Otázky na skúšku ku predmetu *Fyzikálne modelovanie v počítačových hrách*, zimný semester 2020/2021

14. januára 2021, Martin Konôpka (martin.konopka@stuba.sk); otázky $43-48$ minimovej časti a 32, 33 hlavnej časti sformuloval doc. Bokes.

Otázky vedomostného minima

1. Ako matematicky definujeme *rýchlosť* hmotného bodu pohybujúceho sa v smere osi x?
2. Čo je priamočiary pohyb?
3. Čo je rovnomerný pohyb?
4. Čo je rovnomerný priamočiary pohyb?
5. Ako matematicky definujeme *zrýchlenie* hmotného bodu pohybujúceho sa v smere osi x?
6. Čo je trajektória pohybu hmotného bodu?
7. Čo je dráha?
8. V akých jednotkách udávame uhlovú rýchlosť?
9. Ako matematicky definujeme *rýchlosť* hmotného bodu (v zmysle vektora) vo všeobecnosti?
10. Ako matematicky definujeme *zrýchlenie* hmotného bodu (v zmysle vektora) vo všeobecnosti?
11. Ako vieme určiť veľkosť vektora, keď poznáme jeho kartézske zložky?
12. Ako vypočítame súčin skalára s vektorom?
13. Na aké dve na seba kolmé zložky sa dá rozčleniť zrýchlenie hmotného bodu pri krivočiarom pohybe?
14. Ako matematicky definujeme uhlovú *rýchlosť* v zmysle vektora?
15. Ako matematicky definujeme uhlové *zrýchlenie* v zmysle vektora?
16. Sformulujte prvý Newtonov zákon (zákon zotrvačnosti).
17. Sformulujte druhý Newtonov zákon (zákon sily).
18. Sformulujte tretí Newtonov zákon (zákon akcie-reakcie).
19. Čo je hybnosť hmotného bodu?
20. Čo je impulz sily?
21. Povedzte príklad obyčajnej diferenciálnej rovnice (ODR) vyskytujúcej sa vo fyzike.
22. Keď máme jednu ODR n-tého rádu, koľko začiatočných podmienok je potrebných, aby sme mohli nájsť jej jednoznačné riešenie?
23. Akú najzákladnejšiu alebo najjednoduchšiu numerickú metódu na riešenie ODR poznáte?
24. Povedzte názov aspoň jednej ďalšej numerickej metódy na riešenie ODR prvého rádu.
25. Akú špecializovanú numerickú metódu možno použiť na riešenie ODR 2. rádu bez 1. derivácie? (Povedzte aspoň jednu; nemusí byť nutne tá, ktorú sme podrobnejšie preberali.)
26. Čo rozumieme pod izolovanou sústavou hmotných bodov alebo telies?

27. Ak družica voľne obieha okolo Zeme po eliptickej trajektórii, tak dosahuje vyššiu rýchlosť v mieste najbližšom ku Zemi alebo najvzdialenejšom?

28. Zachováva sa hybnosť v izolovanej sústave hmotných bodov?

29. Čo je intenzita gravitačného poľa?

30. Dá sa intenzita gravitačného poľa vždy stotožniť so zrýchlením hmotného bodu?

31. Aká je základná jednotka pre (mechanickú) prácu a ako sa táto jednotka dá vyjadriť pomocou jednotiek Newton a meter?

32. Slovne definujte, čo je výkon nejakej sily $\vec{F}$.

33. Ako súvisí energia fyzikálnej sústavy s prácou, ktorú na sústave konáme? (Pod fyzikálnou sústavou si môžeme predstaviť napr. loptu, ktorú stláčame. Alebo kameň, ktorý zdvíhame zo zeme. Atď.)

34. Čo je potenciálové pole?

35. Čo je kinetická energia hmotného bodu?

36. Čo je moment hybnosti hmotného bodu?

37. Slovne sformulujte prvú impulzovú vetu (stačí v diferencálnom tvare) pre sústavu hmotných bodov, alebo vetu o pohybe ťažiska, čo je ekvivalentná formulácia.

38. Ak na sústavu hmotných bodov pôsobí len vonkajšia sila konzervatívneho poľa, zachováva sa ***hybnosť*** sústavy?

39. Ak na sústavu hmotných bodov pôsobí len vonkajšia sila konzervatívneho poľa, zachováva sa ***energia*** sústavy?

40. Ak **absentujú** vonkajšie sily, zachováva alebo nezachováva sa v sústave hmotných bodov jej ***celkový*** moment hybnosti?

