Matin Urdu
7urdu@informatik.uni-hamburg.de

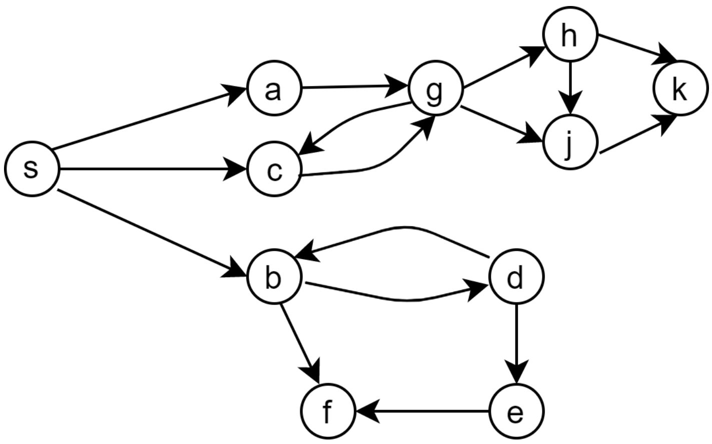
Version: 29. Januar 2021
Abgabe: 08.02.2020

Algorithmen und Datenstrukturen

Aufgabenblatt 6

Übung 1

_____/3 P.



(a) Führen Sie die Tiefensuche ausgehend von dem Knoten s aus. Falls es mehrere Möglichkeiten gibt einen Knoten auf den Stack zu pushen, entscheiden Sie sich für den Knoten mit der kleinsten lexikographischen Ordnung (alphabetische Ordnung). Zeichnen Sie den Graphen, der hierbei entsteht, mit den jeweiligen Zeitstempeln. (2 Punkte)

(b) Führen Sie die Breitensuche ausgehend von dem Knoten s aus. Falls es mehrere Möglichkeiten gibt einen Knoten zur Queue hinzuzufügen, entscheiden Sie sich für den Knoten mit der kleinsten lexikographischen Ordnung (alphabetische Ordnung). Zeichnen Sie den Graphen, der hierbei entsteht, mit den jeweiligen Distanzen. (1 Punkt)

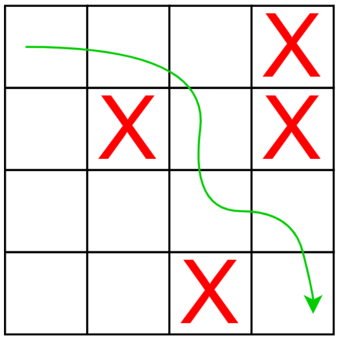
Übung 2

_____/3 P.

(a) Beschreiben Sie wie das folgende Problem als Graph modelliert werden kann. Sie befinden sich in einem quadratischen Gitter mit der Kantenlänge m. Sie starten an der Position $(1, 1)$ und möchten zur Position (m, m) gelangen. Der Output ist die Anzahl an Schritten, die man benötigt, von um zur Position (m, m) gelangen. In einem Schritt können Sie sich vertikal oder horizontal von einem freien Platz zu einem anderen freien Platz bewegen. Unten finden Sie ein Beispiel mit $m = 4$. (1 Punkt)

(b) Nehmen Sie an, dass man die Anzahl der Schritte minimieren möchte. Beschreiben Sie einen Algorithmus, der berechnet wie viele Schritte man braucht um von (1,1) zur Position (m, m) in $O(m^2)$ zu gelangen. Begründen Sie **kurz** die Korrektheit des Algorithmus', sowie die Einhaltung der asymptotischen Laufzeitschranke. **Hinweis**: Es kann auch sein, dass es keine Lösung gibt! In diesem Fall geben sollte der Algorithmus ∞ zurückgeben. (2 Punkte)

Abbildung 1: Ein möglicher Input mit $m = 4$ Der grüne Pfeil stellt den optimalen Pfad dar. Die Antwort für diese Instanz ist der Integer '6'.



Übung 3

______/3 P.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Nehmen Sie für die folgende Aufgabe an, dass Sie den Input G als Adjazenzliste kodiert erhalten. Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode an, der in $O(|V| + |E|)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten berechnet. Begründen Sie **kurz** die Korrektheit des Algorithmus', sowie die Einhaltung der asymptotischen Laufzeitschranke.
(3 Punkte)

Übung 4

______/5 P.

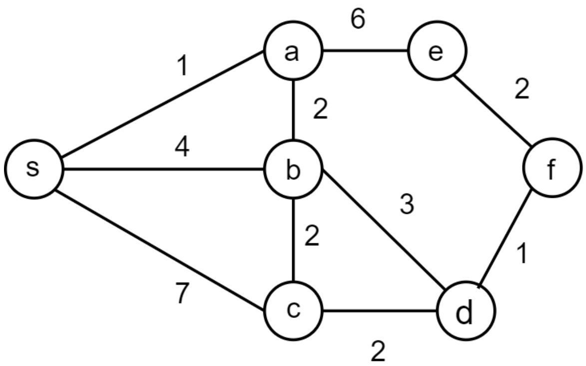
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen über Graphen und minimale Spannbäume:

(a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $e \in E$ eine Kante, die auf keinem Kreis liegt. Dann ist e in jedem minimalen Spannbaum enthalten. (2 Punkte)

(b) Sei G ein ungerichteter, zusammenhängender Graph mit paarweise verschiedenen Kantengewichten. Dann existiert nur ein einziger minimaler Spannbaum von G, d.h. der minimale Spannbaum ist eindeutig. (3 Punkte)

Übung 5

______/5 P.



(a) Wenden Sie Dijkstras Algorithmus auf den oben dargestellten Graphen an. Geben Sie tabellarisch die am Ende jeder Iteration der While-Schleife in der Queue enthaltenen Keys an. (2 Punkte)

(b) Modifizieren Sie den Pseudocode von Dijkstras Algorithmus so, dass er als Input einen Graphen, einen Startknoten s und einen Zielknoten v als Input nimmt und als Output die explizite Darstellung des kürzesten Pfades von s nach v als Sequenz von Knoten ausgibt. Begründen Sie **kurz** die Korrektheit Ihrer Lösung. (3 Punkte)

Übung 6

______/5 P.

Erarbeiten Sie sich anhand der Fachliteratur das Konzept der topologischen Sortierung von Graphen (z.B. in [Introduction to Algorithms, 3rd edition] Seite 612ff) und bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

(a) Im Allgemeinen wird die topologische Sortierung für sogenannte DAGs (directed acyclic graphs) definiert. Ist dies notwendig oder existiert auch ein vernünftiger Begriff der topologischen Sortierung für allgemeine gerichtete oder ungerichtete Graphen? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

(b) Finden Sie einen Algorithmus, der mithilfe der Tiefensuche eine topologische Sortierung zu einem gegebenen DAG bestimmt. Sollten Sie den Algorithmus der Fachliteratur entnehmen, so geben Sie bitte ihre Quelle an. (1 Punkt)

(c) Analysieren Sie die Laufzeit des Algorithmus aus b). (1 Punkt)

(d) Geben Sie in eigenen Worten einen Beweis für die Korrektheit des Algorithmus aus b) an. (2 Punkte)