FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 3 : Kontextfreie Sprachen

Präsenzteil am 21.-24. April – Abgabe am 28.-30. April 2015

Präsenzaufgabe 3.1: Beweisen Sie mittels des Pumping Lemmas, dass die Sprache

$$L = \{a^n b^m \mid n < m\}$$

nicht regulär ist.

Lösung: Angenommen L wäre regulär. Dann gilt das Pumping Lemma für L. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten das Wort $z = a^k b^{k+1}$. Wegen $k < k+1$ gilt $z \in L$ und $|z| \geq k$. Da das Pumping Lemma gilt, muss es eine Zerlegung von z in uvw geben, die die drei Eigenschaften erfüllt. Wir zeigen nun, dass *jede Zerlegung* von z in uvw, die die ersten beiden Bedingungen des Pumping Lemmas erfüllt (d.h. für die $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$ gilt), die dritte Eigenschaft nicht erfüllt. Darauf folgt dann, dass jede Zerlegung von z (in uvw) im Widerspruch zu mindestens einer der drei Bedingungen steht und somit das Pumping Lemma (doch) nicht gilt, die Annahme also falsch war und L somit nicht regulär ist. Sei also $z = uvw$ eine Zerlegung von z in uvw mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$. Zunächst ist wegen $|uv| \leq k$ und da z mit k as beginnt $uv \in \{a\}^*$. Da ferner $|v| \geq 1$ gilt, gilt sogar $v \in \{a\}^+$ und genauer gibt es ein j mit $1 \leq j \leq k$ derart, dass $v = a^j$ ist. Es ist nun $u \cdot v^3 \cdot w = a^{k+2j} b^{k+1}$ und da $j \geq 1$ gilt, ist $k + 2j > k + 1$, woraus folgt, dass $uv^3w \notin L$ ist, im Widerspruch zur dritten Eigenschaft des Pumping Lemmas. (Man beachte, dass wir hier *mehrere Zerlegungen* betrachtet haben. Das j kann nämlich Werte zwischen 1 und k annehmen, aber für *jede* dieser Zerlegungen haben wir gezeigt, dass dann die dritte Eigenschaft des Pumping Lemmas nicht gilt. Damit haben wir gezeigt, dass es *gar keine* Zerlegung von z in uvw gibt, die alle drei Eigenschaften erfüllt. Das Pumping Lemma fordert aber, dass es mindestens eine solche Zerlegung gibt (für Wörter ab einer bestimmten Länge). Damit haben wir unseren Widerspruch.)

Noch einmal der gleiche Beweis, aber kurz und kompakt:

Angenommen L wäre regulär, dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten das Wort $z = a^k b^{k+1}$. Es ist $z \in L$ und $|z| \geq k$. Wir betrachten nun eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$. Daraus folgt, dass $uv \in \{a\}^*$ und sogar $v \in \{a\}^+$. Es gibt daher ein j mit $1 \leq j \leq k$ mit $v = a^j$. Betrachten wir nun $uv^3w = a^{k+2j} b^{k+1}$, so gilt $k + 2j > k + 1$ wegen $j \geq 1$ und damit $uv^3w \notin L$ im Widerspruch zum Pumping Lemma. L ist also nicht regulär.

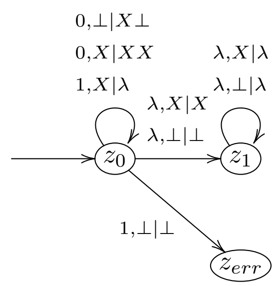
Präsenzaufgabe 3.2: Sei

$$M := \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ jedes Präfix } v \text{ von } w \text{ erfüllt } |v|_1 \leq |v|_0\}$$

(oder anders: in M ist ein Wort w genau dann, wenn kein Präfix (von w) mehr 1en als 0en hat).

1. Konstruieren Sie einen PDA A, der die Sprache M mit leerem Keller akzeptiert.

   Lösung: Wir geben eine Möglichkeit an. Der Beweis der Korrektheit folgt dann in der dritten Teilaufgabe.



