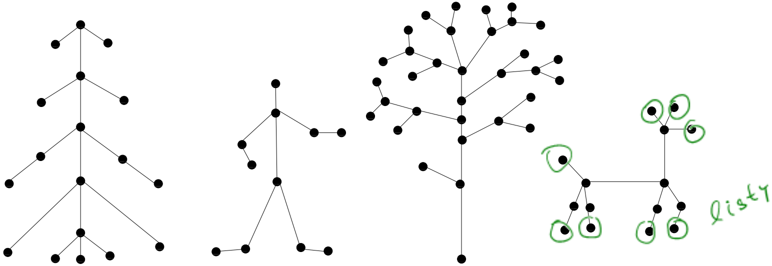
Problém 4 farieb na mapách

Na **zafarbenie každej mapy v rovine** tak, aby každé dve susedné územia mali odlišnú farbu, stačia maximálne **štyri farby**.

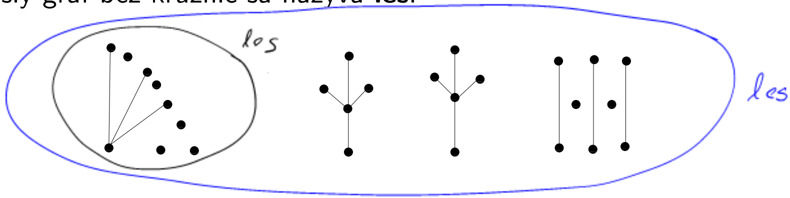


Stromy

Strom je súvislý graf neobsahujúci kružnicu.



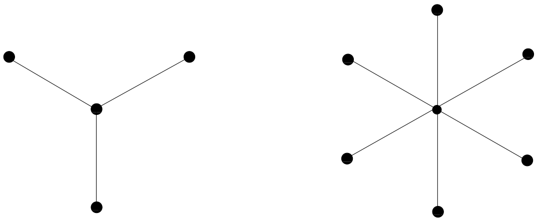
Nesúvislý graf bez kružníc sa nazýva **les**.



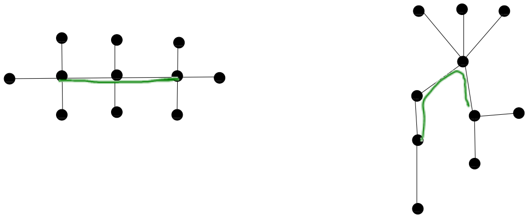
List grafu je vrchol stupňa jeden.

Hviezda, húsenica

Hviezda je strom, ktorý má práve jeden vrchol stupňa aspoň 3 a všetky ostatné vrcholy majú stupeň 1.

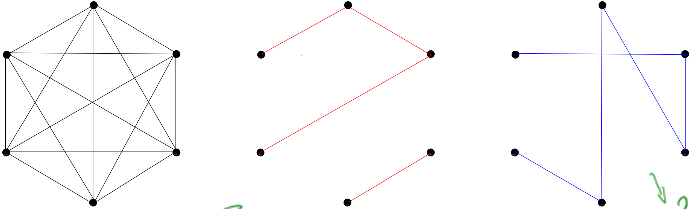


Húsenica je strom, v ktorom po odstránení listov (vrcholov stupňa 1) ostane iba cesta.



Kostra

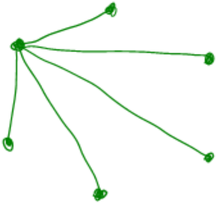
Kostra grafu G je strom, ktorý je jeho podgrafom a obsahuje všetky vrcholy grafu G.



neizomorfné kostry (max st.=2)

2 izomorfné kostry ale rôzne

max st=5



6^4 rôznych kostier

max st. 3

→ neizomorfná so žiadnou

Počet kostier

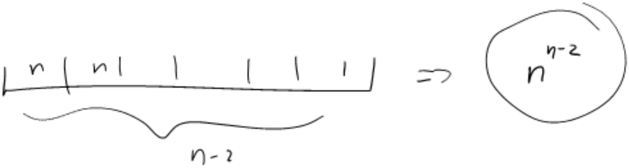
Cayleyho veta

Pre každé $n \geq 2$ je počet všetkých kostier úplného grafu K_n (počet stromov na daných n vrcholoch) rovný n^{n-2}.

