Kombinatorika

Algebra a diskrétna matematika

Prednáška č. 7

doc. RNDr. Jana Šiagiová, PhD.

Kombinatorika

Kombinatorika sa zaoberá konečnými množinami, ich štruktúrami, usporiadaním, rozkladom na menšie objekty, zobrazeniami medzi nimi, usporiadanými n-ticami, atď.

Využitie kombinatoriky

- pri enumerácii možností, akými môžu byť dané objekty vybrané alebo zoradené
- pri enumerácii spôsobov, akými môže byť vykonaná konečná postupnosť operácií
- pri zostrojovaní usporiadania určitých vlastností
- pri analýze algoritmov
- pri hľadaní najefektívnejšieho algoritmu

Príklad 1: Koľko podmnožín má 4-prvková množina? Koľko z nich má párnu veľkosť a koľko nepárnu?

2^4

$\cancel{4!}$

$A = \{a, b, c, d\}$

PODMNOŽINY

$\emptyset$

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$, $\{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$,

$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}$

$\{a, b, c, d\}$

PÁRNA VEĽKOSŤ $= 8$

NEPÁRNA VEĽKOSŤ 8

16

Počet podmnožín konečnej množiny

Tvrdenie 1

Ľubovoľná n-prvková množina má práve 2^n podmnožín.

Odvodenie:

Nech $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

Každú podmnožinu B množniny A môžeme reprezentovať pomocou n-tice 0 a 1, pričom

na i-tej pozícii je $\begin{cases} 1 & \text{ak} \quad a_i \in B \\ 0 & \text{ak} \quad a_i \notin B \end{cases}$

Napr. $B = \{a_1, a_3, a_4\} = (1, 0, 1, 1, 0, \dots, 0)$

Každá podmnožina množiny A má jednoznačnú reprezentáciu pomocou n-tice núl a jednotiek.

Celkový počet rôznych n-tíc núl a jednotiek je 2^n.

Označenie: Množina všetkých podmnožín množiny A sa označuje 2^A a nazýva sa **potenčná množina** množiny A.

Počet podmnožín podľa parity

Tvrdenie 2

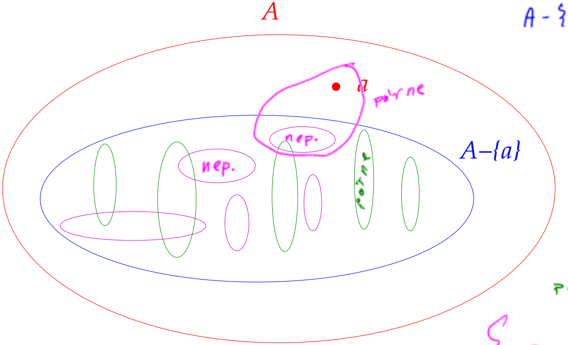
Každá n-prvková množina má práve 2^{n-1} podmnožín nepárnej veľkosti a 2^{n-1} podmnožín párnej veľkosti.

A - n prvkov

$A - \{a\} \to n-1$ prvkov

$\Downarrow$

2^{n-1} všetkých podmnožín



párnych podmnožín v A

$2^{n-1} \leftarrow \Big\{$ 0 nepárna + a $\to$ párna

Počet podmnožín podľa parity

Zápis odvodenia Tvrdenia 2:

Nech A je n-prvková množina a prvok $a \in A$.

Vieme, že počet všetkých podmnožín množiny $A - \{a\}$ je 2^{n-1}.

Vyberme si ľubovoľnú z nich, $B \subseteq A - \{a\}$.

Ak B má nepárny počet prvkov, je to aj želaná podmnožina množiny A s nepárnym počtom prvkov.

Ak B má párny počet prvkov, pridáme k nej prvok a.
Potom $B \cup \{a\} \subseteq A$ a $|B \cup \{a\}|$ je nepárna.

Našli sme bijekciu medzi množinou všetkých podmnožín $A - \{a\}$ a množinou všetkých podmnožín A nepárnej veľkosti. Je ich 2^{n-1}.

Doplnok k nim sú všetky podmnožiny párnej veľkosti:
$2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2 - 1) = 2^{n-1}$.

Príklad 2: Aký je počet podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, ktoré obsahujú ~~všetky~~ iba nepárne čísla $\leq n$?

$\{1,2,3,4\} \to \{1\}, \{3\}, \{1,3\}$

$\{1,2,3,4,5\} \to \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{3,5\}, \{1,5\}, \{1,3,5\}$

n-párne: $2^{\frac{n}{2}} - 1$ n-nepárne $2^{\frac{n+1}{2}} - 1$

Príklad 3: Koľkými spôsobmi je možné rozdeliť množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ na 2 disjunktné neprázdne podmnožiny, ak nezáleží na poradí podmnožín?

