Министерства науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика
Лабораторная работа № 3
Вариант: 3

Выполнил:
Вильданов Ильнур Наилевич
Группа №P3212

Проверила:
Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург
2025 г.

Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Задание

Вычислительная реализация задачи:

Точное вычисление интеграла:

$\int_0^2(-x^3-x^2+x+3)dx=\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right)\,\Big|_0^2=(-4-\frac{8}{3}+2+6)-0=\frac{4}{3}\approx$ 1.3333333

Метод Ньютона-Котеса, n=6:

$$c_0^6=c_6^6=\frac{41(b-a)}{840}=\frac{41}{420}=0.0976$$
$$c_6^1=c_6^5=\frac{216(b-a)}{840}=\frac{9(b-a)}{35}=\frac{18}{35}=0.5143$$
$$c_6^2=c_6^4=\frac{27(b-a)}{840}=\frac{9(b-a)}{280}=\frac{9}{140}=0.0643$$
$$c_6^3=\frac{272(b-a)}{840}=\frac{34(b-a)}{105}=\frac{68}{105}=0.6476$$

$$f(x)=(-x^3-x^2+x+3)$$

$$\int_0^2(-x^3-x^2+x+3)dx$$
$$\approx c_0^6f(0)+c_1^6f(\frac{2}{6})+c_2^6f(\frac{4}{6})+c_3^6f(\frac{6}{6})+c_4^6f(\frac{8}{6})+c_5^6f(\frac{10}{6})+c_6^6f(2)$$
$$=0.0976\ +1.638\ +\ 0.188\ +\ 1.295\ +0.011\ -\ 1.409\ -0.683\ =1.140$$

$$\Delta I=I-I_{\text{Ньютон–Котес}}=|1.333-1.140|=0.193$$

Метод средних прямоугольников

$$\int_0^2(-x^3-x^2+x+3)dx\approx\frac{2}{6}\left(f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{3}{6}\right)+f\left(\frac{5}{6}\right)+f\left(\frac{7}{6}\right)+f\left(\frac{9}{6}\right)+f\left(\frac{11}{6}\right)\right)$$
$$=\frac{2}{6}(3.134\ +\ 3.125+2.56+1.217-1.125-4.689)=\frac{2}{6}*4.222=1.407$$

$$\Delta I=I-I_{\text{прям}}=|1.333-1.407|=0.074$$

Метод трапеций

$$\int_0^2 f(x)(-x^3 - x^2 + x + 3)dx \approx \frac{2}{6}\left(\frac{f(0)+f(2)}{2} + f\left(\frac{2}{6}\right) + f\left(\frac{4}{6}\right) + f\left(\frac{6}{6}\right) + f\left(\frac{8}{6}\right) + f\left(\frac{10}{6}\right)\right)$$
$$= \frac{2}{6}(-2 + 3.185 + 2.925 + 2 + 0.185 - 2.74) = \frac{2}{6} * 3.555 = 1.185$$

$$\Delta I = I - I_{\text{Трап}} = |1.333 - 1.185| = 0.148$$

Метод Симпсона

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{2}{18}\left[(f(0) + 4\left(f\left(\frac{2}{6}\right) + f\left(\frac{6}{6}\right) + f\left(\frac{10}{6}\right)\right) + 2\left(f\left(\frac{4}{6}\right) + f\left(\frac{8}{6}\right)\right) + f(2)\right]$$
$$= \frac{2}{18} * [3 + 4(3.185 + 2 - 2.74) + 2(2.925 + 0.185) - 7] = \frac{2}{18} * 12 = 1.333$$
$$\Delta I = I - I_{\text{Симпсон}} = |1.333 - 1.333| = 0$$

Листинг программы

```
def left_rectangle(f, a: float, b: float, n: int) -> float:
    h = (b - a) / n
    total = 0.0
    for i in range(n):
        x_i = a + i * h
        total += f(x_i)
    return total * h
```

```
def mid_rectangle(f, a: float, b: float, n: int) -> float:
    h = (b - a) / n
    total = 0.0
    for i in range(n):
        x_mid = a + (i + 0.5) * h
        total += f(x_mid)
    return total * h
```

```
def right_rectangle(f, a: float, b: float, n: int) -> float:
    h = (b - a) / n
    total = 0.0
    for i in range(n):
        x_i = a + (i + 1) * h
        total += f(x_i)
    return total * h
```

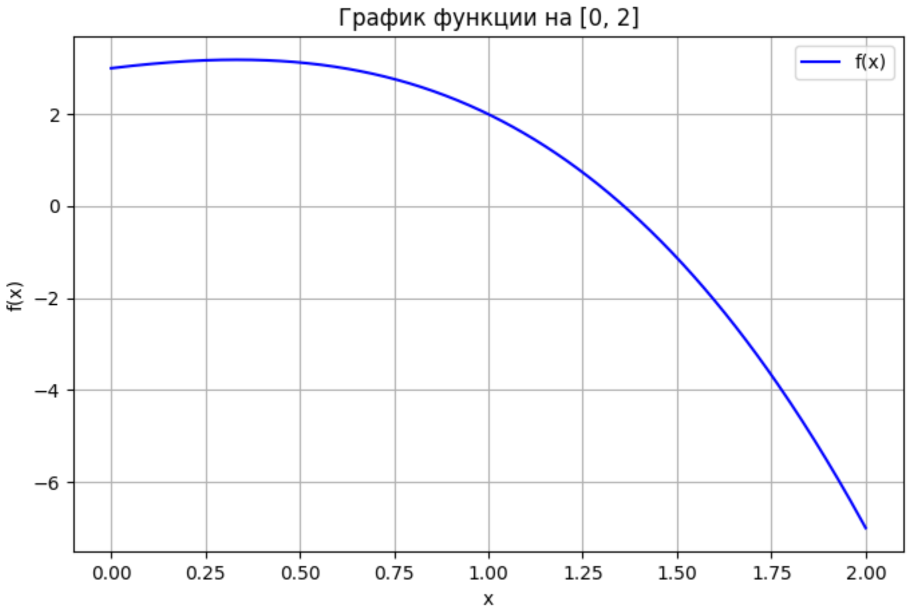
```
def simpson(f, a: float, b: float, n: int) -> float:
    if n % 2 != 0:
        n += 1
    h = (b - a) / n
    total = f(a) + f(b)
    # сумма для нечетных индексов: 4 * f(a + (2k+1)h)
    for i in range(1, n, 2):
        x_i = a + i * h
        total += 4 * f(x_i)
    # сумма для четных индексов: 2 * f(a + 2k h)
    for i in range(2, n, 2):
        x_i = a + i * h
        total += 2 * f(x_i)
    return total * (h / 3)
```

```python
def trapezoid(f, a: float, b: float, n: int) -> float:
    h = (b - a) / n
    total = f(a) + f(b)
    for i in range(1, n):
        x_i = a + i * h
        total += 2 * f(x_i)
    return total * h / 2
```

