Fyzikálne základy počítačových hier (pre FIIT)

(dokument ku prednáškam; na konci dokumentu je **obsah**)

Martin Konôpka

Oddelenie fyziky, ÚJFI, FEI STU v Bratislave, `martin.konopka@stuba.sk`

najnovšia aktualizácia: 2. apríla 2022

Prednáška v 1. týždni (18. 2. 2022)

V mnohých počítačových hrách sú napodobňované fyzické javy, aké sa môžu diať aj v skutočnom svete. Napr. sa zobrazuje pohyb odhodenej lopty. V bojovnjšie poňatých hrách napr. let vrhnutého kameňa alebo vystreleného projektilu. Vo fantastickjšie navrhnutých zasa pristávanie kozmickej lode na Mesiaci alebo na niektorej planéte. A nemusí zostať pri jednom pohybujúcom sa telese. Obľúbenou hrou je biliard, kde sa na biliardovom stole pohybujú gule, ktoré sa môžu jednak odrážať od obruby hracej plochy a aj sa zrážať medzi sebou, odrážať sa od seba. Táto hra ako aj vyššie spomenuté pohyby aj javy môže prebiehať tak v skutočnom svete ako aj v počítačovej hre. Je celkom prirodzené, že hráč počítačovej hry očakáva, že tie pohyby a vôbec zobrazenie scény budú na obrazovke vyzerať dostatočne podobne ako v skutočnosti. Preto môžeme povedať, že počítačovou hrou obsahujúcou dynamické prvky sa snažíme ***napodobňovať***, cudzím slovom ***simulovať***, vzhľad, dynamiku a aj zvuky istej scény, ktorá by povedzme mohla prebiehať aj v skutočnom svete. Ak by napr. let lopty odkopnutej do výšky vo počítačovej hre vyzeral tak, že smerom do výšky by loptka zrýchľovala, asi by sme z takej hry mali pokazený dojem. Očakávame totiž, že lopta bude spomaľovať. Tak to máme už v oku, teda aspoň ak sme v mladosti strávali nejaký čas aj pri loptových hrách, prípadne ich videli v televízii. A podobne, ak by bilardová guľa v hre po veľmi šikmom náraze na okraj plochy sa odrazila presne tam, skade priletela, tiež by sme na takú hru pozerali udivene. Ak sa autor hry chce vyhnúť takejto nepodarenej dynamike v hre a chce, aby vyzerala realisticky, musí pre výpočet pohybu objektov v hre použiť fyzikálne zákony, aké platia pre obdobné situácie aj v skutočnom svete. Tak sa dostávame k obsahu nášho predmetu: na prednáškach sa budeme učiť čosi z fyziky – to, čo je podstatné pre správny popis ***dynamiky*** herných situácií (ktoré pravda môžu byť aj situáciami z reálneho sveta).

Hneď na začiatok však musíme upozorniť, že naše výpočty na základe fyzikálnych zákonov nebudú dynamiku skutočných objektov popisovať dokonale presne. To sa takmer nikdy nedá, nielen v počítačovej hre, ale vôbec. Skutočné situácie zahŕňajú aj veľké množstvo rôznych drobných vplyvov a ich zahrnutie do simulácie by bolo prakticky nemožné z viacerých dôvodov. A dokonca aj keby bolo možné, tak pre účel počítačovej hry by to mohlo byť zbytočné. Ak by sme v hre chceli simulovať a zobraziť napr. zrážku biliardových gúľ, v zásade by sme mali brať do úvahy aj ich pružnú deformáciu, ktorá na veľmi krátky okamih pri zrážke nastane. Zo skúsenosti však vieme, že biliardové gule sa vyrábajú z tvrdého materiálu a ich deformáciu pri zrážke ani nepostrehneme. A aj samotná dynamika takej zrážky sa dá dosť dobre napodobniť, i keď deformáciu nebudeme uvažovať. Takémuto prístupu hovoríme, že sme vytvorili nejaký zjednodušený ***model*** zložitej reálnej situácie. A namiesto pôvodnej zložitej úlohy (napr. popísať zrážku biliardových gúľ aj s ich deformáciami) potom riešime len ten zjednodušený model, kde si biliardové gule predstavujeme ako dokonale tuhé (nedeformovateľné) telesá. Takýto prístup sa používa nielen pri simuláciách dejov v hrách, ale aj v technických a vedeckých úlohách. Je to užitočný prístup, lebo pri ňom zanedbávame menej podstatné črty a vplyvy a berieme do úvahy len tie podstatnejšie. Vo vedecko-technických úlohách vďaka tomu lepšie porozumieme skúmanému javu alebo zariadeniu (lebo nebudeme zahltení množsvom menej dôležitých detailov). V počítačovej hre (a nielen v nej) nám zasa zjednodušený model umožní robiť simuláciu dostatočne rýchlo, čiže procesor a grafická karta budú „stíhať“. A drobné odchýlky od úplne realistického správania sa si ani nevšimneme. Niekedy si ich aj všimneme, ale s tým sa musíme zmieriť, lebo príliš realistický popis by bol nesmierne výpočtovo náročný. Skúsme si predstaviť, že na scéne je napr. strom s listami a fúka nejaký nepravidelný vietor. Listy na skutočnom strome (a sú ich tam tisíce) sa rôzne trepocú. Realistická simulácia takejto scény by vyžadovala jednak do počítača naprogramovať štruktúru rozloženia konárov a listov stromu, vytvoriť modely popisujúce ich pružnosť a aj popisovať (nesmierne výpočtovo náročne) turbulentné prúdenie vzduchu pomedzi konáre a listy. Aspoň v súčasnosti je nepredstaviteľné, že by niekto takto detailne programoval hry. Vo vede a technike sa výpočty prúdenia okolo objektov zložitého tvaru robia na superpočítačoch, aké hráč nemá k diskpozícii. Takže v prípade scén náročných na výpočtový čas sa robia aj hrubé zjednodušenia. Okrem spomenutých listov na strome je veľmi zložité modelovať a výpočtovo náročné aj plameň a dym, aký vznikne pri výstrele zo zbrane. Tak sa tiež robia hrubé zjednodušenia a proste sa to len nejako „namaľuje“, namiesto toho, aby sa na základe fyzikálnych zákonov počítala dynamika alebo dokonca elektrodynamika polí, ktoré súvisia s časticami letiacimi z hlavne.

Spomenuli sme elektrodynamiku. Fyziku teda netvoria len javy, ktoré sa dajú popísať pomocou pohybu telies alebo častíc, ale aj elektrické a magnetické javy. Tie sú však pre dynamiku typických herných situácií nedôležité alebo málo dôležité. V našom predmete sa nimi nebudeme zaoberať. Nebudeme sa zaoberať ani realistickým ***zobrazením*** objektov na scéne, i keď to je, aspoň do istej miery, pre hry dôležité. Bude pre nás síce dôležité, aby sme dynamiku objektov na scéne zobrazovali v súlade s tým, ako je na základe fyzikálnych zákonov počítaná, ale samotnú vizualizáciu budeme robiť len v hrubých rysoch, schematicky. Nebudeme teda pracovať s textúrami, so svetlom, s tieňmi a pod. Niežeby to pre hry nebolo dôležité, ale sú to témy, ktoré už viac patria do počítačovej grafiky než do fyzikálneho modelovania. Pravda, niekto by mohol namietať, že veď svetlo a tiene sú vyslovene fyzikálne (povedzme optické) javy. Áno, je tomu tak, ale v našom predmete nemáme čas na všetko a tieto veci radšej prenecháme tým, ktorí sa špecializujú na počítačovú grafiku. My v našom predmete sa budeme zameriavať na *dynamiku* objektov na scéne.

1 Kinematika pohybu bodov a telies, ktoré si vieme účelovo predstaviť ako body

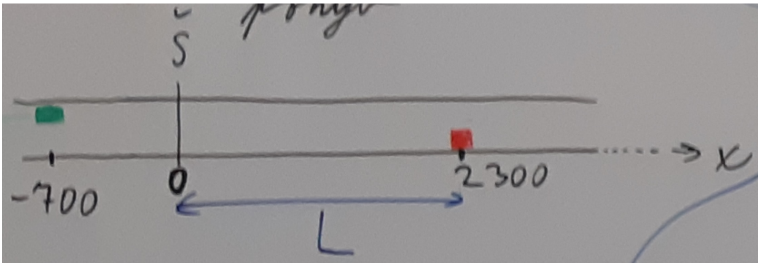
Keď len popisujeme, ako sa poloha, rýchlosť a prípadne aj zrýchlenie telesa či bodu mení, ale neskúmame to pomocou síl, tak povieme, že skúmame kinematiku pohybu. Aj samotná táto oblasť *mechaniky hmotného bodu* sa nazýva Kinematika.

1.1 Hmotný bod

Chceli by sme v hre napodobniť (modelovať, simulovať) pohyb auta; neskôr sa dostaneme aj ku iným telesám: kamene, projektily, lietadlá a pod. V tomto úvode však treba začať s niečím jednoduchým, takže si predstavme auto, ktoré sa pohne a ide po dlhej priamej ceste stálou rýchlosťou, povedzme 60 km/h. Naša prvá otázka je, kde sa bude auto nachádzať po minúte takého pohybu, po dvoch minútach atď. Ale dá sa to jednoznačne povedať? Veď auto nie je bodka, ale objekt dlhý niekoľko metrov a má aj nejakú šírku a výšku. Dáte mi však za pravdu, že obťažovať sa takýmito črtami auta by pre náš účel v tejto chvíli bolo nepraktické až kontraproduktívne. Keď by sme na to auto pozerali z veľkej výšky, napr. z lietadla, videli by sme ho len ako nejakú bodku pohybujúcu sa po ceste. A plne by nám to stačilo k tomu, aby sme vedeli povedať, kde sa auto nachádza napr. po minúte jazdy. Vidíme, že pre daný účel je praktické namiesto auta ako rozmerného telesa uvažovať bodku, ktorá môže predstavovať napr. stred auta (alebo ešte vhodnejšie jeho ťažisko, čo je pojem, ktorý si bližšie vysvetlíme neskôr). Tak prichádzame k užitočnému pojmu ***hmotný bod***. Je to akási veľmi praktická abstrakcia telesa, ktorá nám umožňuje odhliadnuť od jeho nenulových rozmerov, ak sú pre daný účel nepodstatné. Stačilo by povedať aj *bod*, ale keďže ide o teleso, ktoré má nenulovú hmotnosť, častejšie budeme hovoriť o hmotnom bode.

1.2 Poloha, súradnica

A akým spôsobom vyjadríme, kde sa auto na tej ceste nachádza? Povieme, že napr. 2300 metrov od štartovnej čiary. Tak prichádzame ku pojmu *vzdialenosť*. A môžeme použiť aj pojem ***dĺžka*** (tu cesty, ktorú auto prebehlo). Dĺžka patrí medzi základné ***fyzikálne veličiny***. Udávame ju najčastejšie buď v metroch (m) alebo v ich násobkoch či dieloch: kilometer (km = 1000 m), centimeter (cm = 0,01 m) atď. Označujeme ju najčastejšie písmenami ℓ, L, alebo aj d, D; tieto d-čka sa hodia najmä keď používame pojem vzdialenosť (*distantia, distance*). Čo však, ak by auto cúvalo alebo šlo opačným smerom, povedzme 100 m? Dostalo by sa na iné miesto na ceste než keby šlo 100 m dopredu. Vyjadrenie toho, na ktorú stranu auto šlo, môžeme teda urobiť slovne (dozadu, dopredu). Ale to nemusí byť praktické, keď potrebujeme túto informáciu sprostredkovať alebo zobraziť číselne. Pre taký účel je vhodnejšie polohu smerom dozadu vyjadrovať zápornými číslami a smerom dopredu samozrejme kladnými. A prichádzme ku pojmu ***súradnica***. Tiež ju môžeme vyjadrovať v metroch, ale na rozdiel od vzdialenosti alebo dĺžky môže byť aj záporná. Miesto, skadiaľ auto štartuje, má teda značku 0. Môžeme si to aj nakresliť (obr. 1). Tá čiara sa nazýva *súradnicová os* alebo *vzťažná os*. Ak po-



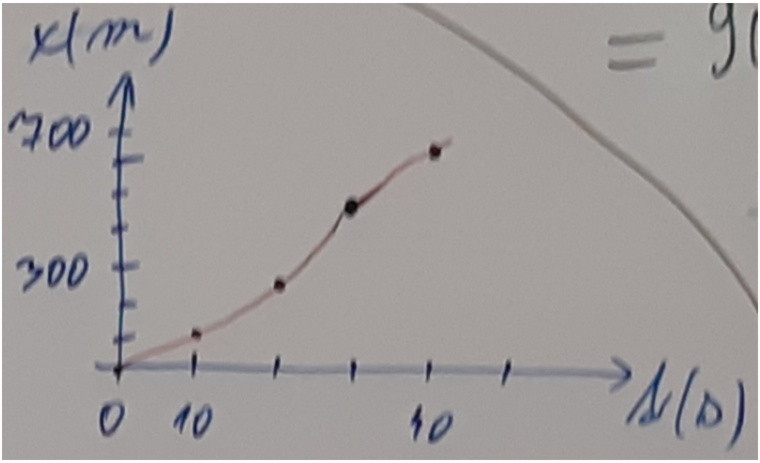
Obr. 1: Cesta, autá, súradnicová os. Písmeno Š znamená „štart“ a bod 0 na osi je zvolený v mieste štartu. Zelené auto ide doľava, červené doprava. (Na tomto provizórnom obrázku vyrobenom z fotky tabule sú aj nadbytočné veci.)

trebujeme súradnicu označiť aj nejakým písmenom, zoberme zaužívané x. A môžeme napísať, že napr. po desiatich sekundách cúvania sa auto nachádza v mieste $x = -50$ m. Polohu auta (a aj iného objektu, napr. projektilu) teda vyjadrujeme pomocou jeho súradnice.

Zatiaľ sme vystačili s jednou súradnicou (značenou x), lebo sme uvažovali rovnú cestu. V zložitejších prípadoch budeme potrebovať viac súradníc.

1.3 Čas

Ak sa auto pohybuje, jeho poloha (súradnica) sa mení. V každom okamihu nadobúda novú hodnotu. Povieme aj, že poloha auta sa mení s časom. Bola uvedená tabuľka ako príklad. A vôbec, všetky zmeny, ktoré sa vo fyzickom svete dejú, prebiehajú v čase. Čas je tiež jednou zo základných fyzikálnych veličín a zvykne sa označovať písmenkom t, čo je odvodené od slov *tempus, time*. Základnou jednotkou pre čas je sekunda (s). Napíšeme napr., že jazda auta trvá už $t = 27\,\mathrm{s}$. Môžu sa používať aj iné jednotky času, ak je to praktické; napr. vyššie sme spomenuli minúty. Ak sa poloha alebo teda súradnica auta s časom mení, z hľadiska matematiky môžeme súradicu považovať za funkciu závislú na čase. Symbolicky to zapíšeme takto: $x = x(t)$. Túto závislosť môžeme zakresliť aj ako funkciu do grafu (obr. 2). Zakreslené body sú známe hodnoty, ktoré sme prevzali z tabuľky. Cez ne sme odhadom nakreslili súvislú čiaru, lebo vieme, že $x(t)$ má byť spojitou funkciou času; v hocijakom okamihu má nejakú súradnicu, nielen v tých, ktoré boli v tabuľke.



Obr. 2: Závislosť súradnice auta of času. Príslušnú tabuľku sme mali na tabuli. Slušne nakreslený graf by však mal mať čísla na osiach pravidelne! Neberte si z tohto grafu príklad, ako kresliť grafy! (A aj na tento provizórny obrázok sa dostali i nadbytočné veci.)

1.4 Kinematika priamočiareho pohybu

Niekedy pre stručnosť povieme, že pôjde o pohyb v jednom rozmere (t. j. v jednorozmernom priestore, stručne v 1D), lebo taký pohyb sa dá pri vhodnej voľbe súradnicových osí popísať pomocou jedinej súradnice; budeme používať, ako sme už aj začali,

x. Treba si však uvedomiť, že aj na popis priamočiareho pohybu môžeme niekedy potrebovať i viac súradníc – vtedy, keď sa teleso nepohybuje rovnobežne s niektorou zo súradnicových osí.

1.4.1 Rýchlosť

Ak cestujeme autom po dobrej diaľnici a za polhodinu prejdeme vzdialenosť povedzme 65 km, tak povieme, že sme cestovali rýchlosťou 130 km/h. Presne tak to môžeme povedať vtedy, ak sme šli rovnomernou rýchlosťou. Pri dlhších úsekoch sa však nestáva, že by sme celý čas mohli mohli ísť rovnomernou rýchlosťou; občas treba zabrzdiť, inokedy zrýchliť. Tých 65 km za polhodinu jazdy však povedzme že spravíme aj napriek kolísavému tempu jazdy, aj keď na to už občas porušíme maximálnu povolenú rýchlosť. A v iných chvíľach zasa ideme pomalšie než je maximálna povolená stotridsiatka. Povieme potom, že počas cesty sme mali ***priemernú rýchlosť*** 130 km/h. Tieto úvahy nás však zároveň privádzajú k tomu, že pre rýchlosť auta v nejakom zvolenom okamžiku (napr. keď nás zameriava policajný radar) nevystačíme s pojmom priemerná rýchlosť. Ak nás radar zameral v okamžiku, keď sme šli 145 km/h, tak nám nepomôže, že v priemere sme šli len 130 km/h; dôležitá je *okamžitá* hodnota rýchlosti. Tá je dôležitá napr. aj v prípade nárazu; nepomôže nám, že na nejakej ceste sme doteraz šli v priemere štyridsiatkou, ak narazíme v okamihu, keď sme sa hnali osemdesiatkou.

