Transformácie roviny pomocou matíc, determinanty, Cramerovo pravidlo

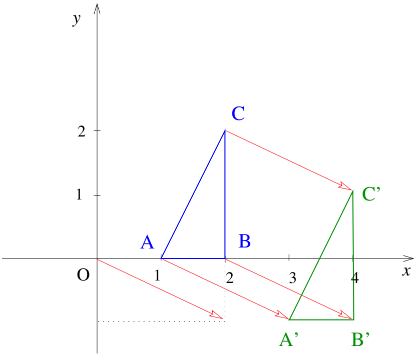
Algebra a diskrétna matematika

Prednáška č. 3

doc. RNDr. Jana Šiagiová, PhD.

Transformácia roviny - posunutie

Zobrazte trojuholník $(1,0),(2,0),(2,2)$ posunutím o vektor $(2,-1)$.



$$T \cdot S = N$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 1}_{\text{POMOCNÝ RIADOK}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

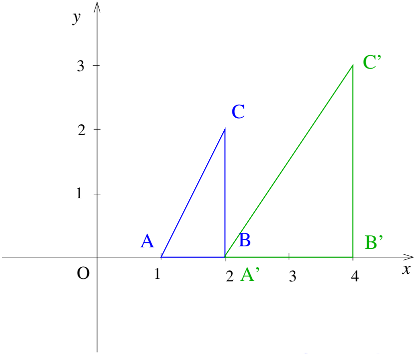
T - MATICA TRANSFORMÁCIE

S - MATICA SÚRADNÍC BODOV, KTORÉ ZOBRAZUJEME

N - MATICA SÚRADNÍC ZOBRAZENÝCH BODOV

$$\boxed{T \cdot S = N}$$

Škálovanie v smere súradnicových osí so stredom v $(0,0)$

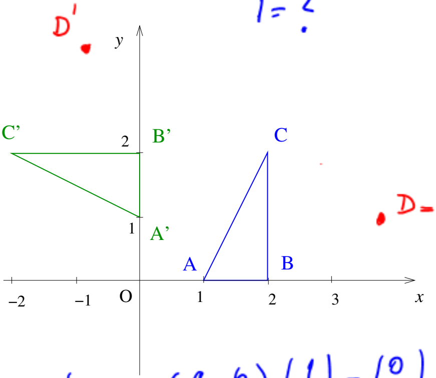


$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}: \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} r_1 : 2 \\ R \cdot \frac{2}{3} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ → MATICA SPÄTNEJ TRANSFORMÁCIE

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$$



$T = ?$

$A: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$C: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ?$

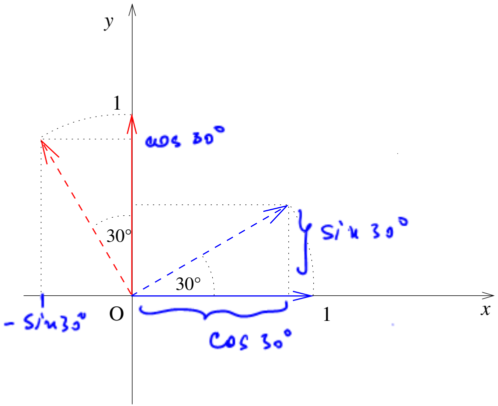
$T \cdot A = A' \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} a + 0b = 0 \\ c + 0d = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a = 0 \\ c = 1 \end{matrix}$

$T \cdot C = C' \to \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 2b = -2 \\ 2 + 2d = 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b = -1 \\ d = 0 \end{matrix}$

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Otočenie bodov roviny o 30°



$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

Matica otočenie roviny o 30°

Akou maticou môžeme reprezentovať otočenie roviny o 30°?

Zobrazenie vektorov: $(1,0) \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a $(0,1) \longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Matica otočenie roviny o 30°

Akou maticou môžeme reprezentovať otočenie roviny o 30°?

Zobrazenie vektorov: $(1,0) \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a $(0,1) \longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Hľadáme maticu $O_{30^\circ} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pre ktorú platí

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Po vynásobení však máme

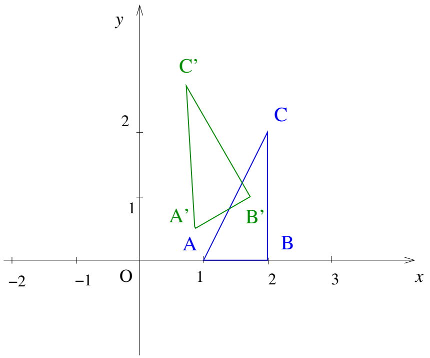
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Výsledná matica je

$$O_{30^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Otočenie o 30° - príklad

Určte, obrazy vrcholov trojuholníka $(1,0),(2,0),(2,2)$ po otočení o 30°.

