# Fyzikálne základy počítačových hier (pre FIIT)

(dokument ku prednáškam; na konci dokumentu je **obsah**)

Martin Konôpka

Oddelenie fyziky, ÚJFI, FEI STU v Bratislave, `martin.konopka@stuba.sk`

posledná aktualizácia: 26. februára 2022

## Prednáška v 1. týždni (18. 2. 2022)

V mnohých počítačových hrách sú napodobňované fyzické javy, aké sa môžu diať aj v skutočnom svete. Napr. sa zobrazuje pohyb odhodenej lopty. V bojovnjšie poňatých hrách napr. let vrhnutého kameňa alebo vystreleného projektilu. Vo fantastickjšie navrhnutých zasa pristávanie kozmickej lode na Mesiaci alebo na niektorej planéte. A nemusí zostať pri jednom pohybujúcom sa telese. Obľúbenou hrou je biliard, kde sa na biliardovom stole pohybujú gule, ktoré sa môžu jednak odrážať od obruby hracej plochy a aj sa zrážať medzi sebou, odrážať sa od seba. Táto hra ako aj vyššie spomenuté pohyby aj javy môže prebiehať tak v skutočnom svete ako aj v počítačovej hre. Je celkom prirodzené, že hráč počítačovej hry očakáva, že tie pohyby a vôbec zobrazenie scény budú na obrazovke vyzerať dostatočne podobne ako v skutočnosti. Preto môžeme povedať, že počítačovou hrou obsahujúcou dynamické prvky sa snažíme ***napodobňovať***, cudzím slovom ***simulovať***, vzhľad, dynamiku a aj zvuky istej scény, ktorá by povedzme mohla prebiehať aj v skutočnom svete. Ak by napr. let lopty odkopnutej do výšky vo počítačovej hre vyzeral tak, že smerom do výšky by loptka zrýchľovala, asi by sme z takej hry mali pokazený dojem. Očakávame totiž, že lopta bude spomaľovať. Tak to máme už v oku, teda aspoň ak sme v mladosti strávali nejaký čas aj pri loptových hrách, prípadne ich videli v televízii. A podobne, ak by bilardová guľa v hre po veľmi šikmom náraze na okraj plochy sa odrazila presne tam, skade priletela, tiež by sme na takú hru pozerali udivene. Ak sa autor hry chce vyhnúť takejto nepodarenej dynamike v hre a chce, aby vyzerala realisticky, musí pre výpočet pohybu objektov v hre použiť fyzikálne zákony, aké platia pre obdobné situácie aj v skutočnom svete. Tak sa dostávame k obsahu nášho predmetu: na prednáškach sa budeme učiť čosi z fyziky – to, čo je podstatné pre správny popis ***dynamiky*** herných situácií (ktoré pravda môžu byť aj situáciami z reálneho sveta).

Hneď na začiatok však musíme upozorniť, že naše výpočty na základe fyzikálnych zákonov nebudú dynamiku skutočných objektov popisovať dokonale presne. To sa takmer nikdy nedá, nielen v počítačovej hre, ale vôbec. Skutočné situácie zahŕňajú aj veľké množstvo rôznych drobných vplyvov a ich zahrnutie do simulácie by bolo prakticky nemožné z viacerých dôvodov. A dokonca aj keby bolo možné, tak pre účel počítačovej hry by to mohlo byť zbytočné. Ak by sme v hre chceli simulovať a zobraziť napr. zrážku biliardových gúľ, v zásade by sme mali brať do úvahy aj ich pružnú deformáciu, ktorá na veľmi krátky okamih pri zrážke nastane. Zo skúsenosti však vieme, že biliardové gule sa vyrábajú z tvrdého materiálu a ich deformáciu pri zrážke ani nepostrehneme. A aj samotná dynamika takej zrážky sa dá dosť dobre napodobniť, i keď deformáciu nebudeme uvažovať. Takémuto prístupu hovoríme, že sme vytvorili nejaký zjednodušený ***model*** zložitej reálnej situácie. A namiesto pôvodnej zložitej úlohy (napr. popísať zrážku biliardových gúľ aj s ich deformáciami) potom riešime len ten zjednodušený model, kde si biliardové gule predstavujeme ako dokonale tuhé (nedeformovateľné) telesá. Takýto prístup sa používa nielen pri simuláciách dejov v hrách, ale aj v technických a vedeckých úlohách. Je to užitočný prístup, lebo pri ňom zanedbávame menej podstatné črty a vplyvy a berieme do úvahy len tie podstatnejšie. Vo vedecko-technických úlohách vďaka tomu lepšie porozumieme skúmanému javu alebo zariadeniu (lebo nebudeme zahltení množsvom menej dôležitých detailov). V počítačovej hre (a nielen v nej) nám zasa zjednodušený model umožní robiť simuláciu dostatočne rýchlo, čiže procesor a grafická karta budú „stíhať“. A drobné odchýlky od úplne realistického správania sa si ani nevšimneme. Niekedy si ich aj všimneme, ale s tým sa musíme zmieriť, lebo príliš realistický popis by bol nesmierne výpočtovo náročný. Skúsme si predstaviť, že na scéne je napr. strom s listami a fúka nejaký nepravidelný vietor. Listy na skutočnom strome (a sú ich tam tisíce) sa rôzne trepocú. Realistická simulácia takejto scény by vyžadovala jednak do počítača naprogramovať štruktúru rozloženia konárov a listov stromu, vytvoriť modely popisujúce ich pružnosť a aj popisovať (nesmierne výpočtovo náročne) turbulentné prúdenie vzduchu pomedzi konáre a listy. Aspoň v súčasnosti je nepredstaviteľné, že by niekto takto detailne programoval hry. Vo vede a technike sa výpočty prúdenia okolo objektov zložitého tvaru robia na superpočítačoch, aké hráč nemá k diskpozícii. Takže v prípade scén náročných na výpočtový čas sa robia aj hrubé zjednodušenia. Okrem spomenutých listov na strome je veľmi zložité modelovať a výpočtovo náročné aj plameň a dym, aký vznikne pri výstrele zo zbrane. Tak sa tiež robia hrubé zjednodušenia a proste sa to len nejako „namaľuje“, namiesto toho, aby sa na základe fyzikálnych zákonov počítala dynamika alebo dokonca elektrodynamika polí, ktoré súvisia s časticami letiacimi z hlavne.

