FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 11 :
Aussagenlogische Resolution und Semantik der Prädikatenlogik

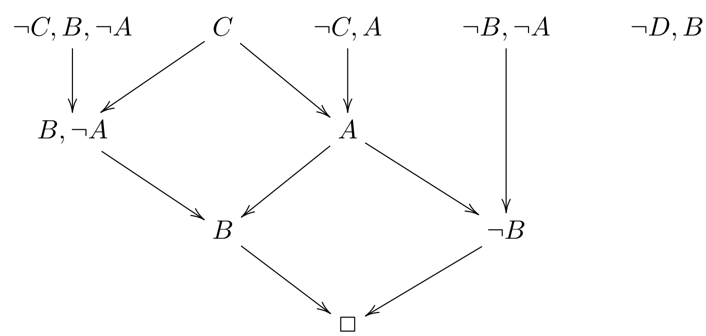
Präsenzteil am 23.-26. Juni – Abgabe am 30. Juni - 3. Juli 2015

Präsenzaufgabe 11.1: Prüfen Sie mittels Resolution, ob die folgenden Formeln erfüllbar sind:

1. $F_1 := C \wedge (\neg C \vee A) \wedge (\neg C \vee B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg D \vee B)$
2. $F_2 := (\neg D \Rightarrow B) \wedge (A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \wedge \neg C \wedge ((A \wedge D) \Rightarrow C)$

Lösung:

1. Die Formel ist unerfüllbar, wie der folgende Resolutionsgraph zeigt:

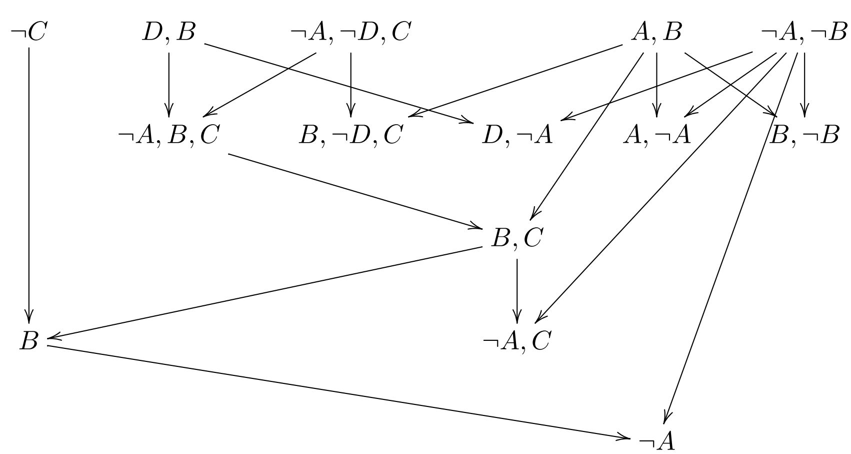


(wobei wir auf die { und } um die Klauseln verzichtet haben).

2. Zunächst bestimmen wir eine zu F_2 äquivalente Formeln in KNF. Wir erhalten

$$F_2 \equiv (D \vee B) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C \wedge (\neg A \vee \neg D \vee C)$$

Es macht nun Sinn eine Resolution zu benutzen, die einen bei der Resolventenbildung einschränkt. Wir wählen hier die P-Resolution, bei der stets eine der beteiligten Klauseln nur positive Literale enthalten darf. Wir erhalten dann als Resolutionsgraph:



Dabei haben wir keine Resolventen angegeben, die zu bereits bestehenden Klauseln führen. Z.B. würde die Resolventenbildung von $\{D, B\}$ und $\{B, \neg D, C\}$ zu $\{B, C\}$ führen, also zu einer Klausel, die wir bereits auf einem anderen Weg erhalten haben.

Da oben alle möglichen (P-)Resolventen gebildet wurden und $\square$ nicht resolviert werden konnte, ist die Formel folglich nicht unerfüllbar und damit erfüllbar.

Präsenzaufgabe 11.2: Seien F und G Formeln und M eine endliche Formelmenge. Wie können Sie jeweils mittels Resolution überprüfen, ob die folgenden Beziehungen gelten?

1. $F \models G$
2. $F \equiv G$
3. $M \models G$

Lösung:

1. $F \models G$ gilt genau dann, wenn $\models F \Rightarrow G$ gilt, was genau dann gilt, wenn $\models \neg F \vee G$ gilt, was zuletzt genau dann gilt, wenn $F \wedge \neg G \models$ gilt. Wir können also mit dem Resolutionsverfahren überprüfen, ob $F \wedge \neg G$ eine Kontradiktion ist und können so $F \models G$ entscheiden.
2. $F \equiv G$ gilt genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$ gilt. Beides können wir nach der vorherigen Teilaufgabe mittels des Resolutionsverfahrens entscheiden und so $F \equiv G$ entscheiden.
3. Sei $M = \{F_1, \ldots, F_n\}$. $M \models G$ gilt nun genau dann, wenn $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \models G$ gilt. Dies gilt so wie bei der ersten Teilaufgabe genau dann, wenn $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$ eine Kontradiktion ist, was mit dem Resolutionsverfahren überprüft werden kann.

