Fyzikálne základy počítačových hier (pre FIIT)

(dokument ku prednáškam a sčasti aj cvičeniam; na konci dokumentu je obsah)

Martin Konôpka

Oddelenie fyziky, ÚJFI, FEI STU v Bratislave, martin.konopka@stuba.sk

najnovšia aktualizácia: 23. apríla 2022

1. prednáška (18. 2. 2022)

V mnohých počítačových hrách sú napodobňované fyzické javy, aké sa môžu diať aj v skutočnom svete. Napr. sa zobrazuje pohyb odhodenej lopty. V bojovnjšie poňatých hrách napr. let vrhnutého kameňa alebo vystreleného projektilu. Vo fantastickjšie navrhnutých zasa pristávanie kozmickej lode na Mesiaci alebo na niektorej planéte. A nemusí zostať pri jednom pohybujúcom sa telese. Obľúbenou hrou je biliard, kde sa na biliardovom stole pohybujú gule, ktoré sa môžu jednak odrážať od obruby hracej plochy a aj sa zrážať medzi sebou, odrážať sa od seba. Táto hra ako aj vyššie spomenuté pohyby aj javy môže prebiehať tak v skutočnom svete ako aj v počítačovej hre. Je celkom prirodzené, že hráč počítačovej hry očakáva, že tie pohyby a vôbec zobrazenie scény budú na obrazovke vyzerať dostatočne podobne ako v skutočnosti. Preto môžeme povedať, že počítačovou hrou obsahujúcou dynamické prvky sa snažíme ***napodobňovať***, cudzím slovom ***simulovať***, vzhľad, dynamiku a aj zvuky istej scény, ktorá by povedzme mohla prebiehať aj v skutočnom svete. Ak by napr. let lopty odkopnutej do výšky vo počítačovej hre vyzeral tak, že smerom do výšky by loptka zrýchľovala, asi by sme z takej hry mali pokazený dojem. Očakávame totiž, že lopta bude spomaľovať. Tak to máme už v oku, teda aspoň ak sme v mladosti strávali nejaký čas aj pri loptových hrách, prípadne ich videli v televízii. A podobne, ak by bilardová guľa v hre po veľmi šikmom náraze na okraj plochy sa odrazila presne tam, skade priletela, tiež by sme na takú hru pozerali udivene. Ak sa autor hry chce vyhnúť takejto nepodarenej dynamike v hre a chce, aby vyzerala realisticky, musí pre výpočet pohybu objektov v hre použiť fyzikálne zákony, aké platia pre obdobné situácie aj v skutočnom svete. Tak sa dostávame k obsahu nášho predmetu: na prednáškach sa budeme učiť čosi z fyziky – to, čo je podstatné pre správny popis ***dynamiky*** herných situácií (ktoré pravda môžu byť aj situáciami z reálneho sveta).

Hneď na začiatok však musíme upozorniť, že naše výpočty na základe fyzikálnych zákonov nebudú dynamiku skutočných objektov popisovať dokonale presne. To sa takmer nikdy nedá, nielen v počítačovej hre, ale vôbec. Skutočné situácie zahŕňajú aj veľké množstvo rôznych drobných vplyvov a ich zahrnutie do simulácie by bolo prakticky nemožné z viacerých dôvodov. A dokonca aj keby bolo možné, tak pre účel počítačovej hry by to mohlo byť zbytočné. Ak by sme v hre chceli simulovať a zobraziť napr. zrážku biliardových gúľ, v zásade by sme mali brať do úvahy aj ich pružnú deformáciu, ktorá na veľmi krátky okamih pri zrážke nastane. Zo skúsenosti však vieme, že biliardové gule sa vyrábajú z tvrdého materiálu a ich deformáciu pri zrážke ani nepostrehneme. A aj samotná dynamika takej zrážky sa dá dosť dobre napodobniť, i keď deformáciu nebudeme uvažovať. Takémuto prístupu hovoríme, že sme vytvorili nejaký zjednodušený ***model*** zložitej reálnej situácie. A namiesto pôvodnej zložitej úlohy (napr. popísať zrážku biliardových gúľ aj s ich deformáciami) potom riešime len ten zjednodušený model, kde si biliardové gule predstavujeme ako dokonale tuhé (nedeformovateľné) telesá. Takýto prístup sa používa nielen pri simuláciách dejov v hrách, ale aj v technických a vedeckých úlohách. Je to užitočný prístup, lebo pri ňom zanedbávame menej podstatné črty a vplyvy a berieme do úvahy len tie podstatnejšie. Vo vedecko-technických úlohách vďaka tomu lepšie porozumieme skúmanému javu alebo zariadeniu (lebo nebudeme zahltení množsvom menej dôležitých detailov). V počítačovej hre (a nielen v nej) nám zasa zjednodušený model umožní robiť simuláciu dostatočne rýchlo, čiže procesor a grafická karta budú „stíhať“. A drobné odchýlky od úplne realistického správania sa si ani nevšimneme. Niekedy si ich aj všimneme, ale s tým sa musíme zmieriť, lebo príliš realistický popis by bol nesmierne výpočtovo náročný. Skúsme si predstaviť, že na scéne je napr. strom s listami a fúka nejaký nepravidelný vietor. Listy na skutočnom strome (a sú ich tam tisíce) sa rôzne trepocú. Realistická simulácia takejto scény by vyžadovala jednak do počítača naprogramovať štruktúru rozloženia konárov a listov stromu, vytvoriť modely popisujúce ich pružnosť a aj popisovať (nesmierne výpočtovo náročne) turbulentné prúdenie vzduchu pomedzi konáre a listy. Aspoň v súčasnosti je nepredstaviteľné, že by niekto takto detailne programoval hry. Vo vede a technike sa výpočty prúdenia okolo objektov zložitého tvaru robia na superpočítačoch, aké hráč nemá k diskpozícii. Takže v prípade scén náročných na výpočtový čas sa robia aj hrubé zjednodušenia. Okrem spomenutých listov na strome je veľmi zložité modelovať a výpočtovo náročné aj plameň a dym, aký vznikne pri výstrele zo zbrane. Tak sa tiež robia hrubé zjednodušenia a proste sa to len nejako „namaľuje", namiesto toho, aby sa na základe fyzikálnych zákonov počítala dynamika alebo dokonca elektrodynamika polí, ktoré súvisia s časticami letiacimi z hlavne.

Spomenuli sme elektrodynamiku. Fyziku teda netvoria len javy, ktoré sa dajú popísať pomocou pohybu telies alebo častíc, ale aj elektrické a magnetické javy. Tie sú však pre dynamiku typických herných situácií nedôležité alebo málo dôležité. V našom predmete sa nimi nebudeme zaoberať. Nebudeme sa zaoberať ani realistickým ***zobrazením*** objektov na scéne, i keď to je, aspoň do istej miery, pre hry dôležité. Bude pre nás síce dôležité, aby sme dynamiku objektov na scéne zobrazovali v súlade s tým, ako je na základe fyzikálnych zákonov počítaná, ale samotnú vizualizáciu budeme robiť len v hrubých rysoch, schematicky. Nebudeme teda pracovať s textúrami, so svetlom, s tieňmi a pod. Niežeby to pre hry nebolo dôležité, ale sú to témy, ktoré už viac patria do počítačovej grafiky než do fyzikálneho modelovania. Pravda, niekto by mohol namietať, že veď svetlo a tiene sú vyslovene fyzikálne (povedzme optické) javy. Áno, je tomu tak, ale v našom predmete nemáme čas na všetko a tieto veci radšej prenecháme tým, ktorí sa špecializujú na počítačovú grafiku. My v našom predmete sa budeme zameriavať na *dynamiku* objektov na scéne.

1 Kinematika pohybu bodov a telies, ktoré si vieme účelovo predstaviť ako body

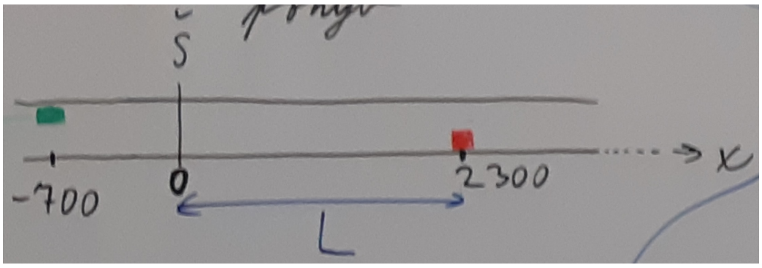
Keď len popisujeme, ako sa poloha, rýchlosť a prípadne aj zrýchlenie telesa či bodu mení, ale neskúmame to pomocou síl, tak povieme, že skúmame kinematiku pohybu. Aj samotná táto oblasť *mechaniky hmotného bodu* sa nazýva Kinematika.

1.1 Hmotný bod

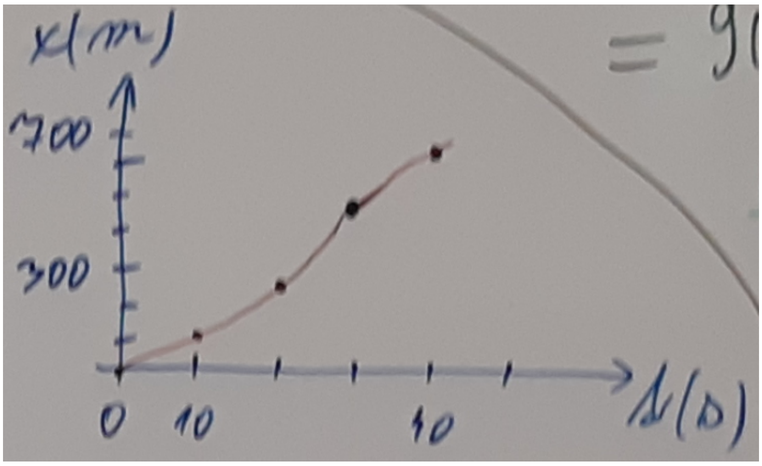
Chceli by sme v hre napodobniť (modelovať, simulovať) pohyb auta; neskôr sa dostaneme aj ku iným telesám: kamene, projektily, lietadlá a pod. V tomto úvode však treba začať s niečím jednoduchým, takže si predstavme auto, ktoré sa pohne a ide po dlhej priamej ceste stálou rýchlosťou, povedzme 60 km/h. Naša prvá otázka je, kde sa bude auto nachádzať po minúte takého pohybu, po dvoch minútach atď. Ale dá sa to jednoznačne povedať? Veď auto nie je bodka, ale objekt dlhý niekoľko metrov a má aj nejakú šírku a výšku. Dáte mi však za pravdu, že obťažovať sa takýmito črtami auta by pre náš účel v tejto chvíli bolo nepraktické až kontraproduktívne. Keď by sme na to auto pozerali z veľkej výšky, napr. z lietadla, videli by sme ho len ako nejakú bodku pohybujúcu sa po ceste. A plne by nám to stačilo k tomu, aby sme vedeli povedať, kde sa auto nachádza napr. po minúte jazdy. Vidíme, že pre daný účel je praktické namiesto auta ako rozmerného telesa uvažovať bodku, ktorá môže predstavovať napr. stred auta (alebo ešte vhodnejšie jeho ťažisko, čo je pojem, ktorý si bližšie vysvetlíme neskôr). Tak prichádzame k užitočnému pojmu ***hmotný bod***. Je to akási veľmi praktická abstrakcia telesa, ktorá nám umožňuje odhliadnuť od jeho nenulových rozmerov, ak sú pre daný účel nepodstatné. Stačilo by povedať aj *bod*, ale keďže ide o teleso, ktoré má nenulovú hmotnosť, častejšie budeme hovoriť o hmotnom bode.

1.2 Poloha, súradnica

A akým spôsobom vyjadríme, kde sa auto na tej ceste nachádza? Povieme, že napr. 2300 metrov od štartovnej čiary. Tak prichádzame ku pojmu *vzdialenosť*. A môžeme použiť aj pojem ***dĺžka*** (tu cesty, ktorú auto prebehlo). Dĺžka patrí medzi základné ***fyzikálne veličiny***. Udávame ju najčastejšie buď v metroch (m) alebo v ich násobkoch či dieloch: kilometer (km = $1000\,\mathrm{m}$), centimeter (cm = $0{,}01\,\mathrm{m}$) atď. Označujeme ju najčastejšie písmenami ℓ, L, alebo aj d, D; tieto d-čka sa hodia najmä keď používame pojem vzdialenosť (*distantia, distance*). Čo však, ak by auto cúvalo alebo šlo opačným smerom, povedzme $100\,\mathrm{m}$? Dostalo by sa na iné miesto na ceste než keby šlo $100\,\mathrm{m}$ dopredu. Vyjadrenie toho, na ktorú stranu auto šlo, môžeme teda urobiť slovne (dozadu, dopredu). Ale to nemusí byť praktické, keď potrebujeme túto informáciu sprostredkovať alebo zobraziť číselne. Pre taký účel je vhodnejšie polohu smerom dozadu vyjadrovať zápornými číslami a smerom dopredu samozrejme kladnými. A prichádzme ku



Obr. 1: Cesta, autá, súradnicová os. Písmeno Š znamená „štart“ a bod 0 na osi je zvolený v mieste štartu. Zelené auto ide doľava, červené doprava. (Na tomto provizórnom obrázku vyrobenom z fotky tabule sú aj nadbytočné veci.)



Obr. 2: Závislosť súradnice auta of času. Príslušnú tabuľku sme mali na tabuli. Slušne nakreslený graf by však mal mať čísla na osiach pravidelne! Neberte si z tohto grafu príklad, ako kresliť grafy! (A aj na tento provizórny obrázok sa dostali i nadbytočné veci.)

pojmu ***súradnica***. Tiež ju môžeme vyjadrovať v metroch, ale na rozdiel od vzdialenosti alebo dĺžky môže byť aj záporná. Miesto, skadiaľ auto štartuje, má teda značku 0. Môžeme si to aj nakresliť (obr. 1). Tá čiara sa nazýva *súradnicová os* alebo *vzťažná os*. Ak potrebujeme súradnicu označiť aj nejakým písmenom, zoberme zaužívané x. A môžeme napísať, že napr. po desiatich sekundách cúvania sa auto nachádza v mieste $x = -50\,\mathrm{m}$. Polohu auta (a aj iného objektu, napr. projektilu) teda vyjadrujeme pomocou jeho súradnice.

Zatiaľ sme vystačili s jednou súradnicou (značenou x), lebo sme uvažovali rovnú cestu. V zložitejších prípadoch budeme potrebovať viac súradníc.

1.3 Čas

Ak sa auto pohybuje, jeho poloha (súradnica) sa mení. V každom okamihu nadobúda novú hodnotu. Povieme aj, že poloha auta sa mení s časom. Bola uvedená tabuľka ako príklad. A vôbec, všetky zmeny, ktoré sa vo fyzickom svete dejú, prebiehajú v čase. Čas je tiež jednou zo základných fyzikálnych veličín a zvykne sa označovať písmenkom t, čo je odvodené od slov *tempus, time*. Základnou jednotkou pre čas je sekunda (s). Napíšeme napr., že jazda auta trvá už $t = 27\,\mathrm{s}$. Môžu sa používať aj iné jednotky času, ak je to praktické; napr. vyššie sme spomenuli minúty. Ak sa poloha alebo teda súradnica auta s časom mení, z hľadiska matematiky môžeme súradicu považovať za funkciu závislú na čase. Symbolicky to zapíšeme takto: $x = x(t)$. Túto závislosť môžeme zakresliť aj ako funkciu do grafu (obr. 2). Zakreslené body sú známe hodnoty, ktoré sme prevzali z tabuľky. Cez ne sme odhadom nakreslili súvislú čiaru, lebo vieme, že $x(t)$ má byť spojitou funkciou času; v hocijakom okamihu má nejakú súradnicu, nielen v tých, ktoré boli v tabuľke.

1.4 Kinematika priamočiareho pohybu

Niekedy pre stručnosť povieme, že pôjde o pohyb v jednom rozmere (t. j. v jednorozmernom priestore, stručne v 1D), lebo taký pohyb sa dá pri vhodnej voľbe súradnicových osí popísať pomocou jedinej súradnice; budeme používať, ako sme už aj začali, x. Treba si však uvedomiť, že aj na popis priamočiareho pohybu môžeme niekedy potrebovať i viac súradníc – vtedy, keď sa teleso nepohybuje rovnobežne s niektorou zo súradnicových osí.

1.4.1 Rýchlosť

Ak cestujeme autom po dobrej diaľnici a za polhodinu prejdeme vzdialenosť povedzme $65\,\mathrm{km}$, tak povieme, že sme cestovali rýchlosťou $130\,\mathrm{km/h}$. Presne tak to môžeme povedať vtedy, ak sme šli rovnomernou rýchlosťou. Pri dlhších úsekoch sa však nestáva, že by sme celý čas mohli mohli ísť rovnomernou rýchlosťou; občas treba zabrzdiť, inokedy zrýchliť. Tých $65\,\mathrm{km}$ za polhodinu jazdy však povedzme že spravíme aj napriek kolísavému tempu jazdy, aj keď na to už občas porušíme maximálnu povolenú rýchlosť. A v iných chvíľach zasa ideme pomalšie než je maximálna povolená stotridsiatka. Povieme potom, že počas cesty sme mali ***priemernú rýchlosť*** $130\,\mathrm{km/h}$. Tieto úvahy nás však zároveň privádzajú k tomu, že pre rýchlosť auta v nejakom zvolenom okamžiku (napr. keď nás zameriava policajný radar) nevystačíme s pojmom priemerná rýchlosť. Ak nás radar zameral v okamžiku, keď sme šli $145\,\mathrm{km/h}$, tak nám nepomôže, že v priemere sme šli len $130\,\mathrm{km/h}$; dôležitá je *okamžitá* hodnota rýchlosti. Tá je dôležitá napr. aj v prípade nárazu; nepomôže nám, že na nejakej ceste sme doteraz šli v priemere štyridsiatkou, ak narazíme v okamihu, keď sme sa hnali osemdesiatkou.

Ako sa dá dopracovať ku nejakému spôsobu výpočtu okamžitej rýchlosti, alebo aspoň ku jej približnému určeniu? Tak, že na určenie si nezoberieme celý 65-kilometrový úsek, ale nejaký kratší. Na diaľnici bývajú každých $500\,\mathrm{m}$ tabuľky s označením, na koľkom kilometri diaľnice sa nachádzame. (To sú vlastne súradnice.) Ak si odstopujeme čas, za aký prejdeme od jednej tabuľky ku druhej, môžeme pomocou neho určiť rýchlosť, akou sme šli medzi tými dvomi tabuľkami. Ak napr. tú vzdialenosť prejdeme za čas $15\,\mathrm{s}$, tak rýchlosť budeme počítať takto:

$$\text{rýchlosť} = \frac{500\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s}} = \frac{0{,}5\,\mathrm{km}}{0{,}0041\bar{6}\,\mathrm{hod}} = 120\,\mathrm{km/h}$$

Stále je to len priemerná rýchlosť, tentoraz však už len na tom jednom úseku. Na nasledujúcom úseku môže vyjsť napr. $132{,}3\,\mathrm{km/h}$. Na ďalšom povedzme $134{,}7\,\mathrm{km/h}$. Tak potom dostávame predsa len istú informáciu o tom, ako sa rýchlosť nášho auta menila s časom, i keď je to len taká „hrubozrnná“ informácia. Hrubozrnná preto, že nezachytáva zmeny rýchlosti vnútri tých jednotlivých polkilometrových úsekov. Ak chceme menej hrubozrnnú informáciu, musíme úseky, na ktorých meriame časy, ešte skrátiť. Tak si zoberme naozaj kratučký úsek cesty, ktorého dĺžku označíme Δx; napr. by to mohlo byť $5\,\mathrm{m}$. V rámci tohto kratučkého úseku už môžeme predpokladať, že zmena rýchlosti na ňom nenastane, alebo ak nastane, tak len nepatrná, zanedbateľná. Stopkami alebo akokoľvek inak zmeriame, že sme ten úsek prešli za čas, ktorý označíme Δt; povedzme že by to bolo $0{,}1\,\mathrm{s}$. Aj pre rýchlosť si zavedieme nejaký písmenkový symbol; už od dávna sa zvykne používať v (od slov *velocitas, velocity*). My tam teraz pridáme aj index x preto, aby sme zvýraznili, že ide o pohyb v smere osi x. Rýchlosť na tom úseku teda bude

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1}$$

Číselne by nám pre vyššie uvedené hodnoty vyšlo $5/0{,}1\,\mathrm{m/s} = 50\,\mathrm{m/s} = 180\,\mathrm{km/h}$, za čo by sme teda dostali už poriadnu pokutu. Skúsme si formulku vyššie zapísať trochu podrobnejšie. Pri našom meraní si volíme istý časový okamih t; to je moment, kedy spustíme stopky. Auto sa vtedy nachádza v mieste so súradnicou, ktorú si označíme $x(t)$. Súradnicu tu teda rozumieme ako funkciu času. Stopky zastavíme v čase o Δt neskôr, teda v čase $t + \Delta t$. Vtedy sa už auto nachádza o Δx ďalej, teda v mieste

$$x(t + \Delta t) = x + \Delta x$$

Formulu (1) vyššie preto môžeme zapísať

$$v_x = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

Pri prudkom brzdení by však ani úsek $5\,\mathrm{m}$ nebol dostatočne krátky na to, aby sme mohli menenie rýchlosti v rámci neho zanedbať. Takže vo všeobecnosti sú vyjadrenia (1) a (2) len návodom na to, ako vypočítať priemernú rýchlosť; je to vlastne definícia toho, čo považujeme za priemernú rýchlosť na tom úseku dĺžky Δx. Ak chceme definovať naozaj presne, čo *okamžitá* rýchlosť je, treba časový úsek Δt použiť limitne krátky, teda nekonečne krátky; tým pádom aj Δx bude nekonečne malý úsek cesty. Naozaj okamžitá rýchlosť v čase t je teda toto:

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

Ako už z matematiky iste viete, takýto zápis pomocou limity sa nazýva *derivácia*. Tu konkrétne je to derivácia funkcie x podľa t. Okamžitá ***rýchlosť bodu je teda deriváciou jeho súradnice podľa času***. Hodnota takejto rýchlosti môže byť tak kladná ako aj záporná (popr. aj nulová), podľa toho, či sa auto (alebo čokoľvek iné) pohybuje v kladnom smere súradnicovej osi alebo v zápornom smere (obr. 1). Veľkosť rýchlosti $|v_x(t)|$ je samozrejme vždy nezáporná. Preto najmä ak by malo dôjsť ku zmätkom, treba pri vyjadrovaní sa rozlišovať pojmy rýchlosť (ktorá môže byť aj záporná) a veľkosť rýchlosti. Matematici zvyknú deriváciu značiť čiarkou, čiže stručne by sme mali $v_x(t) = x'(t)$, ale takýto spôsob sa vo fyzikálnych disciplínach nepoužíva, lebo čiarka sa nám zvyčajne zíde na označenie iných vecí. Vo fyzike a aj v našom predmete použijeme pre deriváciu podľa času buď bodku nad x, alebo použijeme zlomkový zápis vyjadrujúci podiel diferenciálov (nekonečne malých veličín):

$$\boxed{v_x(t) = \dot{x}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \tag{4}$$

Ten druhý zápis nápadne pripomína formulku (1) a naozaj je to to samé, ak vo formulke (1) použijeme nekonečne malé (*infinitezimálne*) veličiny. Argumenty t vo funkciách nie je nutné vždy písať; závisí to od konkrétnych okolností. Zatiaľ sme hovorili len o prípade, keď sa auto alebo bod, ktorým ho reprezentujeme, pohybuje jedným smerom, teda pozdĺž nejakej priamky (ale môže pritom aj zastať a cúvať, znova sa rozbiehať dopredu atď.) To nazývame ***priamočiary pohyb***. Ak sa pritom navyše auto či bod pohybuje stálou rýchlosťou, tak hovoríme, že koná *rovnomerný priamočiary pohyb*. O ňom si teraz trochu podrobnejšie niečo povieme.

Rovnomerný priamočiary pohyb. Pri rovnomernom pohybe (dokonca by nemusel byť ani priamočiary) auto (alebo iné teleso alebo len bod) za každú sekundu prejde rovnakú vzdialenosť. Poriadnejšie povedané, za každý časový úsek nejakej zvolenej dĺžky Δt (nemusí to byť sekunda) prejde rovnakú vzdialenosť

$$|\Delta x| = |v_x|\,\Delta t \tag{5}$$

ako to vidno z formulky (1). Čím dlhší je čas rovnomerného pohybu, tým je – priamoúmerne – väčšia prejdená vzdialenosť, alebo povieme ***dráha*** a označíme ju s. Aby sme zápis práve napísanej formulky zjednodušili, ešte dáme preč znak Δ od času a pre veľkosť rýchlosti zavedieme bezindexové označenie (tak to býva často zvykom):

$$v = |v_x| \tag{6}$$

Zápis priamej úmery (5) sa potom zjednoduší na známy stredoškolský (alebo dokonca základoškolský) tvar

$$s = vt \tag{7}$$

ktorý nám hovorí, že dráha rovnomerného pohybu je priamoúmerná času.
Príklad: Ak by sa auto pohybovalo rovnomerne rýchlosťou veľkosti $25\,\mathrm{m/s}$ počas doby $5\,\mathrm{s}$, tak by za ten čas prešlo dráhu

$$s = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,5\,\mathrm{s} = 125\,\mathrm{m}$$

Mimochodom, aká je táto rýchlosť, keď ju vyjadríme v km/h? Je $25 \cdot 3{,}6\,\mathrm{km/h} = 90\,\mathrm{km/h}$. Trochu neskôr si povieme aj o prípadoch, kedy auto, alebo vo všeobecnosti bod, sa pohybuje zložitejším spôsobom.
Príklad: Auto z predošlého príkladu sa pohybovalo rovnomerne tak, že v čase spustenia stopiek (to je okamih $t = 0$) malo súradnicu $x_0 = -30\,\mathrm{m}$ a jazdilo po ceste smerom doprava (teda v smere osi x). Akú súradnicu má po 8,3 sekundách takej jazdy? Nuž, bude to

$$x = -30\,\mathrm{m} + \underbrace{v_x t}_{s} = -30\,\mathrm{m} + 25 \cdot 8{,}3\,\mathrm{m} = 177{,}5\,\mathrm{m}$$

Všeobecné formuly pre rovnomerný priamočiary pohyb zapíšeme

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_x = \text{konšt} \qquad (8a)\\ x(t) &= x_0 + v_x t \qquad (8b)\end{aligned}}$$

To druhé je dobre známa formula závislosti súradnice od času pri rovnomernom priamočiarom pohybe. Na ľavej strane je funkcia $x(t)$, čo je nejaká hodnota, ktorá sa s časom mení. Na pravej sa o. i. vyskytuje konštanta $x_0 = x(0)$, teda poloha bodu v čase 0. Vystupuje tam aj ďalšia konštanta – rýchlosť v. Nezabudnime, že v prípade pohybu proti smeru zvolenej osi je táto rýchlosť záporná. Rovnice (8) nazveme ***rovnice kinematiky pre rovnomerný priamočiary pohyb*** pozdĺž osi x. Samozrejme, tú priamku, pozdĺž ktorej sa daný pohyb uskutočňuje, sme si mohli označiť aj inak ako x, napr. y alebo z a potom by sme v (8) zodpovedajúco prispôsobili označovanie.

2. PREDNÁŠKA (25. 2. 2022)

Všimnime si, že rovnica (8b) sa dá dostať aj priamo z definície okamžitej rýchlosti (4), ak si spomenieme na niektoré poznatky z integrálneho počtu: na ľavú i pravú stranu rovnice (4) uplatníme integrovanie. Máme na výber, či neurčitý (primitívna funkcia) alebo určitý integrál. Oba spôsoby sú možné. Zvoľme si ten prvý.

$$\int v_x \,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

Obe strany zintegrujeme ľahko: v_x na ľavej strane je teraz totiž konštanta, takže ju dáme pred integrál. Na pravej strane je aplikovaný neurčitý integrál cez t na funkciu derivovanú podľa t. Integrovanie a derivovanie podľa tej istej premennej sa navzájom vyrušia, takže dostaneme len samotné x a ešte nejakú integračnú konštantu. To vyrušenie sa integrovania a derivovania je vďaka zlomkovému zápisu derivácie veľmi názorne viditeľné – je to vykrátenie sa diferenciálov dt. Nejakú integračnú konštantu dostaneme pravdaže aj na ľavej strane. Takže zintegrovaním dostaneme

$$v_x t + C_1 = x(t) + C_2$$

alebo teda

$$v_x t + C = x(t) \tag{9}$$

kde $C = C_1 - C_2$. Ako určíme C? Zo znalosti ***začiatočnej podmienky*** (tu konkrétne polohy), teda že kde bol bod v čase 0. Bol v mieste $x(0) = x_0$. Preto [keď do rovnice (9) dosadíme za čas nulu] dostaneme

$$C = x_0$$

a tak z pomocnej rovnice (9) nachádzame vyjadrenie

$$x(t) = x_0 + v_x t$$

čo je známa veľmi jednoduchá závislosť súradnice od času pri rovnomernom priamočiarom pohybe, ku ktorej sme sa menej formálnou úvahou dopracovali už aj skôr. A dalo by sa ku nej prísť aj pomocu určitého integrálu, ale to tu vynecháme, aby sme sa týmito jednoduchými vecami nenudili.