2. Geben Sie für Ihren PDA eine Rechnung auf dem Wort 01001 an und eine Rechnung auf dem Wort 01011.

   Lösung: Bei dem PDA aus der vorherigen Teilaufgabe gilt für 01001:

$$\begin{aligned}(z_0, 01001, \bot) &\vdash (z_0, 1001, X\bot) \vdash (z_0, 001, \bot) \vdash (z_0, 01, X\bot) \vdash (z_0, 1, XX\bot) \\ &\vdash (z_0, \lambda, X\bot) \vdash (z_1, \lambda, X\bot) \vdash (z_1, \lambda, \bot) \vdash (z_1, \lambda, \lambda)\end{aligned}$$

   Dies ist eine Erfolgsrechnung (das Wort ist zu Ende gelesen und der Keller ist leer). Bei dem Wort 01011 ergibt sich:

$$(z_0, 01011, \bot) \vdash (z_0, 1011, X\bot) \vdash (z_0, 011, \bot) \vdash (z_0, 11, X\bot) \vdash (z_0, 1, \bot)$$

   Hier kann nun auf zwei Arten fortgefahren werden. Entweder mit $(z_0, 1, \bot) \vdash (z_1, 1, \bot) \vdash (z_1, 1, \lambda)$ oder mit $(z_0, 1, \bot) \vdash (z_{err}, \lambda, \bot)$ In beiden Fällen liegt keine Erfolgsrechnung vor (im ersten Fall ist das Wort nicht zu Ende gelesen, im zweiten Fall ist der Keller nicht leer).

3. Beweisen Sie, dass tatsächlich $L_\lambda(A) = M$ gilt (bzw. in der Notation im Skript $N(A) = M$).

   Lösung: Die Idee bei dem Automaten ist folgende: Zunächst muss das Wort mit 0 beginnen. Sonst verletzt bereits das Präfix, das nur aus dem ersten Buchstaben des Wortes besteht, die Bedingung. Für jede gelesene 0 schreiben wir nun ein X auf den Keller, für jede 1 löschen wir ein X vom Keller. Geraten wir dabei jemals in die Situation, eine 1 lesen zu wollen, während auf dem Keller nur noch das $\bot$ ist (was gleichbedeutend damit ist, dass bisher gleich viele 0en wie 1en gelesen wurden und die nun zu lesende 1 die Bedingung verletzt), so gehen wir in den Zustand z_{err}, wo nicht akzeptiert wird. Erfüllt das Wort die Bedingung, so kann es in z_0 ganz gelesen werden. Auf dem Keller befinden sich dann u.U. noch Xe. Diese können dann in z_1 gelöscht werden, ebenso wie das $\bot$. In z_1 wird dann also mit leerem Keller akzeptiert.

   Wir wollen dies per Induktion formal beweisen.

Die Aussage, die wir per Induktion über die Länge von w beweisen wollen, ist folgende:

Für jedes $w \in \{0,1\}^*$ gilt: Wenn $|v|_1 \leq |v|_0$ jedes Präfix v von w erfüllt, dann kann w von A gelesen werden und es gilt $(z_0, w, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^i\bot)$ mit $i := |w|_0 - |w|_1$.

Induktionsanfang: Ist $w = \lambda$, so gilt $(z_0, \lambda, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^0\bot)$ in 0 Schritten. (Wer möchte kann hier auch mit $w = 0$ und $w = 1$ beginnen. Muss dann den Fall $w = \lambda$, aber vorher gesondert behandeln. Dies kann manchmal nützlich sein; z.B. ist es das u.U. in der Übungsaufgabe, je nachdem wie dort der Automat konstruiert wird.)

Induktionsannahme: Gelte obige Aussage für jedes w mit $|w| = n$.