41. Ak **absentujú** vonkajšie sily, zachováva alebo nezachováva sa v sústave hmotných bodov moment hybnosti jej ***ťažiska***?

42. Dá sa pojem *potenciálové pole* definovať a následne odvodiť zákon zachovania energie aj pre ***sústavu*** hmotných bodov?

43. Napíšte vzťah pre kinetickú energiu rotačného pohybu ideálne tuhého telesa vzhľadom na sústavu s počiatkom v ťažisku telesa pomocou jeho tenzora zotrvačnosti. Napíšte ako sa tento vzťah zjednoduší, ak je uhlová rýchlosť otáčania konštantný vektor $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, kde $\vec{k}$ je jednotkový vektor v smere osi z.

44. Prečo rovnica
$$\vec{\vec{I}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Gamma}$$
nie je všeobecne platná pre popis rotácie telesa v priestore?

45. Aké sú definičné vlastnosti ľubovoľného otočenia vektora (ako zobrazenia?)

46. Na jednoduchom príklade demonštrujte čo znamená, že rotácia vektora je lineárne zobrazenie.

47. Majme dve vzájomne natočené súradnicové sústavy dané jednotkovými vektormi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a $\left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right\}$. Vyjadrite elementy rotačnej matice pomocou týchto jednotkových vektorov.

48. Nájdite vyjadrenie pre jednotkové vektory otočenej sústavy $\left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right\}$ ako lineárne kombinácie vektorov neotočenej sústavy $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ pomocou rotačnej matice pre otočenie okolo osi z o uhol ϕ.

Otázky hlavnej časti skúšky

1. Napíšte (prípadne aj odvoďte), aká je pri rovnomerne zrýchlenom pohybe
   (a) závislosť rýchlosti v_x od času,
   (b) závislosť súradnice x od času.
   Pritom predpoklajte, že ide o pohyb v smere osi x. Dané je zrýchlenie a_x, začiatočná rýchlosť $v_x(0)$ a začiatočná súradnica $x(0)$.
   *(Preberané v časti **1.4.2**.)*

2. Kameň je vrhnutý pod uhlom α voči vodorovnému terénu rýchlosťou veľkosti v_0. Začiatočná výška je y_0. Známa je aj hodnota tiažového zrýchlenia g. Odpor vzduchu zanedbajte.
   (a) Nakreslite obrázok trajektórie aj súradnicovú sústavu.
   (b) Napíšte formuly, ako od času závisia kartézske zložky rýchlosti, $v_x(t)$, $v_y(t)$.
   (c) Napíšte formuly pre kartézske zložky súradníc, $x(t)$, $y(t)$.
   (d) Určte maximálnu dosiahnutú výšku $h \equiv y_{\max}$ počas letu.
   (e) Určte, za aký čas t_{D} kameň dopadne na zem.
   (f) Určte, ako ďaleko (ℓ) kameň doletí.
   *(Preberané v časti **1.5.3**.)*

3. Pohyb bodu po kružnici; nech má polomer r, jej stred nech leží v počiatku súradnicovej sústavy (x, y) a uhlová poloha bodu na kružnici voči osi nech je vyjadrená uhlom φ. Veľkosť rýchlosti uvažujeme všeobecne, teda sa môže aj meniť s časom.
   (a) Nakreslite príslušný obrázok.
   (b) Napíšte vyjadrenia pre x, y pomocou r a φ.
   (c) Definujte uhlovú rýchlosť ω.
   (d) Vyjadrite v_x a v_y.
   (e) Vyjadrite obvodovú rýchlosť pohybu v_φ.
   (f) Vyjadrite a_x a a_y.
   (g) Definujte uhlové zrýchlenie pohybu ε.
   (h) Vyjadrite veľkosť celkového zrýchlenia (a).
   (i) Napíšte vyjadrenie pre obvodové zrýchlenie $a_{||}$ pomocou jeho uhlového zrýchlenia ε.
   (j) Napíšte vyjadrenie pre dostredivé zrýchlenie $a_\perp$ pomocou jeho uhlovej rýchlosti (ω).
   *(Preberané v časti **1.5.5**.)*