Spomenuli sme elektrodynamiku. Fyziku teda netvoria len javy, ktoré sa dajú popísať pomocou pohybu telies alebo častíc, ale aj elektrické a magnetické javy. Tie sú však pre dynamiku typických herných situácií nedôležité alebo málo dôležité. V našom predmete sa nimi nebudeme zaoberať. Nebudeme sa zaoberať ani realistickým ***zobrazením*** objektov na scéne, i keď to je, aspoň do istej miery, pre hry dôležité. Bude pre nás síce dôležité, aby sme dynamiku objektov na scéne zobrazovali v súlade s tým, ako je na základe fyzikálnych zákonov počítaná, ale samotnú vizualizáciu budeme robiť len v hrubých rysoch, schematicky. Nebudeme teda pracovať s textúrami, so svetlom, s tieňmi a pod. Niežeby to pre hry nebolo dôležité, ale sú to témy, ktoré už viac patria do počítačovej grafiky než do fyzikálneho modelovania. Pravda, niekto by mohol namietať, že veď svetlo a tiene sú vyslovene fyzikálne (povedzme optické) javy. Áno, je tomu tak, ale v našom predmete nemáme čas na všetko a tieto veci radšej prenecháme tým, ktorí sa špecializujú na počítačovú grafiku. My v našom predmete sa budeme zameriavať na *dynamiku* objektov na scéne.

# 1 Kinematika pohybu bodov a telies, ktoré si vieme účelovo predstaviť ako body

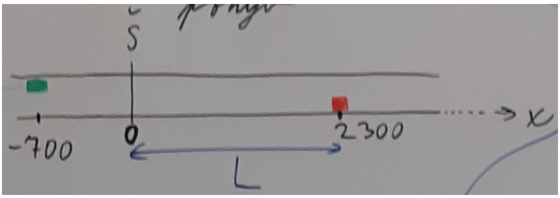
Keď len popisujeme, ako sa poloha, rýchlosť a prípadne aj zrýchlenie telesa či bodu mení, ale neskúmame to pomocou síl, tak povieme, že skúmame kinematiku pohybu. Aj samotná táto oblasť *mechaniky hmotného bodu* sa nazýva Kinematika.

## 1.1 Hmotný bod

Chceli by sme v hre napodobniť (modelovať, simulovať) pohyb auta; neskôr sa dostaneme aj ku iným telesám: kamene, projektily, lietadlá a pod. V tomto úvode však treba začať s niečím jednoduchým, takže si predstavme auto, ktoré sa pohne a ide po dlhej priamej ceste stálou rýchlosťou, povedzme 60 km/h. Naša prvá otázka je, kde sa bude auto nachádzať po minúte takého pohybu, po dvoch minútach atď. Ale dá sa to jednoznačne povedať? Veď auto nie je bodka, ale objekt dlhý niekoľko metrov a má aj nejakú šírku a výšku. Dáte mi však za pravdu, že obťažovať sa takýmito črtami auta by pre náš účel v tejto chvíli bolo nepraktické až kontraproduktívne. Keď by sme na to auto pozerali z veľkej výšky, napr. z lietadla, videli by sme ho len ako nejakú bodku pohybujúcu sa po ceste. A plne by nám to stačilo k tomu, aby sme vedeli povedať, kde sa auto nachádza napr. po minúte jazdy. Vidíme, že pre daný účel je praktické namiesto auta ako rozmerného telesa uvažovať bodku, ktorá môže predstavovať napr. stred auta (alebo ešte vhodnejšie jeho ťažisko, čo je pojem, ktorý si bližšie vysvetlíme neskôr). Tak prichádzame k užitočnému pojmu ***hmotný bod***. Je to akási veľmi praktická abstrakcia telesa, ktorá nám umožňuje odhliadnuť od jeho nenulových rozmerov, ak sú pre daný účel nepodstatné. Stačilo by povedať aj *bod*, ale keďže ide o teleso, ktoré má nenulovú hmotnosť, častejšie budeme hovoriť o hmotnom bode.

## 1.2 Poloha, súradnica

A akým spôsobom vyjadríme, kde sa auto na tej ceste nachádza? Povieme, že napr. 2300 metrov od štartovnej čiary. Tak prichádzame ku pojmu *vzdialenosť*. A môžeme použiť aj pojem ***dĺžka*** (tu cesty, ktorú auto prebehlo). Dĺžka patrí medzi základné ***fyzikálne veličiny***. Udávame ju najčastejšie buď v metroch (m) alebo v ich násobkoch či dieloch: kilometer (km = 1000 m), centimeter (cm = 0,01 m) atď. Označujeme ju najčastejšie písmenami $\ell$, $L$, alebo aj $d$, $D$; tieto d-čka sa hodia najmä keď používame pojem vzdialenosť (*distantia, distance*). Čo však, ak by auto cúvalo alebo šlo opačným smerom, povedzme 100 m? Dostalo by sa na iné miesto na ceste než keby šlo 100 m dopredu. Vyjadrenie toho, na ktorú stranu auto šlo, môžeme teda urobiť slovne (dozadu, dopredu). Ale to nemusí byť praktické, keď potrebujeme túto informáciu sprostredkovať alebo zobraziť číselne. Pre taký účel je vhodnejšie polohu smerom dozadu vyjadrovať zápornými číslami a smerom dopredu samozrejme kladnými. A prichádzme ku pojmu ***súradnica***. Tiež ju môžeme vyjadrovať v metroch, ale na rozdiel od vzdialenosti alebo dĺžky môže byť aj záporná. Miesto, skadiaľ auto štartuje, má teda značku 0. Môžeme si to aj nakresliť (obr. 1). Tá čiara sa nazýva *súradnicová os* alebo *vzťažná os*. Ak po-