$n = 8$

$\{1\}\ \{2,3,\ldots 8\}$

$\{2\}\ \{1,3,\ldots 8\}$

$\{3\}\ \{1,2,4\ldots 8\}$

$\vdots$

$\{1,2\}\ \{3,4,\ldots 8\}$

$\{2,5\}\ \{1,3,4,6\ldots 8\}$

$\vdots$

$\ldots\ \{1,2,3,4\}\ \{5,6,7,8\}$

$\vdots$

$\emptyset$, celá

?

$$\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Variácie k-tej triedy z n prvkov s opakovaním

- všetky možné usporiadané výbery k prvkov z n prvkov, pričom vo výberoch sa prvky *môžu opakovať*
- všetky zobrazenia z k-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny
- počet slov dĺžky k nad abecedou z n písmen

Ich počet je

$$V^*(n,k) = n^k$$

Na každú "pozíciu" $1,\ 2,\ \ldots,\ k$ možno vybrať ktorýkoľvek z n prvkov.

možnosti

$$\underbrace{|\,n\,|\,n\,|\,n\,|\quad|\quad|\,n\,|}_{k\text{- prvkov}}$$

Príklady

Príklad 4: Koľko rôznych PIN-kódov si môžete zvoliť pre bankovú kartu?

$$|10|10|10|10| = 10^4$$

Príklad 5: Koľko rôznych kódov dĺžky 5 môžete vytvoriť z písmen A, E, I, O, U, Y?

$$|6|6|6|6|6| = 6^5$$

Príklad 6: Koľko existuje rôznych ŠPZ vozidiel ku každému označeniu mesta?

č č č p p

$$|10|10|10|26|26| \qquad (10^3 - 1) \cdot 26^2$$

→ vylúčime 000

Príklad 7: Koľko párnych 5-ciferných čísel môžeme napísať z cifier $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

$$|6|7|7|7|4| = 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 4 = 8232$$

Variácie bez opakovania

Variácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania

- všetky možné usporiadané výbery *navzájom rôznych* k prvkov z n prvkov
- všetky *prosté (one-to-one)* zobrazenia z k-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny
- počet slov dĺžky k z navzájom rôznych písmen nad abecedou z n písmen

Ich počet je: $V(n, k) = n(n-1)...(n-(k-1))$

$$\underbrace{|\ n\ |\ n-1\ |\quad|\quad|\ n-(k-1)\ |}_{k}$$

Iný zápis: $n(n-1)...(n-(k-1)) = n!/(n-k)!$

Príklady

Príklad 8: Koľko rôznych 5-písmenových slov sa dá zostaviť z písmen slova VYHRAŤ, ak sa žiadne neopakuje?

| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$

Príklad 9: Koľko rôznych umiestnení na prvých troch miestach je možných v súťaži s 10 účastníkmi?

$\underline{10} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8}$

Príklad 10: Koľko je rôznych 4-ciferných párnych čísel, v ktorých sú všetky cifry rôzne?

0 nie na začiatku

ak je 0 na konci : $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$

ak 0 nie je na konci : $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 1792$

nie môže byť použitá posledná cifra

$504 + 1792 = \underline{\underline{2296}}$

Permutácie

Permutácia n prvkov

- *variácia* n-tej triedy z n prvkov bez opakovania
- ľubovoľná *bijekcia* n-prvkovej množiny
- počet slov dĺžky n z navzájom rôznych písmen nad abecedou z n písmen

Ich počet je

$$P(n) = V(n,n) = n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

Príklad 11: Koľko rôznych slov dĺžky 6 je možné vytvoriť z písmen slova PIATOK?

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Príklad 12: Koľkými rôznymi spôsobmi je možné usadiť do radu 10 ľudí?

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots = 10! = 3\,628\,800$

Príklad

Príklad 13: Aký je počet variácií k-tej triedy z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ bez opakovania a permutácii z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takých, že 1 a 2 nie sú vedľa seba?

