Algorithmen und Datenstrukturen

Blatt 5

Uni Hamburg, Wintersemester 2019/20

Präsentation am 08.–10. Januar 2020

Jede Teilaufgabe zählt als ein einzelnes Kreuzchen.

Übung 1.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen zu ungerichteten Graphen:

(a) Es gilt für $G = (V, E)$:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

(b) Seien v, w die einzigen beiden Knoten in $G = (V, E)$ mit ungeradem Grad, so sind v und w über einen Pfad in G verbunden.
Hinweis: Nutzen Sie die Aussage aus Aufgabe a).

Übung 2.

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ is bipartit , falls zwei Mengen $U, W \subseteq V$ existieren, so dass

- $U \cup W = V$
- $U \cap W = \emptyset$
- $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in U \wedge v_2 \in W\}$, d.h. Knoten in U bzw. W sind nicht untereinander adjazent.

(a) Zeigen Sie: G ist bipartit $\Leftrightarrow$ G enthält keine Zyklen ungerader Länge $k \geq 3$.

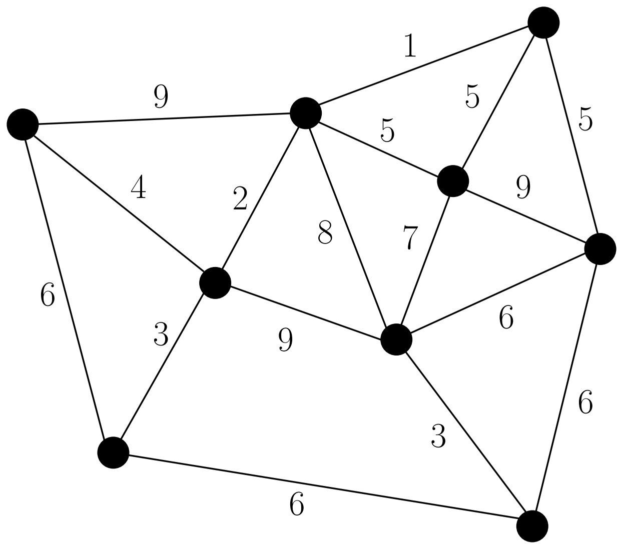
(b) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der für einen zusammenhängenden Graphen G entscheidet, ob dieser bipartit ist.

(c) Begründen Sie die Korrektheit und Laufzeit ihres Algorithmus.
Hinweis: Nutzen Sie die Aussage aus Aufgabe a).

Übung 3.
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, gewichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$. Ein Spannbaum ist ein Baum $T = (V, E')$ mit $E' \subseteq E$, der aus einer Teilmenge der Kanten (und allen Knoten) von G besteht, sodass alle Knoten in V miteinander verbunden sind. Wir betrachten zwei Varianten von Spannbäumen:

- Ein minimaler Spannbaum ist ein Spannbaum, dessen Gesamtgewicht $w(T) = \sum_{(u,v)\in E'} w(u, v)$ unter allen Spannbäumen von G minimal ist.
- Ein minimaler Bottleneck-Spannbaum ist ein Spannbaum, bei den das maximale Kantengewicht unter allen Kanten von T minimal ist (im Gegensatz zur Summe der Kantengewichte beim minimalen Spannbaum). Bei einem minimalen Bottleneck-Spannbaum ist also $\max\{w(u, v) \mid (u, v) \in E'\}$ minimal.

(a) Zeichnen Sie jeweils einen minimalen Spannbaum und einen minimalen Bottleneck-Spannbaum in folgenden Graphen ein:



(b) Zeigen Sie: Jeder minimale Spannbaum eines Graphen G ist auch ein minimaler Bottleneck-Spannbaum von G.

(c) Widerlegen Sie durch Angabe eines minimalen Gegenbeispiels: Jeder minimale Bottleneck-Spannbaum eines Graphen G ist auch ein minimaler Spannbaum von G.