常微分方程 ODE

Illusionna

2023 年 1 月 31 日——2023 年 2 月 15 日

目录

1 常微分方程概念

1.1 n 阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=f(x)$$

1.1.1 n 阶齐次线性微分方程

$$f(x)=0$$

1.1.2 n 阶非齐次线性微分方程

$$f(x)\neq 0$$

1.1.3 示例

一阶非线性微分方程：

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y}$$

三阶非齐次线性微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+x$$

2 一阶微分方程求解

2.1 除项变量换元

2.1.1 适用公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(\frac{y}{x})$$

令：

$$u = \frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$$

2.1.2 示例

1. $t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + \sqrt{t^2 - x^2}$

2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$

2.2 解方程组变量分离

2.2.1 适用公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

联立方程组：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (\alpha, \beta)$$

令：

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$

则：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(Y+\beta)}{\mathrm{d}(X+\alpha)} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y} = g(\frac{Y}{X})$$

2.2.2 示例

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$$

3 线性微分方程的常数变易

3.1 一阶线性微分方程

3.1.1 适用公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x) \rightleftharpoons \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = P(y)x + Q(y)$$

3.1.2 通解结论

$$y = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}(\int Q(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C)$$

3.1.3 自变量因变量互换

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{2x-y^2} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2x-y^2}{y} = \frac{2x}{y} - y$$

3.2 伯努利微分方程

3.2.1 适用公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)y^n$$

【注意】 $f(x,y) = Q(x)y^n \neq f(x)$，因此伯努利微分方程是非线性微分方程.

3.2.2 伯努利方程求解步骤

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y^{1-n} + Q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y^{1-n}}{\mathrm{d}x} = (1-n)P(x)y^{1-n} + (1-n)Q(x)$$

3.2.3 示例

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{6y}{x} - xy^2$$

$$y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{6}{x}y^{-1} - x$$

$$\frac{\mathrm{d}y^{-1}}{\mathrm{d}x} = -\frac{6}{x}y^{-1} + x$$

【注意】同除以 y^2 时要考虑 $y \neq 0$ 这一特解.

3.3 特殊换元

3.3.1 特殊换元方法

令：

$$u = f(x, y)$$

3.3.2 示例

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^y + 3x}{x^2}$$

令：

$$u = e^y$$

则：

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{3u}{x} + \frac{u^2}{x^2}$$

3.4 二阶微分方程的常数变易

$$y^{''} + \frac{x}{1-x}y^{'} - \frac{1}{1-x}y = x - 1$$

已知齐次方程的基本解组为：

$$y_1 = x \qquad y_2 = e^x$$

常数变易：

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

得到方程组：

$$\begin{cases} c_1^{'}(x)y_1 + c_2^{'}(x)y_2 = 0 \\ c_1^{'}(x)y_1^{'} + c_2^{'}(x)y_2^{'} = f(x) \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} c_1^{'}(x)x + c_2^{'}(x)e^x = 0 \\ c_1^{'}(x) \times 1 + c_2^{'}(x) \times e^x = x - 1 \end{cases}$$

略......

4 恰当方程与积分因子

4.1 恰当方程

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

通解：

$$u(x, y) = C$$

恰当：

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

【注意引理】

$$\begin{cases} \textbf{If}: \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \textbf{and} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \textbf{Continuity} \\ \textbf{Then}: \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

4.2 积分因子

4.2.1 前提条件

不恰当：

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

4.2.2 引入积分因子

$$\mu = e^{\int \psi(x)\,\mathrm{d}x} \longrightarrow \psi(x) = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

$$\mu = e^{\int \phi(y)\,\mathrm{d}y} \longrightarrow \phi(y) = \frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}$$

4.3 求解示例

$$x\,\mathrm{d}y = y(1-xy)\,\mathrm{d}x$$

$$(xy^2 - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\Longrightarrow \mu = \frac{1}{y^2}$$

$$(x - \frac{1}{y})\,\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = 0$$

4.3.1 凑微分法

$$x\,\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{y}{y^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\frac{x^2}{2}) - \mathrm{d}(\frac{x}{y}) = 0$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x^2}{2} + C$$

