FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 8 : Aussagenlogik: Syntax & Semantik

Präsenzteil am 2.-5. Juni – Abgabe am 9.-12. Juni 2015

Präsenzaufgabe 8.1:

1. Bestimmen Sie mittels einer Wahrheitstafel den Wahrheitswerteverlauf der folgenden Formeln und geben Sie an zu welcher Kategorie die Formeln gehören (Tautologie, Kontradiktion, kontingent usw.)

   (a) $(A \vee (\neg B \Rightarrow A))$

   (b) $((A \wedge C) \Rightarrow (\neg C \Leftrightarrow B))$

2. Seien T, K, F, G und H aussagenlogische Formeln, die keine Aussagensymbole gemein haben. Sei ferner T eine Tautologie, K eine Kontradiktion und F, G und H kontingente Formeln. Zu welcher semantischen Kategorie (tautologisch, kontradiktorisch, kontingent) gehören dann die folgenden Formeln? Begründen Sie dabei stets Ihre Aussage!

   (a) $(K \wedge T)$

   (b) $((F \vee \neg K) \wedge T)$

   (c) $((F \Leftrightarrow G) \Rightarrow (F \vee G))$

Lösung:

1. Die erste Formel enthält nur zwei verschiedene Aussagesymbole. Die Wahrheitstafel hat also $2^2 = 4$ Zeilen. Die zweite Formel enthält drei verschiedene Aussagesymbole. Die Wahrheitstafel hat in diesem Fall also $2^3 = 8$ Zeilen. Mit wachsender Anzahl an Aussagesymbolen in einer Formel wird diese Methode also (auch für Computer) schnell unpraktikabel.

   (a) Die Wahrheitstafel für $F := (A \vee (\neg B \Rightarrow A))$:

A	B	$\neg B$	$(\neg B \Rightarrow A)$	F
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1

   Da in der ersten Zeile eine Belegung angegeben ist, die die Formel falsifiziert und bspw. in der zweiten Zeile eine Belegung, die die Formel erfüllt, ist die Formel kontingent.

(b) Die Wahrheitstafel für $F := ((A \wedge C) \Rightarrow (\neg C \Leftrightarrow B))$:

A	B	C	$\neg C$	$(A \wedge C)$	$(\neg C \Leftrightarrow B)$	F
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0

Wie eben ist die Formel kontingent, da es sowohl eine erfüllende Belegung als auch eine falsifizierende Belegung gibt.

2. Man kann jede dieser Teilaufgaben ebenfalls mit Wahrheitstafeln lösen. Bisweilen geht es aber einfacher ohne.

   (a) Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung, die jedem Aussagesymbol in K und T einen Wahrheitswert zuordnet. Aufgrund der Eigenschaft einer Kontradiktion bzw. einer Tautologie gilt dann $\mathcal{A}(K) = 0$ und $\mathcal{A}(T) = 1$ und damit insgesamt aufgrund der Definition des $\wedge$-Junktors $\mathcal{A}((K \wedge T)) = 0$. $K \wedge T$ ist damit eine Kontradiktion, da jede Belegung die Formel zu 0 auswertet.

   (b) Diese Aufgaben wollen wir mit einer Wahrheitstafel lösen. Wir beachten dabei, dass T stets zu 1 und K stets zu 0 ausgewertet wird. Damit ergeben sich nur zwei Zeilen in der Wahrheitstafel:

K	T	F	$\neg K$	$(F \vee \neg K)$	$((F \vee \neg K) \wedge T)$
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1

   Die gegebene Formel ist also eine Tautologie, da der Wahrheitswerteverlauf nur 1en aufweist. Jede Belegung wertet die Formel also zu wahr aus.

   (c) Da F und G kontingent sind, kann die Prämise der Implikation falsch gemacht werden. Z.B. ergibt eine Belegung $\mathcal{A}_1$ mit $\mathcal{A}_1(F) = 0$ und $\mathcal{A}_1(G) = 1$ dann $\mathcal{A}_1((F \Leftrightarrow G)) = 0$ und damit macht $\mathcal{A}_1$ die ganze Formel wahr. Die Belegung $\mathcal{A}_2$ mit $\mathcal{A}_2(F) = \mathcal{A}_2(G) = 0$ macht hingegen die Prämisse (also $(F \Leftrightarrow G)$) wahr, aber die Konklusion (also $(F \vee G)$) falsch. Damit falsifiziert $\mathcal{A}_2$ die gegebene Formel. Die Formel ist damit insgesamt kontingent.

