Algorithmen und Datenstrukturen

Kapitel 3: Sortieren

Prof. Dr. Peter Kling

Wintersemester 2020/21

Übersicht

1. Insertionsort
2. Mergesort
3. Rekursion
4. Quicksort
5. Heapsort
6. Sortieren in linearer Zeit

Das Sortierproblem

Eingabe

- Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Ausgabe

- Umordnung $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ mit $b_1 \leq b_2 \leq \ldots b_n$

Beispiel

- **Eingabe:** $(7, 99, 12, \ 3, 17, \ 12)$
- **Ausgabe:** $(3, \ \ 7, 12, 12, 17, 99)$

1) Insertionsort

Inkrementelle Algorithmen

Definition 3.1

Ein inkrementeller Algorithmus berechnet eine Teillösung für die ersten i Objekte sukzessive für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ aus einer bekannten Teillösung für die ersten $i - 1$ Objekte.

```
MinSearch(A)
min ← 1
for i ← 2 to length(A)
    if A[i] < A[min]
        min ← i
return min
```

- **Objekte:**
  Einträge des Arrays A
- **Teillösung für ersten i Objekte:**
  Minimum von $A[1], \ldots, A[i]$

InsertionSort

Idee

Berechne sukzessive die Sortierungen der Teilarrays $A[1 \dots i]$ für $i \in \{ 1, 2, \dots, \text{length}(A) \}$.

Algorithmus 3.1: InsertionSort(A)

```
for j ← 2 to length(A)
    key ← A[j]
    i ← j − 1
    while i > 0 and A[i] > key
        A[i + 1] ← A[i]
        i ← i − 1
    A[i + 1] ← key
```

Beispiel

$key = \boxed{99}$

$$A = \langle \overbrace{\underset{\uparrow\, i}{7}}^{\text{sortiert}}, \underset{\uparrow\, j}{99}, 12, 3, 17, 12 \rangle$$

Was ist die Grundidee des Algorithmus?

- betrachte Variable $key \leftarrow A[j]$ im j-Schleifendurchlauf
- while: schiebe alle $A[1], \ldots, A[j-1]$ die größer key sind...
- ...um eins nach rechts
- key wird in entstandener Lücke gespeichert

InsertionSort(A)

```
for j ← 2 to length(A)
    key ← A[j]
    i ← j − 1
    while i > 0 and A[i] > key
        A[i + 1] ← A[i]
        i ← i − 1
    A[i + 1] ← key
```

Schleifendurchlauf mit $j = 2$

$key = \boxed{99}$

$A = \langle\ 7\ , \boxed{99}, 12\ , \ 3\ , 17\ , 12\ \rangle$

Wie gut ist InsertionSort?

Theorem 3.1

InsertionSort löst das Sortierproblem. Das heißt der Algorithmus sortiert eine Folge von n Zahlen aufsteigend.

Theorem 3.2

Die worst-case Laufzeit von InsertionSort ist $\Theta(n^2)$.

Beweis von Theorem 3.1 (1/3)

Korrekt-heit

- sei das Eingabearray $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$

Schleifeninvariante $I(j)$

$A[1 \ldots j-1]$ enthält die Zahlen
$a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$ aufsteigend sortiert

(a) **Initialisierung:** ✓
- das einelementiges Array $A[1 \ldots 2-1] = A[1]$ ist sortiert
- also gilt $I(2)$ trivialerweise immer

$\Longrightarrow$ $I(2)$ gilt vor dem ersten for-Schleifendurchlauf

(b) **Erhaltung:** ⁉

(c) **Terminierung:** ✓
- am Ende der Schleife gilt $I(\mathbf{length}(A) + 1) = I(n+1)$
- das heißt $A[1 \ldots n+1-1] = A[1 \ldots n]$ enthält die Zahlen…
- …$a_1, a_2, \ldots a_{n+1-1} = a_n$ aufsteigend sortiert

$\Longrightarrow$ InsertionSort ist korrekt

Beweis von Theorem 3.1 (2/3)

Korrekt-heit

Beweis der Erhaltung: $I(j) \to I(j+1)$ $(\checkmark)$ Details auf nächster Folie

- gelte $I(j)$ am Anfang des j-Durchlaufs der for-Schleife
- InsertionSort merkt sich $A[j]$ in Variable key
- sei $k \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$ minimal mit $A[k] > key$...
  - ...oder $k = j$ falls ein solches k nicht existiert
- der Algorithmus verschiebt $A[k \ldots j-1]$ nach $A[k+1 \ldots j]$...
- ...und setzt anschließend $A[k]$ auf den Wert key
- danach gilt:

(1) $A[1] \leq A[2] \leq \cdots \leq A[k-1]$ wg. $I(j)$

(2) $A[k-1] \leq A[k] \leq A[k+1]$ while-Schleife

(3) $A[k+1] \leq A[k+2] \leq \cdots \leq A[j]$ wg. $I(j)$

$\Longrightarrow$ $A[1] \leq A[2] \leq \cdots \leq A[j]$

$\Longrightarrow$ $I(j+1)$ gilt am Ende des j-Durchlaufs der for-Schleife

Beweis von Theorem 3.1 (3/3)

Korrekt-heit

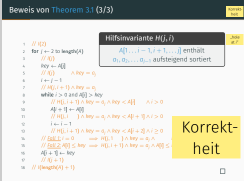
Hilfsinvariante $H(j, i)$

$A[1 \dots i-1, i+1, \dots j]$ enthält $a_1, a_2, \dots a_{j-1}$ aufsteigend sortiert

„hole at i“

// $I(2)$
for $j \leftarrow 2$ to length(A)
    // $I(j)$
    $key \leftarrow A[j]$
    // $I(j) \qquad \wedge\, key = a_j$
    $i \leftarrow j - 1$
    // $H(j, i+1) \wedge key = a_j$
    while $i > 0$ and $A[i] > key$
        // $H(j, i+1) \wedge key = a_j \wedge key < A[i] \qquad \wedge\, i > 0$
        $A[i+1] \leftarrow A[i]$
        // $H(j, i \qquad) \wedge key = a_j \wedge key < A[i+1] \wedge i > 0$
        $i \leftarrow i - 1$
        // $H(j, i+1) \wedge key = a_j \wedge key < A[i+2] \wedge i \geq 0$
    // <u>Fall 1:</u> $i = 0 \qquad \Longrightarrow \; H(j, 1 \qquad) \wedge key = a_j \wedge \qquad\qquad key < A[2]$
    // <u>Fall 2:</u> $A[i] \leq key \;\Longrightarrow\; H(j, i+1) \wedge key = a_j \wedge A[i] \leq key < A[i+2]$
    $A[i+1] \leftarrow key$
    // $I(j+1)$
// $I(\text{length}(A) + 1)$

$\square$



- Initialisierung (Zeile 1) & Terminierung (Zeile 18) $\rightsquigarrow$ vorherige Folie
- hier im Wesentlichen die Erhaltung
- benötigen weitere (Hilfs-) Invariante für innere while-Schleife
- genauere Erläuterungen mündlich und/oder annotiert

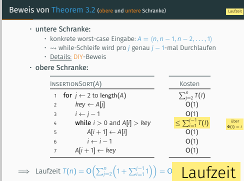
Beweis von Theorem 3.2 (obere und untere Schranke)

- **untere Schranke:**
  - konkrete worst-case Eingabe: $A = \langle n, n-1, n-2, \ldots, 1\rangle$
  - $\rightsquigarrow$ while-Schleife wird pro j genau $j-1$-mal Durchlaufen
  - Details: DIY-Beweis
- **obere Schranke:**

InsertionSort(A)	Kosten
for $j \leftarrow 2$ to length(A)	$\sum_{j=2}^{n} T(I)$
$key \leftarrow A[j]$	$O(1)$
$i \leftarrow j - 1$	$O(1)$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	$\leq \sum_{i=1}^{j-1} T(I)$
$A[i+1] \leftarrow A[i]$	$O(1)$
$i \leftarrow i - 1$	$O(1)$
$A[i+1] \leftarrow key$	$O(1)$

über $\Phi(i) = i$

$\Longrightarrow$ Laufzeit $T(n) = O\left(\sum_{j=2}^{n}\left(1 + \sum_{i=1}^{j-1} 1\right)\right) = O(n^2)$ $\square$



- Laufzeit der while-Schleife folgt mittels Potentialfunktion $\Phi(i) = i$

2) Mergesort

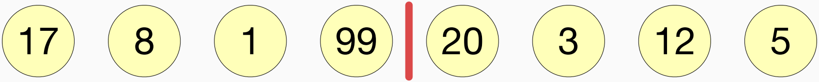
Definition 3.2

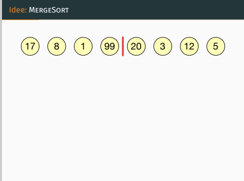
Ein Divide & Conquer Algorithmus nutzt Rekursion zur Lösung eines Problems in drei Schritten:

1. Teile das Problem in mehrere Teilprobleme auf.
2. Erobere große Teilproblem durch rekursive Aufrufe und löse kleine Teilprobleme direkt.
3. Kombiniere die Lösungen der Teilprobleme zu einer Gesamtlösung.

Teile & Erobere

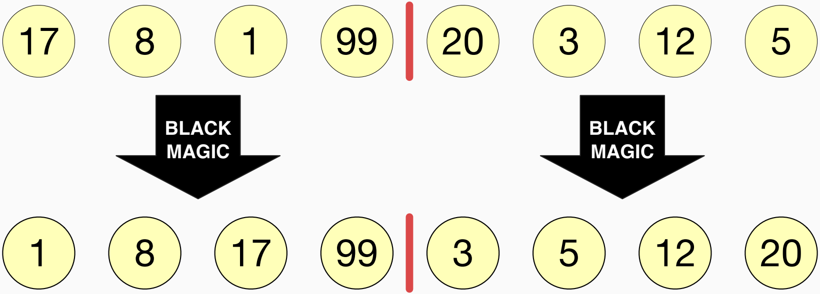
Idee: MergeSort

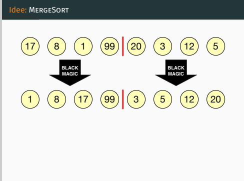




- Teile: rote Linie
- Erobere: Black Magic bzw. Mathematik
- Kombiniere: Merge

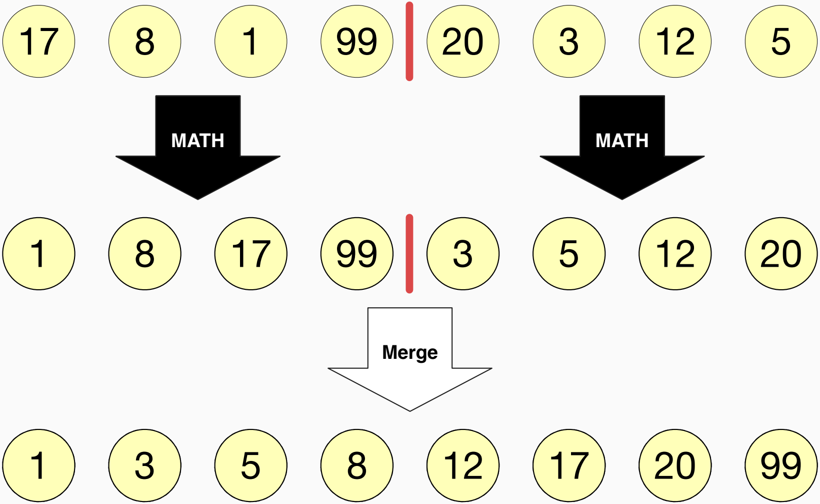
Idee: MergeSort

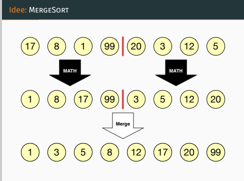




- Teile: rote Linie
- Erobere: Black Magic bzw. Mathematik
- Kombiniere: Merge

Idee: MergeSort





- Teile: rote Linie
- Erobere: Black Magic bzw. Mathematik
- Kombiniere: Merge

Pseudocode zu MergeSort

Algorithmus 3.2: MergeSort(A, l, r)

```
if l < r
    p ← ⌊(l + r)/2⌋
    MergeSort(A, l, p)
    MergeSort(A, p + 1, r)
    Merge(A, l, p, r)
```

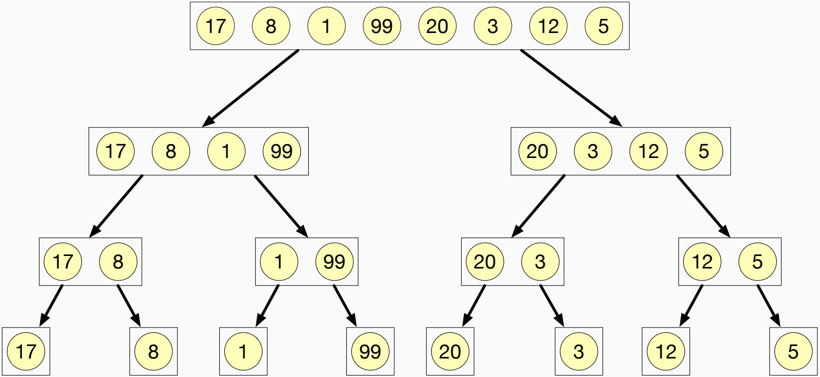
- erstmaliger Aufruf als MergeSort$(A, 1, \text{length}(A))$
- Hilfsalgorithmus Merge mischt zwei sortierte Teilfolgen
- eine Mögliche Umsetzung des D&C Ansatzes zum Sortieren