4.3.2 常规做法

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \phi(y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + \phi(y)$$

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \psi(x) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}y + \psi(x)$$

因此：

$$u(x,y) = \int (x - \frac{1}{y})\,\mathrm{d}x + \phi(y) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{y} + C + \phi(y)$$

分别对两边的 y 求偏导.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{\mathrm{d}\phi(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\phi(y)}{\mathrm{d}y} = 0 \Longrightarrow \phi(y) = \bar{C}$$

则：

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{y} + \tilde{C} = \widehat{C}$$

通解：

$$\frac{x}{y} = \frac{x^2}{2} + \mathcal{C}$$

5 一阶隐式微分方程及参数表示

5.1 一般的换元

5.1.1 换元操作

令：

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

5.1.2 示例

$$(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^3 + 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 0$$

$$p^3 + 2xp = y$$

分别对两边的 x 求偏导.

$$3p^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$$

然后积分解出含参数 p 的 x.

$$x = \frac{C - \frac{3}{4}p^4}{p^2}$$

从而代入解出含参数 p 的 y.

$$y = \frac{2C}{p} - \frac{1}{2}p^3$$

综上：

$$\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{3}{4}p^2 \\ y = \frac{2C}{p} - \frac{1}{2}p^3 \end{cases} \quad p \neq 0 \ \ \textbf{and} \ \ y = 0$$

5.1.3 倒数换元

令：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{p}$$

5.1.4 示例（该例是不合理的，仅说理）

对某方程两边关于 x 求偏导，得到.

$$p = \frac{p}{p^2 - x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}$$

不妨，关于 y 求偏导.

$$\frac{1}{p} = \frac{p^2 - y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}}{p}$$

5.2 特殊的换元

5.2.1 引入参数 t 的换元操作

$$F(x, y^{'}) = 0$$

令：

$$y^{'} = p = G(t, x)$$

5.2.2 示例

$$x^3 + y^{'3} - 3xy^{'} = 0$$

令：

$$p = y^{'} = tx$$

从而：

$$x = \frac{3t}{1+t^3}$$

则：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = tx \longrightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\frac{3t}{1+t^3})$$

积分得到 y.

$$y = \frac{3+12t^3}{2(1+t^3)^2} + C$$

如果令：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$$

则：

$$x^3 + p^3 = 3xp + C$$

此情形之下，难以将 x 表示成 p 的参数形式.

5.2.3 适用公式

$$F(y, y^{'}) = 0$$

5.2.4 示例

$$y^2(1-y^{'}) = (2-y^{'})^2$$

令：

$$2 - y^{'} = yt$$

则：

$$y^2(yt-1)=y^2t^2$$

易得（$y\neq 0$）：

$$y=t+\frac{1}{t}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^{'}=2-yt=1-t^2$$

积分得到 x.

$$x=\frac{1}{t}+C$$

如果令：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$$

则：

$$y^2(1-p)=(2-p)^2$$

由于 y^2 的存在，所以对 x 求偏导后依然有 y.

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1-p)-y^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-2(2-p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

5.2.5 拓展

1. $x^2+y^{'2}=1\longrightarrow y^{'}=\cos t$
2. $y(1+y^{'2})=2\longrightarrow y^{'}=\tan t$

6 皮卡逐步逼近函数序列

6.1 皮卡函数序列

方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$$

假设 $y=\phi(x)$ 是方程的解（存在唯一定理可以印证）.
取定初值：

$$(x_0,y_0)=(\alpha,\beta)$$

则：

$$\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x} = f(x,\phi(x))$$

$$\text{Picard function series: } \begin{cases} \phi_0(x) = y_0 \\ \phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\phi_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \phi_0(x) = \beta \\ \phi_n(x) = \beta + \int_{\alpha}^{x} f(t,\phi_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