1.4.2 Zrýchlenie

Zostaňme nateraz ešte síce pri priamočiarom pohybe, ale už sa neobmedzujme na rovnomerný. Nech sa teda rýchlosť auta môže meniť. Vtedy hovoríme, že auto zrýchľuje alebo spomaľuje. Aby sme tieto veci vedeli aj numericky počítať a programovať, treba im dať nejaký pevný matematický základ podobne, ako sme dali matematický základ pojmom poloha a rýchlosť. Poďme na to takto: V čase t nech rýchlosť je $v_x(t)$. V čase $t + \Delta t$ je vo všeobecnosti nejaká iná: $v_x(t) + \Delta v_x$, kde Δv_x je zmena rýchlosti (môže byť aj záporná). Čím väčšia zmena rýchlosti za ten kratučký časový úsek nastane, tým väčšie zrýchlenie alebo strmšie spomalenie auto má. Zrýchlenie označujeme písmenom a (*acceleratio, acceleration*). Teraz mu ešte pridáme aj index x a definujeme ho zhruba takto:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \tag{10}$$

Je to podobná formula, ako (1), ktorú sme použili pre rýchlosť. A aj táto formula je len hrubá, vyjadruje vlastne len priemerné zrýchlenie počas doby Δt. Aby sme presne vyjadrili *okamžité* zrýchlenie v čase t, opäť musíme použiť infinitezimálny počet:

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \tag{11}$$

Aj pre toto máme i stručnejšie zápisy:

$$\boxed{\boxed{a_x(t) = \dot{v}_x(t) \equiv \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}}} \tag{12}$$

Zrýchlenie bodu je teda deriváciou jeho rýchlosti podľa času. Táto definícia, ako uvidíme, bude platiť nielen pre priamočiare pohyby.

Všimnime si, že zrýchlenie teraz kombináciou predošlých definícií vieme vyjadriť aj ako druhú deriváciu súradnice:

$$\boxed{a_x(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}} \equiv \ddot{x} \tag{13}$$

Znamienko zrýchlenia môže opäť byť aj záporne. To najlepšie vidieť z podrobného zápisu (11), alebo aj z (10). Menovateľ Δt je tam vždy kladný (i keď môže byť veľmi malý).
Príklad: Nech $v_x(t) = -2{,}2\,\mathrm{m/s}$, $v_x(t+\Delta t) = -2{,}0\,\mathrm{m/s}$, $\Delta t = 0{,}1\,\mathrm{s}$. To je prípad, keď sa auto pohybuje proti smeru osi x („doľava“) a spomaľuje, lebo *veľkosť* jeho rýchlosti klesá. Zrýchlenie na tom úseku však vychádza $a_x = 2\,\mathrm{m/s^2}$, čiže kladné. Takže pozor! Znamienko zrýchlenia nám nehovorí o tom, či auto zvyšuje alebo znižuje veľkosť svojej rýchlosti. Toto znamienko totiž závisí od toho, ktorým smerom sme si zvolili kladný smer súradnicovej osi. Keby sme ho zvolili opačne, zrýchlenie by v tomto prípade vyšlo záporné.

A na okraj tohoto: čo je to *spomalenie*? Je to azda prípad, keď je zrýchlenie záporné? Nie. Spomalenie je, striktne povedané, dosť zbytočný pojem, lebo všetko je zahrnuté v pojme zrýchlenie (a v definícii orientácie súradnicovej osi). Ale predsa len, tento pojem býva vo vyjadrovaní sa užitočný, lebo ním zvyčajne chceme povedať, že teleso (auto, bod, ...) znižuje veľkosť svojej rýchlosti; napr. keď auto brzdí, tak spomaľuje, bez ohľadu na to, ktorým smerom sa pritom hýbe.

Rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb. Je to taký pohyb, pri ktorom je zrýchlenie telesa stále rovnaké, teda časovo nemenné. Rýchlosť telesa sa teda rovnomerne zvyšuje alebo znižuje. V aute to vieme precítiť aj fyzicky: je to také rozbiehanie sa auta, pri ktorom sme do sedadla tlačení nemenou silou. (Alebo brzdenie.) Ale to už zabiehame do dynamiky, ktorej sa budeme venovať až niekedy nabudúce. Poďme späť do kinematiky. Ak je zrýchlenie nemenné, tak podľa (10) sa rýchlosť za každý časový úsek Δt zmení o rovnakú hodnotu Δv_x. Preto podľa (10)

$$\Delta v_x = a_x\,\Delta t \tag{14}$$

a keď si z toho odmyslíme znaky Δ a indexy x, „vypadne“ nám z toho známy stredoškolský vzťah pre rovnomerne zrýchlený pohyb:

$$\boxed{v = at} \tag{15}$$

Ako z neho vidno, platí len pre taký pohyb, ktorý začína z nulovej rýchlosti, teda v čase 0 musí byť auto v pokoji. V čase t už nadobudne rýchlosť v. A akú dráhu za ten čas prejde?

$$s = v_{\text{priem}}\,t$$

kde v_{priem} je priemerná rýchlosť na danom úseku pohybu. Keďže ide o *rovnomerne* zrýchlený pohyb začínajúci z nulovej rýchlosti a na danom úseku dosahujúci rýchlosť v, tak priemerná je

$$v_{\text{priem}} = \frac{0 + v}{2} = \frac{1}{2}\,v = \frac{1}{2}\,at$$

Preto dráha bude

$$\boxed{s = \frac{1}{2}\,a\,t^2} \tag{16}$$

čo je ďalšia známa stredoškolská formulka. Nárokom sme do nej nepísali index x ani žiadne Δ, aby sme zvýraznili jej stredoškolskú jednoduchosť. Treba ju preto používať používať opatrne, lebo platí len ak sa teleso pohybuje z pokoja (z nulovej začiatočnej rýchlosti), alebo ak spomaľuje a počas doby t spomalí z rýchlosti v až na nulovú rýchlosť.

Radšej sa opäť teraz vrátime ku všeobecnejším formuláciám, lebo s tými stredoškolskými by sme nevystačili na popis rôznych pohybov, aké sa aj v počítačových hrách (a aj v skutočnom svete) vyskytujú. Zoberme definičnú formulu (12) a z nej skúsme vyjadriť rýchlosť. Opäť máme na výber, či to spravíme pomocou výpočtu primitívnej funkcie a následného dourčenia integračnej konštanty, alebo či použijeme určitý integrál. Vyberme si tentoraz druhú možnosť. Zoberieme teda spomenutú formulku a obe jej strany zintegrujeme cez čas od 0 po t. Čas ako integračnú premennú pritom označíme čiarkou, aby sme ho odlíšili od hornej hranice integrovania:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^t a_x(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t \frac{\mathrm{d}v_x(t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t'$$

Teraz sa zaoberáme rovnomerne zrýchleným pohybom, takže zrýchlenie tu od času nebude závisieť a môžeme ho vybrať pre integrál. Pravú stranu zintegrujeme triviálne. Pre obe strany použijeme Leibnitzov-Newtonov vzorec. Dostaneme

$$a_x\,t = v_x(t) - v_x(0)$$

z čoho vyplýva

$$\boxed{v_x(t) = v_x(0) + a_x t} \tag{17}$$

To je už na prvý pohľad všeobecnejšie vyjadrenie menenia sa rýchlosti, než stredoškolská formula (15). A ako sa pri rovnomerne zrýchlenom priamočiarom pohybe mení súradnica bodu (auta, lietadla, ...), teda x? Aby sme to zistili, zoberme si niektorú všeobecnú formulu, kde nám to x nejako vhodne vystupuje. Najlepšie formulu (4) pre definíciu rýchlosti:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Jej zintegrovaním dostaneme

$$\int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x(t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\boxed{\int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' = x(t) - x(0)}} \tag{18}$$

To zarámované za šípkou je všeobecne platné pre akokoľvek zrýchlený (teda nielen rovnomerne) alebo nezrýchlený priamočiary pohyb. Teraz sa zaoberáme rovnomerne zrýchleným a preň dosadíme za rýchlosť podľa (17). Potom vieme zintegrovať aj ľavú stranu a dostávame

$$v_x(0)\,t + \frac{1}{2}\,a_x\,t^2 = x(t) - x(0)$$

čo po prehodení jedného člena dáva

$$\boxed{x(t) = x(0) + v_x(0)\,t + \frac{1}{2}a_x t^2} \tag{19}$$

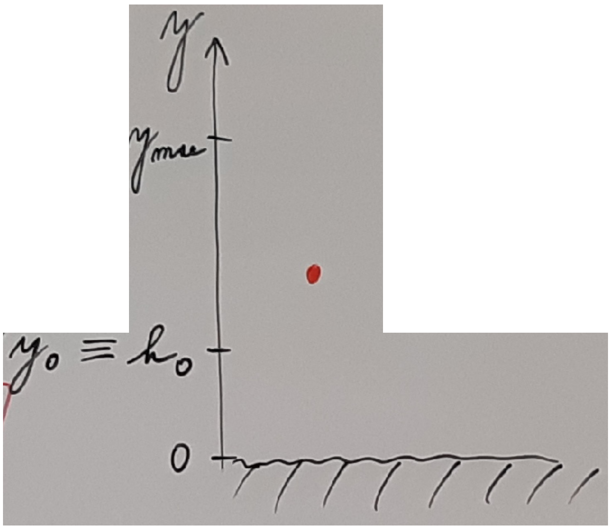
Je to výsledok výrazne širšie použiteľný, než stredoškolská formula $s = at^2/2$ pre dráhu. Tá sa pravdaže dá z tohoto všeobecnejšieho vzťahu odvodiť.

Takže zhrňme: pre rovnomerný priamočiary pohyb sa rýchlosť a súradnica menia podľa (8a), (8b) a pre rovnomerne zrýchlený priamočiary podľa (17), (19). Samozrejme, že namiesto osi x by sme mohli používať aj os y alebo z a teda aj vo formulách písať namiesto x iné písmenko.

1.4.3 Príklad: Voľný pád telesa pri zanedbateľnom odpore vzduchu

Je to príklad na priamočiary rovnomerne zrýchlený pohyb.

Kameň padá z výšky h. Za aký čas a akou rýchlosťou dopadne? Vyčíslite pre $h = 30\,\mathrm{m}$. Odpor vzduchu zanedbajte.



Obr. 3: Obrázok ku zvislému vrhu. Červený krúžok znázorňuje pohybujúci sa kameň. Výškovú súradnicu sme si označili y.

Riešenie: V absencii odporu vzduchu kameň padá rovnomene zrýchlene so zrýchlením rovným tiažovému zrýchleniu: $a = g$. To je v našich zemepisných šírkach okolo $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Na vyriešenie tejto úlohy stačí použiť stredoškolské formulky:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \tag{20}$$

Rýchlosť dopadu určíme takto:

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

teda

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}} \tag{21}$$

čo je veľmi známa formula. *Nakoniec* dosaďme aj číselné hodnoty:

$$t = \sqrt{\frac{2\,.\,30\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} \doteq 2{,}47\,\mathrm{s}$$

$$v = \sqrt{2\,.\,9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,30\,\mathrm{m}} \doteq 24{,}3\,\mathrm{m/s}$$

1.4.4 Príklad: Zvislý vrh pri zanedbateľnom odpore vzduchu

Aj toto je príklad na priamočiary rovnomerne zrýchlený pohyb.

Vyhodíme kameň do výšky rýchlosťou $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, pričom ho z ruky vypustíme vo výške $h_0 = 2\,\mathrm{m}$. Ako vysoko vyletí, za aký čas sa tam dostane a za aký čas a akou rýchlosťou dopadne na zem? Odpor vzduchu zanedbajte.

(A opäť, a nielen tento príklad, treba riešiť všeobecne a až na koniec dosadzovať číselné hodnoty.)

Riešenie: Táto úloha sa od predošlej líši len tým, že na začiatku pohybu, ktorému priradíme čas $t = 0$, má kameň nenulovú rýchlosť. Tá môže smerovať tak nahor ako aj nadol. Tu uvažujeme vrh nahor. Kameň bude spomaľovať a nakoniec začne padať k zemi. Vieme, že je to kvôli gravitácii, kvôli zemskej príťažlivosti. Do týchto vecí však teraz nebudeme zabiehať, lebo preberáme časť *Kinematika*, a v kinematike sa nezaoberáme silami, len počítame, ako sa pri pohybe menia súradnice a rýchlosti. Takže opäť ako daný fakt prijmeme, že ide o pohyb s konštantným (nemenným) zrýchlením o veľkosti g. Na riešenie tentoraz nebude stačiť len jednoduché použitie stredoškolských formuliek (15) a (16). Namiesto nich radšej siahneme po všeobecných rovniciach (17) a (19) pre rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb. Len ich prispôsobime teraz počítanej úlohe. V nej namiesto osi x používame os y, ale to je len nepodstatná zmena označenia. Tiažové[1] zrýchlenie smeruje dole, čiže proti nami zvolenej orientácii osi y (obr. 3), preto máme

$$a_y = -g \doteq -9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

a teda

$$v_y(t) = v_y(0) + a_y t\,, \qquad y(t) = y(0) + v_y(0)\,t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{22}$$

a po ďalšom prispôsobení

$$\boxed{\begin{aligned} v_y(t) &= v_0 - gt & (23\text{a})\\ y(t) &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 & (23\text{b})\end{aligned}}$$

1. V okamihu dosiahnutia maximálnej výšky, označme ho t_m, je rýchlosť kameňa nulová. Preto z (23a) dostávame

$$0 = v_0 - gt_\mathrm{m} \;\Rightarrow\; \boxed{t_\mathrm{m} = \frac{v_0}{g}} \doteq 1{,}019\,\mathrm{s} \tag{24}$$

2. Najvyššia dosiahnutá výška je

$$y_\mathrm{max} = y(t_\mathrm{m}) \;=\; y_0 + v_0 t_\mathrm{m} - \frac{1}{2}gt_\mathrm{m}^2 \;=\; y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{2g} \tag{25}$$

   teda

$$\boxed{y_\mathrm{max} = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}} \doteq 7{,}1\,\mathrm{m} \tag{26}$$

3. V okamihu dopadu, označme ho t_D, je výšková súradnica kameňa nulová. Preto z (23b) dostávame

$$0 = y_0 + v_0 t_\mathrm{D} - \frac{1}{2}gt_\mathrm{D}^2 \tag{27}$$

   To je nanešťastie kvadratická rovnica, čiže komplikácia. Ale zvládnuteľná. Upravme a prepíšme tú rovnicu do praktickejšieho tvaru

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t - y_0 = 0$$

   Dva jej korene sú

$$t_\pm = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g}$$

   Čas dopadu musí byť kladný a preto (keď ešte rozdelíme výraz na dva sčítance a g v druhom z nich vsunieme pod odmocninu s nutnou úpravou na g^2)

$$t_\mathrm{D} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 + 2gy_0}{g^2}}$$

   Po finálnej úprave dostávame výsledok

$$\boxed{t_\mathrm{D} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2y_0}{g}}} \doteq 2{,}22\,\mathrm{s} \tag{28}$$

   Keď sa nad tým zamyslíme, prídeme na to, že tento výsledok sme mohli dostať aj bez riešenia kvadratickej rovnice: stačilo by sčítať už známy čas potrebný na výstup nahor (t_m) s časom potrebným na pád z najvyššej dosiahnutej výšky, tiež už známej. Tento druhý časový interval sa dá jednoducho určiť zo stredoškolského vzorca (20), len tam namiesto h treba dosadiť formulu (26) pre naše y_max.

[1]Najmä kvôli zemskej rotácii to nie je úplne presne to isté ako gravitačné zrýchlenie.

4. Nakoniec ešte vypočítame, akou rýchlosťou kameň dopadne. Vyslovene systematickým postupom by sme to určili pomocou (23a):
$$v_{\mathrm{D}y} = v_y(t_\mathrm{D}) = v_0 - gt_\mathrm{D} \tag{29}$$
Za t_D by sme dosadili vyjadrenie (28) a po zjednodušení by sme dostali výsledok (záporný, lebo ním chceme vyjadriť aj smer rýchlosti). Ale podobne ako v predošlom bode, ku tomu istému výsledku sa dá prísť jednoduchšie na základe úvahy: kameň predsa padá z výšky y_max. Na určenie dopadovej rýchlosti preto stačí použiť stredoškolskú formulku (21), čiže
$$v_{\mathrm{D}y} = -\sqrt{2gy_\mathrm{max}} \tag{30}$$
čo s použitím (26) dáva výsledok
$$\boxed{v_{\mathrm{D}y} = -\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}} = -11{,}8\,\mathrm{m/s} \tag{31}$$

Ako vidíme, systematický postup býva niekedy zdĺhavejší a na škodu fyzikálneho myslenia. Aj tak však treba ovládať i systematické postupy, lebo neraz sú jedinou praktickou možnosťou.

Všimnime si, že pri riešení sme vystačili s jednou priestorovou súradnicou, teda s jednou priestorovou osou (y). Celý popis sme teda spravili v ***jednorozmernom priestore***. Stručne sa povie, že v **1D** (*one-dimensional space*).

3. prednáška (4. 3. 2022)

1.4.5 Nerovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb

V nadpise tohto odseku sú tými najdôležitejšími slovami slová *nerovnomerne zrýchlený*. Stručne si o tomto pohybe povieme pre prípad, keď sa teleso alebo hmotný bod pohybujú priamočiaro (lebo o krivočiarom pohybe sme zatiaľ nehovorili).

Priamku, pozdĺž ktorej sa uvažovaný nerovnomerne zrýchlený pohyb deje, si označme ako os x. Nerovnomerne zrýchlený pohyb (tu pozdĺž osi x) je taký, pri ktorom sa zrýchlenie mení v čase, teda
$$\boxed{a_x = a_x(t)} \tag{32}$$
Príkladov takého pohybu je obrovské množstvo, lebo takmer žiaden zrýchlený pohyb v skutočných situáciách (a ani v počítačových hrách) nie je rovnomerne zrýchlený. Prípadne je rovnomerne zrýchlený len na nejakom pomerne krátkom časovom úseku, ale neskôr sa zrýchlenie zmení, čiže je nejakou *funkciou* času (závisí od času). Napr. ak kameň padá, tak počas pádu je jeho zrýchlenie síce konštantné, veľkosťou okolo $9{,}81\,\mathrm{m/s}$, ale v okamihu dopadu sa rýchlosť prudko zmení (klesne na nulu), čiže vtedy sa aj zrýchlenie takmer skokovo zmení (jeho veľkosť narastie, lebo zmena rýchlosti je veľká) a nakoniec hodnota zrýchlenia klesne na nulu (keď je už kameň nehybne položený na zemi).

Iný príklad na nerovnomerne zrýchlený pohyb je rozbiehajúce sa auto. Zo začiatku sa síce môže rozbiehať s konštantným zrýchlením, ale tento rovnomerne zrýchlený pohyb trvá len pomerne krátky čas. Je to zrejmé, lebo auto nedokáže do nekonečna rovnomerne zrýchľovať; to by muselo svoju rýchlosť zvyšovať do nekonečných hodnôt, čo sa samozrejme nedá.

Tento odsek uvádzame najmä preto, že študenti majú často tendenciu používať formulky typu
$$v = at\,, \qquad s = \frac{1}{2}\,a\,t^2$$
aj pre nerovnomerne zrýchlený pohyb. To je zle! Tieto formulky sú použiteľné len pre rovnomerne zrýchlený pohyb! A dokonca neplatia ani naoko vylepšené formulky
$$\cancel{v = a(t)t}\,, \qquad \xcancel{s = \frac{1}{2}a(t)t^2}$$
a ani všeobecnejšie vyzerajúce formuly
$$\xcancel{v_x(t) = v_x(0) + a_x(t)t}\,, \qquad \xcancel{x(t) = x(0) + v_x(0)\,t + \frac{1}{2}a_x(t)t^2} \tag{33}$$

Čo teda vlastne platí pre nerovnomerne zrýchlený pohyb? Nuž, platí všeobecná formula (12) definujúca okamžité zrýchlenie, a aj všeobecná formula (4) definujúca okamžitú rýchlosť, teda vyjadrenia

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,, \qquad v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{34}$$

Z nich dostávame

$$\boxed{v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t')\,\mathrm{d}t'}\,, \qquad \boxed{x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t'} \tag{35}$$

Toto sú správne náhrady za chybné formuly (33). Formuly (35) sú správne pre akýkoľvek priamočiary pohyb pozdĺž osi x, teda i pre nerovnomerne zrýchlený. Ak by sme chceli ešte pokračovať s vyjadrením $x(t)$, dosadili by sme za $v_x(t')$, čím by sme dostali dvojný integrál. A ak by sme chceli dostať niečo konkrétnejšie, museli by sme poznať priebeh funkcie $v_x(t)$, aby sme mohli integrály vystupujpce v (35) spočítať.

1.5 Kinematika krivočiareho pohybu

Na popis krivočiareho pohybu už nutne budeme potrebovať viac karteziánskych súradníc; aspoň dve. Špeciálnym prípadom krivočiareho pohybu je priamočiary pohyb. V našich úvahách v práve začínajúcej sa časti teda bude obsiahnuté aj všetko, čo bolo v časti 1.4 o priamočiarom pohybe. Teraz sa však naučíme taký pohyb popísať, i keby neprebiehal rovnobežne s niektoru súradnicovou osou.

Ak budeme hovoriť o pohybe, ktorý prebieha v rovine, na jeho popis pri vhodnej voľbe súradnicovej sústavy sú potrebné len dve súradnice; povedzme že x, y. Preto pohyb v rovine budeme občas pre stručnosť nazývať pohybom v 2D. A ak pôjde o pohyb, ktorý sa nezmestí ani do roviny, teda že na jeho popis sú nutné tri súradnice (x, y, z), budeme hovoriť o pohybe v priestore, alebo stručnejšie o pohybe v 3D.

1.5.1 Trajektória a dráha

Konečne sme sa dostali k tomu, aby sme presne definovali, čo budeme mať na mysli pod týmito dvomi pojmami. ***Trajektória*** pohybu je množina bodov v priestore, cez ktoré bod pri svojom pohybe prechádza. Je to teda vo všeobecnosti nejaká krivka. Najjednoduchším príkladom trajektórie je priamka alebo jej časť. Vtedy by šlo o priamočiary pohyb. ***Dráha*** je dĺžka trajektórie. Je to teda veličina, ktorá sa meria v dĺžkových jednotkách a je vždy nezáporná. Značí sa najčastejšie s.

Na záver tohoto vysvetlenia treba dodať, že nie všade pojmy trajektória a dráha odlišujú. Potom majú problém, že niekedy dráhou myslia krivku ako množinu bodov a inokedy jej dĺžku. Ale z kontextu sa dá usúdiť, čo majú na mysli.

1.5.2 Vodorovný vrh

Vodorovný vrh je prototypický jednoduchý príklad, na ktorom si ilustrujeme rozklad pohybu na dve zložky: vodorovnú (horizontálnu) a zvislú (vertikálnu).

Príklad: Obrancovia hradu vrhnú z jeho veže kameň vodorovným smerom rýchlosťou $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$. Výška okna, z ktorej kameň vrhajú, je $h = 35\,\mathrm{m}$. Terén pod vežou v smere letu kameňa je vodorovný. Ako ďaleko kameň doletí a za aký čas dopadne? Odpor vzduchu považujte za zanedbateľný.

(Ako vždy, treba všetko riešiť najprv všeobecne a až na koniec dosadiť číselné hodnoty.)

Riešenie: (Stručne; na prednáške som o tom hovoril podrobne. Ak stihnem, tak neskôr sem nejaké podrobnosti ešte dopíšem a dokreslím.)
Pohyb kameňa si predstavíme rozložený na vodorovnú a zvislú zložku. Pohyb vo vodorovnom smere je má konštantnú rýchlosť (lebo odpor vzduchu nepôsobí). Pohyb vo zvislom smere je rovnomerne zrýchlený smerom k zemi, presne tak, ako pri voľnom páde. Vzdialenosť od úpätia veže, do ktorej kameň dopadne, teda je $\ell = v_0 t_\mathrm{D}$, kde t_D je doba letu kameňa. Tá je presne taká, akoby kameň len voľne padal popri veži k zemi. V časti 1.4.3 sme sa naučili, že

to je

$$t_D = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{36}$$

čo číselne vychádza okolo 2,47 s. Nakoniec z formuly $\ell = v_0 t_D$ dostávame aj vodorovný dolet kameňa:

$$\ell = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \doteq 49{,}5\,\mathrm{m} \tag{37}$$

1.5.3 Šikmý vrh

Tento príklad, ktorý je zovšeobecnením predošlého, vyriešime pomocou použitia súradnicovej sústavy. Keďže ide o pohyb po zakrivenej trajektórii, nevystačíme s jednou súradnicou.

Príklad: Kameň je vrhnutý pod uhlom α voči terénu rýchlosťou veľkosti v_0. Predokladajte, že je vrhnutý z úrovne zeme (z výšky nula, vyjadrené formálne). Určte maximálnu dosiahnutú výšku počas letu, dobu letu kameňa a vzdialenosť, do ktorej dopadne. Aj tentoraz predpokladajte, že odpor vzduchu je zanedbateľný.

