Algorithmen und Datenstrukturen

Blatt 1

Uni Hamburg, Wintersemester 2018/19

Präsentation am 30.10. bis 01.11.2019

Jede Teilaufgabe zählt als ein einzelnes Kreuzchen.

Landau-Symbole

Übung 1.
Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihrem Wachstumsgrad in aufsteigender Reihenfolge, d.h. folgt eine Funktion $g(n)$ einer Funktion $f(n)$, so soll $f(n) \in O(g(n))$ gelten. Begründen Sie Ihre Sortierung.

a) $n,\ n \cdot (log(n)),\ 1,\ e^{ln(n)},\ log(n)$

b) $\sqrt{n^5},\ n^{(5/4)},\ n^2,\ n \cdot (log(n))$

c) $2^n,\ n^n,\ \sqrt{n^5},\ n!$

Lösung 1.

$$1 \prec log(n) \prec n \asymp e^{ln(n)} \prec n \cdot (log(n)) \prec n^{(5/4)} \prec n^2 \prec \sqrt{n^5} \prec 2^n \prec n! \prec n^n$$

$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Longleftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \infty$$

Begründungen:
$=^*$: hier wurde der Satz von L'Hospital verwendet. Dieser besagt, dass sich der Grenzwert durch Ableiten von Zähler und Nenner nicht ändert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{log(n)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log(n)}{n} =^* \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$e^{(ln(n))} = e^{log_e(n)} = n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{nlog(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{log(n)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(log(n))}{n^{(5/4)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(log(n))}{n^{(1/4)}}=^*\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{4\frac{1}{n^{(3/4)}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^{(1/4)}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{(5/4)}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{(3/4)}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^{2.5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{0.5}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5}}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2.5}}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{0.5}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=^*=^*=^*\lim_{n\to\infty}\frac{6}{2^n ln^3(2)}=0$$

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{2\cdot2\cdot2\cdots2}^{\text{n-Mal}}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n}==\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{i}\leq\lim_{n\to\infty}2\frac{2}{n}=0$$

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdots n}_{\text{n-Mal}}}==\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{4}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Übung 2.
Beweisen Sie:

$$f(n),g(n)\in\mathcal{O}(h(n))\implies f(n)\cdot g(n)\in\mathcal{O}((h(n))^2)$$

Lösung 2.
Definition:

$$f(n)\in\mathcal{O}(g(n))\iff\exists C>0:\ \exists n_0>0:\ \forall n>n_0:\ |f(n)|\leq C\cdot|g(n)|$$

Für $f(n)$ und $g(n)$ gilt daher nun nach der Voraussetzung, dass sich Konstanten C_f, C_g, n_{0f}, n_{0g} finden lassen, für die gilt:

$$f(n)\in\mathcal{O}(h(n))\implies\exists C_f>0:\ \exists n_{0f}>0:\ \forall n>n_{0f}:\ |f(n)|\leq C_f\cdot|h(n)|$$
$$g(n)\in\mathcal{O}(h(n))\implies\exists C_g>0:\ \exists n_{0g}>0:\ \forall n>n_{0g}:\ |g(n)|\leq C_g\cdot|h(n)|$$

Daher gilt nun $\forall n > \max(n_{0f}, n_{0g})$:

$$|f(n) \cdot g(n)| \leq |f(n)| \cdot |g(n)| \leq C_f \cdot |h(n)| \cdot C_g \cdot |h(n)| \leq C_f \cdot C_g \cdot \left|(h(n))^2\right|$$

Mit $n_{0fg} = \max(n_{0f}, n_{0g})$ und $C_{fg} = C_f \cdot C_g$ gilt daher:

$$\forall n > n_{0fg} : \; |f(n) \cdot g(n)| \leq C_{fg} \cdot \left|(h(n))^2\right| \implies f(n)g(n) \in \mathcal{O}((h(n))^2)$$

Rekurrenzgleichungen

Übung 3.
Bestimmen Sie die Größenordnung der Funktionen mittels Substitutionsmethode.

a)

$$T_1(n) := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 4 \cdot T(n-1) + 5, & sonst \end{cases}$$

b)

$$T_2(n) := \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 4 \cdot T(n/2) + n^2, & sonst \end{cases}$$