$\phi_n(x)$ 表示第 n 次逐步逼近的近似解函数，注意解的存在区间.
解的存在区间： $x_0 \le x \le x_0 + h$

$$h=\min\{a,\frac{b}{M}\} \ \ \textbf{and} \ \ M=\max_{\Omega}|f(x,y)|$$

$$\Omega = \{(x,y)|x_0-a\le x\le x_0+a, y_0-b\le y\le y_0+b\}$$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2| \ \ \textbf{and} \ \ L=\max|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}|$$

6.2 第 n 次近似解及误差估计

已知方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y^2$$

通过点：

$$(x_0, y_0) = (\alpha, \beta) = (1, 0)$$

6.2.1 第 n 次近似解

- $f(x, y) = x + y^2$
- $\phi_0(x) = y_0 = 0$
- $\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_0(x))\,\mathrm{d}t = 0 + \int_1^x f(t, 0)\,\mathrm{d}t = \int_1^x (t + 0)\,\mathrm{d}t$
- $\phi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$
- $\phi_2(x) = 0 + \int_1^x f(t, \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2})\,\mathrm{d}t = \int_1^x (t + \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4})\,\mathrm{d}t$
- $\phi_2(x) = \frac{t^5}{20} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{4}|_1^x$
- $\phi_2(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} - \frac{30}{19}$
- ....

则第二次近似解为：

$$\phi_2(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} - \frac{30}{19}$$

6.2.2 误差估计

误差估计表达式：

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \leq \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}$$

以上述为例，第二次近似解存在区间的误差估计.

假设:

$$|x-1| \le a = 1, \quad |y-0| \le b = 2$$

依然通过点：

$$(x_0, y_0) = (\alpha, \beta) = (1, 0)$$

则：

$$M = \max_{\Omega} |f(x,y)| = \max_{\Omega} |x+y^2| = |2+2^2| = 6$$

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{1, \frac{2}{6}\} = \frac{1}{3}$$

$$L = \max |\frac{\partial f}{\partial y}| = \max |2y| = 4$$

$$误差 = \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1} = \frac{6 \times 4^2}{(2+1)!} (\frac{1}{3})^{2+1} = \frac{16}{27} \approx 0.5926$$

6.3 存在唯一定理条件所在的区间

方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y^{\frac{1}{2}}$$

利普希思（Lipschitz）条件：

$$L = \max |\frac{\partial f}{\partial y}|$$

而：

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \text{在 } y \ne 0 \text{ 上存在且连续}$$

则：

$$|x| \ge 0, \quad |y| \ge \delta > 0$$

6.4 解的存在区间

方程组：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

解的存在区间：

$$|x - x_0| \leq h$$

即在 $|x - x_0| \leq h$ 区间上有唯一解 $y = \phi(x)$.

6.5 矩阵形式的逐步逼近近似解

6.5.1 矩阵形式方程

$$\boldsymbol{Y}^{'} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}$$

其中：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

满足初值：

$$\boldsymbol{Y}(\zeta) = \begin{bmatrix} value_1 \\ value_2 \\ \dots \\ value_n \end{bmatrix}$$

矩阵形式的皮卡函数序列：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_0(x) = \boldsymbol{Y}(\zeta) \\ \boldsymbol{\phi}_n(x) = \boldsymbol{Y}(\zeta) + \int_\zeta^x [\boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}_{n-1}(t) + \boldsymbol{X}]\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

6.5.2 示例

方程组：

$$\boldsymbol{Y}^{'} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{Y} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin x \end{bmatrix}$$

满足初值：

$$\boldsymbol{Y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{\phi}_0(x) = \boldsymbol{Y}(0)$

- $$\boldsymbol{\phi}_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \int_0^x \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin t \end{bmatrix} \right\} \mathrm{d}t$$

  $$\boldsymbol{\phi}_1(x) = \begin{bmatrix} -9x \\ 4 - \cos x \end{bmatrix}$$

- $$\boldsymbol{\phi}_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \int_0^x \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9t \\ 4 - \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin t \end{bmatrix} \right\} \mathrm{d}t$$

  $$\boldsymbol{\phi}_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\sin x - 12x \\ -\frac{27}{2}x^2 - \cos x + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sin x - 12x \\ -\frac{27}{2}x^2 - \cos x + 4 \end{bmatrix}$$

7 克莱罗微分方程

7.1 克莱罗公式

$$y = xp + f(p)$$

其中，$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$f(p)$ 是 p 的连续可微函数.
通解：

$$y = Cx + f(C)$$

7.2 几何意义下克莱罗方程

克莱罗微分方程的通解是一直线簇，此直线簇的包络就是方程的奇解.

