Name	Übungsgruppe	1	2	3	4	5
Theodor Bajusz	5	x	x	x	x	x
Valerij Dobler	13	x	x	x	x	x
Matz Radloff	6	x	x	x	x	x
Robin Wannags	5	x	x	x	x	x

Übung 1.

Gegeben ist eine Hashtabelle T der Länge $m = 11$ mit Hashfunktion $h(k;i) = (k + i^2)\, mod\, m$. Tragen Sie die Schlüssel $56, 46, 31, 45, 42, 65, 29, 44, 23$ in der angegebenen Reihenfolge in die Hashtabelle ein. Verwalten Sie Kollisionen:

(a) durch Verkettung (i = 0), (2 Punkte)

(b) durch offene Adressierung. (2 Punkte)

Index	Verkettete Liste
0	$\boxed{44}$
1	$\boxed{23} \to \boxed{45} \to \boxed{56}$
2	$\boxed{46}$
3	
4	
5	
6	
7	$\boxed{29}$
8	
9	$\boxed{42} \to \boxed{31}$
10	$\boxed{65}$

(a) durch Verkettung

Index	Elemente
0	$\boxed{65}$
1	$\boxed{56}$
2	$\boxed{46}$
3	
4	$\boxed{44}$
5	$\boxed{45}$
6	$\boxed{23}$
7	$\boxed{29}$
8	
9	$\boxed{31}$
10	$\boxed{42}$

(b) offene Adressierung

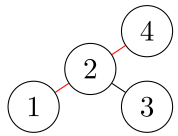
Übung 2.

(a) Nehmen Sie an, die Suche nach einem Schlüssel k in einem binären Suchbaum endet in einem Blatt. Dann gibt es drei Mengen: A, die Schlüssel links des Suchpfads; B, die Schlüssel auf dem Suchpfad; sowie C, die Schlüssel rechts des Suchpfads. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: Für beliebige drei Schlüssel $a \in A, b \in B$ und $c \in C$ gilt $a \leq b \leq c$. (2 Punkte)

Behauptung: Seien B und C wie oben definiert, dann gilt

$$\forall b \in B \forall c \in C : b \leq c$$

Beweis. Sei der Suchbaum wie folgt



und 1 der gesuchte Wert. Dann sehen die Mengen so aus:

$$A = \emptyset, \quad B = \{4, 2, 1\}, \quad C = \{3\}$$

Hierbei ist $4 \in B \land 3 \in C$ aber $4 > 3$ ist, was einen Widerspruch zur Behauptung liefert. $\square$

(b Teil 1) Aus der Vorlesung ist Ihnen bekannt, dass zum Suchen in einem vollständigen Binärbaum $O(log_2\, n)$ Zeit benötigt wird. Wie ist die asymptotische Laufzeit, wenn stattdessen jeder innere Knoten bis zu 3 Kinder haben darf? Wie, bei bis zu $log_2\, n$ Kindern? (2 Punkte) Ein ternärer Suchbaum ist ein Suchbaum bei dem jeder innere Knoten bis zu 3 Kindern haben kann. Die Suche in so einem vollständigen Baum benötigt $O(log_2\, n)$ Zeit.

Beweis. In einem ternären Baum muss man pro Knoten bis zu 2 Vergleiche machen um entscheiden zu können, in welchem Kind man weiter suchen muss. Ideal balanciert, würde dessen Höhe $\lceil log_3\, n \rceil$ betragen. In einem vollständigen ternären Suchbaum würde die Suche folglich

$$O(2 \cdot log_3\, n) = O\left(2 \cdot \frac{log_2\, n}{log_2\, 3}\right) = O(log_2\, n)$$

Zeit benötigen. $\square$

(b Teil 2) Mit $log_2 n$ Kindern.