4. Vektory:
   (a) Napíšte definíciu skalárneho súčinu vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ zvierajúcich uhol θ.
   (b) Vyjadrite skalárny súčin pomocou kartézskych zložiek.
   (c) Definujte vektorový súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$.
   (d) Vyjadrite vektorový súčin pomocou kartézskych zložiek.
   (e) Napíšte definičnú formulu pre zmiešaný súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
   *(Preberané v časti **2**.)*

5. Odvoďte formulu pre rozklad zrýchlenia (vektora) na tangenciálnu a normálovú zložku.
   *(Preberané v časti **3**.)*

6. Na doske je položená tehla. Koeficient statického trenia medzi tehlou a doskou je μ_{s}, koeficient kinetického trenia je μ_{k}, tiažové zrýchlenie má veľkosť g. Jeden koniec dosky začneme pomaly zdvíhať.
   (a) Nakreslite obrázok vrátane síl a ich skladania.
   (b) Pri akom uhle náklonu (označte ho napr. α_{c}) sa dá tehla do pohybu?
   (c) S akým zrýchlením sa bude tehla pohybovať, ak uhol náklonu bude naďalej α_{c}?
   (d) Pri akom náklone by sa mohla pohybovať stálou rýchlosťou?
   *(Preberané v časti **4.4**.)*

7. Definujte impulz sily a odvoďte prvú impulzovú vetu tak v integrálnom ako aj v diferenciálnom tvare. *(Preberané v časti **4.5**.)*

8. Obyčajné diferenciálne rovnice (ODR):
(a) Vyjadrite všeobecným zápisom jednu ODR n-tého rádu takú, v ktorej je najvyššia derivácia $y^{(n)}$ osamostatnená na ľavej strane. Nezávislú premennú označte symbolom t.
(b) Ukážte, ako problém dvoch alebo viacerých (ale konečný počet) závaží pospájaných pružinkami vedie na sústavu konečného počtu zviazaných obyčajných diferenciálnych rovníc.
*(Preberané v častiach **5.1**, **5.2**.)*

9. Na príklade rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + q(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r(t)$$

ukážte, ako sa ODR vyššieho rádu dá previesť na sústavu ODR prvého rádu. *(Preberané v časti **5.3**.)*

10. Vysvetlite, čo je Eulerova metóda (EM) riešenia ODR 1. rádu, nájdite aj formuly pre jej lokálnu a globálnu chybu a vysvetlite, prečo býva EM pre náročnejšie problémy nevhodná. *(Preberané v časti **5.4.2**.)*

11. Vysvetlite princíp metódy poliaceho bodu (t. j. metódy Runge-Kutta 2. rádu). *(Preberané v časti **5.4.3**.)*

12. Vysvetlite, čo je metóda Runge-Kutta (4. rádu). *(Preberané v časti **5.4**.)*

13. Formulujte sústavu N ODR prvého rádu najprv v podrobnejšom značení a potom v kompaktnom. Špecifikujte, aké podmienky alebo hodnoty musíme poznať, aby sme mohli nájsť konkrétne riešenie takej sústavy. *(Preberané v časti **5.5**.)*

14. Vysvetlite, čo je metóda „Velocity Verlet" riešenia ODR a v akých úlohách sa najčastejšie používa. *(Preberané v časti **5.6**.)*

15. Máme inerciálnu vzťažnú sústavu S. Polohový vektor istého hmotného bodu voči tejto sústave nech je $\vec{r}$. Máme aj inú vzťažnú sústavu, označme ju S'. V nej má ten istý hmotný bod polohový vektor $\vec{r}\,'$. Dá sa napísať $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$, kde $\vec{R}$ je nejaký rozdielový vektor. Rýchlosť pohybu vzťažnej sústavy S' voči S, teda $\mathrm{d}\vec{R}/\mathrm{d}t$ si označte $\vec{u}$.
(a) Vyjadrite vzťah medzi rýchlosťami hmotného bodu v jednej a druhej vzťažnej sústave.
(b) Ukážte, že ak je rýchlosť $\vec{u}$ stála, tak zrýchlenia hmotného bodu v jednej i druhej sústave sú rovnaké.
(c) Napíšte formuly pre Galileiho transformáciu polohového vektora a času medzi oboma sústavami.
(d) V tejto časti predpokladajte, že sústava S' sa voči inerciálnej sústave S pohybuje so zrýchlením $\vec{a}^*$. Vyjadrite zotrvačnú silu $\vec{P}$ pôsobiacu na hmotný bod o hmotnosti m v (neinerciálnej) sústave S'. Napíšte 2. Newtonov zákon pre tento hmotný bod (za predpokladu, že okrem zotrvačnej sily naň ešte pôsobia aj skutočné sily, ktoré v súčte sú $\vec{F}$).
*(Preberané v časti **6**.)*