Präsenzaufgabe 8.2: Definieren Sie mittels einer rekursiven Definition eine Funktion $l : \mathcal{L}_{AL} \to \mathbb{N}$, die die Länge einer Formel zum Ergebnis hat. Z.B. soll $l((A \wedge \neg B)) = 6$ sein. Es soll also jedes vorkommende Symbol gezählt werden.

Beweisen Sie dann mittels struktureller Induktion, dass für alle Formeln F der Aussagenlogik gilt

$$1 + tiefe(F) \leq l(F)$$

.

Lösung: Wir definieren die Funktion l wie folgt:

1. Für jedes $A \in AS_{AL}$ ist $l(A) = 1$.
2. Für die Negation $\neg$ definieren wir $l(\neg F) = l(F) + 1$
3. Für jeden zweistelligen Junktor $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ definieren wir $l((F \circ G)) = l(F) + l(G) + 3$.

Damit zählt l genau die Anzahl der Symbole einer Formel.

Wir beweisen nun mittels struktureller Induktion, dass die Aussage $1 + tiefe(F) \leq l(F)$ für jedes $F \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt.

Induktionsanfang: Für jedes Aussagensymbol $A \in AS_{AL}$ gilt nach Definition der Tiefe und der Länge $tiefe(A) = 0$ und $l(A) = 1$ also auch $1 + tiefe(A) \leq l(A)$.

Induktionsannahme: Es seien F und G aussagenlogische Formeln, die die Behauptung erfüllen, für die also $1 + tiefe(F) \leq l(F)$ und $1 + tiefe(G) \leq l(G)$ gilt.

Induktionsschritt: Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $\neg F$. Nach Definition der Tiefe und der Länge gilt $tiefe(\neg F) = tiefe(F) + 1$ und $l(\neg F) = l(F) + 1$. Damit ist dann $tiefe(\neg F) + 1 = (tiefe(F) + 1) + 1 \leq l(F) + 1 = l(\neg F)$. Die $\leq$-Beziehung gilt dabei, da ja $tiefe(F) + 1 \leq l(F)$ nach Induktionsannahme gilt.
2. Fall: $(F \circ G)$ für ein $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Nach Definition der Tiefe und der Länge gilt nun $tiefe((F \circ G)) = max(tiefe(F), tiefe(G)) + 1$ und $l((F \circ G)) = l(F) + l(G) + 3$. Nehmen wir nun an, dass $tiefe(F) = max(tiefe(F), tiefe(G))$ gilt (der andere Fall geht analog). Dann ist damit und nach Induktionsannahme $tiefe((F \circ G)) = tiefe(F) + 1 \leq l(F)$. Ferner ist $l((F \circ G)) > l(F) + 1$ nach Definition der Länge (und da $l(G)$ nicht negativ sein kann). Insgesamt gilt dann $tiefe((F \circ G)) + 1 = tiefe(F) + 1 + 1 \leq l(F) + 1 < l((F \circ G))$, was zu zeigen war.

Schluss: Nach dem Prinzip der strukturellen Induktion ergibt sich damit: Für alle Formeln $F \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt $1 + tiefe(F) \leq l(F)$.

von
4

Übungsaufgabe 8.3: Geben Sie für jede der folgenden Formeln jeweils an, ob diese erfüllbar ist, falsifizierbar, kontingent, allgemeingültig oder unerfüllbar.

1. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$
2. $((A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B))$
3. $(((((A \wedge B) \wedge C) \wedge D) \wedge E) \Rightarrow (\neg A \vee E))$
4. $(((C \Rightarrow B) \vee A) \wedge (A \vee \neg B))$

Lösung:

1. Die Wahrheitstafel für $F := ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$:

A	B	$A \Rightarrow B$	F
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Da in der ersten und zweiten Zeile Belegungen angegeben sind, die die Formel falsifizieren und in der dritten und vierten Zeile Belegungen, die die Formel erfüllen, ist die Formel kontingent.

2. Die Wahrheitstafel für $F := ((A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B))$:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$	F
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0

Da die letzte Spalte nur 0en aufweist, ist die Formel unerfüllbar.