Ako sa dá dopracovať ku nejakému spôsobu výpočtu okamžitej rýchlosti, alebo aspoň ku jej približnému určeniu? Tak, že na určenie si nezoberieme celý 65-kilometrový úsek, ale nejaký kratší. Na diaľnici bývajú každých 500 m tabuľky s označením, na koľkom kilometri diaľnice sa nachádzame. (To sú vlastne súradnice.) Ak si odstopujeme čas, za aký prejdeme od jednej tabuľky ku druhej, môžeme pomocou neho určiť rýchlosť, akou sme šli medzi tými dvomi tabuľkami. Ak napr. tú vzdialenosť prejdeme za čas 15 s, tak rýchlosť budeme počítať takto:

$$\text{rýchlosť} = \frac{500\,\text{m}}{15\,\text{s}} = \frac{0{,}5\,\text{km}}{0{,}0041\overline{6}\,\text{hod}} = 120\,\text{km/h}$$

Stále je to len priemerná rýchlosť, tentoraz však už len na tom jednom úseku. Na nasledujúcom úseku môže vyjsť napr. 132,3 km/h. Na ďalšom povedzme 134,7 km/h. Tak potom dostávame predsa len istú informáciu o tom, ako sa rýchlosť nášho auta menila s časom, i keď je to len taká „hrubozrnná“ informácia. Hrubozrnná preto, že nezachytáva zmeny rýchlosti vnútri tých jednotlivých polkilometrových úsekov. Ak chceme menej hrubozrnnú informáciu, musíme úseky, na ktorých meriame časy, ešte skrátiť. Tak si zoberme naozaj kratučký úsek cesty, ktorého dĺžku označíme Δx; napr. by to mohlo byť 5 m. V rámci tohto kratučkého úseku už môžeme predpokladať, že zmena rýchlosti na ňom nenastane, alebo ak nastane, tak len nepatrná, zanedbateľná. Stopkami alebo akokoľvek inak zmeriame, že sme ten úsek prešli za čas, ktorý označíme Δt; povedzme že by to bolo $0{,}1\,\mathrm{s}$. Aj pre rýchlosť si zavedieme nejaký písmenkový symbol; už od dávna sa zvykne používať v (od slov *velocitas, velocity*). My tam teraz pridáme aj index x preto, aby sme zvýraznili, že ide o pohyb v smere osi x. Rýchlosť na tom úseku teda bude

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1}$$

Číselne by nám pre vyššie uvedené hodnoty vyšlo $5/0{,}1\,\mathrm{m/s} = 50\,\mathrm{m/s} = 180\,\mathrm{km/h}$, za čo by sme teda dostali už poriadnu pokutu. Skúsme si formulku vyššie zapísať trochu podrobnejšie. Pri našom meraní si volíme istý časový okamih t; to je moment, kedy spustíme stopky. Auto sa vtedy nachádza v mieste so súradnicou, ktorú si označíme $x(t)$. Súradnicu tu teda rozumieme ako funkciu času. Stopky zastavíme v čase o Δt neskôr, teda v čase $t + \Delta t$. Vtedy sa už auto nachádza o Δx ďalej, teda v mieste

$$x(t + \Delta t) = x + \Delta x$$

Formulu (1) vyššie preto môžeme zapísať

$$v_x = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

Pri prudkom brzdení by však ani úsek $5\,\mathrm{m}$ nebol dostatočne krátky na to, aby sme mohli menenie rýchlosti v rámci neho zanedbať. Takže vo všeobecnosti sú vyjadrenia (1) a (2) len návodom na to, ako vypočítať priemernú rýchlosť; je to vlastne definícia toho, čo považujeme za priemernú rýchlosť na tom úseku dĺžky Δx. Ak chceme definovať naozaj presne, čo *okamžitá* rýchlosť je, treba časový úsek Δt použiť limitne krátky, teda nekonečne krátky; tým pádom aj Δx bude nekonečne malý úsek cesty. Naozaj okamžitá rýchlosť v čase t je teda toto:

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

Ako už z matematiky iste viete, takýto zápis pomocou limity sa nazýva *derivácia*. Tu konkrétne je to derivácia funkcie x podľa t. Okamžitá ***rýchlosť bodu je teda deriváciou jeho súradnice podľa času***. Hodnota takejto rýchlosti môže byť tak kladná ako aj záporná (popr. aj nulová), podľa toho, či sa auto (alebo čokoľvek iné) pohybuje v kladnom smere súradnicovej osi alebo v zápornom smere (obr. 1). Veľkosť rýchlosti $|v_x(t)|$ je samozrejme vždy nezáporná. Preto najmä ak by malo dôjsť ku zmätkom, treba pri vyjadrovaní sa rozlišovať pojmy rýchlosť (ktorá môže byť aj záporná) a veľkosť rýchlosti. Matematici zvyknú deriváciu značiť čiarkou, čiže stručne by sme mali $v_x(t) = x'(t)$, ale takýto spôsob sa vo fyzikálnych disciplínach nepoužíva, lebo čiarka sa nám zvyčajne zíde na označenie iných vecí. Vo fyzike a aj v našom predmete použijeme pre deriváciu podľa času buď bodku nad x, alebo použijeme zlomkový zápis vyjadrujúci podiel diferenciálov (nekonečne malých veličín):

$$\boxed{v_x(t) = \dot{x}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \tag{4}$$

Ten druhý zápis nápadne pripomína formulku (1) a naozaj je to to samé, ak vo formulke (1) použijeme nekonečne malé (*infinitezimálne*) veličiny. Argumenty t vo funkciách nie je nutné vždy písať; závisí to od konkrétnych okolností. Zatiaľ sme hovorili len o prípade, keď sa auto alebo bod, ktorým ho reprezentujeme, pohybuje jedným smerom, teda pozdĺž nejakej priamky (ale môže pritom aj zastať a cúvať, znova sa rozbiehať dopredu atď.) To nazývame ***priamočiary pohyb***. Ak sa pritom navyše auto či bod pohybuje stálou rýchlosťou, tak hovoríme, že koná *rovnomerný priamočiary pohyb*. O ňom si teraz trochu podrobnejšie niečo povieme.

Rovnomerný priamočiary pohyb. Pri rovnomernom pohybe (dokonca by nemusel byť ani priamočiary) auto (alebo iné teleso alebo len bod) za každú sekundu prejde rovnakú vzdialenosť. Poriadnejšie povedané, za každý časový úsek nejakej zvolenej dĺžky Δt (nemusí to byť sekunda) prejde rovnakú vzdialenosť

$$|\Delta x| = |v_x|\,\Delta t \tag{5}$$

ako to vidno z formulky (1). Čím dlhší je čas rovnomerného pohybu, tým je – priamoúmerne – väčšia prejdená vzdialenosť, alebo povieme ***dráha*** a označíme ju s. Aby sme zápis práve napísanej formulky zjednodušili, ešte dáme preč znak Δ od času a pre veľkosť rýchlosti zavedieme bezindexové označenie (tak to býva často zvykom):

$$v = |v_x| \tag{6}$$

Zápis priamej úmery (5) sa potom zjednoduší na známy stredoškolský (alebo dokonca základoškolský) tvar

$$s = vt \tag{7}$$

ktorý nám hovorí, že dráha rovnomerného pohybu je priamoúmerná času.
Príklad: Ak by sa auto pohybovalo rovnomerne rýchlosťou veľkosti 25 m/s počas doby 5 s, tak by za ten čas prešlo dráhu

$$s = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,5\,\mathrm{s} = 125\,\mathrm{m}$$

Mimochodom, aká je táto rýchlosť, keď ju vyjadríme v km/h? Je $25 \cdot 3{,}6\,\mathrm{km/h} = 90\,\mathrm{km/h}$. Trochu neskôr si povieme aj o prípadoch, kedy auto, alebo vo všeobecnosti bod, sa pohybuje zložitejším spôsobom.

Príklad: Auto z predošlého príkladu sa pohybovalo rovnomerne tak, že v čase spustenia stopiek (to je okamih $t = 0$) malo súradnicu $x_0 = -30\,\mathrm{m}$ a jazdilo po ceste smerom doprava (teda v smere osi x). Akú súradnicu má po 8,3 sekundách takej jazdy? Nuž, bude to

$$x = -30\,\mathrm{m} + \underbrace{v_x t}_{s} = -30\,\mathrm{m} + 25 \cdot 8{,}3\,\mathrm{m} = 177{,}5\,\mathrm{m}$$

Všeobecné formuly pre rovnomerný priamočiary pohyb zapíšeme

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_x = \text{konšt} \qquad (8a)\\ x(t) &= x_0 + v_x t \qquad (8b)\end{aligned}}$$

To druhé je dobre známa formula závislosti súradnice od času pri rovnomernom priamočiarom pohybe. Na ľavej strane je funkcia $x(t)$, čo je nejaká hodnota, ktorá sa s časom mení. Na pravej sa o. i. vyskytuje konštanta $x_0 = x(0)$, teda poloha bodu v čase 0. Vystupuje tam aj ďalšia konštanta – rýchlosť v. Nezabudnime, že v prípade pohybu proti smeru zvolenej osi je táto rýchlosť záporná. Rovnice (8) nazveme ***rovnice kinematiky pre rovnomerný priamočiary pohyb*** pozdĺž osi x. Samozrejme, tú priamku, pozdĺž ktorej sa daný pohyb uskutočňuje, sme si mohli označiť aj inak ako x, napr. y alebo z a potom by sme v (8) zodpovedajúco prispôsobili označovanie.

Prednáška v 2. týždni (25. 2. 2022)

Všimnime si, že rovnica (8b) sa dá dostať aj priamo z definície okamžitej rýchlosti (4), ak si spomenieme na niektoré poznatky z integrálneho počtu: na ľavú i pravú stranu rovnice (4) uplatníme integrovanie. Máme na výber, či neurčitý (primitívna funkcia) alebo určitý integrál. Oba spôsoby sú možné. Zvoľme si ten prvý.

$$\int v_x\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

Obe strany zintegrujeme ľahko: v_x na ľavej strane je teraz totiž konštanta, takže ju dáme pred integrál. Na pravej strane je aplikovaný neurčitý integrál cez t na funkciu derivovanú podľa t. Integrovanie a derivovanie podľa tej istej premennej sa navzájom vyrušia, takže dostaneme len samotné x a ešte nejakú integračnú konštantu. To vyrušenie sa integrovania a derivovania je vďaka zlomkovému zápisu derivácie veľmi názorne viditeľné – je to vykrátenie sa diferenciálov dt. Nejakú integračnú konštantu dostaneme pravdaže aj na ľavej strane. Takže zintegrovaním dostaneme

$$v_x t + C_1 = x(t) + C_2$$

alebo teda

$$v_x t + C = x(t) \tag{9}$$

kde $C = C_1 - C_2$. Ako určíme C? Zo znalosti ***začiatočnej podmienky*** (tu konkrétne polohy), teda že kde bol bod v čase 0. Bol v mieste $x(0) = x_0$. Preto [keď do rovnice (9) dosadíme za čas nulu] dostaneme

$$C = x_0$$

a tak z pomocnej rovnice (9) nachádzame vyjadrenie

$$x(t) = x_0 + v_x t$$

čo je známa veľmi jednoduchá závislosť súradnice od času pri rovnomernom priamočiarom pohybe, ku ktorej sme sa menej formálnou úvahou dopracovali už aj skôr. A dalo by sa ku nej prísť aj pomocu určitého integrálu, ale to tu vynecháme, aby sme sa týmito jednoduchými vecami nenudili.

1.4.2 Zrýchlenie

Zostaňme nateraz ešte síce pri priamočiarom pohybe, ale už sa neobmedzujme na rovnomerný. Nech sa teda rýchlosť auta môže meniť. Vtedy hovoríme, že auto zrýchľuje alebo spomaľuje. Aby sme tieto veci vedeli aj numericky počítať a programovať, treba im dať nejaký pevný matematický základ podobne, ako sme dali matematický základ pojmom poloha a rýchlosť. Poďme na to takto: V čase t nech rýchlosť je $v_x(t)$. V čase $t + \Delta t$ je vo všeobecnosti nejaká iná: $v_x(t) + \Delta v_x$, kde Δv_x je zmena rýchlosti (môže byť aj záporná). Čím väčšia zmena rýchlosti za ten kratučký časový úsek nastane, tým väčšie zrýchlenie alebo strmšie spomalenie auto má. Zrýchlenie označujeme písmenom a (*acceleratio, acceleration*). Teraz mu ešte pridáme aj index x a definujeme ho zhruba takto:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \tag{10}$$

Je to podobná formula, ako (1), ktorú sme použili pre rýchlosť. A aj táto formula je len hrubá, vyjadruje vlastne len priemerné zrýchlenie počas doby Δt. Aby sme presne vyjadrili *okamžité* zrýchlenie v čase t, opäť musíme použiť infinitezimálny počet:

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \tag{11}$$

Aj pre toto máme i stručnejšie zápisy:

$$\boxed{a_x(t) = \dot{v}_x(t) \equiv \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}} \tag{12}$$

Zrýchlenie bodu je teda deriváciou jeho rýchlosti podľa času. Táto definícia, ako uvidíme, bude platiť nielen pre priamočiare pohyby.

Všimnime si, že zrýchlenie teraz kombináciou predošlých definícií vieme vyjadriť aj ako druhú deriváciu súradnice:

$$\boxed{a_x(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}} \equiv \ddot{x} \tag{13}$$

Znamienko zrýchlenia môže opäť byť aj záporne. To najlepšie vidieť z podrobného zápisu (11), alebo aj z (10). Menovateľ Δt je tam vždy kladný (i keď môže byť veľmi malý).
Príklad: Nech $v_x(t) = -2{,}2\,\mathrm{m/s}$, $v_x(t+\Delta t) = -2{,}0\,\mathrm{m/s}$, $\Delta t = 0{,}1\,\mathrm{s}$. To je prípad, keď sa auto pohybuje proti smeru osi x („doľava“) a spomaľuje, lebo *veľkosť* jeho rýchlosti klesá. Zrýchlenie na tom úseku však vychádza $a_x = 2\,\mathrm{m/s^2}$, čiže kladné. Takže pozor! Znamienko zrýchlenia nám nehovorí o tom, či auto zvyšuje alebo znižuje veľkosť svojej rýchlosti. Toto znamienko totiž závisí od toho, ktorým smerom sme si zvolili kladný smer súradnicovej osi. Keby sme ho zvolili opačne, zrýchlenie by v tomto prípade vyšlo záporné.

A na okraj tohoto: čo je to *spomalenie*? Je to azda prípad, keď je zrýchlenie záporné? Nie. Spomalenie je, striktne povedané, dosť zbytočný pojem, lebo všetko je zahrnuté v pojme zrýchlenie (a v definícii orientácie súradnicovej osi). Ale predsa len, tento pojem býva vo vyjadrovaní sa užitočný, lebo ním zvyčajne chceme povedať, že teleso (auto, bod, ...) znižuje veľkosť svojej rýchlosti; napr. keď auto brzdí, tak spomaľuje, bez ohľadu na to, ktorým smerom sa pritom hýbe.

Rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb. Je to taký pohyb, pri ktorom je zrýchlenie telesa stále rovnaké, teda časovo nemenné. Rýchlosť telesa sa teda rovnomerne zvyšuje alebo znižuje. V aute to vieme precítiť aj fyzicky: je to také rozbiehanie sa auta, pri ktorom sme do sedadla tlačení nemenou silou. (Alebo brzdenie.) Ale to už zabiehame do dynamiky, ktorej sa budeme venovať až niekedy nabudúce. Poďme späť do kinematiky. Ak je zrýchlenie nemenné, tak podľa (10) sa rýchlosť za každý časový úsek Δt zmení o rovnakú hodnotu Δv_x. Preto podľa (10)

$$\Delta v_x = a_x\,\Delta t \tag{14}$$

a keď si z toho odmyslíme znaky Δ a indexy x, „vypadne“ nám z toho známy stredoškolský vzťah pre rovnomerne zrýchlený pohyb:

$$\boxed{v = at} \tag{15}$$

Ako z neho vidno, platí len pre taký pohyb, ktorý začína z nulovej rýchlosti, teda v čase 0 musí byť auto v pokoji. V čase t už nadobudne rýchlosť v. A akú dráhu za ten čas prejde?

$$s = v_{\text{priem}}\, t$$

kde v_{priem} je priemerná rýchlosť na danom úseku pohybu. Keďže ide o *rovnomerne* zrýchlený pohyb začínajúci z nulovej rýchlosti a na danom úseku dosahujúci rýchlosť v, tak priemerná je

$$v_{\text{priem}} = \frac{0+v}{2} = \frac{1}{2}\, v = \frac{1}{2}\, at$$

Preto dráha bude

$$\boxed{s = \frac{1}{2}\, a\, t^2} \tag{16}$$

čo je ďalšia známa stredoškolská formulka. Nárokom sme do nej nepísali index x ani žiadne Δ, aby sme zvýraznili jej stredoškolskú jednoduchosť. Treba ju preto používať používať opatrne, lebo platí len ak sa teleso pohybuje z pokoja (z nulovej začiatočnej rýchlosti), alebo ak spomaľuje a počas doby t spomalí z rýchlosti v až na nulovú rýchlosť.

