图像处理：第二次作业

Illusionna 2025xxxxxxxx04 人工智能学院

05:05, Monday 24th November, 2025

目录

1　2D 离散傅立叶变换

定义时域到频域的 $\mathcal{DFT}$ 傅立叶变换为 $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F}_{\to f(x,\ y)} = \mathcal{DFT}[f(x,\ y)] = F(u,\ v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,\ y)\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

定义频域到时域的 $\mathcal{DFT}^{-1}$ 傅立叶逆变换 $\mathscr{F}^{-1}$:

$$\mathscr{F}^{-1}_{\to F(u,\ v)} = \mathcal{DFT}^{-1}[F(u,\ v)] = f(x,\ y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,\ v)\mathrm{e}^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

(a)　平移性质 1

$$f(x,\ y)\mathrm{e}^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)} \Longleftrightarrow F(u-u_0,\ v-v_0)$$

构造 $g(x,\ y) = f(x,\ y)\mathrm{e}^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}$，则:

$$\begin{aligned}
G(u,\ v) = \mathcal{DFT}[g(x,\ y)] &= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} g(x,\ y)\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,\ y)\mathrm{e}^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,\ y)\mathrm{e}^{-j2\pi\left[\frac{(u-u_0)x}{M}+\frac{(v-v_0)y}{N}\right]} \\
&= F(u-u_0,\ v-v_0)
\end{aligned}$$

(b)　平移性质 2

$$f(x-x_0,\ y-y_0) \Longleftrightarrow F(u,\ v)\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}$$

构造 $G(u,\ v)=F(u,\ v)\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}$，则：

$$
\begin{aligned}
g(x,\ y)=\mathcal{DFT}^{-1}[G(u,\ v)] &= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}G(u,\ v)\mathrm{e}^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \\
&= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,\ v)\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}\mathrm{e}^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \\
&= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,\ v)\mathrm{e}^{j2\pi\left[\frac{(x-x_0)u}{M}+\frac{(y-y_0)v}{N}\right]} \\
&= f(x-x_0,\ y-y_0)
\end{aligned}
$$

(c) 平移性质 3

当 $x_0=u_0=\dfrac{M}{2}$，$y_0=v_0=\dfrac{N}{2}$ 时：

$$
f(x,\ y)(-1)^{x+y}\Longleftrightarrow F(u-\frac{M}{2},\ v-\frac{N}{2})
$$

证明：

$$
\begin{aligned}
F(u-\frac{M}{2},\ v-\frac{N}{2}) &= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,\ y)\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}-\frac{x}{2}+\frac{vy}{N}-\frac{y}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,\ y)\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}\mathrm{e}^{j\pi(x+y)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,\ y)\left(\cos\pi+j\sin\pi\right)^{x+y}\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \\
&= \mathcal{DFT}[f(x,\ y)(-1)^{x+y}]
\end{aligned}
$$

(d) 平移性质 4

当 $x_0=u_0=\dfrac{M}{2}$，$y_0=v_0=\dfrac{N}{2}$ 时：

$$
f(x-\frac{M}{2},\ y-\frac{N}{2})\Longleftrightarrow F(u,\ v)(-1)^{u+v}
$$

证明：

$$
\begin{aligned}
f(x-\frac{M}{2},\ y-\frac{N}{2}) &= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,\ v)\mathrm{e}^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}-\frac{u}{2}+\frac{vy}{N}-\frac{v}{2}\right)} \\
&= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,\ v)\mathrm{e}^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}\mathrm{e}^{-j\pi(u+v)} \\
&= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,\ v)\left[\cos(-\pi)+j\sin(-\pi)\right]^{u+v}\mathrm{e}^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \\
&= \mathcal{DFT}^{-1}[F(u,\ v)(-1)^{u+v}]
\end{aligned}
$$

2 图像 180 度旋转

定义原始图像为 $f(x,\ y)$：

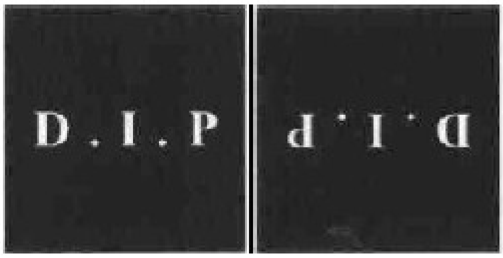

图 1: 灰度图像中心对称

(a) 原始图像左边乘以 $(-1)^{x+y}$

$$f(x,\ y)(-1)^{x+y}$$

(b) 计算离散傅立叶变换 $\mathcal{DFT}$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\to f(x,\ y)(-1)^{x+y}} &= \mathcal{DFT}\left[f(x,\ y)(-1)^{x+y}\right] = F(u-\frac{M}{2},\ v-\frac{N}{2}) \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,\ y)(-1)^{x+y}\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}
\end{aligned}
$$