7.3 克莱罗方程的包络

对克莱罗方程两边关于 p 求导.

$$0 = x + f^{'}(p)$$

联立方程，可得求 p-判别曲线的前凑.

$$\begin{cases} x + f^{'}(p) = 0 \\ y = xp + f(p) \end{cases}$$

【注意】 消去 p 后的解是通解的包络，**不需要检验**.

7.4 示例

$$y = x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\sqrt{-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

这是一个克莱罗微分方程，所以得到通解.

$$y = Cx + 2\sqrt{-C} = 2\mathcal{C} - \mathcal{C}^2 x$$

联立方程组：

$$\begin{cases} y = 2p - p^2 x \\ 0 = 2 - 2px \end{cases}$$

也可以联立方程组：

$$\begin{cases} y = 2\mathcal{C} - \mathcal{C}^2 x \\ 0 = 2 - 2\mathcal{C}x \end{cases}$$

则 p-判别曲线（或 c-判别曲线）为：

$$xy = 1$$

不必验证即可知此 p-判别曲线即是通解的包络.

8 奇解与包络

8.1 简介

从微分方程角度叫奇解；从几何角度叫包络. 因此是一个东西.

8.2 奇解（包络）定义

它是一条特殊的积分曲线，它不属于该微分方程的积分曲线簇，它上面的每一点都有积分曲线簇中的某一条曲线与之相切.

8.3 c-判别曲线

8.3.1 c-判别曲线的必要条件

$$\begin{cases} \Phi(x,y,c) = 0 \\ \frac{\partial\Phi(x,y,c)}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

8.3.2 示例

方程：

$$(x-c)^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{cases} (x-c)^2 + y^2 = 1 \\ 2(x-c) \times (-1) = 0 \end{cases}$$

c-判别曲线：

$$\Longrightarrow y = \pm 1$$

“经检验”，两条直线均是包络.

8.3.3 检验步骤

1. 它是一条积分曲线

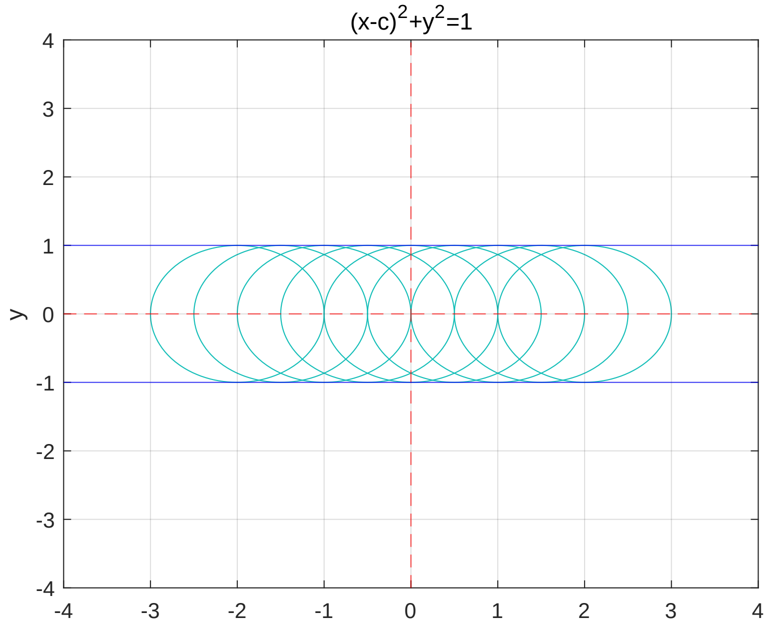
$$y = \pm 1 \sim \begin{cases} (x-c)^2 + y^2 = 1 \\ 2(x-c) \times (-1) = 0 \end{cases}$$