Radšej sa opäť teraz vrátime ku všeobecnejším formuláciám, lebo s tými stredoškolskými by sme nevystačili na popis rôznych pohybov, aké sa aj v počítačových hrách (a aj v skutočnom svete) vyskytujú. Zoberme definičnú formulu (12) a z nej skúsme vyjadriť rýchlosť. Opäť máme na výber, či to spravíme pomocou výpočtu primitívnej funkcie a následného dourčenia integračnej konštanty, alebo či použijeme určitý integrál. Vyberme si tentoraz druhú možnosť. Zoberieme teda spomenutú formulku a obe jej strany zintegrujeme cez čas od 0 po t. Čas ako integračnú premennú pritom označíme čiarkou, aby sme ho odlíšili od hornej hranice integrovania:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^t a_x(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t \frac{\mathrm{d}v_x(t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t'$$

Teraz sa zaoberáme rovnomerne zrýchleným pohybom, takže zrýchlenie tu od času nebude závisieť a môžeme ho vybrať pre integrál. Pravú stranu zintegrujeme triviálne. Pre obe strany použijeme Leibnitzov-Newtonov vzorec. Dostaneme

$$a_x\, t = v_x(t) - v_x(0)$$

z čoho vyplýva

$$\boxed{v_x(t) = v_x(0) + a_x t} \tag{17}$$

To je už na prvý pohľad všeobecnejšie vyjadrenie menenia sa rýchlosti, než stredoškolská formula (15). A ako sa pri rovnomerne zrýchlenom priamočiarom pohybe mení súradnica bodu (auta, lietadla, ...), teda x? Aby sme to zistili, zoberme si niektorú všeobecnú formulu, kde nám to x nejako vhodne vystupuje. Najlepšie formulu (4) pre definíciu rýchlosti:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Jej zintegrovaním dostaneme

$$\int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x(t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boxed{\int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' = x(t) - x(0)}} \tag{18}$$

To zarámované za šípkou je všeobecne platné pre akokoľvek zrýchlený (teda nielen rovnomerne) alebo nezrýchlený priamočiary pohyb. Teraz sa zaoberáme rovnomerne zrýchleným a preň dosadíme za rýchlosť podľa (17). Potom vieme zintegrovať aj ľavú stranu a dostávame

$$v_x(0)\,t + \frac{1}{2}\,a_x\,t^2 = x(t) - x(0)$$

čo po prehodení jedného člena dáva

$$\boxed{x(t) = x(0) + v_x(0)\,t + \frac{1}{2}a_x t^2} \tag{19}$$

Je to výsledok výrazne širšie použiteľný, než stredoškolská formula $s = at^2/2$ pre dráhu. Tá sa pravdaže dá z tohoto všeobecnejšieho vzťahu odvodiť.

Takže zhrňme: pre rovnomerný priamočiary pohyb sa rýchlosť a súradnica menia podľa (8a), (8b) a pre rovnomerne zrýchlený priamočiary podľa (17), (19). Samozrejme, že namiesto osi x by sme mohli používať aj os y alebo z a teda aj vo formulách písať namiesto x iné písmenko.

1.4.3 Príklad: Voľný pád telesa pri zanedbateľnom odpore vzduchu

Je to príklad na priamočiary rovnomerne zrýchlený pohyb.

Kameň padá z výšky h. Za aký čas a akou rýchlosťou dopadne? Vyčíslite pre $h = 30\,\mathrm{m}$. Odpor vzduchu zanedbajte.

Riešenie: V absencii odporu vzduchu kameň padá rovnomene zrýchlene so zrýchlením rovným tiažovému zrýchleniu: $a = g$. To je v našich zemepisných šírkach okolo $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Na vyriešenie tejto úlohy stačí použiť stredoškolské formulky:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \tag{20}$$

Rýchlosť dopadu určíme takto:

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

teda

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}} \tag{21}$$

čo je veľmi známa formula. *Nakoniec* dosaďme aj číselné hodnoty:

$$t = \sqrt{\frac{2\,.\,30\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} \doteq 2{,}47\,\mathrm{s}$$

$$v = \sqrt{2\,.\,9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,30\,\mathrm{m}} \doteq 24{,}3\,\mathrm{m/s}$$

1.4.4 Príklad: Zvislý vrh pri zanedbateľnom odpore vzduchu

Aj toto je príklad na priamočiary rovnomerne zrýchlený pohyb.

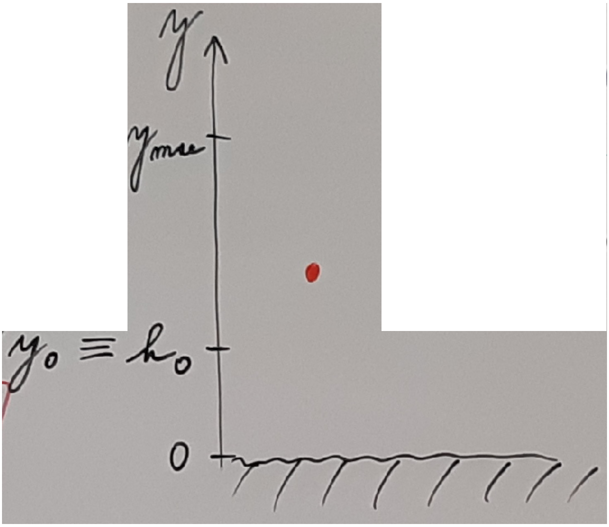
Vyhodíme kameň do výšky rýchlosťou $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, pričom ho z ruky vypustíme vo výške $h_0 = 2\,\mathrm{m}$. Ako vysoko vyletí, za aký čas sa tam dostane a za aký čas a akou rýchlosťou dopadne na zem? Odpor vzduchu zanedbajte.

(A opäť, a nielen tento príklad, treba riešiť všeobecne a až na koniec dosadzovať číselné hodnoty.)

Riešenie: Táto úloha sa od predošlej líši len tým, že na začiatku pohybu, ktorému priradíme čas $t = 0$, má kameň nenulovú rýchlosť. Tá môže smerovať tak nahor ako aj nadol. Tu uvažujeme vrh nahor. Kameň bude spomaľovať a nakoniec začne padať k zemi. Vieme, že je to kvôli gravitácii, kvôli zemskej príťažlivosti. Do týchto vecí však teraz nebudeme zabiehať, lebo preberáme časť *Kinematika*, a v kinematike sa nezaoberáme silami, len počítame, ako sa pri pohybe menia súradnice a rýchlosti. Takže opäť ako daný fakt prijmeme, že ide o pohyb s konštantným (nemenným) zrýchlením o veľkosti g. Na riešenie tentoraz nebude stačiť len jednoduché použitie stredoškolských formuliek (15) a (16). Namiesto nich radšej siahneme po všeobecných rovniciach (17) a (19) pre rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb. Len ich prispôsobime teraz počítanej úlohe. V nej namiesto osi x používame os y, ale to je len nepodstatná zmena označenia. Tiažové[1] zrýchlenie smeruje dole, čiže proti nami zvolenej orientácii osi y (obr. 3), preto máme

$$a_y = -g \doteq -9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

[1]Najmä kvôli zemskej rotácii to nie je úplne presne to isté ako gravitačné zrýchlenie.



Obr. 3: Obrázok ku zvislému vrhu. Červený krúžok znázorňuje pohybujúci sa kameň. Výškovú súradnicu sme si označili y.

a teda

$$v_y(t) = v_y(0) + a_y t\,, \qquad y(t) = y(0) + v_y(0)\,t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{22}$$

a po ďalšom prispôsobení

$$\boxed{\begin{aligned} v_y(t) &= v_0 - gt & \text{(23a)} \\ y(t) &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 & \text{(23b)} \end{aligned}}$$

1. V okamihu dosiahnutia maximálnej výšky, označme ho t_{m}, je rýchlosť kameňa nulová. Preto z (23a) dostávame

$$0 = v_0 - gt_{\mathrm{m}} \;\Rightarrow\; \boxed{t_{\mathrm{m}} = \frac{v_0}{g}} \doteq 1{,}019\,\mathrm{s} \tag{24}$$

2. Najvyššia dosiahnutá výška je

$$y_{\max} = y(t_{\mathrm{m}}) \;=\; y_0 + v_0 t_{\mathrm{m}} - \frac{1}{2}gt_{\mathrm{m}}^2 \;=\; y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{2g} \tag{25}$$

teda

$$\boxed{y_{\max} = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}} \doteq 7{,}1\,\mathrm{m} \tag{26}$$

3. V okamihu dopadu, označme ho t_D, je výšková súradnica kameňa nulová. Preto z (23b) dostávame

$$0 = y_0 + v_0 t_\mathrm{D} - \frac{1}{2} g t_\mathrm{D}^2 \tag{27}$$

To je nanešťastie kvadratická rovnica, čiže komplikácia. Ale zvládnuteľná. Upravme a prepíšme tú rovnicu do praktickejšieho tvaru

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t - y_0 = 0$$

Dva jej korene sú

$$t_\pm = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 g y_0}}{g}$$

Čas dopadu musí byť kladný a preto (keď ešte rozdelíme výraz na dva sčítance a g v druhom z nich vsunieme pod odmocninu s nutnou úpravou na g^2)

$$t_\mathrm{D} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 + 2 g y_0}{g^2}}$$

Po finálnej úprave dostávame výsledok

$$\boxed{t_\mathrm{D} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2 y_0}{g}}} \doteq 2{,}22\,\mathrm{s} \tag{28}$$

Keď sa nad tým zamyslíme, prídeme na to, že tento výsledok sme mohli dostať aj bez riešenia kvadratickej rovnice: stačilo by sčítať už známy čas potrebný na výstup nahor (t_m) s časom potrebným na pád z najvyššej dosiahnutej výšky, tiež už známej. Tento druhý časový interval sa dá jednoducho určiť zo stredoškolského vzorca (20), len tam namiesto h treba dosadiť formulu (26) pre naše y_max.

4. Nakoniec ešte vypočítame, akou rýchlosťou kameň dopadne. Vyslovene systematickým postupom by sme to určili pomocou (23a):

$$v_{\mathrm{D}y} = v_y(t_\mathrm{D}) = v_0 - g t_\mathrm{D} \tag{29}$$

Za t_D by sme dosadili vyjadrenie (28) a po zjednodušení by sme dostali výsledok (záporný, lebo ním chceme vyjadriť aj smer rýchlosti). Ale podobne ako v predošlom bode, ku tomu istému výsledku sa dá prísť jednoduchšie na základe úvahy: kameň predsa padá z výšky y_max. Na určenie dopadovej rýchlosti preto stačí použiť stredoškolskú formulku (21), čiže

$$v_{\mathrm{D}y} = -\sqrt{2 g y_\mathrm{max}} \tag{30}$$

čo s použitím (26) dáva výsledok

$$\boxed{v_{\mathrm{D}y} = -\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}} = -11{,}8\,\mathrm{m/s} \tag{31}$$

Ako vidíme, systematický postup býva niekedy zdĺhavejší a na škodu fyzikálneho myslenia. Aj tak však treba ovládať i systematické postupy, lebo neraz sú jedinou praktickou možnosťou.

Všimnime si, že pri riešení sme vystačili s jednou priestorovou súradnicou, teda s jednou priestorovou osou (y). Celý popis sme teda spravili v ***jednorozmernom priestore***. Stručne sa povie, že v **1D** (*one-dimensional space*).

Prednáška v 3. týždni (4. 3. 2022)

1.4.5 Nerovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb

V nadpise tohto odseku sú tými najdôležitejšími slovami slová *nerovnomerne zrýchlený*. Stručne si o tomto pohybe povieme pre prípad, keď sa teleso alebo hmotný bod pohybujú priamočiaro (lebo o krivočiarom pohybe sme zatiaľ nehovorili).

Priamku, pozdĺž ktorej sa uvažovaný nerovnomerne zrýchlený pohyb deje, si označme ako os x. Nerovnomerne zrýchlený pohyb (tu pozdĺž osi x) je taký, pri ktorom sa zrýchlenie mení v čase, teda

$$\boxed{a_x = a_x(t)} \tag{32}$$

Príkladov takého pohybu je obrovské množstvo, lebo takmer žiaden zrýchlený pohyb v skutočných situáciách (a ani v počítačových hrách) nie je rovnomerne zrýchlený. Prípadne je rovnomerne zrýchlený len na nejakom pomerne krátkom časovom úseku, ale neskôr sa zrýchlenie zmení, čiže je nejakou *funkciou* času (závisí od času). Napr. ak kameň padá, tak počas pádu je jeho zrýchlenie síce konštantné, veľkosťou okolo $9{,}81\,\mathrm{m/s}$, ale v okamihu dopadu sa rýchlosť prudko zmení (klesne na nulu), čiže vtedy sa aj zrýchlenie takmer skokovo zmení (jeho veľkosť narastie, lebo zmena rýchlosti je veľká) a nakoniec hodnota zrýchlenia klesne na nulu (keď je už kameň nehybne položený na zemi).

Iný príklad na nerovnomerne zrýchlený pohyb je rozbiehajúce sa auto. Zo začiatku sa síce môže rozbiehať s konštantným zrýchlením, ale tento rovnomerne zrýchlený pohyb trvá len pomerne krátky čas. Je to zrejmé, lebo auto nedokáže do nekonečna rovnomerne zrýchľovať; to by muselo svoju rýchlosť zvyšovať do nekonečných hodnôt, čo sa samozrejme nedá.

Tento odsek uvádzame najmä preto, že študenti majú často tendenciu používať formulky typu

$$v = at\,, \qquad s = \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

aj pre nerovnomerne zrýchlený pohyb. To je zle! Tieto formulky sú použiteľné len pre rovnomerne zrýchlený pohyb! A dokonca neplatia ani naoko vylepšené formulky

$$\cancel{v = a(t)t}\,, \qquad \cancel{s = \frac{1}{2}a(t)t^2}$$

a ani všeobecnejšie vyzerajúce formuly

$$\cancel{v_x(t) = v_x(0) + a_x(t)t}\,, \qquad \cancel{x(t) = x(0) + v_x(0)\,t + \frac{1}{2}a_x(t)t^2} \tag{33}$$

Čo teda vlastne platí pre nerovnomerne zrýchlený pohyb? Nuž, platí všeobecná formula (12) definujúca okamžité zrýchlenie, a aj všeobecná formula (4) definujúca okamžitú rýchlosť, teda vyjadrenia

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,, \qquad v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{34}$$

Z nich dostávame

$$\boxed{v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t')\,\mathrm{d}t'}\,, \qquad \boxed{x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t'} \tag{35}$$

Toto sú správne náhrady za chybné formuly (33). Formuly (35) sú správne pre akýkoľvek priamočiary pohyb pozdĺž osi x, teda i pre nerovnomerne zrýchlený. Ak by sme chceli ešte pokračovať s vyjadrením $x(t)$, dosadili by sme za $v_x(t')$, čím by sme dostali dvojný integrál. A ak by sme chceli dostať niečo konkrétnejšie, museli by sme poznať priebeh funkcie $v_x(t)$, aby sme mohli integrály vystupujpce v (35) spočítať.

1.5 Kinematika krivočiareho pohybu

Na popis krivočiareho pohybu už nutne budeme potrebovať viac karteziánskych súradníc; aspoň dve. Špeciálnym prípadom krivočiareho pohybu je priamočiary pohyb. V našich úvahách v práve začínajúcej sa časti teda bude obsiahnuté aj všetko, čo bolo v časti 1.4 o priamočiarom pohybe. Teraz sa však naučíme taký pohyb popísať, i keby neprebiehal rovnobežne s niektoru súradnicovou osou.

Ak budeme hovoriť o pohybe, ktorý prebieha v rovine, na jeho popis pri vhodnej voľbe súradnicovej sústavy sú potrebné len dve súradnice; povedzme že x, y. Preto pohyb v rovine budeme občas pre stručnosť nazývať pohybom v 2D. A ak pôjde o pohyb, ktorý sa nezmestí ani do roviny, teda že na jeho popis sú nutné tri súradnice (x, y, z), budeme hovoriť o pohybe v priestore, alebo stručnejšie o pohybe v 3D.

1.5.1 Trajektória a dráha

Konečne sme sa dostali k tomu, aby sme presne definovali, čo budeme mať na mysli pod týmito dvomi pojmami. ***Trajektória*** pohybu je množina bodov v priestore, cez ktoré bod pri svojom pohybe prechádza. Je to teda vo všeobecnosti nejaká krivka. Najjednoduchším príkladom trajektórie je priamka alebo jej časť. Vtedy by šlo o priamočiary pohyb. ***Dráha*** je dĺžka trajektórie. Je to teda veličina, ktorá sa meria v dĺžkových jednotkách a je vždy nezáporná. Značí sa najčastejšie s.