(c) 复共轭化

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{\dagger}_{\to f(x,\ y)(-1)^{x+y}} &= F^{\dagger}(u-\frac{M}{2},\ v-\frac{N}{2}) \\ &= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f^{\dagger}(x,\ y)(-1)^{x+y}\mathrm{e}^{j2\pi\left(\dfrac{ux}{M}+\dfrac{vy}{N}\right)}\end{aligned}$$

由于原始图像 $f(x,\ y)$ 在实数域 $\mathbb{R}$，所以 $f^{\dagger}(x,\ y)=f(x,\ y)$，即：

$$F^{\dagger}(u-\frac{M}{2},\ v-\frac{N}{2})=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,\ y)(-1)^{x+y}\mathrm{e}^{j2\pi\left(\dfrac{ux}{M}+\dfrac{vy}{N}\right)}=F(\frac{M}{2}-u,\ \frac{N}{2}-v)$$

(d) 计算离散傅立叶逆变换 $\mathcal{DFT}^{-1}$

由于：

$$\mathcal{DFT}\left[f(x,\ y)(-1)^{x+y}\right]=F(u-\frac{M}{2},\ v-\frac{N}{2})$$

所以：

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}_{\to\mathscr{F}^{\dagger}_{\to f(x,\ y)(-1)^{x+y}}} &= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}\left[\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,\ y)(-1)^{x+y}\mathrm{e}^{j2\pi\left(\dfrac{ux}{M}+\dfrac{vy}{N}\right)}\right]\mathrm{e}^{j2\pi\left(\dfrac{ux}{M}+\dfrac{vy}{N}\right)} \\ &= \mathcal{DFT}^{-1}\left[F(\frac{M}{2}-u,\ \frac{N}{2}-v)\right] \\ &= \mathcal{DFT}^{-1}\left[F^{\dagger}(u-\frac{M}{2},\ v-\frac{N}{2})\right] \\ &= \mathcal{DFT}^{-1}\left\{\mathcal{DFT}\left[f(-x,\ -y)(-1)^{-x-y}\right]\right\} \\ &= f(-x,\ -y)(-1)^{x+y}\end{aligned}$$

(e) 实部再乘以 $(-1)^{x+y}$

$$f(-x,\ -y)$$

3 高斯低通滤波器频域传递函数在空域相应形式

高斯型低通滤波器在频域中的传递函数：

$$H(u,\ v)=A\mathrm{e}^{-\dfrac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}$$

引理 高斯函数积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$

记 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，则：

$$I^2=\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令：

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\qquad 0\leqslant r,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

根据雅可比行列式可得：

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\implies \mathrm{d}x\mathrm{d}y=|J|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

则：

$$I^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

记 $u=r^2$ 则微分：

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}r^2=2r\mathrm{d}r\implies r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$$

则：

$$I^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}(-\mathrm{e}^{-u})\Big|_0^{\infty}\right]\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta=\pi$$

即：

$$I=\sqrt{\pi}$$

类推：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\frac{y}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

证明 $\quad A\mathrm{e}^{-\dfrac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}\implies A2\pi\sigma^2\mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}$

$$
\begin{aligned}
h(x,\ y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(u,\ v)\mathrm{e}^{j2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{j2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}+j2\pi ux-\frac{v^2}{2\sigma^2}+j2\pi vy}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A\mathrm{e}^{-\pi\left[\left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^2-j2ux\right]}\mathrm{e}^{-\pi\left[\left(\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^2-j2vy\right]}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A\mathrm{e}^{-\pi\left[\left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^2-j2ux-2\pi\sigma^2x^2+2\pi\sigma^2x^2\right]}\mathrm{e}^{-\pi\left[\left(\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^2-j2vy-2\pi\sigma^2y^2+2\pi\sigma^2y^2\right]}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A\mathrm{e}^{-\pi\left[\left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}-j\sqrt{2\pi}\sigma x\right)^2+2\pi\sigma^2x^2\right]}\mathrm{e}^{-\pi\left[\left(\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma}-j\sqrt{2\pi}\sigma y\right)^2+2\pi\sigma^2y^2\right]}\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