Riešenie: (Tiež len stručne; na prednáške som o tom hovoril podrobne. Ak stihnem, tak neskôr aj sem nejaké podrobnosti ešte dopíšem a dokreslím.)
Okrem ℓ a t_D treba vypočítať aj maximálnu dosiahnutú výšku. Ako vidno, na to, aby sme plne popísali, ako prebieha pohyb bodu v rovine, pre konkrétnosť nech je to xy, potrebujeme poznať časové závislosti

$$\boxed{\boxed{x(t),\ y(t),\ v_x(t),\ v_y(t)}} \tag{38}$$

a príslušné začiatočné hodnoty (zvyčajne pre čas $t = 0$) týchto karteziánskych súradníc a karteziánskych zložiek rýchlostí. Pohyb kameňa si pri šikmom vrhu opäť rozložíme na vodorovnú a zvislú zložku. Vo vodorovnom smere sa kameň pohybuje konštantnou rýchlosťou. Vo zvislom smere tak, akoby šlo o zvislý vrh z príkladu v časti 1.4.4. Začiatočnú rýchlosť si potrebujeme rozložiť na vodorovnú (x-ovú a zvislú (y-ovú) zložku:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha\,, \qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha \tag{39}$$

Rovnice pre vodorovný a zvislý pohyb kameňa teda môžeme napísať takto:

$$v_x(t) = v_{0x} = \text{konšt} \tag{40a}$$
$$x(t) = v_{0x}\,t \tag{40b}$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t \tag{40c}$$
$$y(t) = v_{0y}\,t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{40d}$$

Rovnice pre zvislý (vertikálny) pohyb sú presne také, ako rovnice (17) a (19). Musia také byť, lebo vertikálna zložka pohybu pri šikmom vrhu je rovnomerne zrýchleným pohybom. Len sme museli použiť správnu začiatočnú rýchlosť (v_{0y} a samozrejme písať indexy y, nie x. Ešte poznamenajme, že

$$a_y = -g \doteq -9{,}81\,\mathrm{m/s} \tag{41}$$

Začneme s určovaním najvyššej dosiahnutej výšky; označme si ju $y_{\max}$. je dosiahnutá v okamihu, keď je zvislá zložka rýchlosti nulová. Preto z (40c) dostávame

$$0 = v_{0y} - g t_m \;\Rightarrow\; t_m = \frac{v_{0y}}{g} \tag{42}$$

kde t_m je čas, za ktorý bola dosiahnutá maximálna výška. Maximálnu výšku teraz už môžeme výpočítať použitím (40d):

$$\boxed{y_{\max} = y(t_m) = \frac{1}{2} g t_m^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}} \tag{43}$$

Pokračujme určením doby letu kameňa. Kameň letí od času 0 až po okamih dopadu, ktorý si opäť označme t_D. Preto aj doba letu je t_D. V okamihu dopadu kameňa je jeho výška nulová. Preto použitím rovnice (40d) dostávame

$$0 = v_{0y} t_\mathrm{D} - \frac{1}{2} g t_\mathrm{D}^2$$

čo sa dá napísať v tvare

$$t_\mathrm{D} \left(v_{0y} - \frac{1}{2} g t_\mathrm{D} \right) = 0$$

Súčin dvoch výrazov je nulový, ak aspoň jeden z nich je nulový. Prípad $t_\mathrm{D} = 0$ je síce matematicky správnym riešením, ale fyzikálne nesprávnym, lebo kameňu nejaký čas trvá, kým dopadne. Preto

$$v_{0y} - \frac{1}{2} g t_\mathrm{D} = 0$$

a teda

$$\boxed{t_\mathrm{D} = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}} \tag{44}$$

čo je presne dvojnásobok času potrebného na výstup kameňa do maximálnej výšky. Nakoniec ešte určme, ako ďaleko kameň doletel. V súlade s (40b) to je

$$\boxed{\ell = x(t_\mathrm{D}) = v_{0x} t_\mathrm{D} = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \tag{45}$$

1.5.4 Rovnomerné a nerovnomerné pohyby, súradnice

Pohyb po hocijakej (aj zakrivenej trajektórii) nazývame ***rovnomerný***, ak pritom je ***veľkosť rýchlosti nemenná*** (konštantná). Ak tomu tak nie je, ide o nerovnomerný pohyb. Takže pozor! Pojem rovnomerný pohyb si netreba spájať len s priamočiarym. ***Veľkosť rýchlosti*** pre pohyb v 1D (t. j. priamočiary pozdĺž jednej osi, nech je to x) je

$$v = |v_x| \tag{46}$$

(a môže to samozrejme byť časovo premenná veličina). Ak ide o pohyb v 2D, tak preň veľkosť rýchlosti je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{47}$$

Pre pohyb v priestore potrebujeme aj tretiu súradnicu; bude ňou z. Polohu bodu v priestore teda popíšeme trojicou karteziánskych súradníc

$$(x, y, z) \tag{48}$$

Jeho rýchlosť trojicou čísiel

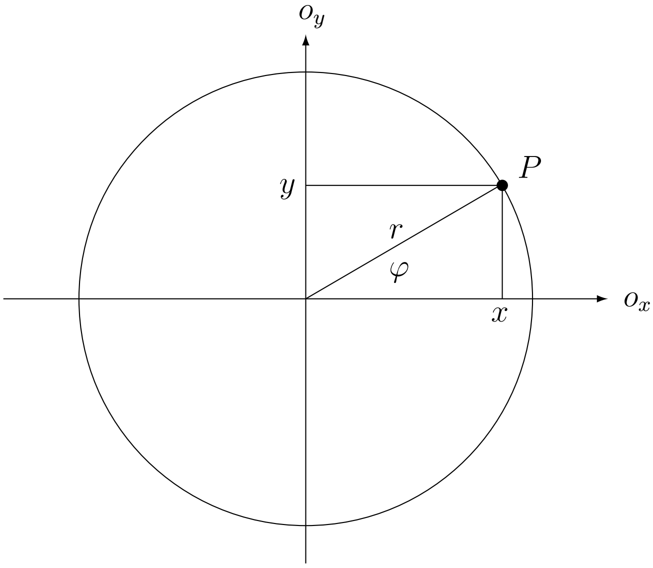
$$(v_x, v_y, v_z) \tag{49}$$

a zrýchlenie trojicou

$$(a_x, a_y, a_z) \tag{50}$$

1.5.5 Pohyb po kružnici

S pohybom po kružnici sa stretávame aj vo fyzickom svete a aj v počítačových hrách. Príkladom je jazda auta po kruhovom objazde alebo obeh družice okolo Zeme a určite by sme našli aj ďalšie príklady. Jedným dôležitým, na ktorý netreba zabúdať, je pohyb závažia kyvadlových hodín. Nejde síce o pohyb po celej kružnici, len po jej časti, ale aj to je pohyb po kružnici a aj tomuto pohybu chceme porozumieť a byť schopní ho popísať. A ešte ďalším príkladom je pohyb kamienka, ktorý je zaseknutý v dezéne pneumatiky auta.



Obr. 4: Bod na kružnici; polárne súradnice r, φ. Kladný smer uhla φ je konvenčne proti smeru pohybových ručičiek – tak, ako sa v súťažiach behá na štadiónoch alebo jazdí na kruhových objazdoch.

Poloha a uhlová súradnica bodu na kružnici. Kružnica je krivka, ktorá sa dá umiestniť do roviny. Túto rovinu si môžeme stotožniť s rovinou xy a potom pohyb po kružnici bude pohybom len v tomto 2-rozmernom priestore. Tak to aj spravíme a na dôvažok umiestnime stred súradnicovej sústavy do stredu kružnice.

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi \tag{51}$$

Polomer je konštantný (s časom sa nemení).

Rýchlosť a uhlová rýchlosť bodu na kružnici.

$$v_x = -r\sin\varphi\;\dot\varphi\,, \quad v_y = r\cos\varphi\;\dot\varphi$$

Derivácia bežnej súradnice podľa času je (bežnou) rýchlosťou. Na popis otáčavého pohybu zavádzame ešte aj *uhlovú rýchlosť*, ktorá je deriváciou uhlovej súradnice $\varphi(t)$ podľa času:

$$\boxed{\omega(t) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \equiv \dot\varphi} \tag{52}$$

Pre uhlovú rýchlosť sme teda zaviedli symbol ω a zdôraznili sme, že vo všeobecnosti môže závisieť od času. Podľa tejto definície môže byť aj záporná. Neskôr si ukážeme, že uhlová rýchlosť sa dá vo všeobecnosti rozumieť ako vektor a že to, čo sme zaviedli definíciou (52), je z-ová zložka toho vektora. V najjednoduchšom (špeciálnom) prípade uhlová rýchlosť od času nezávisí. Vtedy povieme, že bod vykonáva *rovnomerný pohyb po kružnici.* Ak uhlová rýchlosť od času závisí, ide o nerovnomerný pohyb. Teraz vidíme, že vyššie odvodené vzťahy pre karteziánske zložky (bežnej, v tomto kontexte nazývanej aj ***obvodovej***) rýchlosti je praktické vyjadriť pomocou uhlovej:

$$v_x = -\omega\, r\sin\varphi = -\omega y\,, \quad v_y = \omega\, r\cos\varphi = \omega x \tag{53}$$

Veľkosť obvodovej rýchlosti pri pohybe po kružnici je

$$v = \sqrt{|v_x|^2 + |v_y|^2} = \sqrt{\omega^2 y^2 + \omega^2 x^2}\,, \quad \text{t. j.} \quad v = |\omega| r \tag{54}$$

Neraz je praktickejšie napísať vzťah umožňujúci vyjadriť aj smer otáčania. Tak napíšeme

$$\boxed{\boxed{v_\varphi = \omega r}} \tag{55}$$

kde v_φ je obvodová rýchlosť, ktorá môže mať aj zápornú hodnotu, a to pre prípad pohybu v zápornom smere (to je pre nás smer pohybových ručičiek).

Ešte sa chvíľu pozdržme, lebo treba zdôrazniť, že: Ak by šlo o rovnomerný pohyb po kružnici, tak *veľkosť* jeho rýchlosti, v, by sa nemenila. Ale karteziánske zložky rýchlosti by sa aj pri takom pohybe menili, ako vidíme z vyjadrení kúsok vyššie. Takže ***rýchlosť*** v zmysle vektora ***sa i pri rovnomernom pohybe po kružnici mení***. A ak sa rýchlosť bodu akokoľvek mení, je s tým spojené nenulové zrýchlenie. Poďme teraz tieto veci preskúmať bližšie pre pohyb po kružnici, opäť všeobecný, teda aj nerovnomerný.

Celkové zrýchlenie bodu na kružnici. Karteziánske zložky (celkového) zrýchlenia sú

$$a_x = \dot{v}_x\,, \quad a_y = \dot{v}_y \tag{56}$$

Zderivovaním (53) podľa času dostávame

$$\begin{aligned} a_x &= -\dot{\omega} y - \omega \dot{y} = -\dot{\omega} y - \omega^2 x = -\dot{\omega} r \sin\varphi - \omega^2 r \cos\varphi = (-\dot{\omega}\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi) r \\ a_y &= \ \ \dot{\omega} x + \omega \dot{x} = \ \ \dot{\omega} x - \omega^2 y = \ \ \dot{\omega} r \cos\varphi - \omega^2 r \sin\varphi = (\ \ \dot{\omega}\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi) r \end{aligned}$$

4. prednáška (11. 3. 2022)

V zásade tým máme zrýchlenie ako vektor pomocou zložiek vybavené. Keby sme však ostali len pri týchto karteziánskych zložkách, bolo by to veľmi formálne a často i nepraktické (ale pozor, napriek tomu neraz potrebné a praktické!) a prišli by sme o veľmi názorné geometrické predstavy o zrýchlení pri pohybe po kružnici. Tak poďme ďalej.

Uhlové zrýchlenie bodu na kružnici. Obdobne ako pri posuvnom pohybe je derivácia rýchlosti zrýchlením, tak pri otáčavom pohybe je derivácia uhlovej rýchlosti *uhlovým zrýchlením*:

$$\boxed{\boxed{\varepsilon \overset{\text{def.}}{=} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \tag{57}$$

Namiesto symbolu ε sa často používa aj symbol α, ale na Slovensku sme zvyknutejší na to prvé. Základnou jednotkou pre vyjadrenie uhlového zrýchlenia je radián za sekundu^2 (rad/s^2).

Veľkosť celkového zrýchlenia. Druhá mocnina veľkosti celkového zrýchlenia pri pohybe po kružnici bude

$$\begin{aligned} a^2 &= a_x^2 + a_y^2 = (-\varepsilon\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi)^2 r^2 + (\varepsilon\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi)^2 r^2 = \\ &= \left[\varepsilon^2\sin^2\varphi + 2\varepsilon\omega^2\sin\varphi\cos\varphi + \omega^4\cos^2\varphi \right. \\ &\quad \left. + \,\varepsilon^2\cos^2\varphi - 2\varepsilon\omega^2\cos\varphi\sin\varphi + \omega^4\sin^2\varphi\right] r^2 \end{aligned}$$

Vidíme, že niektoré členy vypadnú, iné sa zjednodušia a pre samotnú veľkosť celkového zrýchlenia dostávame

$$\boxed{a = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\, r} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2} \tag{58}$$

Tie rôzne vyjadrenia sú samozrejme navzájom rovnocenné, ale niekedy sa môže lepšie hodiť jedno, inokedy druhé alebo tretie. Vidíme tam dva príspevky, ktoré sa však neskladajú jednoduchým súčtom, ale podľa Pytagorovej vety. Neskôr si vysvetlíme, prečo tomu tak je.

Vzťahy medzi obvodovými a uhlovými veličinami pri pohybe po kružnici. Zo vzťahu (55) teraz vyjadrime uhlovú rýchlosť

$$\omega(t) = \frac{v_\varphi(t)}{r} \tag{59}$$

a použime túto formulku, kde explicitne vidieť polomer, na vyjadrenie uhlového zrýchlenia ε. To je definované ako derivácia uhlovej rýchlosti podľa času a preto dostávame

$$\varepsilon = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{60}$$

Na pravej strane vystupuje derivácia obvodovej rýchlosti podľa času. Je to teda nejaké zrýchlenie, nazývame ho *obvodové zrýchlenie* a budeme ho značiť $a_{||}$:

$$\boxed{a_{||} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}t}} \tag{61}$$

Z jeho definície vidíme, že je to vlastne akési zrýchlenie v najbežnejšom (intuitívnom) zmysle, lebo je nenulové práve vtedy, keď sa mení veľkosť rýchlosti. Je teda rovnobežné (buď súhlasne alebo nesúhlasne) so smerom rýchlosti a preto sme mu dali tie $||$. Len pozor – podľa našej definície môže byť aj záporné! Všeobecnejšie sa nazýva *tangenciálne*, lebo v každom okamihu má smer dotyčnice (tangenciály) ku trajektórii pohybu (tu ku kružnici); ešte si o tom neskôr povieme. Pri pohybe po kružnici (a aj o hocijakej uzavretej krivke) je však vhodný aj pojem obvodové zrýchlenie. Toto zrýchlenie teraz skombinovaním (60) a (61) vieme zapísať takto:

$$\boxed{\boxed{a_{||} = \varepsilon r}} \tag{62}$$

Dostredivé zrýchlenie pri pohybe po kružnici. Zamerajme sa teraz na druhý člen pod odmocninou vyjadrenia (58) pre zrýchlenie a označme ho $a_\perp$. (Očividne to má v SI sústave jednotky $\mathrm{m/s^2}$, takže sa hodí to označiť nejakým á-čkom.)

$$\boxed{\boxed{a_\perp = \omega^2\, r = \frac{v^2}{r} = \omega\, v_\varphi}} \tag{63}$$

Je to príspevok (do celkového zrýchlenia), ktorý by bol nenulový i vtedy, keby sa uhlové zrýchlenie nemenilo, teda keby bolo $a_{||} = \varepsilon r \equiv 0$. Vidíme teda, že celkové zrýchlenie bodu by bolo nenulové, i keby sa pohyboval stále rovnako veľkou rýchlosťou! To nie je príliš v súlade s intuíciou, ale je to tak. Toto celkové zrýchlenie by vtedy malo veľkosť rovnú práve príspevku $a_\perp$. Ide o dobre známe *dostredivé zrýchlenie*. Všeobecnejšie sa nazýva *normálové*. Už aspoň intuitívne rozumieme, že smeruje do stredu kružnice a je kolmé (kolmica = normála) na obvodové zrýchlenie. Preto sme á-čku v tomto prípade pridali index $\perp$. A všimnime si, že podľa svojej definície musí hodnota $a_\perp$ byť nezáporná (na rozdiel od $a_{||}$).

Veľkosť celkového zrýchlenia stručne. Zhrnutím vyššie uvedených poznatkov nachádzame stručné vyjadrenie veľkosti celkového zrýchlenia:

$$\boxed{\boxed{a = \sqrt{a_{||}^2 + a_\perp^2}}} \tag{64}$$

Keďže zrýchlenie je vektor (i keď tu teraz z neho píšeme len veľkosť), tak aj obvodovému a dostredivému zrýchleniu bude treba priradiť vektory, nielen veľkosti. A keďže z práve napísanej formuly vidíme, že veľkosť celkového zrýchlenia sa počíta Pytagorovou vetou, znamená to, že obvodové a dostredivé zrýchlenie sú navzájom kolmé vektory. Keď sa vektory naučíme používať, dôsledne a priamo sa o týchto veciach presvedčíme.

Rovnomerný pohyb po kružnici. Bod obehne danú kružnicu za čas, ktorý nazývame *perióda* (daného pohybu) a označujeme ho zvyčajne T. Periódu vypočítame ľahko: je to dráha deleno rýchlosť, teda

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{|\omega| r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{|\omega|}} \tag{65}$$

[Použili sme vyjadrenie (55), teda $v = |\omega| r$ platné dokonca aj pre nerovnomerný pohyb.] Počet obehov za jednotku času sa nazýva frekvencia; tú značme f. Keďže jeden obeh je vykonaný za čas T, tak frekvencia rovnomerného pohybu po kružnici je

$$f = \frac{1}{T} \tag{66}$$

Jej základnou jednotkou v SI sústave je s^{-1} a túto jednotku, ak sa týka takejto bežnej frekvencie, nazývame aj jeden herz a značí sa Hz. Veľkosť uhlovej rýchlosti, $|\omega|$, sa v kontexte rovnomerného pohybu po kružnici nazýva ***uhlová frekvencia*** alebo aj *kruhová frekvencia*. Platia pre ňu vzťahy

$$|\omega| = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{67}$$

Slovo frekvencia sa pre veličinu $2\pi/T$ hodí, lebo vyjadruje počet obehnutých radiánov za jednotku času. Keďže uhlová frekvencia je vlastne len zvláštnym prípadom uhlovej rýchlosti, musí mať aj takú istú základnú jednotku, a tou je rad/s.

2 Vektory a operácie s nimi

Aby sme pohybu po kružnici a vôbec pohybu po krivočiarej trajektórii a mnohým ďalším veciam lepšie rozumeli aj geometricky a aby sme ich dokázali matematicky popísať pomocou stručných prehľadných formúl, treba začať používať pojem *vektor*. Doteraz sme používali len *zložky* vektorov; napr. x, y sú zložky polohového vektora v rovine xy. Polohu bodu v priestore vyjadríme súborom troch súradníc: x, y, z. Obdobne rýchlosť, zrýchlenie i viaceré ďalšie veličiny, ktorými sa budeme zaoberať. S vektormi ste sa už stretli, takže si ich nebudeme podrobne matematicky zavádzať, len uvedieme niektoré pojmy a pravidlá.

2.1 Polohový vektor

Ním vyjadrujeme polohu bodu, nech je to bod P, v priestore. Takýto vektor môžeme reprezentovať viacerými spôsobmi:

- Nakreslíme súradnicovú sústavu, do nej bodku znázorňujúcu daný bod a orientovanú úsečku z počiatku do bodu P. Takýto vektor označíme najtypickejšie písmenkom $\vec{r}$. Z tohoto názorného geometrického zobrazenia vidíme, že vektor má svoju dĺžku a má aj smer v priestore.

- Zapíšeme
$$\vec{r} = (x, y, z) \tag{68}$$
To je vyjadrenie polohového vektora v karteziánskych zložkách. Nie je to úplná informácia o polohe bodu v priestore, pretože nám nič nehovorí o tom, ako je natočená súradnicová sústava. Ale ak sa natočenie sústavy v čase nemení a vieme, ako je natočená, tak (68) je veľmi praktickým vyjadrením.

- Ak chceme do označenia vektora vniesť aj informáciu o osiach súradnicovej sústavy, zapíšeme
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{69}$$
kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sú jednotkové vektory v smere osí x, y, z.

2.2 Vektory rýchlosti a zrýchlenia

Na rozdiel od polohového vektora tieto už nemusíme kresliť od počiatku súradnicovej sústavy. Toto už nie sú vektory v reálnom priestore, ale v rýchlostnom priestore alebo v priestore zrýchlení. Ak ich chceme názorne geometricky zakresliť úsečkou so šípkou, tak začiatok úsečky zvyčajne položíme do ťažiska telesa alebo do bodu, ktorý to teleso reprezentuje. Ostatné veci sú ako pri polohovom vektore. Máme teda

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)\,, \qquad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{70}$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)\,, \qquad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{71}$$

a platia vzťahy

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}} \tag{72}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}} \tag{73}$$

Vidíme, že sú omnoho kompaktnejšie ako keby sme ich vypisovali po zložkách, napr.

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Pozor však na prípady, kedy sa aj sama súradnicová sústava pohybuje. Vtedy aspoň jeden z vektorov $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$ bude závisieť na čase a preto vo všeobecnosti bude treba napríklad rýchlosť počítať takto:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \dot{x}\vec{i} + x\dot{\vec{i}} + \dot{y}\vec{j} + y\dot{\vec{j}} + \dot{z}\vec{k} + z\dot{\vec{k}} \tag{74}$$

Vidíme, že veci sa komplikujú; snažili sme sa vyjadriť rýchlosť voči všeobecne sa pohybujúcej súradnicovej sústave, a to je geometricky a technicky zložité. Preto ak sa bude dať, budeme sa snažiť vystačiť so súradnicovými sústavami, ktoré budeme môcť považovať za nehybné.

5. PREDNÁŠKA (18. 3. 2022)

V tejto súvislosti si treba uvedomiť, že rýchlosť (a nielen ona) je *relatívna veličina*. Takže za relatívnosťou nemusíme chodiť ani do teórie relativity.

Vektor (nielen rýchlosti) má tri základné charakteristiky:

- ***veľkosť*** (nazývaná aj *dĺžka* alebo *absolútna hodnota*)
- ***smer***
- ***orientácia*** (teda na ktorú stranu smeruje šípka)

V bežnej reči niekedy orientáciu zahrnieme do pojmu smer.

Vektor teda pre nás bude nejaká orientovaná úsečka. Môže znázorňovať rôzne veličiny, ako už vieme. Neskôr sa naučíme, že napr. aj silu. V tom prípade ku trom vyššie uvedeným charakteritikám pribúda ešte jedna: *pôsobisko* (sily). Vektor sily teda zvyčajne nie je vhodné nakresliť hocikam do priestoru. (O sile sa budeme učiť neskôr). Ani pri znázorňovaní polohového vektora nejakého bodu samozrjeme nie je jedno, kam prílsušný vektor nakreslíme. Ale pri vektoroch ako napr. vektor rýchlosti na tom v zásade vôbec nezáleží; ak nakreslíme množstvo navzájom rovnobežných, rovnako dlhých a rovnako orientovaných úsečiek, každá z nich môže reprezentovať ten istý vektor vektor rýchlosti.

2.3 Veľkosť vektora

Nazývame ju aj dĺžkou vektora. Pre hocijaký vektor

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \tag{75}$$

vypočítame jeho dĺžku podľa Pytagorovej vety:

$$b \equiv |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \tag{76}$$

2.4 Skaláre

Skaláre nie sú vektory, ale spomíname ich tu, lebo s vektormi súvisia. Vo fyzike sú typickými skalárnymi veličiami hmotnosť, hustota, objem, teplota. Skalár je teda niečo, čo sa vyjadrí jedným číslom. Aj veľkosť rýchlosti a vôbec veľkosť (dĺžka) akéhokoľvek vektora je teda skalár. Ale nie všetko, čo je vyjadriteľné jedným číslom, spadá *vo fyzike* [2] pod pojem skalár. Musí to byť niečo, čoho hodnota sa nezmení, keď akokoľvek pohneme súradnicovou sústavou. Napr. karteziánske zložky plohového vektora nejakého hmotného bodu sa pri posunutí alebo otočení súradnicvej sústavy zmenia. Súradnice bodu alebo zložky vektora teda vo fyzike nie sú skaláre.

[2] V matematike je skalárom hocičo, čo je vyjadrené jedným číslom. Napr. aj karteziánska zložka vektora.

2.5 Súčin skalára s vektorom

Alebo povieme aj *násobenie vektora skalárom*. Vyjadríme to v zložkách:

$$\boxed{\lambda\vec{b} = (\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z)} \tag{77}$$

Súčin skalára a vektora je teda vektor. Jeho veľkosť je $|\lambda\vec{b}| = |\lambda|\,|\vec{b}|$. Pre tento druh súčinu nepoužívame žiaden symbol (ani bodku).

2.6 Skalárny súčin

Je to taký súčin vektora s vektorom, pri ktorom je výsledkom *skalár*. Tento súčin vyznačujeme bodkou. V dvoj- alebo trojrozmernom priestore sa dá názorne geometricky definovať:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta} \tag{78}$$

kde $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$ je uhol medzi vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Z tejto geometricky poňatej definície skalárneho súčinu ľahko vyplýva jeho geometrický význam. (Treba si nakresliť aj obrázok tých vektorov. Na prednáške bol nakreslený.) Aby sme si geometrický význam objasnili, uvažujme jednotkový vektor v smere $\vec{a}$. Označme si ho symbolom $\vec{u}_a$. Dá sa vyjadriť výrazom

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{a} \tag{79}$$

kde $a \equiv |\vec{a}|$. Veľkosť priemeru vektora $\vec{b}$ do tohoto smeru si označme b_a. Ľahko sa dá pomocou nákresu a základnej trigonometrie zistiť, že $b_a = b\cos\theta$. A všimnime si, že keď spravíme skalárny súčin $\vec{b}$ s $\vec{u}_a$, dostaneme to isté:

$$\vec{b}\cdot\vec{u}_a = |\vec{b}|\,|\vec{u}_a|\cos\theta = b\cos\theta \tag{80}$$

Geometrický význam skalárneho súčinu $\vec{b}\cdot\vec{u}_a$ je teda taký, že vyjadruje ***veľkosť priemetu vektora $\vec{b}$ do smeru vektora $\vec{a}$***. A obdobne, ak si definujeme symbol

$$\vec{u}_b = \frac{\vec{b}}{b} \tag{81}$$

znamenajúci jednotkový vektor v smere $\vec{b}$, tak skalárny súčin

$$\vec{a}\cdot\vec{u}_b = a\cos\theta \tag{82}$$

je rovný veľkosti priemetu vektora $\vec{a}$ do smeru $\vec{b}$.

Z algebry zrejme viete, že skalárny súčin sa dá vyjadriť aj pomocou zložiek:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \tag{83}$$

Z definície (78) sa to dá ľahko dokázať, ak si vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ vyjadríme pomocou zápisov s jednotkovými vektormi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ a treba si ešte uvedomiť, že na základe definície skalárneho súčinu platia vzťahy

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1\,, \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 \tag{84}$$

Ako vidno z jeho definície, skalárny súčin je ***komutatívny***.

2.7 Vektorový súčin

Je to taký súčin vektora s vektorom, pri ktorom je výsledkom *vektor*. Tento súčin vyznačujeme krížikom $\times$.

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \tag{85}$$

(To nie je definícia vektorového súčinu, len spôsob jeho zápisu!) Vektorový súčin v trojrozmerom priestore definujeme takto:

Vektorový súčin nerovnobežných vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ zapísaných v uvedenom poradí je taký vektor $\vec{c}$, ktorého smer je kolmý na každý z vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, jeho veľkosť je

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta \tag{86}$$

pričom $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ je opäť uhol medzi $\vec{a}$ a $\vec{b}$, **a jeho orientácia v priestore je definovaná pravidlom pravotočivej skrutky alebo pravidlom pravej ruky.** (Treba si nakresliť obrázok. Na prednáške bol.) **Vektorovým súčinom rovnobežných vektorov je nulový vektor, $\vec{0}$.**

Aj vektorový súčin sa samozrejme dá zapísať pomocou zložiek. Dá sa na to ísť pomocou determinantu, ale my si rovno uvedieme výsledok

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}} \tag{87}$$

ktorý sa dá odvodiť priamo z hore zapísanej geometrickej definície vektorového súčinu. Treba na to využiť vyjadrenia vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ pomocou zápisov s jednotkovými vektormi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ a treba si ešte uvedomiť, že na základe definície vektorového súčinu platia vzťahy

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}\,, \qquad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}\,, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}\,, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \tag{88}$$

Potom sa už pomerne ľahko dá dostať zložkové vyjadrenie (87).

Vektorový súčin nie je komutatívny; je ***antikomutatívny***:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \tag{89}$$

2.8 Zmiešaný súčin

Je to taký súčin troch vektorov, ktorého výsledkom je skalár; označme ho V, a to podľa tejto definície:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \tag{90}$$

Nárokom sme ho označili V, lebo zmiešaný súčin má aj zaujímavú geometrickú interpretáciu: jeho hodnota vyjadruje ***objem rovnobežnostena***, ktorého podstava je určená vektormi $\vec{a}$, $\vec{b}$ a vektor $\vec{c}$ určuje, kam od podstavy sa teleso rovnobežnostena rozprestiera. Možno ste už počuli, že pre zmiešaný súčin platí pravidlo cyklickej zámeny:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \tag{91}$$

2.9 Trojitý vektorový súčin

Na záver ku prehľadu operácií s vektormi si napíšme formulu „bac mínus cap“,

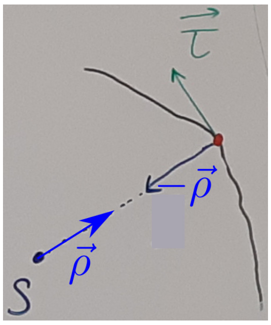
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{92}$$

ktorá pri počítaní s vektormi býva neraz veľmi nápomocná, lebo umožňuje pomerne zložito vyzerajúci súčin troch vektrov rozpísať na rozdiel jednoduchších výrazov.

2.10 Rozklad vektora na dve navzájom kolmé zložky

`Tento odsek nepreberáme, nebude teda z neho nič ani na skúške.`

Už vieme, že vektor v 3-rozmernom priestore sa dá rozložiť na tri navzájom kolmé zložky, teda zapísať ako súčet troch navzájom kolmých vektorov, z ktorých každý má smer jednej zo súradnicových osí. Máme to vyjadrené zápisom $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Neraz sa však zíde aj rozklad vektora do len dvoch navzájom kolmých zložiek, a nie



Obr. 5: Hmotný bod (červená bodka) sa pohybuje po nejakej krivke v priestore (čierna čiara). Maličký kúsok krivky v blízkosti bodu si aproximujeme kúskom kružnice. Tá má stred v bode S, ktorý nazývame stred krivosti. $\vec{\tau}$ je jednotkový vektor v smere (okamžitej) rýchlosti, orientovaný súhlasne s ňou. $\vec{\rho}$ je jednotkový vektor od stredu krivosti ku hmotnému bodu. Vektor $-\vec{\rho}$ je samozrejme opačne orientový a ani by na obrázku nemusel byť, ale omylom som tú šípku akože vektora $\vec{\rho}$ na prednáške nakreslil tam, tak ju tam už nechávam, len som ju premenoval na $-\vec{\rho}$.

nutne takých, ktoré by mali smer niektorej z osí súradnicovej sústavy. Sformulujme túto úlohu takto:

Daný je ľubovoľný vektor $\vec{b}$ a ľubovoľný smer v priestore určený nejakým jednotkovým vektorom $\vec{u}$. Úlohou je rozložiť $\vec{b}$ na súčet dvoch zložiek, z ktorých jedna je rovnobežná s $\vec{u}$, druhá na ňu kolmá. Zapíšeme to takto:

$$\boxed{\vec{b} = \vec{b}_{||} + \vec{b}_{\perp}} \tag{93}$$

Pri riešení tejto úlohy využijeme skalárny súčin, pomocou ktorého nachádzame

$$\vec{b}_{||} = (\vec{u} \cdot \vec{b})\, \vec{u} \tag{94}$$

Aby bola splnená rovnica (93), tak treba zobrať

$$\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - (\vec{u} \cdot \vec{b})\, \vec{u} \tag{95}$$

Úlohu rozložiť vektor podľa zadania sme teda vyriešili.