3. Diese Formel ist eine Tautologie (also allgemeingültig). Sei $\mathcal{A}$ eine Belegung, die jedes Aussagesymbol der Formel zu 1 auswertet, dann wird sowohl $((((A \wedge B) \wedge C) \wedge D) \wedge E)$ als auch $(\neg A \vee E)$ zu 1 ausgewertet und damit ist die Implikation wahr. Wertet eine Belegung eines der Aussagesymbole zu 0 aus, so wird die Prämisse der Implikation falsch und damit die ganze Implikation wieder wahr. Damit ist jede Belegung Modell für die gegebene Formel und diese folglich eine Tautologie.

4. Die Wahrheitstafel für $F := (((C \Rightarrow B) \vee A) \wedge (A \vee \neg B))$:

A	B	C	$\neg B$	$C \Rightarrow B$	$(C \Rightarrow B) \vee A$	$A \vee \neg B$	F
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1

Wie eben ist die Formel kontingent, da es sowohl eine erfüllende Belegung (z.B. in der ersten Zeile) als auch eine falsifizierende Belegung (z.B. in der zweiten Zeile) gibt.

von
5

Übungsaufgabe 8.4: Seien T, K, F, G und H aussagenlogische Formeln, die keine Aussagensymbole gemein haben. Sei ferner T eine Tautologie, K eine Kontradiktion und F, G und H kontingente Formeln. Zu welcher semantischen Kategorie (tautologisch, kontradiktorisch, kontingent) gehören dann die folgenden Formeln? Begründen Sie dabei stets Ihre Aussage!

1. $(F \vee \neg G)$
2. $(K \Rightarrow (F \vee \neg G))$
3. $((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \vee G))$
4. $((T \Leftrightarrow \neg K) \Rightarrow F)$
5. $((T \Leftrightarrow K) \Rightarrow (((F \vee \neg G) \wedge T) \Leftrightarrow ((\neg F \vee T) \wedge G)))$

Lösung: Alle Teilaufgaben lassen sich mit und ohne Wahrheitstafeln lösen. Benutzt man Wahrheitstafeln, muss man aber noch darstellen, an welcher Stelle in der Wahrheitstafeln die wichtigen Informationen stehen.

1. Da F und G kontingent sind und keine Aussagensymbole gemein haben, kann eine Belegung $\mathcal{A}$ gefunden werden mit $\mathcal{A}(F) = 0$ und $\mathcal{A}(G) = 1$. Nach der Definition der Semantik von $\neg$ und $\vee$ gilt dann $\mathcal{A}(F \vee \neg G) = 0$. Ebenso kann eine Belegung $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{A}'(F) = 1$ gefunden werden. Für diese gilt dann unabhängig vom Wahrheitswert für G stets $\mathcal{A}'(F \vee \neg G) = 1$. Damit ist die Formel kontingent.

   Man könnte auch mit einer Wahrheitstafel argumentieren. Diese sähe wie folgt aus

F	G	$\neg G$	$F \vee \neg G$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

   Und man sieht an der letzten Spalte, dass die gegebene Formel kontingent ist, da hier sowohl eine 0 als auch eine 1 auftritt. Man beachte, dass es nötig ist, dass F und G keine Aussagensymbole gemeinsam haben, um zu dieser Aussage (und obiger Wahrheitstafel) zu kommen. Ansonsten könnte man $F = G = A$ (mit A ein Aussagensymbol) setzen und die Formel wäre dann eine Tautologie.

2. Da K eine Kontradiktion ist, gilt $\mathcal{A}(K) = 0$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ und nach der Definition der Semantik von $\Rightarrow$ folgt damit $\mathcal{A}(K \Rightarrow (F \vee \neg G)) = 1$. Die gegebene Formel ist also eine Tautologie.

3. Wir arbeiten mit einer Wahrheitstafel. Da F und G kontingent sind und keine Aussagensymbole gemein haben, folgt mit $H := ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \vee G))$:

F	G	$F \Rightarrow G$	$F \vee G$	H
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

   Die Formel ist also kontingent, da in der ersten Zeile H zu 0 und z.B. in der zweiten H zu 1 ausgewertet wird.