Präsenzaufgabe 11.3: Sei

$$F := \forall x \exists y Q(x,y) \wedge \neg \exists u Q(u,u)$$

eine prädikatenlogische Formeln. Zeigen Sie, dass F kontingent ist, indem Sie eine erfüllende und eine falsifizierende Struktur angeben.

Lösung: Bevor wir uns Gedanken über eine erfüllende bzw. falsifizierende Struktur machen, nutzen wir die semantischen Definitionen aus:

$$\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A}(\forall x \exists y Q(x,y) \wedge \neg \exists u Q(u,u)) = 1 \\
gdw. & \mathcal{A}(\forall x \exists y Q(x,y)) = 1 \text{ und} \\
 & \mathcal{A}(\neg \exists u Q(u,u)) = 1 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(\exists y Q(x,y)) = 1 \text{ und} \\
 & \mathcal{A}(\exists u Q(u,u)) = 0 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: es gibt ein } e \in U \text{ mit: } \mathcal{A}_{[x/d][y/e]}(Q(x,y)) = 1 \text{ und} \\
 & \text{es kein } f \in U \text{ gibt mit: } \mathcal{A}_{[u/f]}(Q(u,u)) = 1 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: es gibt ein } e \in U \text{ mit: } (\mathcal{A}_{[x/d][y/e]}(x), \mathcal{A}_{[x/d][y/e]}(y)) \in I(Q) \text{ und} \\
 & \text{es kein } f \in U \text{ gibt mit: } (\mathcal{A}_{[u/f]}(u), \mathcal{A}_{[u/f]}(u)) \in I(Q) \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: es gibt ein } e \in U \text{ mit: } (d,e) \in I(Q) \text{ und} \\
 & \text{es kein } f \in U \text{ gibt mit: } (f,f) \in I(Q)
\end{array}$$

Wir können nun schnell erkennen, dass eine erfüllende Struktur bspw. mit $U = \mathbb{N}$ und $I(Q) = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{N}, y = x+1\} = \{(1,2),(2,3),(3,4),\ldots\}$ gegeben ist. Dann ist gibt es nämlich zu jedem $d \in U = \mathbb{N}$ ein $e \in U$ mit $(d,e) \in I(Q)$ und gleichzeitig gibt es kein $f \in U$ mit $(f,f) \in I(Q)$.

Eine falsifizierende Struktur ist z.B. mit $U = \mathbb{N}$ und $I(Q) = \{(1,2)\}$ gegeben. Bspw. gibt es dann nämlich zu $2 \in U$ kein $e \in U$ mit $(2,e) \in I(Q)$. Eine andere falsifizierende Struktur erhält man mit $I(Q) = \{(1,1)\}$, da dann ein $f \in U$ (nämlich $f = 1$) gibt mit $(f,f) \in I(Q)$.

von
4

Übungsaufgabe 11.4:

1. Prüfen Sie mittels des Resolutionsverfahrens, ob die Formel

$$F = (A \vee \neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A) \wedge (B \vee C)$$

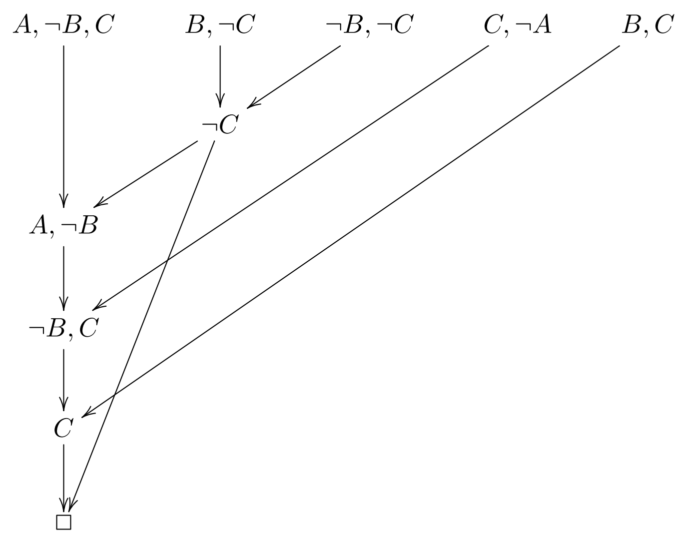
   erfüllbar oder unerfüllbar ist.