3 Kinematika pohybu bodov – pokračovanie

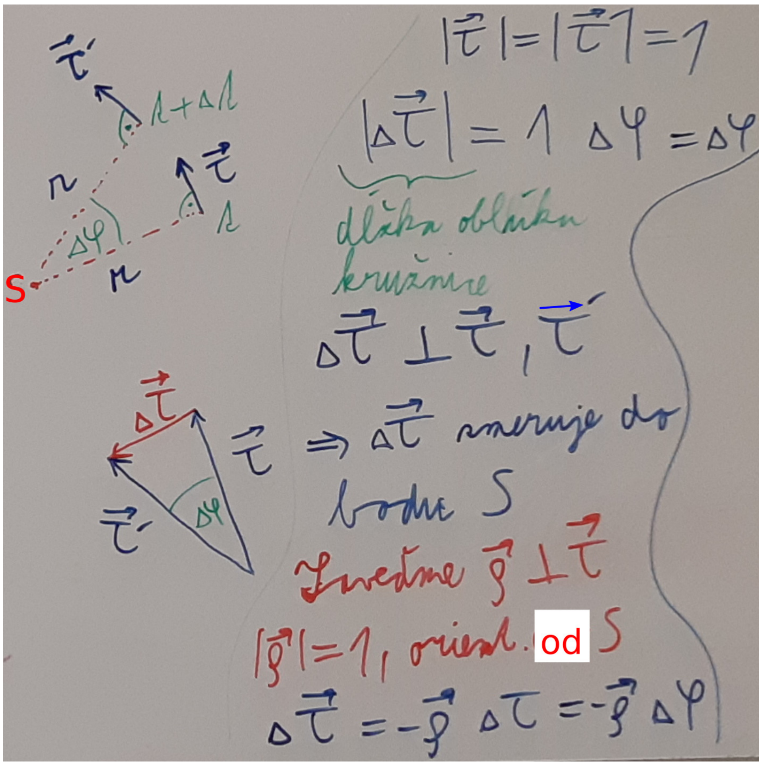
V časti 1.5.5 sme sa tak trochu nepriamo naučili, že celkové zrýchlenie hmotného bodu pri pohybe po kružnici sa dá rozložiť na dve navzájom kolmé zložky: dostredivé zrýchlenie $a_{\perp}$ a obvodové zrýchlenie $a_{||}$. Vtedy sme sa ešte vyhýbali používaniu vektorového zápisu a narábali sme len so zložkami vektorov. Ak šlo o karteziánske zložky (napr. a_x, a_y), tak sme nemali žiadnu ťažkosť porozumieť ich významu. Pri pohybe po kružnici sme však nakoniec zrýchlenie rozložili aj na tie spomínané zložky $a_{\perp}$, $a_{||}$. Tým je bez používania vektorového zápisu o niečo ťažšie rozumieť. Tak si teraz tieto pojmy preberieme pomocou vektorov a všeobecnejšie: nech sa náš hmotný bod ***pohybuje po akejkoľvek krivke*** (v špeciálnych prípadoch napr. po kružnici alebo po priamke). Uvidíme, že takto aj pojmu dostredivé zrýchlenie porozumieme lepšie. A má to význam aj pre modely v počítačových hrách, pretože aj v tých sa dejú pohyby po rôznych krivkách, nielen po kružnici.

Nech $\vec{\tau}$ je jednotkový vektor v smere (okamžitej) rýchlosti (obr. 5). τ je grécke písmeno a používame ho preto, lebo pripomína slovo *tangenciálny*, po slovensky dotyčnicový. Smer rýchlosti v istom bode krivky je totiž zhodný so smerom dotyčnice ku tej krivke v danom bode. Rýchlosť potom zapíšeme

$$\vec{v} = v\vec{\tau} \tag{96}$$

Tak veľkosť rýchlosti, v, ako aj jej smer $\vec{\tau}$ sa v čase môžu meniť. Poďme určiť zrýchlenie uvažovaného bodu [1, 2].

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\vec{\tau})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} \tag{97}$$



Obr. 6: Ku odvodeniu vyjadrenia (98). Jednotkový vektor $\vec{\rho}$ teda definujeme tak, že smeruje od stredu krivosti S ku hmotnému bodu. Vektory $\vec{\tau}$ a $\vec{\rho}$ sa samozrejme pohybujú, lebo sa pohybuje uvažovaný hmotný bod. V čase t teda máme jednotkové vektory $\vec{\rho}$ a $\vec{\tau}$. O okamih Δt neskôr sú už natočené trochu inak, tak si ich aj inak označme: $\vec{\rho}'$ a $\vec{\tau}'$. ($\vec{\rho}'$ na obrázku nie je.) Uhol $\Delta\varphi$ nakoniec spravíme infinitezimálne malým. Preto platia tie vzťahy kolmosti $\vec{\tau}$ i $\vec{\tau}'$ na $\Delta\vec{\tau}$ a dĺžku vektora $\Delta\vec{\tau}$ môžeme počítať ako dĺžku kratučkého oblúka kružnice (i keď je to rovná úsečka).

Pomocou geometrických úvah, ktoré si vysvetlíme ručným písaním, kreslením a odvodzovaním (pozri obr. 6 a jeho popis), prídeme na to, že

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{r}\vec{\rho} \tag{98}$$

Tak môžeme konečne napísať výsledný rozklad celkového zrýchlenia bodu pri ľubovoľnom pohybe (pozri aj obr. 7):

$$\boxed{\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} - \frac{v^2}{r}\vec{\rho}}} \tag{99}$$

Prvý člen má smer okamžitej rýchlosti, nazýva sa ***tangenciálne zrýchlenie*** a je *nenulové práve vtedy, keď sa mení **veľkosť** rýchlosti*:

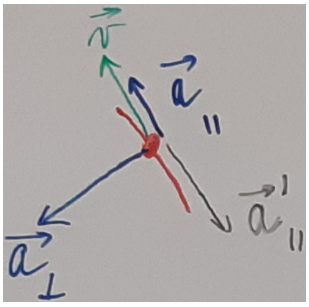
$$\boxed{\vec{a}_{||} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}} \tag{100}$$

To je ten „bežný“ druh zrýchlenia, ktorý si aj intuitívne predstavujeme ako zrýchlenie. Táto zložka zrýchlenia má smer okamžitej rýchlosti, t. j. smer dotyčnice, cudzím slovom *tangenciály*, ku trajektórii (v mieste, kde sa práve bod nachádza). Pri priamočiarom pohybe iné zrýchlenie než tangenciálne ani nie je. V kontexte pohybu po nejakej uzavretej trajektórii (ktorá teda má nejaký obvod), môžeme namiesto pojmu tangenciálne zrýchlenie používať aj pojem obvodové zrýchlenie. Tak sme to aj robili pri popise pohybu po kružnici.

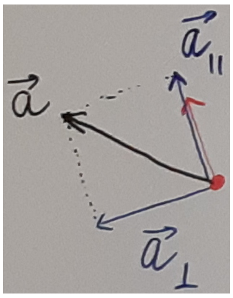
Druhá zložka celkového zrýchlenia je *kolmá* na tangenciálne a smeruje do stredu krivosti daného miesta trajektórie:

$$\boxed{\vec{a}_{\perp} = -\frac{v^2}{r}\vec{\rho}} \tag{101}$$

Preto túto zložku nazývame ***normálové zrýchlenie***, lebo slovo *normála* znamená kolmica; tu kolmica na smer rýchlosti. Často ho nazývame aj *dostredivé zrýchlenie*. Robili sme tak najmä pri popise pohybu po kružnici. *Normálové zrýchlenie je nenulové práve vtedy, keď sa mení **smer** rýchlosti.* Keby šlo o pohyb po kružnici, tak r v (99) by bolo polomerom kružnice. Pri krivke všeobecnejšieho tvaru je to ***okamžitý polomer krivosti*** (ktorý sa s časom mení).



Obr. 7: Hmotný bod (červená bodka) sa pohybuje po nejakej krivke v priestore (červená čiara). Tangenciálne zrýchlenie je už zo svojej definície rovnobežné s rýchlosťou a môže s ňou byť buď súhlasne alebo nesúhlasne rovnobežné (protibežné). Preto sú na obrázku zakreslené obe možnosti, ktoré sme označili $\vec{a}_{||}$ a $\vec{a}_{||}{}'$.



Obr. 8: Formula $\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}$ sa geometricky dá znázorniť pomocou rovnobežníka (tu obdĺžnika) skladania vektorov. Veľkosti tangenciálneho a normálového zrýchlenie môžu samozrejme byť rôzne; na tomto obrázku sú si dosť podobne veľké. Červenou šípkou je vyznačená rýchlosť. Rýchlosť a tangenciálne zrýchlenie by mohli byť aj protibežne orientované – to závisí od konkrétnej situácie.
Pozn.: Obrázok bol nakreslený až na prednáške č. 6.

Celkové zrýchlenie sa teda dá stručne zapísať (obr. 7, 8)

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}} \tag{102}$$

Veľkosť celkového zrýchlenia bude

$$\boxed{a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}} \tag{103}$$

Ak teraz tieto poznatky použijeme na pohyb bodu po kružnici, zisťujeme, ako elegantne, geometricky, jasne a hutne nám poskytujú tie informácie, ktoré sme pomerne prácne nadobudli v časti 1.5.5. A navyše teraz vidíme, že pojmy normálové a tangenciálne zrýchlenie majú význam nielen pre pohyb po kružnici.

3.1 Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie

Už zhruba vieme, o čom asi bude reč, pretože tieto pojmy sme už boli zaviedli pre najjednoduchší prípad – pohyb po kružnici. V tomto jednoduchom prípade ich stačilo zaviesť ako skalárne veličiny a tak sme aj boli spravili. Teraz uvidíme, že to, čo sme boli zaviedli ako ω a ε sa dá chápať ako z-ové zložky *vektorov* uhlovej rýchlosti, $\vec{\omega}$ a uhlového zrýchlenia, $\vec{\varepsilon}$. A vôbec nemusí ísť len o pohyb po kružnici, ale o akýkoľvek pohyb nejakého bodu.

Zovšeobecnením jednoduchej kružnicovej definície (52) na akýkoľvek pohyb bodu je [1, 2] ***uhlová rýchlosť*** definovaná takto:

$$\boxed{\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\alpha}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t}} \tag{104}$$

Prekvapujúce oproti tej zjednodušenej definícii môže byť nanajvýš to, že uhlu aj uhlovej rýchlosti sme pridali šípky, teda sme ich definovali ako vektory. Rýchlo uvidíme, že je to praktické. V prípade kružnice z časti 1.5.5 má uhol, tam značený φ, smer osi z. Teda tam bolo $\vec{\varphi} = \varphi\,\vec{k}$. Uhlová rýchlosť mala tiež smer osi z, ale orientovaná mohla byť nielen v jej kladnom smere (súhlasne), ale aj v zápornom (nesúhlasne).

A obdobne zovšeobecníme aj ***uhlové zrýchlenie***:

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}} \tag{105}$$

V prípade spomínanej kružnice by aj toto bolo rovnobežné s osou z.

6. PREDNÁŠKA (25. 3. 2022)

4 Newtonove pohybové zákony

Ak na popis danej sústavy potrebujeme používať aj pojmy *hmotnosť* alebo *sila*, tak už nevystačíme s kinematickým popisom. Silami, hmotnosťami a ich súvisom s pohybom sa zaoberá *dynamika*. Namiesto pojmu bod už budeme používať pojem *hmotný bod*. Najprv si povieme o dynamike jedného hmotného bodu. V skutočnej situácii alebo v hre pôjde samozrejme o nejaké teleso, napr. projektil, kozmickú loď alebo auto. Ak však pre účel popisu jeho pohybu je možné abstrahovať od konečných rozmerov telesa, v úvahách ho nahradíme hmotným bodom. Za zakladateľa dynamiky ako náuky o pohybe sa považuje Galileo Galilei. Známe sú jeho pokusy na šikmej veže v jeho rodisku – v Pise a aj práca *De Motu Antiquiora*[3], ktorú začal písať v r. 1589, ale bola publikovaná až desiatky rokov po jeho smrti [1, 3]. Naozajstné základy dynamiky položil však až Isaac Newton sformulovaním svojich troch pohybových zákonov v práci *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*[4] zverejnenej v r. 1687.

Namiesto pojmu dynamika sa v staršej fyzikálnej literatúre, dodnes aj v inžiniersve a aj v knihe [4] používa pojem *kinetika*. Pojem dynamika tam používajú súhrnne pre tú časť mechaniky, ktorá sa zaoberá pohybujúcimi sa telesami alebo bodmi. Mechaniku (ako najvyššiu kategóriu) teda delia na statiku a dynamiku. Dynamiku delia na kinematiku a kinetiku. Toto rozdelenie mú svoju logiku a eleganciu, ale v učebniciach fyziky sa autori statikou zväčša nezaoberajú, alebo zaoberajú len okrajovo, a preto používajú len dvojúrovňovú kategorizáciu disciplín: mechaniku (ako najvyššiu kategóriu) delia na kinematiku a dynamiku.

Newtonove zákony hovoria najmä o pohybe. Ten sa kvantitatívne popisuje pomocou veličín ako sú rýchlosť, zrýchlenie i niektoré ďalšie. V kapitole o kinematike sme videli, že rýchlosť a zrýchlenie treba vždy uvažovať vzhľadom na nejakú súradnicovú sústavu. Preto aj pri formulácii Newtonovych pohybových zákonov (NPZ) treba najprv povedať niečo o súradnicových sústavách.

Súradnicovú sústavu často považujeme za nehybnú. Napr. ak policajti stojaci vedľa cesty merajú rýchlosť auta, tak ju merajú vzhľadom na nehybné okolie auta, teda napr. vzhľadom na povrch cesty. Cestu teda považujeme za nehybnú a s cestou a vôbec svetom okolo nej si predstavíme pevne spojenú súradnicovú sústavu (nejaké osi x, y, z). Rýchlosť, ktorú namerajú policajti, sa teda dá rozumieť ako rýchlosť vzhľadom na túto nehybnú súradnicovú sústavu.

Súradnicové sústavy, ktoré považujeme za nehybné, alebo ktoré sa voči nim pohybujú rovnomerne priamočiaro, nazývame ***inerciálne vzťažné sústavy***. Napr. ak by vedľa cesty šiel rovnomerne priamočiaro vlak, tak hocijaká súradnicová sústava pevne s ním spojená by tiež bola inerciálna. A máme aj súradnicové sústavy, ktoré sa vzhľadom na nejakú inerciálnu sústavu pohybujú s nenulovým zrýchlením. Napr. na druhej strane cesty môže byť kolotoč, ktorý sa otáča. Keď si predstavíme súradnicovú sústavu pevne s nim spojenú, tak tá sa bude otáčať tiež. Otáčavý pohyb má vždy nejaké zrýchlenie, aspoň dostredivé, ak iné nie. Takže vzťažná sústava pevne spojená s otáčajúcim sa kolotočom nie je inerciálna. Povieme, že je ***neinerciálna***. Ďalší príklad neinerciálnej sústavy by bola taká, ktorá by bola pevne spojená s nejakým zrýchľujúcim (alebo spomaľujúcim) autom.

Keď sa však hlbšie nad týmito témami zamyslíme, uvedomíme si, že samotná Zem sa pohybuje – jednak otáčavým pohybm okolo svojej vlastnej osi a ešte aj obieha okolo Slnka. Vzťažná sústava spojená s povrchom Zeme teda nemôže byť naozaj inerciálna. Môžeme ju považovať len za približne inerciálnu pre danú úlohu, ktorú riešime (napr. pre počítanie pohybu nejakého auta po ceste). V absolútnom zmysle lepšou realizáciou inerciálnej sústavy by bola nejaká pevne spojená so Slnkom. (Ale pre riešenie úloh ako pohyb auta po ceste by bola úplne nepraktická.) Najdokonalejším priblížením ku dokonalej inerciálnej vzťažnej sústave je sústava, ktorá je v pokoji vzhľadom na nehybné hviezdy [5]. Ale opäť, pre mnohé bežné úlohy môže byť nepraktická.

[3] *Staršie spisy o pohybe*

[4] *Matematické základy prírodnej filozofie*

4.1 Prvý Newtonov zákon

Nazýva sa aj *zákon zotrvačnosti*, platí len ***v inerciálnych vzťažných sústavách***, a tu je jeho znenie:

> ***Každé teleso zotrváva v pokoji, alebo koná rovnomerný priamočiary pohyb, kým nie je nútené pôsobením nejakých síl tento svoj stav pohybový zmeniť.***

Zákon zotrvačnosti sa nedá experimentálne potvrdiť, lebo nedokážeme realizovať pokus, v ktorom by hmotný bod nepodliehal aspoň slabému pôsobeniu iných telies [1]. Ale dôsledky tohoto zákona experimentálne potvrdiť vieme a tým sa presviedčame o jeho správnosti. Hutné a presné vyjadrenie prvého NZ je: ***Ak je (celková) sila na teleso nulová, tak rýchlosť telesa je konštantná***. Matematicky vyjadrené,

$$\vec{F} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{v} = const \tag{106}$$

4.2 Druhý Newtonov zákon

Nazýva sa aj *zákon sily* a tu je jeho znenie:

> ***Sila, ktorá pôsobí na teleso, je úmerná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia, ktoré mu udeľuje.***

Matematický zápis druhého NZ potom je [1]

$$\vec{F} = \text{const}\; m\vec{a} \tag{107}$$

Pod silou $\vec{F}$ sa opäť myslí *celková* sila na teleso; o tom si ešte niečo povieme trochu neskôr. Jednotku sily definujeme tak, aby sme mohli konštantu úmernosti v zákone sily položiť rovnú jednej. Touto jednotkou je

$$\text{kg m s}^{-2} = \text{newton} = \text{N} \tag{108}$$

A teda 2. NZ znie: $\boldsymbol{\vec{F} = m\vec{a}}$. Ako vidíme, v zákone sily sa nám prvý krát objavuje hmotnosť. Nazýva sa aj *zotrvačná hmotnosť*. Hmotnosť sa objavuje aj pri popise gravitačného účinku telies. Tá sa zasa nazýva *gravitačná hmotosť*. Pri bežnom používaní však pojmy zotrvačná a gravitačná hmotnosť nerozlišujeme a používame len jednoslovný pojem hmotnosť. Všetky experimenty totiž ukazujú, že zotrvačná a gravitačná hmotnosť sú si rovné.

4.3 Tretí Newtonov zákon

Nazýva sa aj ***zákon alebo princíp akcie a reakcie*** [1] a tu je jeho znenie:

> ***Sily, ktorými na seba pôsobia dva hmotné objekty, sú rovnako veľké a majú opačný smer [1].***

Tento zákon teda zdôrazňuje, že účinok hmotných objektov, ktorý vyvoláva zmenu pohybového stavu (akokoľvek nepatrná by mohla byť) má charakter *vzájomného pôsobenia* [1].

Je zaujímavé si uvedomiť, že pri 3. NZ prvýkrát spomíname viac než jeden hmotný bod alebo teleso. Prvýkrát teda hovoríme na tému *dynamika sústavy hmotných bodov*, i keď zatiaľ ide iba o dvojbodovú alebo dvojtelesovú sústavu. Doteraz, ak sme aj mali vzájomné pôsobenie dvoch telies, jedno z nich sme považovali úplne nehybné; napr. podložku, po ktorej sa šmýkala tehla. V takých príkladoch sme teda vystačili s pohybovou rovnicou pre jeden hmotný bod.

A druhý komentár ku 3. NZ sa týka pôvodu sily, ktorá vystupuje v 2. NZ. 2. Newtonov zákon totiž len definuje alebo postuluje, že táto celková (teda výsledná) sila na hmotný bod je úmerná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia. Aspoň niečo o pôvode síl nám teda povedal posledný z troch Newtonovych zákonov.

4.4 Skladanie síl

Účinok dvoch alebo viacerých síl, ktoré pôsobia na ten istý hmotný bod, môžeme nahradiť účinkom jednej sily [1]. Nazývame ju ***výslednica pôsobiacich síl***. Výslednicou síl je ich vektorový súčet. V prípade skladania dvoch síl ho zapíšeme

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{109}$$

Ak by sa skladal všeobecný počet síl, tak

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \cdots + \vec{F}_n \tag{110}$$

Skladanie síl si ilustrujeme na niekoľkých príkladoch.

Príklad 1: Fľaša nehybne položená na doske prednáškového stola v Aule Minor. Úlohou je spraviť rozbor (diskusiu, analýzu) síl, ktoré na ňu pôsobia a vysvetliť, prečo sa fľaša nehýbe, i keď tie sily pôsobia.

Pokojový stav fľaše vyjadríme formulami takto: $\vec{v} \equiv \vec{0}$, $\vec{a} \equiv \vec{0}$. Vzťahmi identity ($\equiv$) tu chceme vyjadriť, že tie nulovosti platia v každom čase (z istého intervalu samozrejme), nielen v nejakom jednom okamihu. Z nulovosti zrýchlenia vyplýva, že $\vec{F} = 0$. Táto celková sila je súčtom tiažovej sily $\vec{F}_G$ a sily podložky na fľašu $\vec{F}_R$. Máme teda

$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_R = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_R = -\vec{F}_G \tag{111}$$

Tiažová sila a sila podložky sa teda kompenzujú a výsledná (celková) sila je nulová. Fľašu sme samozrejme najprv položili na stôl tak, že sme ju nepostrčili. Preto mala hneď od začiatku nulovú rýchlosť. A keďže celková sila na ňu je nulová, tak podľa 1. Newtonovho zákona bude v takomto nehybnom stave zotrvávať.

Silu podložky na teleso nazývame aj ***reakcia podložky***; preto označenie $\vec{F}_R$. A všimime si, že v tejto fyzikálnej sústave je ešte jedna sila: tá, ktorou pôsobí fľaša na podložku. Podľa 3. Newtonovho zákona je rovná $-\vec{F}_R$. Ale táto sila nás teraz priamo nezaujíma, lebo nás zaujímajú sily pôsobiace na *fľašu* (keďže sa zaujímame o to, ako fyzikálne pochopiť a popísať, že výsledná sila $\vec{F}$ na fľašu je nulová).

Príklad 2: Rovnomerne klesajúci parašutista. Daná je jeho hmotnosť m, plocha padáka S v smere kolmom na pohyb, hustota vzduchu ρ, veľkosť g tiažového zrýchlenia (a samozrejme aj smer – kolmo nadol) a koeficient aerodynamického odporu C. Úlohou je opäť spraviť rozbor síl, kvalitatívne popísať i stav, kedy sa parašutista ešte pohybuje premenlivou rýchlosťou a vypočítať rýchlosť jeho rovnomerného pohybu.

Najprv sa zamerajme na tú jednoduchšiu časť úlohy – preskúmanmie ustáleného pohybu parašutistu, teda stavu, kedy sa pohybuje rovnomerne priamočiaro. Čo sa týka rozboru síl a toho, ako sa pri ustálenom pohybe skladajú, je to presne tak, ako bolo v príklade s nehybne položenou fľašou. Len namiesto sily podložky teraz máme aerodynamickú odporovú silu. Tá je presne tak veľká, ako tiažová sila, ale opačne orientovaná, a preto bude výsledná sila nulová. Aerodynamická odporová sila je približne úmerná druhej mocnine rýchlosti. Zvyšok riešenia je na fotke tabule z prednášky.

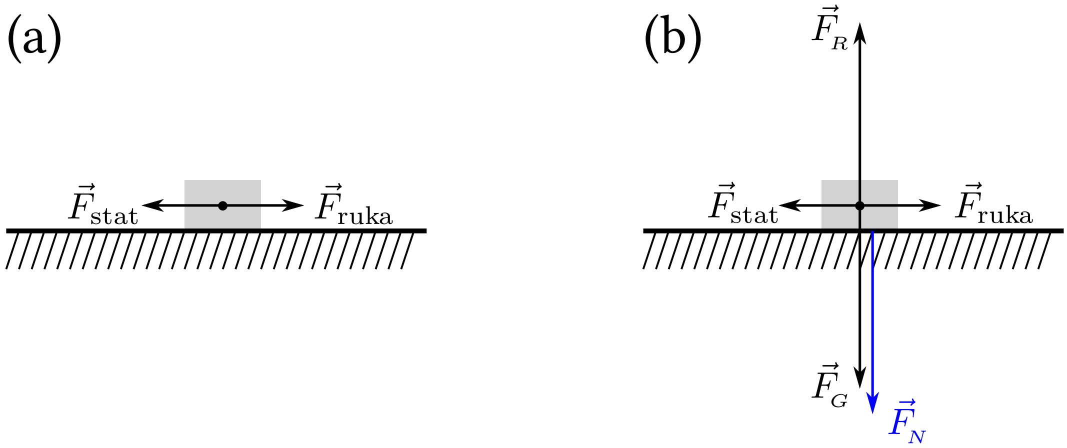
Čo sa týka tých fáz zoskoku parašutistu, kedy rýchlosť ešte nie je ustálená, vieme, že bude pomerne veľká. Najprv totiž padák nemá otvorený, dosiahne rýchlosť možno aj vyše 50 m/s a až potom postupne otvorí padák a začína spomaľovať. Keď má už padák naplno otvorený a ešte stále spomaľuje, znamená to, že odporová sila je vtedy väčšia než tiažová. Až postupne sa odporová sila zmenšuje na úroveň tiažovej sily.

Príklad 3: Sánky na vodorovnej ceste, ťahová sila kontra sila trenia. Sánky sú ťahané vodorovne konštantnou ťahovou silou $\vec{F}_1$. Presne oproti nej pôsobí konštantná sila šmykového trenia $\vec{F}_2$. Ťahová sila nech je väčšia než sila trenia. Hmotnosť sánok je m. Spravte rozbor síl pôsobiacich na sánky, uvážte, ako sa skladajú a určte, s akým zrýchlením sa sánky budú pohybovať.

Riešenie si môžete pozrieť na snímke tabule z prednášky.

Príklad 4: Kocka ľadu na zľadovatenej ceste dole svahom; trenie zanedbáme. Daný je uhol sklonu cesty a známa je veľkosť tiažového zrýchlenia. Treba spraviť rozbor síl pôsobiacich na kocku, uvážiť, ako sa skladajú a zistiť zrýchlenie kocky ľadu.

V riešení tejto úlohy si zavedieme stručnejšie značenie síl: jednopísmenkové, teda napr. namiesto $\vec{F}_G$ budeme písať len $\vec{G}$. Aj toto riešenie si môžete pozrieť na snímke tabule z prednášky.



Obr. 9: Nehybná tehla na vodorovnej podložke. **(a)** Sila ruky je presne kompenzovaná statickou trecou silou, ktorá vzniká ako reakcia podložky rovnobežne s podložkou. **(b)** To isté, ale zakreslené sú aj sily kolmé na podložku. Tiažová sila $\vec{F}_G$ je presne kompenzovaná silou $\vec{F}_R$, ktorá vzniká ako reakcia podložky kolmo na podložku. Je to reakcia na normálovú prítlačnú silu $\vec{F}_N$, ktorá je veľkosťou aj smerom zhodná s tiažovou silou. Sila $\vec{F}_N$ však pôsobí na podložku, nie na tehlu. Ak na tehlu zvrchu netlačí žiadna prídavná sila, ani nie je nejakou silou nadľahčovaná, tak $\vec{F}_N = \vec{F}_G$. Tak je to na obrázku aj zobrazené.

7. PREDNÁŠKA (1. 4. 2022)

5 Šmykové trecie sily: statická a kinetická

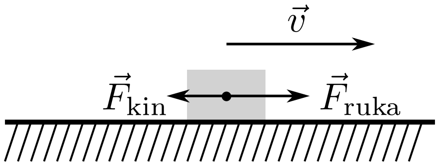
S účinkami týchto síl sa neustále stretávame, aj keď si to nie vždy uvedomujeme. Trecie sily sú takmer tak isto neustále prítomné, ako je prítomná gravitácia. Modely a simulácie v počítačových hrách sa snažia napodobiť skutočnú dynamiku. Preto treba trecie sily neraz používať aj v modeloch pre počítačové hry.