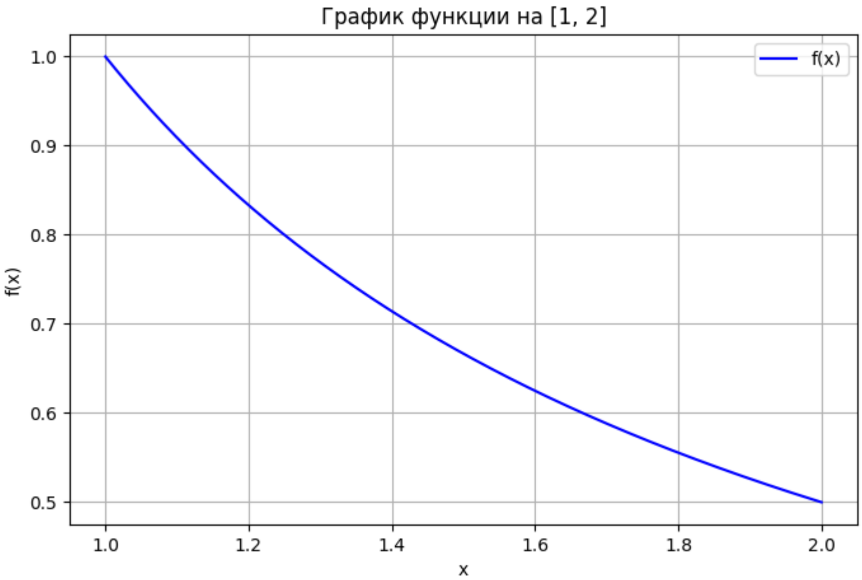
```python
def runge_integral(
    integrator: callable,
    f: callable,
    a: float,
    b: float,
    tol: float,
    order: int
) -> tuple[float, int]:

    n = 4
    I_n = integrator(f, a, b, n)
    I_2n = integrator(f, a, b, 2 * n)

    # пока оценка погрешности > tol, удваиваем n
    while abs(I_2n - I_n) / (2**order - 1) > tol:
        n *= 2
        I_n = integrator(f, a, b, n)
        I_2n = integrator(f, a, b, 2 * n)

    # коррекция Рунге
    I_corr = I_2n + (I_2n - I_n) / (2**order - 1)
    return I_corr, 2 * n
```

Примеры и результаты работы программы

```
=== Лабораторная №3: Численное интегрирование ===

1) y = sin(x)
2) y = 1/x
3) y = -x^3 - x^2 + x + 3
4) y = x^2
Ваш выбор (1-5): 3
Введите a (левая граница): 0
Введите b (правая граница, > a): 2
Введите точность ε (> 0): 0.01

Выбранная функция: y = -x^3 - x^2 + x + 3
Интервал интегрирования: [0.0, 2.0], ε = 1.000000e-02

Точное значение ∫[0.0, 2.0] f(x) dx = 1.33333333

| Метод                   |   I_approx |   n отрезков |
|-------------------------|------------|--------------|
| Левые прямоугольники    |    1.33334 |         1024 |
| Правые прямоугольники   |    1.33334 |         1024 |
| Средние прямоугольники  |    1.33333 |           32 |
| Трапеции                |    1.33333 |           32 |
| Симпсон                 |    1.33333 |            8 |

=== Расчёт завершён ===
```




```
=== Лабораторная №3: Численное интегрирование ===

1) y = sin(x)
2) y = 1/x
3) y = -x^3 - x^2 + x + 3
4) y = x^2
Ваш выбор (1-4): 2
Введите a (левая граница): 1
Введите b (правая граница, > a): 2
Введите точность ε (> 0): 0.000001

Выбранная функция: y = 1/x
Интервал интегрирования: [1.0, 2.0], ε = 1.000000e-06

Точное значение ∫[1.0, 2.0] f(x) dx = 0.69314718

| Метод                  |   I_approx |   n отрезков |
|------------------------|------------|--------------|
| Левые прямоугольники   |   0.693147 |       262144 |
| Правые прямоугольники  |   0.693147 |       262144 |
| Средние прямоугольники |   0.693147 |          256 |
| Трапеции               |   0.693147 |          256 |
| Симпсон                |   0.693147 |           16 |

=== Расчёт завершён ===
```



Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы интегрирования. В результате работы были рассмотрены различные численные методы вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников (левых, правых, средних), метод трапеций, метод Ньютона-Котеса и метод Симпсона и реализована программа на Python.