令:

$$
\begin{cases}
s = \dfrac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma} - j\sqrt{2\pi}\sigma x \implies \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}\sigma\mathrm{d}s \\
t = \dfrac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma} - j\sqrt{2\pi}\sigma y \implies \mathrm{d}v = \sqrt{2\pi}\sigma\mathrm{d}t
\end{cases}
$$

则:

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A2\pi\sigma^2\mathrm{e}^{-\pi(s^2+2\pi\sigma^2x^2)}\mathrm{e}^{-\pi(t^2+2\pi\sigma^2y^2)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A2\pi\sigma^2\mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}\mathrm{e}^{-\pi(s^2+t^2)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= A2\pi\sigma^2\mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}
\end{aligned}
$$

4 零比特填充

在图像行列末尾填充 0 值，和把图像放到中心再填充 0 值，但保持 0 值总个数，在数学意义下，这两种形式的结果是相同的，只需要确保填充适当的间距步长，在工程实践中，倾向于移动到中心位置。

数学意义下，灰度图像 $f(x,\ y)$ 平移到 $f(x-x_0,\ y-y_0)$ 位置，其傅立叶变换等价于 $F(u,\ v)\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\dfrac{ux_0}{M}+\dfrac{vy_0}{N}\right)}$，无论平移到哪个位置，其傅里叶变换的幅度谱 $|F(u,\ v)|$ 总是保持不变。

证明

$$F(u,\ v)=\mathcal{DFT}\left[f(x,\ y)\right]$$

$$F(u^{'},\ v^{'})=\mathcal{DFT}\left[f(x^{'},\ y^{'})\right]=\mathcal{DFT}\left[f(x-x_0,\ y-y_0)\right]=F(u,\ v)\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}$$

$$\left|F(u^{'},\ v^{'})\right|=\left|F(u,\ v)\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}\right|=\left|F(u,\ v)\right|\cdot\left|\mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}\right|$$

$$\left|F(u^{'},\ v^{'})\right|=\left|F(u,\ v)\right|\cdot\left|\mathrm{e}^{j\theta}\right|=\left|F(u,\ v)\right|\cdot 1=\left|F(u,\ v)\right|\qquad \theta=-2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)$$

工程实践中，一般选择中心填充，最大程度平滑了图像周期延拓时的不连续性，减少了人为高频失真，并且确保滤波后结果图像保持在画布中心，方便剪裁等进一步处理。

5 频域内高斯高通滤波器和高斯低通滤波器传递函数代数和

(a) 代数和恒等于 1

设原始图像为 $f(x,\ y)$，则可拆解成低频信号和高频信号代数和：

$$f(x,\ y)=f_{\mathrm{lp}}(x,\ y)+f_{\mathrm{hp}}(x,\ y)$$

定义空域内卷积高斯低通滤波器核 $h_{\mathrm{lp}}(x,\ y)$ 和高斯高通滤波器核 $h_{\mathrm{hp}}(x,\ y)$，则：

$$\begin{cases} f_{\mathrm{lp}}(x,\ y)=f(x,\ y)h_{\mathrm{lp}}(x,\ y) \\ f_{\mathrm{hp}}(x,\ y)=f(x,\ y)h_{\mathrm{hp}}(x,\ y) \end{cases}$$

傅立叶变换得到：

$$\begin{cases} \mathscr{F}_{\to f_{\mathrm{lp}}(x,\ y)}=\mathscr{F}_{\to f(x,\ y)}\mathscr{F}_{\to h_{\mathrm{lp}}(x,\ y)} \\ \mathscr{F}_{\to f_{\mathrm{hp}}(x,\ y)}=\mathscr{F}_{\to f(x,\ y)}\mathscr{F}_{\to h_{\mathrm{hp}}(x,\ y)} \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \mathcal{DFT}\left[f_{\mathrm{lp}}(x,\ y)\right]=\mathcal{DFT}\left[f(x,\ y)\right]\mathcal{DFT}\left[h_{\mathrm{lp}}(x,\ y)\right] \\ \mathcal{DFT}\left[f_{\mathrm{hp}}(x,\ y)\right]=\mathcal{DFT}\left[f(x,\ y)\right]\mathcal{DFT}\left[h_{\mathrm{hp}}(x,\ y)\right] \end{cases}$$