Statická trecia sila. Aby sme si trecie sily ozrejmili, uvažujme tehlu, ktorá je položená na vodorovnej podložke a snažíme sa ju tlačením dostať do pohybu. Tlačíme na ňu silou ruky vodorovne: obr. 9 (a). Tehla sa však pri malých silách ruky nehýbe, lebo ju drží statická trecia sila. Slovo *statická* používame preto, že pôsobenie tejto sily sa týka prípadov, kedy nedochádza ku vzájomnému pohybu styčných plôch. Statická trecia sila $\vec{F}_{\rm stat}$ presne kompenzuje silu našej ruky $\vec{F}_{\rm ruka}$. Vieme to z toho, že tehla sa nehýbe a teda výsledná sila na ňu je nulová. A dokonca, keď zatlačíme kúsok silnejšie, tehla sa stále nehýbe. Aj vtedy teda statická trecia sila musí byť $\vec{F}_{\rm stat} = -\vec{F}_{\rm ruka}$. Statická trecia sila je teda ***adaptívnou*** silou: presne sa prispôsobuje sile našej ruky tak, aby teleso ostávalo voči podložke v pokoji. Inak povedané, aby nedochádzalo ku vzájomnému pohybu styčných plôch.

Statická trecia sila sa dá rozumieť ako ***reakcia podložky*** na silu našej ruky, presne v súlade s tretím Newtonovym zákonom. Uvažujeme silu ruky pôsobiacu rovnobežne s podložkou, takže aj príslušná statická reakcia (trecia sila) má smer ***rovnobežne*** s podložkou. Spomeňne si na prednášku z minulého týždňa: vtedy sme tiež hovorili o reakcii podložky, ale o reakcii kolmej na podložku. To bola reakcia na tiažovú silu. Tá samozrejme pôsobí aj teraz a vieme, že sa presne kompenzuje s tiažovou silou. A úplne podobne, ale vo vodorovnom smere, sa kompenzujú sila ruky a statická trecia sila.

Pravdaže, v iných situáciách s trecou silou nemusí túto reakciu vyvolávať nejaká ruka, ale môže tam byť prítomná iná sila (napr. aj gravitácia), ktorá by chcela dať teleso do pohybu, a statická trecia sila jej v tom svojou reakciou bráni. Napr. lyžiar stojaci nehybne na miernom svahu sa nehýbe zvyčajne preto, že statická trecia sila je dostatočne veľká nato, aby kompenzovala zložku tiažovej sily rovnobežnú so svahom. (Budeme mať aj príklad v podobnom zmysle.) Sila, ktorá sa snaží teleso dať do pohybu, nemusí byť tlačná; môže byť napr. aj ťahová. To len pri tehle sa nám ľahšie dá predstaviť a zrealizovať jej tlačenie než ťahanie.

Zo skúsenosti vieme, že keď takú tehlu potlačíme dostatočne silno, predsa len sa dá do pohybu. Statická trecia sila teda nemôže byť akokoľvek veľká. ***Najväčšiu možnú hodnotu statickej trecej sily označme $\vec{F}^{\rm max}_{\rm stat}$***. Z experimentov aj ďalších praktických skúseností je známe, že táto sila je priamo úmerná veľkosti sily $\vec{F}_N$, ktorou teleso, tu tehla, tlačí kolmo (normálovo) na podložku; pozri obr. 9 (b); ak napr. na tehlu niekto pritlačí zvrchu, bude ťažšie ju dať do



Obr. 10: Tehla šúchajúca sa po vodorovnej podložke vplyvom vonkajšej tlačnej alebo ťahovej sily (napr. sily ruky). Uplatňuje sa kinetická trecia sila. Na tomto obrázku je vonkajšia sila väčšia než sila trecia a preto bude tehla zrýchľovať. V špeciálnom prípade by sila ruky mohla byť presne tak isto veľká, aká je kinetický trecia sila. Vtedy by pohyb tehly mal konštantnú rýchlosť, teda by bol rovnomerný priamočiary.

pohybu. Preto

$$\boxed{F_{\text{stat}}^{\max} = \mu_{\text{s}} F_N} \tag{112}$$

kde koeficient úmernosti μ_{s} nazývame ***koeficient statického trenia***. Tento koeficient je bezrozmerný, čiže nemá jednotky; to priamo vyplýva zo samotnej rovnice (112). Jeho hodnota závisí od vlastností povrchov: pri styku drsných povrchoch, napr. pneumatika a asfakt, býva veľký (napr. aj okolo 1). Pri iných, ako napr. ľadová tehla na ľadovej ploche, je blízky 0. F_N je spomínaná normálová prítlačná sila tehly na podložku. Pri tehle položenej na vodorovnej podložke nie je potrebné zdôrazňovať, že tlačí na podložku kolmo. Ale môžeme mať tehlu aj na naklonenej rovine, alebo toho lyžiara na svahu, a najmä vtedy je treba zdôrazniť, že pod silou $\vec{F}_N$ [ktorej veľkosť vystupuje vo vyjadrení (112)] máme vždy na mysli kolmú zložku sily, ktorou teleso pôsobí na podložku.

Index $^{\max}$ v označení najväčšej možnej hodnoty statickej trecej sily sa v praktických výpočtoch nezvykne písať, lebo v nich zvyčajne potrebujeme narábať práve s tou maximálnou hodnotou, takže by aj bez toho $^{\max}$ nemalo dôjsť ku nedorozumeniu.

Ešte zdôraznime, že sila $\vec{F}_N$ je sila pôsobiaca na *podložku*, a nie na teleso. Nemá teda na teleso žiaden účinok. Na teleso pôsobí jej reakcia, ktorú sme značili $\vec{F}_R$ alebo stručne $\vec{R}$, lebo táto reakcia je silou pôsobiacou na teleso (a vieme, že sa kompenzuje s tiažovou silou).

Ak na tehlu na nijak zvrchu netlačíme, ani ju nenadľahčujeme, prítlačná sila je rovná tiažovej sile tehly (na vodorovnej podložke): $\vec{F}_N = \vec{F}_G = m\vec{g}$. Tak sme to aj zakreslili do obr. 9. Vo všeobecnosti však prítlačná sila nemusí byť rovná tiažovej. Ak by bola tá tehla kdesi na kozmickej lodi v beztiažovom stave, aj tak by mohla vykazovať treciu silu, len by bolo potrebné zvrchu na ňu pritlačiť. V každom prípade však podľa 3. Newtonovho zákona platí

$$\vec{F}_R = -\vec{F}_N \tag{113}$$

Kinetická trecia sila. Ak sa tehla po podložke pohybuje, čiže nastáva vzájomný pohyb styčných plôch, uplatňuje sa kinetická trecia sila. Pôsobí (ako je to zo skúsenosti dobre známe) proti smeru rýchlosti pohybu (obr. 10). Jej veľkosť je približne nezávislá od rýchlosti. Je teda rovnako veľká i pri rovnomernom pohybe tehly i pri zrýchlenom. Aj kinetická trecia sila je úmerná kolmej prítlačnej sile tehly na podložku. Príslušný koeficient úmernosti sa nazýva ***koeficient kinetického trenia***. Budeme ho značiť μ_{k}. Platí teda

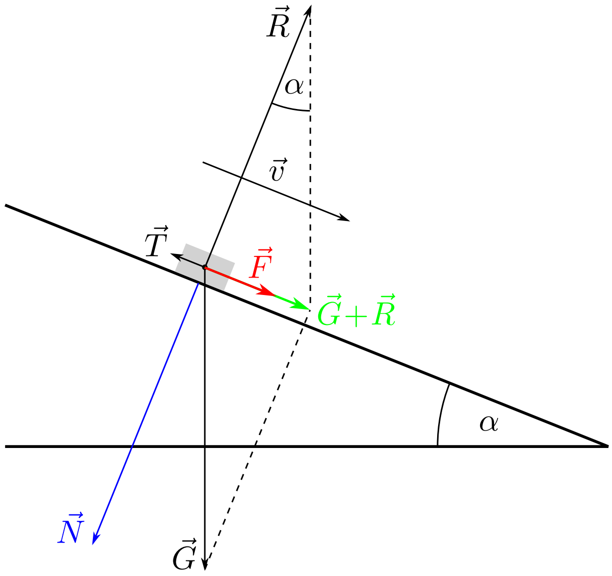
$$\boxed{F_{\text{kin}} = \mu_{\text{k}} F_N} \tag{114}$$

Z úvah vyššie vyplýva, že ak pri tlačení na tehlu čo len nepatrne prekročíme silu $F_{\text{stat}}^{\max}$, statická trecia sila už nedokáže tehlu zadržať a tá sa dá do pohybu. Zo skúsenosti vieme, že keď sa taká tehla (alebo iné teleso) pohne, tak na udržanie rovnomerného pohybu už netreba tlačiť takou veľkou silou, aká bola potrebná na jeho pohnutie. Preto platí

$$F_{\text{stat}}^{\max} > F_{\text{kin}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mu_{\text{s}} > \mu_{\text{k}}} \tag{115}$$

Aj koeficient μ_{k} závisí od vlastností styčných plôch; napr. pre trenie ľadu o ľad je veľmi malý, pre trenie pneumatiky o asfalt je pomerne veľký.

Príklad 1: Tehla na vodorovnej podložke. Dané sú:
$m = 4\,\text{kg}$, $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$, $\mu_{\text{s}} = 0{,}38$, $\mu_{\text{k}} = 0{,}33$.
(a) Aká je maximálna statická trecia sila F_{stat}?
(b) Rozhodneme sa, že potom ako sa dá tehla do pohybu, ju budeme vodorovne tlačiť silou rovnou $F_{\text{stat}}^{\max}$. Aké bude



Obr. 11: Tehla na naklonenej rovine. Použité je kompaktné označovanie, v ktorom $\vec{G}$ je tiažová sila, $\vec{T}$ je trecia sila, $\vec{N}$ je normálová prítlačná sila tehly na podložku, $\vec{R}$ je kolmá reakcia podložky, pričom $\vec{R} = -\vec{N}$. Celková sila je $\vec{F} = \vec{G} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$. Na obrázku je znázornená situácia, keď sa tehla šmýka dole rovinou a teda sa uplatňuje kinetické trenie. Aj zrýchlenie je nenulové, lebo výsledná sila $\vec{F}$ je nenulová.

vtedy zrýchlenie tehly?
(c) V tejto časti úlohy predpokladajme, že tehla sa pohybuje rovnomerne priamočiaro. Aká musí vtedy byť tlačná sila?

(a) $F_{\text{stat}} = \mu_s F_N = \mu_s F_G = \mu_s mg$. Číselne to vychádza $F_{\text{stat}} \doteq 14,9\,\text{N}$.

(b) Tehla sa pri takejto sile pohybuje zrýchlene preto, že zvolená tlačná sila ruky je väčšia než kinetická trecia sila brzdiaca pohyb: $F_{\text{ruka}} = \mu_s F_G$, $F_{\text{kin}} = \mu_k F_G$ a vieme, že $\mu_s > \mu_k$. Je to teda stav s nenulovou celkovou silou, stav nerovnováhy síl. Celková sila

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_{\text{ruka}} + \vec{F}_{\text{kin}}$$

čiže jej veľkosť v danom prípade bude $F = F_{\text{ruka}} - F_{\text{kin}}$. Tiažová sila je samozrejme $F_G = mg$. Takže dostávame $a = (\mu_s - \mu_k)g$. Číselne $a \doteq 0{,}49\,\text{m/s}^2$.

(c) Má teda byť $\vec{a} = \vec{0}$ a zároveň $v \neq 0$. Tehla sa teda po podložke má šúchať, čo znamená, že sa opäť bude uplatňovať kinetická trecia sila. Aby bol pohyb rovnomerný priamočiary, celková sila na tehlu musí byť nulová, čiže musí byť rovnováha medzi silou ruky a kinetickou trecou silou:

$$\vec{F}_{\text{ruka}} + \vec{F}_{\text{kin}} = \vec{0}$$

čiže veľkosti sa rovnajú: $F_{\text{ruka}} = F_{\text{kin}}$. Potrebná tlačná sila teda bude $F_{\text{ruka}} = \mu_k mg$. Číselne $F_{\text{ruka}} \doteq 12{,}94\,\text{N}$.

Príklad 2: Tehla na naklonenej rovine. Dané sú: m, g, μ_s, μ_k.
Treba vo všeobecnosti analyzovať sily na danej naklonenej rovine a potom vypočítať:
(a) Pri akom uhle sklonu sa dá tehla do pohybu?
(b) S akým zrýchlením sa bude pri tomto uhle pohybovať?

Všeobecnú analýzu síl spravíme s pomocou obr. 11. Na jednom obrázku však nemôžu byť zakreslené všetky možné situácie. Tak si vyberme takú typickú – že tehla sa nenulovou rýchlosťou a aj nenulovým zrýchlením šmýka dole naklonenou rovinou. Sila, ktorá sa ju snaží dávať do pohybu, je zložka tiažovej sily v smere naklonenej roviny. Táto sila má hodnotu $\vec{G} + \vec{R}$. I keď je to zložka len tiažovej sily, do jej vektorového vyjadrenia, ako vidíme, vstupuje aj sila $\vec{R}$ kolmej reakcie podložky. Proti smeru rýchlosti pôsobí kinetická trecia sila $\vec{T}$. Celková (t. j. výsledná) sila je

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{G} + \vec{R} + \vec{T} \tag{116}$$

Ak by bola nulová, tak zrýchlenie by bolo tiež nulové. Takže v podstate aj špeciálny prípad nulového zrýchlenia je v obrázku zahrnutý, len si treba predstaviť veľkosťami vyrovnané sily $\vec{T}$ a $\vec{G} + \vec{R}$. Toto by popisovalo dokonca aj statický prípad, teda nehybnú tehlu, pričom $\vec{T}$ by bola v tom prípade statická trecia sila.

Podľa rovnobežníka a trojuholníkov na obrázku 11 sa dá vidieť, že

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{G}+\vec{R}|}{|\vec{G}|} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{|\vec{G}+\vec{R}| = G\sin\alpha} \tag{117}$$

Bude potrebné určiť aj treciu silu, či už statickú alebo kinetickú. Veľkosť trecej sily (bez špecifikovania, či ide o statickú alebo kinetickú) vyjadríme

$$T = \mu N = \mu R$$

lebo sily $\vec{N}$ a $\vec{R}$, hoci sú navzájom rôzne a každá pôsobí na iné teleso, majú rovnaké veľkosti. Z trigonometrie dostávame

$$\cos\alpha = \frac{R}{G} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R = G\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T = \mu G\cos\alpha} \tag{118}$$

Ak je uhol sklonu dostatočne veľký, tehla sa môže zrýchlene šmýkať dole doskou. Jej zrýchlenie určíme pomocou vyjadrenia (116). Z tej rovnice stačí zobrať zložku rovnobežnú s naklonenou rovinou. Dostávame

$$ma = G\sin\alpha - \mu_\mathrm{k} G\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a = g\,(\sin\alpha - \mu_\mathrm{k}\cos\alpha)} \tag{119}$$

keďže $G = mg$. Posledný výsledok platí všeobecne pre hocijaký uhol dostatočne strmý nato, aby sa tehla zrýchlene šmýkala.[5]

(a) Predstavujeme si, že dosku, na ktorej je tehla, pomaly viac a viac nakláňame. Tehla sa dá do pohybu, keď sila $\vec{G}+\vec{R}$ svojou veľkosťou nepatrne (teoreticky stačí o nekonečne málo) presiahne maximálnu možnú statickú treciu silu. (Alebo nemusí presiahnuť, ale stačí do tehly nepatrne ťuknúť a pohne sa.) Pri hraničnej hodnote uhla sú tie sily ešte vyrovnané. Môžeme to teda zapísať rovnosťou

$$G\sin\alpha_\mathrm{c} = \mu_\mathrm{s} G\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha_\mathrm{c} = \mu_\mathrm{s}\cos\alpha \tag{120}$$

Preto kritický uhol, teda uhol, po dosiahnutí ktorého sa tehla môže pohnúť, spĺňa

$$\mathrm{tg}\,\alpha_\mathrm{c} = \mu_\mathrm{s}$$

Ako vidíme, nezávisí od tiažovej sily. Samotný uhol z poslednej rovnice musíme vyjadriť funkciou inverznou ku tangensu. Tou je arkustangens:

$$\boxed{\alpha_\mathrm{c} = \mathrm{arctg}\,\mu_\mathrm{s}}$$

Hodnota takto vypočítaná vyjde v radiánoch, čo sú prirodzené jednotky uhla.

(b) Ak sa pri kritickom uhle α_c dá tehla do pohybu (napr. vďaka nepatrnému ťuknutiu do nej), tak potom sa už začne uplatňovať kinetická trecia sila namiesto statickej. Kinetická je menšia než statická a preto nedokáže plne vyrovnávať silu $\vec{G}+\vec{R}$ a tehla sa bude pohybovať zrýchlene so zrýchlením podľa (119). My teraz chceme výsledok pre ten špeciálny uhol α_c. Dosadiac α_c a využijúc (120) dostávame

$$a = g\,(\sin\alpha_\mathrm{c} - \mu_\mathrm{k}\cos\alpha_\mathrm{c}) = g\,(\mu_\mathrm{s}\cos\alpha_\mathrm{c} - \mu_\mathrm{k}\cos\alpha_\mathrm{c})$$

a teda

$$\boxed{a = (\mu_\mathrm{s} - \mu_\mathrm{k})\,g\,\cos\alpha_\mathrm{c}}$$

6 Hybnosť a impulz

Hybnosť hmotného bodu je definovaná ako súčin jeho hmotnosti a rýchlosti, a je to teda vektor:

$$\boxed{\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}} \tag{121}$$

[5]Mimochodom, z vyššie popísaných úvah sa dá usúdiť, že tehla sa dokáže trvalo (bez spomaľovania) šmýkať pri uhloch $\alpha \geq \mathrm{arctg}\,\mu_\mathrm{k}$. Máme $0 < \mu_\mathrm{k} < \mu_\mathrm{s}$. Samovoľne sa síce tehla pri uhloch $\alpha \leq \mathrm{arctg}\,\mu_\mathrm{s}$ nerozbehne, ale ak je uhol aspoň $\mathrm{arctg}\,\mu_\mathrm{k}$, tak keď ju postrčíme, bude sa šmýkať. Takže pri uhloch $\alpha \in \langle \mathrm{arctg}\,\mu_\mathrm{k}, \mathrm{arctg}\,\mu_\mathrm{s} \rangle$ síce treba tehlu postrčiť, ale keď sa rozbehne, tak jej pohyb už bude trvalý.

V reálnom svete i počítačových hrách nemáme hmotné body, ale telesá. Už teraz je však aspoň intuitívne zrejmé, že uvedená definícia hybnosti bude platiť aj pre pohyb telesa, nielen hmotného bodu. Neskôr si toto ešte upresníme, lebo niekedy bývajú telesá nie pevné (menia svoj tvar), alebo vykonávajú aj otáčavý pohyb. Tieto komplikácie pri hmotnom bode odpadajú. Preto, ak sa chceme zamerať len na teleso ako celok a zaujímame sa o jeho posuvný pohyb (nie otáčavý), býva pojem hmotného bodu veľmi užitočný a praktický. Neskôr si rigorózne definujeme pojem *ťažisko* telesa. Uvidíme, že je to bod v priestore (môže ale nemusí byť vnútri telesa), ktorý sa pohybuje tak, akoby celá hmotnosť telesa bola sústredená v tomto bode. Tento bod sa teda správa presne ako hmotný bod.

Menej často spomínanou veličinou v mechanike je impulz, podrobnejšie *impulz sily*. Meriame ním účinok pôsobenia sily na hmotný bod počas nejakého časového úseku (alebo účinok na teleso vo vyššie uvedenom zmysle). Ak by sila bola konštantná, tak za časový interval dĺžky Δt (akokoľvek dlhý alebo krátky) by hmotnému bodu udelila impulz

$$\vec{\mathcal{I}} = \vec{F}\Delta t$$

Sila však môže v čase meniť svoju veľkosť aj smer a preto táto jednoduchá definícia, akokoľvek názorná, nie je dostatočná. Všeobecne impulz sily udelený hmotnému bodu v časovom intervale $\langle t_a, t_b\rangle$ definujeme
(Na lepšie vyjasnenie tú trajektóriu rozdeliť na malé úseky!)

$$\boxed{\boxed{\vec{\mathcal{I}} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\,\mathrm{d}t}} \tag{122}$$

Ak za silu dosadíme jej vyjadrenie z 2. Newtonovho zákona a ďalej upravujeme, postupne dostávame

$$\vec{\mathcal{I}} = \int_{t_a}^{t_b} m\vec{a}\,\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b} m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{123}$$

Predpokladáme, že *hmotnosť hmotného bodu sa nemení.* V takom prípade ju môžeme vybrať pred integrál a dostávame

$$\vec{\mathcal{I}} = m\left[\vec{v}(t_b) - \vec{v}(t_a)\right]$$

teda, pričom použijeme stručnejšie označovanie,

$$\boxed{\int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_b - \vec{p}_a} \tag{124}$$

Tento poznatok sa nazýva ***prvá veta impulzová v integrálnom tvare***.

Teraz uvažujme infinitezimálne krátky časový interval dĺžky $\mathrm{d}t$ a počítajme udelený impulz:

$$\vec{F}\mathrm{d}t = m\,\vec{a}\,\mathrm{d}t = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\vec{v}$$

z čoho dostávame

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}} \tag{125}$$

Toto veľmi užitočné a často používané vyjadrenie sily sa nazýva ***prvá veta impulzová v diferenciálnom tvare*** [1]. Tak sa tento vzťah zvykne nazývať v učebniciach fyziky v našej časti Európy. V západnej literatúre, ale neraz aj u nás, sa vzťah (125) považuje za vyjadrenie 2. Newtonovho zákona. Z odvodenia vzťahu (125) vidíme, že naozaj veľmi tesne súvisí s rovnicou $\vec{F} = m\vec{a}$.

Najmä na cvičeniach sa stane jasné, že impulz sily je veličina nesmierne nápomocná pre popis nárazov, odrazov a zrážok telies a preto je veľmi často potrebné ju používať i pri simuláciách v počítačových hrách.

8. PREDNÁŠKA (8. 4. 2022)

7 Zákon zachovania hybnosti

Skôr ako si zákon zachovania hybnosti (ZZH) sformulujeme, treba povedať, že to nie je postulovaný zákon, ale len dôsledok Newtonovych zákonov, o čom sa o kúsok ďalej presvedčíme. Tu je znenie ZZH:

Celková hybnosť izolovanej sústavy, rovnajúca sa vektorovému súčtu hybností všetkých hmotných bodov sústavy, sa nemení [1].

Toto slovné vyjadrenie je síce obsažné a správne, ale my vieme, že pomocou formúl sa fyzikálne zákony dajú vyjadriť omnoho prehľadnejšie, čitateľnejšie, stručnejšie a hlavne sa potom dajú robiť aj výpočty. Tu je formula vyjadrujúca zákon zachovania hybnosti (ZZH):

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \text{konšt}} \tag{126}$$

Myslí sa to tak, že hybnosti jednotlivých hmotných bodov sa môžu v čase meniť, čiže

$$\vec{p}_i = \vec{p}_i(t)\,, \quad i = 1, \ldots, N \tag{127}$$

ale ich súčet od času nezávisí. Pripomeňme, že $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$.

Všimnime si teraz v ZZH dôležité slovo *izolovaná.* Aby teda ten zákon pre nejakú sústavu hmotných bodov platil, musí ísť o izolovanú sústavu, alebo aspoň takú, ktorá je efektívne akoby izolovaná. Izolovaná sústava je taká, na ktorú nepôsobia *žiadne vonkajšie sily.* Pod vonkajšími silami máme na mysli sily zo zdrojov, ktoré su mimo uvažovanej sústavy hmotných bodov. Príkladom, i keď nie dokonalým, je slnečná sústava; je v nej Slnko, planéty, ich mesiace a aj rôzne menšie telesá (napr. planétky). V rámci tejto sústavy pôsobia jednotlivé jej telesá (akože hmoté body) len *vzájomne na seba.* A aspoň približne môžeme tvrdiť, že žiadna iná sila už na tieto telesá slnečnej sústavy nepôsobí. Ostatné hviezdy a ich planéty sú totiž nesmierne ďaleko, takže ich vplyv môžeme v mnohých úvahách zanedbať.

Niektoré telesá alebo sústavy telies síce nie sú izolované, ale výsledná sila na ne je nulová. Príkladom je plastová fľaša s vodou nehybne položená na prednáškovom stole Auly Minor. Tá fľaša sa nachádza v gravitačnom poli Zeme, čiže to nie je izolované teleso. Ale je položená na stole, ktorý tiažovú silu presne kompenzuje, takže výsledná sila na fľašu je nulová a efektívne je to izolované teleso. Nehýbe sa, jeho hybnosť je teda nemenná, čiže v súlade so ZZH. Konkrétna číselná hodnota tejto hybnosti je nula (keďže sa nehýbe). Ak by však fľaša padala zrýchleným pohybom, tak to by očividne nebol prípad zachovávajúcej sa hybnosti. Takto padajúca fľaša alebo hocijaké iné zrýchlene padajúce predmety určite nie sú izolovanými sústavami.

ZZH sme sformulovali pre sústavu *hmotných bodov.* Aspoň intuitívne však rozumieme, že aj veľké teleso si niekedy môžeme nahradiť jedným hmotným bodom umiestneným v jeho ťažisku (o čom si poriadne povieme neskôr). Preto ZZH platí aj pre izolovanú sústavu telies. Ale správna je aj iná predstava: teleso (napr. tú fľašu na stole alebo Slnko) si môžeme predstaviť zložené z obrovského množstva hmotných bodov, ktoré držia pokope vďaka silám medzi nimi. Tak zhruba to naozaj aj je, lebo telesá sú zložené z atómov. Atómy sú také malé, že sa naozaj javia ako body. Takže z tohto hľadiska taká fľaša s nápojom nie je jedno teleso, ale sústava obrovského počtu hmotných bodov. Ak je pevne položená na stole a nápoj v nej je tiež nehybný, tak z hľadiska mechaniky je to (efektívne) izolovaná sústava hmotných bodov.

ZZH si teraz odvodíme (dokážeme) z Newtonovych zákonov. Uvažujme teda izolovanú sústavu N hmotných bodov. Ich celkovú hybnosť, teda veličinu (126), si označme $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N \tag{128}$$

Počítajme, aká je časová derivácia celkovej hybnosti:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_N}{\mathrm{d}t} \tag{129}$$

Pomocou bodkového označovania časových derivácií a pomocou sumačného symbolu toto vieme zapísať stručnejšie, takže taký zápis budeme ďalej používať. 1. veta impulzová (čo je len nejaké iné vyjadrenie 2. NZ) hovorí, že $\dot{p}_i = \vec{f}_i$, kde $\vec{f}_i$ je celková sila na i-ty hmotný bod sústavy. Preto

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i \tag{130}$$

Sila $\vec{f}_i$ je (vektorovým) súčtom síl od všetkých ostatných hmotných bodov uvažovanej sústavy:

$$\vec{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{f}_i^{\text{ od } j} \tag{131}$$

kde $\vec{f}_i^{\text{ od } j}$ je sila, ktorou pôsobí j-ty hmotný bod na i-ty. Iné príspevky do sily $\vec{f}_i$ nie sú, lebo sústava je podľa predpokladu *izolovaná*. Tak dostávame

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{f}_i^{\text{ od } j} \tag{132}$$

Zaveďme stručnejšie označovanie vzájomných síl v sústave:

$$\vec{f}_{ji} \equiv \vec{f}_i^{\text{ od } j} \tag{133}$$

Poradie jednotlivých sčítancov sa dá preusporiadať takto:

$$\dot{\vec{P}} \;=\; \vec{f}_{21} + \vec{f}_{12} \;+\; \vec{f}_{31} + \vec{f}_{13} \;+\; \ldots \;+\; \vec{f}_{ji} + \vec{f}_{ij} \;+\; \ldots \;+\; \vec{f}_{N,N-1} + \vec{f}_{N-1,N} \tag{134}$$

Tretí Newtonov zákon hovorí, že dva hmotné body na seba pôsobia navzájom rovnako veľkými silami, ale opačne orientovanými. Preto[6]

$$\vec{f}_{ji} + \vec{f}_{ji} = \vec{0}\,, \quad \forall\, i, j \tag{135}$$

Zo (134) a (135) potom dostávame

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \tag{136}$$

čo bolo treba dokázať. Poznamenajme, že táto nulovosť platí na celom časovom úseku, počas ktorého je sústava izolovaná.