2. Prüfen Sie mittels des Resolutionsverfahrens, ob die folgende Folgerbarkeitsbeziehung gilt:

$$(A \Rightarrow D) \wedge \neg B \wedge (A \vee B \vee D) \models (\neg B \wedge D)$$

Lösung:

1. Wir erhalten z.B. folgenden Resolutionsgraphen:



   Da wir $\square$ resolvieren können, ist die gegebene Formel unerfüllbar (wobei wir auch hier auf die { und } um die Klauseln verzichtet haben).

2. Eine Folgerbarkeitsbeziehung $F \models G$ gilt genau dann, wenn $F \wedge \neg G$ eine Kontradiktion ist. Wir betrachten also

$$F := (A \Rightarrow D) \wedge \neg B \wedge (A \vee B \vee D) \wedge \neg(\neg B \wedge D)$$

   und erzeugen nun zunächst mittels Äquivelanzumformungen eine zu dieser Formel äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Wir erhalten:

$$F' := (\neg A \vee D) \wedge \neg B \wedge (A \vee B \vee D) \wedge (B \vee \neg D)$$

   Es ist nun möglich so zu resolvieren, dass wir zu $\square$ kommen wie der folgende Resolutionsgraph beweist:

$$\begin{tikzcd}
A, B, D \arrow[d] & \neg D, B \arrow[dr] & \neg B \arrow[dll] \arrow[d] & \neg A, D \arrow[dd] \\
A, D \arrow[d] & & \neg D \arrow[dll] \arrow[dr] & \\
A \arrow[drr] & & & \neg A \arrow[dl] \\
& & \square &
\end{tikzcd}$$

F' und damit auch F sind also unerfüllbar. Damit gilt nach dem zu Anfang gesagten, die gegebene Folgerbarkeitsbeziehung. Die oben ausgeführte Resolution ist eine N-Resolution, da an jeder Resolventenbildung eine nur aus negativen Literalen bestehende Klausel beteiligt ist.

Übungsaufgabe 11.5: Geben Sie kurz und kompakt die wichtigsten Argumente aus dem Beweis des Resolutionssatzes wieder. (Sie sollen hier nicht den Beweis wiedergeben, sondern aus dem Beweis die Vorgehensweise und die wichtigsten Argumente herausarbeiten und diese mit Ihren Worten wiedergeben.)

von
3

Lösung: Für die Korrektheit (wenn $\square$ resolviert werden konnte, ist die ursprüngliche Formel unerfüllbar) wird primär argumentiert, dass, wenn $\square \in Res^*(F)$ gilt, auch $K_1 = \{L\}$ und $K_2 = \{\overline{L}\}$ für ein Literal L in $Res^*(F)$ enthalten sein müssen, da sonst $\square$ nicht resolviert werden kann. Aus $F \equiv Res^*(F)$ und da K_1 und K_2 nicht beide von einer Belegung erfüllt werden können, folgt, dass F unerfüllbar ist.

Für die Vollständigkeit (wenn eine Formel F unerfüllbar ist, dann ist auch tatsächlich $\square$ resolvierbar) wird per vollständiger Induktion über die Anzahl n der atomaren Formeln in F verfahren. Wichtig ist hier vor allem, im Induktionsschritt aus F zwei Formeln F_0 und F_1 zu machen, wobei man F_0 erhält, indem jedes Auftreten von A_{n+1} gedanklich mit 0 belegt wird und die Formel vereinfacht wird. Dabei wird ein A_{n+1} in einer Klausel gestrichen und eine Klausel, die $\neg A_{n+1}$ enthält, vollsändig gestrichen. F_1 enthält man analog, indem A_{n+1} gedanklich mit 1 belegt wird.

Man zeigt nun noch, dass F_0 und F_1 unerfüllbar sind, so dass die Induktionsannahme anwendbar ist. Da dann $\square \in Res^*(F_0)$ und $\square \in Res^*(F_1)$ gilt, können die Ableitungen, die dies zeigen, jeweils zu einer Ableitung von $\{A_{n+1}\}$ (im Falle von F_0) bzw. zu einer Ableitung von $\{\neg A_{n+1}\}$ (im Falle von F_1) erweitert werden, indem die gestrichenen Literale wieder in die Klauseln eingefügt werden. Ein weiterer Resolutionsschritt zeigt dann $\square \in Res^*(F)$.

von
5

Übungsaufgabe 11.6:

1. Sei $F = \forall y[(P(y) \lor Q(f(y))) \land (P(y) \Rightarrow \neg Q(y))]$. Sei ferner $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur mit $U = \mathbb{N}$ und $I(P) = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ und $I(Q) = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ sowie $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n) = n$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}(F) = 1$ gilt. Führen Sie dazu die Auswertung von F formal Schritt für Schritt durch.
2. Sei F wie eben. Geben Sie eine Struktur $\mathcal{A}'$ an, die F falsifiziert.
3. Seien P ein zweistelliges Prädikatensymbol und x und y Variablen. Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Struktur, dass die Formeln $F = \forall x \exists y P(x, y)$ und $G = \exists y \forall x P(x, y)$ nicht äquivalent sind. Begründen Sie dabei, wieso Ihre Struktur dies beweist.