4. Sei $\mathcal{A}$ eine zu T, K und F passende Belegung. Da T eine Tautologie und K eine Kontradiktion ist, gilt $\mathcal{A}(T) = 1$ und $\mathcal{A}(K) = 0$ (also $\mathcal{A}(\neg K) = 1$) und wegen der Definition der Semantik von $\Leftrightarrow$ gilt $\mathcal{A}(T \Leftrightarrow \neg K) = 1$. Da F nun kontingent ist, gilt im Falle $\mathcal{A}(F) = 1$, dass die ganze Formel wahr wird und im Falle $\mathcal{A}(F) = 0$, dass die ganze Formel falsch wird. Die gegebene Formel ist also kontingent.

5. Sie $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Da T eine Tautologie und K eine Kontradiktion ist, gilt $\mathcal{A}(T \Leftrightarrow K) = 0$ nach der Definition der Semantik von $\Leftrightarrow$. Aufgrund der Definition von $\Rightarrow$ folgt nun, dass $\mathcal{A}$ ein Modell der gegebenen Formel ist. Die Formel dieser Teilaufgabe ist also eine Tautologie.

von
3

Übungsaufgabe 8.5: Gegeben sei eine kontextfreie Grammatik mit den folgenden Produktionen

$$\begin{array}{lcl} S & \to & \neg S \mid (S \vee S) \mid (S \wedge S) \mid (S \Rightarrow S) \mid (S \Leftrightarrow S) \mid T \\ T & \to & A \mid B \mid C \mid D \mid E \end{array}$$

Dabei sollen $A, B, C, D, E, (,), \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ Terminale und S und T Nonterminale sein.

Diese Grammatik erzeugt alle aussagenlogischen Formeln, die nur die atomaren Formeln A, B, C, D und E enthalten.

Beweisen Sie mittels struktureller Induktion eine Richtung dieser Behauptung, nämlich dass tatsächlich jede aussagenlogische Formel, die nur die atomaren Formeln A, B, C, D und E enthält, von der Grammatik generiert werden kann.

Lösung: Die Definition der Syntax der Aussagenlogik wird so eingeschränkt, dass im ersten Schritt die Menge der Aussagensymbole nicht unendlich groß ist, sondern nur die Symbole A, B, C, D und E enthält. Strukturelle Induktion kann dann genau so durchgeführt werden, wie bisher, nur dass im ersten Schritt die Aussage nicht für alle Aussagensymbole gezeigt wird, sondern nur für A, B, C, D und E.

Wir zeigen nun die Aussage:

> Jede aussagenlogische Formel, die nur die atomaren Formeln A, B, C, D und E enthält, kann von der Grammatik erzeugt werden.

Der Beweis gelingt mittels struktureller Induktion.

Induktionsanfang. Die Aussage gilt für jedes Aussagesymbol $X \in \{A, B, C, D, E\}$, da in der Grammatik die Ableitung $S \Rightarrow T \Rightarrow X$ möglich ist.

Induktionsannahme. Seien F_1 und F_2 aussagenlogische Formeln, die nur die atomaren Formeln A, B, C, D oder E enthalten und die von der Grammatik erzeugt werden können.

Induktionsschritt. Fall $F = \neg F_1$. Nach Induktionsannahme gibt es in der Grammatik eine Ableitung von S zu F_1. Nutzen wir vorher die Regel $S \to \neg S$, so können wir nun die Ableitung $S \Rightarrow \neg S \stackrel{*}{\Longrightarrow} \neg F_1$ konstruieren und folglich ist $\neg F_1 \in L(G)$.

Fall $F = F_1 \vee F_2$. Nach Induktionsannahme gibt es in der Grammatik eine Ableitung $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} F_1$ und eine Ableitung $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} F_2$. Ähnlich wie eben können wir nun die Ableitung $S \Rightarrow S \vee S \stackrel{*}{\Longrightarrow} F_1 \vee S \stackrel{*}{\Longrightarrow} F_1 \vee F_2$ angeben, womit $F \in L(G)$ gezeigt ist.

Die Fälle $F = F_1 \wedge F_2$, $F = F_1 \Rightarrow F_2$ und $F = F_1 \Leftrightarrow F_2$ gehen analog unter Nutzung der Regeln $S \to S \wedge S$, $S \to S \Rightarrow S$ und $S \to S \Leftrightarrow S$.

Damit ist nach dem Prinzip der strukturellen Induktion die Behauptung bewiesen.

Informationen und Unterlagen zur Veranstaltung unter:

`http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/lehre/vl/SS15/FGI1`