Príklad 1: Poľovník s puškou na člne: úloha podobná ako 3.5 zo zbierky [6], ale počítajme len rýchlosť, ktorou budú čln s poľovníkom odhodené. Dané údaje sú:
m_1 - hmotnosť strely (prejektilu)
m_2 - hmotnosť poľovníka, pušky a člna spolu; predpokladáme, že tvoria akobe jedno teleso. (Môžeme si predstaviť, že poľovník je pevne zapretý o čln.)
$\vec{v}_1$ - rýchlosť strely tesne po výstrele.
Poľovník vystrelí vodorovne. Úlohou je určiť rýchlosť $\vec{v}_2$, ktorou budú hodení dozadu puška, poľovník a čln. Odpor vody zanedbáme. Počas kratučkého okamihu výstrelu sa totiž nestihne príliš prejaviť.

Uvažované telesá tvoria efektívne izolovanú sústavu (ak zanedbáme najmä odpor vody). Preto je hybnosť tejto sústavy konštantná. Tesne po výstrele je teda taká istá ako počas výstrelu aj ako pred výstrelom.[7] Pred výstrelom bola hybnosť nulová, tak taká musí byť aj tesne po výstrele. Platí teda

$$\vec{0} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \tag{137}$$

Z toho ľahko vyjadríme hľadanú rýchlosť spätného pohybu poľovníka s puškou a člnom:

$$\vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1 \tag{138}$$

Znamienko mínus vyjadruje, že rýchlosť spätného pohybu je opačne orientovaná než rýchlosť strely. Pomer veľkostí rýchlostí je

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2} \tag{139}$$

teda opačný ku pomeru hmotností, čo nie je prekvapujúce. Rýchlosť spätného pohybu nebude veľká, ale ak čln s poľovníkom a puškou vážia len okolo $100\,\mathrm{kg}$, tak bude pozorovateľná, aspoň nejakých pár centimentrov za sekundu.

Príklad 2: Auto idúce rýchlosťou $80\,\mathrm{km/h}$ a vážiace $950\,\mathrm{kg}$ narazí do auta, ktoré ide pred ním rýchlosťou $50\,\mathrm{km/h}$ a váži $1050\,\mathrm{kg}$. Autá z nejakého dôvodu zostanú po zrážke do seba zakliesnené. Akou rýchlosťou sa budú pohybovať tesne po zrážke?

Označme si rýchlosť narážajúceho auta pred zrážkou ako $\vec{v}_1$, rýchlosť druhého auta $\vec{v}_2$, ich hmotnosti ako m_1, m_2.

[6] Hmotný bod sám na seba nepôsobí, takže je praktické zaviesť aj $\vec{f}_{ii}$ a položiť $\vec{f}_{ii} = \vec{0}, \forall\, i$.
[7] Dlhší čas po výstrele sa už hybnosť sústavy začne významne meniť, lebo sa výraznejšie prejaví odpor vody.

Tieto štyri údaje sú dané. Treba určiť ich spoločnú rýchlosť $\vec{v}$ po zrážke.

Tie dve autá môžeme považovať za (efektívne) izolovanú sústavu. Predpokladáme totiž, že pri zrážke z áut neodletí nejaká časť, napr. koleso. A sila zemskej tiaže sa kompenzuje so silou podložky. Hybnosť pred zrážkou teda musí byť rovná hybnosti po zrážke:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v} \tag{140}$$

Po zrážke totiž podľa predpokladu tvoria jedno teleso. Ich výsledná rýchlosť po zrážke teda je

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{141}$$

Takýto druh zrážky, kedy sa telesá zrazia a zostanú pevne spojené, sa nazýva úplne (dokonale) ***nepružná zrážka***. Ako sa neskôr naučíme, nezachováva sa pri nej mechanická energia sústavy. Zmení sa na iné formy energie, napr. na teplo. Opakom je dokonale pružná zrážka. Pri takej sa telesá od seba odrazia a mechanická energia sa zachováva. Je teda zaujímavé, že pri nepružnej zrážke, i keď sa mechanická energia nezachová, zachová sa aspoň hybnosť (ak ide o izolovanú sústavu).

8 Numerické riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc

8.1 Úvod

Tento úvod je oveľa dlhší, než sme mali na prednáške, lebo som vopred nevedel, či ste na matematike mali diferenciálne rovnice. To, čo sme z tohto úvodu na prednáške nemali, je písané zmenšeným fontom a užším textom. Ale sú to jednoduché veci a predpokladám, že by ste im rozumeli.

Pohybovou rovnicou hmotného bodu alebo telesa je rovnica

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{142}$$

teda rovnica priamo vyjadrujúca 2. NZ. Na jej pravej strane je celková sila na teleso (alebo na hmotný bod, ktorým si to teleso pre účel výpočtov a simulácií nahrádzame). Vyriešiť pohybovú rovnicu hmotného bodu znamená zistiť aspoň to, ako závisí jeho poloha od času, teda nájsť ***analytické alebo numerické*** vyjadrenie pre $\vec{r}(t)$. Toto vyjadrenie treba zvyčajne napísať vzhľadom na nejakú súradnicovú sústavu, veľmi často karteziánsku. Riešiť pohybovú rovnicu v tom prípade znamená nachádzať vyjadrenia pre $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Na vyriešenie potrebujeme poznať aj ***začiatočnú polohu*** a ***začiatočnú rýchlosť*** bodu. Ak si ako začiatočný čas zvolíme $t = 0$, tak potom začiatočnými údajmi budú $\vec{r}(0)$ a $\vec{v}(0)$. Spomeňte si na príklad o šikmom vrhu. Ten a podobné úlohy sme riešili dokonca už v kinematike, teda pred začatím kapitoly o silách, lebo sme nič vhodnejšie na ilustráciu kinematiky nemali. Riešiť pohybovú rovnicu však zvyčajne znamená aj určiť časový priebeh rýchlosti, teda $\vec{v}(t)$ alebo $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$. Rýchlosť dokonca často nachádzame ešte skôr a ľahšie než súradnice.

Ako z pohybovej rovnice (142) zistiť rýchlosti a súradnice, keď tam žiadne nevidíme? Zrýchlenie si treba zapísať ako deriváciu rýchlosti podľa času:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \tag{143}$$

A už tam rýchlosť vidíme. Ak chceme vidieť aj súradnice alebo polohový vektor, vyjadríme

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{144}$$

a dosadíme do (143). Dostaneme

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} \tag{145}$$

Pohybová rovnica (143) v sebe obsahuje deriváciu hľadanej neznámej funkcie.[8] Takéto rovnice sa vo všeobecnosti nazývajú ***diferenciálne rovnice*** (DR). Ak najvyššia derivácia neznámej funkcie je prvá, tak povieme, že ide o DR ***prvého rádu***. Rovnica (145) je tiež diferenciálna a je ***druhého rádu***. Dokonca aj jednoduchý vzťah (144) je diferenciálnou rovnicou (prvého rádu), i keď to nie je pohybová rovnica. Čas t v týchto DR vystupuje ako ***nezávislá premenná***, podľa ktorej sa derivuje. Hľadaná neznáma funkcia, napr. $v_x(t)$, nejakým spôsobom závisí od času, a je to teda ***závislá premenná***. V každej z týchto rovníc máme len túto jedinú premennú, podľa ktorej sa derivuje. Také diferenciálne rovnice sa nazývajú ***obyčajné diferenciálne rovnice***. Vo fyzike sa často vyskytujú aj DR, v ktorých je viac nezávislých premenných (teda premenných, podľa ktorých sa derivuje). Napr. v akustike sa rieši úloha nájsť časovú a priestorovú závislosť hustoty vzduchu $\rho(x, y, z, t)$ (lebo

[8] Keďže ide o vektorovú rovnicu, sú to vlastne tri rovnice pre tri neznáme funkcie: $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$.

táto hustota pri šírení sa zvuku vykazuje malé oscilácie a zvlnenia). Príslušná DR, ktorou sa táto úloha rieši, môže obsahuje derivácie podľa všetkých štyroch nezávislých premenných, od ktorých hustota závisí. Také derivácie pre odlíšenie značíme napr.

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

a nazývame ich *parciálne derivácie*. DR, ktorá ich obsahuje, za vo všeobecnosti nazýva parciálna diferenciálna rovnica.

Sila býva niekedy konštantná (napr. aj nulová), inokedy je to zložitejšie a môže závisieť napr. od polohy hmotného bodu a/alebo od jeho rýchlosti. Od polohy závisí napr. gravitačná sila, pokiaľ sa teleso pohybuje na veľkých priestorových rozsahoch; napr. smerom od Zeme jej gravitačný vplyv klesá. Od rýchlosti závisí napr. aerodynamická odporová sila.
Príklad 1: Konštantná sila $\vec{F}$. Ako s ňou riešiť pohybovú rovnicu (143)?
Tak, že na obe strany tejto rovnice presne rovnako aplikujeme integrovanie cez čas:

$$\int_0^t m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t' \tag{146}$$

Vďaka konštantnosti m a $\vec{F}$ dostávame

$$m[\vec{v}(t) - \vec{v}(0)] = \vec{F}\,t \tag{147}$$

čiže našli sme riešenie – závislosť rýchlosti od času – pre prípad hocijakej konštantnej sily:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \frac{\vec{F}}{m}\,t \tag{148}$$

Podiel $\vec{F}/m$ je zrýchlenie telesa a je teda v tomto príklade konštantné. Ide teda o rovnomerne zrýchlený pohyb; tak tomu musí v prípade konštantnej celkovej sily na telso sily byť. Závislosť polohového vektora od času tu najjednoduchšie nájdeme zo všeobecnej formuly

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t')\,\mathrm{d}t' \tag{149}$$

do ktorej dosadíme už nájdenú časovú závislosť rýchlosti. Alternatívne by sme mohli priamo riešiť ODR (145) jej dvoma po sebe idúcimi integrovaniami. (Môžete si výsledok dopočítať sami.)

Príklad 2: Aerodynamická odporová sila pri zvislom vrhu alebo páde, ak hustota závisí od výšky. Toto je úloha, ktorú ste riešili alebo budete riešiť na cvičeniach a môžete si popis ku tomu pozrieť v Dodatku A. Príslušná pohybová rovnica (A.30a) má zaujímavú len z-ovú zložku:

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g - K_0\,e^{-\kappa z}|v_z|\,v_z \tag{150}$$

kde K_0, κ a aj g sú konštanty. Výraz na pravej strane je F_z/m a vidíme, že sila tu teda explicitne závisí aj od súradnice z aj od rýchlosti v_z telesa. Jedna DR teda obsahuje dve neznáme funkcie (dve závislé premenné). Toto sa vyriešiť priamo nedá. Ani keby sme ľavú stranu napísali ako $\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2$. Potrebujeme ešte jednu rovnicu. Tou je

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z \tag{151}$$

Rovnice (150) a (151) treba riešiť ako ***sústavu*** dvoch zviazaných (vzájomne závislých) ODR prvého rádu. Táto sústava sa už riešiť dá, i keď nie analyticky, aspoň nie presne. Ale bude sa dať riešiť numericky. A opäť – na vyriešenie potrebujeme poznať dve začiatočné hodnoty: $z(0)$ a $v_z(0)$. Takéto údaje sa v kontexte DR nazývajú aj ***začiatočné podmienky***, prípadne sa používa slovo počiatočné. Matematici, keďže nezávislú premennú zvyčajne označujú x a nenazývajú ju časom, používajú pojem *okrajové podmienky* alebo hodnoty.

Videli sme, že aspoň v niektorých prípadoch sa riešenie ODR dá hľadať počítaním integrálov. Aj preto sa procedúra riešenia ODR nazýva ***integrovanie diferenciálnej rovnice***. To býva pri výklade a v literatúre veľmi častý, vhodný a aj praktický termín, aj v prípadoch, kedy integrál pri riešení nepoužívame.

8.2 Transformácia ODR vyššieho rádu na sústavu ODR 1. rádu

`Tento odsek sme takto presne na prednáške neprebrali, ale to isté sme si ukázali na príklade rovníc (150), (151).`

Transformáciu ODR na sústavu 1. rádu si ukážeme na príklade [7]:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + q(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r(t) \tag{152}$$

je ODR 2. rádu. Neznámou funkciou je $y(t)$, zatiaľ čo $q(t)$ a $r(t)$ sú nejaké dané funkcie; v jednoduchých prípadoch by napr. mohlo byť $q(t) = q_0, \; r(t) = r_0$ (konštanty). Derivácia y podľa t je tiež nejakou funkciou: nazvime ju z. Zapíšeme to a zapíšeme pomocou z aj danú ODR:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= z(t) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= r(t) - q(t)z(t) \end{aligned} \tag{153}$$

Tým sme z jednej ODR 2. rádu dostali dve ODR 1. rádu, teda sústavu dvoch zviazaných ODR 1. rádu. Aj neznáme funkcie sú teraz dve: $y(t)$ a $z(t)$. Takáto transformácia ODR je často veľmi nápomocná, lebo pre sústavy ODR 1. rádu existujú efektívne metódy numerického riešenia. ODR vyššieho rádu alebo sústava takých rovníc sa dá na sústavu ODR prvého rádu previesť vždy (pozrite napr. [9], str. 262).

8.3 Daná úloha

Pre jednoduchosť výkladu sa najprv budeme zaoberať len jednou ODR 1. rádu; zovšeobecnenie na sústavu je pomerne jednoduché a vysvetlené metódy sú potom použiteľné aj pre sústavu ODR. Danú ODR

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t))} \tag{154}$$

budeme numericky riešiť na intervale $t \in \langle t_0; t_{\max}\rangle$, pričom poznáme $y(t_0) = y_0$. Je vhodné zdôrazniť, že funkcia f na pravej strane (154) je *známa*. Ak teda poznáme jej argumenty, teda číselné hodnoty t a $y(t)$, tak vieme vyčísliť aj f. Keďže však y je neznáma funkcia, vyčíslenie f, hoci ako funkcia má známy tvar, nie je triviálne.

8.4 Numerické metódy riešenia ODR a ich sústav

Keďže ODR vyššieho rádu alebo aj sústavu viacerých ODR vyšších rádov možno previesť na sústavu ODR 1. rádu (pozri odsek 8.2) budeme sa viac zaoberať numerickými metódami priamo použiteľnými len pre 1. rád. Existujú aj metódy špecializované na niektoré ODR 2. rádu, ale tie zvyčajne vyžadujú, že sila nesmie závisieť od rýchlosti. Pre počítačové hry však takú závislosť často potrebujeme. Takže metódam špecializovaným na rovnice 2. rádu sa vyhneme.

8.4.1 Eulerova metóda

`Aj v tomto odseku je časť, ktorú sme na prednáške nemali. Nebude ani na skúške. Je písaná zmenšeným fontom a užším textom.`

Eulerova metóda je najjednoduchšou metódou na riešenie ODR. Vychádza priamo z najbežnejšie používanej definície derivácie, t. j. z asymetrickej definície

$$\dot{y}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \tag{155}$$

Táto asymetria v presnej matematike nevadí, lebo tam máme nekonečne malé h. V približnej numerickej matematike namiesto nekonečne malého h musíme použiť konečne veľké. Tak dostávame formulu Eulerovej metódy (EM):

$$y(t+h) \approx y(t) + h\, f(t, y(t)) \tag{156}$$

Zrejme čím menšie je h, tým presnejšie neznámu funkciu v čase $t + h$ vypočítame. Takto postupujeme krok za krokom: Zo známej začiatočnej hodnoty $y(t_0)$ určíme $y(t_0 + h)$, potom $y(t_0 + 2h)$ atď. Kvôli takémuto numerickému riešeniu je teda potrebné definovať rozdelenie daného intervalu na rovnako dlhé úseky. Preto si na danom intervale zadefinujeme ekvidistantné (navzájom rovnako vzdialené) body t_0, t_1, ..., t_N:

$$t_{n+1} = t_n + h\,, \qquad n \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\} \tag{157}$$

čiže $t_N = t_{\max}$. Potom sa EM zapíše formulou

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)}\,, \qquad n \in \{0, 1, \ldots, N-1\} \tag{158}$$

Pritom y_n je *numerické priblíženie* ku presnej hodnote neznámej funkcie v čase t_n, teda

$$y_n \approx y(t_n) \tag{159}$$

Použitie Eulerovej metódy je, ako vidno z (158), také, že potrebujeme poznať hodnotu y v jednom z bodov t_n, napr. $y(t_0) \equiv y_0$, čo je okrajová podmienka. Tvar funkcie f je známy, takže potom už len stačí opakovane – v cykle – použiť formulu $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ a tým krok za krokom vypočítať neznámu funkciu vo všetkých ďalších bodoch t_n. Namiesto začiatočnej podmienky $y(t_0)$ by stačilo poznať hodnotu y v hociktorom inom bode z množiny $\{t_n\}_{n=0}^N$.

V každom kroku výpočtu spravíme istú numerickú chybu kvôli použitej aproximácii. Táto chyba sa nazýva *lokálna chyba*. V prípade Eulerovej metódy je jej veľkosť je 2. rádu v mocninách h. Ľahko sa to dá vidieť na analýze prvého kroku EM pomocou Taylorovho rozvoja funkcie $y(t)$ okolo bodu t_0:

$$y(t_0 + h) \;=\; \underbrace{y(t_0) + h\dot{y}(t_0)}_{\text{formula EM}} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}\,\ddot{y}(\xi)\,h^2}^{\mathcal{O}(h^2)}}_{\text{EM zanedbáva}} \tag{160}$$

kde $\xi \in \langle t_0, t_0 + h\rangle$. V EM zanedbaná časť Taylorovho rozvoja má teda veľkosť úmernú h^2. Táto hodnota, často zapisovaná ako $\mathcal{O}(h^2)$, je teda lokálnou chybou EM:[9]

$$\text{LCh} = \mathcal{O}(h^2) \tag{161}$$

EM je teda presná len do 1. rádu v kroku h. To je nízka presnosť a je spôsobená aj použitím asymetrickej definície derivácie. EM je v dôsledku toho, okrem nízkej presnosti, aj pomerne často numericky nestabilná.

Okrem lokálnej chyby sa zaujímame aj o globálnu chybu, ktorá vznikne po uskutočnení všetkých N krokov metódy. Jej horný odhad je

$$\text{GCh} = N\,\text{LCh} \;\propto\; \frac{t_{\max} - t_0}{h}\,h^2 \;\propto\; h \tag{162}$$

čiže globálna chyba EM je priamo úmerná zvolenej dĺžke kroku. Skrátením kroku by sme teda chyby vznikajúce diskretizáciou v princípe znížili, lenže by narástli zaokrúhľovacie chyby a výpočet by trval dlho.

EM je pomerne málo presná a neraz aj nestabilná práve kvôli tomu, že používa asymetrické (nesymetrické) priblíženie pre deriváciu funkcie. Typicky sa preto niekedy môže stať, že riešenie (priebeh hľadanej funkcie) bude „ulietať“ jedným smerom (buď k vyšším hodnotám než majú byť, alebo k nižším). Ak by sme s EM chceli počítať presnejšie, museli by sme veľmi skrátiť krok, ale tým by sa stala výpočtovo náročnejšou a ešte by sa viac začali prejavovať zaokrúhľovacie chyby. EM sa kvôli svojej pomerne nízkej presnosti a častejšej nestabilite používa len zriedka, a to na také výpočty, v ktorých jej nízka presnosť nevadí a nestabilita sa neprejaví. Používa sa však aj ako prvok iných – presnejších – metód, alebo ako východisko pre ich konštrukciu. Preto je EM z pedagogického hľadiska a pre porozumenie iných metód veľmi dôležitá.

8.4.2 Metóda poliaceho bodu

Táto metóda [7] je motivovaná symetrickou definíciou derivácie:

$$\dot{y}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y(t + h/2) - y(t - h/2)}{h} \tag{163}$$

[9] V literatúre sa lokálna chyba – *Local truncation error* (LTE), často definuje v prepočte na dĺžku kroku h, a preto je taká LTE $\propto \mathcal{O}(h)$.

Z nej dostávame vyjadrenie

$$y(t+h/2) \;\approx\; y(t-h/2) \;+\; h\,\dot{y}(t)$$

a z neho potom (ak ešte spravíme posun o $h/2$)

$$y(t+h) \approx y(t) + h\,f\left(t+\frac{h}{2},\, y\left(t+\frac{h}{2}\right)\right) \tag{164}$$

V tejto formule by sme však potrebovali vyčísliť funkciu f pomocou hodnoty neznámej funkcie v bode $t+h/2$, ale túto hodnotu ešte nepoznáme. (Zatiaľ sme došli len po bod t.) Preto hodnotu $y(t+h/2)$ v argumente funkcie f nahradíme aspoň približnou, určenou asymetrickým spôsobom, t. j. ako v Eulerovej metóde:

$$y(t+h/2) \approx y(t) + \frac{h}{2} f(t, y(t)) \tag{165}$$

Zhrňme tento postup takto:

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n) && (166a)\\ k_2 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) && (166b)\\ y_{n+1} &= y_n + k_2 && (166c)\end{aligned}}$$

Že lokálna chyba metódy poliaceho bodu (`Mid`) je $\mathcal{O}(h^3)$, teda o rád menšia než u Eulerovej metódy, nebudeme dokazovať, ale aj intuitívne je zrejmé, že táto metóda (s anglickým názvom *Midpoint method*) musí byť presnejšia než Eulerova. `Mid` je metóda 2. rádu, zatiaľ čo EM bola 1. rádu.

8.4.3 Metóda Runge-Kutta

Sú rôzne možnosti, v ktorých a koľkých bodoch vyčísľovať funkciu f vystupujúcu v (154). Vhodnou kombináciou rôznych vyčíslení zvýšime presnosť y_{n+1}. To je základná myšlienka metódy Runge-Kutta (RK). Najčastejšie sa používa metóda Runge-Kutta 4. rádu, čo je klasická verzia metódy RK. Je popísaná schémou [7]

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= h\,f(t_n, y_n) && (167a)\\ k_2 &= h\,f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) && (167b)\\ k_3 &= h\,f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) && (167c)\\ k_4 &= h\,f(t_{n+1}, y_n + k_3) && (167d)\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} && (167e)\end{aligned}}$$

Všimnime si, že číselné koeficienty v (167e) dajú v súčte 1. Lokálna chyba tejto metódy je $\mathcal{O}(h^5)$; je to teda metóda 4. rádu. Budeme ju preto označovať RK4, alebo len RK. V tomto kontexte sa metóda poliaceho bodu nazýva aj metódou Runge-Kutta 2. rádu (RK2). Ako vidieť, pri RK2 potrebujeme v každom kroku h dve vyčíslenia funkcie f. V metóde RK4 potrebujeme až 4 vyčíslenia. Práve vyčíslenie funkcie f zvykne býváť výpočtovo náročné a celkový počet vyčíslení tejto funkcie v priebehu integrovania (numerického riešenia) ODR určuje časovú náročnosť výpočtu. Pri tom istom kroku je teda výpočtová náročnosť RK4 zhruba dvojnásobná oproti RK2. Ak by sme v RK4 natiahli krok na dvojnásobok, bola by zhruba tak náročná ako RK2 a presnosť by zvyčajne mala lepšiu, aj keď nie vždy [7].

8.5 Sústava N obyčajných diferenciálnych rovníc 1. rádu

Je to veľmi častý prípad riešený v numerickej praxi, preto si o ňom pár slov povieme. Už sme povedali, že zovšeobecnenie známych metód na riešenie sústavy je pomerne jednoduché. Tento kratučký odsek je najmä na to, aby sme videli, že ani odvodenie a zápis formúl sa pre takúto sústavu nijako nezmení a neskomplikuje (v porovnaní s jednou rovnicou), ak si zvolíme praktické označovanie.

Uvažovaná úloha sa dá vyjadriť sústavou N diferenciálnych rovníc

$$\dot{y}_i = f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_N)\,, \quad i \in \{1, 2, \ldots, N\} \tag{168}$$

kde f_i sú dané funkcie a y_i neznáme funkcie nezávislej premennej t. Sústavu (168) nazývame *normálny systém diferenciálnych rovníc* (pozri aj [9], str. 262). Na vyriešenie úlohy je ešte potrebné poznať začiatočné podmienky, ktorých je N. Ak napr. úlohu riešime na intervale $t \in \langle a; b \rangle$, tak typicky poznáme hodnoty $y_i(a)$ pre všetky i, alebo $y_i(b)$. Kvôli kompaktnosti zápisu zavádzame vektorové značenie:

$$y \equiv y_1, y_2, \ldots, y_N\,, \qquad f \equiv f_1, f_2, \ldots, f_N \tag{169}$$

čo nám umožní sústavu (168) zapísať veľmi kompaktne:

$$\dot{y} = f(t, y) \tag{170}$$

Forma tohto zápisu je teda presne taká ako pri jednej ODR – rovnica (154). Aj spôsoby numerického riešenia sú v podstate presne také isté ako pre jednu rovnicu. Len treba aj niektoré iné symboly, napr. konštanty k_1 a k_2 v metóde poliaceho bodu, chaápať ako sady konštánt. Ak napr. riešime sústavu 6 rovníc, tak namiesto jedného k_1 potrebujeme 6 konštánt takého významu.

9. PREDNÁŠKA (22. 4. 2022)

9 Gravitačné pole

O pohybe telies urýchľovaných zemskou gravitáciu sme si síce už veľa povedali, ale zakaždým šlo len o pohyb v *homogénnom* gravitačnom, presnejšie povedané tiažovom poli s tiažovým zrýchlením o dobre známej hodnote okolo $g \doteq 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Homogénnosť znamená, že tak veľkosť ako aj smer gravitačného zrýchlenia sú v každom bode priestoru rovnaké.[10] Také približne homogénne pole je len v pomerne malých priestorových rozsahoch. Keď porovnáme gravitačné zrýchlenia napr. v Bratislave a v Ottawe, ich veľkosti síce môžu byť prakticky rovnaké, ale smery sa líšia, lebo Zem má zakrivený povrch. Aj toto je teda odchýlka od homogénnosti. A keď porovnáme gravitačné zrýchlenie na povrchu Zeme a vo výške povedzme 3000 km nad tým miestom, smery sú prakticky rovnaké, ale v tej veľkej výške je g menšie. Keď sa zaujímame o vzájomné gravitačné ovplyvňovanie sa telies vo všeobecnosti, konkrétnejšie napr. o pohyby rakiet, umelých družíc alebo planét, tiež musíme gravitačné pole popisovať ako nehomogénne.

9.1 Keplerové zákony

Tieto zákony sformuloval nemecký vedec (nielen astronóm) Johannes Kepler v rokoch 1609 (dielo *Astronomia Nova*,[11] prvé dva zákony) a 1619 (*Harmonices Mundi*,[12] tretí zákon) [10]. Kepler na ne prišiel aj vďaka pozorovaniam astronóma Tycha Braheho. Tu je znenie troch Keplerovych zákonov približne podľa učebnice [1]:

1. ***Planéty obiehajú okolo Slnka po eliptických trajektóriách. Slnko sa nachádza v spoločnom ohnisku týchto eliptických trajektórií.***

Poznamenávame, že výstrednosť tých elíps je veľmi malá, teda sú to takmer kružnice.

2. ***Plochy opísané spojnicou planéta – Slnko (sprievodičom planéty) sú pre tú istú planétu za ľubovoľné, ale rovnako dlhé časové intervaly, rovnaké.***

Stručne: Plošná rýchlosť je konštantná. Teda keď je planéta na svojej trajektórii v mieste bližšom ku Slnku, pohybuje sa rýchlejšie. Keď je v mieste elipsy vzdialenejšom od Slnka, pohybuje sa pomalšie.

[10] Z viacerých dôvodov, ktoré si ozrejmíme neskôr, by bolo vhodnejšie hovoriť o intenzite gravitačného poľa, a nie o gravitačnom zrýchlení. Pojem gravitačné zrýchlenie totiž vyvoláva dojem, že niečo musí padať, a pritom nemusí, ani nemusíme pojednávať o žiadnom telese, len o poli. Ale pojem gravitačné zrýchlenie je zaužívaný.

[11] *Nová astronómia*; to je len začiatok veľmi dlhého názvu tej knihy.

[12] *Harmónie sveta*

3. ***Druhé mocniny obežných dôb planét sú úmerné tretím mocninám ich hlavných polosí:***

$$T^2 \propto a^3 \tag{171}$$

Ak to chceme napísať ako rovnosť, tak takto: $\boldsymbol{T^2 = ka^3}$, kde $\boldsymbol{k}$ je nejaká konštanta, ktorá je pre každú planétu rovnaká a môže teda závisieť len od vlastností Slnka.

Na základe Keplerovych zákonov neskôr Isaac Newton sformuloval svoj gravitačný zákon, o ktorom sa budeme učiť v ďalšej časti. Keplerove zákony teda nie sú to, čo v dnešnej fyzike pokladáme za základné zákony prírody a pohybu. Takými sú práveže Newtonove pohybové zákony a aj gravitačný zákon. Keplerove zákony sa dajú odvodiť z Newtonových zákonov a treba ich teda chápať ako dôsledok Newtonových zákonov. Historický postup nadobúdania poznatkov šiel však opačným sledom: najprv boli pozorovania Tycha Braheho a aj na ich základe Kepler sformuloval zákony pre pohyb planét. Až neskôr z týchto zákonov Newton odvodil gravitačný zákon. To býva vo fyzike zvyčajný postup: najprv pozorujeme nejaké javy, teda robíme experimenty a zaznamenávame ich výsledky a potom na ich základe spravíme všeobecnejšie hypotézy (ktoré treba ešte overovať aj ďalšími pokusmi).