Rekursionsbaum zu MERGESORT

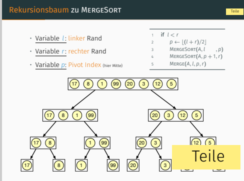
Teile

- Variable l: linker Rand
- Variable r: rechter Rand
- Variable p: Pivot Index (hier Mitte)

```
if l < r
    p ← ⌊(l + r)/2⌋
    MERGESORT(A, l      , p)
    MERGESORT(A, p + 1, r)
    MERGE(A, l, p, r)
```



Rekursionsbaum zu MERGESORT



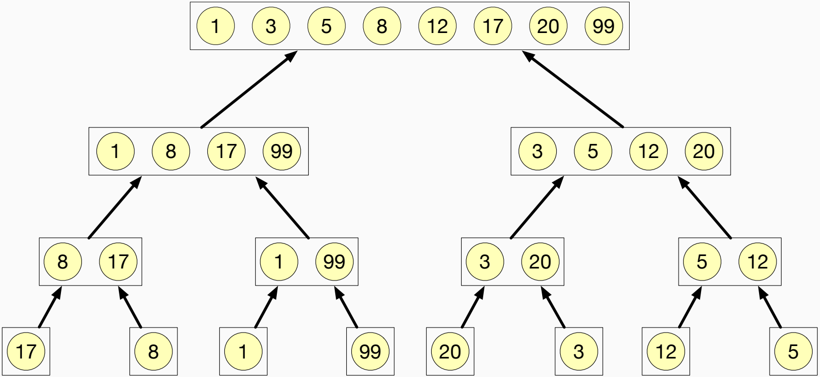
- MERGESORT teilt das Array in der Mitte
- andere Teilungsstrategien denkbar; werden wir noch sehen
- Pivot Index nicht mit Pivot Element verwechseln; kommt später

Rekursionsbaum zu MergeSort

Erobere

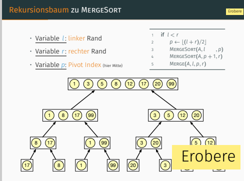
- Variable l: linker Rand
- Variable r: rechter Rand
- Variable p: Pivot Index (hier Mitte)

if $l < r$
  $p \leftarrow \lfloor (l + r)/2 \rfloor$
  $\textsc{MergeSort}(A, l, p)$
  $\textsc{MergeSort}(A, p + 1, r)$
  $\textsc{Merge}(A, l, p, r)$



2020-11-24

Algorithmen und Datenstrukturen
└─ Mergesort
  └─ Rekursionsbaum zu MergeSort



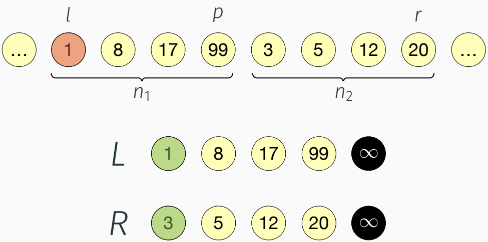
- MergeSort teilt das Array in der Mitte
- andere Teilungsstrategien denkbar

Wie genau funktioniert MERGE?

Algorithmus 3.3: MERGE(A, l, p, r)

```
n1 ← p − l + 1
n2 ← r − p
for i ← 1 to n1: L[i] ← A[l + i − 1]
for j ← 1 to n2: R[j] ← A[p + j]
L[n1 + 1] ← ∞
R[n2 + 1] ← ∞
i ← 1; j ← 1
for k ← l to r
    if L[i] ≤ R[j]
        A[k] ← L[i]
        i ← i + 1
    else
        A[k] ← R[j]
        j ← j + 1
```

- Variablen n_1, n_2: Länge der Teillösungen
- Variablen L, R: Arrays mit Teillösungen
- Variablen i, j, k: „Merge-Indizes“



Wie gut ist MergeSort?

Theorem 3.3

MergeSort löst das Sortierproblem. Das heißt der Algorithmus sortiert eine Folge von n Zahlen aufsteigend.

Theorem 3.4

Die Laufzeit von MergeSort ist $\Theta(n \cdot \log n)$.

Wie gut ist MERGESORT?

Theorem 3.3

MERGESORT löst das Sortierproblem. Das heißt der Algorithmus sortiert eine Folge von n Zahlen aufsteigend.

Theorem 3.4

Die Laufzeit von MERGESORT ist $\Theta(n \cdot \log n)$.

- wir reden hier explizit nicht von worst-case Laufzeit
- d.h. MERGESORT hat selbst im best-case Laufzeit $\Theta(n \cdot \log n)$

Wie beweist man Korrektheit rekursiver Algorithmen?

Üblicherweise ähnlich zur vollständigen Induktion

1. Initialisierung:
   Algorithmus ist korrekt für Basisfall
2. Erhaltung:
   rekursiver Aufruf korrekt $\implies$ aktueller Aufruf korrekt

Anmerkung zur Erhaltung

- die Annhame der Korrektheit der rekursiven Aufrufe...
- ...setzt Terminierung voraus!

$\implies$ Müssen wir zeigen! (oder direkt Laufzeitanalyse machen)

Beweis von Theorem 3.3 (1/2)

Korrekt-heit

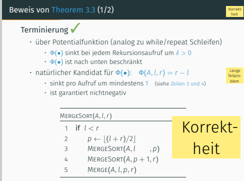
Terminierung ✓

- über Potentialfunktion (analog zu while/repeat Schleifen)
  - $\Phi(\bullet)$ sinkt bei jedem Rekursionsaufruf um $\delta > 0$
  - $\Phi(\bullet)$ ist nach unten beschränkt
- natürlicher Kandidat für $\Phi(\bullet)$: $\quad \Phi(A, l, r) = r - l$
  - sinkt pro Aufruf um mindestens 1 (siehe Zeilen 3 und 4)
  - ist garantiert nichtnegativ

Länge Teilproblem

$\textsc{MergeSort}(A, l, r)$

```
1  if l < r
2      p ← ⌊(l + r)/2⌋
3      MergeSort(A, l, p)
4      MergeSort(A, p + 1, r)
5      Merge(A, l, p, r)
```



- δ sollte nicht von der Rekursionstiefe abhängen
- analog kann $\Phi(\bullet)$ steigen und nach oben beschränkt sein
- $\Phi(A, l, r)$ halbiert sich sogar (im Wesentlich) pro Aufruf!
- implizit nehmen wir hier die Terminierung von Merge an
- formal zeigen wir die Terminierung von Merge in Lemma 3.2

Beweis von Theorem 3.3 (2/2)

Korrekt-heit

Initialisierung & Erhaltung (✓)

- Behauptung: $\textsc{MergeSort}(A, l, r)$ sortiert $A[l \ldots r]$
- Initialisierung: Basisfall $l \geq r$ ist trivialerweise sortiert

nur ein Element

- Erhaltung:
  - nach rekursiven Aufrufen sind $A[l \ldots p]$ und $A[p+1, r]$ sortiert

$\Longrightarrow$ wenn $\textsc{Merge}(A, l, p, r)$ diese Teillösungen...
...korrekt zusammenführt, so ist $A[l \ldots r]$ am Ende sortiert

```
MergeSort(A, l, r)
if l < r
    p ← ⌊(l + r)/2⌋
    MergeSort(A, l, p)
    MergeSort(A, p + 1, r)
    Merge(A, l, p, r)
```

$\square$

Müssen also noch Merge analysieren!

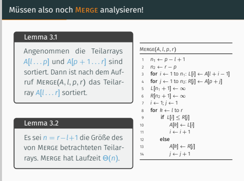
Lemma 3.1

Angenommen die Teilarrays $A[l \dots p]$ und $A[p+1 \dots r]$ sind sortiert. Dann ist nach dem Aufruf $\textsc{Merge}(A, l, p, r)$ das Teilarray $A[l \dots r]$ sortiert.

Lemma 3.2

Es sei $n = r - l + 1$ die Größe des von Merge betrachteten Teilarrays. Merge hat Laufzeit $\Theta(n)$.

```
MERGE(A, l, p, r)
n₁ ← p − l + 1
n₂ ← r − p
for i ← 1 to n₁: L[i] ← A[l + i − 1]
for j ← 1 to n₂: R[j] ← A[p + j]
L[n₁ + 1] ← ∞
R[n₂ + 1] ← ∞
i ← 1; j ← 1
for k ← l to r
    if L[i] ≤ R[j]
        A[k] ← L[i]
        i ← i + 1
    else
        A[k] ← R[j]
        j ← j + 1
```



- auch hier: selbst im best-case $\Theta(n)$

Beweis von Lemma 3.1 (1/2)

Korrekt-heit

Schleifeninvariante $I(i, j, k)$

$A[l \dots k-1]$ enthält die $k - l$ kleinsten Zahlen aus L und R in sortierter Reihenfolge. Außerdem sind $L[i]$ und $R[j]$ die kleinsten noch nicht nach A kopierten Elemente.

(a) **Initialisierung:** ✓

- die Aussage $I(1, 1, l)$ gilt trivialerweise

$\Longrightarrow$ $I(1, 1, l)$ gilt vor dem ersten Schleifendurchlauf

(b) **Erhaltung:** ⁉

(c) **Terminierung:** ✓

- am Ende der Schleife gilt $I(\bullet, \bullet, r+1)$

$\Longrightarrow$ $A[l \dots r]$ enthält die $r - l + 1$ kleinsten Zahlen aus L und R... ...in sortierter Reihenfolge

Also alle!

$\Longrightarrow$ MERGE ist korrekt

Beweis von Lemma 3.1 (2/2)

Erhaltung $I(\bullet, \bullet, k) \to I(\bullet, \bullet, k+1)$

MERGE(A, l, p, r)

1 $n_1 \leftarrow p - l + 1$
2 $n_2 \leftarrow r - p$
3 **for** $i \leftarrow 1$ to n_1: $L[i] \leftarrow A[l + i - 1]$
4 **for** $j \leftarrow 1$ to n_2: $R[j] \leftarrow A[p + j]$
5 $L[n_1 + 1] \leftarrow \infty$
6 $R[n_2 + 1] \leftarrow \infty$
7 $i \leftarrow 1; j \leftarrow 1$
8 // $I(i, j, l)$
9 **for** $k \leftarrow l$ to r
10   // $I(i, j, k)$
11   **if** $L[i] \leq R[j]$
12   // $I(i, j, k) \wedge L[i] \leq R[j]$
13         $A[k] \leftarrow L[i]$
14         $i \leftarrow i + 1$
15   // $I(i, j, k + 1)$
16   **else**
17   // $I(i, j, k) \wedge L[i] > R[j]$
18         $A[k] \leftarrow R[j]$
19         $j \leftarrow j + 1$
20   // $I(i, j, k + 1)$
21   // $I(i, j, k + 1)$
22 // $I(\bullet, \bullet, r + 1)$

Schleifeninvariante $I(i, j, k)$

$A[l \ldots k - 1]$ enthält die $k - l$ kleinsten Zahlen aus L und R in sortierter Reihenfolge. Außerdem sind $L[i]$ und $R[j]$ die kleinsten noch nicht wieder nach A kopierten Elemente.

- gelte $I(i, j, k)$ vor dem k-Schleifendurchlauf
- o.B.d.A. sei $L[i] \leq R[j]$, also $L[i]$ das kleinste noch nicht einsortierte Element
  - Fall $L[i] > R[j]$ geht analog
- nach Zeile 13 enthält $A[l \ldots k]$ die $k - l + 1$ kleinsten Elemente aus L und R in sortierter Reihenfolge
- nach Zeile 14 gilt dann $I(i, j, k + 1)$

$\Longrightarrow$ $I(i, j, k + 1)$ gilt am Ende des k-Schleifendurchlaufs $\square$

✓

Beweis von Lemma 3.2

Laufzeit

$\textsc{Merge}(A, l, p, r)$	Kosten
$n_1 \leftarrow p - l + 1$	$\Theta(1)$
$n_2 \leftarrow r - p$	$\Theta(1)$
for $i \leftarrow 1$ to n_1: $L[i] \leftarrow A[l + i - 1]$	$\Theta(n_1)$
for $j \leftarrow 1$ to n_2: $R[j] \leftarrow A[p + j]$	$\Theta(n_2)$
$L[n_1 + 1] \leftarrow \infty$	$\Theta(1)$
$R[n_2 + 1] \leftarrow \infty$	$\Theta(1)$
$i \leftarrow 1; j \leftarrow 1$	$\Theta(1)$
for $k \leftarrow l$ to r	$\Theta(r - l)$
if $L[i] \leq R[j]$	$\Theta(1)$
$A[k] \leftarrow L[i]$	$\Theta(1)$
$i \leftarrow i + 1$	$\Theta(1)$
else	$\Theta(1)$
$A[k] \leftarrow R[j]$	$\Theta(1)$
$j \leftarrow j + 1$	$\Theta(1)$

- Eingabegröße $n = r - l + 1$
- Behauptung: Laufz. $\Theta(n)$
- $n_1 + n_2 = r - l + 1 = n$
- exakt $r - l + 1 = n$ Durchläufe der for-Schleife
- alle anderen Operationen haben Laufzeit $\Theta(1)$
- also hat $\textsc{Merge}$ Laufzeit $\Theta(n)$

✓

$\square$

Es bleibt die Laufzeit von MERGESORT zu beweisen!