Na záver tohoto vysvetlenia treba dodať, že nie všade pojmy trajektória a dráha odlišujú. Potom majú problém, že niekedy dráhou myslia krivku ako množinu bodov a inokedy jej dĺžku. Ale z kontextu sa dá usúdiť, čo majú na mysli.

1.5.2 Vodorovný vrh

Vodorovný vrh je prototypický jednoduchý príklad, na ktorom si ilustrujeme rozklad pohybu na dve zložky: vodorovnú (horizontálnu) a zvislú (vertikálnu).

Príklad: Obrancovia hradu vrhnú z jeho veže kameň vodorovným smerom rýchlosťou $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$. Výška okna, z ktorej kameň vrhajú, je $h = 35\,\mathrm{m}$. Terén pod vežou v smere letu kameňa je vodorovný. Ako ďaleko kameň doletí a za aký čas dopadne? Odpor vzduchu považujte za zanedbateľný.

(Ako vždy, treba všetko riešiť najprv všeobecne a až na koniec dosadiť číselné hodnoty.)

Riešenie: (Stručne; na prednáške som o tom hovoril podrobne. Ak stihnem, tak neskôr sem nejaké podrobnosti ešte dopíšem a dokreslím.)
Pohyb kameňa si predstavíme rozložený na vodorovnú a zvislú zložku. Pohyb vo vodorovnom smere je má konštantnú rýchlosť (lebo odpor vzduchu nepôsobí). Pohyb vo zvislom smere je rovnomerne zrýchlený smerom k zemi, presne tak, ako pri voľnom páde. Vzdialenosť od úpätia veže, do ktorej kameň dopadne, teda je $\ell = v_0 t_\mathrm{D}$, kde t_D je doba letu kameňa. Tá je presne taká, akoby kameň len voľne padal popri veži k zemi.

V časti 1.4.3 sme sa naučili, že to je

$$t_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{36}$$

čo číselne vychádza okolo $2{,}47$ s. Nakoniec z formuly $\ell = v_0 t_{\mathrm{D}}$ dostávame aj vodorovný dolet kameňa:

$$\ell = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \doteq 49{,}5\,\mathrm{m} \tag{37}$$

1.5.3 Šikmý vrh

Tento príklad, ktorý je zovšeobecnením predošlého, vyriešime pomocou použitia súradnicovej sústavy. Keďže ide o pohyb po zakrivenej trajektórii, nevystačíme s jednou súradnicou.

Príklad: Kameň je vrhnutý pod uhlom α voči terénu rýchlosťou veľkosti v_0. Predokladajte, že je vrhnutý z úrovne zeme (z výšky nula, vyjadrené formálne). Určte maximálnu dosiahnutú výšku počas letu, dobu letu kameňa a vzdialenosť, do ktorej dopadne. Aj tentoraz predpokladajte, že odpor vzduchu je zanedbateľný.

Riešenie: (Tiež len stručne; na prednáške som o tom hovoril podrobne. Ak stihnem, tak neskôr aj sem nejaké podrobnosti ešte dopíšem a dokreslím.)
Okrem ℓ a t_{D} treba vypočítať aj maximálnu dosiahnutú výšku. Ako vidno, na to, aby sme plne popísali, ako prebieha pohyb bodu v rovine, pre konkrétnosť nech je to xy, potrebujeme poznať časové závislosti

$$\boxed{\boxed{x(t),\ y(t),\ v_x(t),\ v_y(t)}} \tag{38}$$

a príslušné začiatočné hodnoty (zvyčajne pre čas $t = 0$) týchto karteziánskych súradníc a karteziánskych zložiek rýchlostí. Pohyb kameňa si pri šikmom vrhu opäť rozložíme na vodorovnú a zvislú zložku. Vo vodorovnom smere sa kameň pohybuje konštantnou rýchlosťou. Vo zvislom smere tak, akoby šlo o zvislý vrh z príkladu v časti 1.4.4. Začiatočnú rýchlosť si potrebujeme rozložiť na vodorovnú (x-ovú a zvislú (y-ovú) zložku:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha\,, \qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha \tag{39}$$

Rovnice pre vodorovný a zvislý pohyb kameňa teda môžeme napísať takto:

$$v_x(t) = v_{0x} = \text{konšt} \tag{40a}$$
$$x(t) = v_{0x}t \tag{40b}$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t \tag{40c}$$
$$y(t) = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{40d}$$

Rovnice pre zvislý (vertikálny) pohyb sú presne také, ako rovnice (17) a (19). Musia také byť, lebo vertikálna zložka pohybu pri šikmom vrhu je rovnomerne zrýchleným pohybom. Len sme museli použiť správnu začiatočnú rýchlosť (v_{0y} a samozrejme písať indexy y, nie x. Ešte poznamenajme, že

$$a_y = -g \doteq -9{,}81\,\mathrm{m/s} \tag{41}$$

Začneme s určovaním najvyšššej dosiahnutej výšky; označme si ju $y_{\max}$. je dosiahnutá v okamihu, keď je zvislá zložka rýchlosti nulová. Preto z (40c) dostávame

$$0 = v_{0y} - g t_\mathrm{m} \;\Rightarrow\; t_\mathrm{m} = \frac{v_{0y}}{g} \tag{42}$$

kde t_m je čas, za ktorý bola dosiahnutá maximálna výška. Maximálnu výšku teraz už môžeme výpočítať použitím (40d):

$$\boxed{y_{\max} = y(t_\mathrm{m}) = \frac{1}{2}g t_\mathrm{m}^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}} \tag{43}$$

Pokračujme určením doby letu kameňa. Kameň letí od času 0 až po okamih dopadu, ktorý si opäť označme t_D. Preto aj doba letu je t_D. V okamihu dopadu kameňa je jeho výška nulová. Preto použitím rovnice (40d) dostávame

$$0 = v_{0y}t_\mathrm{D} - \frac{1}{2}g t_\mathrm{D}^2$$

čo sa dá napísať v tvare

$$t_\mathrm{D}\left(v_{0y} - \frac{1}{2}g t_\mathrm{D}\right) = 0$$

Súčin dvoch výrazov je nulový, ak aspoň jeden z nich je nulový. Prípad $t_\mathrm{D} = 0$ je síce matematicky správnym riešením, ale fyzikálne nesprávnym, lebo kameňu nejaký čas trvá, kým dopadne. Preto

$$v_{0y} - \frac{1}{2}g t_\mathrm{D} = 0$$

a teda

$$\boxed{t_{\mathrm{D}} = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}} \tag{44}$$

čo je presne dvojnásobok času potrebného na výstup kameňa do maximálnej výšky. Nakoniec ešte určme, ako ďaleko kameň doletel. V súlade s (40b) to je

$$\boxed{\ell = x(t_{\mathrm{D}}) = v_{0x} t_{\mathrm{D}} = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \tag{45}$$

1.5.4 Rovnomerné a nerovnomerné pohyby, súradnice

Pohyb po hocijakej (aj zakrivenej trajektórii) nazývame ***rovnomerný***, ak pritom je ***veľkosť rýchlosti nemenná*** (konštantná). Ak tomu tak nie je, ide o nerovnomerný pohyb. Takže pozor! Pojem rovnomerný pohyb si netreba spájať len s priamočiarym. ***Veľkosť rýchlosti*** pre pohyb v 1D (t. j. priamočiary pozdĺž jednej osi, nech je to x) je

$$v = |v_x| \tag{46}$$

(a môže to samozrejme byť časovo premenná veličina). Ak ide o pohyb v 2D, tak preň veľkosť rýchlosti je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{47}$$

Pre pohyb v priestore potrebujeme aj tretiu súradnicu; bude ňou z. Polohu bodu v priestore teda popíšeme trojicou karteziánskych súradníc

$$(x, y, z) \tag{48}$$

Jeho rýchlosť trojicou čísiel

$$(v_x, v_y, v_z) \tag{49}$$

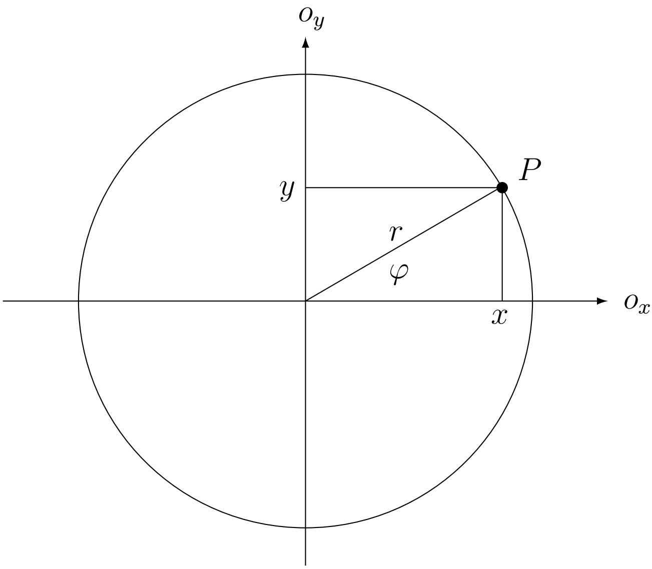
a zrýchlenie trojicou

$$(a_x, a_y, a_z) \tag{50}$$

1.5.5 Pohyb po kružnici

S pohybom po kružnici sa stretávame aj vo fyzickom svete a aj v počítačových hrách. Príkladom je jazda auta po kruhovom objazde alebo obeh družice okolo Zeme a určite by sme našli aj ďalšie príklady. Jedným dôležitým, na ktorý netreba zabúdať, je pohyb závažia kyvadlových hodín. Nejde síce o pohyb po celej kružnici, len po jej časti, ale aj to je pohyb po kružnici a aj tomuto pohybu chceme porozumieť a byť schopní ho popísať. A ešte ďalším príkladom je pohyb kamienka, ktorý je zaseknutý v dezéne pneumatiky auta.

Poloha a uhlová súradnica bodu na kružnici. Kružnica je krivka, ktorá sa dá umiestniť do roviny. Túto rovinu si môžeme stotožniť s rovinou xy a potom pohyb po kružnici bude pohybom len v tomto 2-rozmernom priestore. Tak to aj spravíme a na dôvažok



Obr. 4: Bod na kružnici; polárne súradnice r, φ. Kladný smer uhla φ je konvenčne proti smeru pohybových ručičiek – tak, ako sa v súťažiach behá na štadiónoch alebo jazdí na kruhových objazdoch.

umiestnime stred súradnicovej sústavy do stredu kružnice.

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi \tag{51}$$

Polomer je konštantný (s časom sa nemení).

Rýchlosť a uhlová rýchlosť bodu na kružnici.

$$v_x = -r\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,, \quad v_y = r\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

Derivácia bežnej súradnice podľa času je (bežnou) rýchlosťou. Na popis otáčavého pohybu zavádzame ešte aj *uhlovú rýchlosť*, ktorá je deriváciou uhlovej súradnice $\varphi(t)$ podľa času:

$$\boxed{\omega(t) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\varphi}} \tag{52}$$

Pre uhlovú rýchlosť sme teda zaviedli symbol ω a zdôraznili sme, že vo všeobecnosti môže závisieť od času. Podľa tejto definície môže byť aj záporná. Neskôr si ukážeme, že uhlová rýchlosť sa dá vo všeobecnosti rozumieť ako vektor a že to, čo sme zaviedli definíciou (52), je z-ová zložka toho vektora. V najjednoduchšom (špeciálnom) prípade uhlová rýchlosť od času nezávisí. Vtedy povieme, že bod vykonáva *rovnomerný pohyb po kružnici*. Ak uhlová rýchlosť od času závisí, ide o nerovnomerný pohyb. Teraz vidíme, že vyššie odvodené vzťahy pre karteziánske zložky (bežnej, v tomto kontexte nazývanej aj ***obvodovej***) rýchlosti je praktické vyjadriť pomocou uhlovej:

$$v_x = -\omega\, r \sin\varphi = -\omega y\,, \quad v_y = \omega\, r \cos\varphi = \omega x \tag{53}$$

Veľkosť obvodovej rýchlosti pri pohybe po kružnici je

$$v = \sqrt{|v_x|^2 + |v_y|^2} = \sqrt{\omega^2 y^2 + \omega^2 x^2}\,, \quad \text{t. j.} \quad v = |\omega| r \tag{54}$$

Neraz je praktickejšie napísať vzťah umožňujúci vyjadriť aj smer otáčania. Tak napíšeme

$$\boxed{\boxed{v_\varphi = \omega r}} \tag{55}$$

kde v_φ je obvodová rýchlosť, ktorá môže mať aj zápornú hodnotu, a to pre prípad pohybu v zápornom smere (to je pre nás smer pohybových ručičiek).

Ešte sa chvíľu pozdržme, lebo treba zdôrazniť, že: Ak by šlo o rovnomerný pohyb po kružnici, tak *veľkosť* jeho rýchlosti, v, by sa nemenila. Ale karteziánske zložky rýchlosti by sa aj pri takom pohybe menili, ako vidíme z vyjadrení kúsok vyššie. Takže ***rýchlosť*** v zmysle vektora ***sa i pri rovnomernom pohybe po kružnici mení***. A ak sa rýchlosť bodu akokoľvek mení, je s tým spojené nenulové zrýchlenie. Poďme teraz tieto veci preskúmať bližšie pre pohyb po kružnici, opäť všeobecný, teda aj nerovnomerný.

Celkové zrýchlenie bodu na kružnici. Karteziánske zložky (celkového) zrýchlenia sú

$$a_x = \dot{v}_x\,, \quad a_y = \dot{v}_y \tag{56}$$

Zderivovaním (53) podľa času dostávame

$$\begin{aligned} a_x &= -\dot{\omega} y - \omega \dot{y} = -\dot{\omega} y - \omega^2 x = -\dot{\omega} r \sin\varphi - \omega^2 r \cos\varphi = (-\dot{\omega} \sin\varphi - \omega^2 \cos\varphi) r \\ a_y &= \quad \dot{\omega} x + \omega \dot{x} = \quad \dot{\omega} x - \omega^2 y = \quad \dot{\omega} r \cos\varphi - \omega^2 r \sin\varphi = (\quad \dot{\omega} \cos\varphi - \omega^2 \sin\varphi) r \end{aligned}$$

V zásade tým máme zrýchlenie ako vektor pomocou zložiek vybavené. Keby sme však ostali len pri týchto karteziánskych zložkách, bolo by to veľmi formálne a často i nepraktické (ale pozor, napriek tomu neraz potrebné a praktické!) a prišli by sme o veľmi názorné geometrické predstavy o zrýchlení pri pohybe po kružnici. Tak poďme ďalej.

Uhlové zrýchlenie bodu na kružnici. Obdobne ako pri posuvnom pohybe je derivácia rýchlosti zrýchlením, tak pri otáčavom pohybe je derivácia uhlovej rýchlosti *uhlovým zrýchlením*:

$$\boxed{\boxed{\varepsilon \overset{\text{def.}}{=} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \tag{57}$$

Namiesto symbolu ε sa často používa aj symbol α, ale na Slovensku sme zvyknutejší na to prvé. Základnou jednotkou pre vyjadrenie uhlového zrýchlenia je radián za sekundu^2 (rad/s^2).

Veľkosť celkového zrýchlenia. Druhá mocnina veľkosti celkového zrýchlenia pri pohybe po kružnici bude

$$\begin{aligned} a^2 = a_x^2 + a_y^2 &= (-\varepsilon \sin\varphi - \omega^2 \cos\varphi)^2 r^2 + (\varepsilon\cos\varphi - \omega^2 \sin\varphi)^2 r^2 = \\ &= \left[\varepsilon^2 \sin^2\varphi + 2\varepsilon\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi + \omega^4\cos^2\varphi \right. \\ &\left. + \, \varepsilon^2\cos^2\varphi - 2\varepsilon\omega^2\cos\varphi\sin\varphi + \omega^4 \sin^2\varphi\right] r^2 \end{aligned}$$

Vidíme, že niektoré členy vypadnú, iné sa zjednodušia a pre samotnú veľkosť celkového zrýchlenia dostávame

$$\boxed{a = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\, r} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2} \tag{58}$$

Tie rôzne vyjadrenia sú samozrejme navzájom rovnocenné, ale niekedy sa môže lepšie hodiť jedno, inokedy druhé alebo tretie. Vidíme tam dva príspevky, ktoré sa však neskladajú jednoduchým súčtom, ale podľa Pytagorovej vety. Neskôr si vysvetlíme, prečo tomu tak je.