Hlavné myšlienky dôkazu

Ukážeme, že každú kostru K_n vieme zakódovať $(n-2)$-člennou postupnosťou čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Také kódovanie definuje bijekciu medzi všetkými kostrami a všetkými postupnosťami tohto typu.

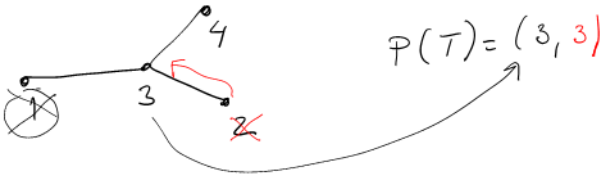


Prüferov kód

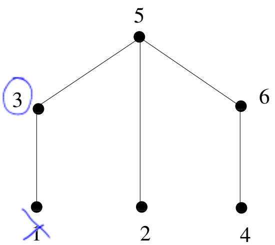
Uvažujme kostru T grafu K_n s označenými vrcholmi číslami $1, 2, \ldots, n$

Kostre T priradíme **Prüferov kód** $P(T) = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-2})$ nasledovne:

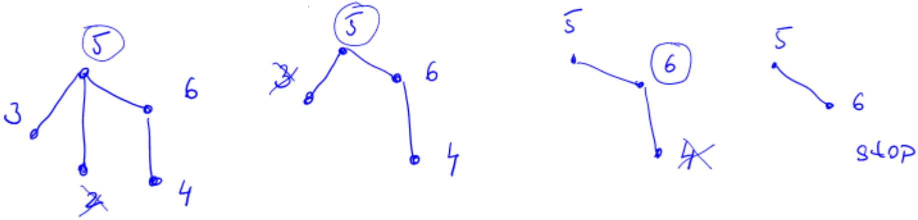
- Z kostry postupne odstraňujeme listy, až kým neostane jedna hrana.
- V každom kroku odstránime list s najmenším číslom.
- Do postupnosti pridáme číslo vrchola, ktorý je susedom odstráneného listu.