得到：

$$\begin{cases} F_{\mathrm{lp}}(u,\ v) = F(u,\ v)H_{\mathrm{lp}}(u,\ v) \\ \\ F_{\mathrm{hp}}(u,\ v) = F(u,\ v)H_{\mathrm{hp}}(u,\ v) \end{cases}$$

由于：

$$\mathscr{F}_{\to f(x,\ y)} = \mathcal{DFT}\left[f(x,\ y)\right] = \mathcal{DFT}\left[f_{\mathrm{lp}}(x,\ y) + f_{\mathrm{hp}}(x,\ y)\right]$$

则：

$$\begin{aligned} F(u,\ v) &= \mathcal{DFT}\left[f_{\mathrm{lp}}(x,\ y)\right] + \mathcal{DFT}\left[f_{\mathrm{hp}}(x,\ y)\right] = F_{\mathrm{lp}}(u,\ v) + F_{\mathrm{hp}}(u,\ v) \\ F(u,\ v) &= F(u,\ v)H_{\mathrm{lp}}(u,\ v) + F(u,\ v)H_{\mathrm{hp}}(u,\ v) \\ 1 &\equiv H_{\mathrm{lp}}(u,\ v) + H_{\mathrm{hp}}(u,\ v) \end{aligned}$$

即：

$$H_{\mathrm{hp}}(u,\ v) = 1 - H_{\mathrm{lp}}(u,\ v)$$

(b) 空域高斯高通滤波器函数

由于高斯低通滤波器在频域的传递函数为：

$$H_{\mathrm{lp}}(u,\ v) = A\mathrm{e}^{-\dfrac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}$$

所以高斯低通滤波器在空域的核函数为：

$$h_{\mathrm{lp}}(x,\ y) = A2\pi\sigma^2\mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}$$

根据：

$$H_{\mathrm{hp}}(u,\ v) = 1 - H_{\mathrm{lp}}(u,\ v)$$

进行傅立叶逆变换：

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^{-1}_{\to H_{\mathrm{hp}}(u,\ v)} &= \mathscr{F}^{-1}_{\to 1 - H_{\mathrm{lp}}(u,\ v)} \\ \mathcal{DFT}^{-1}\left[H_{\mathrm{hp}}(u,\ v)\right] &= \mathcal{DFT}^{-1}\left[1 - H_{\mathrm{lp}}(u,\ v)\right] \\ h_{\mathrm{hp}}(x,\ y) &= \mathcal{DFT}^{-1}(1) - h_{\mathrm{lp}}(x,\ y) \end{aligned}$$

引理 一维冲激函数 $\delta(x)$ 的采样性质

对于任意定义在 $x=x_0$ 处连续的函数 $f(x)$，冲激函数 $\delta(x-x_0)$ 作为积分核的定义是：

$$f(x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x \implies f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-x)\mathrm{d}t$$

由于冲激函数 $\delta(x)$ 是偶函数：

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-x)\mathrm{d}t \implies f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(x-t)\mathrm{d}t$$

因为傅立叶变换的逆变换是图像本身：

$$\begin{aligned}
f(x)&=\mathcal{DFT}^{-1}\left\{\mathcal{DFT}\left[f(x)\right]\right\}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j2\pi st}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j2\pi sx}\mathrm{d}s\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{j2\pi sx-j2\pi st}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{j2\pi s(x-t)}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

则：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{j2\pi s(x-t)}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(x-t)\mathrm{d}t$$

即：

$$\delta(x-t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{j2\pi s(x-t)}\mathrm{d}s \implies \delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{j2\pi x\xi}\mathrm{d}\xi$$

因为：

$$\begin{aligned}
\mathcal{DFT}^{-1}(1)&=\iint_{-\infty}^{\infty}1\cdot\mathrm{e}^{j2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{j2\pi ux}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{j2\pi vy}\mathrm{d}v\\
&=\delta(x)\cdot\delta(y)
\end{aligned}$$

所以：

$$\mathcal{DFT}^{-1}(1)=\delta(x,\ y)$$

综上：

$$\begin{aligned}
h_{\mathrm{hp}}(x,\ y)&=\delta(x,\ y)-h_{\mathrm{lp}}(x,\ y)\\
&=\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{j2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v-A2\pi\sigma^2\mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}
\end{aligned}$$