Induktionsschritt: Sei $w \in \{0,1\}^+$ mit $|w| = n+1$. Sei ferner $v \in \{0,1\}^*$ und $a \in \{0,1\}$ mit $w = va$ (a ist also das letzte Symbol von w). Nun gilt $|v| = n$ und da für jedes Präfix von w gilt, dass es mehr 0en als 1en enthält, gilt dies auch für v (denn v ist ein Präfix von w) und insb. auch für alle Präfixe von v (denn jedes Präfix von v ist auch eines von w). Auf v ist damit die Induktionannahme anwendbar! Sei $i := |v|_0 - |v|_1$. Dann gilt also $(z_0, v, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^i\bot)$ Dies ist gleichbedeutend mit $(z_0, va, \bot) \vdash^* (z_0, a, X^i\bot)$, da das letzte Symbol a gar nicht benutzt wird. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(a) Ist $a = 0$, dann folgt $(z_0, 0, X^i\bot) \vdash (z_0, \lambda, X^{i+1}\bot)$, woraus folgt, dass $w = va$ gelesen werden kann und wir wegen $i + 1 = |w|_0 - |w_1| = |v|_0 + 1 - |v_1|$ in der richtigen Konfiguration sind.

(b) Ist $a = 1$, so muss $i \geq 1$ gelten, denn wäre bereits $|v|_0 - |v|_1 = 0$, dann würde w die Bedingung $|w|_1 \leq |w|_0$ nicht mehr erfüllen. Was aber sein muss, da w auch Präfix von sich selbst ist. Ist also $a = 1$ und $i \geq 1$, so gilt ähnlich wie eben $(z_0, 1, X^i\bot) \vdash (z_0, \lambda, X^{i-1}\bot)$. Wie eben kann also $w = va$ gelesen werden und die erreichte Konfiguration hat die gewünschte Form. Dies schließt den Induktionsbeweis ab.

Mit obigem folgt die Richtung $M \subseteq N(A)$ gleich ganz schnell. Zunächst wollen wir aber noch quasi die Umkehrung von obigem zeigen. Hierzu machen wir dann eine Induktion über die *Länge der Rechnung*.

Die Aussage, die wir beweisen wollen, ist folgende:

Für jedes $w \in \{0,1\}^*$ gilt: Wenn $(z_0, w, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^i\bot)$ gilt, dann gilt $i = |w|_0 - |w|_1$ und $|v|_1 \leq |v|_0$ für jedes Präfix v von w.

Induktionsanfang: Hat die Rechnung die Länge 0, so gilt $(z_0, w, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^i\bot)$ nur mit $i = 0$ und $w = \lambda$. λ erfüllt die gefünschten Eigenschaften aber sofort.

Induktionsannahme: Gelte die obige Behauptung für jede Rechnung der Länge n.

Induktionsschritt: Sei $(z_0, w, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^i\bot)$ eine Rechnung der Länge $n+1$. Da z_0 nicht wieder betreten werden kann, kann es in der Rechnung nicht verlassen werden. Da ferner bei jeder Kante von z_0 nach z_0 ein Buchstabe gelesen wird, muss w mindestens die Länge 1 haben. Es gibt also $v \in \{0,1\}^*$ und $a \in \{0,1\}$ mit $w = va$. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

(a) Ist $a = 0$, so muss im letzten Schritt der Rechnung ein X auf den Keller geschrieben worden sein. Der letzte Übergang war also $(z_0, 0, X^{i-1}\bot) \vdash (z_0, \lambda, X^i\bot)$ (dies ist auch möglich wenn $i-1 = 0$ gilt). Damit haben wir mit $w = v0$ und $(z_0, w, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^i\bot)$ dann $(z_0, v0, \bot) \vdash^* (z_0, 0, X^{i-1}\bot) \vdash (z_0, \lambda, X^i\bot)$. Mit $(z_0, v0, \bot) \vdash^* (z_0, 0, X^{i-1}\bot)$ gilt dann aber auch $(z_0, v, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^{i-1}\bot)$, da das letzte Eingabesymbol 0 gar nicht benutzt wurde. Hierauf lässt sich die Induktionsannahme anwenden, da $|v| = n$ gilt. D.h. jedes Präfix v' von v erfüllt $|v'|_1 \leq |v'|_0$. Da jedes Präfix von v auch Präfix von w ist, ist nur noch $|w|_1 \leq |w|_0$ zu zeigen. Dies sieht man so: $|w|_1 = |v|_1 \leq |v|_0 < |v|_0 + 1 = |w|_0$. Wobei $w = v0$ benutzt wurde. Ferner gilt dabei $|v|_1 \leq |v|_0$, da wir ja gerade die