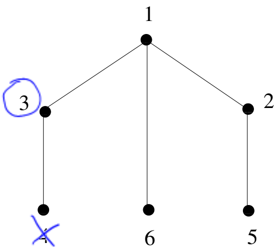
Prüferov kód - príklad 1



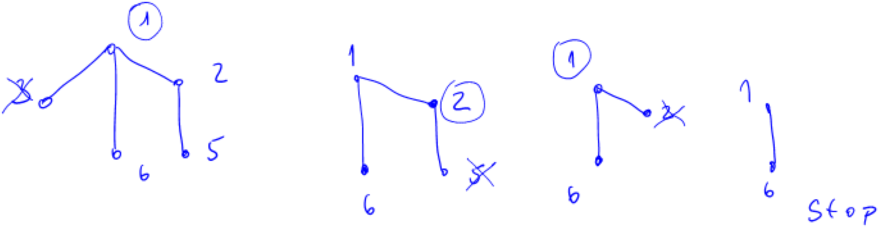
$P = (3, 5, 5, 6)$



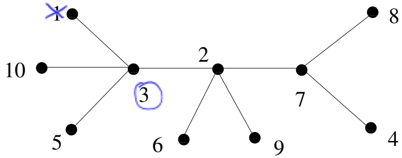
Prüferov kód - príklad 2



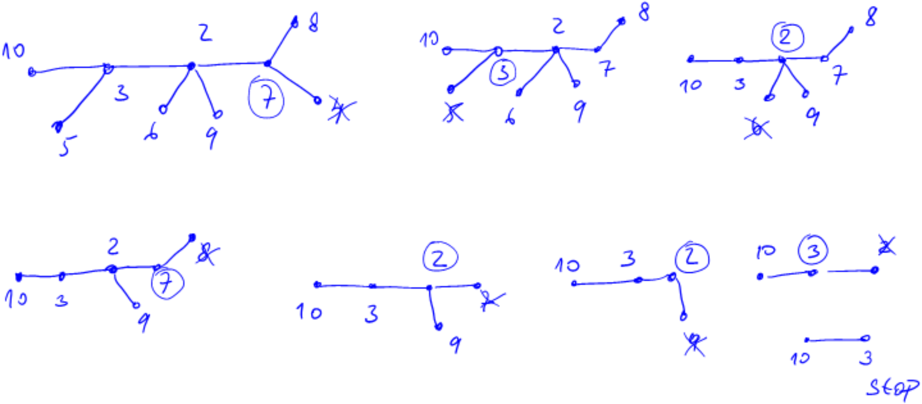
$P = (3, 1, 2, 1)$



Prüferov kód - príklad 3



$q = (3, 7, 3, 2, 7, 2, 2, 3)$



Spätná rekonštrukcia kostry

Ako z kódu P zrekonštruovať kostru T?

Fakt: Každý vrchol, ktorý nie je v P, je list.

Prvý vrchol bol odstránený list, ktorý susedil s prvým vstupom p_1 v P a mal najmenšie číslo ℓ_1 nevyskytujúce sa v P.

Ako druhý bol odstránený list susediaci s druhým vstupom p_2 v P a s najmenším číslom nevyskytujúcim sa v P a rôznym od ℓ_1.

V ďalšlom kroku budeme podobne vyšetrovať kód o dva vstupy kratší. Tak pokračujem ďalej.

Po $n-2$ krokoch prejdeme celý kód.

Ostáva určiť poslednú hranu.

Jeden jej koniec je posledný vstup v kóde p_{n-2} a druhý ten, ktorý sa nevyskytuje medzi odstránenými listami $\ell_1, \ldots \ell_{n-2}$ a je rôzny od p_{n-2}.

Algoritmus spätnej rekonštrukcie kostry

Vstup: Prüferov kód $P = (p_1, p_2, \ldots p_{n-2})$

Algoritmus

- **Krok 1:** Nakresli n vrcholov a označ číslami od 1 do n.
- **Krok 2:** Zostav **zoznam** čísel $Z \rightarrow (1, 2, \ldots, n)$.
- **Krok 3:** Ak sú v zozname presne dve čísla, spoj hranou a ukonči, inak prejdi na Krok 4.
- **Krok 4:** Nájdi najmenšie číslo v zozname, ktoré nie je v kóde a prvé číslo v kóde. Spoj vrcholy s týmito číslami hranou.
- **Krok 5:** Vymaž čísla z Kroku 4 zo zoznamu aj z kódu. Choď na Krok 3.

VÝSTUP: KOSTRA

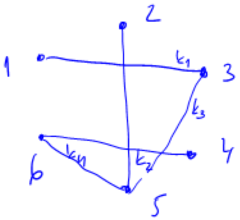
Dá sa ukázať, že vzniknutý graf je vždy strom a že spätným prekódovaním dostaneme pôvodný kód.

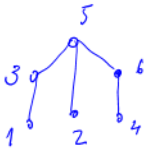
Rekonštrukcia kostry - príklad 4

Zrekonštruujte kostry z Prüferových kódov $(3, 5, 5, 6)$ a $(3, 1, 2, 1)$.

$P = (3, 5, 5, 6)$ $\xrightarrow{k_1}$ $P = (5, 5, 6)$ $\xrightarrow{k_2}$ $P = (5, 6)$ $\xrightarrow{k_3}$ $P = (6)$ $\rightarrow$ $P = \emptyset$

$Z = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ $\quad$ $Z = (2, 3, 4, 5, 6)$ $\quad$ $Z = (3, 4, 5, 6)$ $\quad$ $Z = (4, 5, 6)$ $\quad$ $Z = (5, 6)$

