Christopher Hahn
hahn@informatik.uni-hamburg.de

Version: 7. November 2020
Abgabe: 16.11.2020

Algorithmen und Datenstrukturen

Aufgabenblatt 1

Übung 1

______/3 P.

Betrachten Sie zwei Algorithmen A und B für das gleiche Problem. Algorithmus A benötigt bei einer Eingabe der Größe n genau $2n^2$ Basisoperationen, während Algorithmus B genau $100n\lceil \log_2 n \rceil$ Basisoperationen benötigt. Betrachten Sie zwei Computer C_1 und C_2. Computer C_1 (Supercomputer) kann pro Sekunde $4,16 \cdot 10^{17}$ Basisoperationen durchführen. Computer C_2 (Handy) kann hingegen nur $3 \cdot 10^{11}$ Basisoperationen pro Sekunde durchführen.

(a) Wie lange braucht Algorithmus A auf beiden Computern, um ein Problem der Größe $n_1 = 200$, $n_2 = 2.7 \cdot 10^9$ und $n_3 = 10^{16}$ zu lösen? (1 Punkt)

(b) Wie lange braucht Algorithmus B auf beiden Computern, um ein Problem der Größe $n_1 = 200$, $n_2 = 2.7 \cdot 10^9$ und $n_3 = 10^{16}$ zu lösen? (1 Punkt)

(c) Für welche Problemgrößen ist Algorithmus A schneller und für welche ist Algorithmus B schneller, wenn beide Algorithmen auf dem gleichen Computer laufen? (1 Punkt)

Übung 2

______/11 P.

Betrachten Sie das Problem *Zweit-Kleinstes-Element*:

- *Eingabe:* Ein Array $A[1,\dots,n]$ von $n > 1$ Zahlen.
- *Ausgabe:* Ein Index i, sodass es einen Index $j \neq i$ gibt mit $A[j] \leq A[i]$ und für alle Indizes $k \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{j\}$ gilt $A[k] \geq A[i]$.

(a) Beschreiben Sie in Pseudocode einen Algorithmus der das Problem Zweit-Kleinstes-Element löst. (3 Punkte)

(b) Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus mit Hilfe einer geeigneten Schleifeninvariante. (4 Punkte)

(c) Analysieren Sie die worst-case Laufzeit des formulierten Algorithmus. (4 Punkte)

Übung 3

______/3 P.

Zeigen Sie, dass $(\ln(x))^k = \mathcal{O}(x^\epsilon)$. Hierbei sind k, ϵ Konstanten größer Null.
Ein möglicher Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für $k = 1$.

Übung 4

______/3 P.

Ordnen Sie die folgenden Funktionen gemäß ihres asymptotischen Wachstums und begründen Sie Ihre Antwort:

$$\begin{aligned} &f_1(n) = 3^n, \quad f_2(n) = n \cdot \ln(n), \quad f_3(n) = 2^n, \quad f_4(n) = e^{\log_2(n)}, \\ &f_5(n) = n^n, \quad f_6(n) = n^{3/2}, \qquad f_7(n) = n!. \end{aligned}$$

Übung 5

______/4 P.

Bonusaufgabe

Zeigen Sie die Gültigkeit der Bemerkung zur Äquivalenz der Definitionen für $\mathrm{O}\big(f(n)\big)$ und $\mathrm{o}\big(f(n)\big)$ über Grenzwerte, d.h. Zeigen Sie, dass

$$f(n) = \mathrm{O}\big(g(n)\big) \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \infty \qquad \text{und}$$

$$f(n) = \mathrm{o}\big(g(n)\big) \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = 0.$$