FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 9 : Äquivalenzen, Folgerungen und Hornformeln

Präsenzteil am 9.-12. Juni – Abgabe am 16.-19. Juni 2015

Präsenzaufgabe 9.1: Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln die Gültigkeit der folgenden Behauptungen:

1. $A \wedge \neg B \models B \vee A$
2. $\{B \wedge \neg C, (A \wedge B) \Rightarrow (C \vee \neg A)\} \models \neg A$
3. $\neg A \vee B \equiv A \Rightarrow B$

Lösung: Als Wahrheitstafeln ergeben sich:

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$B \vee A$
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

und mit $F := (A \wedge B) \Rightarrow (C \vee \neg A)$

A	B	C	$\neg A$	$\neg C$	$B \wedge \neg C$	$A \wedge B$	$C \vee \neg A$	F
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

In der ersten Tafel sieht man in den letzten beiden Spalten, dass die Behauptung gilt, da $A \wedge \neg B$ nur ein Modell hat (die vorletzte Zeile) und dies auch Modell für $B \vee A$ ist.

In der zweiten Tafel betrachtet man zunächst welche Belegungen Modell für $B \wedge \neg C$ und $(A \wedge B) \Rightarrow (C \vee \neg A)(= F)$ sind. Dies ist nur in der dritten Zeile gegeben. Da die zugehörigen Belegung auch Modell für $\neg A$ ist, gilt die Behauptung.

In der dritten Tafel sieht man, dass $\neg A \vee B$ und $A \Rightarrow B$ den gleichen Wahrheitswerteverlauf haben. Daher sind die beiden Formeln äquivalent.

Präsenzaufgabe 9.2: Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Gilt $\models F$ und $\models G$, dann gilt $F \equiv G$.
2. Gilt $F \equiv G$ und $G \models$, dann gilt auch $F \models$.
3. $F \equiv G$ genau dann, wenn $\models F \Leftrightarrow G$.

Lösung:

1. Wir wollen $F \equiv G$ zeigen, dass also jede Belegung, die F wahr macht, auch G wahr macht und jede Belegung, die G wahr macht, auch F wahr macht. Sie also $\mathcal{A}$ eine Belegung mit $\mathcal{A}(F) = 1$. Da G eine Tautologie ist, gilt auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist nun $\mathcal{B}$ eine Belegung, die G wahr macht, so gilt auch $\mathcal{B}(F) = 1$, da F ebenfalls eine Tautologie ist. Damit ist alles gezeigt. (Den zweiten Schritt kann man sich sogar sparen, wenn man stattdessen zeigt, dass jede Belegung, die F falsch macht, auch G falsch macht. Da es keine Belegung gibt, die F falsch macht, gilt dies sofort.)

2. Gelte $F \equiv G$ und sei G eine Kontradiktion. Wir wollen zeigen, dass dann auch F eine Kontradiktion ist. Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Belegung mit $\mathcal{A}(F) = 1$. Dann wäre wegen der Äquivalenz von F und G auch $\mathcal{A}(G) = 1$ im Widerspruch dazu, dass G eine Kontradiktion ist. Also gibt es $\mathcal{A}$ nicht und F ist auch eine Kontradiktion.

3. Gelte zunächst $F \equiv G$. Wir wollen zeigen, dass dann $\models F \Leftrightarrow G$ gilt. Dazu teilen wir die zu F und G passenden Belegungen in zwei Klassen ein: Jene, die F zu wahr auswerten und jene, die F zu falsch auswerten. Sei $\mathcal{A}_1$ eine Belegung mit $\mathcal{A}_1(F) = 1$. Wegen der Äquivalenz von F und G gilt dann auch $\mathcal{A}_1(G) = 1$ und damit auch $\mathcal{A}_1(F \Leftrightarrow G) = 1$. Sei $\mathcal{A}_0$ nun eine Belegung mit $\mathcal{A}_0(F) = 0$, dann gilt wie eben auch $\mathcal{A}_0(G) = 0$ und damit wieder $\mathcal{A}_0(F \Leftrightarrow G) = 1$. Da wir damit alle Belegungen betrachtet haben, ist jede Belegung Modell für $F \Leftrightarrow G$ und damit $F \Leftrightarrow G$ eine Tautologie.