$n = 6$ $k = 4$

áno: 3 5 1 4 / 3 1 5 2 / 4 2 3 1

nie: 3 5 1 2 / 3 1 2 4 / 2 1 5 3 / 6 2 1 5

ako jeden prvok

výber ostatných

$$\underbrace{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}_{V(n,k)} - \underbrace{4\cdot 3\cdot 2}_{V(n-2,k-2)}\cdot \overset{k-1}{3} = 4\cdot 3\cdot 2\,(15-3) = 24\cdot 12 = 288$$

jeden prvok

0 _ 0 _ 0

neuvažujme 1,2

12

$k-2$

Variácie

$$V(n,k) - 2(k-1)\,V(n-2,k-2)$$

Permutácie:

$$P(n) - 2(n-1)\cdot P(n-2)$$

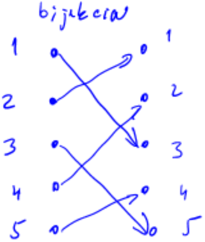
Zápis permutácie - príklad

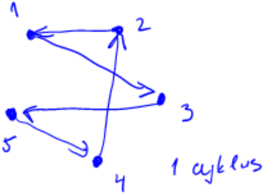
Príklad 14: Pre n=5 jedna možná premutácia je

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(1) = 3,\ p(2) = 1,\ p(3) = 5,\ p(4) = 2,\ p(5) = 4$$





(1 4 3)(2 5)

Kratší zápis pomocou *cyklu* (1 3 5 4 2) → začíname najmenším číslom

(5 4 2 1 3) - tá istá permutácia

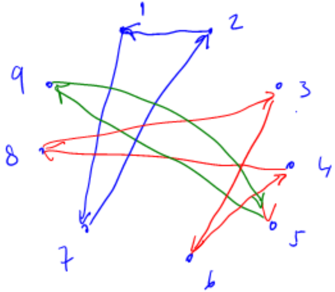
Zápis permutácie - príklad

Príklad 15: Pomocou cyklov zapíšte permutáciu

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 6 & 8 & 9 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$p = (1\,7\,2)(3\,6\,4\,8)(5\,9)$$



$$(1\,2\,3)(4) =$$

$$= (1\,2\,3)$$

Kombinácie

Kombinácie k-tej triedy z n prvkov

- všetky možné *neusporiadané* výbery *navzájom rôznych* k prvkov z n prvkov
- všetky možné k-prvkové *podmnožiny* n-prvkovej množiny

Ich počet dostaneme z variácií k-tej triedy bez opakovania vydelením $k!$, čo je počet všetkých usporiadaní konkrétnej variácie, t.j.

počet kombinácií k-tej triedy z n prvkov je

$$C(n,k) = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Príklad 16: Koľko rôznych súčinov troch prvočísel možno vypočítať z prvočísel: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$?

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot \cancel{5!}} = 56$$

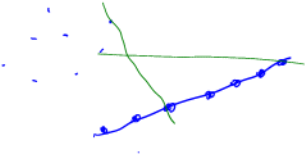
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Príklad 17: Koľko priamok určuje 15 bodov v rovine, ak
a) žiadne tri neležia na jednej priamke?
b) práve 7 leží na jednej priamke?

a). $$\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!\,13!} = \frac{15\cdot \cancel{14}^{7}\cdot \cancel{13!}}{\cancel{2}\;\cancel{13!}} = 105$$

priamka je určená 2 bodmi

b). $$\binom{15}{2} - \binom{7}{2} + 1$$
$$105 - 21 + 1 = \underline{\underline{85}}$$



$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7\cdot \cancel{6}^{3}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{2}\cdot \cancel{5!}}$$

Základné vlastnosti kombinačných čísel

Vlastnosť 1:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Vlastnosť 2 (Pascalova rovnosť):

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Pravá strana je počet k-prvkových podmnožín n-prvkovej množiny A.

Zvoľme si $a \in A$. Podmnožiny si rozdeľme podľa toho, či obsahujú a.

Každá k-prvková podmnožina množiny A neobsahujúca a je k-prvková podmnožina $A - \{a\}$. Tých je $\binom{n-1}{k}$.

Ak B je nejaká k-prvková podmnožina A obsahujúca a, môžeme jej bijektívne priradiť $(k-1)$-prvkovú podmnožinu množiny $B - \{a\}$. Ich počet je $\binom{n-1}{k-1}$.

Blaise Pascal (1623 Clermont – 1662 Paríž)

Francúzsky matematik, fyzik, spisovateľ, teológ a náboženský filozof.

Významne prispel k rozvoju geometrie (v 16 rokoch napísal prácu o kužeľosečkách), kombinatoriky, teórie pravdepodobnosti, fyziky ...