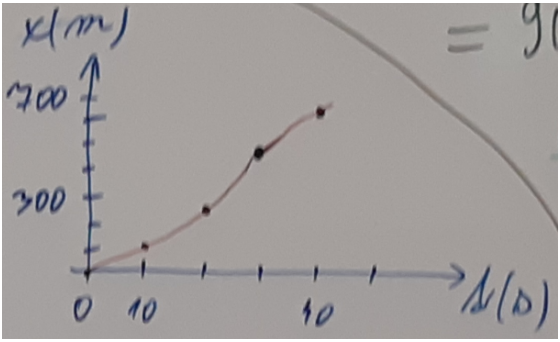

Obr. 1: Cesta, autá, súradnicová os. Písmeno Š znamená „štart" a bod 0 na osi je zvolený v mieste štartu. Zelené auto ide doľava, červené doprava. (Na tomto provizórnom obrázku vyrobenom z fotky tabule sú aj nadbytočné veci.)

trebujeme súradnicu označiť aj nejakým písmenom, zoberme zaužívané $x$. A môžeme napísať, že napr. po desiatich sekundách cúvania sa auto nachádza v mieste $x = -50$ m. Polohu auta (a aj iného objektu, napr. projektilu) teda vyjadrujeme pomocou jeho súradnice.

Zatiaľ sme vystačili s jednou súradnicou (značenou $x$), lebo sme uvažovali rovnú cestu. V zložitejších prípadoch budeme potrebovať viac súradníc.

## 1.3 Čas

Ak sa auto pohybuje, jeho poloha (súradnica) sa mení. V každom okamihu nadobúda novú hodnotu. Povieme aj, že poloha auta sa mení s časom. Bola uvedená tabuľka ako príklad. A vôbec, všetky zmeny, ktoré sa vo fyzickom svete dejú, prebiehajú v čase. Čas je tiež jednou zo základných fyzikálnych veličín a zvykne sa označovať písmenkom $t$, čo je odvodené od slov *tempus, time*. Základnou jednotkou pre čas je sekunda (s). Napíšeme napr., že jazda auta trvá už $t = 27\,\mathrm{s}$. Môžu sa používať aj iné jednotky času, ak je to praktické; napr. vyššie sme spomenuli minúty. Ak sa poloha alebo teda súradnica auta s časom mení, z hľadiska matematiky môžeme súradicu považovať za funkciu závislú na čase. Symbolicky to zapíšeme takto: $x = x(t)$. Túto závislosť môžeme zakresliť aj ako funkciu do grafu (obr. 2). Zakreslené body sú známe hodnoty, ktoré sme prevzali z tabuľky. Cez ne sme odhadom nakreslili súvislú čiaru, lebo vieme, že $x(t)$ má byť spojitou funkciou času; v hocijakom okamihu má nejakú súradnicu, nielen v tých, ktoré boli v tabuľke.




Obr. 2: Závislosť súradnice auta of času. Príslušnú tabuľku sme mali na tabuli. Slušne nakreslený graf by však mal mať čísla na osiach pravidelne! Neberte si z tohto grafu príklad, ako kresliť grafy! (A aj na tento provizórny obrázok sa dostali i nadbytočné veci.)

## 1.4 Kinematika priamočiareho pohybu

Niekedy pre stručnosť povieme, že pôjde o pohyb v jednom rozmere (t. j. v jednorozmernom priestore, stručne v 1D), lebo taký pohyb sa dá pri vhodnej voľbe súradnicových osí popísať pomocou jedinej súradnice; budeme používať, ako sme už aj začali, $x$. Treba si však uvedomiť, že aj na popis priamočiareho pohybu môžeme niekedy potrebovať i viac súradníc – vtedy, keď sa teleso nepohybuje rovnobežne s niektorou zo súradnicových osí.

### 1.4.1 Rýchlosť

Ak cestujeme autom po dobrej diaľnici a za polhodinu prejdeme vzdialenosť povedzme 65 km, tak povieme, že sme cestovali rýchlosťou 130 km/h. Presne tak to môžeme povedať vtedy, ak sme šli rovnomernou rýchlosťou. Pri dlhších úsekoch sa však nestáva, že by sme celý čas mohli mohli ísť rovnomernou rýchlosťou; občas treba zabrzdiť, inokedy zrýchliť. Tých 65 km za polhodinu jazdy však povedzme že spravíme aj napriek kolísavému tempu jazdy, aj keď na to už občas porušíme maximálnu povolenú rýchlosť. A v iných chvíľach zasa ideme pomalšie než je maximálna povolená stotridsiatka. Povieme potom, že počas cesty sme mali ***priemernú rýchlosť*** 130 km/h. Tieto úvahy nás však zároveň privádzajú k tomu, že pre rýchlosť auta v nejakom zvolenom okamžiku (napr. keď nás zameriava policajný radar) nevystačíme s pojmom priemerná rýchlosť. Ak nás radar zameral v okamžiku, keď sme šli 145 km/h, tak nám nepomôže, že v priemere sme šli len 130 km/h; dôležitá je *okamžitá* hodnota rýchlosti. Tá je dôležitá napr. aj v prípade nárazu; nepomôže nám, že na nejakej ceste sme doteraz šli v priemere štyridsiatkou, ak narazíme v okamihu, keď sme sa hnali osemdesiatkou.