Laufzeitanalyse für D&C Algorithmen

Die Laufzeit eines D&C Algorithmus lässt sich beschränken durch

$$T(n) \leq \begin{cases} c_B & \text{, falls } n \leq n_B, \\ a \cdot T(n/b) + D(n) + C(n) & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist:

- $T(n)$: worst-case Laufzeit bei Eingabegröße n
- c_B & n_B: Basisfälle haben Größe $\leq n_B$ und Laufzeit $\leq c_B$
- a: Anzahl der Teilprobleme durch Teilung
- n/b: Größe der Teilprobleme
- $D(n)$: Laufzeit für die Teilung
- $C(n)$: Laufzeit für die Kombinierung

Divide

Combi-ne

obere Schranke

Lemma 3.3

Es gibt eine Konstante c_1, so dass für die Laufzeit $T(n)$ von MergeSort gilt:

$$T(n) \leq \begin{cases} c_1 & \text{, falls } n = 1, \\ 2T(n/2) + c_1 \cdot n & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Beweis.

- Basisfall hat Größe $n_B = 1$ und benötigt konstante Zeit c_B
- jeder Aufruf erzeugt $a = 2$ Teilprobleme der Größe $\approx n/2$ (vereinfacht)
- Aufteilung benötigt konstante Zeit $D(n) = \mathrm{const}_1$ (2 rek. Aufrufe)
- Kombinierung benötigt Zeit $C(n) \leq \mathrm{const}_2 \cdot n$ (Lemma 3.2)
- wähle $c_1 = \max\{c_B, \mathrm{const}_2\} + \mathrm{const}_1$ □

Rekursionsformel für MergeSort

Lemma 3.3

Es gibt eine Konstante c_1, so dass für die Laufzeit $T(n)$ von MergeSort gilt:

$$T(n) \le \begin{cases} c_1 & \text{, falls } n = 1, \\ 2T(n/2) + c_1 \cdot n & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Beweis.

- Basisfall hat Größe $n_B = 1$ und benötigt ko
- jeder Aufruf erzeugt $a = 2$ Teilprobleme de
- Aufteilung benötigt konstante Zeit $D(n) =$
- Kombinierung benötigt Zeit $C(n) \le \mathrm{const}_2 \cdot n$
- wähle $c_1 = \max\{c_B, \mathrm{const}_2\} + \mathrm{const}_1$ □

obere Schranke

- wir gehen hier vereinfachend davon aus, dass die Länge der Eingabe einer Zweierpotenz ist

Rekursionsformel für MergeSort

untere Schranke

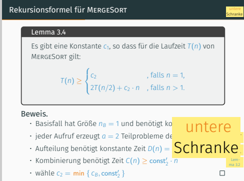
Lemma 3.4

Es gibt eine Konstante c_1, so dass für die Laufzeit $T(n)$ von MergeSort gilt:

$$T(n) \geq \begin{cases} c_2 & \text{, falls } n = 1, \\ 2T(n/2) + c_2 \cdot n & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Beweis.

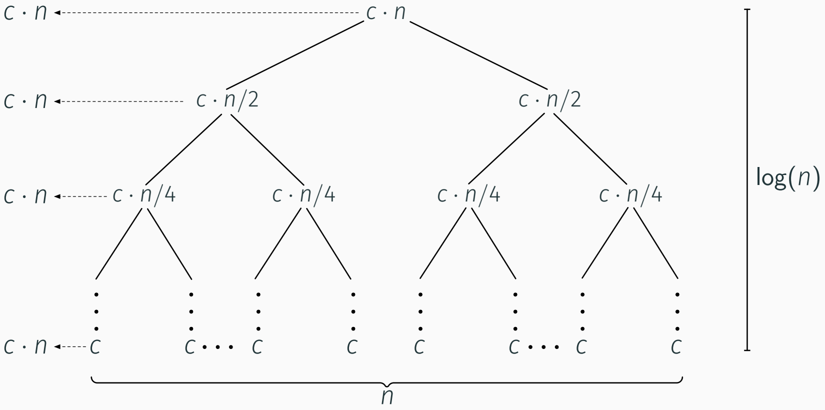
- Basisfall hat Größe $n_B = 1$ und benötigt konstante Zeit c_B
- jeder Aufruf erzeugt $a = 2$ Teilprobleme der Größe $\approx n/2$ vereinfacht
- Aufteilung benötigt konstante Zeit $D(n) = \text{const}_1$ 2 rek. Aufrufe
- Kombinierung benötigt Zeit $C(n) \geq \text{const}'_2 \cdot n$ Lemma 3.2
- wähle $c_2 = \min\{c_B, \text{const}'_2\}$ □



- wir gehen hier vereinfachend davon aus, dass die Länge der Eingabe einer Zweierpotenz ist

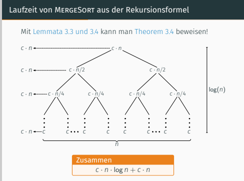
Laufzeit von MergeSort aus der Rekursionsformel

Mit Lemmata 3.3 und 3.4 kann man Theorem 3.4 beweisen!



Zusammen

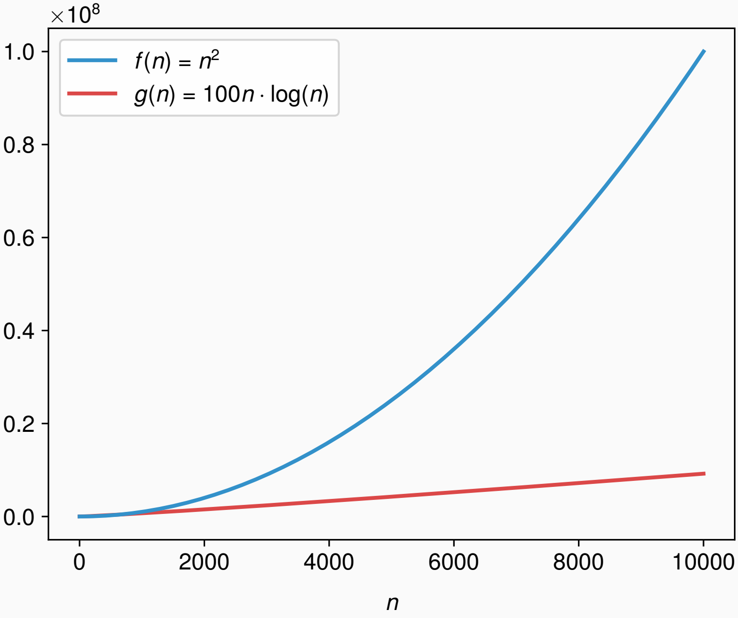
$$c \cdot n \cdot \log n + c \cdot n$$

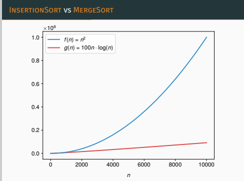


- jede Kante ist ein rekursiver Aufruf ⇝ Kosten $\Theta(1)$ pro Kante
- jedes Blatt ist ein Basisfall ⇝ Kosten $\Theta(1)$ pro Blatt
- lernen noch systematische Methode kennen, um die Lösung solch rekursiver Gleichungen für Laufzeiten zu berechnen

⇝ Stichwort Master Theorem

InsertionSort vs MergeSort





- n^2 wächst viel stärker als $n \cdot \log n$
- Konstanten spielen kaum eine Rolle (für große n ist asymptotische Laufzeit entscheidend)

3) Rekursion

Laufzeitanalyse rekursiver Algorithmen

- insbesondere – aber nicht nur – für D&C Algorithmen

Verschiedene Ansätze

1. Substitutionsmethode
2. Rekursionsbaum-Methode
3. Master Theorem

Beispiele rekursiver Laufzeiten

- Rekursion für Factorial

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } n = 1, \\ T(n-1) + \Theta(1) & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

- Rekursion für MergeSort

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } n = 1, \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Substitutionsmethode

Idee

- rate eine Lösung
- beweise Korrektheit über Induktion

Beispiel

$$T(n) \leq \begin{cases} c_1 & \text{, falls } n = 1, \\ T(n-1) + c_2 & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Wir rechnen...

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(n-1) + c_2 \\ &\leq \big(T(n-2) + c_2\big) + c_2 = T(n-2) + 2c_2 \\ &\leq \big(T(n-3) + c_2\big) + 2c_2 = T(n-3) + 3c_2 \\ &\leq \quad \vdots \end{aligned}$$

Wir raten...

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(1) + (n-1) \cdot c_2 \\ &\leq c_1 + (n-1) \cdot c_2. \end{aligned}$$

Korrektheit...

DIY-Induktions-Beweis!

Substitutionsmethode

Idee

- rate eine Lösung
- beweise Korrektheit über Induktion

Beispiel

$$T(n) \leq \begin{cases} c_1 & \text{, falls } n = 1, \\ T(n-1) + c_2 & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Wir rechnen...

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(n-1) + c_2 \\ &\leq \left(T(n-2) + c_2\right) + c_2 = T(n-2) + 2c_2 \\ &\leq \left(T(n-3) + c_2\right) + 2c_2 = T(n-3) + 3c_2 \\ &\leq \quad \vdots \end{aligned}$$

Wir raten...

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(1) + (n-1) \cdot c_2 \\ &\leq c_1 + (n-1) \cdot c_2. \end{aligned}$$

Korrektheit...

DIY-Induktions-Beweis!

- man kann auch gut „von unten“ anfangen
- also sukzessiv $T(1) = \ldots$, $T(2) = \ldots$, etc. berechnen

Laufzeit von FACTORIAL

Theorem 3.5

Die Laufzeit von FACTORIAL ist $\Theta(n)$.

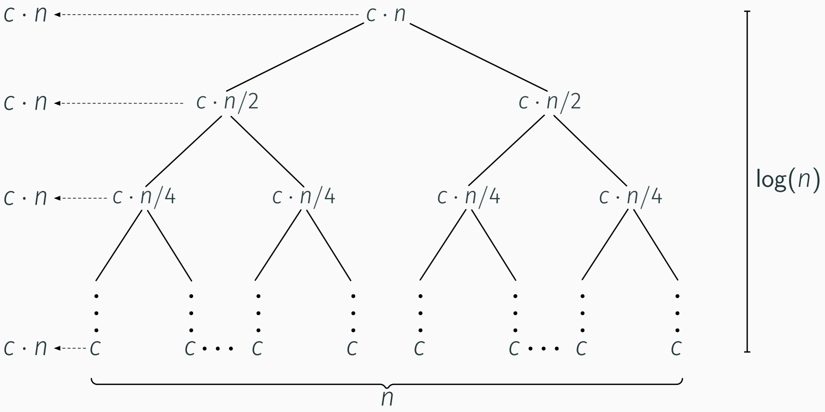
- folgt aus der eben gesehener Rekursion
- beachte: funktioniert für obere und untere Schranke
- mit der Zeit sammelt man Erfahrung & Intuition
- mehr Erfahrung $\implies$ weniger rechnen

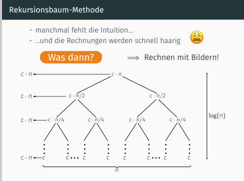
Also übt!

Rekursionsbaum-Methode

- manchmal fehlt die Intuition…
- …und die Rechnungen werden schnell haarig

Was dann? $\implies$ Rechnen mit Bildern!





- Rekursionsbaum aufbauen und...
  - Höhe abschätzen
  - Anzahl der Knoten pro Ebene abschätzen
  - in jeder Ebene Kosten pro Knoten abschätzen
- Anwendung 1:
  - wenn man nur eine Lösung raten möchte...
  - ...und diese später per Induktion verifiziert
- Anwendung 2:
  - wenn man sehr genau „malt“/rechnet...
  - ...dient er auch direkt als Beweis
  - (so werden wir das Master-Theorem beweisen)

Das (lineare) Master-Theorem

Theorem 3.6: Master-Theorem einfache Version

Es seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten und $n = b^k \in \mathbb{N}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $f(n) = n$ und

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } n = 1, \\ a \cdot T(n/b) + f(n) & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ falls $a > b$,

(b) $T(n) = \Theta\left(n \cdot \log n\right)$ falls $a = b$,

(c) $T(n) = \Theta(n)$ falls $a < b$.

Das (lineare) Master-Theorem

Theorem 3.6: Master-Theorem einfache Version

Es seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten und $n = b^k \in \mathbb{N}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $f(n) = n$ und

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } n = 1, \\ a \cdot T(n/b) + f(n) & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ falls $a > b$,

(b) $T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$ falls $a = b$,

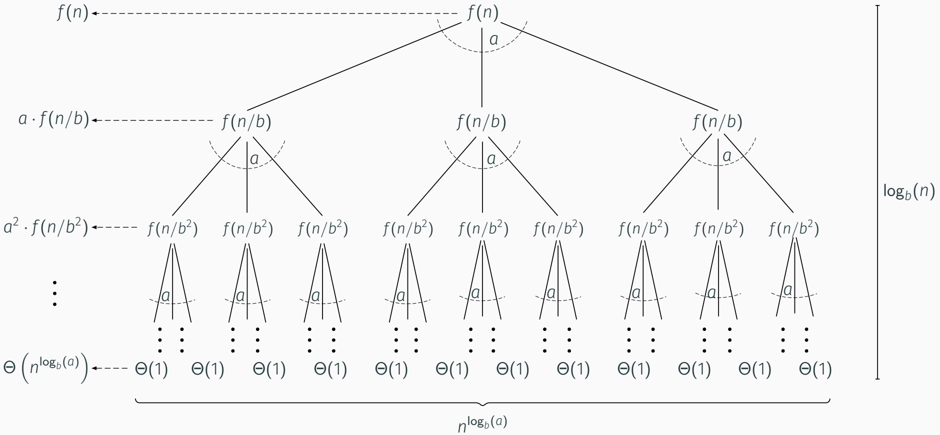
(c) $T(n) = \Theta(n)$ falls $a < b$.