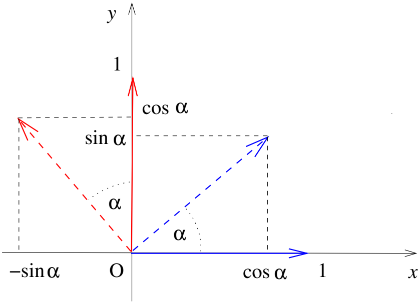


$T \cdot S \qquad N$

(O_{30°)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} & \sqrt{3}-1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,866 & 1,73 & 0,73 \\ 0,5 & 1 & 2,73 \end{pmatrix}$$

Otočenie roviny o uhol α



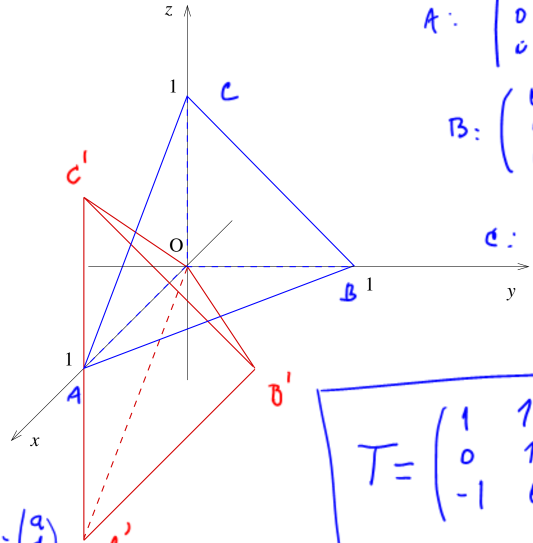
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$\alpha = 45^\circ$

Matica otočenia o uhol α

$$T = O_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \qquad O_{45^\circ} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

Transformácia v 3D



$$A: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$B: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$C: \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\d\\g\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}b\\e\\h\end{pmatrix}$$

Príklad

Daná je matica zobrazenia bodov v rovine $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T$

Obrazy vektorov $(1,0)$ a $(0,1)$:

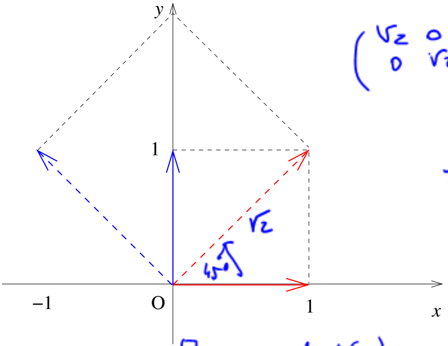
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

škálovanie otočenie

$$T = \check{S}_{\sqrt{2}} \cdot O_{45^\circ}$$

$$\check{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$O_{45^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

zmena obsahu $\square$ $\leftarrow$ $\det(T) = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2$

Definícia determinantu

Determinant **štvorcovej** matice M, označovaný ako $|M|$ alebo $\det(M)$, je funkcia, ktorá matici M priradí reálne číslo, pričom platia nasledovné axiómy:

- Ak matica N vznikne z matice M **výmenou poradia** dvoch riadkov (stĺpcov), tak $|N| = -|M|$.
- Ak matica N vznikne z matice M **vynásobením** niektorého riadku (stĺpca) konštantou k, tak $|N| = k|M|$.
- Ak matica N vznikne z matice M **pripočítaním násobku** jedného riadku (stĺpca) k inému riadku (stĺpcu), tak $|N| = |M|$.
- Pre **jednotkovú** maticu platí $|I| = 1$.

Takto definovaný determinat je určený **jednoznačne**.

Príklady aplikovania axióm

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & -4 \\ 5 & -15 & 10 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -15 & 10 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} \overset{S_1 \leftrightarrow S_2}{=} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -15 & 5 & 10 \\ 6 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & -4 \\ 5 & -15 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & -15 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & -4 \\ 5 & -15 & 10 \end{vmatrix} \underset{R_3 - 5R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 & -30 & -15 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & -4 \\ 5 & 15 & 25 \end{vmatrix} \underset{R_3 - 5R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ďalšie vlastnosti determinantu

Z definície determinantu sa dajú odvodiť nasledujúce ďalšie vlastnosti:

- Ak sa v matici nachádza **nulový riadok** (stĺpec), tak jej determinant je nulový.
- Ak sa v matici nachádzajú dva **rovnaké riadky** (stĺpce), tak jej determinant je nulový.
- Determinat hornej (dolnej) **trojuholníkovej** matice sa rovná súčinu prvkov na hlavnej diagonále.
- Determinant **transponovanej** matice sa rovná determinantu pôvodnej matice.