Ako sa dá dopracovať ku nejakému spôsobu výpočtu okamžitej rýchlosti, alebo aspoň ku jej približnému určeniu? Tak, že na určenie si nezoberieme celý 65-kilometrový úsek, ale nejaký kratší. Na diaľnici bývajú každých 500 m tabuľky s označením, na koľkom kilometri diaľnice sa nachádzame. (To sú vlastne súradnice.) Ak si odstopujeme čas, za aký prejdeme od jednej tabuľky ku druhej, môžeme pomocou neho určiť rýchlosť, akou sme šli medzi tými dvomi tabuľkami. Ak napr. tú vzdialenosť prejdeme za čas 15 s, tak rýchlosť budeme počítať takto:

$$\text{rýchlosť} = \frac{500\,\text{m}}{15\,\text{s}} = \frac{0{,}5\,\text{km}}{0{,}0041\bar{6}\,\text{hod}} = 120\,\text{km/h}$$

Stále je to len priemerná rýchlosť, tentoraz však už len na tom jednom úseku. Na nasledujúcom úseku môže vyjsť napr. 132,3 km/h. Na ďalšom povedzme 134,7 km/h. Tak potom dostávame predsa len istú informáciu o tom, ako sa rýchlosť nášho auta menila s časom, i keď je to len taká „hrubozrnná“ informácia. Hrubozrnná preto, že nezachytáva zmeny rýchlosti vnútri tých jednotlivých polkilometrových úsekov. Ak chceme menej hrubozrnnú informáciu, musíme úseky, na ktorých meriame časy, ešte skrátiť. Tak si zoberme naozaj kratučký úsek cesty, ktorého dĺžku označíme $\Delta x$; napr. by to mohlo byť 5 m. V rámci tohto kratučkého úseku už môžeme predpokladať, že zmena rýchlosti na ňom nenastane, alebo ak nastane, tak len nepatrná, zanedbateľná. Stopkami alebo akokoľvek inak zmeriame, že sme ten úsek prešli za čas, ktorý označíme $\Delta t$; povedzme že by to bolo 0,1 s. Aj pre rýchlosť si zavedieme nejaký písmenkový symbol; už od dávna sa zvykne používať $v$ (od slov *velocitas, velocity*). My tam teraz pridáme aj index $x$ preto, aby sme zvýraznili, že ide o pohyb v smere osi $x$. Rýchlosť na tom úseku teda bude

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1}$$

Číselne by nám pre vyššie uvedené hodnoty vyšlo $5/0{,}1\,\mathrm{m/s} = 50\,\mathrm{m/s} = 180\,\mathrm{km/h}$, za čo by sme teda dostali už poriadnu pokutu. Skúsme si formulku vyššie zapísať trochu podrobnejšie. Pri našom meraní si volíme istý časový okamih $t$; to je moment, kedy spustíme stopky. Auto sa vtedy nachádza v mieste so súradnicou, ktorú si označíme $x(t)$. Súradnicu tu teda rozumieme ako funkciu času. Stopky zastavíme v čase o $\Delta t$ neskôr, teda v čase $t + \Delta t$. Vtedy sa už auto nachádza o $\Delta x$ ďalej, teda v mieste

$$x(t + \Delta t) = x + \Delta x$$

Formulu (1) vyššie preto môžeme zapísať

$$v_x = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

Pri prudkom brzdení by však ani úsek 5 m nebol dostatočne krátky na to, aby sme mohli menenie rýchlosti v rámci neho zanedbať. Takže vo všeobecnosti sú vyjadrenia (1) a (2) len návodom na to, ako vypočítať priemernú rýchlosť; je to vlastne definícia toho, čo považujeme za priemernú rýchlosť na tom úseku dĺžky $\Delta x$. Ak chceme definovať naozaj presne, čo *okamžitá* rýchlosť je, treba časový úsek $\Delta t$ použiť limitne krátky, teda nekonečne krátky; tým pádom aj $\Delta x$ bude nekonečne malý úsek cesty. Naozaj okamžitá rýchlosť v čase $t$ je teda toto:

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

Ako už z matematiky iste viete, takýto zápis pomocou limity sa nazýva *derivácia*. Tu konkrétne je to derivácia funkcie $x$ podľa $t$. Okamžitá ***rýchlosť bodu je teda deriváciou jeho súradnice podľa času***. Hodnota takejto rýchlosti môže byť tak kladná ako aj záporná (popr. aj nulová), podľa toho, či sa auto (alebo čokoľvek iné) pohybuje v kladnom smere súradnicovej osi alebo v zápornom smere (obr. 1). Veľkosť rýchlosti $|v_x(t)|$ je samozrejme vždy nezáporná. Preto najmä ak by malo dôjsť ku zmätkom, treba pri vyjadrovaní sa rozlišovať pojmy rýchlosť (ktorá môže byť aj záporná) a veľkosť rýchlosti. Matematici zvyknú deriváciu značiť čiarkou, čiže stručne by sme mali $v_x(t) = x'(t)$, ale takýto spôsob sa vo fyzikálnych disciplínach nepoužíva, lebo čiarka sa nám zvyčajne zíde na označenie iných vecí. Vo fyzike a aj v našom predmete použijeme pre deriváciu podľa času buď bodku nad $x$, alebo použijeme zlomkový zápis vyjadrujúci podiel diferenciálov (nekonečne malých veličín):

$$\boxed{v_x(t) = \dot{x}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \tag{4}$$

Ten druhý zápis nápadne pripomína formulku (1) a naozaj je to to samé, ak vo formulke (1) použijeme nekonečne malé (*infinitezimálne*) veličiny. Argumenty $t$ vo funkciách nie je nutné vždy písať; závisí to od konkrétnych okolností. Zatiaľ sme hovorili len o prípade, keď sa auto alebo bod, ktorým ho reprezentujeme, pohybuje jedným smerom, teda pozdĺž nejakej priamky (ale môže pritom aj zastať a cúvať, znova sa rozbiehať dopredu atď.) To nazývame ***priamočiary pohyb***. Ak sa pritom navyše auto či bod pohybuje stálou rýchlosťou, tak hovoríme, že koná *rovnomerný priamočiary pohyb*. O ňom si teraz trochu podrobnejšie niečo povieme.