- man hätte sich das f hier natürlich sparen können...
- ...und statt $f(n)$ einfach n in der Rekursion schreiben können.
  - so muss ich aber nur einen Rekursionsbaum malen... 😉

Beweis von Theorem 3.6 (1/2)

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } n = 1, \\ a \cdot T(n/b) + f(n) & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

- Beweis mittels Rekursionsbaum
- insgesamt erhalten wir $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} a^j \cdot f(n/b^j)$



Beweis von Theorem 3.6 (2/2)

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } n = 1, \\ a \cdot T(n/b) + f(n) & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

- Beweis mittels Rekursionsbaum
- insgesamt erhalten wir $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{\log_b(n)-1} a^j \cdot f(n/b^j)$
- einsetzen von $f(n) = n$

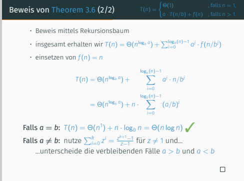
$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{\log_b(n)-1} a^j \cdot n/b^j \\ &= \Theta(n^{\log_b a}) + n \cdot \sum_{i=0}^{\log_b(n)-1} (a/b)^j \end{aligned}$$

Falls $a = b$: $T(n) = \Theta(n^1) + n \cdot \log_b n = \Theta(n \log n)$ ✓

Falls $a \neq b$: nutze $\sum_{i=0}^{k} z^i = \frac{z^{k+1}-1}{z-1}$ für $z \neq 1$ und...

...unterscheide die verbleibenden Fälle $a > b$ und $a < b$

□



- $\sum_{i=0}^{k} z^i = \frac{z^{k+1}-1}{z-1}$ ist eine Partialsumme der geometrischen Reihe

Theorem 3.7: Master-Theorem (M-Thm.)

Es seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten und $f(n)$ eine nichtnegative Funktion. Weiterhin sei

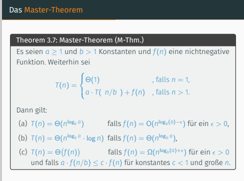
$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } n = 1, \\ a \cdot T(\; n/b \;) + f(n) & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ falls $f(n) = O(n^{\log_b(a) - \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$,

(b) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$ falls $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$,

(c) $T(n) = \Theta(f(n))$ falls $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a) + \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ und falls $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ für konstantes $c < 1$ und große n.



- man schreibt das Master Theorem meist einfach mit n/b, …
- … und meint damit symbolisch entweder $\lceil n/b \rceil$ oder $\lfloor n/b \rfloor$
- Details dazu in Cormen 4.6.2

Theorem 3.7: Master-Theorem (M-Thm.)

Es seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten und $f(n)$ eine nichtnegative Funktion. Weiterhin sei

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } n = 1, \\ a \cdot T(\lceil n/b \rceil) + f(n) & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ falls $f(n) = O(n^{\log_b(a) - \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$,

(b) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$ falls $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$,

(c) $T(n) = \Theta(f(n))$ falls $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a) + \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ und falls $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ für konstantes $c < 1$ und große n.

Theorem 3.7: Master-Theorem (M-Thm.)

Es seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten und $f(n)$ eine nichtnegative Funktion. Weiterhin sei

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } n = 1, \\ a \cdot T(\lceil n/b \rceil) + f(n) & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ falls $f(n) = O(n^{\log_b (a) - \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$,

(b) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$ falls $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$,

(c) $T(n) = \Theta(f(n))$ falls $f(n) = \Omega(n^{\log_b (a) + \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ und falls $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ für konstantes $c < 1$ und große n.

- man schreibt das Master Theorem meist einfach mit n/b, …
- … und meint damit symbolisch entweder $\lceil n/b \rceil$ oder $\lfloor n/b \rfloor$
- Details dazu in Cormen 4.6.2

Theorem 3.7: Master-Theorem (M-Thm.)

Es seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten und $f(n)$ eine nichtnegative Funktion. Weiterhin sei

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } n = 1, \\ a \cdot T(\lfloor n/b \rfloor) + f(n) & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ falls $f(n) = O(n^{\log_b (a) - \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$,

(b) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$ falls $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$,

(c) $T(n) = \Theta(f(n))$ falls $f(n) = \Omega(n^{\log_b (a) + \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ und falls $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ für konstantes $c < 1$ und große n.

Das Master-Theorem

Theorem 3.7: Master-Theorem (M-Thm.)

Es seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten und $f(n)$ eine nichtnegative Funktion. Weiterhin sei

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } n = 1, \\ a \cdot T(\lfloor n/b \rfloor) + f(n) & \text{, falls } n > 1. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ falls $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$,

(b) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$ falls $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$,

(c) $T(n) = \Theta(f(n))$ falls $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ und falls $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ für konstantes $c < 1$ und große n.

- man schreibt das Master Theorem meist einfach mit n/b, …
- … und meint damit symbolisch entweder $\lceil n/b \rceil$ oder $\lfloor n/b \rfloor$
- Details dazu in Cormen 4.6.2

Was zum...? 😳

Ist einfacher als es aussieht...

- gegeben Rekursion der Form $T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)$
- Vergleiche die Funktionen $f(n)$ und $n^{\log_b(a)}$

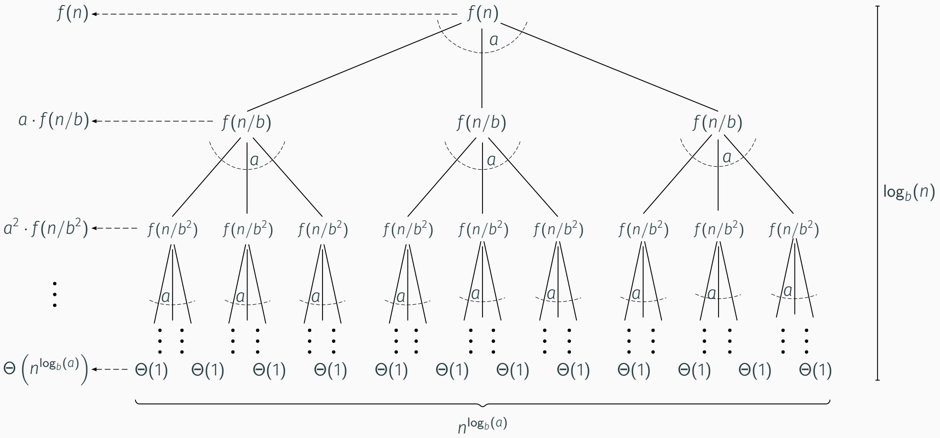
(a) $\underline{f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon}):}$
  - d. h. $f(n)$ ist polynomiell kleiner als $n^{\log_b(a)}$
  - Lösung ist $\Theta(n^{\log_b(a)})$

(b) $\underline{f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}):}$
  - d. h. $f(n)$ und $n^{\log_b(a)}$ asymptotisch gleich gros
  - Lösung ist $\Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log n) = \Theta(f(n) \cdot \log n)$

(c) $\underline{f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)-\epsilon}):}$
  - d. h. $f(n)$ ist polynomiell größer als $n^{\log_b(a)}$
  - Lösung ist $\Theta(f(n))$, wenn „Regularitätsbedingung“ erfüllt ist
  - also falls $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ für $c < 1$ und große n

(Lösung ist also im Wesentlichen die größere der Funktionen, ggfs. mit log-Faktor)

Beweisidee zu Theorem 3.7



+ mehr Rechnerei
(aber selbe Grundidee)

Beispiele

- <u>MergeSort:</u> $a = b = 2$ und $f(n) = \Theta(n)$
    - $n^{\log_b a} = n \implies f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$\implies$ (M-Thm. (b)) $T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$

- <u>$T(n) = 9T(n/3) + n$:</u> $a = 9$, $b = 3$ und $f(n) = n$
    - $n^{\log_b a} = n^2 \implies f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ für $\epsilon = 1$

$\implies$ (M-Thm. (a)) $T(n) = \Theta(n^2)$

- <u>$T(n) = 3T(n/4) + n \cdot \log n$:</u> $a = 3$, $b = 4$ und $f(n) = n \cdot \log n$
    - $n^{\log_b a} = O(n^{0.793}) \implies f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$ für $\epsilon \approx 0.2$
    - außerdem gilt

$$a \cdot f(n/b) = (3/4) \cdot n \cdot \log n \leq (3/4) \cdot n \cdot \log n = (3/4) \cdot f(n)$$

$\implies$ (M-Thm. (c)) $T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$

Wann kann man das M-Thm. nicht anwenden?

- das Master Theorem deckt viele D&C Algorithmen ab...
- ...aber längst nicht alle!

$T(n) = 2T(n/2) + n \cdot \log n$

- hier wären $a = b = 2$ und $f(n) = n \cdot \log n$
- also $n^{\log_b a} = n$...
- ...und damit $f(n) = n \cdot \log n = \Omega(n^{\log_b a})$
- somit ist $f(n)$ zwar größer als $\Omega(n^{\log_b a})$, ...
- ...aber nicht polynomiell größer!

$\Longrightarrow$ können Theorem 3.7 nicht anwenden

Wann kann man das M-Thm. nicht anwenden?

- das Master Theorem deckt viele D&C Algorithmen ab…
- …aber längst nicht alle!

$T(n) = 2T(n/2) + n \cdot \log n$

- hier wären $a = b = 2$ und $f(n) = n \cdot \log n$
- also $n^{\log_b a} = n$…
- …und damit $f(n) = n \cdot \log n = \Omega(n^{\log_b a})$
- somit ist $f(n)$ zwar größer als $\Omega(n^{\log_b a})$, …
- …aber nicht polynomiell größer!

$\Longrightarrow$ können Theorem 3.7 nicht anwenden

- polynomiell Größer: um einen Faktor n^ϵ für ein beliebiges $\epsilon > 0$

4) Quicksort

Pseudocode zu QuickSort

Algorithmus 3.4: QuickSort(A, l, r)

```
if l < r
    p ← Partition(A, l, r)
    QuickSort(A, l, p − 1)
    QuickSort(A, p + 1, r)
```

- ein alternativer D&C-Ansatz zum Sortieren
- erstmaliger Aufruf als QuickSort$(A, 1, \text{length}(A))$
- Hilfsalgorithmus Partition wählt ein Pivot Element...
- ...und nutzt es zur Aufteilung der Array Elemente

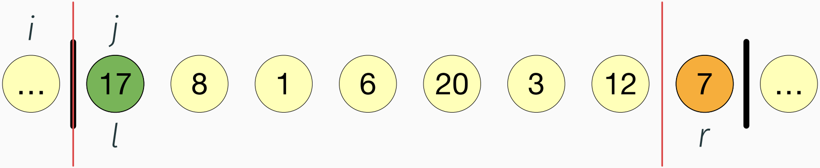
nächste Folie

Pseudocode zu PARTITION

Algorithmus 3.5: PARTITION(A, l, r)

```
x ← A[r]
i ← l − 1
for j ← l to r − 1
    if A[j] ≤ x
        i ← i + 1
        A[i] ↔ A[j]
A[i + 1] ↔ A[r]
return i + 1
```

- Pivot Element $x = A[r]$
- **Ziel:** ordne $A[l \ldots r]$ so um, dass
  - Elemente $\leq x$ links von x stehen
  - Element $> x$ rechts von x stehen

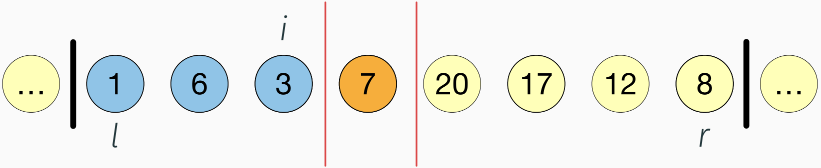


Pseudocode zu PARTITION

Algorithmus 3.5: PARTITION(A, l, r)

```
x ← A[r]
i ← l − 1
for j ← l to r − 1
    if A[j] ≤ x
        i ← i + 1
        A[i] ↔ A[j]
A[i + 1] ↔ A[r]
return i + 1
```

- Pivot Element $x = A[r]$
- **Ziel:** ordne $A[l \dots r]$ so um, dass
  - Elemente $\leq x$ links von x stehen
  - Element $> x$ rechts von x stehen



Anmerkungen zu Quicksort

- wie MergeSort auch ein D&C Algorithmus
- Umordnung findet hier vor der Teilung statt
- es existieren viele Varianten...
- ...von denen einige in der Praxis besonders effizient sind

Pivot Wahl!

Theorem 3.8

Die worst-case Laufzeit von QuickSort ist $\Theta(n^2)$.

🤔

Theorem 3.9

Die average-case Laufzeit von QuickSort ist $O(n \cdot \log n)$.

💡

Anmerkungen zu Quicksort

- wie MergeSort auch ein D&C Algorithmus
- Umordnung findet hier vor der Teilung statt
- es existieren viele Varianten...
- ...von denen einige in der Praxis besonders effizient sind

Pivot Wahl!

Theorem 3.8
Die worst-case Laufzeit von QuickSort ist $\Theta(n^2)$.

Theorem 3.9
Die average-case Laufzeit von QuickSort ist $O(n \cdot \log n)$.

- average-case LZ: durchschnittliche Laufzeit über alle Eingaben
- randomisierte Variante hat erwartete Laufzeit $\Theta(n \cdot \log n)$

Zunächst: Analyse von Partition

- sei $x = A[r]$ letztes Element von $A[l \dots r]$ vor $\textsc{Partition}(A, l, r)$
- sei $p \in \{ l, l+1, \dots, r \}$ die Ausgabe von $\textsc{Partition}(A, l, r)$

Lemma 3.5

$\textsc{Partition}(A, l, r)$ ordnet $A[l \dots r]$ so um, dass $A[p] = x$ sowie

- $A[k] \leq x$ für alle $l \leq k \leq p$ und
- $A[k] > x$ für alle $p < k \leq r$.