Vzťahy medzi obvodovými a uhlovými veličinami pri pohybe po kružnici. Zo vzťahu (55) teraz vyjadrime uhlovú rýchlosť

$$\omega(t) = \frac{v_\varphi(t)}{r} \tag{59}$$

a použime túto formulku, kde explicitne vidieť polomer, na vyjadrenie uhlového zrýchlenia ε. To je definované ako derivácia uhlovej rýchlosti podľa času a preto dostávame

$$\varepsilon = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{60}$$

Na pravej strane vystupuje derivácia obvodovej rýchlosti podľa času. Je to teda nejaké zrýchlenie, nazývame ho *obvodové zrýchlenie* a budeme ho značiť $a_{||}$:

$$\boxed{a_{||} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}t}} \tag{61}$$

Z jeho definície vidíme, že je to vlastne akési zrýchlenie v najbežnejšom (intuitívnom) zmysle, lebo je nenulové práve vtedy, keď sa mení veľkosť rýchlosti. Je teda rovnobežné (buď súhlasne alebo nesúhlasne) so smerom rýchlosti a preto sme mu dali tie $||$. Len pozor – podľa našej definície môže byť aj záporné! Všeobecnejšie sa nazýva *tangenciálne*, lebo v každom okamihu má smer dotyčnice (tangenciály) ku trajektórii pohybu (tu ku kružnici); ešte si o tom neskôr povieme. Pri pohybe po kružnici (a aj o hocijakej uzavretej krivke) je však vhodný aj pojem obvodové zrýchlenie. Toto zrýchlenie teraz skombinovaním (60) a (61) vieme zapísať takto:

$$\boxed{\boxed{a_{||} = \varepsilon r}} \tag{62}$$

Dostredivé zrýchlenie pri pohybe po kružnici. Zamerajme sa teraz na druhý člen pod odmocninou vyjadrenia (58) pre zrýchlenie a označme ho $a_\perp$. (Očividne to má v SI sústave jednotky m/s^2, takže sa hodí to označiť nejakým á-čkom.)

$$\boxed{\boxed{a_\perp = \omega^2\, r = \frac{v^2}{r} = \omega\, v_\varphi}} \tag{63}$$

Je to príspevok (do celkového zrýchlenia), ktorý by bol nenulový i vtedy, keby sa uhlové zrýchlenie nemenilo, teda keby bolo $a_{||} = \varepsilon r \equiv 0$. Vidíme teda, že celkové zrýchlenie bodu by bolo nenulové, i keby sa pohyboval stále rovnako veľkou rýchlosťou! To nie je príliš v súlade s intuíciou, ale je to tak. Toto celkové zrýchlenie by vtedy malo veľkosť rovnú práve príspevku $a_\perp$. Ide o dobre známe *dostredivé zrýchlenie*. Všeobecnejšie sa nazýva *normálové*. Už aspoň intuitívne rozumieme, že smeruje do stredu kružnice a je kolmé (kolmica = normála) na obvodové zrýchlenie. Preto sme á-čku v tomto prípade pridali index $\perp$. A všimnime si, že podľa svojej definície musí hodnota $a_\perp$ byť nezáporná (na rozdiel od $a_{||}$).

Veľkosť celkového zrýchlenia stručne. Zhrnutím vyššie uvedených poznatkov nachádzame stručné vyjadrenie veľkosti celkového zrýchlenia:

$$\boxed{\boxed{a = \sqrt{a_{||}^2 + a_{\perp}^2}}} \tag{64}$$

Keďže zrýchlenie je vektor (i keď tu teraz z neho píšeme len veľkosť), tak aj obvodovému a dostredivému zrýchleniu bude treba priradiť vektory, nielen veľkosti. A keďže z práve napísanej formuly vidíme, že veľkosť celkového zrýchlenia sa počíta Pytagorovou vetou, znamená to, že obvodové a dostredivé zrýchlenie sú navzájom kolmé vektory. Keď sa vektory naučíme používať, dôsledne a priamo sa o týchto veciach presvedčíme.

Rovnomerný pohyb po kružnici. Bod obehne danú kružnicu za čas, ktorý nazývame *perióda* (daného pohybu) a označujeme ho zvyčajne T. Periódu vypočítame ľahko: je to dráha deleno rýchlosť, teda

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{|\omega| r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{|\omega|}} \tag{65}$$

[Použili sme vyjadrenie (55), teda $v = |\omega| r$ platné dokonca aj pre nerovnomerný pohyb.] Počet obehov za jednotku času sa nazýva frekvencia; tú značme f. Keďže jeden obeh je vykonaný za čas T, tak frekvencia rovnomerného pohybu po kružnici je

$$f = \frac{1}{T} \tag{66}$$

Jej základnou jednotkou v SI sústave je s^{-1} a túto jednotku, ak sa týka takejto bežnej frekvencie, nazývame aj jeden herz a značí sa Hz. Veľkosť uhlovej rýchlosti, $|\omega|$, sa v kontexte rovnomerného pohybu po kružnici nazýva ***uhlová frekvencia*** alebo aj *kruhová frekvencia*. Platia pre ňu vzťahy

$$|\omega| = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{67}$$

Slovo frekvencia sa pre veličinu $2\pi/T$ hodí, lebo vyjadruje počet obehnutých radiánov za jednotku času. Keďže uhlová frekvencia je vlastne len zvláštnym prípadom uhlovej rýchlosti, musí mať aj takú istú základnú jednotku, a tou je rad/s.

2 Vektory a operácie s nimi

Aby sme pohybu po kružnici a vôbec pohybu po krivočiarej trajektórii a mnohým ďalším veciam lepšie rozumeli aj geometricky a aby sme ich dokázali matematicky popísať pomocou stručných prehľadných formúl, treba začať používať pojem *vektor*. Doteraz sme používali len *zložky* vektorov; napr. x, y sú zložky polohového vektora v rovine xy. Polohu bodu v priestore vyjadríme súborom troch súradníc: x, y, z. Obdobne rýchlosť, zrýchlenie i viaceré ďalšie veličiny, ktorými sa budeme zaoberať. S vektormi ste sa už stretli, takže si ich nebudeme podrobne matematicky zavádzať, len uvedieme niektoré pojmy a pravidlá.

2.1 Polohový vektor

Ním vyjadrujeme polohu bodu, nech je to bod P, v priestore. Takýto vektor môžeme reprezentovať viacerými spôsobmi:

- Nakreslíme súradnicovú sústavu, do nej bodku znázorňujúcu daný bod a orientovanú úsečku z počiatku do bodu P. Takýto vektor označíme najtypickejšie písmenkom $\vec{r}$. Z tohoto názorného geometrického zobrazenia vidíme, že vektor má svoju dĺžku a má aj smer v priestore.

- Zapíšeme
$$\vec{r} = (x, y, z) \tag{68}$$
To je vyjadrenie polohového vektora v karteziánskych zložkách. Nie je to úplná informácia o polohe bodu v priestore, pretože nám nič nehovorí o tom, ako je natočená súradnicová sústava. Ale ak sa natočenie sústavy v čase nemení a vieme, ako je natočená, tak (68) je veľmi praktickým vyjadrením.

- Ak chceme do označenia vektora vniesť aj informáciu o osiach súradnicovej sústavy, zapíšeme
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{69}$$
kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sú jednotkové vektory v smere osí x, y, z.

2.2 Vektory rýchlosti a zrýchlenia

Na rozdiel od polohového vektora tieto už nemusíme kresliť od počiatku súradnicovej sústavy. Toto už nie sú vektory v reálnom priestore, ale v rýchlostnom priestore alebo v priestore zrýchlení. Ak ich chceme názorne geometricky zakresliť úsečkou so šípkou, tak začiatok úsečky zvyčajne položíme do ťažiska telesa alebo do bodu, ktorý to teleso reprezentuje. Ostatné veci sú ako pri polohovom vektore. Máme teda

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)\,, \qquad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{70}$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)\,, \qquad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{71}$$

a platia vzťahy

$$\boxed{\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}} \tag{72}$$

$$\boxed{\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}}} \tag{73}$$

Vidíme, že sú omnoho kompaktnejšie ako keby sme ich vypisovali po zložkách, napr.

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,, \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,, \qquad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Pozor však na prípady, kedy sa aj sama súradnicová sústava pohybuje. Vtedy aspoň jeden z vektorov $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$ bude závisieť na čase a preto vo všeobecnosti bude treba napríklad rýchlosť počítať takto:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \dot{x}\vec{i} + x\dot{\vec{i}} + \dot{y}\vec{j} + y\dot{\vec{j}} + \dot{z}\vec{k} + z\dot{\vec{k}} \tag{74}$$

Vidíme, že veci sa komplikujú; snažili sme sa vyjadriť rýchlosť voči všeobecne sa pohybujúcej súradnicovej sústave, a to je geometricky a technicky zložité. Preto ak sa bude dať, budeme sa snažiť vystačiť so súradnicovými sústavami, ktoré budeme môcť považovať za nehybné.

Prednáška v 5. týždni (18. 3. 2022)

V tejto súvislosti si treba uvedomiť, že rýchlosť (a nielen ona) je *relatívna veličina*. Takže za relatívnosťou nemusíme chodiť ani do teórie relativity.

Vektor (nielen rýchlosti) má tri základné charakteristiky:

- ***veľkosť*** (nazývaná aj *dĺžka* alebo *absolútna hodnota*)
- ***smer***
- ***orientácia*** (teda na ktorú stranu smeruje šípka)

V bežnej reči niekedy orientáciu zahrnieme do pojmu smer.

Vektor teda pre nás bude nejaká orientovaná úsečka. Môže znázorňovať rôzne veličiny, ako už vieme. Neskôr sa naučíme, že napr. aj silu. V tom prípade ku trom vyššie uvedeným charakteritikám pribúda ešte jedna: *pôsobisko* (sily). Vektor sily teda zvyčajne nie je vhodné nakresliť hocikam do priestoru. (O sile sa budeme učiť neskôr). Ani pri znázorňovaní polohového vektora nejakého bodu samozrjeme nie je jedno, kam prílsušný vektor nakreslíme. Ale pri vektoroch ako napr. vektor rýchlosti na tom v zásade vôbec nezáleží; ak nakreslíme množstvo navzájom rovnobežných, rovnako dlhých a rovnako orientovaných úsečiek, každá z nich môže reprezentovať ten istý vektor vektor rýchlosti.

2.3 Veľkosť vektora

Nazývame ju aj dĺžkou vektora. Pre hocijaký vektor

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \tag{75}$$

vypočítame jeho dĺžku podľa Pytagorovej vety:

$$b \equiv |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \tag{76}$$

2.4 Skaláre

Skaláre nie sú vektory, ale spomíname ich tu, lebo s vektormi súvisia. Vo fyzike sú typickými skalárnymi veličiami hmotnosť, hustota, objem, teplota. Skalár je teda niečo, čo sa vyjadrí jedným číslom. Aj veľkosť rýchlosti a vôbec veľkosť (dĺžka) akéhokoľvek vektora je teda skalár. Ale nie všetko, čo je vyjadriteľné jedným číslom, spadá *vo fyzike* [2] pod pojem skalár. Musí to byť niečo, čoho hodnota sa nezmení, keď akokoľvek pohneme súradnicovou sústavou. Napr. karteziánske zložky plohového vektora nejakého hmotného bodu sa pri posunutí alebo otočení súradnicvej sústavy zmenia. Súradnice bodu alebo zložky vektora teda vo fyzike nie sú skaláre.

2.5 Súčin skalára s vektorom

Alebo povieme aj *násobenie vektora skalárom*. Vyjadríme to v zložkách:

$$\boxed{\lambda\vec{b} = (\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z)} \tag{77}$$

[2] V matematike je skalárom hocičo, čo je vyjadrené jedným číslom. Napr. aj karteziánska zložka vektora.

Súčin skalára a vektora je teda vektor. Jeho veľkosť je $|\lambda \vec{b}| = |\lambda|\,|\vec{b}|$. Pre tento druh súčinu nepoužívame žiaden symbol (ani bodku).

2.6 Skalárny súčin

Je to taký súčin vektora s vektorom, pri ktorom je výsledkom *skalár*. Tento súčin vyznačujeme bodkou. V dvoj- alebo trojrozmernom priestore sa dá názorne geometricky definovať:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \theta} \tag{78}$$

kde $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ je uhol medzi vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Z tejto geometricky poňatej definície skalárneho súčinu ľahko vyplýva jeho geometrický význam. (Treba si nakresliť aj obrázok tých vektorov. Na prednáške bol nakreslený.) Aby sme si geometrický význam objasnili, uvažujme jednotkový vektor v smere $\vec{a}$. Označme si ho symbolom $\vec{u}_a$. Dá sa vyjadriť výrazom

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{a} \tag{79}$$

kde $a \equiv |\vec{a}|$. Veľkosť priemeru vektora $\vec{b}$ do tohoto smeru si označme b_a. Ľahko sa dá pomocou nákresu a základnej trigonometrie zistiť, že $b_a = b \cos \theta$. A všimnime si, že keď spravíme skalárny súčin $\vec{b}$ s $\vec{u}_a$, dostaneme to isté:

$$\vec{b} \cdot \vec{u}_a = |\vec{b}|\,|\vec{u}_a| \cos \theta = b \cos \theta \tag{80}$$

Geometrický význam skalárneho súčinu $\vec{b} \cdot \vec{u}_a$ je teda taký, že vyjadruje ***veľkosť priemetu vektora $\vec{b}$ do smeru vektora $\vec{a}$***. A obdobne, ak si definujeme symbol

$$\vec{u}_b = \frac{\vec{b}}{b} \tag{81}$$

znamenajúci jednotkový vektor v smere $\vec{b}$, tak skalárny súčin

$$\vec{a} \cdot \vec{u}_b = a \cos \theta \tag{82}$$

je rovný veľkosti priemetu vektora $\vec{a}$ do smeru $\vec{b}$.

Z algebry zrejme viete, že skalárny súčin sa dá vyjadriť aj pomocou zložiek:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \tag{83}$$

Z definície (78) sa to dá ľahko dokázať, ak si vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ vyjadríme pomocou zápisov s jednotkovými vektormi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ a treba si ešte uvedomiť, že na základe definície skalárneho súčinu platia vzťahy

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1\,, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \tag{84}$$

Ako vidno z jeho definície, skalárny súčin je ***komutatívny***.

2.7 Vektorový súčin

Je to taký súčin vektora s vektorom, pri ktorom je výsledkom *vektor*. Tento súčin vyznačujeme krížikom $\times$.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{85}$$

(To nie je definícia vektorového súčinu, len spôsob jeho zápisu!) Vektorový súčin v trojrozmerom priestore definujeme takto:

Vektorový súčin nerovnobežných vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ zapísaných v uvedenom poradí je taký vektor $\vec{c}$, ktorého smer je kolmý na každý z vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, jeho veľkosť je

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta \tag{86}$$

pričom $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ je opäť uhol medzi $\vec{a}$ a $\vec{b}$, **a jeho orientácia v priestore je definovaná pravidlom pravotočivej skrutky alebo pravidlom pravej ruky**. (Treba si nakresliť obrázok. Na prednáške bol.) **Vektorovým súčinom rovnobežných vektorov je nulový vektor, $\vec{0}$.**

Aj vektorový súčin sa samozrejme dá zapísať pomocou zložiek. Dá sa na to ísť pomocou determinantu, ale my si rovno uvedieme výsledok

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}} \tag{87}$$

ktorý sa dá odvodiť priamo z hore zapísanej geometrickej definície vektorového súčinu. Treba na to využiť vyjadrenia vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ pomocou zápisov s jednotkovými vektormi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ a treba si ešte uvedomiť, že na základe definície vektorového súčinu platia vzťahy

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}\,, \qquad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}\,, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}\,, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \tag{88}$$

Potom sa už pomerne ľahko dá dostať zložkové vyjadrenie (87).

Vektorový súčin nie je komutatívny; je ***antikomutatívny***:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \tag{89}$$

2.8 Zmiešaný súčin

Je to taký súčin troch vektorov, ktorého výsledkom je skalár; označme ho V, a to podľa tejto definície:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \tag{90}$$

Nárokom sme ho označili V, lebo zmiešaný súčin má aj zaujímavú geometrickú interpretáciu: jeho hodnota vyjadruje ***objem rovnobežnostena***, ktorého podstava je určená vektormi $\vec{a}$, $\vec{b}$ a vektor $\vec{c}$ určuje, kam od podstavy sa teleso rovnobežnostena rozprestiera. Možno ste už počuli, že pre zmiešaný súčin platí pravidlo cyklickej zámeny:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \tag{91}$$

2.9 Trojitý vektorový súčin

Na záver ku prehľadu operácií s vektormi si napíšme formulu „bac mínus cap“,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{92}$$

ktorá pri počítaní s vektormi býva neraz veľmi nápomocná, lebo umožňuje pomerne zložito vyzerajúci súčin troch vektrov rozpísať na rozdiel jednoduchších výrazov.

2.10 Rozklad vektora na dve navzájom kolmé zložky

`Tento odsek nepreberáme, nebude teda z neho nič ani na skúške.`

Už vieme, že vektor v 3-rozmernom priestore sa dá rozložiť na tri navzájom kolmé zložky, teda zapísať ako súčet troch navzájom kolmých vektorov, z ktorých každý má smer jednej zo súradnicových osí. Máme to vyjadrené zápisom $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Neraz sa však zíde aj rozklad vektora do len dvoch navzájom kolmých zložiek, a nie nutne takých, ktoré by mali smer niektorej z osí súradnicovej sústavy. Sformulujme túto úlohu takto:

Daný je ľubovoľný vektor $\vec{b}$ a ľubovoľný smer v priestore určený nejakým jednotkovým vektorom $\vec{u}$. Úlohou je rozložiť $\vec{b}$ na súčet dvoch zložiek, z ktorých jedna je rovnobežná s $\vec{u}$, druhá na ňu kolmá. Zapíšeme to takto:

$$\boxed{\vec{b} = \vec{b}_{||} + \vec{b}_{\perp}} \tag{93}$$

Pri riešení tejto úlohy využijeme skalárny súčin, pomocou ktorého nachádzame

$$\vec{b}_{||} = (\vec{u} \cdot \vec{b})\, \vec{u} \tag{94}$$

Aby bola splnená rovnica (93), tak treba zobrať

$$\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - (\vec{u} \cdot \vec{b})\, \vec{u} \tag{95}$$

Úlohu rozložiť vektor podľa zadania sme teda vyriešili.