**Rovnomerný priamočiary pohyb.** Pri rovnomernom pohybe (dokonca by nemusel byť ani priamočiary) auto (alebo iné teleso alebo len bod) za každú sekundu prejde rovnakú vzdialenosť. Poriadnejšie povedané, za každý časový úsek nejakej zvolenej dĺžky $\Delta t$ (nemusí to byť sekunda) prejde rovnakú vzdialenosť

$$|\Delta x| = |v_x|\,\Delta t \tag{5}$$

ako to vidno z formulky (1). Čím dlhší je čas rovnomerného pohybu, tým je – priamoúmerne – väčšia prejdená vzdialenosť, alebo povieme ***dráha*** a označíme ju $s$. Aby sme zápis práve napísanej formulky zjednodušili, ešte dáme preč znak $\Delta$ od času a pre veľkosť rýchlosti zavedieme bezindexové označenie (tak to býva často zvykom):

$$v = |v_x| \tag{6}$$

Zápis priamej úmery (5) sa potom zjednoduší na známy stredoškolský (alebo dokonca základoškolský) tvar

$$s = vt \tag{7}$$

ktorý nám hovorí, že dráha rovnomerného pohybu je priamoúmerná času.
Príklad: Ak by sa auto pohybovalo rovnomerne rýchlosťou veľkosti $25\,\mathrm{m/s}$ počas doby $5\,\mathrm{s}$, tak by za ten čas prešlo dráhu

$$s = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,5\,\mathrm{s} = 125\,\mathrm{m}$$

Mimochodom, aká je táto rýchlosť, keď ju vyjadríme v km/h? Je $25 \cdot 3{,}6\,\mathrm{km/h} = 90\,\mathrm{km/h}$. Trochu neskôr si povieme aj o prípadoch, kedy auto, alebo vo všeobecnosti bod, sa pohybuje zložitejším spôsobom.
Príklad: Auto z predošlého príkladu sa pohybovalo rovnomerne tak, že v čase spustenia stopiek (to je okamih $t = 0$) malo súradnicu $x_0 = -30\,\mathrm{m}$ a jazdilo po ceste smerom doprava (teda v smere osi $x$). Akú súradnicu má po $8{,}3$ sekundách takej jazdy? Nuž, bude to

$$x = -30\,\mathrm{m} + \underbrace{v_x t}_{s} = -30\,\mathrm{m} + 25 \cdot 8{,}3\,\mathrm{m} = 177{,}5\,\mathrm{m}$$

Všeobecné formuly pre rovnomerný priamočiary pohyb zapíšeme

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_x = \text{konšt} \qquad (8a) \\ x(t) &= x_0 + v_x t \qquad (8b) \end{aligned}}$$

To druhé je dobre známa formula závislosti súradnice od času pri rovnomernom priamočiarom pohybe. Na ľavej strane je funkcia $x(t)$, čo je nejaká hodnota, ktorá sa s časom mení. Na pravej sa o. i. vyskytuje konštanta $x_0 = x(0)$, teda poloha bodu v čase $0$. Vystupuje tam aj ďalšia konštanta – rýchlosť $v$. Nezabudnime, že v prípade pohybu proti smeru zvolenej osi je táto rýchlosť záporná. Rovnice (8) nazveme ***rovnice kinematiky pre rovnomerný priamočiary pohyb*** pozdĺž osi $x$. Samozrejme, tú priamku, pozdĺž ktorej sa daný pohyb uskutočňuje, sme si mohli označiť aj inak ako $x$, napr. $y$ alebo $z$ a potom by sme v (8) zodpovedajúco prispôsobili označovanie.

## Prednáška v 2. týždni (25. 2. 2022)

Všimnime si, že rovnica (8b) sa dá dostať aj priamo z definície okamžitej rýchlosti (4), ak si spomenieme na niektoré poznatky z integrálneho počtu: na ľavú i pravú stranu rovnice (4) uplatníme integrovanie. Máme na výber, či neurčitý (primitívna funkcia) alebo určitý integrál. Oba spôsoby sú možné. Zvoľme si ten prvý.

$$\int v_x \, \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t$$

Obe strany zintegrujeme ľahko: $v_x$ na ľavej strane je teraz totiž konštanta, takže ju dáme pred integrál. Na pravej strane je aplikovaný neurčitý integrál cez $t$ na funkciu derivovanú podľa $t$. Integrovanie a derivovanie podľa tej istej premennej sa navzájom vyrušia, takže dostaneme len samotné $x$ a ešte nejakú integračnú konštantu. To vyrušenie sa integrovania a derivovania je vďaka zlomkovému zápisu derivácie veľmi názorne viditeľné – je to vykrátenie sa diferenciálov d$t$. Nejakú integračnú konštantu dostaneme pravdaže aj na ľavej strane. Takže zintegrovaním dostaneme

$$v_x t + C_1 = x(t) + C_2$$

alebo teda

$$v_x t + C = x(t) \qquad (9)$$

kde $C = C_1 - C_2$. Ako určíme $C$? Zo znalosti ***začiatočnej podmienky*** (tu konkrétne polohy), teda že kde bol bod v čase 0. Bol v mieste $x(0) = x_0$. Preto [keď do rovnice (9) dosadíme za čas nulu] dostaneme

$$C = x_0$$

a tak z pomocnej rovnice (9) nachádzame vyjadrenie

$$x(t) = x_0 + v_x t$$

čo je známa veľmi jednoduchá závislosť súradnice od času pri rovnomernom priamočiarom pohybe, ku ktorej sme sa menej formálnou úvahou dopracovali už aj skôr. A dalo by sa ku nej prísť aj pomocu určitého integrálu, ale to tu vynecháme, aby sme sa týmito jednoduchými vecami nenudili.