$\textsc{Partition}(A, l, r)$

```
x ← A[r]
i ← l − 1
for j ← l to r − 1
    if A[j] ≤ x
        i ← i + 1
        A[i] ↔ A[j]
A[i + 1] ↔ A[r]
return i + 1
```

Lemma 3.6

Es sei $n = r - l + 1$ die Größe des von Partition betrachteten Teilarrays. Partition hat Laufzeit $\Theta(n)$.

Laufzeitbeweis & Invariante

Laufzeit

Beweis von Lemma 3.6.

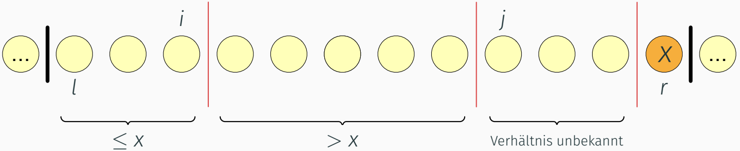
- jede Zeile für sich hat offensichtlich konstante Laufzeit
- Schleife in Zeilen 3 bis 6 wird $r - p = n - 1$ mal durchlaufen
- zusammen also $\Theta(n)$ $\square$

Geeignete Schleifeninvariante für Korrektheitsbeweis?

Schleifeninvariante $I(i, j)$

Für alle $k \in \{ l, l+1, \ldots, r \}$ gilt:

1. $l \leq k \leq i \implies A[k] \leq x$
2. $i < k < j \implies A[k] > x$
3. $k = r \implies A[k] = x$



Beweis von Lemma 3.5 (1/2)

(a) **Initialisierung:** ✓

- betrachte $I(l-1, l)$ gilt direkt vor Zeile 3
- Punkte 1 und 2 sind triviale Aussagen
- Punkt 3 gilt wegen Zeile 1

$\Longrightarrow$ $I(l-1, l)$ gilt direkt vor Zeile 3

(b) **Erhaltung:** ⁉

(c) **Terminierung:** ✓

- am Ende der Schleife gilt $I(i, r)$, also
  1. $l \leq k \leq i \implies A[k] \leq x$
  2. $i < k < r \implies A[k] > x$
  3. $k = r \implies A[k] = x$

$\Longrightarrow$ nach Zeile 7 gilt für Ausgabe $p = i + 1$:

1. $l \leq k \leq p \implies A[k] \leq x$
2. $p < k \leq r \implies A[k] > x$
3. $k = p \implies A[k] = x$

Schleifeninvariante $I(i, j)$

Für alle $k \in \{ l, l+1, \ldots, r \}$ gilt:

1. $l \leq k \leq i \implies A[k] \leq x$
2. $i < k < j \implies A[k] > x$
3. $k = r \implies A[k] = x$

PARTITION(A, l, r)

```
1  x ← A[r]
2  i ← l − 1
3  for j ← l to r − 1
4        if A[j] ≤ x
5              i ← i + 1
6              A[i] ↔ A[j]
7  A[i + 1] ↔ A[r]
8  return i + 1
```

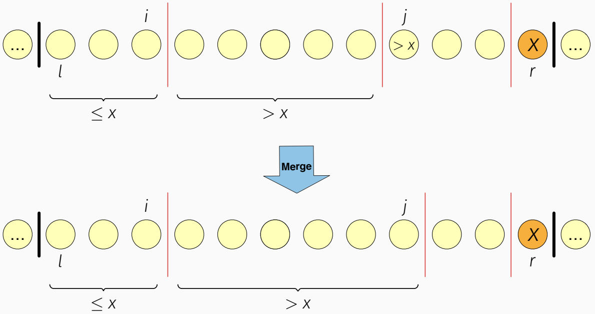
Beweis von Lemma 3.5 (2/2)

Korrekt-heit

Beweis der Erhaltung: $I(i,j) \rightarrow I(i,j+1)$

- gelte $I(i,j)$ am Anfang des j-Durchlaufs der Schleife
- Fall 1: $A[j] > x$
  - zweite Bedingung auch für $k = j$ wahr

$\Longrightarrow$ $I(i,j+1)$ gilt



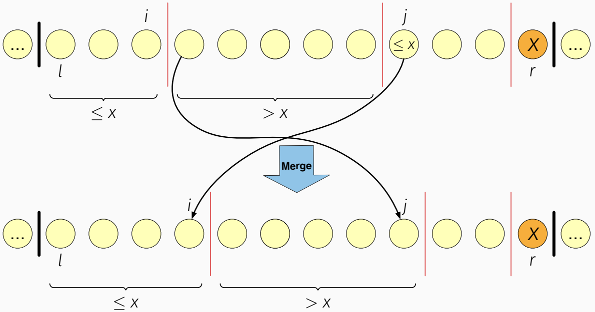

```
PARTITION(A, l, r)
x ← A[r]
i ← l − 1
for j ← l to r − 1
    if A[j] ≤ x
        i ← i + 1
        A[i] ↔ A[j]
A[i + 1] ↔ A[r]
return i + 1
```

Beweis von Lemma 3.5 (2/2)

Beweis der Erhaltung: $I(i,j) \to I(i,j+1)$ ✓

- gelte $I(i,j)$ am Anfang des j-Durchlaufs der Schleife
- Fall 2: $A[j] \leq x$
  - i wird auf $i+1$ gesetzt (Zeile 5)...
  - ...und (das neue) $A[i] > x$ wird mit $A[j] \leq x$ vertauscht (Zeile 6)

$\Longrightarrow$ $I(i,j+1)$ gilt direkt nach Zeile 6 $\square$



Partition(A, l, r)

1 $x \leftarrow A[r]$
2 $i \leftarrow l - 1$
3 **for** $j \leftarrow l$ to $r - 1$
4   **if** $A[j] \leq x$
5         $i \leftarrow i + 1$
6         $A[i] \leftrightarrow A[j]$
7 $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$
8 **return** $i + 1$

Nun können wir Quicksort analysieren!

Theorem 3.10

QuickSort löst das Sortierproblem. Das heißt der Algorithmus sortiert eine Folge von n Zahlen aufsteigend.

```
QuickSort(A, l, r)
if l < r
    p ← Partition(A, l, r)
    QuickSort(A, l, p − 1)
    QuickSort(A, p + 1, r)
```

Beweis (Terminierung).

- via Potentialfunktion $\Phi(l, r) = r - l + 1$
- betrachte beliebigen Aufruf QuickSort(A, l, r) mit $\Phi(l, r) > 1$ also $l < r$
- rekursive Aufrufe sind für Teilarrays deren Länge…
- …nichtnegativ und echt kleiner als $\Phi(l, r) = r - l + 1$ ist

$\Longrightarrow$ Φ sinkt bei jedem rekursiven QuickSort Aufruf um ≥ 1…
…und ist nach unten durch 0 beschränkt

$\Longrightarrow$ QuickSort terminiert (Rekursionstiefe $\leq r - l$)

Nun können wir Quicksort analysieren!

Theorem 3.10

QuickSort löst das Sortierproblem. Das heißt der Algorithmus sortiert eine Folge von n Zahlen aufsteigend.

```
QuickSort(A, l, r)
if l < r
    p ← Partition(A, l, r)
    QuickSort(A, l    , p − 1)
    QuickSort(A, p + 1, r    )
```

Beweis (Terminierung).

- via Potentialfunktion $\Phi(l, r) = r - l + 1$
- betrachte beliebigen Aufruf QuickSort(A, l, r) mit $\Phi(l, r) > 1$ also $l < r$
- rekursive Aufrufe sind für Teilarrays deren Länge…
- …nichtnegativ und echt kleiner als $\Phi(l, r) = r - l + 1$ ist

$\Longrightarrow$ Φ sinkt bei jedem rekursiven QuickSort Aufruf um ≥ 1…
…und ist nach unten durch 0 beschränkt

$\Longrightarrow$ QuickSort terminiert (Rekursionstiefe $\leq r - l$)

- beachte: nach Lemma 3.6 terminiert auch der Aufruf von Partition!

Nun können wir Quicksort analysieren!

Theorem 3.10

QuickSort löst das Sortierproblem. Das heißt der Algorithmus sortiert eine Folge von n Zahlen aufsteigend.

QuickSort(A, l, r)

```
1  if l < r
2      p ← Partition(A, l, r)
3      QuickSort(A, l     , p − 1)
4      QuickSort(A, p + 1, r     )
```

Beweis (Korrekte Sortierung).

- via Induktion über $\Phi(l, r) = r - l + 1$
- IA: für $\Phi(l, r) \leq 1$ ist $A[l \dots r]$ trivialerweise sortiert — Ind. Anfang
- IS: sei $\Phi(l, r) = i > 1$ und QuickSort korrekt für $\Phi(l, r) < i$ — Ind. Schritt
  - nach Zeile 2 gilt (folgt aus Lemma 3.5)
    - alle Werte in $A[l \dots p-1]$ sind $\leq A[p]$
    - alle Werte in $A[p+1 \dots r]$ sind $> A[p]$
  - nach IA sortieren Zeilen 3 und 4 $A[l \dots p-1]$ und $A[p+1 \dots r]$
  - zusammen folgt korrekte Sortierung von $A[l \dots r]$ $\square$

Nun können wir Quicksort analysieren!

Theorem 3.10

QuickSort löst das Sortierproblem. Das heißt der Algorithmus sortiert eine Folge von n Zahlen aufsteigend.

```
QuickSort(A, l, r)
1 if l < r
2     p ← Partition(A, l, r)
3     QuickSort(A, l    , p − 1)
4     QuickSort(A, p + 1, r    )
```

Beweis (Korrekte Sortierung).

- via Induktion über $\Phi(l,r) = r - l + 1$
- IA: für $\Phi(l,r) \leq 1$ ist $A[l \dots r]$ trivialerweise sortiert
- IS: sei $\Phi(l,r) = i > 1$ und QuickSort korrekt für $\Phi(l,r) < i$
  - nach Zeile 2 gilt (folgt aus Lemma 3.5)
    - alle Werte in $A[l \dots p-1]$ sind $\leq A[p]$
    - alle Werte in $A[p+1 \dots r]$ sind $> A[p]$
  - nach IA sortieren Zeilen 3 und 4 $A[l \dots p-1]$ und $A[p+1 \dots r]$
  - zusammen folgt korrekte Sortierung von $A[l \dots r]$ □

Ind. Anfang
Ind. Schritt

- beachte: nach Lemma 3.6 terminiert auch der Aufruf von Partition!

Worst-case vs Best-case Laufzeit von Quicksort

Beweisskizze Theorem 3.8.

worst-case LZ $\Theta(n^2)$

- Laufzeitrekursion für Laufzeit $T(n)$ von QUICKSORT:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & , n \leq 1, \\ \max_{0 \leq q < n} \left(T(q) + T(n-q-1)\right) + \Theta(n) & , n > 1. \end{cases}$$

- rate Laufzeit $\Theta(n^2)$ und beweise Laufzeit per Induktion
- Details: DIY-Beweis $\square$

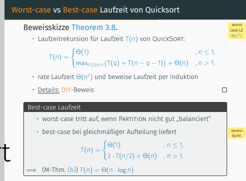
Best-case Laufzeit

- worst-case tritt auf, wenn PARTITION nicht gut „balanciert"
- best-case bei gleichmäßiger Aufteilung liefert

verein-facht

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & , n \leq 1, \\ 2 \cdot T(n/2) + \Theta(n) & , n > 1. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ (M-Thm. (b)) $T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$



- Der Induktionsbeweis für die worst-case LZ von QuickSort muss für die obere und untere Laufzeitschranke geführt werden
- Laufzeit $\Theta(n^2)$ auch für bereits sortierte Folge
- InsertionSort hat in dem Fall nur lineare Laufzeit

Average-case Laufzeit von Quicksort

- Erinnerung Theorem 3.9:
  average-case Laufzeit von QUICKSORT ist $O(n \log n)$
- Was ist average-case Laufzeit?
  - betrachte alle Permutationen der n Eingabezahlen
  - berechne für jede Permutation die Laufzeit von QUICKSORT
  - average-case LZ ist Durchschnitt all dieser Laufzeiten
- Alternative Sichtweise:
  - wähle als Eingabe uniform zufällige Permutation der Länge n
  - Was ist die erwartete Laufzeit für diese Eingabe?