2. 它不属于积分曲线簇

$$y = \pm 1 \notin (x-c)^2 + y^2 = 1, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\because x = c, \quad y = \pm 1 \in (x-c)^2 + y^2 = 1$$

3. 它的每一点都和曲线簇某一曲线相切



8.4 p-判别曲线

8.4.1 p-判别曲线的必要条件

$$\begin{cases} F(x,y,y^{'}) = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,y^{'})}{\partial y^{'}} = 0 \end{cases}$$

8.4.2 示例

方程：

$$(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} p^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2p = 0 \end{cases}$$

p-判别曲线：

$$y = \pm 1$$

“经检验”，两条直线均是奇解（包络）.

8.4.3 检验步骤

1. 通解

$$y = \sin(x + C)$$

2. 它是方程的解

$$y = \pm 1 \sim (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 + y^2 - 1 = 0$$

3. 它满足通解

$$y = \pm 1 \sim y = \sin(x + C)$$

$$x + C = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = \mathbb{Z}$$

8.5 c-p-判别曲线与包络奇解区别

c-判别曲线是不是包络需要进一步**按照定义验证**；而 p-判别曲线是不是奇解只需要验证是否**满足原微分方程和其通解**即可，若满足通解即为奇解.

9 高阶线性微分方程组（不全）

9.1 高阶微分方程

线性微分方程解的性质：线性方程的叠加原理，n 阶线性方程解空间的结构，n 阶齐次方程的通解，非齐次方程的通解.

方程的求解方法：常系数齐次线性方程的特征根法（欧拉待定指数法），常系数非齐次线性方程的特解法（待定系数法），求解一般非齐次线性方程的常数变易法，非线性方程的降阶法.

9.2 线性微分方程组

线性微分方程组解的存在唯一性定理，用矩阵描述微分方程组，高阶方程与一阶微分方程组的等价关系.

线性方程组的一般理论：齐次线性方程组的基解矩阵，通解的基解矩阵表示，基解矩阵的朗斯基行列式，齐次方程组解空间的结构，非齐次方程组的常数变易公式.

常系数齐次方程组的解理论，常系数齐次方程组的基解矩阵的存在性，矩阵指数，特征方法求解微分方程组.

非齐次线性微分方程特解构造法

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{'} + a_n y = f(x)$$

<一>等号右端项只含e 指数

其中:

$$f(x) = e^{tx}$$

① 若 t 不是特征根

$$\bar{y} = x^0 A e^{tx} = A e^{tx}$$

② 若 t 是单特征根

$$\bar{y} = x^1 A e^{tx} = A x e^{tx}$$

③ 若 t 是 k 重根

$$\bar{y} = x^k A e^{tx} = A x^k e^{tx}$$

例一：

$$y^{''} - 2y^{'} + y = e^{2x}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad => \quad (\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda = 1(double) \qquad e^{2x} => t = 2 \qquad t \neq \lambda$$

$$Assume: \quad \bar{y} = Ae^{2x}$$

例二：

$$y^{''} - 2y^{'} + y = e^{x}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad => \quad (\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda = 1(double) \qquad e^{x} => t = 1 \qquad t = \lambda(double)$$