   Sie andersherum $F \Leftrightarrow G$ eine Tautologie. Wir wollen zeigen, dass F und G äquivalent sind. Sei dazu $\mathcal{A}(F) = 1$. Da $F \Leftrightarrow G$ eine Tautologie ist, muss auch $\mathcal{A}(G) = 1$ sein. Sei andererseits $\mathcal{B}(F) = 0$, dann folgt wie eben aus $\models F \Leftrightarrow G$ sofort auch $\mathcal{B}(G) = 0$ und damit weist jede Belegung F und G den gleichen Wahrheitswert zu und F und G sind somit äquivalent.

Präsenzaufgabe 9.3: Bilden Sie zu

$$F := (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg B)$$

durch Äquivalenzumformungen nach dem Verfahren aus der Vorlesung eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform und eine in konjunktiver Normalform. Geben Sie bei jeder Umformung an, welche Umformungsregel Sie anwenden und testen Sie zum Abschluss, ob die resultierenden Formeln tatsächlich zu der Ursprungsformel äquivalent sind. (Üblicherweise entfällt dieser Schritt, da man ganz allgemein weiß, dass die entstehende Formel äquivalent sein muss - sofern man denn keinen Fehler gemacht hat.)

Lösung: Wie vermerken rechts, wie wir zur jeweils nächsten Zeile kommen. Anwendungen des Kommutativgesetztes führen wir dabei nicht explizit auf.

$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg B)$	Elimination von $\Rightarrow$
$\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg\neg C \vee \neg B)$	Doppelte Negation
$\equiv (\neg A \vee B) \wedge (C \vee \neg B)$	KNF
	Distributivität
$\equiv (\neg A \wedge (C \vee \neg B)) \vee (B \wedge (C \vee \neg B))$	Distributivität
$\equiv (\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge \neg B)$	DNF
	Unerfüllbarkeitsregel
$\equiv (\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge C)$	DNF

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \Rightarrow B$	$\neg C \Rightarrow \neg B$	F
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$C \vee \neg B$	$(\neg A \vee B) \wedge (C \vee \neg B)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

A	B	C	$\neg A \wedge C$	$\neg A \wedge \neg B$	$B \wedge C$	$(\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge C)$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

Die Wahrheitswertverläufe in der jeweils letzten Spalte der drei Tabellen sind identisch. Entsprechend sind die drei Formeln äquivalent.

Übungsaufgabe 9.4:

von
5

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Folgerbarkeitsbeziehung mittels einer Wahrheitstafel:

$$\{\neg B, A \Rightarrow B\} \models \neg A$$

2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Äquivalenz mittels einer Wahrheitstafel:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

3. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen: Wenn $F \equiv G$ und $G \models H$ gilt, dann gilt auch $F \models H$.

4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen: Wenn $F \equiv G$ und $G \models H$ gilt, dann gilt auch $H \models F$.

5. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen: Wenn $F_1 \equiv F_2$ und $G_1 \equiv G_2$ gilt, dann gilt $F_1 \models G_1$ genau dann, wenn $F_2 \models G_2$.

Lösung:

1. Wir erhalten die folgende Wahrheitstafel

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Die einzige Belegung, die sowohl Model für $\neg B$ als auch Modell für $A \Rightarrow B$ ist, ist jene der ersten Zeile (also $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = 0$), wie man an der dritten und vierten Spalte sieht. Diese Belegung ist aber auch Modell für $\neg A$, wie man an der letzten Spalte sieht. Damit gilt die Folgerbarkeitsbeziehung (dass $\neg A$ noch weitere Modelle hat, ist nicht wichtig).

2. Mit $F := (A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ und $G := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ erhalten wir die folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	F	G
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

An den letzten beiden Spalten kann man sehen, dass die Äquivalenz nicht gilt. So macht z.B. die Belegung $\mathcal{A}_1$ der ersten Zeile (mit $\mathcal{A}_1(A) = \mathcal{A}_1(B) = 0$) zwar G wahr, aber F falsch. (Tatsächlich ist G eine Tautologie, F nicht.)