Príklady

$$s_2 = s_4$$

$$r_3 = r_4 \quad \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & -4 \\ 5 & 6 & 3 & 9 \\ 2 & -10 & 15 & 9 \\ 2 & -10 & 15 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & -6 & 3 \\ 5 & -8 & 10 & -8 \\ -1 & 6 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 5 & 16 \\ 9 & 6 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 7 & 10 & 0 & 6 \\ 3 & 12 & 0 & 7 \\ -7 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = 72 \qquad \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = 72$$

Výpočet determinantov rádu ≤ 3

Z definičných axióm je možné odvodiť jednoduché **vzorce** na výpočet determinantov rádu $1, 2, 3$.

$$|A_{1\times 1}| = |a_{11}| = a_{11}$$

$$|A_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ - \\ - \\ - \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

Vypočítajte determinanty

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - (-3)\cdot 7 = 16 + 21 = 37$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{matrix} = 1\cdot 3\cdot 2 + 4\cdot 1\cdot 5 + 0\cdot 2\cdot 0 - 0\cdot 3\cdot 5 - 1\cdot 1\cdot 0 - 4\cdot 2\cdot 2 = 6 + 20 - 16 = \underline{\underline{10}}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 6\cdot 5\cdot(-1) + (-2)\cdot 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 0\cdot 1 - (-2)\cdot 5\cdot 1 - 0\cdot 3\cdot 6 - (-1)(-1)(-2) =$$

$$= -30 + 12 + 10 + 2 = \underline{\underline{-6}}$$

Vypočítajte determinant

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ R_2+R_1 \\ R_3+2R_1 \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ R_3-2R_2 \\ R_4+R_2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ \\ R_4+5R_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-11) = 11$$

Vypočítajte determinant

$$|E| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_4 \\ R_3-R_4}}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -10 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_1+R_3}{=} - \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -10 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} + \begin{vmatrix} -10 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1-4R_2}{=} \begin{vmatrix} -26 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -26 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = \underline{\underline{-26}}$$

Vypočítajte determinant

$$|F| = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & -2 \\ 10 & 6 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1-5s_4 & s_2-3s_4 & s_3-4s_4 & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 5 & 10 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ R_3-2{,}5R_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 5 & 10 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ R_5-R_3 \end{array} \begin{vmatrix} 5 & 10 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7{,}5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-7{,}5) = \underline{\underline{-150}}$$

Rozvoj determinantu podľa riadku alebo stĺpca

Ak A je matica typu $n \times n$, tak A_{ij} je matica typu $(n-1) \times (n-1)$, ktorú dostaneme z matice A vynechaním i-teho riadka a j-teho stĺpca.

Determinant matice A môžeme vypočítať aj pomocou

- **rozvoja podľa i-teho riadku**

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$$

- **rozvoja podľa j-teho stĺpca**

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j} |A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} |A_{nj}|$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vypočítajte rozvojom podľa riadku alebo stĺpca

$$|F| = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & -2 \\ 10 & 6 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1}\cdot 0 + 0 + 0 + (-1)^{4+4}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 10 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 2\cdot\left((-1)^{1+1}\cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0\right) = 10\left((-1)^{1+1}\cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{2+1}\cdot 5 \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) = 10\left(2(3+2) - 5(0+5)\right) =$$

$$= 10(10-25) = \underline{\underline{-150}}$$

Súčet determinantov

Je pravda, že pre ľubovoľné matice M a N rovnakého typu platí

$$|M+N| = |M| + |N|?$$

<u>nie</u>

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad M+N = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 4-(-2) = 6 \qquad |N| = 15-8 = 7$$

$$|M+N| = -4-12 = -16$$

$$|M|+|N| = 6+7 = 13$$

$$|M+N| \neq |M| + |N|$$

Súčin determinantov

Je pravda, že pre ľubovoľné matice M a N rovnakého typu platí

$$|M \cdot N| = |M| \cdot |N|?$$

áno

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad M \cdot N = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 6 \qquad |N| = 7 \qquad |M \cdot N| = 28 - (-14) = 42$$

$$|M| \cdot |N| = 6 \cdot 7 = 42$$

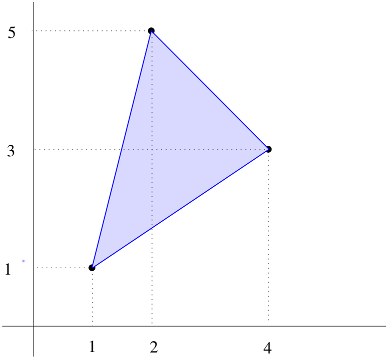
PLATÍ VŽDY

(POTREBNÝ DÔKAZ)

$$|M \cdot N| = |M| \cdot |N|$$

Príklad

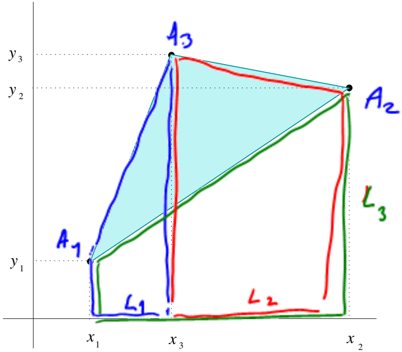
Vypočítajte obsah trojuholníka určeného bodmi $(1,1),(4,3),(2,5)$.