$$Assume: \quad \bar{y} = x^2 A e^{x} = A x^2 e^{x}$$

例三：

$$y^{'} - y = 2e^{x}$$

$$\lambda - 1 = 0 \quad => \quad \lambda = 1(single)$$

$$\lambda = 1(single) \qquad t = 1 \qquad t = \lambda(single)$$

$$Assume: \quad \bar{y} = x^{1}Ae^{tx} = Axe^{x}$$

<二>等号右端项含多项式与e 指数乘积（P(x)=1，即为<一>模型）

其中：

$$f(x) = P(x)e^{tx}$$

不妨记：

$$P(x)\ is\ a\ known\ polynomial.$$

$$Q(x)\ is\ an\ uncertain\ polynomial,\ and\ \ \partial Q(x) = \partial P(x).$$

① 若 t 不是特征根

$$\bar{y} = x^{0}Q(x)e^{tx} = Q(x)e^{tx}$$

② 若 t 是单特征根

$$\bar{y} = x^{1}Q(x)e^{tx} = xQ(x)e^{tx}$$

③ 若 t 是 k 重根

$$\bar{y} = x^{k}Q(x)e^{tx}$$

例一：

$$y^{'} - y = x^{3} + 7$$

$$\lambda - 1 = 0 \quad => \quad \lambda = 1(single)$$

$$\because\ y^{'} - y = x^{3} + 7 = (x^{3} + 7)e^{0x}$$

$$\therefore\ t = 0 \qquad t \neq \lambda$$

$$Assume: \quad \bar{y} = (Ax^{3} + Bx^{2} + Cx + D)e^{0x} = Ax^{3} + Bx^{2} + Cx + D$$

$$Among: \quad Q(x) = An\ uncertain\ polynomial = Ax^{3} + Bx^{2} + Cx + D$$

例二：

$$y^{'} - y = (x^2 - x)e^x$$

$$\lambda - 1 = 0 \quad => \quad \lambda = 1(single)$$

$$t = 1 \qquad t = \lambda(single)$$

$$Assume: \quad \bar{y} = x^1(Ax^2 + Bx + C)e^x = x(Ax^2 + Bx + C)e^x$$

$$Among: \quad Q(x) = Ax^2 + Bx + C$$

例三：

$$y^{(3)} - 3y'' + 3y^{'} - y = xe^x$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0 \;=>\; \lambda = 1(triple)$$

$$t = 1 \qquad t = \lambda(triple)$$

$$Assume: \quad \bar{y} = x^3 Q(x)e^x = x^3(Ax + B)e^x$$

$$Among: \quad Q(x) = Ax + B$$

<三>等号右端项含三角函数与e 指数

其中：

$$f(x) = \nabla(x)e^{rx}$$

不妨记：

$$\nabla(x)\ is\ an\ uncertain\ trigonometric\ function.$$

$$\nabla(x) = Acos(jx) + Bsin(jx)$$

① 若 t 不是特征根

$$\bar{y} = x^0[Acos(jx) + Bsin(jx)]e^{rx} = Ae^{rx}cos(jx) + Be^{rx}sin(jx)$$

② 若 t 是单特征根

$$\bar{y} = x^1[Acos(jx) + Bsin(jx)]e^{rx} = x[Acos(jx) + Bsin(jx)]e^{rx}$$

③ 若 t 是 k 重根

$$\bar{y} = x^k[Acos(jx) + Bsin(jx)]e^{rx}$$

例一：

$$y'' + 4y = 7cos2x$$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad => \quad \lambda = 2i \ or \ \lambda = -2i$$

$$\because \ y'' + 4y = 7cos2x = (7cos2x + 0sinx)e^{0x}$$

$$\therefore \ r = 0 \qquad t = 0 + 2i \ or \ t = 0 - 2i$$

$$t = \lambda(single)$$

$$Assume: \quad \bar{y} = x^1(Acos2x + Bsin2x) = x(Acos2x + Bsin2x)$$

例二：

$$y'' - 2y^{'} + y = (cos3x - 2sin3x)e^{7x}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad => \quad \lambda = 1(double)$$

$$r = 7 \qquad t = 7 + 3i \ or \ t = 7 - 3i$$

$$t \neq \lambda$$

$$Assume: \quad \bar{y} = x^0(Acos3x + Bsin3x)e^{7x} = (Acos3x + Bsin3x)e^{7x}$$

<四>等号右端项含多项式、三角函数和e 指数

其中：

$$f(x) = P(x)\nabla(x)e^{rx}$$

不妨记：

$$\nabla(x) = Acos(jx) + Bsin(jx)$$

① 若 t 是 k 重根（k>0的整数，认为单根也是重根）

$$\bar{y} = x^k[Q(x)cos(jx) + R(x)sin(jx)]e^{rx}$$

② 若 t 不是特征根

$$\bar{y} = x^0[Q(x)cos(jx) + R(x)sin(jx)]e^{rx} = [Q(x)cos(jx) + R(x)sin(jx)]e^{rx}$$