Lösung:

1. Aufgrund der Definition der Semantik der Prädikatenlogik erhalten wir zunächst für eine Struktur $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{A}(\forall y[(P(y) \lor Q(f(y))) \land (P(y) \Rightarrow \neg Q(y))]) = 1 \\ gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[y/d]}(P(y) \lor Q(f(y))) = 1 \text{ und} \\ & \mathcal{A}_{[y/d]}(P(y) \Rightarrow \neg Q(y)) = 1 \\ gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}_{[y/d]}(Q(f(y))) = 1 \text{ und} \\ & \mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}_{[y/d]}(\neg Q(y)) = 1 \\ gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[y/d]}(y) \in I(P) \text{ oder } I(f)(\mathcal{A}_{[y/d]}(y)) \in I(Q) \text{ und} \\ & \mathcal{A}_{[y/d]}(y) \notin I(P) \text{ oder } \mathcal{A}_{[y/d]}(y) \notin I(Q) \\ gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } d \in I(P) \text{ oder } I(f)(d) \in I(Q) \text{ und} \\ & d \notin I(P) \text{ oder } d \notin I(Q) \end{array}$$

   Mit der gegebenen Struktur sehen wir nun, dass zunächst $I(f)(d) = f'(d) = d$ für jedes $d \in U = \mathbb{N}$ gilt. Damit ist dann für jedes $d \in \mathbb{N}$ $d \in I(P)$ oder $d \in I(Q)$, denn entweder ist d gerade (dann ist $d \in I(P)$) oder ungerade (dann ist $d \in I(Q)$). Ebenso gilt stets für jedes $d \in \mathbb{N}$, dass entweder $d \notin I(P)$ ist (wenn d ungerade ist) oder $d \notin I(Q)$ (wenn d gerade ist). Damit ist $\mathcal{A}$ eine erfüllende Struktur.

2. Für die Struktur $\mathcal{A}'$ übernehmen wir alles aus $\mathcal{A}$, setzen aber $I(Q) = I(P) = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$. Damit ist dann $\mathcal{A}'(F) = 0$, denn für ein gerades $d \in U = \mathbb{N}$ ist dann weder $d \notin I(P)$ noch $d \notin I(Q)$ gegeben und das zweite Konjunkt wird damit nicht wahr. (Ebenso könnte man argumentieren, dass für die ungeraden $d \in \mathbb{N}$ weder $d \in I(P)$ noch $I(f)(d) = d \in I(Q)$ gilt und damit begründen, dass das erste Konjunkt falsch ist.)

3. Um die Äquivalenz zu widerlegen, müssen wir eine Struktur $\mathcal{A} = (U, I)$ angeben mit $\mathcal{A}(F) \neq \mathcal{A}(G)$. Zunächst ist nun $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. für alle $d \in U$ ein $e \in U$ existiert mit $(d, e) \in I(P)$ und $\mathcal{A}(G) = 1$ gdw. ein $f \in U$ existiert derart, dass für alle $g \in U$ gilt $(g, f) \in I(P)$. Im ersten Fall können wir also für jeweils ein Element $d \in U$ ein Element $e \in U$ bestimmten, so dass $(d, e) \in I(P)$ ist, das e kann also für jedes d anders aussehen. Im zweiten Fall müssen wir ein $f \in U$ festhalten und dann muss $(g, f) \in U$ für alle $g \in U$ gelten.

   Setzen wir $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und $I(P) = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, so haben wir eine Struktur, die F wahr macht (denn zu jedem $d \in U$ kann $e := d$ gewählt werden und dann ist $(d, e) = (d, d) \in I(P)$ erfüllt), aber G nicht (denn wenn man f festhält, ist nur $(f, f) \in I(P)$ nicht aber z.B. $(f + 1, f)$, aber $f + 1 \in U = \mathbb{N}$).

Mit der so gewählten Struktur ist die Äquivalenz also widerlegt. Der wichtige Punkt hier ist, dass im ersten Fall (der Formel F) zu jedem $d \in U$ (das x in der Formel) ein anderes $e \in U$ gewählt werden kann (das y in der Formel). Im Falle der Formel G muss es aber ein $f \in U$ geben, dass mit jedem $g \in U$ in Beziehung steht.

Informationen und Unterlagen zur Veranstaltung unter:

`http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/lehre/vl/SS15/FGI1`