3 Kinematika pohybu bodov – pokračovanie

V časti 1.5.5 sme sa tak trochu nepriamo naučili, že celkové zrýchlenie hmotného bodu pri pohybe po kružnici sa dá rozložiť na dve navzájom kolmé zložky: dostredivé zrýchlenie $a_{\perp}$ a obvodové zrýchlenie $a_{||}$. Vtedy sme sa ešte vyhýbali používaniu vektorového zápisu a narábali sme len so zložkami vektorov. Ak šlo o karteziánske zložky (napr. a_x, a_y), tak sme nemali žiadnu ťažkosť porozumieť ich významu. Pri pohybe po kružnici sme však nakoniec zrýchlenie rozložili aj na tie spomínané zložky $a_{\perp}$, $a_{||}$. Tým je bez používania vektorového zápisu o niečo ťažšie rozumieť. Tak si teraz tieto pojmy preberieme pomocou vektorov a všeobecnejšie: nech sa náš hmotný bod ***pohybuje po akejkoľvek krivke*** (v špeciálnych prípadoch napr. po kružnici alebo po priamke). Uvidíme, že takto aj pojmu dostredivé zrýchlenie porozumieme lepšie. A má to význam aj pre modely v počítačových hrách, pretože aj v tých sa dejú pohyby po rôznych krivkách, nielen po kružnici.

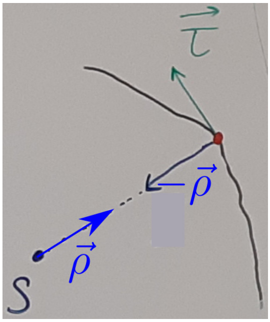
Nech $\vec{\tau}$ je jednotkový vektor v smere (okamžitej) rýchlosti (obr. 5). τ je grécke písmeno a používame ho preto, lebo pripomína slovo *tangenciálny*, po slovensky dotyčnicový. Smer rýchlosti v istom bode krivky je totiž zhodný so smerom dotyčnice ku tej krivke v danom bode. Rýchlosť potom zapíšeme

$$\vec{v} = v\vec{\tau} \tag{96}$$

Tak veľkosť rýchlosti, v, ako aj jej smer $\vec{\tau}$ sa v čase môžu meniť. Poďme určiť zrýchlenie uvažovaného bodu [1, 2].

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\vec{\tau})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} \tag{97}$$

Pomocou geometrických úvah, ktoré si vysvetlíme ručným písaním, kreslením a odvodzovaním (pozri obr. 6 a jeho popis), prídeme na to, že



Obr. 5: Hmotný bod (červená bodka) sa pohybuje po nejakej krivke v priestore (čierna čiara). Maličký kúsok krivky v blízkosti bodu si aproximujeme kúskom kružnice. Tá má stred v bode S, ktorý nazývame stred krivosti. $\vec{\tau}$ je jednotkový vektor v smere (okamžitej) rýchlosti, orientovaný súhlasne s ňou. $\vec{\rho}$ je jednotkový vektor od stredu krivosti ku hmotnému bodu. Vektor $-\vec{\rho}$ je samozrejme opačne orientový a ani by na obrázku nemusel byť, ale omylom som tú šípku akože vektora $\vec{\rho}$ na prednáške nakreslil tam, tak ju tam už nechávam, len som ju premenoval na $-\vec{\rho}$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{r}\vec{\rho} \tag{98}$$

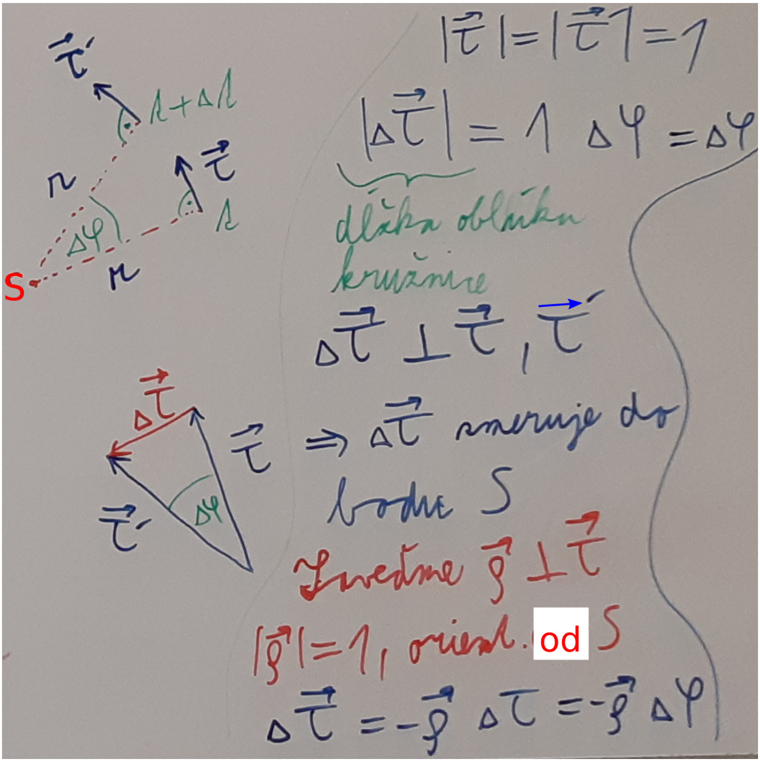
Tak môžeme konečne napísať výsledný rozklad celkového zrýchlenia bodu pri ľubovoľnom pohybe (pozri aj obr. 7):

$$\boxed{\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} - \frac{v^2}{r}\vec{\rho}}} \tag{99}$$

Prvý člen má smer okamžitej rýchlosti, nazýva sa ***tangenciálne zrýchlenie*** a je *nenulové práve vtedy, keď sa mení **veľkosť** rýchlosti*:

$$\boxed{\vec{a}_{||} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}} \tag{100}$$

To je ten „bežný“ druh zrýchlenia, ktorý si aj intuitívne predstavujeme ako zrýchlenie. Táto zložka zrýchlenia má smer okamžitej rýchlosti, t. j. smer dotyčnice, cudzím slovom *tangenciály*, ku trajektórii (v mieste, kde sa práve bod nachádza). Pri priamočiarom pohybe iné zrýchlenie než tangenciálne ani nie je. V kontexte pohybu po nejakej uzavretej trajektórii (ktorá teda má nejaký obvod), môžeme namiesto pojmu tangenciálne zrýchlenie používať aj pojem obvodové zrýchlenie. Tak sme to aj robili pri popise pohybu po kružnici.

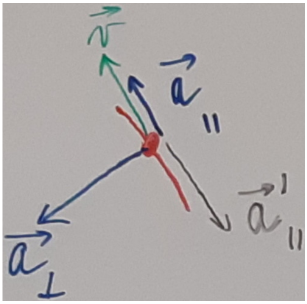


Obr. 6: Ku odvodeniu vyjadrenia (98). Jednotkový vektor $\vec{\rho}$ teda definujeme tak, že smeruje od stredu krivosti S ku hmotnému bodu. Vektory $\vec{\tau}$ a $\vec{\rho}$ sa samozrejme pohybujú, lebo sa pohybuje uvažovaný hmotný bod. V čase t teda máme jednotkové vektory $\vec{\rho}$ a $\vec{\tau}$. O okamih Δt neskôr sú už natočené trochu inak, tak si ich aj inak označme: $\vec{\rho}\,'$ a $\vec{\tau}\,'$. ($\vec{\rho}\,'$ na obrázku nie je.) Uhol $\Delta\varphi$ nakoniec spravíme infinitezimálne malým. Preto platia tie vzťahy kolmosti $\vec{\tau}$ i $\vec{\tau}\,'$ na $\Delta\vec{\tau}$ a dĺžku vektora $\Delta\vec{\tau}$ môžeme počítať ako dĺžku kratučkého oblúka kružnice (i keď je to rovná úsečka).

Druhá zložka celkového zrýchlenia je *kolmá* na tangenciálne a smeruje do stredu krivosti daného miesta trajektórie:

$$\boxed{\vec{a}_\perp = -\frac{v^2}{r}\vec{\rho}} \tag{101}$$

Preto túto zložku nazývame ***normálové zrýchlenie***, lebo slovo *normála* znamená kolmica; tu kolmica na smer rýchlosti. Často ho nazývame aj *dostredivé zrýchlenie*. Robili sme tak najmä pri popise pohybu po kružnici. *Normálové zrýchlenie je nenulové práve vtedy, keď sa mení **smer** rýchlosti.* Keby šlo o pohyb po kružnici, tak r v (99) by bolo polomerom kružnice. Pri krivke všeobecnejšieho tvaru je to ***okamžitý polomer krivosti***



Obr. 7: Hmotný bod (červená bodka) sa pohybuje po nejakej krivke v priestore (červená čiara). Tangenciálne zrýchlenie je už zo svojej definície rovnobežné s rýchlosťou a môže s ňou byť buď súhlasne alebo nesúhlasne rovnobežné (protibežné). Preto sú na obrázku zakreslené obe možnosti, ktoré sme označili $\vec{a}_{||}$ a $\vec{a}_{||}{}'$.

(ktorý sa s časom mení).

Celkové zrýchlenie sa teda dá stručne zapísať (obr. 7, 8)

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}} \tag{102}$$

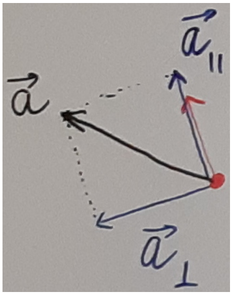
Veľkosť celkového zrýchlenia bude

$$\boxed{a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}} \tag{103}$$

Ak teraz tieto poznatky použijeme na pohyb bodu po kružnici, zisťujeme, ako elegantne, geometricky, jasne a hutne nám poskytujú tie informácie, ktoré sme pomerne prácne nadobudli v časti 1.5.5. A navyše teraz vidíme, že pojmy normálové a tangenciálne zrýchlenie majú význam nielen pre pohyb po kružnici.

3.1 Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie

Už zhruba vieme, o čom asi bude reč, pretože tieto pojmy sme už boli zaviedli pre najjednoduchší prípad – pohyb po kružnici. V tomto jednoduchom prípade ich stačilo zaviesť ako skalárne veličiny a tak sme aj boli spravili. Teraz uvidíme, že to, čo sme boli zaviedli ako ω a ε sa dá chápať ako z-ové zložky *vektorov* uhlovej rýchlosti, $\vec{\omega}$ a uhlového zrýchlenia, $\vec{\varepsilon}$. A vôbec nemusí ísť len o pohyb po kružnici, ale o okýkoľvek pohyb nejakého bodu.



Obr. 8: Formula $\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}$ sa geometricky dá znázorniť pomocou rovnobežníka (tu obdĺžnika) skladania vektorov. Veľkosti tangenciálneho a normálového zrýchlenie môžu samozrejme byť rôzne; na tomto obrázku sú si dosť podobne veľké. Červenou šípkou je vyznačená rýchlosť. Rýchlosť a tangenciálne zrýchlenie by mohli byť aj protibežne orientované – to závisí od konkrétnej situácie.
Pozn.: Obrázok bol nakreslený až na prednáške č. 6.

Zovšeobecnením jednoduchej kružnicovej definície (52) na akýkoľvek pohyb bodu je [1, 2] ***uhlová rýchlosť*** definovaná takto:

$$\boxed{\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\alpha}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t}} \tag{104}$$

Prekvapujúce oproti tej zjednodušenej definícii môže byť nanajvýš to, že uhlu aj uhlovej rýchlosti sme pridali šípky, teda sme ich definovali ako vektory. Rýchlo uvidíme, že je to praktické. V prípade kružnice z časti 1.5.5 má uhol, tam značený φ, smer osi z. Teda tam bolo $\vec{\varphi} = \varphi\,\vec{k}$. Uhlová rýchlosť mala tiež smer osi z, ale orientovaná mohla byť nielen v jej kladnom smere (súhlasne), ale aj v zápornom (nesúhlasne).

A obdobne zovšeobecníme aj ***uhlové zrýchlenie***:

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}} \tag{105}$$

V prípade spomínanej kružnice by aj toto bolo rovnobežné s osou z.

PREDNÁŠKA V 6. TÝŽDNI (25. 3. 2022)

4 Newtonove pohybové zákony

Ak na popis danej sústavy potrebujeme používať aj pojmy *hmotnosť* alebo *sila*, tak už nevystačíme s kinematickým popisom. Silami, hmotnosťami a ich súvisom s pohybom sa zaoberá *dynamika*. Namiesto pojmu bod už budeme používať pojem *hmotný* *bod.* Najprv si povieme o dynamike jedného hmotného bodu. V skutočnej situácii alebo v hre pôjde samozrejme o nejaké teleso, napr. projektil, kozmickú loď alebo auto. Ak však pre účel popisu jeho pohybu je možné abstrahovať od konečných rozmerov telesa, v úvahách ho nahradíme hmotným bodom. Za zakladateľa dynamiky ako náuky o pohybe sa považuje Galileo Galilei. Známe sú jeho pokusy na šikmej veže v jeho rodisku – v Pise a aj práca *De Motu Antiquiora*[3], ktorú začal písať v r. 1589, ale bola publikovaná až desiatky rokov po jeho smrti [1, 3]. Naozajstné základy dynamiky položil však až Isaac Newton sformulovaním svojich troch pohybových zákonov v práci *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*[4] zverejnenej v r. 1687.

Namiesto pojmu dynamika sa v staršej fyzikálnej literatúre, dodnes aj v inžiniersve a aj v knihe [4] používa pojem *kinetika*. Pojem dynamika tam používajú súhrnne pre tú časť mechaniky, ktorá sa zaoberá pohybujúcimi sa telesami alebo bodmi. Mechaniku (ako najvyššiu kategóriu) teda delia na statiku a dynamiku. Dynamiku delia na kinematiku a kinetiku. Toto rozdelenie mú svoju logiku a eleganciu, ale v učebniciach fyziky sa autori statikou zväčša nezaoberajú, alebo zaoberajú len okrajovo, a preto používajú len dvojúrovňovú kategorizáciu disciplín: mechaniku (ako najvyššiu kategóriu) delia na kinematiku a dynamiku.

Newtonove zákony hovoria najmä o pohybe. Ten sa kvantitatívne popisuje pomocou veličín ako sú rýchlosť, zrýchlenie i niektoré ďalšie. V kapitole o kinematike sme videli, že rýchlosť a zrýchlenie treba vždy uvažovať vzhľadom na nejakú súradnicovú sústavu. Preto aj pri formulácii Newtonovych pohybových zákonov (NPZ) treba najprv povedať niečo o súradnicových sústavách.

Súradnicovú sústavu často považujeme za nehybnú. Napr. ak policajti stojaci vedľa cesty merajú rýchlosť auta, tak ju merajú vzhľadom na nehybné okolie auta, teda napr. vzhľadom na povrch cesty. Cestu teda považujeme za nehybnú a s cestou a vôbec svetom okolo nej si predstavíme pevne spojenú súradnicovú sústavu (nejaké osi x, y, z). Rýchlosť, ktorú namerajú policajti, sa teda dá rozumieť ako rýchlosť vzhľadom na túto nehybnú súradnicovú sústavu.

Súradnicové sústavy, ktoré považujeme za nehybné, alebo ktoré sa voči nim pohybujú rovnomerne priamočiaro, nazývame ***inerciálne vzťažné sústavy***. Napr. ak by vedľa cesty šiel rovnomerne priamočiaro vlak, tak hocijaká súradnicová sústava pevne s ním spojená by tiež bola inerciálna. A máme aj súradnicové sústavy, ktoré sa vzhľadom na nejakú inerciálnu sústavu pohybujú s nenulovým zrýchlením. Napr. na druhej strane cesty môže byť kolotoč, ktorý sa otáča. Keď si predstavíme súradnicovú sústavu pevne s nim spojenú, tak tá sa bude otáčať tiež. Otáčavý pohyb má vždy nejaké zrýchlenie, aspoň dostredivé, ak iné nie. Takže vzťažná sústava pevne spojená s otáčajúcim

[3] *Staršie spisy o pohybe*

[4] *Matematické základy prírodnej filozofie*

sa kolotočom nie je inerciálna. Povieme, že je ***neinerciálna***. Ďalší príklad neinerciálnej sústavy by bola taká, ktorá by bola pevne spojená s nejakým zrýchľujúcim (alebo spomaľujúcim) autom.

Keď sa však hlbšie nad týmito témami zamyslíme, uvedomíme si, že samotná Zem sa pohybuje – jednak otáčavým pohybm okolo svojej vlastnej osi a ešte aj obieha okolo Slnka. Vzťažná sústava spojená s povrchom Zeme teda nemôže byť naozaj inerciálna. Môžeme ju považovať len za približne inerciálnu pre danú úlohu, ktorú riešime (napr. pre počítanie pohybu nejakého auta po ceste). V absolútnom zmysle lepšou realizáciou inerciálnej sústavy by bola nejaká pevne spojená so Slnkom. (Ale pre riešenie úloh ako pohyb auta po ceste by bola úplne nepraktická.) Najdokonalejším priblížením ku dokonalej inerciálnej vzťažnej sústave je sústava, ktorá je v pokoji vzhľadom na nehybné hviezdy [5]. Ale opäť, pre mnohé bežné úlohy môže byť nepraktická.