Die Höhe eines solchen Suchbaumes wächst in $O(log_2(n))$ und die Anzahl der nötigen Vergleiche pro Knoten wächst auch in Abhängigkeit von $log_2(n)$. Jedoch kann man bei den Vergleichen in einem Knoten eine Binärsuche mit den Kindern durchführen, daher ist der Term für die Vergleiche in $O(log_2(log_2 n))$. Für die Laufzeit der Suche ergibt sich dann:

$$
\begin{aligned}
& O\left(log_2(log_2 n) \cdot log_{log_2(n)}(n)\right) \\
& \overset{Basenwechsel}{=} O\left(log_2(log_2 n) \cdot \frac{log_2 n}{log_2(log_2 n)}\right) \\
& \overset{kürzen}{=} O\left(\cancel{log_2(log_2 n)} \cdot \frac{log_2 n}{\cancel{log_2(log_2 n)}}\right) \\
& = O(log_2 n)
\end{aligned}
$$

Übung 3.
Sei n die Anzahl der Knoten im Baum, und h die Höhe des Baumes.

(a) Fügen Sie die Schlüssel $1, 3, 5, 6, 6, 4$ und 2 in dieser Reihenfolge in einen initial leeren AVL Baum ein. Geben Sie den Baum direkt nach dem Einfügen sowie nach jeder Rotation an. (2 Punkte)

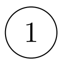


Abbildung 1

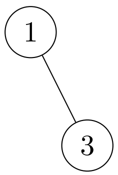


Abbildung 2

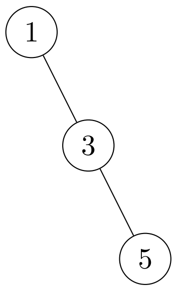


Abbildung 3

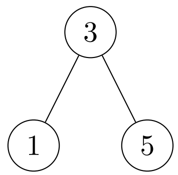


Abbildung 4

Zuerst fügen wir in den leeren Baum unseren ersten Knoten 1 ein (siehe Abbildung 1).

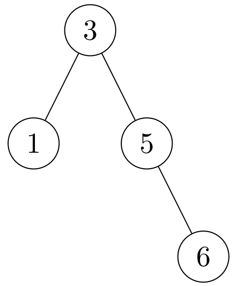


Abbildung 5

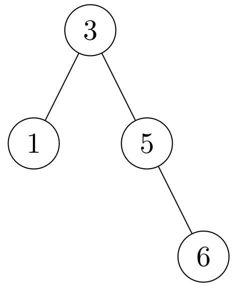


Abbildung 6

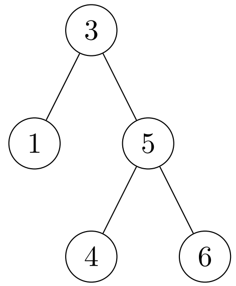


Abbildung 7

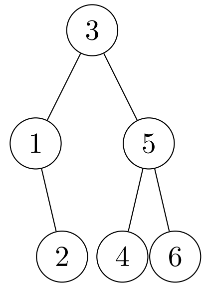


Abbildung 8

Als zweiten Schritt fügen wir die 3 ein. Da $3 > 1$ ist, fügen wir diese als rechtes Kind ein (siehe Abb. 2).

Schritt Nummer drei ist das Einfügen von der 5. Da sowohl $5 > 1$ und $5 > 3$ ist, wird die 5 das rechte Kind der 3 (Abb. 3).

Nun wird die Bedingung des AVL Baumes verletzt, da 3 die Höhe 1 hat, das theoretische linke Kind von 1 jedoch die Höhe -1 hat. Wir rotieren links um die 3 um die Eigenschaft wiederherzustellen (siehe Abb. 4).

Als fünften Schritt fügen wir eine 6 in den Baum ein. $6 > 3$ und $6 > 5 \implies 6$ wird das rechte Kind von 5 (siehe Abb. 5).

Als sechsten Schritt versuchen wir erneut eine 6 in den Baum einzufügen, da unsere **AVL-Insert**-Prozedur keine Duplikate zulässt, bleibt der Baum unverändert (siehe Abb. 6).

Schritt 7 ist es eine 4 in den AVL Baum einzufügen. Es gilt $4 > 3$, aber $4 < 5$, weswegen die 4 als linkes Kind der 5 platziert wird (siehe Abb. 7).