$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(3+20+2-6-4-5\right) = \underline{\underline{5}}$$

Obsah trojuholníka $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$

$S_L = \frac{(a+b)v}{2}$



$$S_\triangle = S_{L_1} + S_{L_2} - S_{L_3}$$

$$S_{L_1} = \frac{(y_1+y_3)(x_3-x_1)}{2}$$

$$S_{L_2} = \frac{(y_2+y_3)(x_2-x_3)}{2}$$

$$S_{L_3} = \frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2}$$

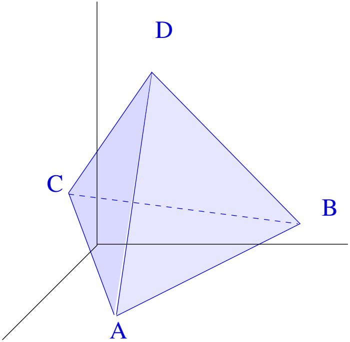
$$S_\triangle = \frac{1}{2}\Big((y_1+y_3)(x_3-x_1) + (y_2+y_3)(x_2-x_3) - (y_1+y_2)(x_2-x_1)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(y_1x_3 - \cancel{y_1x_1} + \cancel{y_3x_3} - y_3x_1 + \cancel{y_2x_2} - y_2x_3 + y_3x_2 - \cancel{y_3x_3} + \cancel{y_1x_1} - y_1x_2 - \cancel{y_2x_2} + y_2x_1\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2\Big) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Objem štvorstena

Objem štvorstena určeného bodmi $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$, $D = (x_4, y_4, z_4)$



$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinant a inverzná matica

- Štvorcovú maticu A nazývame **regulárnou**, ak $|A| \neq 0$.
- K štvorcovej matici A existuje inverzná matica práve vtedy, keď $|A| \neq 0$.
- Ak matica A je regulárna, tak

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

- Ak $|A| = 0$, maticu A nazývame **singulárnou.**
- K singulárnej matici neexistuje inverzná matica.

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(G) = 0 - 6 + 24 + 64 - 12 = -70$

regulárna

$\det(G) \neq 0$

$\det(H) = 48 + 60 - 18 + 24 - 24 - 90$

$= 0$

H singulárna

Výpočet inverznej matice pomocou determinantu

Ak A je regulárna matica rádu n a A_{ij} vznikne z A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca, potom pre **inverznú** maticu platí

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(b_{ij})_{n\times n}, \text{ kde } \quad b_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

Matica $(b_{ij})_{n\times n}$ sa nazýva **adjungovaná** a označuje sa $\mathrm{adj}(A)$;

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$$

$$\text{Ak } \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ tak } \; A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} a_{22} & (-1)^{1+2} a_{12} \\ (-1)^{2+1} a_{21} & (-1)^{2+2} a_{11} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Pomocou adjungovanej matice nájdite inverzné matice

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$|K| = 20 - 21 = -1$

$$K^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$|L| = -27 + 50 = 23$

$$L^{-1} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{10}{23} \\ -\frac{5}{23} & \frac{9}{23} \end{pmatrix}$$

Pomocou adjungovanej matice nájdite inverznú maticu

$$P = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|P| = 16 + 24 - 18 + 24 - 24 - 12 = 10$$

$$\operatorname{adj} P = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & +5 & -12 \\ -6 & 20 & -42 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$$

$$P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 5 & 20 & 0 \\ -12 & -42 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 & -0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 2 & 0 \\ -1{,}2 & -4{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo

Ak $AX = B$ je systém pozostávajúci z n lineárnych rovníc o n neznámych taký, že $|A| \neq 0$, potom systém má jediné riešenie.

Toto riešenie má tvar

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

pričom maticu A_i získame z matice A náhradou i-teho stĺpca stĺpcom pravej strany $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Gabriel Cramer $(1704 - 1752)$

Švajčiarsky matematik

Vo veku 18 rokov získal doktorát.
Od veku 20 rokov bol zamestnaný na Akadémii Ženeve.
1750 - Cramerovo pravidlo

Riešte pomocou Cramerovho pravidla

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + 2z &= 3 \\
-5x - 5y - 2z &= -3 \\
4x + 4y + 2z &= 2
\end{aligned}
$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & -5 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A| = -30 - 40 - 16 + 40 + 24 + 20 = -2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A_1| = -6$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -5 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A_2| = 4$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -5 & -5 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A_3| = 2$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2}{-2} = -1$$