

Algebra a diskrétna matematika
Príklady na precvičenie č. 12

Príklad 1: Vyriešte dané lineárne rovnice.

a) $9 + 5x = 2$ v poli \mathbb{Z}_{13}

b) $8x + 15 = 7$ v poli \mathbb{Z}_{31}

Príklad 2: Vyriešte dané kvadratické rovnice.

a) $x^2 + 2x = 10$ v poli \mathbb{Z}_{11}

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$ v poli \mathbb{Z}_7

c) $x^2 + 2x + 5 = 0$ v poli \mathbb{Z}_{13}

d) $x^2 + 7x + 2 = 0$ v poli \mathbb{Z}_{29}

Príklad 3: V poli \mathbb{Z}_{11} riešte Gaussovou eliminačnou metódou danú sústavu rovníc

$$4x + y = 6$$

$$3x + 7y = 0$$

Príklad 4: V poli \mathbb{Z}_5 riešte Gaussovou eliminačnou metódou sústavu rovníc

$$3x + 2y + z = 2$$

$$x + 3y + z = 3$$

$$2x + y + z = 3$$

Príklad 5: V poli \mathbb{Z}_7 riešte Gaussovou eliminačnou metódou sústavu rovníc

$$x + y + 2z = 1$$

$$2x + y + 3z = 1$$

$$4x + 2y + 5z = 4$$

Príklad 6: V poli \mathbb{Z}_{11} riešte Gaussovou eliminačnou metódou sústavu rovníc

$$3x + y + 5z = 5$$

$$2x + 3y + z = 6$$

$$4x + 2y + 3z = 0$$

Príklad 7: K danej matici nájdite v poli \mathbb{Z}_7 inverznú maticu

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Príklad 8: Nájdite aspoň dva primitívne prvky v každom z polí $\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_{17}$.

Príklad 9: Zistite, ktoré prvky v poli \mathbb{Z}_{17} nemajú druhé odmocniny.

Príklad 10: V \mathbb{Z}_{19} nájdite všetky prvky, ktoré v tomto poli majú štvrtú odmocninu.

Príklad 11: Pomocou Malej Fermatovej vety a bez použitia kalkulačky vypočítajte

a) $2015^{2016} \pmod{2017}$

b) $3^{2021} \pmod{2017}$

c) $3^{383} \pmod{191}$

d) $13^{674} \pmod{113}$

e) $100^{200} \pmod{97}$

f) $6^{655} \pmod{163}$

g) $111^{1841} \pmod{921}$

Odpovede

Pr.1: a) $x = 9$, b) $x = 30$

Pr.2: a) $x_{1,2} = 10$, b) $x_1 = 5, x_2 = 6$, c) $x_1 = 2, x_2 = 9$, d) nemá riešenie

Pr.3: $x = 3, y = 5$

Pr.4: $x = 1, y = 3, z = 3$

Pr.5: $x = 2, y = 3, z = 5$

Pr.6: $x = 0, y = 1, z = 3$

Pr.7: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Pr.8: 3 a 5 v \mathbb{Z}_7 ; 2 a 7 v \mathbb{Z}_{11} ; 2 a 7 v \mathbb{Z}_{13} ; 3 a 5 v \mathbb{Z}_{17}

Pr.9: 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14

Pr.10: 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17

Pr.11: a) 1, b) 243 c) 27, d) 56, e) 62 f) 65