Laufzeit von QuickSort für zufällige Permutation (1/2)

- sei $Q_E(n)$ der erwartete LZ von QuickSort für...
- ...eine uniform zufällig gewählte Permutation der Länge n

$\Longrightarrow$ $A[n]$ ist i-kleinste Zahl mit W'keit $1/n$ $(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})$

- also

verein-
facht

$$Q_E(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot (Q_E(i-1) + Q_E(n-i)) + c \cdot n$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} \cdot Q_E(k) + c \cdot n$$

- dies ist equivalent zu $n \cdot Q_E(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cdot Q_E(k) + c \cdot n^2$
- analog gilt für $n-1$ statt n
  $(n-1) \cdot Q_E(n-1) = \sum_{k=0}^{n-2} 2 \cdot Q_E(k) + c \cdot (n-1)^2$
- als Differenz ergibt sich

$$n \cdot Q_E(n) - (n-1) \cdot Q_E(n-1) = 2Q_E(n-1) + c \cdot 2(n-1)$$

Laufzeit von QUICKSORT für zufällige Permutation (1/2)

- sei $Q_E(n)$ der erwartete LZ von QUICKSORT für...
- ...eine uniform zufällig gewählte Permutation der Länge n

$\Longrightarrow$ $A[n]$ ist i-kleinste Zahl mit W'keit $1/n$ ($\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$)

- also

verein-
facht

$$\begin{aligned} Q_E(n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot (Q_E(i-1) + Q_E(n-i)) + c \cdot n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} \cdot Q_E(k) + c \cdot n \end{aligned}$$

- dies ist equivalent zu $n \cdot Q_E(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cdot Q_E(k) + c \cdot n^2$
- analog gilt für $n-1$ statt n
  $(n-1) \cdot Q_E(n-1) = \sum_{k=0}^{n-2} 2 \cdot Q_E(k) + c \cdot (n-1)^2$
- als Differenz ergibt sich

$$n \cdot Q_E(n) - (n-1) \cdot Q_E(n-1) = 2Q_E(n-1) + c \cdot 2(n-1)$$

- Vereinfachung: nehmen Gleichheit (statt getrennte obere/untere Schranken) im worst-case an
- Subtilität: uniforme Permutation kann unabhängig auf allen Rekursionsstufen angenommen werden

Laufzeit von QuickSort für zufällige Permutation (2/2)

- was wir umstellen können zu

$$n \cdot Q_E(n) = (n+1) \cdot Q_E(n-1) + c \cdot 2(n-1)$$

- und schließlich zu

$$\frac{Q_E(n)}{n+1} = \frac{Q_E(n-1)}{n} + 2c \cdot \frac{n-1}{n \cdot (n+1)} \leq \frac{Q_E(n-1)}{n} + \frac{2c}{n}$$

- sukzessives Einsetzen liefert

$$\frac{Q_E(n)}{n+1} \leq \frac{Q_E(n-1)}{n} + \frac{2c}{n} \leq \frac{Q_E(n-2)}{n} + \frac{2c}{n-1} + \frac{2c}{n}$$

$$\leq \cdots \leq \frac{Q_E(1)}{2} + 2c \cdot \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \leq \frac{Q_E(1)}{2} + 2c \cdot \ln n$$

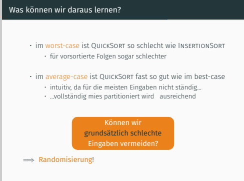
$$\boxed{\Longrightarrow \quad Q_E(n) = O(n \log n)}$$

Was können wir daraus lernen?

- im worst-case ist QuickSort so schlecht wie InsertionSort
  - für vorsortierte Folgen sogar schlechter
- im average-case ist QuickSort fast so gut wie im best-case
  - intuitiv, da für die meisten Eingaben nicht ständig…
  - …vollständig mies partitioniert wird   ausreichend

Können wir grundsätzlich schlechte Eingaben vermeiden?

$\Longrightarrow$ Randomisierung!



- Gute LZ auch wenn PARTITION nicht perfekt partitioniert!
- z. B. Partitiosgrößen in $[(1/100) \cdot n, (99/100) \cdot n]$
- generell reicht beliebige Konstante ϵ mit Partitionsgrößen in $[\epsilon \cdot n, (1-\epsilon) \cdot n]$ für logarithmische LZ
- selbst gelegentliche worst-case Partitionen sind ok

RndQuickSort

Wie könnte man QuickSort gut randomisieren?

Algorithmus 3.6: RndPartition(A, l, r)

$i \leftarrow \text{random}(l, r)$
$A[r] \leftrightarrow A[i]$
return Partition(A, l, r)

Algorithmus 3.7: RndQuickSort(A, l, r)

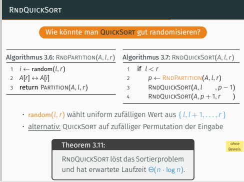
if $l < r$
  $p \leftarrow$ RndPartition(A, l, r)
  RndQuickSort$(A, l, p-1)$
  RndQuickSort$(A, p+1, r)$

- random(l, r) wählt uniform zufälligen Wert aus $\{l, l+1, \ldots, r\}$
- alternativ: QuickSort auf zufälliger Permutation der Eingabe

Theorem 3.11:

RndQuickSort löst das Sortierproblem und hat erwartete Laufzeit $\Theta(n \cdot \log n)$.

ohne Beweis



- Erwartungswert über dem Zufall aus den RndPartition Aufrufen

Abschließende Bemerkungen zu QuickSort

- sollte als Familie von Algorithmen verstanden werden
- im worst-case zwar schlecht, aber einige Varianten…
- …im Durchschnitt / Erwartungswert sehr effizient
  - Extrem erfolgreich in der Praxis!
- beste Partitionierung durch Medians als Pivot Element

$\Longrightarrow$ viele Varianten approximieren Median effizient

Wie könnte man einen
worst-case $\Theta(n \log n)$
QuickSort Algorithmus bekommen?

Abschließende Bemerkungen zu QUICKSORT

- sollte als Familie von Algorithmen verstanden werden
- im worst-case zwar schlecht, aber einige Varianten…
- …im Durchschnitt / Erwartungswert sehr effizient
  - Extrem erfolgreich in der Praxis!
- beste Partitionierung durch Medians als Pivot Element

$\Longrightarrow$ viele Varianten approximieren Median effizient

Wie könnte man einen worst-case $\Theta(n \log n)$ QUICKSORT Algorithmus bekommen?

- Median kann in linearer Zeit berechnet werden
- könnten also vor PARTITION immer median berechnen und als Pivot Element benutzen
- da Partition auch lineare LZ hat, ändert sich nichts an der asymptotischen LZ
- In der Praxis aber deutlich schlechter!

5) Heapsort

Motivation & Idee

- MaxSearch(A) gebe bei Eingabe eines Arrays...
- ...den Index eines maximalen Elementes zurück
- betrachte folgendes Sortierverfahren:

Algorithmus 3.8: MaxSort(A)

for $i \leftarrow$ **length**(A) downto 2
    $m \leftarrow$ MaxSearch($A[1 \ldots i]$)
    $A[m] \leftrightarrow A[i]$

$\Longrightarrow$ naive Implementierung hat Laufzeit $\Theta(n^2)$

Geht das auch schneller?!

- <u>beachte:</u> mehrfache Maximum-Suche auf ähnlichen Daten!

Ziele

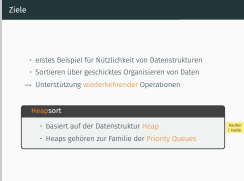
- erstes Beispiel für Nützlichkeit von Datenstrukturen
- Sortieren über geschicktes Organisieren von Daten

$\rightsquigarrow$ Unterstützung wiederkehrender Operationen

Heapsort

- basiert auf der Datenstruktur Heap
- Heaps gehören zur Familie der Priority Queues

Haufen / Halde



- Priority Queus: Prioritätswarteschlangen

Priority Queue

- sei U die Menge möglicher Elemente (Zahlen, Strings, ...) Univer-sium
- sei M die Menge der aktuelle gespeicherten Elemente
- jedes $e \in U$ sei über numerischen Wert $\mathsf{key}(e)$ identifiziert

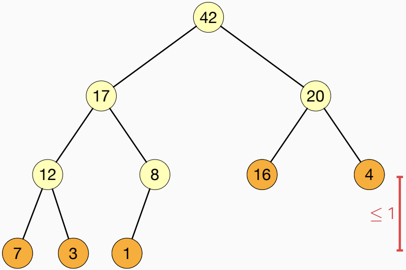
Operationen einer Priority Queue

- $\max(M)$: gib $e \in M$ mit maximalem $\mathsf{key}(e)$ aus
- $\textsc{Insert}(M, e)$: $M := M\ cup \{ e \}$
- $\textsc{DeleteMax}(M)$: wie $\max(M)$, aber zusätzlich $M := M \setminus \{ e \}$

Priority Queues in Form von Heaps

Idee

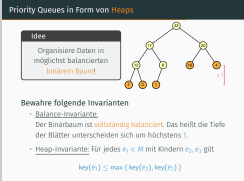
Organisiere Daten in möglichst balancierten binärem Baum!



Bewahre folgende Invarianten

- Balance-Invariante:
  Der Binärbaum ist vollständig balanciert. Das heißt die Tiefe der Blätter unterscheiden sich um höchstens 1.
- Heap-Invariante: Für jedes $e_1 \in M$ mit Kindern e_2, e_3 gilt

$$\mathrm{key}(e_1) \leq \max\{\mathrm{key}(e_2), \mathrm{key}(e_3)\}$$

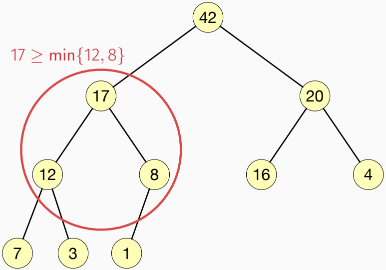


- Definition für max-heap; analoge Definition für min-heap

Priority Queues in Form von Heaps

Idee

Organisiere Daten in möglichst balancierten binärem Baum!



Bewahre folgende Invarianten

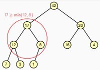
- Balance-Invariante:
  Der Binärbaum ist vollständig balanciert. Das heißt die Tiefe der Blätter unterscheiden sich um höchstens 1.
- Heap-Invariante: Für jedes $e_1 \in M$ mit Kindern e_2, e_3 gilt

$$\text{key}(e_1) \leq \max\{\,\text{key}(e_2), \text{key}(e_3)\,\}$$

Priority Queues in Form von Heaps

Idee

Organisiere Daten in möglichst balancierten binärem Baum!



Bewahre folgende Invarianten

- Balance-Invariante:
  Der Binärbaum ist vollständig balanciert. Das heißt die Tiefe der Blätter unterscheiden sich um höchstens 1.
- Heap-Invariante: Für jedes $e_1 \in M$ mit Kindern e_2, e_3 gilt

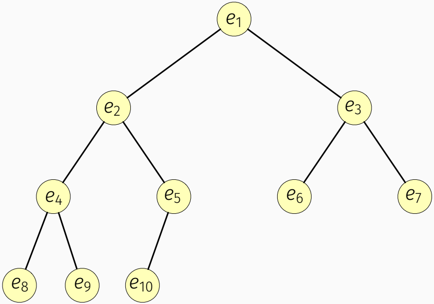
$$\mathrm{key}(e_1) \leq \max\{\mathrm{key}(e_2), \mathrm{key}(e_3)\}$$

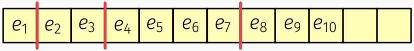
- Definition für max-heap; analoge Definition für min-heap

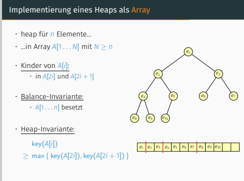
Implementierung eines Heaps als Array

- heap für n Elemente...
- ...in Array $A[1\ldots N]$ mit $N \geq n$
- Kinder von $A[i]$:
    - in $A[2i]$ und $A[2i+1]$
- Balance-Invariante:
    - $A[1\ldots n]$ besetzt
- Heap-Invariante:

$$\mathrm{key}(A[i]) \geq \max\{\,\mathrm{key}(A[2i]), \mathrm{key}(A[2i+1])\,\}$$







- beachte: in der Darstellung benutzen wir oft der Einfachheit halber e sowohl für ein Element als auch für seinen key $\mathrm{key}(e)$

Definition 3.3: Heap über Array

Ein Heap über einem Array A der Größe N ist das Array A zusammen mit einem Parameter $n := \text{heapsize}(A) \leq N$ und drei Funktionen

- $\text{Parent}(i) = \lfloor i/2 \rfloor$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
- $\text{Left}(i) = 2i$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
- $\text{Right}(i) = 2i + 1$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definition 3.4: max-/min-Heap

1. Ein Heap heißt max-Heap, falls für alle $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ $\text{key}(A[\text{Parent}(i)]) \geq \text{key}(A[i])$.
2. Ein Heap heißt min-Heap, falls für alle $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ $\text{key}(A[\text{Parent}(i)]) \leq \text{key}(A[i])$.