3. Diese Behauptung gilt. Zum Beweis sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F. Wir müssen zeigen, dass (unter der Annahme $F \equiv G$ und $G \models H$) $\mathcal{A}$ auch ein Modell für H ist. Wegen $F \equiv G$ folgt zunächst aus $\mathcal{A}(F) = 1$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$. $\mathcal{A}$ ist also auch ein Modell für G. Aus $G \models H$ folgt nun, dass $\mathcal{A}$ auch ein Modell für H ist, was zu zeigen war.

4. Diese Behauptung gilt nicht und kann mit einem Gegenbeispiel widerlegt werden. Sei dazu $F := A \wedge B$ und $G := B \wedge A$ (oder auch identisch zu F). Sei ferner $H := A \vee B$. Dann gilt $F \equiv G$ und $G \models H$ (letzteres da nur die Belegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = 1$ die Formel G wahr macht und sie dann auch Modell für H ist), aber $H \models F$ gilt nicht, da z.B. $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(A) = 1$ und $\mathcal{B}(B) = 0$ ein Modell für H, nicht aber für F ist.

5. Diese Behauptung gilt. Wir zeigen zunächst, dass aus $F_1 \models G_1$ auch $F_2 \models G_2$ folgt (unter den Annahmen $F_1 \equiv F_2$ und $G_1 \equiv G_2$). Gelte also $F_1 \models G_1$ und sei nun $\mathcal{A}$ ein Modell für F_2. Zu zeigen ist nun, dass auch $\mathcal{A}(G_2) = 1$ gilt. Wegen $F_1 \equiv F_2$ folgt zunächst aus $\mathcal{A}(F_2) = 1$, dass $\mathcal{A}$ auch ein Modell für F_1 ist. Dann folgt aus $F_1 \models G_1$, dass $\mathcal{A}$ ein Modell für G_1 ist und zuletzt folgt aus $G_1 \equiv G_2$, dass $\mathcal{A}$ auch ein Modell für G_2 ist.

   Die Rückrichtung geht ganz analog: Gelte nun also $F_2 \models G_2$. Wir wollen $F_1 \models G_1$ zeigen. Sei dazu $\mathcal{B}$ ein Modell von F_1 (wir wollen zeigen, dass $\mathcal{B}$ auch ein Modell von G_1 ist). Da $F_1 \equiv F_2$ gilt, ist $\mathcal{B}$ auch ein Modell von F_2. Dann folgt aus $F_2 \models G_2$, das $\mathcal{B}$ auch ein Modell von G_2 ist und zuletzt folgt aus $G_1 \equiv G_2$, dass $\mathcal{B}$ auch ein Modell von G_1 ist. Damit sind beide Richtungen und damit die Gültigkeit der Aussage gezeigt.

von
4

Übungsaufgabe 9.5:

1. Bilden Sie zu
$$F := (\neg C \Rightarrow \neg(\neg A \vee B)) \wedge (A \vee C)$$
durch Äquivalenzumformungen nach dem Verfahren aus der Vorlesung eine äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Geben Sie dabei bei jeder Umformung an, welche Umformungsregel Sie anwenden.

2. Bilden Sie zu
$$G := ((A \Leftrightarrow B) \vee \neg B) \wedge \neg C$$
eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform mit der in der Vorlesung behandelten Wahrheitstafelmethode.

Lösung:

1. Wir verfahren wie in den Präsenzlösungen.
$$\begin{array}{lr}
(\neg C \Rightarrow \neg(\neg A \vee B)) \wedge (A \vee C) & \text{Elimination von} \Rightarrow \\
\equiv (\neg\neg C \vee \neg(\neg A \vee B)) \wedge (A \vee C) & \text{Doppelte Negation} \\
\equiv (C \vee \neg(\neg A \vee B)) \wedge (A \vee C) & \text{de Morgan} \\
\equiv (C \vee (\neg\neg A \wedge \neg B)) \wedge (A \vee C) & \text{Doppelte Negation} \\
\equiv (C \vee (A \wedge \neg B)) \wedge (A \vee C) & \text{Distributivität} \\
\equiv (C \vee A) \wedge (C \vee \neg B) \wedge (A \vee C) &
\end{array}$$
In der letzten Zeile ist die Formel nun in KNF. Man kann noch mittels Kommutativität und Idempotenz zu dem kürzeren $(C \vee A) \wedge (C \vee \neg B)$ gelangen. Diese Formel ist zur ursprünglichen Formel äquivalent, da in jedem Schritt nur äquivalente (Teil-)Formeln ersetzt wurden.