Induktionsannahme benutzt haben, um dies für jedes Präfix von v zu schlussfolgern und da v auch ein Präfix von sich selbst ist. Damit gilt insgesamt $|v'|_1 \le |v'|_0$ für jedes Präfix v' von w. Da außerdem $i - 1 = |v|_0 - |v|_1$ und mit $w = v0$ auch $|w|_0 = |v|_0 + 1$ und $|w|_1 = |v|_1$ gilt, haben wir $i = |v|_0 - |v|_1 + 1 = |w|_0 - |w|_1$ und sind fertig.

(b) Ist $a = 1$, so muss im letzten Schritt der Rechnung ein X vom Keller gelöscht worden sein. Der letzte Übergang war also $(z_0, 1, X^{i+1}\bot) \vdash (z_0, \lambda, X^i\bot)$. Analog zu obigen haben wir nun mit $w = v1$ und $(z_0, w, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^i\bot)$ dann $(z_0, v1, \bot) \vdash^* (z_0, 1, X^{i+1}\bot) \vdash (z_0, \lambda, X^i\bot)$. Mit $(z_0, v1, \bot) \vdash^* (z_0, 1, X^{i+1}\bot)$ gilt dann aber auch $(z_0, v, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^{i+1}\bot)$, da das letzte Eingabesymbol 1 gar nicht benutzt wurde. Wie eben lässt sich die Induktionsannahme auf v anwenden und es ist lediglich noch $|w|_1 \le |w|_0$ zu zeigen. Hier brauchen wir noch, dass, ebenfalls nach Induktionsvoraussetzung, $|v|_0 - |v|_1 = i + 1$ gilt. Dabei ist $i + 1 \ge 1$, da $i \ge 0$. Man beachte, dass mit $|v|_0 - |v|_1 = i + 1$ dann auch $|v|_0 = |v|_1 + 1 + i \ge |v|_1 + 1$ gilt. Nun folgt mit $w = v1$: $|w|_1 = |v|_1 + 1 \le |v|_0 = |w|_0$. Damit haben wir wieder insgesamt $|v'|_1 \le |v'|_0$ für jedes Präfix v' von w. Ferner haben wir wieder $|w|_0 - |w|_1 = |v|_0 - (|v|_1 + 1) = |v|_0 - |v|_1 - 1 = i + 1 - 1 = i$ und wir sind fertig.

Mit den beiden eben bewiesenen Behauptungen folgt die Mengengleichheit nun ganz schnell:

- $M \subseteq N(A)$. Sei $w \in M$. Aus dem eben Bewiesenem folgt $(z_0, w, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^i\bot)$ mit $i := |w|_0 - |w|_1$. Nun kann aber (auch im Falle $i = 0$) der Übergang nach z_1 geschehen. Ist $i > 0$ können nun noch die Xe gelöscht werden. Anschließend (oder im Falle $i = 0$ sofort) kann das $\bot$ gelöscht werden und der Keller ist leer. Damit gilt $w \in N(A)$.
- $N(A) \subseteq M$. Sei $w \in N(A)$. Die einzige Möglichkeit den Keller zu leeren, ist in z_1, da nur hier das Kellerbodenzeichen gelöscht werden kann. Nach Konstruktion ist es außerdem vorher nur möglich, Xe auf den Keller zu schreiben und den Übergang von z_0 aus zu machen, wobei dann kein Symbol mehr vom Eingabeband gelesen werden kann. D.h. es gibt eine Rechnung $(z_0, w, \bot) \vdash^* (z_0, \lambda, X^i\bot)$. Nach dem eben Bewiesenem gilt dann $|v|_1 \le |v|_0$ für jedes Präfix v von w und damit $w \in M$.

von
3

Übungsaufgabe 3.3: Zeigen Sie mittels des Pumping Lemmas, dass die Sprache

$$M_1 := \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$$

nicht regulär ist.

Lösung: Wir gehen zügiger vor als in der Präsenzlösung.