Zu implementieren:

- max(A): trivial („return $A[1]$")
  - Laufzeit $\Theta(1)$
- INSERT(A, e): folgt
  - Ziel-Laufzeit $O(\log n)$
- DELETEMAX(A): folgt
  - Ziel-Laufzeit $O(\log n)$

Außerdem

- BUILDHEAP(A): baue aus einem beliebiges Array A einen Heap
  - naiv: Laufzeit $O(n \log n)$
  - besser: Laufzeit $O(n)$ folgt

Zu implementieren:

- max(A): trivial („return $A[1]$")
  - Laufzeit $\Theta(1)$
- $\textsc{Insert}(A, e)$: folgt
  - Ziel-Laufzeit $O(\log n)$
- $\textsc{DeleteMax}(A)$: folgt
  - Ziel-Laufzeit $O(\log n)$

Außerdem

- $\textsc{BuildHeap}(A)$: baue aus einem beliebiges Array A einen Heap
  - naiv: Laufzeit $O(n \log n)$
  - besser: Laufzeit $O(n)$ folgt

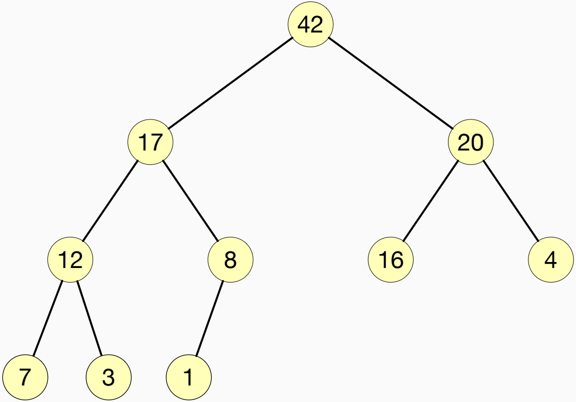
- naive Implementierung benutzt n $\textsc{Insert}(A, e)$ Operationen

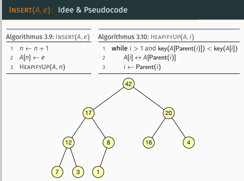
Algorithmus 3.9: INSERT(A, e)

$n \leftarrow n + 1$
$A[n] \leftarrow e$
HEAPIFYUP(A, n)

Algorithmus 3.10: HEAPIFYUP(A, i)

while $i > 1$ **and** key(A[Parent(i)]) $<$ key($A[i]$)
    $A[i] \leftrightarrow A$[Parent(i)]
    $i \leftarrow$ Parent(i)





- Balance-Invariante trivialerweise erfüllt
- müssen aber beweisen, dass INSERT(A, e) die Heap-Invariante erhält

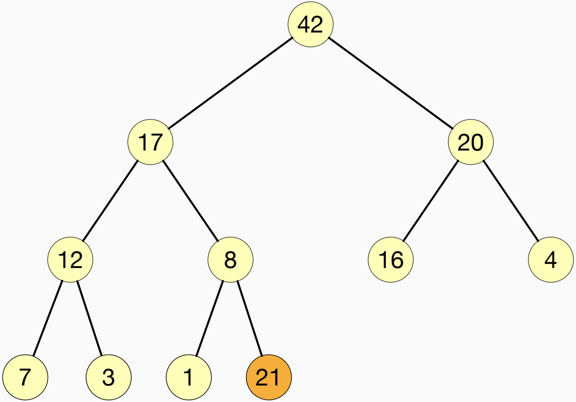
INSERT(A, e): Idee & Pseudocode

Algorithmus 3.9: INSERT(A, e)

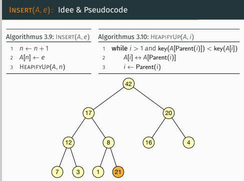
$n \leftarrow n + 1$
$A[n] \leftarrow e$
HEAPIFYUP(A, n)

Algorithmus 3.10: HEAPIFYUP(A, i)

while $i > 1$ **and** key$(A[\text{Parent}(i)]) <$ key$(A[i])$
    $A[i] \leftrightarrow A[\text{Parent}(i)]$
    $i \leftarrow \text{Parent}(i)$



INSERT(A, e): Idee & Pseudocode



- Balance-Invariante trivialerweise erfüllt
- müssen aber beweisen, dass INSERT(A, e) die Heap-Invariante erhält

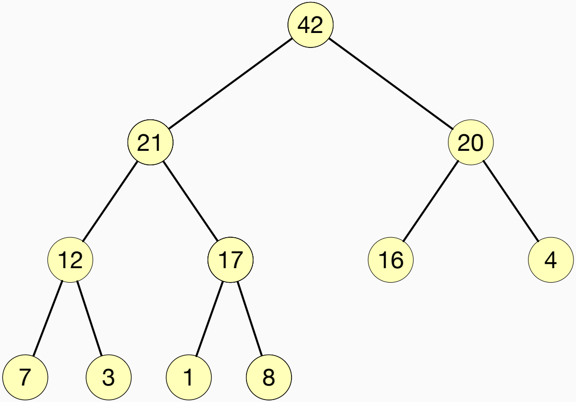
Insert(A, e): Idee & Pseudocode

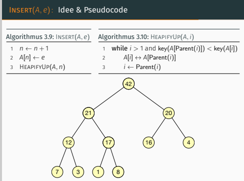
Algorithmus 3.9: Insert(A, e)

```
n ← n + 1
A[n] ← e
HeapifyUp(A, n)
```

Algorithmus 3.10: HeapifyUp(A, i)

```
while i > 1 and key(A[Parent(i)]) < key(A[i])
    A[i] ↔ A[Parent(i)]
    i ← Parent(i)
```





- Balance-Invariante trivialerweise erfüllt
- müssen aber beweisen, dass INSERT(A, e) die Heap-Invariante erhält

$\textsc{Insert}(A, e)$: Laufzeitbeweis

$\textsc{Insert}(A, e)$	Kosten
$n \leftarrow n + 1$	$O(1)$
$A[n] \leftarrow e$	$O(1)$
$\textsc{HeapifyUp}(A, n)$	$O(\log n)$

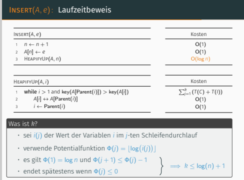
$\textsc{HeapifyUp}(A, i)$	Kosten
while $i > 1$ and $\text{key}(A[\text{Parent}(i)]) > \text{key}(A[i])$	$\sum_{j=1}^{k} (T(C) + T(I))$
$\quad A[i] \leftrightarrow A[\text{Parent}(i)]$	$O(1)$
$\quad i \leftarrow \text{Parent}(i)$	$O(1)$

Was ist k?

- sei $i(j)$ der Wert der Variablen i im j-ten Schleifendurchlauf
- verwende Potentialfunktion $\Phi(j) = \lfloor \log(i(j)) \rfloor$
- es gilt $\Phi(1) = \log n$ und $\Phi(j+1) \leq \Phi(j) - 1$
- endet spätestens wenn $\Phi(j) \leq 0$

$$\Longrightarrow k \leq \log(n) + 1$$

INSERT(A, e): Laufzeitbeweis



- $\Phi(j)$ beschreibt die Tiefe des eingefügten Elements im j-ten Schleifendurchlauf
- $\Phi(1) = 0$ ist offensichtlich
- $\Phi(j)$ sinkt in jedem Durchlauf, da das eingefügte Element ein level nach oben wandert
- bei $\Phi(j) = 0$ hat das eingefügte Element die Wurzel erreicht

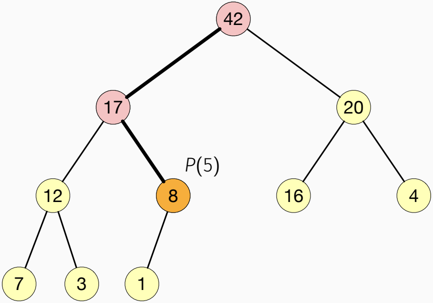
Definiere

- $P(i) = \{ \lfloor p/2^j \rfloor \mid k \in \{ 1, 2, \ldots, \lfloor \log(i) \rfloor \} \}$ parents
- $T(i) = \{ i \} \cup \{ j \in \{ 1, 2, \ldots, n \} \mid i \in P(j) \}$ subtree

Für Analyse: Nehmen o. B. d. A. an, dass $\text{key}(e) = e$

HEAPIFYUP(A, i)

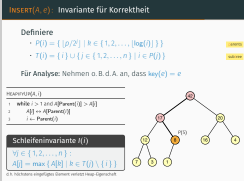
```
while i > 1 and A[Parent(i)] > A[i]
    A[i] ↔ A[Parent(i)]
    i ← Parent(i)
```



Schleifeninvariante $I(i)$

$\forall j \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$:
$A[j] = \max \{ A[k] \mid k \in T(j) \setminus \{ i \} \}$

d. h. höchstens eingefügtes Element verletzt Heap-Eigenschaft



- funktioniert, da der Inhalt der Elemente für den Algorithmus keine Rolle spielt

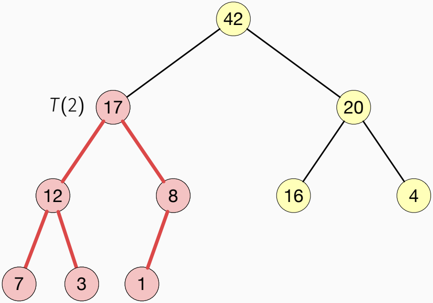
Definiere

- $P(i) = \{ \lfloor p/2^j \rfloor \mid k \in \{ 1, 2, \ldots, \lfloor \log(i) \rfloor \} \}$ parents
- $T(i) = \{ i \} \cup \{ j \in \{ 1, 2, \ldots, n \} \mid i \in P(j) \}$ subtree

Für Analyse: Nehmen o. B. d. A. an, dass $\mathrm{key}(e) = e$

$\textsc{HeapifyUp}(A, i)$

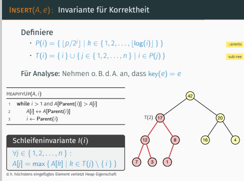
```
while i > 1 and A[Parent(i)] > A[i]
    A[i] ↔ A[Parent(i)]
    i ← Parent(i)
```



Schleifeninvariante $I(i)$

$\forall j \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$:
$A[j] = \max \{ A[k] \mid k \in T(j) \setminus \{ i \} \}$

d. h. höchstens eingefügtes Element verletzt Heap-Eigenschaft



- funktioniert, da der Inhalt der Elemente für den Algorithmus keine Rolle spielt

$\textsc{Insert}(A, e)$

```
1  n ← n + 1
2  A[n] ← e
3  HeapifyUp(A, n)
```

$\textsc{HeapifyUp}(A, i)$

```
1  while i > 1 and A[Parent(i)] < A[i]
2      A[i] ↔ A[Parent(i)]
3      i ← Parent(i)
```

(a) **Initialisierung:** ✓

- vor $\textsc{HeapifyUp}$ wurden keine Heap-Elemente verändert...
- ...sondern nur ein neues Blatt eingefügt

$\Longrightarrow$ $I(n)$ gilt trivialerweise

$\Longrightarrow$ $I(i)$ gilt direkt vor der while-Schleife (da mit $i = n$ aufgerufen)

$\textsc{Insert}(A, e)$: Korrektheitsbeweis (2/3)

$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}:$
$A[j] = \max\{A[k] \mid k \in T(j) \setminus \{i\}\}$

```
Insert(A, e)
n ← n + 1
A[n] ← e
HeapifyUp(A, n)
```

```
HeapifyUp(A, i)
while i > 1 and A[Parent(i)] < A[i]
    A[i] ↔ A[Parent(i)]
    i ← Parent(i)
```

(b) **Erhaltung:** ✓

- gelte $I(i)$ zu Beginn eines while-Schleifendurchlaufs

$\Longrightarrow$ (while-Bedingung + Invariante)

$$A[\text{Parent}(i)] < A[i]$$
$$\wedge \quad A[\text{Parent}(i)] \geq \max\{A[k] \mid k \in T(\text{Parent}(i)) \setminus \{i\}\}$$

$\Longrightarrow$ nach Vertauschung von $A[i]$ und $A[\text{Parent}(i)]$ gelten

$$A[i] \geq \max\{A[k] \mid k \in T(i) \setminus \{\text{Parent}(i)\}\}$$
$$\wedge \quad A[\text{Parent}(i)] > A[i] \geq \max\{A[k] \mid k \in T(\text{Parent}(i)) \setminus \{\text{Parent}(i)\}\}$$

- nach Anweisung „$i \leftarrow \text{Parent}(i)$“ gilt wieder die Invariante $I(i)$

$\textsc{Insert}(A, e)$: Korrektheitsbeweis (3/3)

$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}:$
$A[j] = \max\{A[k] \mid k \in T(j) \setminus \{i\}\}$

$\textsc{Insert}(A, e)$

```
n ← n + 1
A[n] ← e
HeapifyUp(A, n)
```

$\textsc{HeapifyUp}(A, i)$

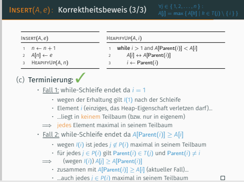
```
while i > 1 and A[Parent(i)] < A[i]
    A[i] ↔ A[Parent(i)]
    i ← Parent(i)
```

(c) Terminierung: ✓

- Fall 1: while-Schleife endet da $i = 1$
  - wegen der Erhaltung gilt $I(1)$ nach der Schleife
  - Element i (einziges, das Heap-Eigenschaft verletzen darf)...
  - ...liegt in keinem Teilbaum (bzw. nur in eigenem)

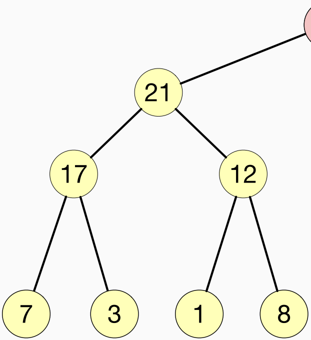
  $\Longrightarrow$ jedes Element maximal in seinem Teilbaum
- Fall 2: while-Schleife endet da $A[\mathrm{Parent}(i)] \geq A[i]$
  - wegen $I(i)$ ist jedes $j \notin P(i)$ maximal in seinem Teilbaum
  - für jedes $j \in P(i)$ gilt $\mathrm{Parent}(i) \in T(j)$ und $\mathrm{Parent}(i) \neq i$

  $\Longrightarrow$ (wegen $I(i)$) $A[j] \geq A[\mathrm{Parent}(i)]$
  - zusammen mit $A[\mathrm{Parent}(i)] \geq A[i]$ (aktueller Fall)...
  - ...auch jedes $j \in P(i)$ maximal in seinem Teilbaum $\square$



- wenn ein Element maximal in seinem Teilbaum ist, ist es natürlich insbesondere mindestens so groß wie seine Kinder, so dass die Heap-Eigenschaft gilt

DeleteMax(A): Idee & Pseudocode

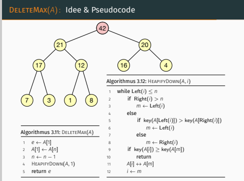


Algorithmus 3.11: DeleteMax(A)

```
e ← A[1]
A[1] ← A[n]
n ← n − 1
HeapifyDown(A, 1)
return e
```