【注意】：

$$\partial Q(x) = \partial R(x) = \partial P(x) = 0$$

$$Assume: \quad Q(x)=A, \quad R(x)=B$$

$$\bar{y}=[Acos(jx)+Bsin(jx)]e^{rx} \qquad transform\ to\ Mode < Three.\ ① >.$$

其中：

$$Both\ Q(x)\ and\ R(x)\ are\ uncertain\ polynomials.$$

$$\partial Q(x)=\partial R(x)=\partial P(x).$$

例：

$$y''+4y=(x^3-x+12)cos2x$$

$$\lambda^2+4\lambda=0 \quad => \quad \lambda=2i\ or\ \lambda=-2i$$

$$\because\ y''+4y=(x^3-x+12)cos2x=(x^3-x+12)(1\times cos2x+0\times sin2x)e^{0x}$$

$$\therefore\ r=0 \qquad t=0+2i\ or\ t=0-2i$$

$$t=\lambda(single)$$

$$Assume: \bar{y}=x^1[(Ax^3+Bx^2+Cx+D)cos2x+(Ex^3+Fx^2+Gx+H)sin2x]e^{0x}$$

$$So:\ \bar{y}=x[(Ax^3+Bx^2+Cx+D)cos2x+(Ex^3+Fx^2+Gx+H)sin2x]$$

<五>等号右端项含同类叠加项

其中：

$$f(x)=g(x)e^{r_1x}+h(x)e^{r_2x}$$

不妨记：

$$Both\ g(x)\ and\ h(x)\ are\ polynomial\ trigonometric\ functions.$$

原理：

$$L(y)=f(x)=g(x)e^{r_1x}+h(x)e^{r_2x}$$

$$\begin{cases} L(y)=g(x)e^{r_1x} \\ L(y)=h(x)e^{r_2x} \end{cases}$$

$$L(y)=g(x)e^{r_1x} \quad => \quad \bar{y_1}=G(x)$$

$$L(y) = h(x)e^{r_2 x} \quad => \quad \bar{y_2} = H(x)$$

$$Via\ Superposition\ Principle: \quad \bar{y_1} + \bar{y_2} = g(x)e^{r_1 x} + h(x)e^{r_2 x}$$

$$L(y) = f(x) \quad => \quad \bar{y} = \bar{y_1} + \bar{y_2}$$

例：

$$y^{'''} - y = (-3x^2+1)(7cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - 5sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{\frac{1}{2}x} - (-x^3+12)e^x$$

$$\lambda^3 - 1 = 0 \quad => \quad \lambda_1 = 1(single)\ or\ \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i(single)$$

$$y^{'''} - y = (-3x^2+1)(7cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - 5sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$r_1 = \frac{1}{2} \qquad t_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$t_1 = \lambda_{2,3}(single)$$

$$Assume: \quad \bar{y_1} = x^1[(Ax^2+Bx+C)cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (Dx^2+Ex+F)sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]e^{\frac{1}{2}x}$$

$$Among: \quad \partial Q(x) = \partial R(x) = \partial(-3x^2+1) = 2$$

$$y^{'''} - y = -(-x^3+12)e^x$$

$$r_2 = 1 \qquad t_2 = 1 = \lambda_1(single)$$

$$Assume: \quad \bar{y_2} = x^1[Ax^3+Bx^2+Cx+D]e^x$$

$$Among: \quad \partial Q(x) = \partial[-(-x^3+12)] = 3$$

$$\wr * \wr\ Assume: \quad \bar{y} = \bar{y_1} + \bar{y_2}$$

$$\bar{y} = x \times \{[(s_1x^2+s_2x+s_3)cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (s_4x^2+s_5x+s_6)sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]e^{\frac{1}{2}x} + [s_7x^3+s_8x^2+s_9x+s_{10}]e^x\}$$