Angenommen M_1 wäre regulär, dann gilt das Pumping Lemma. Sei nun n die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten $z := 0^n 1^n$. Es gilt $|z| \geq n$ und $z \in M_1$. Sei nun $z = uvw$ einer Zerlegung, die $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ erfüllt. Es gilt dann $uv \in \{0\}^*$ (wegen $|uv| \leq n$ und $z = 0^n 1^n$) und sogar $v \in \{0\}^+$ (wegen $|v| \geq 1$). Es gibt folglich ein j mit $1 \leq j \leq n$ und $v = 0^j$. Wir betrachten nun das Wort $z' := uv^2 w = 0^{n+j} 1^n$. Da $|z'|_0 \neq |z'|_1$, ist $z' \notin M_1$ im Widerspruch zum Pumping Lemma (genauer: zur dritten Eigenschaft, dass $uv^i w \in M_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gelten müsste).

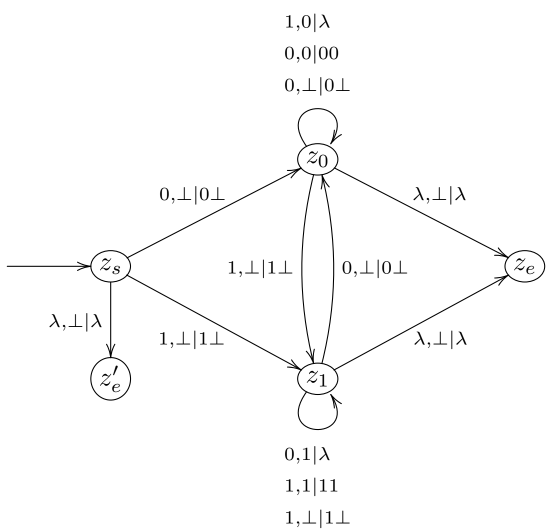
von
4

Übungsaufgabe 3.4: Sei wie oben

$$M_1 := \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}.$$

Konstruieren Sie einen PDA A mit $L_\lambda(A) = M_1$ (bzw. in der Notation im Skript $N(A) = M_1$) und zeigen Sie insbesondere, dass dies tatsächlich gilt.

Lösung: Der PDA A sei durch das folgende Diagramm gegeben.



Die Idee bei dem Automaten ist folgende: Hat man ein Teilwort v gelesen, das mehr 0en als 1en enthält, so ist der Automat in z_0 und die Differenz $|v|_0 - |v|_1$ ist (als 0en) auf dem Keller gespeichert. Entsprechend ist man in z_1, wenn v mehr 1en als 0en enthält. Auf dem Keller ist dann die Differenz $|v|_1 - |v|_0$ gespeichert (als 1en). Wichtig ist noch die folgende Idee: Sind aktuell mehr 0en als 1en gelesen (also 0en auf dem Keller), so entfernt man zunächst diese, wenn eine 1 gelesen wird und bleibt in z_0. Erst wenn dieser "Vorrat" aufgebraucht ist, wird bei Lesen einer 1 in den Zustand z_1 gewechselt (was dann ja gleichbedeutend damit ist, dass das nun bisher gelesende Teilwort mehr 1en als 0en enthält). Analog mit vertauschten 0en und 1en.

Wir wollen dies per Induktion über die Wortlänge beweisen. Zunächst bemerken wir aber noch, dass λ sowohl in M_1 ist, als auch von A akzeptiert werden kann (mittels der Kante von z_s nach z_e'). Es gilt also $\lambda \in M_1$ und $\lambda \in N(A)$. Wir können uns nachfolgend also auf Wörter konzentrieren, die mindestens die Länge 1 haben.

Wir zeigen nun folgendes per Induktion über die Länge von w:

Ein Wort $w \in \{0,1\}^+$ kann von A zu Ende gelesen werden und es gilt:

1. Wenn $i := |w|_0 - |w|_1 > 0$, dann gilt $(z_s, w, \perp) \vdash^* (z_0, \lambda, 0^i\perp)$.
2. Wenn $i := |w|_1 - |w|_0 > 0$, dann gilt $(z_s, w, \perp) \vdash^* (z_1, \lambda, 1^i\perp)$.
3. Wenn $|w|_1 - |w|_0 = 0$, dann gilt $|w| \geq 2$ und A ist entweder in z_0 oder z_1, und zwar genau dort, wo A vor Lesen des letzten Buchstabens von w bereits war, und auf dem Keller steht lediglich $\perp$.