Pascalov trojuholník

k

1

k

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

k

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

$n-1$ $\binom{8}{0}$ 1 $\binom{8}{1}$ 8 $\binom{8}{2}$ 28 $\binom{8}{3}$ 56 70 56 $\binom{n-1}{k-1}$ 28 $\binom{n-1}{k}$ 8 1

n 1 9 36 84 126 126 84 $\binom{n}{k}$ 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

⋰ ⋮ ⋱

Príklad 18: Nech A je n-prvková množina. Určte, koľko rôznych aspoň $(n-3)$-prvkových podmnožín obsahuje.

$n=8 \Rightarrow$ aspoň $8-3=5 \Rightarrow 5, 6, 7, 8$

$$\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}=\frac{8!}{3!\,5!}+\frac{8!}{2!\,6!}+\frac{8!}{1!\,7!}+\frac{8!}{8!\,0!}=$$

$$=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}+\frac{8\cdot 7}{2}+8+1=56+28+9=\underline{\underline{93}}$$

pre ľubovoľné n:

$$\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\underbrace{\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-2}}_{\text{PASCALOVA ROVNOSŤ}}+n+1=$$

$$=\binom{n+1}{n-2}+n+1=\frac{(n+1)!}{(n-2)!\,(n+1-(n-2))!}+n+1=\frac{(n+1)!}{(n-2)!\,3!}+n+1=\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\,6}+n+1$$

$$=(n+1)\left(\frac{n^2-n}{6}+1\right)=\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$$

Binomická veta (vlastnosť 3)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^8 = \binom{8}{0} x^8 y^0 + \binom{8}{1} x^7 y^1 + \binom{8}{2} x^6 y^2 + \binom{8}{3} x^5 y^3 +$$

$$+ \binom{8}{4} x^4 y^4 + \binom{8}{5} x^3 y^5 + \binom{8}{6} x^2 y^6 + \binom{8}{7} x y^7 + \binom{8}{8} x^0 y^8$$

$$= x^8 + 8 x^7 y + 28 x^6 y^2 + 56 x^5 y^3 + 70 x^4 y^4 + 56 x^3 y^5 +$$

$$+ 28 x^2 y^6 + 8 x y^7 + y^8$$

Ďalšie vlastnosti kombinačných čísel

Vlastnosť 4:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Vlastnosť 5:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Vlastnosť 6:

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j} \binom{n}{r-j} = \binom{m+n}{r}$$

Vlastnosť 7:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

Odvodenie vl. 4 matematickou indukciou vzhľadom na n

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Odvodenie: Matemat. indukciou vzhľadom na n.

Vzťah platí pre $n = 0$.

Predoklajme, že tvrdenie platí nejaké $n \geq 0$. Platí pre $n+1$?

Vieme teda z platnosti

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

odvodiť platnosť

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k?$$

Vlastnosť 4 - odvodenie

$$(1+x)^{(n+1)} = (1+x)(1+x)^n = (1+x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k+1)} =$$

$\rightarrow \binom{n}{0}x^1 + \binom{n}{1}x^2$

$$= \binom{n}{0}x^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{(k+1)} + \binom{n}{n}x^{n+1} =$$

$\binom{n}{0}x^1 + \binom{n}{1}x^{2 \to k}$

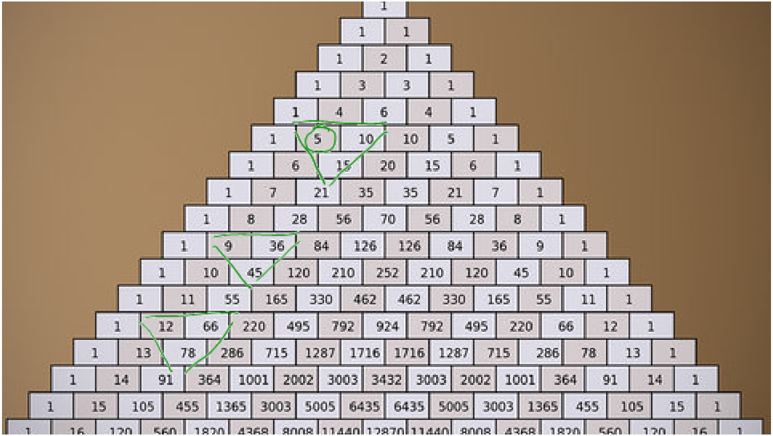
$k=2$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k + x^{n+1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}_{\text{PASCALOVA ROVNOSŤ}}\right)x^k + x^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0}x^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k$$

Pascalov trojuholník



$5^2 = 10 + 15$

$9^2 = 36 + 45$

$12^2 = 66 + 78$

$$\binom{n}{1}^2 = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2}$$