### 1.4.2 Zrýchlenie

Zostaňme nateraz ešte síce pri priamočiarom pohybe, ale už sa neobmedzujme na rovnomerný. Nech sa teda rýchlosť auta môže meniť. Vtedy hovoríme, že auto zrýchľuje alebo spomaľuje. Aby sme tieto veci vedeli aj numericky počítať a programovať, treba im dať nejaký pevný matematický základ podobne, ako sme dali matematický základ pojmom poloha a rýchlosť. Poďme na to takto: V čase $t$ nech rýchlosť je $v_x(t)$. V čase $t + \Delta t$ je vo všeobecnosti nejaká iná: $v_x(t) + \Delta v_x$, kde $\Delta v_x$ je zmena rýchlosti (môže byť aj záporná). Čím väčšia zmena rýchlosti za ten kratučký časový úsek nastane, tým väčšie zrýchlenie alebo strmšie spomalenie auto má. Zrýchlenie označujeme písmenom $a$ (*acceleratio, acceleration*). Teraz mu ešte pridáme aj index $x$ a definujeme ho zhruba takto:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \tag{10}$$

Je to podobná formula, ako (1), ktorú sme použili pre rýchlosť. A aj táto formula je len hrubá, vyjadruje vlastne len priemerné zrýchlenie počas doby $\Delta t$. Aby sme presne vyjadrili *okamžité* zrýchlenie v čase $t$, opäť musíme použiť infinitezimálny počet:

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \tag{11}$$

Aj pre toto máme i stručnejšie zápisy:

$$\boxed{\boxed{a_x(t) = \dot{v}_x(t) \equiv \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}}} \tag{12}$$

***Zrýchlenie bodu je teda deriváciou jeho rýchlosti podľa času.*** Táto definícia, ako uvidíme, bude platiť nielen pre priamočiare pohyby.

Všimnime si, že zrýchlenie teraz kombináciou predošlých definícií vieme vyjadriť aj ako druhú deriváciu súradnice:

$$\boxed{a_x(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}} \equiv \ddot{x} \tag{13}$$

Znamienko zrýchlenia môže opäť byť aj záporne. To najlepšie vidieť z podrobného zápisu (11), alebo aj z (10). Menovateľ $\Delta t$ je tam vždy kladný (i keď môže byť veľmi malý).

Príklad: Nech $v_x(t) = -2{,}2\,\mathrm{m/s}$, $v_x(t+\Delta t) = -2{,}0\,\mathrm{m/s}$, $\Delta t = 0{,}1\,\mathrm{s}$. To je prípad, keď sa auto pohybuje proti smeru osi $x$ („doľava") a spomaľuje, lebo *veľkosť* jeho rýchlosti klesá. Zrýchlenie na tom úseku však vychádza $a_x = 2\,\mathrm{m/s^2}$, čiže kladné. Takže pozor! Znamienko zrýchlenia nám nehovorí o tom, či auto zvyšuje alebo znižuje veľkosť svojej rýchlosti. Toto znamienko totiž závisí od toho, ktorým smerom sme si zvolili kladný smer súradnicovej osi. Keby sme ho zvolili opačne, zrýchlenie by v tomto prípade vyšlo záporné.

A na okraj tohoto: čo je to *spomalenie*? Je to azda prípad, keď je zrýchlenie záporné? Nie. Spomalenie je, striktne povedané, dosť zbytočný pojem, lebo všetko je zahrnuté v pojme zrýchlenie (a v definícii orientácie súradnicovej osi). Ale predsa len, tento pojem býva vo vyjadrovaní sa užitočný, lebo ním zvyčajne chceme povedať, že teleso (auto, bod, ...) znižuje veľkosť svojej rýchlosti; napr. keď auto brzdí, tak spomaľuje, bez ohľadu na to, ktorým smerom sa pritom hýbe.

**Rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb.** Je to taký pohyb, pri ktorom je zrýchlenie telesa stále rovnaké, teda časovo nemenné. Rýchlosť telesa sa teda rovnomerne zvyšuje alebo znižuje. V aute to vieme precítiť aj fyzicky: je to také rozbiehanie sa auta, pri ktorom sme do sedadla tlačení nemenou silou. (Alebo brzdenie.) Ale to už zabiehame do dynamiky, ktorej sa budeme venovať až niekedy nabudúce. Poďme späť do kinematiky. Ak je zrýchlenie nemenné, tak podľa (10) sa rýchlosť za každý časový úsek $\Delta t$ zmení o rovnakú hodnotu $\Delta v_x$. Preto podľa (10)

$$\Delta v_x = a_x\,\Delta t \tag{14}$$

a keď si z toho odmyslíme znaky $\Delta$ a indexy $x$, „vypadne" nám z toho známy stredoškolský vzťah pre rovnomerne zrýchlený pohyb:

$$\boxed{v = at} \tag{15}$$

Ako z neho vidno, platí len pre taký pohyb, ktorý začína z nulovej rýchlosti, teda v čase 0 musí byť auto v pokoji. V čase $t$ už nadobudne rýchlosť $v$. A akú dráhu za ten čas prejde?

$$s = v_{\text{priem}}\,t$$

kde $v_{\text{priem}}$ je priemerná rýchlosť na danom úseku pohybu. Keďže ide o *rovnomerne* zrýchlený pohyb začínajúci z nulovej rýchlosti a na danom úseku dosahujúci rýchlosť $v$, tak priemerná je

$$v_{\text{priem}} = \frac{0+v}{2} = \frac{1}{2}\,v = \frac{1}{2}\,at$$

Preto dráha bude

$$\boxed{s = \frac{1}{2}\,a\,t^2} \tag{16}$$

čo je ďalšia známa stredoškolská formulka. Nárokom sme do nej nepísali index $x$ ani žiadne $\Delta$, aby sme zvýraznili jej stredoškolskú jednoduchosť. Treba ju preto používať používať opatrne, lebo platí len ak sa teleso pohybuje z pokoja (z nulovej začiatočnej rýchlosti), alebo ak spomaľuje a počas doby $t$ spomalí z rýchlosti $v$ až na nulovú rýchlosť.