Induktionsanfang: Ist $w = 0$ oder $w = 1$, so kann w mittels der Übergänge von z_s nach z_0 bzw. von z_s nach z_1 gelesen werden und es gilt dann wie gewünscht $(z_s, w, \perp) \vdash (z_0, \lambda, 0\perp)$ bzw. $(z_s, w, \perp) \vdash (z_1, \lambda, 1\perp)$.

Induktionsannahme: Sei $n \geq 1$. Gelte obige Aussage für jedes w mit $|w| = n$. D.h. jedes w der Länge n kann zu Ende gelesen werden und je nachdem, wie viele 0en und 1en w enthält, gilt einer der drei Fälle.

Induktionsschritt: Sei $w \in \{0,1\}^+$ mit $|w| = n + 1$. Sei nun $v \in \{0,1\}^+$ und $x \in \{0,1\}$ mit $w = vx$ (x ist also das letzte Symbol von w). Nun gilt $|v| = n$ und auf v ist die Induktionsannahme anwendbar. D.h. v kann von A gelesen werden und es gilt einer der obigen drei Fälle für v. Nun gibt es leider etliche Fallunterscheidungen zu zeigen. Jeder der drei Fälle oben kann nämlich mit $x = 0$ oder $x = 1$ kombiniert werden und für jeden der so entstehenden Fälle müssen wir zeigen, dass $vx = w$ gelesen werden kann und einer der Fälle (insb. der "dann"-Teil) zutrifft. Im einzelnen:

1. Gilt $i := |v|_0 - |v|_1 > 0$, dann gilt nach Induktionsvoraussetzungen $(z_s, v, \perp) \vdash^* (z_0, \lambda, 0^i\perp)$. Dies ist gleichbedeutend mit $(z_s, vx, \perp) \vdash^* (z_0, x, 0^i\perp)$, da das letzte Symbol x gar nicht benutzt wird. Ist $x = 0$, so folgt $(z_0, 0, 0^i\perp) \vdash (z_0, \lambda, 0^{i+1})$ und $vx = w$ konnte zu Ende gelesen werden. Zudem gilt, dass w eine 0 mehr hat als v und gleich viele 1en. Daraus folgt $|w|_0 - |w|_1 = i + 1 > 0$ und für w tritt also der erste Fall zu. An der erreichten Konfiguration $(z_0, \lambda, 0^{i+1})$ können wir erkennen, dass der "dann"-Teil, wie benötigt, erfüllt ist.

2. Gilt wie eben $i := |v|_0 - |v|_1 > 0$, aber $x = 1$. So können wir fast wie eben verfahren. Der letzte Übergang ist dann aber $(z_0, 1, 0^i\perp) \vdash (z_0, \lambda, 0^{i-1})$. w konnte also zu Ende gelesen werden und es gilt $|w|_0 - |w|_1 = i - 1$. ist nun $i > 1$, also $i - 1 > 0$, dann trifft für w der erste Fall zu, bei dem wie eben auch der "dann"-Teil erfüllt ist. Ist aber $i - 1 = 0$, dann tritt der dritte Fall ein. Alle dort verlangten Eigenschaften sind dann aber auch erfüllt. Insb. ist der Automat A im gleichen Zustand, in dem er vor Lesen des x war, und auf dem Keller steht nur noch $\perp$.

3. Gilt $i := |v|_1 - |v|_0 > 0$ und $x = 1$, dann verfahren wir analog zum ersten Fall. Es ist lediglich zu beachten, dass wir nach Lesen von v in z_1 sind und der Keller mit 1en gefüllt ist.