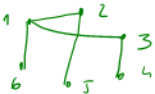


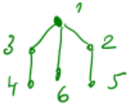


$P = (3, 1, 2, 1)$ $\rightarrow$ $P = (1, 2, 1)$ $\rightarrow$ $P = (2, 1)$ $\rightarrow$ $P = (1)$ $\rightarrow$ $P = \emptyset$

$Z = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ $\quad$ $Z = (1, 2, 3, 5, 6)$ $\quad$ $Z = (1, 2, 5, 6)$ $\quad$ $Z = (1, 2, 6)$ $\quad$ $Z = (1, 6)$

STOP





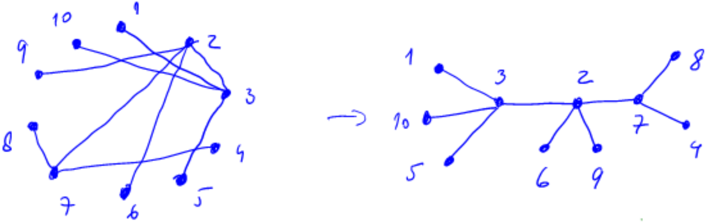
Rekonštrukcia kostry - príklad 5

Zrekonštruujte kostru z Prüferovho kódu $(3, 7, 3, 2, 7, 2, 2, 3)$.

$P = (3, 7, 3, 2, 7, 2, 2, 3)$
$Z = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$
$\longrightarrow$
$P = (7, 3, 2, 7, 2, 2, 3)$
$Z = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$
$\longrightarrow$

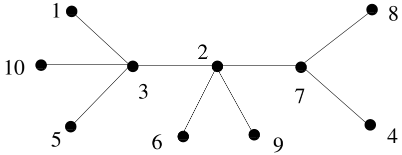
$P = (3, 2, 7, 2, 2, 3)$
$Z = (2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$
$\longrightarrow$
$P = (2, 7, 2, 2, 3)$
$Z = (2, 3, 6, 7, 8, 9, 10)$
$\longrightarrow$
$P = (7, 2, 2, 3)$
$Z = (2, 3, 7, 8, 9, 10)$

$\longrightarrow$
$P = (2, 2, 3)$
$Z = (2, 3, 7, 9, 10)$
$\longrightarrow$
$P = (2, 3)$
$Z = (2, 3, 9, 10)$
$\longrightarrow$
$P = (3)$
$Z = (2, 3, 10)$
$\longrightarrow$
$P = \emptyset$
$Z = (3, 10)$
stop

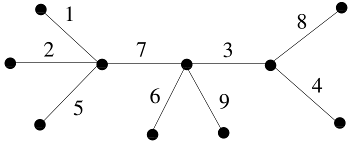


Ohodnotené grafy

Vrcholovoohodnotený graf rádu n je graf, v ktorom sú vrcholom priradené čísla $1, 2, \ldots, n$.

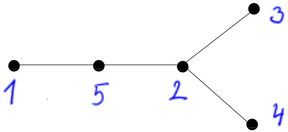


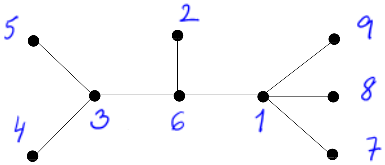
Hranovoohodnotený graf s n hranami je graf, v ktorom sú hrany ohodnotené číslami $1, 2, \ldots, n$.



Graciózne (pôvabné) ohodnotenie

Graciózne ohodnotenie (graceful labeling) stromu rádu n je ohodnotenie jeho vrcholov číslami $1, 2, \ldots, n$ tak, aby absolútne hodnoty rozdielov susedných vrcholov vyčerpali celú množinu $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.





Veľká hypotéza

Ringel-Kotzigova hypotéza

Každý strom má graciózne ohodnotenie.

Vyslovená v 1963 v Smoleniciach.

Stále sa o tomto probléme málo vie!

Anton Kotzig - významný slovenský matematik
Narodil sa v Kočovciach v r. 1919.
Zomrel v Montreale, Kanada, v r. 1991. Od 1969 žil v Kanade.