4.1 Prvý Newtonov zákon

Nazýva sa aj *zákon zotrvačnosti*, platí len ***v inerciálnych vzťažných sústavách***, a tu je jeho znenie:

> ***Každé teleso zotrváva v pokoji, alebo koná rovnomerný priamočiary pohyb, kým nie je nútené pôsobením nejakých síl tento svoj stav pohybový zmeniť.***

Zákon zotrvačnosti sa nedá experimentálne potvrdiť, lebo nedokážeme realizovať pokus, v ktorom by hmotný bod nepodliehal aspoň slabému pôsobeniu iných telies [1]. Ale dôsledky tohoto zákona experimentálne potvrdiť vieme a tým sa presviedčame o jeho správnosti. Hutné a presné vyjadrenie prvého NZ je: ***Ak je (celková) sila na teleso nulová, tak rýchlosť telesa je konštantná.*** Matematicky vyjadrené,

$$\vec{F} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{v} = const \tag{106}$$

4.2 Druhý Newtonov zákon

Nazýva sa aj *zákon sily* a tu je jeho znenie:

> ***Sila, ktorá pôsobí na teleso, je úmerná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia, ktoré mu udeľuje.***

Matematický zápis druhého NZ potom je [1]

$$\vec{F} = \text{const}\, m\vec{a} \tag{107}$$

Pod silou $\vec{F}$ sa opäť myslí *celková* sila na teleso; o tom si ešte niečo povieme trochu neskôr. Jednotku sily definujeme tak, aby sme mohli konštantu úmernosti v zákone sily položiť rovnú jednej. Touto jednotkou je

$$\text{kg m s}^{-2} = \text{newton} = \text{N} \tag{108}$$

A teda 2. NZ znie: $\boldsymbol{\vec{F} = m\vec{a}}$. Ako vidíme, v zákone sily sa nám prvý krát objavuje hmotnosť. Nazýva sa aj *zotrvačná hmotnosť*. Hmotnosť sa objavuje aj pri popise gravitačného účinku telies. Tá sa zasa nazýva *gravitačná hmotosť*. Pri bežnom používaní však pojmy zotrvačná a gravitačná hmotnosť nerozlišujeme a používame len jednoslovný pojem hmotnosť. Všetky experimenty totiž ukazujú, že zotrvačná a gravitačná hmotnosť sú si rovné.

4.3 Tretí Newtonov zákon

Nazýva sa aj ***zákon alebo princíp akcie a reakcie*** [1] a tu je jeho znenie:

> ***Sily, ktorými na seba pôsobia dva hmotné objekty, sú rovnako veľké a majú opačný smer [1].***

Tento zákon teda zdôrazňuje, že účinok hmotných objektov, ktorý vyvoláva zmenu pohybového stavu (akokoľvek nepatrná by mohla byť) má charakter *vzájomného pôsobenia* [1].

4.4 Skladanie síl

Účinok dvoch alebo viacerých síl, ktoré pôsobia na ten istý hmotný bod, môžeme nahradiť účinkom jednej sily [1]. Nazývame ju ***výslednica pôsobiacich síl***. Výslednicou síl je ich vektorový súčet. V prípade skladania dvoch síl ho zapíšeme

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{109}$$

Ak by sa skladal všeobecný počet síl, tak

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \cdots + \vec{F}_n \tag{110}$$

Skladanie síl si ilustrujeme na niekoľkých príkladoch.

Príklad 1: Fľaša nehybne položená na doske prednáškového stola v Aule Minor. Úlohou je spraviť rozbor (diskusiu, analýzu) síl, ktoré na ňu pôsobia a vysvetliť, prečo sa fľaša nehýbe, i keď tie sily pôsobia.

Pokojový stav fľaše vyjadríme formulami takto: $\vec{v} \equiv \vec{0}$, $\vec{a} \equiv \vec{0}$. Vzťahmi identity ($\equiv$) tu chceme vyjadriť, že tie nulovosti platia v každom čase (z istého intervalu samozrejme), nielen v nejakom jednom okamihu. Z nulovosti zrýchlenia vyplýva, že $\vec{F} = 0$. Táto celková sila je súčtom tiažovej sily $\vec{F}_G$ a sily podložky na fľašu $\vec{F}_R$. Máme teda

$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_R = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_R = -\vec{F}_G \tag{111}$$

Tiažová sila a sila podložky sa teda kompenzujú a výsledná (celková) sila je nulová. Fľašu sme samozrejme najprv položili na stôl tak, že sme ju nepostrčili. Preto mala hneď od začiatku nulovú rýchlosť. A keďže celková sila na ňu je nulová, tak podľa 1. Newtonovho zákona bude v takomto nehybnom stave zotrvávať.

Silu podložky na teleso nazývame aj ***reakcia podložky***; preto označenie $\vec{F}_R$. A všimime si, že v tejto fyzikálnej sústave je ešte jedna sila: tá, ktorou pôsobí fľaša na podložku. Podľa 3. Newtonovho zákona je rovná $-\vec{F}_R$. Ale táto sila nás teraz priamo nezaujíma, lebo nás zaujímajú sily pôsobiace na *fľašu* (keďže sa zaujímame o to, ako fyzikálne pochopiť a popísať, že výsledná sila $\vec{F}$ na fľašu je nulová).

Príklad 2: Rovnomerne klesajúci parašutista. Daná je jeho hmotnosť m, plocha padáka S v smere kolmom na pohyb, hustota vzduchu ρ, veľkosť g tiažového zrýchlenia (a samozrejme aj smer – kolmo nadol) a koeficient aerodynamického odporu C. Úlohou je opäť spraviť rozbor síl, kvalitatívne popísať i stav, kedy sa parašutista ešte pohybuje premenlivou rýchlosťou a vypočítať rýchlosť jeho rovnomerného pohybu.

Najprv sa zamerajme na tú jednoduchšiu časť úlohy – preskúmanmie ustáleného pohybu parašutistu, teda stavu, kedy sa pohybuje rovnomerne priamočiaro. Čo sa týka rozboru síl a toho, ako sa pri ustálenom pohybe skladajú, je to presne tak, ako bolo v príklade s nehybne položenou fľašou. Len namiesto sily podložky teraz máme aerodynamickú odporovú silu. Tá je presne tak veľká, ako tiažová sila, ale opačne orientovaná, a preto bude výsledná sila nulová. Aerodynamická odporová sila je približne úmerná druhej mocnine rýchlosti. Zvyšok riešenia je na fotke tabule z prednášky.

Čo sa týka tých fáz zoskoku parašutistu, kedy rýchlosť ešte nie je ustálená, vieme, že bude pomerne veľká. Najprv totiž padák nemá otvorený, dosiahne rýchlosť možno aj vyše $50\,\mathrm{m/s}$ a až potom postupne otvorí padák a začína spomaľovať. Keď má už padák naplno otvorený a ešte stále spomaľuje, znamená to, že odporová sila je vtedy väčšia než tiažová. Až postupne sa odporová sila zmenšuje na úroveň tiažovej sily.

Príklad 3: Sánky na vodorovnej ceste, ťahová sila kontra sila trenia. Sánky sú ťahané vodorovne konštantnou ťahovou silou $\vec{F}_1$. Presne oproti nej pôsobí konštantná sila šmykového trenia $\vec{F}_2$. Ťahová sila nech je väčšia než sila trenia. Hmotnosť sánok je m. Spravte rozbor síl pôsobiacich na sánky, uvážte, ako sa skladajú a určte, s akým zrýchlením sa sánky budú pohybovať.

Riešenie si môžete pozrieť na snímke tabule z prednášky.

Príklad 4: Kocka ľadu na zľadovatenej ceste dole svahom; trenie zanedbáme. Daný je uhol sklonu cesty a známa je veľkosť tiažového zrýchlenia. Treba spraviť rozbor síl pôsobiacich na kocku, uvážiť, ako sa skladajú a zistiť zrýchlenie kocky ľadu.

V riešení tejto úlohy si zavedieme stručnejšie značenie síl: jednopísmenkové, teda napr. namiesto $\vec{F}_G$ budeme písať len $\vec{G}$. Aj toto riešenie si môžete pozrieť na snímke tabule z prednášky.

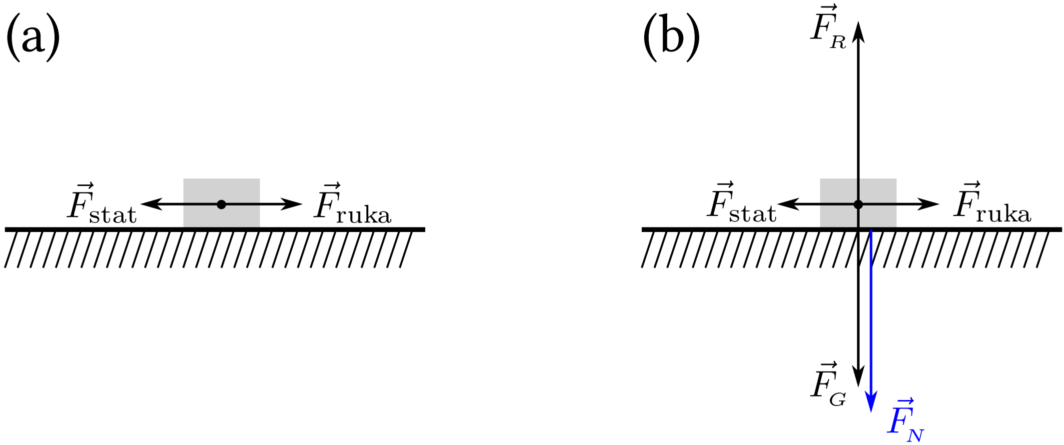
PREDNÁŠKA V 7. TÝŽDNI (1. 4. 2022)

5 Šmykové trecie sily: statická a kinetická

S účinkami týchto síl sa neustále stretávame, aj keď si to nie vždy uvedomujeme. Trecie sily sú takmer tak isto neustále prítomné, ako je prítomná gravitácia. Modely a simulácie v počítačových hrách sa snažia napodobiť skutočnú dynamiku. Preto treba trecie sily neraz používať aj v modeloch pre počítačové hry.

Statická trecia sila. Aby sme si trecie sily ozrejmili, uvažujme tehlu, ktorá je položená na vodorovnej podložke a snažíme sa ju tlačením dostať do pohybu. Tlačíme na ňu silou ruky vodorovne: obr. 9 (a). Tehla sa však pri malých silách ruky nehýbe, lebo ju drží statická trecia sila. Slovo *statická* používame preto, že pôsobenie tejto sily sa týka prípadov, kedy nedochádza ku vzájomnému pohybu styčných plôch. Statická trecia sila $\vec{F}_{\text{stat}}$ presne kompenzuje silu našej ruky $\vec{F}_{\text{ruka}}$. Vieme to z toho, že tehla sa nehýbe a teda výsledná sila na ňu je nulová. A dokonca, keď zatlačíme kúsok silnejšie, tehla sa stále nehýbe. Aj vtedy teda statická trecia sila musí byť $\vec{F}_{\text{stat}} = -\vec{F}_{\text{ruka}}$. Statická trecia sila je teda ***adaptívnou*** silou: presne sa prispôsobuje sile našej ruky tak, aby teleso ostávalo voči podložke v pokoji. Inak povedané, aby nedochádzalo ku vzájomnému pohybu styčných plôch.

Statická trecia sila sa dá rozumieť ako ***reakcia podložky*** na silu našej ruky, presne v súlade s tretím Newtonovym zákonom. Uvažujeme silu ruky pôsobiacu rovnobežne s podložkou, takže aj príslušná statická reakcia (trecia sila) má smer ***rovnobežne*** s podložkou. Spomeňne si na prednášku z minulého týždňa: vtedy sme tiež hovorili o reakcii



Obr. 9: Nehybná tehla na vodorovnej podložke. **(a)** Sila ruky je presne kompenzovaná statickou trecou silou, ktorá vzniká ako reakcia podložky rovnobežne s podložkou. **(b)** To isté, ale zakreslené sú aj sily kolmé na podložku. Tiažová sila $\vec{F}_G$ je presne kompenzovaná silou $\vec{F}_R$, ktorá vzniká ako reakcia podložky kolmo na podložku. Je to reakcia na normálovú prítlačnú silu $\vec{F}_N$, ktorá je veľkosťou aj smerom zhodná s tiažovou silou. Sila $\vec{F}_N$ však pôsobí na podložku, nie na tehlu. Ak na tehlu zvrchu netlačí žiadna prídavná sila, ani nie je nejakou silou nadľahčovaná, tak $\vec{F}_N = \vec{F}_G$. Tak je to na obrázku aj zobrazené.

podložky, ale o reakcii kolmej na podložku. To bola reakcia na tiažovú silu. Tá samozrejme pôsobí aj teraz a vieme, že sa presne kompenzuje s tiažovou silou. A úplne podobne, ale vo vodorovnom smere, sa kompenzujú sila ruky a statická trecia sila.

Pravdaže, v iných situáciách s trecou silou nemusí túto reakciu vyvolávať nejaká ruka, ale môže tam byť prítomná iná sila (napr. aj gravitácia), ktorá by chcela dať teleso do pohybu, a statická trecia sila jej v tom svojou reakciou bráni. Napr. lyžiar stojaci nehybne na miernom svahu sa nehýbe zvyčajne preto, že statická trecia sila je dostatočne veľká nato, aby kompenzovala zložku tiažovej sily rovnobežnú so svahom. (Budeme mať aj príklad v podobnom zmysle.) Sila, ktorá sa snaží teleso dať do pohybu, nemusí byť tlačná; môže byť napr. aj ťahová. To len pri tehle sa nám ľahšie dá predstaviť a zrealizovať jej tlačenie než ťahanie.

Zo skúsenosti vieme, že keď takú tehlu potlačíme dostatočne silno, predsa len sa dá do pohybu. Statická trecia sila teda nemôže byť akokoľvek veľká. ***Najväčšiu možnú hodnotu statickej trecej sily označme $\vec{F}^{\rm max}_{\rm stat}$***. Z experimentov aj ďalších praktických skúseností je známe, že táto sila je priamo úmerná veľkosti sily $\vec{F}_N$, ktorou teleso, tu tehla, tlačí kolmo (normálovo) na podložku; pozri obr. 9 (b); ak napr. na tehlu niekto pritlačí zvrchu, bude ťažšie ju dať do pohybu. Preto

$$\boxed{F_{\text{stat}}^{\max} = \mu_{\text{s}} F_N} \tag{112}$$

kde koeficient úmernosti μ_{s} nazývame ***koeficient statického trenia***. Tento koeficient je bezrozmerný, čiže nemá jednotky; to priamo vyplýva zo samotnej rovnice (112). Jeho hodnota závisí od vlastností povrchov: pri styku drsných povrchoch, napr. pneumatika a asfakt, býva veľký (napr. aj okolo 1). Pri iných, ako napr. ľadová tehla na ľadovej ploche, je blízky 0. F_N je spomínaná normálová prítlačná sila tehly na podložku. Pri tehle položenej na vodorovnej podložke nie je potrebné zdôrazňovať, že tlačí na podložku kolmo. Ale môžeme mať tehlu aj na naklonenej rovine, alebo toho lyžiara na svahu, a najmä vtedy je treba zdôrazniť, že pod silou $\vec{F}_N$ [ktorej veľkosť vystupuje vo vyjadrení (112)] máme vždy na mysli kolmú zložku sily, ktorou teleso pôsobí na podložku.

Index $^{\max}$ v označení najväčšej možnej hodnoty statickej trecej sily sa v praktických výpočtoch nezvykne písať, lebo v nich zvyčajne potrebujeme narábať práve s tou maximálnou hodnotou, takže by aj bez toho $^{\max}$ nemalo dôjsť ku nedorozumeniu.

Ešte zdôraznime, že sila $\vec{F}_N$ je sila pôsobiaca na *podložku*, a nie na teleso. Nemá teda na teleso žiaden účinok. Na teleso pôsobí jej reakcia, ktorú sme značili $\vec{F}_R$ alebo stručne $\vec{R}$, lebo táto reakcia je silou pôsobiacou na teleso (a vieme, že sa kompenzuje s tiažovou silou).