4. Gilt $i := |v|_1 - |v|_0 > 0$ und $x = 0$, dann verfahren wir analog zum zweiten Fall.

5. Gilt $i := |v|_1 - |v|_0 = 0$, so sind wir nach Induktionsvoraussetzung in z_0 oder z_1 und auf dem Keller steht nur noch das $\perp$. Ist $x = 0$, so kann der Automat nun, unabhängig davon ob er gerade in z_0 oder z_1 ist, nach z_0 wechseln und eine 0 auf den Keller schreiben. Wegen $|w|_0 - |w|_1 = 1$ tritt der erste Fall zu und, wie benötigt, gilt mit dem eben gesagten tatsächlich $(z_s, w, \perp) \vdash^* (z_0, \lambda, 0\perp)$.

6. Gilt $i := |v|_1 - |v|_0 = 0$ und $x = 1$, so verfahren wir analog zum ebigen Fall. Allerdings wechseln wir in den Zustand z_1 und schreiben eine 1 auf den Keller.

Mit der eben bewiesenen Behauptung folgt die Mengengleichheit ganz schnell:

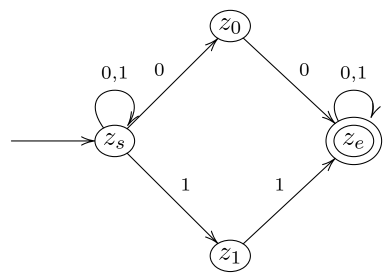
- $M \subseteq N(A)$. Sei $w \in M$. Nach dem eben Bewiesenen kann w von A gelesen werden und wegen $|w|_1 - |w|_0 = 0$ gilt der dritte Fall. A ist also entweder in der Konfiguration $(z_0, \lambda, \perp)$ oder in der Konfiguration $(z_1, \lambda, \perp)$. In beiden Fällen ist nun der Übergang nach z_e möglich, wobei der Keller geleert wird. w wurde also komplett gelesen und der Keller ist leer, woraus $w \in N(A)$ folgt.

- $N(A) \subseteq M$. Sei $w \in N(A)$ und außerdem $w \neq \lambda$ (für $w = \lambda$ hatten wir bereits zu Anfang gezeigt, dass dieses sowohl in M als auch in $N(A)$ ist). Die einzige Möglichkeit den Keller zu leeren, ist dann den Zustand z_e zu erreichen. Dies ist aber nur möglich, wenn A vorher in der Konfiguration $(z_0, \lambda, \perp)$ oder $(z_1, \lambda, \perp)$ war. Wir wissen also $(z_s, w, \perp) \vdash^* (z_0, \lambda, \perp)$ oder $(z_s, w, \perp) \vdash^* (z_1, \lambda, \perp)$. Dies kann aber nur sein, wenn $|w|_0 - |w|_1 = 0$ ist, denn wenn z.B. $i := |w|_0 - |w|_1 > 0$ ist, dann muss wegen dem oben bewiesenem noch $0^i\perp$ auf dem Keller liegen. Ebenso muss für $j := |w|_1 - |w|_0 > 0$ noch $1^j\perp$ auf dem Keller sein. Da diese Fälle also nicht sein können, bleibt der Fall $|w|_0 - |w|_1 = 0$, woraus $w \in M$ folgt. (Man beachte, dass es für diese Argumentation wichtig ist, dass die obigen drei Fälle alle Arten von Wörtern abdecken!)

von
5

Übungsaufgabe 3.5: Gegeben sei der folgende NFA A:

A :

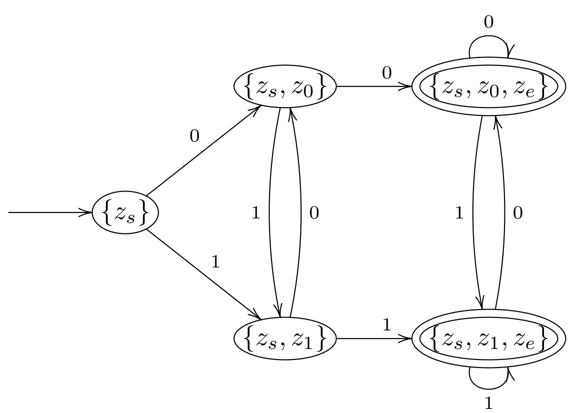


1. Bestimmen Sie $\hat{\delta}(\{z_s, z_0\}, 01)$ und $\hat{\delta}(\{z_0, z_1\}, 01)$ in A.

   Lösung: Es gilt $\hat{\delta}(\{z_s, z_0\}, 01) = \hat{\delta}(\{z_s, z_0, z_e\}, 1) = \{z_s, z_1, z_e\}$ und $\hat{\delta}(\{z_0, z_1\}, 01) = \hat{\delta}(\{z_e\}, 1) = \{z_e\}$.