Radšej sa opäť teraz vrátime ku všeobecnejším formuláciám, lebo s tými stredoškolskými by sme nevystačili na popis rôznych pohybov, aké sa aj v počítačových hrách (a aj v skutočnom svete) vyskytujú. Zoberme definičnú formulu (12) a z nej skúsme vyjadriť rýchlosť. Opäť máme na výber, či to spravíme pomocou výpočtu primitívnej funkcie a následného dourčenia integračnej konštanty, alebo či použijeme určitý integrál. Vyberme si tentoraz druhú možnosť. Zoberieme teda spomenutú formulku a obe jej strany zintegrujeme cez čas od 0 po $t$. Čas ako integračnú premennú pritom označíme čiarkou, aby sme ho odlíšili od hornej hranice integrovania:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^t a_x(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t \frac{\mathrm{d}v_x(t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t'$$

Teraz sa zaoberáme rovnomerne zrýchleným pohybom, takže zrýchlenie tu od času nebude závisieť a môžeme ho vybrať pre integrál. Pravú stranu zintegrujeme triviálne. Pre obe strany použijeme Leibnitzov-Newtonov vzorec. Dostaneme

$$a_x\,t = v_x(t) - v_x(0)$$

z čoho vyplýva

$$\boxed{v_x(t) = v_x(0) + a_x t} \tag{17}$$

To je už na prvý pohľad všeobecnejšie vyjadrenie menenia sa rýchlosti, než stredoškolská formula (15). A ako sa pri rovnomerne zrýchlenom priamočiarom pohybe mení súradnica bodu (auta, lietadla, ...), teda $x$? Aby sme to zistili, zoberme si niektorú všeobecnú formulu, kde nám to $x$ nejako vhodne vystupuje. Najlepšie formulu (4) pre definíciu rýchlosti:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Jej zintegrovaním dostaneme

$$\int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x(t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\boxed{\int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' = x(t) - x(0)}} \tag{18}$$

To zarámované za šípkou je všeobecne platné pre akokoľvek zrýchlený (teda nielen rovnomerne) alebo nezrýchlený priamočiary pohyb. Teraz sa zaoberáme rovnomerne zrýchleným a preň dosadíme za rýchlosť podľa (17). Potom vieme zintegrovať aj ľavú stranu a dostávame

$$v_x(0)\,t + \frac{1}{2}\,a_x\,t^2 = x(t) - x(0)$$

čo po prehodení jedného člena dáva

$$\boxed{x(t) = x(0) + v_x(0)\,t + \frac{1}{2}a_x t^2} \tag{19}$$

Je to výsledok výrazne širšie použiteľný, než stredoškolská formula $s = at^2/2$ pre dráhu. Tá sa pravdaže dá z tohoto všeobecnejšieho vzťahu odvodiť.

Takže zhrňme: pre rovnomerný priamočiary pohyb sa rýchlosť a súradnica menia podľa (8a), (8b) a pre rovnomerne zrýchlený priamočiary podľa (17), (19). Samozrejme, že namiesto osi $x$ by sme mohli používať aj os $y$ alebo $z$ a teda aj vo formulách písať namiesto $x$ iné písmenko.

### 1.4.3 Príklad: Voľný pád telesa pri zanedbateľnom odpore vzduchu

Je to príklad na priamočiary rovnomerne zrýchlený pohyb.

Kameň padá z výšky $h$. Za aký čas a akou rýchlosťou dopadne? Vyčíslite pre $h = 30\,\mathrm{m}$. Odpor vzduchu zanedbajte.

**Riešenie**: V absencii odporu vzduchu kameň padá rovnomene zrýchlene so zrýchlením rovným tiažovému zrýchleniu: $a = g$. To je v našich zemepisných šírkach okolo $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Na vyriešenie tejto úlohy stačí použiť stredoškolské formulky:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \tag{20}$$

Rýchlosť dopadu určíme takto:

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

teda

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}} \tag{21}$$

čo je veľmi známa formula. *Nakoniec* dosaďme aj číselné hodnoty:

$$t = \sqrt{\frac{2\,.\,30\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} \doteq 2{,}47\,\mathrm{s}$$

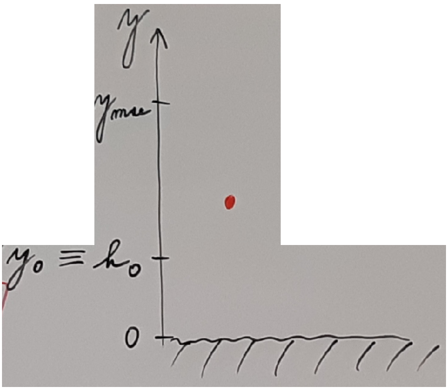
$$v = \sqrt{2\,.\,9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,30\,\mathrm{m}} \doteq 24{,}3\,\mathrm{m/s}$$

### 1.4.4 Príklad: Zvislý vrh pri zanedbateľnom odpore vzduchu

Aj toto je príklad na priamočiary rovnomerne zrýchlený pohyb.

Vyhodíme kameň do výšky rýchlosťou $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, pričom ho z ruky vypustíme vo výške $h_0 = 2\,\mathrm{m}$. Ako vysoko vyletí, za aký čas sa tam dostane a za aký čas a akou rýchlosťou dopadne na zem? Odpor vzduchu zanedbajte.

(A opäť, a nielen tento príklad, treba riešiť všeobecne a až na koniec dosadzovať číselné hodnoty.)




Obr. 3: Obrázok ku zvislému vrhu. Červený krúžok znázorňuje pohybujúci sa kameň. Výškovú súradnicu sme si označili $y$.

