Algorithmen und Datenstrukturen

Blatt 6

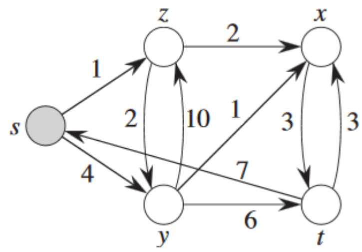
Uni Hamburg, Wintersemester 2019/20

Präsentation am 22.01. bis 24.01.2020

Jede Teilaufgabe zählt als ein einzelnes Kreuzchen.

Übung 1.

a) Finden Sie mittels Dijkstra den kürzesten Pfad zwischen s und t in dem folgenden Graphen. Skizzieren Sie dabei den Status des Algorithmus nach jedem Schleifendurchlauf.



b) Finden Sie ein einfaches Beispiel eines Graphen mit einer Kante mit negativer Kantenlänge, in welchem Dijkstra den falschen kürzesten Weg berechnet. Stellen Sie dabei sicher, dass es noch einen kürzesten Weg gibt. Skizzieren Sie wie in (a) die Anwendung von Dijkstra.

Übung 2.
Sei $G(V, E)$ ein einfacher Graph. Eine Knotenüberdeckung $K \subset V$ ist eine Menge an Knoten, sodass $N(K) := \{(u, v) \in E | u \in K \vee v \in K\}$, also die Menge aller Kanten die einen Knoten aus K enthalten, $N(K) = E$ erfüllt. Entsprechend ist eine minimale Knotenüberdeckung ein solches K, dessen Anzahl an Knoten minimal ist unter allen Knotenüberdeckungen.

(a) Sei $W \subseteq E$ ein maximales Matching und $v(W)$ die dazugehörigen Knoten. Beweisen Sie, dass $v(W)$ eine Knotenüberdeckung ist und folgere, dass eine minimale Knotenüberdeckung K daher $|K| \leq 2|W|$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie weiter: Sei G ein bipartiter Graph und K und W wie in (a), dann gilt $|K| \geq |W|$.

Übung 3.
Wir modellieren ein Kommunikationsnetz durch einen gerichteten, gewichteten Graphen $G = (V, E)$. Eine Kante repräsentiert dabei den Kommunikationskanal zwischen zwei Knoten. Die Wichtung einer Kante $(u, v) \in E$ repräsentiert die Ausfallsicherheit $0 < r(u, v) \leq 1$ des Kanals. Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kanal von u nach v nicht ausfallen wird und es wird angenommen, dass diese Wahrscheinlichkeiten unabhängig sind.

Modifizieren Sie den Graphen, so dass der Algorithmus von Dijkstra den zuverlässigsten Pfad zwischen zwei Knoten ermittelt.

Übung 4.

Eine Kante $e \in E$ eines zusammenhängenden, ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt Brückenkante, falls der Graph $G = (V, E \setminus e)$, der durch das Entfernen der Kante e aus G entsteht, nicht mehr zusammenhängend ist.

(a) Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode an, der in Laufzeit $\mathcal{O}(|V| \cdot |E| + |E|^2)$ entscheidet, ob ein ungerichteter Graph G (gegeben als Adjazenzliste) eine Brückenkante besitzt oder nicht.

(b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus korrekt arbeitet.

(c) Zeigen Sie, dass der Algorithmus die Laufzeitschranke einhält.