9.2 Newtonov gravitačný zákon

Aj tento zákon bol prvýkrát publikovaný v Newtonovej práci *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* z r. 1687, i keď bol aj istý spor o autorstvo. Newton objavil tento zákon na základe empirických poznatkov o tom, ako sa planéty pohybujú, čiže na základe Keplerovych zákonov. Keplerove zákony predpokladajú eliptické trajektórie. Odvodiť Newtonov zákon univerzálnej gravitácie (stručne gravitačný zákon) na základe excentrických eliptických trajektórií by bolo ťažké a zdĺhavé. Ale špeciálnym prípadom elipsy je kružnica (je to elipsa s nulovou výstrednosťou), takže môžeme uvažovať kružnicu a odvodenie bude potom jednoduché a rovnako správne. Koniec-koncov, trajektórie planét majú takmer nulovú excentricitu (výstrednosť). Elipsa s nulovou výstrednosťou, čiže kružnica, má hlavnú a vedľajšiu polos rovnako dlhé a rovné polomeru kružnice: $a = b = r$.

Použitím druhého Keplerovho zákona pre kružnicovú trajektóriu vyplýva, že taká planéta sa okolo Slnka pohybuje stále rovnako veľkou rýchlosťou, čiže rovnomerným pohybom [1]. Označme si obežnú dobu planéty (obežnú periódu) ako T. Veľkosť rýchlosti sa potom dá vyjadriť

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{172}$$

Planéta má pri takomto pohybe dostredivé zrýchlenie veľkosti [treba si prípadne pozrieť odsek 1.5.5, najmä rov. (63)]

$$a_\perp = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}\, r \tag{173}$$

Pod vzdialenosťou r máme na mysli vzdialenosť stredu Zeme od stredu Slnka. Podľa tretieho Keplerovho zákona (171) platí

$$T^2 = kr^3 \tag{174}$$

pričom koeficient k je rovnaký pre všetky planéty (to je zmysel 3. Keplerovho zákona) a môže preto závisieť len od vlastností Slnka [1]. Dosadením tohto vyjadrenia do (173) dostávame

$$a_\perp = \frac{4\pi^2}{kr^2} = \frac{K}{r^2} \tag{175}$$

kde samozrejme aj $K = 4\pi^2/k$ môže závisieť len od vlastností Slnka.

Iné zrýchlenie ako dostredivé planéta pohybujúca sa po kružnici nemá. Preto podľa 2. Newtonovho zákona je sila pôsobiaca na planétu o hmotnosti m rovná $\vec{F} = m\vec{a}_\perp$ a je to samozrejme dostredivá sila. Jej veľkosť je

$$F = ma_\perp = \frac{Km}{r^2} \tag{176}$$

Teraz preberiem presne slová z knihy [1], lebo je to tam napísané stručne a výstižne:

„Ak tento výsledok má byť všeobecným vyjadrením silového pôsobenia hmotného objektu na hmotný objekt[13] *tak planéta s hmotnosťou m musí pôsobiť na Slnko s hmotnosťou M silou, ktorej absolútna hodnota sa rovná*

$$F' = \frac{K'M}{r^2} \tag{177}$$

kde konštanta K' môže teraz závisieť len od vlastností planéty.“

Podľa tretieho Newtonovho zákona musí platiť $\vec{F}' = -\vec{F}$. Preto sa veľkostí tých dvoch síl rovnajú:

$$\frac{Km}{r^2} = \frac{K'M}{r^2} \tag{178}$$

čiže

$$Km = K'M \tag{179}$$

a z toho dostávame

$$\frac{K}{M} = \frac{K'}{m} = \varkappa \tag{180}$$

kde $\varkappa$ (jeden zo spôsobov písania gréckeho písmena kapa) je označenie pre konštantu, ktorá nezávisí ani od vlastností planéty ani Slnka ani od ničoho iného; je to teda *univerzálna* konštanta. Veľkosť príťažlivej sily, ktoru na seba Slnko a hociktorá planéta pôsobia, teda môžeme vyjadriť formulou

$$\boxed{F = \varkappa \frac{mM}{r^2}} \tag{181}$$

čo je Newtonov gravitačný zákon (NGZ). Jeho slovné znenie je:

> *Dva hmotné body pôsobia na seba silami, ktoré sú úmerné súčinu ich vzdialenosti a nepriamo úmerné štvorcu ich vzdialenosti [1].*

Univerzálnu konštantu $\varkappa$ nazývame ***gravitačná konštanta***. Kvôli slabosti gravitačnej sily sa meria pomerne obtiažne. Jej hodnota je približne [11]

$$\varkappa = 6{,}674 \;.\; 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2} \tag{182}$$

Jej jednotka sa samozrejme dá vyjadriť aj pomocou základných jednotiek SI sústavy, lebo $\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$. Preto $\mathrm{N\,m^2/kg^2} = \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$. Gravitačná sila je vždy príťažlivá. Preto je ľahké vyjadriť NGZ aj tak, aby podával informáciu aj o smere gravitačnej sily: Nech dva hmotné body, P_1, P_2, majú hmotnosti m_1, m_2 a nachádzajú sa v miestach $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$. Potom gravitačná sila, ktorou pôsobí hmotný bod P_1 na hmotný bod P_2, je

$$\boxed{\boxed{\vec{F} = -\varkappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}}} \tag{183}$$

kde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ je vektor smerujúci od P_1 ku P_2. To poradie indexov v $\vec{r}_{12}$ môže na prvý pohľad vyzerať neprakticky, ale keď si tú rovnicu prepíšeme do tvaru $\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \vec{r}_2$, začne to vyzerať pochopiteľnejšie.

Newtonov zákon gravitácie (183) je teda sformulovaný pre hmotné body, čiže v idealizovanej alebo abstrahujúcej podobe. Výpočty pomocou tohto zákona sa však dajú robiť nielen pre hmotné body, ale aj pre telesá, lebo teleso sa dá poskladať z hmotných bodov. Napr. sa dá ukázať, že gravitačný zákon (183) platí aj pre telesá so sféricky symetrickými rozloženiami hmotností. Takými telesami približne sú aj planéty a Slnko. Pod r_{12} treba rozumieť vzájomnú vzdialenosť stredov telies. Telesá musia byť od seba vzdialené aspoň tak, aby sa neprekrývali. Pri veľmi veľkých vzájomných vzdialenostiach telies (mnohonásobne väčších, než ich rozmery) platí Newtonov zákon (183) približne aj pre telesá bez sférickej symetrie, napr. pre kocky. Ak by sme chceli počítať gravitačné pôsobenie pomerne blízkych telies takých, z ktorých aspoň jedno nemá sférickú symetriu, museli by sme si tie telesá (aspoň to bez guľovej symetrie) predstaviť ako poskladané z hmotných bodov alebo malých kúskov a sčítavať gravitačnú silu po tých kúskoch.

[13] Ja doplňam, že máme na mysli hmotné body alebo telesá so sféricky, t. j. guľovo symetrickým rozložením hmoty.

9.3 Gravitačné zrýchlenie a intenzita gravitačného poľa

Ak na hmotný bod o hmotnosti m nachádzajúci sa v mieste $\vec{r}$ pôsobí gravitačná sila $\vec{f}$, tak intenzita gravitačného poľa v mieste $\vec{r}$ je definovaná formulou

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{m} \tag{184}$$

Táto definícia a v našom prípade aj voľba označenia[14] môže byť inšpirovaná elektrostatikou, kde dobre poznáme pojem intenzita elektrického poľa definovaný podobnou formulou:

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q} \tag{185}$$

kde v tomto prípade $\vec{f}$ je sila elektrostatického poľa, ktorá pôsobí na bodový náboj q nachádzajúci sa v nejakom mieste $\vec{r}$.

Sila deleno hmotnosť = zrýchlenie, takže sa zdá, že intenzita gravitačného poľa je zároveň aj zrýchlením, v tomto prípade nazývaným gravitačné zrýchlenie. Naozaj je tomu tak? Nie vždy; iba v prípade, keď aj celková sila, označme ju $\vec{f}_{\text{tot}}$, pôsobiaca na daný hmotný bod je rovná tej $\vec{f}$. To vo všeobecnosti tak vôbec nemusí byť, takže má zmyslel definovať zvlášť pojem *intenzita gravitačného poľa* a odlišovať ho od aktuálneho zrýchlenia daného hmotného bodu. Pojem *gravitačné zrýchlenie* však vo voľnejšom zmysle používame aj bez toho, že by sme mali na mysli naozajstné fyzikálne zrýchlenie nejakého hmotného bodu či telesa a máme vtedy vlastne na mysli intenzitu gravitačného poľa. Takže v takomto zmysle pojmy intenzita gravitačného poľa a gravitačné zrýchlenie neraz stotožňujeme.

Hmotný bod o hmotnosti M umiestnený v počiatku súradnicovej sústavy okolo seba vytvára gravitačné pole, ktoré má podľa Newtonovho gravitačného zákona (183) v mieste $\vec{r}$ intenzitu

$$\vec{E} = -\varkappa \frac{M}{r^3}\vec{r} \tag{186}$$

Táto formula platí nielen pre gravitačné pole bodu, ale aj pre gravitačné pole ľubovoľného sféricky symetrického priestorovo ohraničeného zhluku hmoty o celkovej hmotnosti M, pričom miesto $\vec{r}$ musí v takom prípade byť mimo toho zhluku hmoty. O tom sme v kontexne NGZ hovorili už aj na konci predošlého odseku. Keďže telesá ako Slnko, Zem, Mesiac či ďalšie sú približne guľových tvarov a hmotnosť je v nich rozložená približne guľovo symetricky, vyjadrenie (186) veľmi dobre platí aj pre ne, ale samozrejme len pre $r > R$, kde R je polomer daného nebeského telesa. Na základe úvah ako v elektrostatike by sme ľahko vedeli prísť napr. na to, že v strede Zeme je ňou vytvárané gravitačné zrýchlenie nulové. (Lepšie povedané, intenzita je nulová.)

10 Práca a energia

Energia nie je ľahko definovateľný pojem a súvisí s prácou. Najprv si teda povieme o (mechanickej) práci nejakej sily a trochu neskôr o dvoch konkrétnych formách energie: kinetická (pohybová) a potenciálna.

10.1 Práca a výkon

Pomocou úvah o práci sa ku pojmu energia dostaneme ľahšie. Na úrovni základnej školy sa učí, že práca = sila krát dráha:

$$W = Fs \tag{187}$$

To je správne, ale len pre silu, ktorá (1) počas konania práce nemení ani svoju veľkosť ani smer, teda je je konštantná, (2) smer sily je rovnobežný so smerom pohybu posúvaného telesa.

[14] Na prednáške som intenzitu gravitačného poľa označil $\vec{G}$, ale neskôr som sa rozhodol použiť pre ňu symbol $\vec{E}$, lebo $\vec{G}$ sme občas používali na označenie tiažovej sily.

Príklad vozíčka na koľajniciach nás učí, že môžeme naň tlačiť hoc aj veľkou silou, ale ak tlačíme kolmo na smer koľajníc, nebude sa hýbať a prácu tým pádom konať nebudeme. Aby sme aj takéto prípady popísali správne, uvedenú základoškolskú definíciu zovšeobecníme takto:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \tag{188}$$

kde teda už vystupuje skalárny súčin pôsobiacej sily a vektora posunutia. Táto stredoškolská formula jasne aj matematicky ukazuje, že práca môže byť i záporná; napr. keď skladáme tehlu zo stola na podlahu, vykonáme zápornú prácu. Aj v posledne napísanej formule je však sila konštantná (aj čo sa týka veľkosti, aj čo sa týka smeru). Prípadne by to mohla byť priemerná sila na danom úseku dĺžky $s = |\Delta\vec{r}|$. Všeobecná („vysokoškolská“) definícia práce, ktorú vykoná sila $\vec{F}$, keď posunie hmotný bod z miesta $\vec{r}_1$ do miesta $\vec{r}_2$ [stručnejšie: z (1) do (2)], je

$$\boxed{W = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}} \tag{189}$$

a **vo všeobecnosti závisí od tvaru integračnej krivky (cesty) medzi bodmi $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$**. V matematicej terminológii sa taký integrál nazýva *krivkový integrál* druhého druhu.[15] Sila v (189) môže závisieť napr. aj od času. Treba zdôrazniť, že to nemusí byť celková sila na daný hmotný bod. Je to len tá sila, u ktorej nás zaujíma, akú prácu koná. Napr. keď rovnomerne priamočiaro dvíhame tehlu, tak nás zvyčajne zaujíma, akú prácu silou svojej ruky konáme. Tá sila je $\vec{f}_{\text{ruka}} = -m\vec{g}$, ale celková sila na tú tehlu je nulová (keďže tiažová sila $\vec{F}_G = m\vec{g}$ sa kompenzuje so silou našej ruky).

Keď budeme počítať, aká práca je vykonaná za jednotku času, prídeme tým ku pojmu *výkon*. Spravíme to takto: Počítajme, akú prácu vykoná sila $\vec{F}$ za infinitezimálne krátky časový úsek dt. Je to

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t$$

Potom môžeme napísať definíciu a hneď aj vyjadrenie výkonu sily $\vec{F}$ takto:

$$\boxed{P \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}} \tag{190}$$

10.2 Definícia potenciálového poľa

Majme silové pole a v ňom hmotný bod. Pole v každom mieste pôsobí na bod silou $\vec{f}_{\text{pole}}(\vec{r})$, teda závislou len od polohy hmotného bodu. Keď chceme daný hmotný bod presúvať v priestore, musíme prekonávať silu poľa. Pokiaľ bude presúvanie pomalé a rovnomerné, našou rukou budeme potrebovať pôsobiť takmer presne silou kompenzujúcou silu poľa, teda $\vec{f}_{\text{ruka}} \approx -\vec{f}_{\text{pole}}$. (Presne by taká rovnosť platila, len ak by sme ten hmotný bod presúvali rovnomerne priamočiaro. Neskôr sa presvedčíme, že pre naše úvahy o presúvaní hmotného bodu „rukou“ vôbec nie je nutné splnenie podmnienky $\vec{f}_{\text{ruka}} = -\vec{f}_{\text{pole}}$ a pri skutočných pokusoch by túto podmienku ani nebolo možné presne splniť, lebo napr. akékoľvek odchýlenie sa od priamočiarosti by ju narušilo.) Akú prácu sila tejto ruky vykoná, keď v danom poli presunie hmotný bod z miesta (1) do miesta (2) ? Bude to práca

$$W_{\text{ruka}} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{ruka}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{191}$$

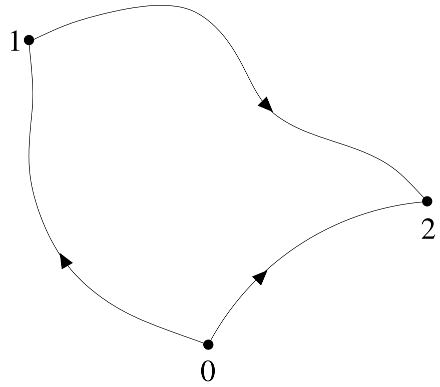
Ak platí $\vec{f}_{\text{ruka}} \approx -\vec{f}_{\text{pole}}$, môžeme písať

$$W_{\text{ruka}} \approx -\int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{pole}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{192}$$

> <u>Definícia:</u> *Ak sila $\vec{f}_{\text{pole}}$ je len funkciou polohy*[16] *a integrál na pravej strane (192) nezávisí od tvaru integračnej cesty (teda závisí len od výberu začiatočného a koncového bodu), tak pole vytvárajúce silu $\vec{f}_{\text{pole}}$ nazveme potenciálovým poľom [12].*

[15] Prvého druhu by bol taký, ktorý by mal len bežný súčin, nie skalárny.

[16] Túto podmienku je nutné spomenúť. Sila $\vec{f}_{\text{pole}}$ ***nesmie závisieť od rýchlosti hmotného bodu***. Od času môže závisieť len tzv. parametricky. Ako zaujímavosť si uveďme, že v stacionárnom magnetickom poli je integrál zo sily na nabitú časticu takisto nezávislý od integračnej cesty. (Je nulový.) Aj energia tej častice sa zachováva, ak ostaneme na úrovni elektrostatiky a magnetostatiky, čiže keď zanedbáme prípadné vyžarovanie. Napriek tomu silu magnetického poľa nezaraďujeme medzi sily vytvárané potenciálovým poľom, a to preto, že závisí aj od rýchlosti hmotného bodu.



Obr. 12: Obrázok ku zavedeniu pojmu potenciálna energia.

Pritom je absolútne nepodstatné, či pravá strana formuly (192) je naozaj rovná práci ruky, alebo či je od nej úplne odlišná. O možnej približnej rovnosti $\vec{f}_{\text{ruka}} \approx -\vec{f}_{\text{pole}}$ sme písali len z motivačných dôvodov, aby sme sa proste nejako dopracovali ku integrálu na pravej strane (192).

10.3 Definícia potenciálnej energie a jej vzťah ku práci

Potenciálna energia hmotného bodu v mieste (2) vzhľadom na miesto (1) je definovaná vzťahom [12]

$$U_{21} = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{pole}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{193}$$

Ak by platilo $\vec{f}_{\text{ruka}} \approx -\vec{f}_{\text{pole}}$, tak by sme mali $U_{21} = W_{\text{ruka}}$. Bude praktické zvoliť si nejaký univerzálnejšie vhodný referenčný bod; označme ho ako bod (0). Potom príslušné potenciálne energie v bodoch (1) a (2) vzhľadom na bod (0) označíme ako U_{10} a U_{20}. Platí (pozri obrázok 12)

$$U_{10} + U_{21} = U_{20} \tag{194}$$

(lebo integrály nezávisia od tvaru kriviek). Prácu vonkajšej sily (ruky) proti poľu potom môžeme vyjadriť ako $W_{\text{ruka}} \approx U_{20} - U_{10}$. ***Nuly pre jednoduchosť ďalej nebudeme písať.*** Potom

$$\boxed{U_{21} = U_2 - U_1} \approx W_{\text{ruka}} \tag{195}$$

Za predpokladu $\vec{f}_{\text{ruka}} \approx -\vec{f}_{\text{pole}}$ sa teda práca vykonaná vonkajšou silou ruky (proti sile poľa) približne rovná zmene potenciálnej energie.

Potenciálna energia, ako z vyššie uvedeného vyplýva, je teda len funkciou polohy hmotného bodu:

$$\boxed{U = U(\vec{r})} \tag{196}$$

Nezávisí teda od jeho rýchlosti. V ďalšom výklade už zvyčajne alebo často budeme používať len označovania ako v (196), teda bez indexu pri U. Predbežné definičné vyjadrenie (193) potenciálnej energie teraz môžeme nahradiť praktickejším a ešte ho aj spodrobníme:

$$\boxed{\boxed{U(\vec{r}) = -\int_{(0)}^{(\vec{r})} \vec{f}_{\text{pole}}(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,'}} \tag{197}$$

Čiarku vo $\vec{r}\,'$ v podintegrálnom prípade píšeme kvôli odlíšeniu integračnej premennej od označenia hornej hranice integrovania. Ale pamätajme, že hodnota U závisí aj od voľby referenčného bodu. Ak zmeníme refrenčný bod, tak hodnoty potenciálnej energie sa posunú o nejakú konštantu:

$$U_{\text{nová}}(\vec{r}) = U_{\text{stará}}(\vec{r}) + \text{const} \tag{198}$$

Príklad: Na prednáškovom stole je plastová fľaša s vodou. Aká je jej potenciálna energia?

Aby sme na túto otázku vedeli zodpovedať, musíme si najprv zvoliť referenčný bod (0), vzhľadom na ktorý chceme tú potenciálnu energiu určovať. Tak nech tým referenčným bodom je niektoré miesto na podlahe. Fľaša má hmotnosť m a je vo výške h nad podlahou. Sila poľa je $\vec{f}_{\text{pole}} = m\vec{g} = (0, 0, -mg)$, čiže nezávislá od polohy. Môžeme si predstaviť, že fľašu z podlahy zdvíhame zvisle (ale nezáleží na tom). Potom sa vyjadrenie (197) konkretizuje na

$$U(h) = -\int_0^h (0, 0, -mg) \cdot (0, 0, -\mathrm{d}z') = mgh \tag{199}$$

Potenciálna energia telesa v tiažovom poli Zeme vo výške h nad referečnou úrovňou je teda mgh. Ak by sme však referečnú úroveň zvolili na úrovni výšky stola, teda tam, kde je fľaša položená, tak vzhľadom na túto inú referenčnú úroveň by tá plastová fľaša mala nulovú potenciálnu energiu. A ak by sme referenčnú úroveň zvolili kdesi na strope, tak potenciálna energia takej fľaše by bola záporná.

10.4 Zachovanie mechanickej energie

Vyššie uvažovaná pomocná alebo motivačná približná rovnosť $\vec{f}_{\text{ruka}} \approx -\vec{f}_{\text{pole}}$ v mnohých situáciách vôbec nemusí platiť. Napr. ak rukou prudko mykneme, tak v tom okamihu neplatí ani približne. Namiesto takej pomocnej nepresnej motivačnej rovnosti radšej začnime používať rovnosť, ktorá v našich úvahách platí za akýchkoľvek okolností:

$$\vec{f}_{\text{tot}} = \vec{f}_{\text{pole}} + \vec{f}_{\text{ruka}} \tag{200}$$

$\vec{f}_{\text{tot}}$ je celková[17] sila na uvažované teleso alebo hmotný bod. Je to teda vektorový súčet všetkých síl, ktoré na teleso pôsobia. Pod $\vec{f}_{\text{ruka}}$ si nemusíme predstavovať len silu nejakej ozajstnej ruky. Aj tá to môže byť, ale môže to byť aj sila od ramena nejakého stroja, a nielen to: do sily $\vec{f}_{\text{ruka}}$ zahŕňame všetky ostatné sily ***okrem sily*** $\vec{f}_{\text{pole}}$, ktoré na teleso pôsobia. Do $\vec{f}_{\text{ruka}}$ teda zahŕňame napr. sily trenia, aerodynamickú odporovú silu a našli by sme aj ďalšie prípadné sily. Do sily $\vec{f}_{\text{pole}}$ totiž už z jej samotnej definície môžeme zahrnúť len silu od potenciálového poľa (alebo aj súčet takých polí, ak by ich bolo viac). Trecie a odporové sily však nie sú silami pochádzajúcimi od nejakého potenciálového poľa, takže, ak sú prítomné, ich zahŕňame do sily $\vec{f}_{\text{ruka}}$.

Keďže ***celková sila*** je tá, ktorá podľa 2. Newtonovho zákona ***určuje zrýchlenie***, tak platí

$$m\vec{a} = \vec{f}_{\text{tot}} \tag{201}$$

Teraz skúsme určiť prácu vykonanú tou „rukou" pri presune telesa po ľubovoľnej zvolenej krivke z bodu (1) do bodu (2). V súlade s definíciou práce, formulou (189), a použitím rozkladu (200) ju vieme vyjadriť

$$W_{\text{ruka}} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{ruka}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{tot}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{pole}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{202}$$

Zaveďme si pomocné označenia (i keď môžu byť z nejakých dôvodov mätúce, ale berme ich najmä ako označenia)

$$W_{\text{tot}} \equiv \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{tot}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{203}$$

$$W_{\text{pole}} \equiv \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{pole}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{204}$$

Potom môžeme napísať

$$W_{\text{ruka}} = W_{\text{tot}} - W_{\text{pole}} \tag{205}$$

[17] *Totus*, *total* sú cudzie slová vo význame *celkový* a index $_{\text{tot}}$ od nich odvodený sa vo fyzikálnych formulách často používa.

A Aerodynamická odporová sila pri pádoch a vrhoch

Úlohy o pádoch a vrchoch sme v najjednoduchšej verzii – bez odporu vzduchu – už vyriešili. Dokonca sme tým predbehli teóriu, lebo sme to preberali v časti *Kinematika*, a pritom sú to úlohy, kde sa hovorí aj o sile (tiažovej), takže systematicky by to malo patriť do časti *Dynamika* (alebo *Newtonove zákony*). Ale videli sme, že to boli pekné ilustrácie kinematiky, zvlášť pre predmet pojednávajúci o fyzikálnych modeloch v počítačových hrách a bola tam len tá jedna, aj to iba konštantná sila $\vec{F}_G$, takže nebolo ťažké to predbehnutie spraviť.

So skúsenosti však vieme, že odpor vzduchu sa pri pádoch a vrhoch niekedy významne prejavuje a vtedy sa teda nedá zanedbať. Sila odporu vzduchu má vyslovene superdôležitú úlohu pri zoskokoch parašutistov, ale aj pri letoch lietadiel. Zo skúsenosti vieme, že najmä vtedy je odpor vzduchu významný, keď je teleso pomerne ľahké a má pomerne veľké rozmery. To je napr. aj prípad lopty. Ale aj pri ťažkých telesách, ako napr. kameň, býva odpor vzduchu často nezanedbateľný – vtedy, keď sa také teleso pohybuje veľmi rýchlo. Situácie, kde odpor vzduchu hrá dôležitú úlohu, sú teda bežné tak v reálnom svete ako aj v počítačových hrách. Nielen pri pádoch a vrhoch, ale aj pri jazde áut, lete lietadiel a našli by sa aj ďalšie príklady. Spomeňme si, že niečo s odporom vzduchu sme už na našom predmete mali: rovnomerne klesajúci parašutista, o ktorom sme uvažovali v súvislosti s Newtonovými zákonmi v časti 4.4 ako o príklade, kedy je výsledná sila na teleso nulová.

V tejto časti (alebo na cvičeniach) si takýto druh pohybu preberieme všeobecnejšie: nielen ustálený stav, ale aj fázu, kedy teleso zrýchľuje (ešte predtým ako dosiahne ustálenú rýchlosť), alebo spomaľuje (napr. keď parašutista ovorí padák). Uvidíme aj, že nie všetko sa bude dať riešiť analyticky. Preto je voľný pád a vôbec vrhy so zahrnutím odporu vzduchu aj vhodnou úloh na precvičenie numerického riešenia pohybových rovníc. Z matematického hľadiska budeme riešiť *obyčajné diferenciálne rovnice.*

Z hľadiska úvah o odporovej sile môžeme pohyby telies roztriediť na dve katogórie:

1. Pohyby, pri ktorých vzduch okolo telesa nevytvára víry. To je prípad pomerne pomalých pohybov a také bezvírové prúdenie vzduchu nazývame ***laminárne prúdenie***. Sila odporu vzduchu pri ňom je úmerná veľkosti rýchlosti telesa.
2. Pohyby, pri ktorých víry okolo telesa (typicky za ním) vznikajú. Toto nastáva pri pomerne veľkých rýchlostiach a príslušné prúdenie vzduchu nazývame ***turbulentné prúdenie***. Sila odporu vzduchu pri turbulentnom prúdení je približne úmerná *štvorcu* rýchlosti telesa.

Hodnota rýchlosti, pri ktorej sa prúdenie mení z laminárneho na turbulentné, závisí aj od tvaru telesa. Nie je jednoduché túto rýchlosť určiť. Ale dá a zistiť meraniami. V našom predmete, čo sa týka sily odporu vzduchu, budeme pre jednoduchosť výpočtov a modelovania predpokladať len turbulentné prúdenie. Nevadí, že také modely nebudú úplne presne v zhode so skutočnosťou; kvalitatívne budú pohyby popísané pomerne dobre a to pre počítačové hry stačí. Malé odchýlky od presnej dynamiky si hráč nevšimne.

Konvenčne sa aerodynamická odporová sila vyjadruje približnou formulou tvaru

$$F_{\text{odp}} = \frac{1}{2} C S \rho v^2 \tag{A.1}$$

kde C je koeficient odporu vzduchu, S plošný prierez telesa v smere kolmom na rýchlosť a ρ je hustota vzduchu. Veličiny ρ, C a S nemusia nutne byť počas pohybu nemenné. Môžu sa aj meniť, ako sa to dá ľahko ilustrovať na prípade parašutistu: Počas jeho zoskoku sa husota vzduchu môže významne meniť, najmä ak ide o zoskok z veľkej výšky. Je totiž známe, že s rastúcou nadmorskou výškou hustota vzduchu klesá, poodbne ako klesá tlak vzduchu. Ani plocha S a koeficient odporu vzduchu nie sú pri modelovaní zoskoku parašutistu konštantné, lebo najprv padá so zatvoreným padákom (malá hodnota S) a až neskôr ho otvorí (čím sa S mnohonásobne zväčší). Koeficient odporu vzduchu závisí od tvaru telesa a teda tiež sa otovrením padáka zmení.