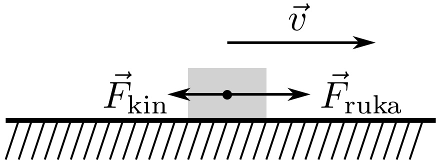
Ak na tehlu na nijak zvrchu netlačíme, ani ju nenadľahčujeme, prítlačná sila je rovná tiažovej sile tehly (na vodorovnej podložke): $\vec{F}_N = \vec{F}_G = m\vec{g}$. Tak sme to aj zakreslili do obr. 9. Vo všeobecnosti však prítlačná sila nemusí byť rovná tiažovej. Ak by bola tá tehla kdesi na kozmickej lodi v beztiažovom stave, aj tak by mohla vykazovať treciu silu, len by bolo potrebné zvrchu na ňu pritlačiť. V každom prípade však podľa 3. Newtonovho zákona platí

$$\vec{F}_R = -\vec{F}_N \tag{113}$$

Kinetická trecia sila. Ak sa tehla po podložke pohybuje, čiže nastáva vzájomný pohyb styčných plôch, uplatňuje sa kinetická trecia sila. Pôsobí (ako je to zo skúsenosti dobre známe) proti smeru rýchlosti pohybu (obr. 10). Jej veľkosť je približne nezávislá od rýchlosti. Je teda rovnako veľká i pri rovnomernom pohybe tehly i pri zrýchlenom. Aj kinetická trecia sila je úmerná kolmej prítlačnej sile tehly na podložku. Príslušný koeficient úmernosti sa nazýva ***koeficient kinetického trenia***. Budeme ho značiť μ_{k}. Platí teda

$$\boxed{F_{\text{kin}} = \mu_{\text{k}} F_N} \tag{114}$$

Z úvah vyššie vyplýva, že ak pri tlačení na tehlu čo len nepatrne prekročíme silu $F_{\text{stat}}^{\max}$, statická trecia sila už nedokáže tehlu zadržať a tá sa dá do pohybu. Zo skúsenosti vieme,



Obr. 10: Tehla šúchajúca sa po vodorovnej podložke vplyvom vonkajšej tlačnej alebo ťahovej sily (napr. sily ruky). Uplatňuje sa kinetická trecia sila. Na tomto obrázku je vonkajšia sila väčšia než sila trecia a preto bude tehla zrýchľovať. V špeciálnom prípade by sila ruky mohla byť presne tak isto veľká, aká je kinetický trecia sila. Vtedy by pohyb tehly mal konštantnú rýchlosť, teda by bol rovnomerný priamočiary.

že keď sa taká tehla (alebo iné teleso) pohne, tak na udržanie rovnomerného pohybu už netreba tlačiť takou veľkou silou, aká bola potrebná na jeho pohnutie. Preto platí

$$F_{\text{stat}}^{\text{max}} > F_{\text{kin}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mu_{\text{s}} > \mu_{\text{k}}} \tag{115}$$

Aj koeficient μ_{k} závisí od vlastností styčných plôch; napr. pre trenie ľadu o ľad je veľmi malý, pre trenie pneumatiky o asfalt je pomerne veľký.

Príklad 1: Tehla na vodorovnej podložke. Dané sú:
$m = 4\,\text{kg}$, $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$, $\mu_{\text{s}} = 0{,}38$, $\mu_{\text{k}} = 0{,}33$.
(a) Aká je maximálna statická trecia sila F_{stat}?
(b) Rozhodneme sa, že potom ako sa dá tehla do pohybu, ju budeme vodorovne tlačiť silou rovnou $F_{\text{stat}}^{\text{max}}$. Aké bude vtedy zrýchlenie tehly?
(c) V tejto časti úlohy predpokladajme, že tehla sa pohybuje rovnomerne priamočiaro. Aká musí vtedy byť tlačná sila?

(a) $F_{\text{stat}} = \mu_{\text{s}} F_N = \mu_{\text{s}} F_G = \mu_{\text{s}} mg$. Číselne to vychádza $F_{\text{stat}} \doteq 14,9\,\text{N}$.

(b) Tehla sa pri takejto sile pohybuje zrýchlene preto, že zvolená tlačná sila ruky je väčšia než kinetická trecia sila brzdiaca pohyb: $F_{\text{ruka}} = \mu_{\text{s}} F_G$, $F_{\text{kin}} = \mu_{\text{k}} F_G$ a vieme, že $\mu_{\text{s}} > \mu_{\text{k}}$. Je to teda stav s nenulovou celkovou silou, stav nerovnováhy síl. Celková sila

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_{\text{ruka}} + \vec{F}_{\text{kin}}$$

čiže jej veľkosť v danom prípade bude $F = F_{\text{ruka}} - F_{\text{kin}}$. Tiažová sila je samozrejme $F_G = mg$. Takže dostávame $a = (\mu_{\text{s}} - \mu_{\text{k}})g$. Číselne $a \doteq 0{,}49\,\text{m/s}^2$.

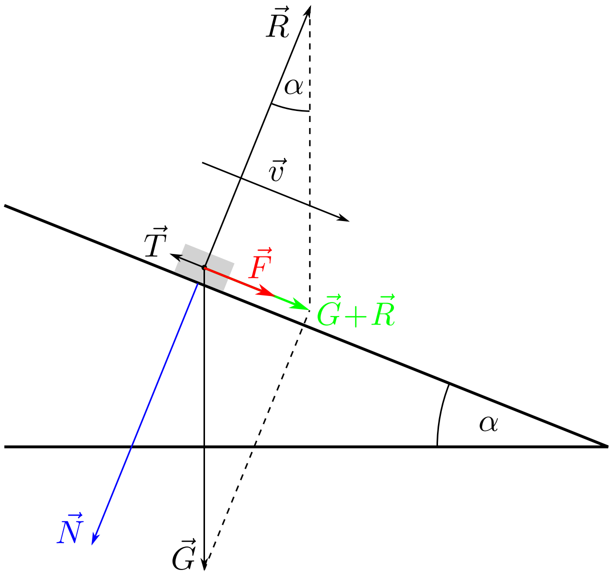
(c) Má teda byť $\vec{a} = \vec{0}$ a zároveň $v \neq 0$. Tehla sa teda po podložke má šúchať, čo znamená, že sa opäť bude uplatňovať kinetická trecia sila. Aby bol pohyb rovnomerný priamočiary, celková sila na tehlu musí byť nulová, čiže musí byť rovnováha medzi silou ruky a kinetickou trecou silou:

$$\vec{F}_{\text{ruka}} + \vec{F}_{\text{kin}} = \vec{0}$$

čiže veľkosti sa rovnajú: $F_{\text{ruka}} = F_{\text{kin}}$. Potrebná tlačná sila teda bude $F_{\text{ruka}} = \mu_{\text{k}} mg$. Číselne $F_{\text{ruka}} \doteq 12{,}94\,\text{N}$.

Príklad 2: Tehla na naklonenej rovine. Dané sú: m, g, μ_{s}, μ_{k}.
Treba vo všeobecnosti analyzovať sily na danej naklonenej rovine a potom vypočítať:
(a) Pri akom uhle sklonu sa dá tehla do pohybu?
(b) S akým zrýchlením sa bude pri tomto uhle pohybovať?

Všeobecnú analýzu síl spravíme s pomocou obr. 11. Na jednom obrázku však nemôžu byť zakreslené všetky možné situácie. Tak si vyberme takú typickú – že tehla sa nenulovou rýchlosťou a aj nenulovým zrýchlením šmýka dole naklonenou rovinou. Sila, ktorá sa ju snaží dávať do pohybu, je zložka tiažovej sily v smere naklonenej roviny. Táto sila má hodnotu $\vec{G} + \vec{R}$. I keď je to zložka len tiažovej sily, do jej vektorového vyjadrenia, ako vidíme, vstupuje aj sila $\vec{R}$ kolmej reakcie podložky. Proti smeru rýchlosti pôsobí kinetická trecia sila $\vec{T}$. Celková (t. j. výsledná) sila je



Obr. 11: Tehla na naklonenej rovine. Použité je kompaktné označovanie, v ktorom $\vec{G}$ je tiažová sila, $\vec{T}$ je trecia sila, $\vec{N}$ je normálová prítlačná sila tehly na podložku, $\vec{R}$ je kolmá reakcia podložky, pričom $\vec{R} = -\vec{N}$. Celková sila je $\vec{F} = \vec{G} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$. Na obrázku je znázornená situácia, keď sa tehla šmýka dole rovinou a teda sa uplatňuje kinetické trenie. Aj zrýchlenie je nenulové, lebo výsledná sila $\vec{F}$ je nenulová.

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{G} + \vec{R} + \vec{T} \tag{116}$$

Ak by bola nulová, tak zrýchlenie by bolo tiež nulové. Takže v podstate aj špeciálny prípad nulového zrýchlenia je v obrázku zahrnutý, len si treba predstaviť veľkosťami vyrovnané sily $\vec{T}$ a $\vec{G}+\vec{R}$. Toto by popisovalo dokonca aj statický prípad, teda nehybnú tehlu, pričom $\vec{T}$ by bola v tom prípade statická trecia sila.

Podľa rovnobežníka a trojuholníkov na obrázku 11 sa dá vidieť, že

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{G}+\vec{R}|}{|\vec{G}|} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{|\vec{G}+\vec{R}| = G\sin\alpha} \tag{117}$$

Bude potrebné určiť aj treciu silu, či už statickú alebo kinetickú. Veľkosť trecej sily (bez špecifikovania, či ide o statickú alebo kinetickú) vyjadríme

$$T = \mu N = \mu R$$

lebo sily $\vec{N}$ a $\vec{R}$, hoci sú navzájom rôzne a každá pôsobí na iné teleso, majú rovnaké veľkosti. Z trigonometrie dostávame

$$\cos\alpha = \frac{R}{G} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R = G\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T = \mu G\cos\alpha} \tag{118}$$

Ak je uhol sklonu dostatočne veľký, tehla sa môže zrýchlene šmýkať dole doskou. Jej zrýchlenie určíme pomocou vyjadrenia (116). Z tej rovnice stačí zobrať zložku rovnobežnú s naklonenou rovinou. Dostávame

$$ma = G\sin\alpha - \mu_\mathrm{k} G\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a = g\left(\sin\alpha - \mu_\mathrm{k}\cos\alpha\right)} \tag{119}$$

keďže $G = mg$. Posledný výsledok platí všeobecne pre hocijaký uhol dostatočne strmý nato, aby sa tehla zrýchlene šmýkala.[5]

(a) Predstavujeme si, že dosku, na ktorej je tehla, pomaly viac a viac nakláňame. Tehla sa dá do pohybu, keď sila $\vec{G}+\vec{R}$ svojou veľkosťou nepatrne (teoreticky stačí o nekonečne málo) presiahne maximálnu možnú statickú treciu silu. (Alebo nemusí presiahnuť, ale stačí do tehly nepatrne ťuknúť a pohne sa.) Pri hraničnej hodnote uhla sú tie sily ešte vyrovnané. Môžeme to teda zapísať rovnosťou

$$G\sin\alpha_\mathrm{c} = \mu_\mathrm{s} G\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha_\mathrm{c} = \mu_\mathrm{s}\cos\alpha \tag{120}$$

Preto kritický uhol, teda uhol, po dosiahnutí ktorého sa tehla môže pohnúť, spĺňa

$$\operatorname{tg}\alpha_\mathrm{c} = \mu_\mathrm{s}$$

[5] Mimochodom, z vyššie popísaných úvah sa dá usúdiť, že tehla sa dokáže trvalo (bez spomaľovania) šmýkať pri uhloch $\alpha \geq \operatorname{arctg}\mu_\mathrm{k}$. Máme $0 < \mu_\mathrm{k} < \mu_\mathrm{s}$. Samovoľne sa síce tehla pri uhloch $\alpha \leq \operatorname{arctg}\mu_\mathrm{s}$ nerozbehne, ale ak je uhol aspoň $\operatorname{arctg}\mu_\mathrm{k}$, tak keď ju postrčíme, bude sa šmýkať. Takže pri uhloch $\alpha \in \langle\operatorname{arctg}\mu_\mathrm{k}, \operatorname{arctg}\mu_\mathrm{s}\rangle$ síce treba tehlu postrčiť, ale keď sa rozbehne, tak jej pohyb už bude trvalý.

Ako vidíme, nezávisí od tiažovej sily. Samotný uhol z poslednej rovnice musíme vyjadriť funkciou inverznou ku tangensu. Tou je arkustangens:

$$\boxed{\alpha_\mathrm{c} = \mathrm{arctg}\,\mu_\mathrm{s}}$$

Hodnota takto vypočítaná vyjde v radiánoch, čo sú prirodzené jednotky uhla.

(b) Ak sa pri kritickom uhle α_c dá tehla do pohybu (napr. vďaka nepatrnému ťuknutiu do nej), tak potom sa už začne uplatňovať kinetická trecia sila namiesto statickej. Kinetická je menšia než statická a preto nedokáže plne vyrovnávať silu $\vec{G} + \vec{R}$ a tehla sa bude pohybovať zrýchlene so zrýchlením podľa (119). My teraz chceme výsledok pre ten špeciálny uhol α_c. Dosadiac α_c a využijúc (120) dostávame

$$a = g\left(\sin\alpha_\mathrm{c} - \mu_\mathrm{k}\cos\alpha_\mathrm{c}\right) = g\left(\mu_\mathrm{s}\cos\alpha_\mathrm{c} - \mu_\mathrm{k}\cos\alpha_\mathrm{c}\right)$$

a teda

$$\boxed{a = \left(\mu_\mathrm{s} - \mu_\mathrm{k}\right) g\,\cos\alpha_\mathrm{c}}$$

6 Hybnosť a impulz

Hybnosť hmotného bodu je definovaná ako súčin jeho hmotnosti a rýchlosti, a je to teda vektor:

$$\boxed{\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}} \tag{121}$$

V reálnom svete i počítačových hrách nemáme hmotné body, ale telesá. Už teraz je však aspoň intuitívne zrejmé, že uvedená definícia hybnosti bude platiť aj pre pohyb telesa, nielen hmotného bodu. Neskôr si toto ešte upresníme, lebo niekedy bývajú telesá nie pevné (menia svoj tvar), alebo vykonávajú aj otáčavý pohyb. Tieto komplikácie pri hmotnom bode odpadajú. Preto, ak sa chceme zamerať len na teleso ako celok a zaujímame sa o jeho posuvný pohyb (nie otáčavý), býva pojem hmotného bodu veľmi užitočný a praktický. Neskôr si rigorózne definujeme pojem *ťažisko* telesa. Uvidíme, že je to bod v priestore (môže ale nemusí byť vnútri telesa), ktorý sa pohybuje tak, akoby celá hmotnosť telesa bola sústredená v tomto bode. Tento bod sa teda správa presne ako hmotný bod.

Menej často spomínanou veličinou v mechanike je impulz, podrobnejšie *impulz sily*. Meriame ním účinok pôsobenia sily na hmotný bod počas nejakého časového úseku (alebo účinok na teleso vo vyššie uvedenom zmysle). Ak by sila bola konštantná, tak za časový interval dĺžky Δt (akokoľvek dlhý alebo krátky) by hmotnému bodu udelila impulz

$$\vec{\mathcal{I}} = \vec{F}\Delta t$$

Sila však môže v čase meniť svoju veľkosť aj smer a preto táto jednoduchá definícia, akokoľvek názorná, nie je dostatočná. Všeobecne impulz sily udelený hmotnému bodu v časovom intervale $\langle t_a, t_b \rangle$ definujeme

(Na lepšie vyjasnenie tú trajektóriu rozdeliť na malé úseky!)

$$\boxed{\boxed{\vec{\mathcal{I}} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\,\mathrm{d}t}} \tag{122}$$

Ak za silu dosadíme jej vyjadrenie z 2. Newtonovho zákona a ďalej upravujeme, postupne dostávame

$$\vec{\mathcal{I}} = \int_{t_a}^{t_b} m\vec{a}\,\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b} m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{123}$$

Predpokladáme, že *hmotnosť hmotného bodu sa nemení.* V takom prípade ju môžeme vybrať pred integrál a dostávame

$$\vec{\mathcal{I}} = m\,[\vec{v}(t_b) - \vec{v}(t_a)]$$

teda, pričom použijeme stručnejšie označovanie,

$$\boxed{\int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_b - \vec{p}_a} \tag{124}$$

Tento poznatok sa nazýva ***prvá veta impulzová v integrálnom tvare***.

Teraz uvažujme infinitezimálne krátky časový interval dĺžky $\mathrm{d}t$ a počítajme udelený impulz:

$$\vec{F}\mathrm{d}t = m\,\vec{a}\,\mathrm{d}t = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\vec{v}$$

z čoho dostávame

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}} \tag{125}$$

Toto veľmi užitočné a často používané vyjadrenie sily sa nazýva ***prvá veta impulzová v diferenciálnom tvare*** [1]. Tak sa tento vzťah zvykne nazývať v učebniciach fyziky v našej časti Európy. V západnej literatúre, ale neraz aj u nás, sa vzťah (125) považuje za vyjadrenie 2. Newtonovho zákona. Z odvodenia vzťahu (125) vidíme, že naozaj veľmi tesne súvisí s rovnicou $\vec{F} = m\vec{a}$.

Najmä na cvičeniach sa stane jasné, že impulz sily je veličina nesmierne nápomocná pre popis nárazov, odrazov a zrážok telies a preto je veľmi často potrebné ju používať i pri simuláciách v počítačových hrách.

Literatúra

[1] Štefan Veis, Ján Maďar, Viktor Martišovič, *Všeobecná fyzika 1 – MECHANIKA A MOLEKULOVÁ FYZIKA*, Alfa, Bratislava 1978.

[2] Ivan Červeň, *Fyzika po kapitolách*, STU v Bratislave, 2007.

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei

[4] David M. Bourg, Bryan Bywalec, *Physics for game developers*, 2. vydanie, O'Reilly & Associates, Inc., Sebastopol 2002.

[5] Alexander L. Fetter, John Dirk Walecka, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*, Dover Publications, Inc., Mineola 2003.

Obsah