2. Konstruieren Sie den Potenzautomaten zu obigem NFA A (die initiale Zusammenhangskomponente genügt).

   Lösung: Der DFA zu A, der durch die Potenzautomatenkonstruktion entsteht:



   Beim Vergleich von NFA und DFA fällt auf, dass der NFA *irgendwann* eine 00 oder 11 erwartet. Der DFA achtet aber auf genau das *erste* Auftreten dieser Zeichenkette. Ferner fällt auf, dass der Automat nicht minimal ist (d.h. man kann einen DFA konstruieren, der mit weniger Zuständen auskommt). Die beiden Endzustände können nämlich zusammengefasst werden. Man erhält durch die Konstruktion eines Potenzautomaten (zu einem NFA) also zwar einen vollständigen DFA, der die gleiche Sprache wie der NFA akzeptiert, aber es kann sein, dass es einen "besseren" DFA gibt.

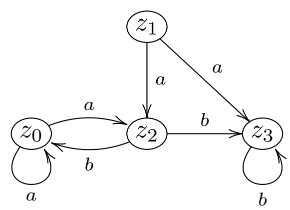
3. Susi Sorglos hat einen NFA B mit der Zustandsmenge $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ konstruiert. An-

schließend berechnet Sie $\hat{\delta}(\{z_0, z_1\}, ab)$ wie folgt:

$$\begin{array}{rcl}
\hat{\delta}(\{z_0, z_1\}, ab) & = & \hat{\delta}(\bigcup_{p \in \{z_0, z_1\}} \delta(p, a), b) \\
& = & \hat{\delta}(\delta(z_0, a) \cup \delta(z_1, a), b) \\
& = & \hat{\delta}(\{z_0, z_2\} \cup \{z_2, z_3\}, b) \\
& = & \hat{\delta}(\{z_0, z_2, z_3\}, b) \\
& = & \hat{\delta}(\bigcup_{p \in \{z_0, z_2, z_3\}} \delta(p, b), \lambda) \\
& = & \hat{\delta}(\delta(z_0, b) \cup \delta(z_2, b) \cup \delta(z_3, b), \lambda) \\
& = & \hat{\delta}(\emptyset \cup \{z_0, z_3\} \cup \{z_3\}, \lambda) \\
& = & \hat{\delta}(\{z_0, z_3\}, \lambda) \\
& = & \{z_0, z_3\}
\end{array}$$

Leider hat Susi dann die Skizze des NFA verloren. Rekonstruieren Sie den NFA B, soweit das möglich ist. Erläutern Sie auch, welche Informationen sich nicht rekonstruieren lassen.

Lösung: Folgender (Teil-)Automat lässt sich mit den gegebenen Informationen rekonstruieren:



Fehlende Informationen sind $\delta(z_2, a), \delta(z_3, a)$ und $\delta(z_1, b)$ (man beachte, dass $\delta(z_0, b) = \emptyset$ bekannt ist! Dies führt lediglich zu keiner Kante im NFA!). Des weiteren fehlen die Informationen zum Startzustand, zu den Endzuständen sowie zum Alphabet Σ. Zu letzterem ist zwar $a, b \in \Sigma$ bekannt, Σ könnte aber weitere Buchstaben enthalten. (Darüber hinaus könnten aus z_1 und z_2 noch λ-Kanten herausführen. Nur für z_0 und z_3 ist bekannt, dass dies nicht der Fall ist.)

Informationen und Unterlagen zur Veranstaltung unter:

`http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/lehre/vl/SS15/FGI1`