Als letzten Schritt fügen wir eine 2 hinzu. $2 < 3$, aber $2 > 1$, deshalb wird die 2 zum rechten Kind der 1. Somit wurden alle Schlüssel hinzugefügt und der AVL Baum ist komplett (siehe Abb. 8)). □

(b) Zeigen Sie, für einen beliebigen AVL-Baum gilt: $n \leq 2^{h+1} - 1$ (2 Punkte)

Beweis. Für vollständige Binärbäume der Höhe h wissen wir dass diese $n = 2^{h+1} - 1$ Knoten haben. Jeder andere AVL-Baum der Höhe h muss folglich weniger Elemente besitzen, sodass $n \leq 2^{h+1} - 1$ gilt. □

(c) Zeigen Sie, für einen beliebigen AVL-Baum gilt: $(\frac{3}{2})^h \leq n$ (2 Punkte) Für einen AVL-Baum der Höhe h gilt $\frac{3}{2}^h < \phi^h \leq n$

Beweis. Sei $N(h)$ die minimale Knotenanzahl eines AVL-Baumes der Höhe h. Wir stellen eine Rekurrenzgleichung mit $N(0) = 1$ und $N(1) = 2$ auf: Für $n \geq 2$ sei h_L und h_R bezeichnen entsprechend die Höhe des linken- und rechten Teilbaums. Weil der Baum die Höhe h hat, muss einer der Teilbäume die Höhe $h - 1$ haben, angenommen es sei h_L. Um die Anzahl der Knoten zu minimieren, machen wir den anderen Teilbaum, h_R, so klein wie möglich. Wegen der AVL Eigenschaft folgt daraus $h_R = h - 2$. Zählt man nun den Wurzelknoten, die Anzahl der Knoten im rechten- und linken Teilbaum bekommt man folgende Rekurrenzgleichung für die totale Anzahl an Knoten:

$$
\begin{aligned}
N(0) &= 1\\
N(1) &= 2\\
N(h) &= 1 + N(h_L) + N(h_R)\\
&= 1 + N(h-1) + N(h-2).
\end{aligned}
$$

Wir stellen fest, dass die Anzahl der Blätter der Fibonacci-Reihe folgt. Da wir eine untere Schranke suchen, ignorieren wir den Term +1 der Wurzel. Also gilt $N(h) \geq \phi^h \approx 1.618^h$

Folglich muss $N(h) < n$ sein, sodass gilt:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^h < \phi^h \leq n.$$

□

Übung 4.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen zu ungerichteten Graphen:

(a) Es gilt für $G = (V, E)$:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

(2 Punkte)

Beweis. Sei G ein kantenloser Graph mit mindestens 2 Knoten. Für G gilt $deg(V_i) = 2 \cdot 0 = 0$.

Für jede Kante $e = (v_1, v_2)$, die wir hinzufügen, erhöhen wir den Grad für v_1 und v_2 um jeweils 1. Da eine neue Kante immer 2 Knoten verbindet, muss die Summe aller Grade immer doppelt so groß sein, wie die Anzahl der Kanten. Die Behauptung stimmt. □

(b) Seien v, w die einzigen beiden Knoten in $G = (V, E)$ mit ungeradem Grad, so sind v und w über einen Pfad in G verbunden.(2 Punkte)
Hinweis: Nutzen Sie die Aussage aus Aufgabe a).

Beweis durch Widerspruch: Seien v und w Knoten in zwei jeweils nicht zusammenhängenden Teilgraphen. Aus Aufgabe $4a$ wissen wir, dass v nicht der einzige Knoten mit ungeradem Grad in seinem Teilgraph sein kann, daher muss es einen zweiten Knoten mit ungeradem Grad in diesem Teilgraph geben. Da v und w die einzigen Knoten mit ungeradem Grad sind, müssen beide in einem zusammenhängenden Teilgraph liegen. Folglich gibt es einen Pfad zwischen v und w. □

(c) $G = (V, E)$ ist zusammenhängend, wenn für alle Knoten $v \in V$ gilt:

$$deg(v) \geq \left\lceil \frac{|V| - 1}{2} \right\rceil$$

(2 Punkte)

In der Vorlesung haben wir ungerichtete Graphen als schleifenfrei eingeführt (Foliensatz 5, Seite 3).