**Riešenie**: Táto úloha sa od predošlej líši len tým, že na začiatku pohybu, ktorému priradíme čas $t = 0$, má kameň nenulovú rýchlosť. Tá môže smerovať tak nahor ako aj nadol. Tu uvažujeme vrh nahor. Kameň bude spomaľovať a nakoniec začne padať k zemi. Vieme, že je to kvôli gravitácii, kvôli zemskej príťažlivosti. Do týchto vecí však teraz nebudeme zabiehať, lebo preberáme časť *Kinematika*, a v kinematike sa nezaoberáme silami, len počítame, ako sa pri pohybe menia súradnice a rýchlosti. Takže opäť ako daný fakt prijmeme, že ide o pohyb s konštantným (nemenným) zrýchlením o veľkosti $g$. Na riešenie tentoraz nebude stačiť len jednoduché použitie stredoškolských formuliek (15) a (16). Namiesto nich radšej siahneme po všeobecných rovniciach (17) a (19) pre rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb. Len ich prispôsobime teraz počítanej úlohe. V nej namiesto osi $x$ používame os $y$, ale to je len nepodstatná zmena označenia. Tiažové[1] zrýchlenie smeruje dole, čiže proti nami zvolenej orientácii osi $y$ (obr. 3), preto máme

$$a_y = -g \doteq -9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

a teda

$$v_y(t) = v_y(0) + a_y t\,, \qquad y(t) = y(0) + v_y(0)\,t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{22}$$

a po ďalšom prispôsobení

$$\boxed{\begin{aligned} v_y(t) &= v_0 - gt && (23a)\\ y(t) &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 && (23b)\end{aligned}}$$

1. V okamihu dosiahnutia maximálnej výšky, označme ho $t_\mathrm{m}$, je rýchlosť kameňa nulová. Preto z (23a) dostávame

   $$0 = v_0 - gt_\mathrm{m} \;\Rightarrow\; \boxed{t_\mathrm{m} = \frac{v_0}{g}} \doteq 1{,}019\,\mathrm{s} \tag{24}$$

2. Najvyššia dosiahnutá výška je

   $$y_\mathrm{max} = y(t_\mathrm{m}) \;=\; y_0 + v_0 t_\mathrm{m} - \frac{1}{2}gt_\mathrm{m}^2 \;=\; y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{2g} \tag{25}$$

   teda

   $$\boxed{y_\mathrm{max} = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}} \doteq 7{,}1\,\mathrm{m} \tag{26}$$

3. V okamihu dopadu, označme ho $t_\mathrm{D}$, je výšková súradnica kameňa nulová. Preto z (23b) dostávame

   $$0 = y_0 + v_0 t_\mathrm{D} - \frac{1}{2}gt_\mathrm{D}^2 \tag{27}$$

   To je nanešťastie kvadratická rovnica, čiže komplikácia. Ale zvládnuteľná. Upravme a prepíšme tú rovnicu do praktickejšieho tvaru

   $$\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t - y_0 = 0$$

[1] Najmä kvôli zemskej rotácii to nie je úplne presne to isté ako gravitačné zrýchlenie.

Dva jej korene sú

$$t_{\pm} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g}$$

Čas dopadu musí byť kladný a preto (keď ešte rozdelíme výraz na dva sčítance a $g$ v druhom z nich vsunieme pod odmocninu s nutnou úpravou na $g^2$)

$$t_{\mathrm{D}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 + 2gy_0}{g^2}}$$

Po finálnej úprave dostávame výsledok

$$\boxed{t_{\mathrm{D}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2y_0}{g}}} \doteq 2{,}22\,\mathrm{s} \tag{28}$$

Keď sa nad tým zamyslíme, prídeme na to, že tento výsledok sme mohli dostať aj bez riešenia kvadratickej rovnice: stačilo by sčítať už známy čas potrebný na výstup nahor ($t_{\mathrm{m}}$) s časom potrebným na pád z najvyššej dosiahnutej výšky, tiež už známej. Tento druhý časový interval sa dá jednoducho určiť zo stredoškolského vzorca (20), len tam namiesto $h$ treba dosadiť formulu (26) pre naše $y_{\mathrm{max}}$.

4. Nakoniec ešte vypočítame, akou rýchlosťou kameň dopadne. Vyslovene systematickým postupom by sme to určili pomocou (23a):

$$v_{\mathrm{D}y} = v_y(t_{\mathrm{D}}) = v_0 - gt_{\mathrm{D}} \tag{29}$$

Za $t_{\mathrm{D}}$ by sme dosadili vyjadrenie (28) a po zjednodušení by sme dostali výsledok (záporný, lebo ním chceme vyjadriť aj smer rýchlosti). Ale podobne ako v predošlom bode, ku tomu istému výsledku sa dá prísť jednoduchšie na základe úvahy: kameň predsa padá z výšky $y_{\mathrm{max}}$. Na určenie dopadovej rýchlosti preto stačí použiť stredoškolskú formulku (21), čiže

$$v_{\mathrm{D}y} = -\sqrt{2gy_{\mathrm{max}}} \tag{30}$$

čo s použitím (26) dáva výsledok

$$\boxed{v_{\mathrm{D}y} = -\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}} = -11{,}8\,\mathrm{m/s} \tag{31}$$

Ako vidíme, systematický postup býva niekedy zdĺhavejší a na škodu fyzikálneho myslenia. Aj tak však treba ovládať i systematické postupy, lebo neraz sú jedinou praktickou možnosťou.

Všimnime si, že pri riešení sme vystačili s jednou priestorovou súradnicou, teda s jednou priestorovou osou ($y$). Celý popis sme teda spravili v ***jednorozmernom priestore***. Stručne sa povie, že v **1D** (*one-dimensional space*).

# Obsah


**1 Kinematika pohybu bodov a telies, ktoré si vieme účelovo predstaviť ako body** 3

1.1 Hmotný bod . . . . . 3

1.2 Poloha, súradnica . . . . . 4

1.3 Čas . . . . . 4

1.4 Kinematika priamočiareho pohybu . . . . . 5

1.4.1 Rýchlosť . . . . . 6

1.4.2 Zrýchlenie . . . . . 10

1.4.3 Príklad: Voľný pád telesa pri zanedbateľnom odpore vzduchu . 13

1.4.4 Príklad: Zvislý vrh pri zanedbateľnom odpore vzduchu . . . . . 14