16. Sformulujte zákon zachovania hybnosti (pre izolovanú sústavu hmotných bodov) a dokážte ho pre dva hmotné body. Naznačte, ako by ste dôkaz robili pre všeobecný počet hmotných bodov. *(Preberané v časti **7.2**.)*

17. Na člne stojí poľovník s puškou. Hmotnosť poľovníka, pušky a člna je spolu m_1. Poľovník vystrelí z pušky náboj hmotnosti m_2. V dôsledku spätného nárazu sa čln spolu s poľovníkom začne pohybovať opačným smerom než je smer výstrelu. Aký je pomer rýchlostí náboja a poľovníka s člnom a puškou v okamihu tesne po výstrele? Odpor vody zanedbávame. *(Preberané v časti **7.2**.)*

18. Auto idúce rýchlosťou $80\,\mathrm{km/h}$ a vážiace $950\,\mathrm{kg}$ narazí do auta, ktoré ide pred ním rýchlosťou $50\,\mathrm{km/h}$ a váži $1050\,\mathrm{kg}$. Autá z nejakého dôvodu zostanú po zrážke do seba zakliesnené. Akou rýchlosťou sa budú pohybovať tesne po zrážke? Riešte najprv všeobecne. *(Preberané v časti **7.2**.)*

19. Z raketového motora unikajú za jednotku času plyny o hmotnosti μ relatívnou rýchlosťou v (voči rakete).
(a) Odvoďte závislosť medzi okamžitou hmotnosťou a rýchlosťou rakety (Ciolkovského rovnica).
(b) Odvoďte formulu pre ťažnú silu raketového motora. *(Preberané v časti **7.2**.)*

20. Sformulujte Keplerove zákony. (Pre tretí napíšte aj rovnicu alebo aspoň vzťah úmery.) *(Preberané v časti **8.1**.)*

21. Na základe Keplerovych zákonov odvoďte Newtonov gravitačný zákon. *(Preberané v časti **8.2.**)*

22. Sformulujte najprv základoškolskú definíciu pre prácu konanú nejakou silou o veľkosti F a potom:
(a) Vysvetlite, prečo je príslušná formula pre mnohé prípady nepostačujúca.
(b) Napíšte aj všeobecnú formulu pre prácu konanú nejakou silou po nejakej trajektórii začínajúcej v bode (1) a končiacej v bode (2).
*(Preberané v časti **9.1.**)*

23. Odvoďte formulu pre výkon sily $\vec{F}$, ktorá pôsobí na hmotný bod pohybujúci sa rýchlosťou $\vec{v}$. *(Preberané v časti **9.1.**)*

24. Potenciálové pole a súvisiace pojmy pre jeden hmotný bod: Nech potenciálové pole pôsobí na hmotný bod silou $\vec{f}$.
(a) Napíšte formulu pre prácu, ktorú konáme, ak hmotný bod v tomto poli posúvame silou $\vec{f}_{\text{ruka}} = -\vec{f}$ z miesta (1) do miesta (2).
(b) Definujte potenciálnu energiu toho hmotného bodu v mieste (2) vzhľadom na miesto (1).
(c) Napíšte prácu vykonanú rukou ako rozdiel potenciálnych energií.
(d) Pomocou rýchlostí vyjadrite prácu vykonanú poľom.
(e) Definujte kinetickú energiu hmotného bodu.
(f) Dokážte, že súčet kinetickej a potenciálnej energie hmotného bodu sa zachováva.
*(Preberané v častiach **9.3-9.6.**)*

25. Pre silu potenciálového poľa odvoďte formulu $\vec{f} = -\vec{\nabla} U$. *(Preberané v časti **9.7.**)*

26. (a) Napíšte definičnú formulu pre moment hybnosti jedného hmotného bodu.
(b) Odvoďte druhú impulzovú vetu, teda formulu

