



# Algorithmen und Datenstrukturen

## Aufgabenblatt 5

### Übung 1

Gegeben ist eine Hashtabelle  $T$  der Länge  $m = 11$  mit Hashfunktion  $h(k; i) = (k + i^2) \bmod m$ . Tragen Sie die Schlüssel 56, 46, 31, 45, 42, 65, 29, 44, 23 in der angegebenen Reihenfolge in die Hashtabelle ein. Verwalten Sie Kollisionen:

\_\_\_\_\_/4 P.

- (a) durch Verkettung ( $i = 0$ ), (2 Punkte)
- (b) durch offene Adressierung. (2 Punkte)

### Übung 2

- (a) Nehmen Sie an, die Suche nach einem Schlüssel  $k$  in einem binären Suchbaum endet in einem Blatt. Dann gibt es drei Mengen:  $A$ , die Schlüssel links des Suchpfads;  $B$ , die Schlüssel auf dem Suchpfad; sowie  $C$ , die Schlüssel rechts des Suchpfads. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: Für beliebige drei Schlüssel  $a \in A$ ,  $b \in B$  und  $c \in C$  gilt  $a \leq b \leq c$ . (2 Punkte)
- (b) Aus der Vorlesung ist Ihnen bekannt, dass zum Suchen in einem vollständigen Binärbaum  $O(\log_2 n)$  Zeit benötigt wird. Wie ist die asymptotische Laufzeit, wenn stattdessen jeder innere Knoten bis zu 3 Kinder haben darf? Wie, bei bis zu  $\log_2 n$  Kindern? (2 Punkte)

\_\_\_\_\_/4 P.

### Übung 3

- (a) Fügen Sie die Schlüssel 1, 3, 5, 6, 6, 4 und 2 in dieser Reihenfolge in einen initial leeren AVL Baum ein. Geben Sie den Baum direkt nach dem Einfügen sowie nach jeder Rotation an. (2 Punkte)
- (b) Zeigen Sie, für einen beliebigen AVL-Baum gilt:  $n \leq 2^{h+1} - 1$  (2 Punkte)
- (c) Zeigen Sie, für einen beliebigen AVL-Baum gilt:  $(\frac{3}{2})^h \leq n$  (2 Punkte)

\_\_\_\_\_/6 P.

Hierbei ist  $n$  die Anzahl der Knoten im Baum, und  $h$  die Höhe des Baumes.

## Übung 4

\_\_\_\_\_/6 P.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen zu ungerichteten Graphen:

- (a) Es gilt für  $G = (V, E)$ :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

(2 Punkte)

- (b) Seien  $v, w$  die einzigen beiden Knoten in  $G = (V, E)$  mit ungeradem Grad, so sind  $v$  und  $w$  über einen Pfad in  $G$  verbunden. (2 Punkte)

*Hinweis: Nutzen Sie die Aussage aus Aufgabe a).*

- (c)  $G = (V, E)$  ist zusammenhängend, wenn für alle Knoten  $v \in V$  gilt:

$$\deg(v) \geq \lceil (|V| - 1)/2 \rceil$$

(2 Punkte)

## Übung 5

\_\_\_\_\_/5 P.

### Bonusaufgabe

Im Kapitel 13-1 im Cormen wird der Rot-Schwarz-Baum, ein spezieller Binärbaum, definiert. Lies das Kapitel durch, und beantworte folgende Fragen zu dem Rot-Schwarz-Baum.

- (a) Geben Sie einen validen Rot-Schwarz-Baum an der aus folgenden Elementen besteht: (1,5,9,10,13,16,20) (1 Punkt)
- (b) Zeigen Sie, dass in einem Rot-Schwarz Baum der längste einfache Pfad von einem beliebigen Knoten  $x$  zu einem untergeordneten Blatt höchstens doppelt so lang sein kann wie zu einem anderen untergeordneten Blatt. (2 Punkte)
- (c) Was ist die größte Anzahl an internen Knoten, aus die ein Rot-Schwarz-Baum bestehen kann wenn die Schwarz-Höhe des Baumes  $k$  ist? Was ist die geringste Anzahl? (2 Punkte)