Angenommen G ist nicht zusammenhängend, dann existiert o.B.d.A. eine kleinste Zusammenhangskomponente G_Z:

$$\begin{aligned} G_Z &= (V_Z, E_Z) \\ V_Z &\subsetneq V \\ E_Z &= \{\{e_i, e_j\} \mid e_i, e_j \in V_Z\} \cap E \\ |V_Z| &\leq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

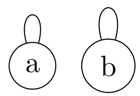
Sei $deg(v)$ für alle $v \in V_Z$ maximal, dann wäre die Zusammenhangskomponente G_Z ein vollständiger Graph $K_{|V_Z|}$ dann ist $\forall v \in V_Z$:

$$\begin{aligned} deg(v) &= |V_Z - 1| \\ &= \left| \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor \right| = \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor \\ &< \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Um die Formel aus der Behauptung erfüllen zu können, brauchen alle Knoten in der Zusammenhangskomponente G_Z jeweils eine Kante mehr, da aber alle Knoten in G_Z zu allen anderen Knoten in G_Z eine Kante haben, müssen die neuen Kanten zu anderen Zusammenhangskomponenten gehen. Da das für alle Zusammenhangskomponenten gilt, muss G zusammenhängend sein. $\square$

Angenommen, man lässt Schleifen zu. Wir betrachten folgenden Graphen G':

$$\begin{aligned} G' &= (V', E') \\ V' &= \{a, b\} \\ E' &= \{\{a, a\}, \{b, b\}\} \end{aligned}$$



Da Schleifen den Grad eines Knotens um 2 erhöht, gilt offensichtlich sowohl für a als auch für b, dass

$$deg(a) = deg(b) = 2 > \left\lceil \frac{|V'| - 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1$$

, jedoch ist G' nicht zusammenhängend. ↯

Übung 5.

Bonusaufgabe

Im Kapitel 13-1 im Cormen wird der Rot-Schwarz-Baum, ein spezieller Binärbaum, definiert. Lies das Kapitel durch, und beantworte folgende Fragen zu dem Rot-Schwarz-Baum.

(a) Geben Sie einen validen Rot-Schwarz-Baum an der aus folgenden Elementen besteht: $\langle 1, 5, 9, 10, 13, 16, 20 \rangle$ (1 Punkt)

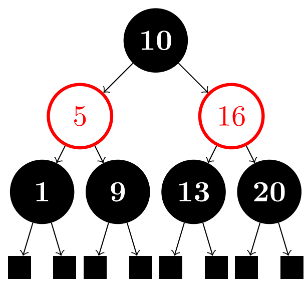


Abbildung 9: Lösung für Aufgabe 5a)

(b) Zeigen Sie, dass in einem Rot-Schwarz Baum der längste einfache Pfad von einem beliebigen Knoten x zu einem untergeordneten Blatt höchstens doppelt so lang sein kann wie zu einem anderen untergeordneten Blatt. (2 Punkte)