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}$$

pre jeden hmotný bod.
(c) Ako sa volá veličina na pravej strane práve uvedenej rovnice? (Označovali sme ju $\vec{\Gamma}$, inokedy možno aj $\vec{\gamma}$.)
*(Preberané v časti **10.**)*

27. (a) Napíšte formulu pre polohový vektor ťažiska $\vec{R}$ sústavy N hmotných bodov.
(b) Napíšte formulu pre celkovú hybnosť $\vec{P}$ danej sústavy.
(c) Odvoďte prvú impulzovú vetu pre danú sústavu hmotných bodov. Pre ten účel si vyjadrite silu pôsobiacu na i-ty hmotný bod formulou

$$\vec{f}_i = \vec{f}_i^{(e)} + \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ji} \qquad (\vec{f}_{jj} \equiv \vec{0} \quad \forall j)$$

kde $\vec{f}_i^{(e)}$ je sila od prípadných vonkajších zdrojov.
*(Preberané v častiach **11.1, 11.2.**)*

28. Definujte moment hybnosti sústavy hmotných bodov a odvoďte preň 2. impulzovú vetu v diferenciálnom tvare. *(Preberané v časti **11.3.**)*

29. **Úvahy v ťažiskovej sústave**: Polohový vektor hmotného bodu si vyjadrite v tvare

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}\,'_i$$

kde $\vec{R}$ je polohový vektor ťažiska (vzhľadom na „hlavnú“ súradnicovú sústavu). Obdobne vyjadrite rýchlosť:

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}\,'_i$$

Najprv **dokážte platnosť formuly $\sum_i m_i \vec{r}'_i = \vec{0}$** (priam triviálne) a potom aj **platnosť formuly $\sum_i m_i \vec{v}'_i = \vec{0}$**. Potom ukážte, že moment hybnosti sústavy sa dá **rozdeliť na zložky** takto:

$$\vec{L} = \vec{L}_{\text{CM}} + \vec{L}'$$

kde prvý člen popisuje moment hybnosti ťažiska, druhý moment hybnosti vzhľadom na ťažisko. Pre tie dve zložky odvoďte základné formuly. *(Preberané v časti **11.3**.)*

30. Pre moment hybnosti $\vec{L}_{\text{CM}}$ ťažiska sústavy hmotných bodov odvoďte 2. impulzovú vetu v diferenciálnom tvare, teda pohybovú rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{CM}}}{\mathrm{d}t} = \vec{R} \times \vec{F}^{(\text{e})}$$

a dokážete tiež, že zmena (derivácia) príspevku $\vec{L}'$ sa riadi pohybovou rovnicou

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{f}_i^{(e)}$$

*Ak sa táto otázka vyskytne, základná formula pre $\vec{L}'$ bude daná ako pomôcka. (Preberané v časti **11.3**.)*

31. Ukážte (aj odvoďte príslušné formuly), že kinetická energia sústavy hmotných bodov sa dá rozčleniť na ťažiskovú časť T_{CM} a príspevok pohybu okolo ťažiska T'. *(Preberané v časti **11.4**.)*

32. Máme sústavu dvoch hmotných bodov s hmotnosťami m_1 a m_2 a polohovými vektormi $\vec{r}_1 = x_1\vec{i}$ a $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{k}$.
(a) Nájdite polohový vektor ťažiska sústavy.
(b) Nájdite polohové vektory hmotných bodov vzhľadom na ťažisko sústavy.
(c) Nájdite nasledovné elementy tenzora zotrvačnosti sústavy: I_{xx}, I_{xy}, I_{zz}.
(Preberané s doc. Bokesom.)

33. Majme vektor s počiatočnými súradnicami $(0, 0, a)$.
(a) Nájdite vektor, ktorý získame jeho otočením o uhol $\pi/4$ okolo osi y a následne ďalším otočením o uhol $\pi/2$ okolo osi x.
(b) Nájdite vektor ktorý získame jeho otočením o uhol $\pi/2$ okolo osi x a následne ďalším otočením o uhol $\pi/4$ okolo novej osi y', ktorá vznikne otočením osi y podľa (a).
(c) Vysvetlite, prečo je dôležité poradie realizovania rotácií.
(d) Konfrontujte tvrdenie z (c) s výsledkami (a) a (b).
(Preberané s doc. Bokesom.)