A.1 Voľný pád a zvislý vrh

A.1.1 Formulácia úlohy

Zaveďme si os z tak, že jej kladný smer je kolmo hore od zeme. Rýchlosť telesa má potom nenulovú len zložku v_z, ktorá je pri pohybe nadol záporná. Za vyššie uvedených fyzikálnych podmienok potom pre pohyb telesa platí

Newtonova pohybová rovnica

$$m\dot{v}_z = -mg + \frac{1}{2}CS\rho v_z^2 \,\mathrm{sgn}(v_z) \tag{A.2}$$

kde

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1\,, & x < 0 \\ 0\,, & x = 0 \\ 1\,, & x > 0 \end{cases} \tag{A.3}$$

Táto znamienková funkcia je potrebná na to, aby odporová sila bola orientovaná proti smeru rýchlosti. Neskôr však funkciu $\mathrm{sgn}(v_z)$ písať nebudeme, lebo jej prítomnosť sa dá nahradiť jednoduchším zápisom. Bodka nad v znamená časovú deriváciu:

$$\dot{v}_z \equiv \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

Zaveďme pomocné označenie

$$K(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\frac{CS\rho}{m} \tag{A.4}$$

ktorým sme zároveň vyznačili, že toto K môže závisieť od miesta v priestore a/alebo aj od času (v zmysle, aký sme si na príklade parašutistu vysvetlili). Potom diferenciálna rovnica (DR) (A.2) nadobudne kompaktnejší tvar

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g - K(\vec{r}, t)\,|v_z|\,v_z} \tag{A.5}$$

kde sme už zápis pomocou funkcie $\mathrm{sgn}(v_z)$ nahradili ekvivalentným vyjadrením.

A.1.2 Riešenie pre homogénnu atmosféru

V tejto podčasti predpokladajme, že hustota vzduchu ρ je konštantná. A tiež predpokladajme, že konštatné sú aj C a S. Vtedy bude konštantná aj hodnota K. Index z v označení v_z budeme v tejto časti kvôli stručnosti zápisu vynechávať. V tomto príklade a v tomto odseku teda bude platiť

$$v \equiv v_z$$

a ak by sme chceli hovoriť o absolútnej hodnote rýchlosti, museli by sme pre ňu použiť iné označenie, teda $|v|$. Máme teda riešiť rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g - K|v|v \tag{A.6}$$

V tomto prípade máme šťastie, lebo táto rovnica sa dá vyriešiť presne analyticky, a to *metódou separácie premenných*. Spravíme to ***pre prípad pádu len nadol***, teda pre začiatočnú podmienku $\boldsymbol{v_0 \leq 0}$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{Kv^2 - g} = \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v'}{Kv'^2 - g} = \int_0^t \mathrm{d}t' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{gK}} \int\limits_{\sqrt{K/g}\,v_0}^{\sqrt{K/g}\,v} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1} = t \tag{A.7}$$

Potrebnú primitívnu funkciu si nájdeme napr. v [13]:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \mathrm{atanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \tag{A.8}$$

Dostávame

$$\mathrm{atanh}\left(\sqrt{\frac{K}{g}}\,v_0\right) - \mathrm{atanh}\left(\sqrt{\frac{K}{g}}\,v\right) = \sqrt{gK}\,t$$

Platí identita ([13] alebo Wikipédia)

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$$

s použitím ktorej dostaneme

$$v(t) = \frac{v_0 - v_\infty \tanh\left(\dfrac{gt}{v_\infty}\right)}{1 - \dfrac{v_0}{v_\infty}\tanh\left(\dfrac{gt}{v_\infty}\right)} \tag{A.9}$$

kde

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho CS}} \tag{A.10}$$

je tzv. ***terminálna rýchlosť*** voľného pádu. Jej hodnota sa dá ľahko získať a porozumieť aj bez riešenia diferenciálnej rovnice: vyplýva z rovnováhy medzi tiažovou silou a aerodynamickou odporovou silou.[18] Teleso ju približne nadobudne po dlhom čase pádu za predpokladu nemennej hustoty atmosféry a ďalších podmienok. Pripomíname, že výsledok (A.9) platí len pre $v_0 \leq 0$, teda len pre pád čisto nadol.

Ak teleso len voľne (s nulovou počiatočnou rýchlosťou v_0) pustíme padať z výšky z_0, tak dostávame výsledok

$$\boxed{v(t) = -v_\infty \tanh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)} \tag{A.11}$$

Pre závislosť výšky od času dostaneme pre $v_0 = 0$ pomocou všeobecnej formuly

$$z(t) = z(0) + \int_0^t v_z(t')\mathrm{d}t' \tag{A.12}$$

výsledok

$$\boxed{z(t) = z_0 - \frac{v_\infty^2}{g}\ln\left[\cosh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)\right]} \tag{A.13}$$

Označme si čas, za ktorý teleso dopadne (dosiahne výšku $z = 0$) ako t_D. Z rovnice (A.13) preň dostávame

$$t_\mathrm{D} = \frac{v_\infty}{g}\,\mathrm{acosh}\left[\exp\left(\frac{gz_0}{v_\infty^2}\right)\right] \tag{A.14}$$

Veľkosť dopadovej rýchlosti vychádza

$$v_\mathrm{D} = |v(t_\mathrm{D})| = \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2gz_0}{v_\infty^2}\right)}\; v_\infty \tag{A.15}$$

Pri odvodení tohto výrazu sme využili niektoré vzťahy pre hyperbolické funkcie:

$$\tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{A.16}$$

Veľmi praktické sa môže ukázať poznať závislosť momentálnej rýchlosti pádu od výšky z. Tvar tejto funkcie sa dá odvodiť dvomi spôsobmi: (i) Skombinovaním výsledkov (A.11) a (A.13), (ii) Prepísaním pôvodnej diferenciálnej rovnice (A.2) na rovnicu s nezávislou premennou z, ako to vo všeobecnejšom prípade bude spravené v rozsiahlej poznámke pod čiarou odseku A.3 a aj tu (pre K = konšt) stručne v kratšej poznámke pod čiarou.[19] Obidvoma spôsobmi (ten druhý je asi ľahší) dostaneme výsledok

$$\boxed{v(z) = -\sqrt{1 - \exp\left[-\frac{CS\rho}{m}(z_0 - z)\right]}\; v_\infty} \tag{A.18}$$

V tomto výsledku je zaujímavé, že tiažové zrýchlenie doň vstupuje len cez faktor v_∞ a pripomeňme, že platí len pre nulovú začiatočnú rýchlosť.

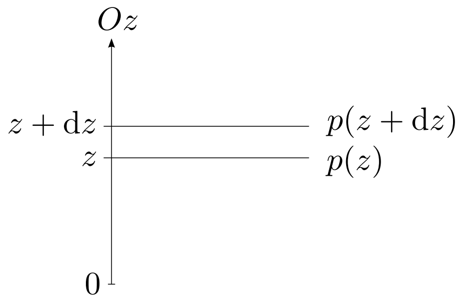
---

[18] Pri formulácii celého problému zanedbávame hydrostatickú (Archimedovu) vztlakovú silu $V\rho g$, kde V je objem telesa. Jej vplyv je zvyčajne malý a keby nie, ľahko by sme ho vedeli započítať.

[19] Postup je stručne takýto: rovnicu (A.2) prevedieme spôsobom založeným na (A.25) na tvar

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = -\frac{g}{v} + Kv \tag{A.17}$$

Táto ODR sa opäť dá riešiť separáciou premenných, tentoraz z a v.



Obr. 13: Ku odvodeniu závislosti tlaku od výšky.

A.2 Atmosféra s poklesom tlaku s výškou a bez teplotných rozdielov

Predpokladajme zjednodušený model s výškovo nezávislou a aj časovo konštantnou teplotou T v každom mieste. Vzduch uvažujme ako *ideálny plyn*. Tlak potom klesá s výškou exponenciálne. Dá sa to odvodiť z podmienky ustáleného stavu atmosféry, čo si hneď ukážeme. Vrstva zakreslená na obr. 13 sa teda nehýbe a platí rovnováha síl, napr. aj v mieste spodnej hranice uvažovanej vrstvy:

$$p(z)\,S = p(z + \mathrm{d}z)\,S + g\rho(z)\,S\,\mathrm{d}z$$

Tlak na hornom okraji tejto tenkej vrstvy si vyjadríme rozvojom

$$p(z + \mathrm{d}z) = p(z) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}(z)\,\mathrm{d}z$$

Dostaneme tak diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)g$$

Vzťah medzi tlakom a hustotou v prípade ideálneho plynu je

$$\rho(z) = \frac{M}{RT}\,p(z) \tag{A.19}$$

kde M je mólová hmotnosť vzduchu (viď napr. úlohu 7.14 v [6] a aj text tu nižšie) a R mólová plynová konštanta. Tak dostaneme jednoduchú obyčajnú diferenciálnu rovnicu pre $p(z)$, ktorá sa dá vyriešiť metódou separácie premenných. Jej riešenie je

$$\boxed{p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT}\,z\right)} \equiv p_0\,e^{-\kappa z} \tag{A.20}$$

pričom $p_0 = p(0)$ je tlak na úrovni mora. Praktické bolo zaviesť konštantu

$$\kappa \equiv \frac{Mg}{RT} \tag{A.21}$$

Vidíme teda, že aj hustota *pri výškovo nezávislej teplote* T klesá s výškou exponenciálne:

$$\boxed{\rho(z) = \rho_0\,e^{-\kappa z}} \tag{A.22}$$

pričom $\rho(0) = \rho_0$ je hustota na úrovni hladiny mora a podľa (A.19) ju vieme určiť z tlaku:

$$\boxed{\rho_0 = \frac{M}{RT}\,p_0} \tag{A.23}$$

Poznamenávame, že vyššie sme si síce vzduch predstavili ako ideálny plyn, ale za bežných podmienok je to výborné priblíženie.

A.3 *Sústava* diferenciálnych rovníc pre voľný pád a zvislý vrh

Keď sme riešili pád a vrh pre $\rho =$ konšt, stačilo riešiť *jednu* obyčajnú diferenciálnu rovnicu: (A.6). Tým sme síce priamo našli len závislosť $v_z(t)$, ale neskôr sme dopočítali aj $z(t)$. Keď hustota nie je konštantná, tak treba riešiť rovnicu (A.5). Táto ODR sa však nedá riešiť sama osebe (izolovane), lebo obsahuje dve neznáme funkcie závislé na čase: $v_z(t)$, $z(t)$. Jedna rovnica o dvoch neznámych sa, ako to zvyčajne býva, nedá vyriešiť, ale koho to viac zaujíma, môže si pozrieť poznámku pod čiarou o kúsok ďalej. Keď však ku nej pripíšeme aj druhú ODR, vznikne *sústava* dvoch navzájom *zviazaných* ODR prvého rádu

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= -g - K(\vec{r},t)\,|v_z|\,v_z \qquad \text{(A.24a)} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= v_z \qquad \text{(A.24b)} \end{aligned}}$$

v ktorých základnou (radšej budeme hovoriť ***nezávislou***) premennou je čas t a neznáme funkcie sú teda teda $v_z = v_z(t)$, $z = z(t)$. Pripomeňme, že

$$K(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\frac{CS\rho}{m}$$

Táto úloha sa už vyriešiť dá (i keď vo všeobecnosti len numericky.) Všimnime si, že táto sústava sa dá dostať aj z Newtonovej rovnice zapísanej pomocou druhej derivácie súradnice podľa času $[m\ddot{z} = -mg + \ldots]$ tak, ako sme sa to učili v časti 8.2.

Ak by sme aj pri výškovo závislej hustote chceli zostať pri jednej ODR prvého rádu, ktorá by sa dala vyriešiť sama o sebe (či už analyticky alebo numericky), dalo by sa to, ale museli by sme matematicky úlohou prepísať tak, aby nezávislou premennou bola výška z, a nie čas t. Je to vysvetlené v poznámke pod čiarou.[20]

Sústava ODR (A.24) platí pre všeobecnú výškovú závislosť hustoty. Keď za priebeh hustoty dosadíme exponen-

[20] V rovnici (A.24) prevedieme deriváciu podľa času na deriváciu podľa výšky takto:

$$\dot{v} \equiv \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \qquad \text{(A.25)}$$

Pohybová rovnica (A.24) tak prejde na tvar

$$mv\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = -mg + \frac{1}{2}CS\rho(z)\,v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = -\frac{g}{v} + \frac{1}{2}\frac{CS}{m}\rho(z)\,v} \qquad \text{(A.26)}$$

v ktorom je nezávislou premennou už výška z a jediná závislá premenná je tam rýchlosť v. Čas t tam explicitne už nevystupuje; podarilo sa nám zbaviť sa ho, ale len v prípadoch, kedy funkcia $K \equiv CS\rho/(2m)$ nezávisí explicitne od času! (Ak by závisela, tak by sme si prechodom od nezávislej premennej t ku nezávislej premennej z asi veľmi nepomohli a museli by sme riešiť sústavu rovníc.) Keď za zatiaľ všeobecný výškový profil hustoty dosadíme exponenciálny pokles (A.22), dostaneme

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = -\frac{g}{v} + K_0\,e^{-\kappa z}\,v} \qquad \text{(A.27)}$$

kde konštanta K_0 je daná výrazom (A.31). Riešenie tejto ODR sa nedá vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Samozrejme, dalo by sa nájsť numerickým riešením niektorou z preberaných metód. Tým by sme našli závislosť $v(z)$, ale žiadnu informáciu o časových závislostiach. Časovú závislosť by sme dodatočne našli použitím rovnice $\mathrm{d}t/\mathrm{d}z = 1/v$. Z nej numerickým integrovaním

$$t(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{1}{v(z')}\,\mathrm{d}z' \qquad \text{(A.28)}$$

Alebo by sme súčasne numericky riešili rovnice

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = -\frac{g}{v} + K_0\,e^{-\kappa z}\,v\,, \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{v} \qquad \text{(A.29)}$$

ako sústavu s nezávislou premennou z.

Použitím z ako nezávislej premennej sa teda úloha tiež dá riešiť, dokonca tak, že nie je pritom nutné riešiť sústavu dvoch zviazaných rovníc. Tento prístup má však aj nevýhodu: v diferenciálnych rovniciach tam vystupuje ***rýchlosť v menovateľoch***. Keďže na začiatku pádu je rýchlosť nulová, vznikli by ***numerické ťažkosti***. Začiatok pohybu by sme teda museli riešiť iným spôsobom.

ciálny pokles (A.22), sústava nadobudne úplne konkrétnu podobu

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= -g - K_0\, e^{-\kappa z}|v_z|\,v_z && \text{(A.30a)} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= v_z && \text{(A.30b)} \end{aligned}}$$

kde

$$K_0 = \frac{1}{2}\frac{CS\rho_0}{m} \tag{A.31}$$

Riešenie tejto sústavy ODR sa nedá vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Nájdeme ho numerickým výpočtom Eulerovou metódou alebo metódou Runge-Kutta na cvičeniach.

Mólová hmotnosť vzduchu a ďalšie konštanty. Konštanty K_0 a κ vystupujúce v diferenciálnej rovnici (A.30a) vyjadríme formulami (A.21) a (A.31). Do nich potrebujeme dosadiť niekoľko ďalších konštánt, ktorých hodnoty buď prevezmeme priamo z tabuliek, alebo si ich vyjadríme vhodnou formulou a v programe ju použijeme. Ide najmä o tieto údaje:

- $g = 9{,}80665\,\mathrm{m}\,.\,\mathrm{s}^{-2}$ (tzv. *normálne tiažové zrýchlenie*)
- $R = 8{,}31446261815324\,\mathrm{J}\,.\,\mathrm{mol}^{-1}\,.\,\mathrm{K}^{-1}$ (mólová plynová konštanta [14])
- Hustota vzduchu na hladine mora sa dá rovnicou (A.22) ľahko vyjadriť pomocou tlaku p_0 na hladine mora:

  $$\rho_0 = \frac{M}{RT}\,p_0 \tag{A.32}$$

  Je to síce rovnica pre ideálny plyn, ale za bežných podmienok platí výborne aj pre vzduch.
- $p_0 = 101\,325$ Pa (tzv. *normálny tlak*, typická hodnota pre hladinu mora)
- Mólovú hmotnosť vzduchu určíme z (pre nás dostatočne presného) predpokladu, že je zložený len z molekúl N_2 a O_2 s *objemovými* zastúpeniami

  $$p_{\mathrm{N_2}} \approx 0{,}785^{21}$$
  $$p_{\mathrm{O_2}} = 1 - p_{\mathrm{N_2}}$$

  a s mólovými hmotnosťami

  $$M_{\mathrm{N_2}} \approx 0{,}028\,\mathrm{kg}\,.\,\mathrm{mol}^{-1}$$
  $$M_{\mathrm{O_2}} \approx 0{,}032\,\mathrm{kg}\,.\,\mathrm{mol}^{-1},$$

  Takto určená mólová hmotnosť je

  $$M = p_{\mathrm{N_2}}M_{\mathrm{N_2}} + p_{\mathrm{O_2}}M_{\mathrm{O_2}} \tag{A.33}$$

  Viď napr. príklad 7.14 v skriptách [6], kde je podrobne vysvetlená presne takáto úloha – nájsť hustotu vzduchu pomocou jeho tlaku (a v rámci toho aj mólovú hmotnosť). Dá sa usúdiť, že ***objemové podiely sú totožné s podielmi molárnymi*** (teda s podielmi počtov uvažovaných dvoch druhov molekúl). Hmotnostné podiely by boli iné; býva však zvykom uvádzať objemové podiely (asi je to v experimentoch praktickejšie) a preto ich používame aj my. Pri týchto úvahách treba vždy mať na zreteli, že energia ideálneho plynu je rovná jeho kinetickej energii a tá je úmerná teplote.

[21] V skriptách [6] je 0,788, ale asi kúsok presnejšia je hodnota 0,785.

A.4 Zovšeobecnenie na pohyb v troch rozmeroch

Budeme uvažovať, že hustota môže byť výškovo závislá (a ľahko by sme to zovšeobecnili ešte viac). Newtonovu pohybovú rovnicu pre pohyb takého telesa v priestore zapíšeme

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} + \vec{D} \tag{A.34}$$

kde aerodynamickú odporovú silu (*drag force*) $\vec{D} \equiv \vec{F}_{\mathrm{odp}}$ vyjadríme ako približne úmernú druhej mocnice rýchlosti, ako sme to robili aj vyššie, ale teraz ju berieme ako vektor. Musí byť v každom okamihu nesúhlasne rovnobežná s vektorom rýchlosti (smerovať presne opačne ako rýchlosť). Preto ju môžeme vyjadriť

$$\vec{D} = -D\,\frac{\vec{v}}{v} \tag{A.35}$$

$\vec{v}/v$ je totiž jednotkový vektor v smere rýchlosti. (V tejto časti symbolom v rozumieme *veľkosť* rýchlosti: $v \equiv |\vec{v}|$!) Berieme teda [viď to isté, len inak označené v (A.1)]

$$D = \frac{1}{2}CS\rho v^2 \tag{A.36}$$

kde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ je veľkosť rýchlosti. Potom dostávame

$$D_x = -D\,\frac{v_x}{v} = -\frac{1}{2}CS\rho\, v\, v_x \tag{A.37}$$

Celú sústavu pohybových rovníc pre let telesa teda môžeme napísať

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\frac{CS}{m}\rho(z)\, v\, v_x \tag{A.38a}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x \tag{A.38b}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\frac{CS}{m}\rho(z)\, v\, v_y \tag{A.38c}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y \tag{A.38d}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g - \frac{1}{2}\frac{CS}{m}\rho(z)\, v\, v_z \tag{A.38e}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z \tag{A.38f}$$

Toto zovšeobecnenie platí pre hocijakú výškovú závislosť hustoty, ale treba zdôrazniť, že vyjadrenie aerodynamickej odporovej sily ako úmernej druhej mocnice rýchlosti je len približné.

V tejto časti chceme modelovať dynamiku telesa v atmosfére s exponenciálnym poklesom hustoty. Preto v pohybových rovniciach (A.38) môžeme vyjadriť

$$\frac{1}{2}\frac{CS}{m}\rho(z) = K_0\, e^{-\kappa z}$$

ako sme to mali už aj pre zvislý pohyb v rovnici (A.30a).

A.5 Výška, tlak, teplota, hustota

V tejto časti si model pádu v atmosfére zovšeobecníme tak, aby sme dokázali približne simulovať vertikálny pohyb parašutistu pri zoskoku. V extrémnych prípadoch boli uskutočnené zoskoky z výšok niekoľko desiatok km:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Kittinger` (31 300 m, r. 1960),
`https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Baumgartner` (39 km, r. 2012),
`https://en.wikipedia.org/wiki/Alan_Eustace` (41 419 m, r. 2014).

V tejto časti preto uvažujeme ďalšie dve zovšeobecnenia príkladu o voľnom páde v atmosfére v porovnaní s A.2:

1. ***Teplotu*** teraz nebudeme považovať za konštantnú, ale za ***danú funkciu nadmorskej výšky***.
2. Uvážime a explicitne vyznačíme, že aj ***koeficient odporu vzduchu C a plocha S sa môžu počas pádu meniť***, čím chceme simulovať otváranie padáka.

V pohybovej rovnici pre pohyb v atmosfére budeme opäť potrebovať poznať závislosť *hustoty* od výšky. Hustotu dokážeme určiť, ak najprv určíme závislosť tlaku od výšky. Na to uvažujme model atmosféry s predpokladmi až na premenlivú teplotu takými istými ako doteraz:

- **vzduch** ako **ideálny plyn** zložený zo zmesi O_2 a N_2 s objemovými zastúpeniami $p_{N_2} \approx 0{,}785$, $p_{O_2} = 1 - p_{N_2}$ a s molovými hmotnosťami $M_{N_2} \approx 0{,}028\ \mathrm{kg\,.\,mol^{-1}}$, $M_{O_2} \approx 0{,}032\ \mathrm{kg\,.\,mol^{-1}}$
- **teplota** ako daná **funkcia** nadmorskej **výšky**: $T = T(z)$
- **tlak** na úrovni hladiny mora $p(0) = 101\,325\,\mathrm{Pa}$
- konštantné **tiažové zrýchlenie** $g = 9{,}80665\,\mathrm{m\,.\,s^{-2}}$

Úvahy o tom, ako sa mení tlak s teplotou, budú i pre teraz študované všeobecnejšie podmienky také isté, ako v predošlom odseku, ale kvôli celistvosti výkladu ich tu zopakujeme. Vrstva zakreslená na obr. 13 sa nehýbe a preto platí rovnováha síl, napr. aj v mieste spodnej hranice uvažovanej vrstvy:

$$p(z)S = p(z + \mathrm{d}z)S + g\rho(z)S\,\mathrm{d}z$$

Tlak na hornom okraji vrstvy vyjadríme pomocou dvojčlenného rozvoja

$$p(z + \mathrm{d}z) = p(z) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}(z)\,\mathrm{d}z$$

Dostaneme tak diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)g \tag{A.39}$$

Vzťah medzi tlakom a hustotou v prípade ideálneho plynu odvodíme zo stavovej rovnice

$$pV = nRT \tag{A.40}$$

kde n je látkové množstvo vzduchu nachádzajúce sa v objeme V a $R = 8{,}314\,462\,618\,153\,24\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ je mólová plynová konštanta. Uvažujeme výškovo malý objemový element. Keďže $n = m/M$ a $\rho = m/V$, vychádza

$$\rho(z) = \frac{M}{R}\,\frac{p(z)}{T(z)} \tag{A.41}$$

kde $M = p_{N_2}M_{N_2} + p_{O_2}M_{O_2}$ je priemerná molová hmotnosť vzduchu (úloha 7.14 v skriptách [6]). Dosadením vzťahu (A.41) do východzej diferenciálnej rovnice (A.39) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{Mg}{R}\,\frac{p(z)}{T(z)} \tag{A.42}$$

Je to obyčajná diferenciálna rovnica, v ktorej, na rozdiel od (A.39), je už len jedna závislá neznáma premenná: $p(z)$. $T(z)$ je známa funkcia. Podobne ako v prípade konštantnej teploty, aj teraz sa dá diferenciálna rovnica pre závislosť tlaku od výšky [tentoraz rov. (A.42)] vyriešiť metódou separácie premenných:

$$\boxed{p(z) = p(0)\exp\left[-\frac{Mg}{R}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{T(z')}\right]} \tag{A.43}$$

Kvôli výškovo závislému profilu teploty sa teda vo výsledku objavuje ten integrál. Pomocou (A.41) teraz už budeme vedieť určiť aj hustotu:

$$\boxed{\rho(z) = p(0)\,\frac{M}{R}\,\frac{1}{T(z)}\,\exp\left[-\frac{Mg}{R}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{T(z')}\right]} \tag{A.44}$$

(Práve hustotu $\rho(z)$ potrebujeme do pohybovej rovnice, a nie tlak.) Tak ako aj predtým, aj teraz treba riešiť sústavu ODR (A.24) prípadne aj (A.38), ale s tým, že za výškový profil hustoty teraz dosadíme (A.44), a nie jednoduchý exponenciálny pokles. Pritom tu ešte navyše predpokladáme, že nielen ρ, ale aj C a S sa môžu počas pádu meniť, čím sa snažíme simulovať otváranie padáka parašutistu.

Podrobná simulácia priebehu otvárania padáka by bola extrémne náročná až nemožná. Je preto vhodné ju uvažovať pomocou jednoduchých modelov. Ako model pre zmenu plochy [**a úplne obdobne aj pre** $C(z)$] si zoberme funkciu

$$S(z) = S_1 + \frac{\Delta S}{1 + \exp\left(-\frac{s\ - s_\mathrm{p}}{\Delta s}\right)} \tag{A.45}$$

kde $s = s(z) = z_0 - z$ je prejdená dráha. Ak otvorený padák dáva konečnú plochu S_2, tak potom $\Delta S = S_2 - S_1$. s_p je zhruba dráha, po preletení ktorej parašutista otvára padák. Δs je dĺžka úseku, v ktorom sa padák otvára. Ako číselné hodnoty môžeme zobrať napr. tieto údaje:

$$\begin{aligned} S_1 &= 0.2\,\mathrm{m}^2 \qquad & S_2 &= 32\,\mathrm{m}^2, \qquad & \Delta s &= 200\,\mathrm{m} \\ C_1 &= 0.8\,, & C_2 &= 1.75 \end{aligned}$$

Literatúra

[1] Štefan Veis, Ján Maďar, Viktor Martišovič, *Všeobecná fyzika 1 – MECHANIKA A MOLEKULOVÁ FYZIKA*, Alfa, Bratislava 1978.

[2] Ivan Červeň, *Fyzika po kapitolách*, STU v Bratislave, 2007.

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei

[4] David M. Bourg, Bryan Bywalec, *Physics for game developers*, 2. vydanie, O'Reilly & Associates, Inc., Sebastopol 2002.

[5] Alexander L. Fetter, John Dirk Walecka, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*, Dover Publications, Inc., Mineola 2003.

[6] Július Cirák *et al.*, *ZBIERKA PRÍKLADOV A ÚLOH Z FYZIKY pre študentov elektrotechnických a informatických fakúlt technických univerzít* (STU, Bratislava 2013); Zadanie príkladu 7.14 sa dá pod číslom 8.14 nájsť aj tu: http://kf.elf.stuba.sk/priklady/Termika_20120511_Bez_ries.pdf

[7] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, *Numerical recipes*, 3. vydanie, Cambridge University Press, Cambridge 2007.

Toto je najnovšia verzia „Numerických receptov". Snaží sa propagovať objektovo orientované programovanie v C++ a obsahuje aj dve nové kapitoly. Témy, ktoré preberáme, sú v nej až na programovací jazyk spracované zväčša podobne ako v staršej verzii, *Numerical recipes in C* [8].

[8] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, *Numerical recipes in C, Second Edition*, (Cambridge University Press, Cambridge 1992);
úplný text je voľne prístupný na http://apps.nrbook.com/c/index.html .

Existujú staršie aj novšie verzie a vydania „Numerických receptov"; pozri http://numerical.recipes/ .

[9] Ján Ivan, *Matematika 2*, 1. vydanie, Alfa, Bratislava 1989.

[10] https://sk.wikipedia.org/wiki/Keplerove_z%C3%A1kony

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_constant

[12] Július Krempaský: Fyzika

[13] I.S. Gradshteyn a I.M. Ryzhik, Alan Jeffrey (editor), Daniel Zwillinger (editor spolupracovník): *Table of Integrals, Series, and Products, Sixth Edition*, Academic Press, San Diego 2000.

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Gas_constant
Môžeme si všimnúť, že gravitačnú konštantu tam označujú G, nie $\varkappa$.

[15] David H. Eberly, *Game Physics*, 2. vydanie, Morgan Kaufmann Publishers, Amsterdam 2002.

Obsah