Lösung 3.
a) "Raten"der Struktur:

$$\begin{aligned} T_1(n) &= 4 \cdot T_1(n-1) + 5 \\ &= 4 \cdot 4 \cdot T_1(n-2) + 4 \cdot 5 + 5 \\ &\stackrel{?}{=} 4^k \cdot T_1(n-k) + 5 \sum_{i=0}^{k-1} 4^i \end{aligned}$$

Beweisen der Struktur mittels Induktion:

IA: Offensichtlich wahr für k=0.
IS:

$$
\begin{aligned}
T_1(n) &= 4^k \cdot T_1(n-k) + 5\sum_{i=0}^{k-1} 4^i \\
&= 4^k(4 \cdot T_1(n-k-1) + 5) + 5\sum_{i=0}^{k-1} 4^i \\
&= 4^{k+1} \cdot T_1(n-(k+1)) + 4^k 5 + 5\sum_{i=0}^{k-1} 4^i \\
&= 4^{k+1} \cdot T_1(n-(k+1)) + 5\sum_{i=0}^{k} 4^i
\end{aligned}
$$

Setzen von $k = n$:

$$
\begin{aligned}
T_1(n) &= 4^n \cdot T_1(n-n) + 5\sum_{i=0}^{n-1} 4^i \\
&= 4^n \cdot 1 + 5\sum_{i=0}^{n-1} 4^i \\
&= 4^n \cdot 1 + \frac{5}{3}(4^n - 1) \\
&\implies T_1(n) \in \Theta(4^n)
\end{aligned}
$$

b) "Raten"der Struktur:

$$
\begin{aligned}
T_2(n) &= 4 \cdot T_2(\frac{n}{2}) + n^2 \\
&= 4 \cdot 4 \cdot T_2(\frac{n}{2^2}) + 4 \cdot (\frac{n}{2})^2 + n^2 \\
&= 4 \cdot 4 \cdot T_2(\frac{n}{2^2}) + n^2 + n^2 \\
&\stackrel{?}{=} 4^k \cdot T_2(\frac{n}{2^k}) + k \cdot n^2
\end{aligned}
$$

Beweisen der Struktur mittels Induktion:

IA: Offensichtlich wahr für k=0.
IS:

$$
\begin{aligned}
T_2(n) &= 4^k \cdot T_2(\frac{n}{2^k}) + k \cdot n^2 \\
&= 4^k \cdot (4 \cdot T_2(\frac{n}{2^{k+1}}) + n^2) + k \cdot n^2 \\
&= 4^{k+1} \cdot T_2(\frac{n}{2^{k+1}}) + (k+1)n^2
\end{aligned}
$$

Setzen von $k = log_2(n)$

$$\begin{aligned}
T_2(n) &= 4^{log_2(n)} \cdot T_2(\frac{n}{2^{log_2(n)}}) + log_2(n)n^2 \\
&= n^2 \cdot 1 + log_2(n)n^2 \\
&= n^2 \cdot log_2(2) + log_2(n)n^2 \\
&= log_2(2n)n^2 \\
&\implies T_2(n) \in \Theta(log_2(n)n^2) = \Theta(log(n)n^2)
\end{aligned}$$

Mastertheorem

Übung 4.

Bestimmen Sie die Größenordnung der Funktionen wenn möglich mittels Mastertheorem.

a)

$$T_1(n) := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 4 \cdot T(n-1) + 5, & sonst \end{cases}$$

b)

$$T_2(n) := \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 4 \cdot T(n/2) + n^2, & sonst \end{cases}$$

Lösung 4.

a) $T_1(n)$:

Das Mastertheorem ist nicht anwendbar, da die Laufzeit in jedem Rekursionsschritt nicht um einen konstanten Faktor geringer wird.

b) $T_2(n)$:

Das Mastertheorem ist anwendbar mit: $a = 4$, $b = 2$, $log_b(a) = log_2(4) = 2$ und $f(n) = n^2$.

Aufgrund von $n^2 \in \Theta(n^2)$ $\left(f(n) \in \Theta\left(n^{log_b(a)}\right)\right)$ liegt offensichtlich der 2. Fall des Mastertheorems vor.

Daher gilt: $T_2(n) \in \Theta(n^2 log(n))$