Algorithmus 3.12: HeapifyDown(A, i)

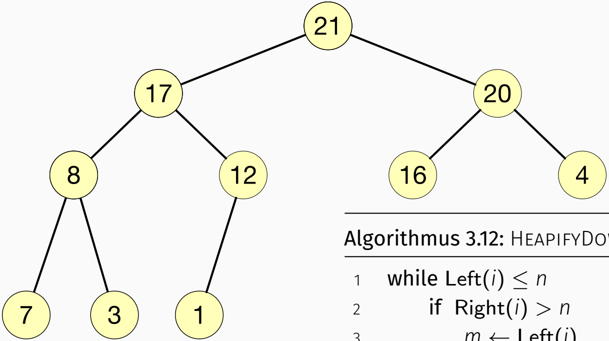
```
while Left(i) ≤ n
    if Right(i) > n
        m ← Left(i)
    else
        if key(A[Left(i)]) > key(A[Right(i)])
            m ← Left(i)
        else
            m ← Right(i)
    if key(A[i]) ≥ key(A[m])
        return
    A[i] ↔ A[m]
    i ← m
```



- HeapifyDown vergleicht Element e das (vlt.) Heap-Eigenschaft verletzt mit seinen Kindern
- ist das Element größer als seine Kinder, so ist alles in Ordnung
- andernfalls tausche mit größerem der beiden Kinder

$\Longrightarrow$ Heap-Eigenschaft wieder höchstens durch e verletzt, nun aber eine Ebene tiefer

DeleteMax(A): Idee & Pseudocode

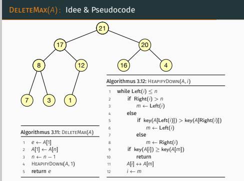


Algorithmus 3.11: DeleteMax(A)

```
e ← A[1]
A[1] ← A[n]
n ← n − 1
HeapifyDown(A, 1)
return e
```

Algorithmus 3.12: HeapifyDown(A, i)

```
while Left(i) ≤ n
    if Right(i) > n
        m ← Left(i)
    else
        if key(A[Left(i)]) > key(A[Right(i)])
            m ← Left(i)
        else
            m ← Right(i)
    if key(A[i]) ≥ key(A[m])
        return
    A[i] ↔ A[m]
    i ← m
```



- HeapifyDown vergleicht Element e das (vlt.) Heap-Eigenschaft verletzt mit seinen Kindern
- ist das Element größer als seine Kinder, so ist alles in Ordnung
- andernfalls tausche mit größerem der beiden Kinder

$\Longrightarrow$ Heap-Eigenschaft wieder höchstens durch e verletzt, nun aber eine Ebene tiefer

DeleteMax(A): Laufzeitbeweis

- Laufzeit $O(\log n)$...
- ...lässt sich analog zur Laufzeit von Insert zeigen
- nutze wieder Potentialfunktion
- jede Iteration verringert betrachtetes Level im Baum

DIY-Beweis

DeleteMax(A): Invariante für Korrektheit

Definiere

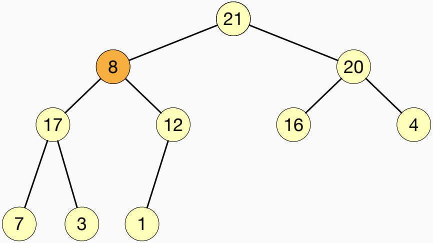
- $T(i) = \{ i \} \cup \{ j \in \{ 1, 2, \dots, n \} \mid i \in P(j) \}$

subtree

Für Analyse: Nehmen o. B. d. A. an, dass $\mathrm{key}(e) = e$

HeapifyDown(A, i)

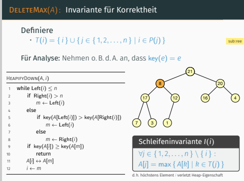
```
while Left(i) ≤ n
    if  Right(i) > n
        m ← Left(i)
    else
        if  key(A[Left(i)]) > key(A[Right(i)])
            m ← Left(i)
        else
            m ← Right(i)
    if  key(A[i]) ≥ key(A[m])
        return
    A[i] ↔ A[m]
    i ← m
```



Schleifeninvariante $I(i)$

$\forall j \in \{ 1, 2, \dots, n \} \setminus \{ i \}:$
$A[j] = \max \{ A[k] \mid k \in T(j) \}$

d. h. höchstens Element i verletzt Heap-Eigenschaft



- funktioniert, da der Inhalt der Elemente für den Algorithmus keine Rolle spielt

DELETEMAX(A): Korrektheitsbeweis

(a) **Initialisierung:** ✓

$\Longrightarrow$ $I(1)$ gilt trivialerweise zu Beginn von HEAPIFYDOWN

$\Longrightarrow$ $I(i)$ gilt direkt vor der while-Schleife (da mit $i = 1$ aufgerufen)

(b) **Erhaltung:** ✓

- o. B. d. A. sei $A[\text{Left}(i)] = \max\{A[\text{Left}(i)], A[\text{Right}(i)]\}$

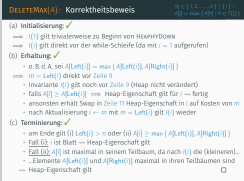
$\Longrightarrow$ $m = \text{Left}(i)$ direkt vor Zeile 9

- Invariante $I(i)$ gilt noch vor Zeile 9 (Heap nicht verändert)
- falls $A[i] \geq A[\text{Left}(i)]$ $\Longrightarrow$ Heap-Eigenschaft gilt für i $\rightsquigarrow$ fertig
- ansonsten erhält Swap in Zeile 11 Heap-Eigenschaft in i auf Kosten von m
- nach Aktualisierung $i \leftarrow m$ mit $m = \text{Left}(i)$ gilt $I(i)$ wieder

(c) **Terminierung:** ✓

- am Ende gilt (i) $\text{Left}(i) > n$ oder (ii) $A[i] \geq \max\{A[\text{Left}(i)], A[\text{Right}(i)]\}$
- Fall (i): i ist Blatt $\rightsquigarrow$ Heap-Eigenschaft gilt
- Fall (ii): $A[i]$ ist maximal in seinem Teilbaum, da nach $I(i)$ die (kleineren)...
- ...Elemente $A[\text{Left}(i)]$ und $A[\text{Right}(i)]$ maximal in ihren Teilbäumen sind

$\rightsquigarrow$ Heap-Eigenschaft gilt $\square$



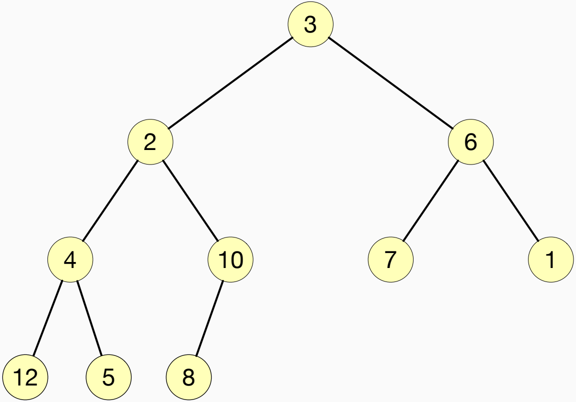
- $I(1)$ gilt, da alle Teilbäume $T(j)$ mit $j \neq 1$ höchstens ein Blatt weniger haben als vor Aufruf von DeleteMax
- falls $\mathrm{Right}(i) > n$ denken wir uns ein Dummy-Element $A[\mathrm{Right}(i)] = \infty$
- Swap erhält Heap Eigenschaft, da $A[\mathrm{Left}(i)] = \max\{A[\mathrm{Left}(i)], A[\mathrm{Right}(i)]\}$ nach unserer o. B. d. A.-Annahme

BuildHeap(A): Idee & Pseudocode

- jedes Blatt ist ein gültiger Heap
- konstruiere Heap levelweise…
- …„von unten nach oben“

Algorithmus 3.13: BuildHeap(A)

$n \leftarrow$ **heapsize**(A)
for $i \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ **downto** 1
    HeapifyDown(A, i)

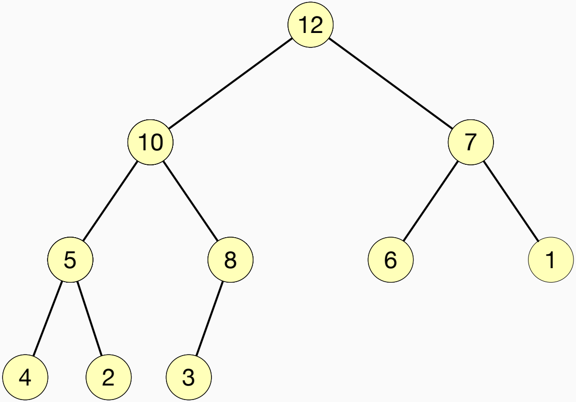


BuildHeap(A): Idee & Pseudocode

- jedes Blatt ist ein gültiger Heap
- konstruiere Heap levelweise...
- ...„von unten nach oben“

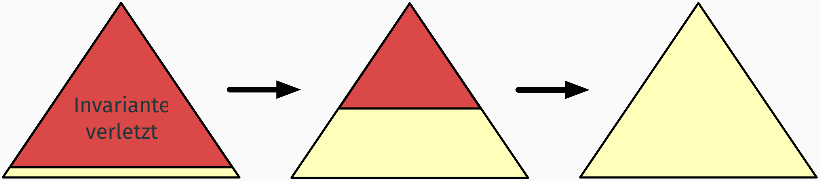
Algorithmus 3.13: BuildHeap(A)

$n \leftarrow$ heapsize(A)
for $i \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ downto 1
    HeapifyDown(A, i)



BuildHeap(A): Idee der Analyse

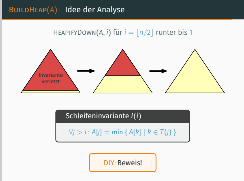
HeapifyDown(A, i) für $i = \lfloor n/2 \rfloor$ runter bis 1



Schleifeninvariante $I(i)$

$$\forall j > i : A[j] = \min \{ A[k] \mid k \in T(j) \}$$

DIY-Beweis!



- triviale Analyse gibt Laufzeit $O(n \cdot \log n)$ (pro Knoten gehen wir höchstens $\log n$ Level runter)
- man erhält lineare Laufzeit, wenn man genauer rechnet
  - Nur wenige Knoten mit großer Höhe!
  - genauer: Anzahl Knoten der Höhe h ist $\leq \lceil n/2^{h+1} \rceil$

🎉 Heapsort! 🎉

Algorithmus 3.14: HEAPSORT(A)

```
BUILDHEAP(A)
for i ← length(A) downto 2
    A[i] ← DELETEMAX(A)
```

Theorem 3.12

HEAPSORT löst das Sortierproblem und hat Laufzeit $O(n \cdot \log n)$.

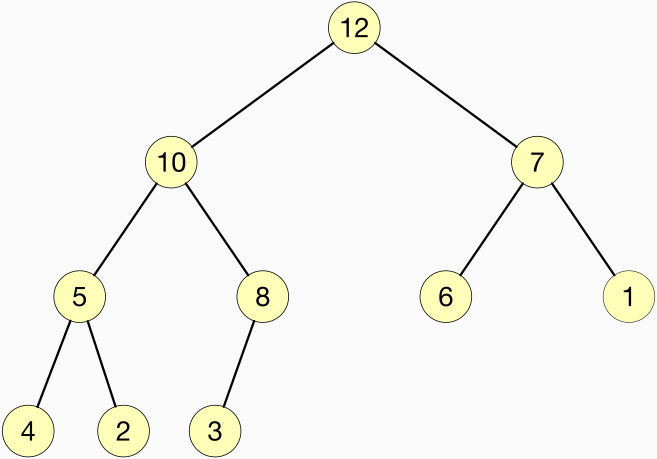
Skizze Korrektheit

- Korrektheit von BUILDHEAP(A)
- Korrektheit von DELETEMAX(A)
- Schleifeninvariante:
  „$A[i + 1 \ldots \text{length}(A)]$ enthält maximale Eingabezahlen von A aufsteigend sortiert“

Skizze Laufzeit

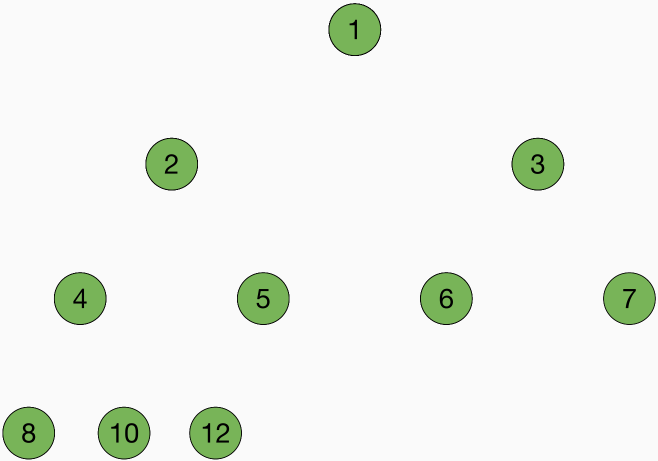
- Aufruf von BUILDHEAP: $O(n)$
- n Durchläufe der for-Schleife
- pro Durchlauf Laufzeit $O(\log n)$ (DELETEMAX)

Illustration von HeapSort



12	10	7	5	8	6	1	4	2	3

Illustration von HeapSort



1	2	3	4	5	6	7	8	10	12

6) Sortieren in linearer Zeit

...more to come!

Fragen?

😴