2. Zu G ergibt sich folgende Wahrheitstafel

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \Leftrightarrow B$	$(A \Leftrightarrow B) \vee \neg B$	G
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0

Da in der ersten, fünften und siebten Zeile G zu 1 ausgewertet wird, sind diese Zeile für die Erstellung der DNF relevant. Als zu G äquivalente DNF ergibt sich damit
$$G' := (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

Übungsaufgabe 9.6: Wenden Sie auf die folgenden Hornformeln den Markierungsalgorithmus an, um die Erfüllbarkeit zu prüfen. Geben Sie dabei an in welchem Schritt Aussagesymbole markiert werden und geben Sie ferner sofern möglich eine erfüllende Belegung an.

von
3

1. $(\neg A \vee G \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg E \vee \neg F) \wedge (\neg D \vee C \vee \neg B) \wedge (\neg D \vee B) \wedge D \wedge (A \vee \neg F) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E \vee \neg B)$
2. $(\neg G \vee E \vee \neg D) \wedge (\neg F \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee \neg E \vee A) \wedge B \wedge (F \vee \neg G \vee \neg D) \wedge G \wedge (D \vee \neg B) \wedge (\neg E \vee \neg F)$

Lösung:

1. Umgeformt in Implikationsschreibweise ergibt sich die äquivalente Formel

   $$(A \wedge D \Rightarrow G) \wedge (B \Rightarrow A) \wedge (E \wedge F \Rightarrow \bot) \wedge (D \wedge B \Rightarrow C) \wedge (D \Rightarrow B) \wedge (\top \Rightarrow D) \wedge (F \Rightarrow A) \wedge (C \wedge D \wedge B \Rightarrow E)$$

   Damit ergeben sich bei Anwendung des Markierungsalgorithmus folgende Markierungen:

   (a) D wird im ersten Schritt markiert (wegen $\top \Rightarrow D$).
   (b) B wird im zweiten Schritt markiert (wegen $D \Rightarrow B$).
   (c) A und C werden im dritten Schritt markiert (wegen $B \Rightarrow A$ und $D \wedge B \Rightarrow C$).
   (d) E und G werden im vierten Schritt markiert (wegen $C \wedge D \wedge B \Rightarrow E$ und $A \wedge D \Rightarrow G$).

   Nun wird nicht weiter markiert und der Algorithmus terminiert. Eine erfüllende Belegung ist durch $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(E) = \mathcal{A}(G) = 1$ und $\mathcal{A}(F) = 0$ gegeben. Man beachte, dass in diesem Fall F zu 0 ausgewertet werden *muss*, da ansonsten $E \wedge F \Rightarrow \bot$ (bzw. $(\neg E \vee \neg F)$) nicht wahr gemacht werden kann.

2. Umgeformt in Implikationsschreibweise ergibt sich die äquivalente Formel

   $$(G \wedge D \Rightarrow E) \wedge (F \Rightarrow C) \wedge (B \wedge D \wedge E \Rightarrow A) \wedge (\top \Rightarrow B) \wedge (G \wedge D \Rightarrow F) \wedge (\top \Rightarrow G) \wedge (B \Rightarrow D) \wedge (F \wedge E \Rightarrow \bot)$$

   Damit ergeben sich bei Anwendung des Markierungsalgorithmus folgende Markierungen:

   (a) B und G werden im ersten Schritt markiert (wegen $\top \Rightarrow B$ und $\top \Rightarrow G$).
   (b) D wird im zweiten Schritt markiert (wegen $B \Rightarrow D$).
   (c) E und F werden im dritten Schritt markiert (wegen $G \wedge D \Rightarrow E$ und $G \wedge D \Rightarrow F$).
   (d) $\bot$ wird im vierten Schritt markiert (wegen $F \wedge E \Rightarrow \bot$) ebenso wie A und C (wegen $B \wedge D \wedge E \Rightarrow A$ und $F \Rightarrow C$), aber nach Markierung von $\bot$ kann man aufhören.

   Da im letzten Schritt $\bot$ markiert wurde, ist die Formel unerfüllbar.

Informationen und Unterlagen zur Veranstaltung unter:

`http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/lehre/vl/SS15/FGI1`