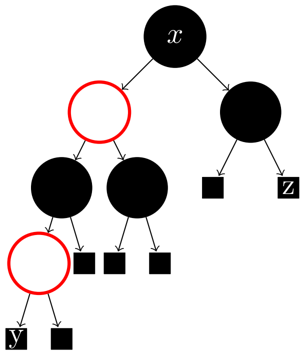


Abbildung 10: (Teil-)baum von schwarzem x

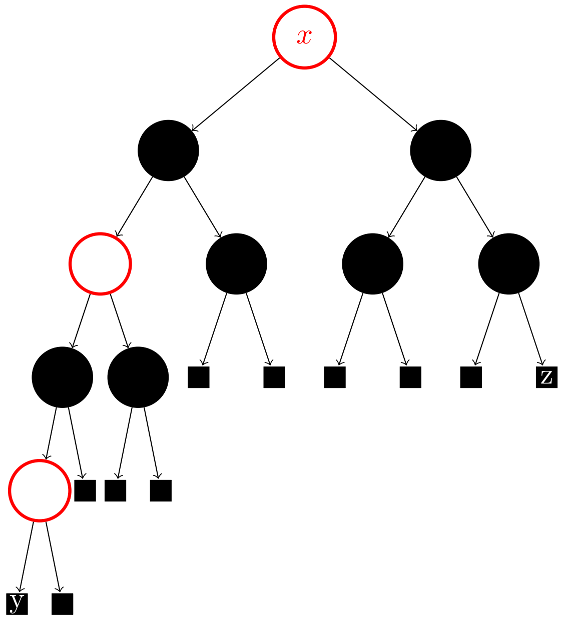


Abbildung 11: Teilbaum von rotem x

Wir erinnern uns an die Eigenschaften eines Rot-Schwarz Baums (RBT)

1. Jeder Knoten ist entweder *rot* oder *schwarz*.
2. Die Wurzel ist *schwarz*.
3. Die Blätter (NIL-Knoten) sind *schwarz*.
4. Wenn ein Knoten *rot* ist, dann sind seine beiden Kinder *schwarz*.
5. Jeder Knoten x hat die selbe Schwarz-Höhe, d.h. das auf jedem Pfad von x zu dessen Blätter gleich viele *schwarze* Knoten sind.

Behauptung: Seien p_s und p_r Pfade von x zu dessen Blätter. Dabei ist p_s ein möglichst kurzer und p_r ein möglichst langer Pfad. Ferner sei h_s die Höhe des Pfades von p_s, dann gilt für p_r, dass dessen Höhe h_r durch die Ungleichung $h_r \leq 2 \cdot h_s$ beschränkt ist.

Beweis. Da alle Pfade von x zu dessen Blätter die selbe Schwarz-Höhe haben müssen (Eigenschaft 5), ist die Anzahl der schwarzen Knoten auf den Pfaden p_r und p_s gleich. Hierbei sieht man leicht, dass p_s lediglich aus schwarzen Knoten besteht (Eigenschaft 1-3). Damit p_r größtmöglich ist, kann nur an jeder zweiten Stelle des Pfades ein roter Knoten sein (Eigenschaft 4).

Falls x selbst schwarz ist, dann kann man nur höchsten h_s rote Knoten in p_r haben, womit p_r dann $h_s + h_s = 2 \cdot h_s$ Knoten hat. Wenn x rot ist, kann der nächste Knoten auf p_r nicht auch rot sein (Eigenschaft 4). Wenn jeder andere zweite Knoten in p_r rot ist, ergibt das p_r dann $h_s + h_s - 1 \leq 2 \cdot h_s$. Falls ein Pfad von x zu einem seiner Blätter weniger rote Knoten als p_r hat gilt die Ungleichung erst recht. □

(c) Was ist die größte Anzahl an internen Knoten, aus die ein Rot-Schwarz-Baum bestehen kann wenn die Schwarz-Höhe des Baumes k ist? Was ist die geringste Anzahl? (2 Punkte)

Bei einem RBT der Schwarz-Höhe k ist die größte Anzahl der internen Knoten $2^{2k} - 1$, wobei der Baum dann vollständig mit der Höhe $2k$ ist (insg. $2^{2k+1} - 1$ Knoten) und 2^k NIL-Knoten hat. Jede zweite Ebene ist dabei rot.

$$\underbrace{2^{2k+1} - 1}_{\#gesamt} - \underbrace{2^{2k}}_{\#NIL-Knoten} = \underbrace{2^{2k} - 1}_{\#innere-Knoten} \quad \textbf{(max)}$$

Sei der RBT mit der Schwarz-Höhe k vollständig und alle internen Knoten *schwarz*. Dann ist dessen Höhe auch k und für vollständige Binärbäume der Höhe k gilt:

$$\underbrace{2^{k+1} - 1}_{\#gesamt} - \underbrace{2^{k}}_{\#NIL-Knoten} = \underbrace{2^{k} - 1}_{\#innere-Knoten} \quad \textbf{(min)}$$