Министерства науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика
Лабораторная работа № 1
Вариант: 3

Выполнил:
Вильданов Ильнур Наилевич
Группа №P3212

Проверила:
Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург
2025 г.

Цель работы

Изучить численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений и реализовать один из них средствами программирования.

Задание

Реализовать метод Гаусса-Зейделя
Требования:

- Точность задается с клавиатуры/файла
- Проверка диагонального преобладания (в случае, если диагональное преобладание в исходной матрице отсутствует, сделать перестановку строк/столбцов до тех пор, пока преобладание не будет достигнуто). В случае невозможности достижения диагонального преобладания - выводить соответствующее сообщение.
- Вывод нормы матрицы (любой, на Ваш выбор)
- Вывод вектора неизвестных: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Вывод количества итераций, за которое было найдено решение
- Вывод вектора погрешностей: $\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|$

Описание метода

Метод Гаусса-Зейделя является модификацией метода простой итерации и обеспечивает более быструю сходимость к решению системы уравнений. Идея метода: при вычислении компонента $x_i^{(k+1)}$ вектора неизвестных на (k+1)-й итерации используются $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)}$, уже вычисленные на (k+1)-й итерации. Значения остальных компонент $x_{i+1}^{(k+1)}, x_{i+2}^{(k+1)}, x_n^{(k+1)}$ берутся из предыдущей итерации.

Листинг программы

```
def check_diagonal(mat):
    n = len(mat)
    strict_found = False
    for i in range(n):
        s = 0.0
        for j in range(n):
            if i == j:
                continue
            s += abs(mat[i][j])
        if abs(mat[i][i]) < s:
            return False
        if abs(mat[i][i]) > s:
            strict_found = True
    return strict_found

def matrix_norm(mat):
```

```python
    n = len(mat)
    best = 0.0
    for i in range(n):
        row_sum = sum(abs(mat[i][j]) for j in range(n))
        if row_sum > best:
            best = row_sum
    return best

def gauss_seidel(mat, n, tol, max_iters, order):
    x_old = [0.0] * n
    x_new = [0.0] * n
    errors = [0.0] * n
    iters = 0
    diff = tol + 1.0

    while diff > tol and iters < max_iters:
        for i in range(n):
            s = 0.0
            for j in range(n):
                if j != i:
                    s += mat[i][j] * x_new[j]
            x_new[i] = (mat[i][n] - s) / mat[i][i]

        diff = 0.0
        for i in range(n):
            d = abs(x_new[i] - x_old[i])
            errors[i] = d
            if d > diff:
                diff = d

        x_old = x_new.copy()
        iters += 1

    if diff > tol:
        return None, None, iters

    final = [0.0] * n
    for idx_new, orig_idx in enumerate(order):
        final[orig_idx] = x_new[idx_new]
    return final, errors, iters
```

Примеры и результаты работы программы

Ввод с клавиатуры:

```
=== Решение СЛАУ методом Гаусса-Зейделя ===
1) Ввод с клавиатуры
2) Загрузка из файла
3) Случайная матрица
Выберите режим (1/2/3): 1
Введите порядок системы (целое > 0): 3
Введите точность (вещественное > 0): 0.0001
Введите макс. число итераций (целое > 0): 20
Теперь введите расширенную матрицу (3 строк по 4 чисел):
Строка 1: 4 -1 0 3
Строка 2: -2 6 1 9
Строка 3: 0 -1 7 2

=== Введённая (или загруженная) расширенная матрица ===
  4.000  -1.000   0.000 |   3.000
 -2.000   6.000   1.000 |   9.000
  0.000  -1.000   7.000 |   2.000

Точность: 0.0001
Максимум итераций: 20

Диагональное преобладание выполняется.

Норма матрицы коэффициентов: 9

Решение найдено за 5 итераций:
Вектор решений x = [1.2025284754278696, 1.8101258274828262, 0.5443036896404038]
Вектор погрешностей r = [5.008823966101694e-05, 1.1925771348009206e-05, 1.7036816211124517e-06]
```

Случайная генерация:

```
=== Решение СЛАУ методом Гаусса-Зейделя ===
1) Ввод с клавиатуры
2) Загрузка из файла
3) Случайная матрица
Выберите режим (1/2/3): 3
Введите порядок системы (целое > 0): 4
Введите точность (вещественное > 0): 0.001
Введите макс. число итераций (целое > 0): 30

=== Введённая (или загруженная) расширенная матрица ===
  8.000   2.000   1.000   8.000 |   8.000
  8.000   4.000   3.000   1.000 |   8.000
  3.000   2.000   3.000   6.000 |   7.000
  9.000   5.000   5.000   4.000 |   4.000

Точность: 0.001
Максимум итераций: 30

Нет диагонального преобладания, идет перестановка столбцов...

Не удалось обеспечить диагональное преобладание.

=== Новый вид матрицы после перестановок ===
  8.000   2.000   1.000   8.000 |   8.000
  8.000   4.000   3.000   1.000 |   8.000
  3.000   2.000   3.000   6.000 |   7.000
  9.000   5.000   5.000   4.000 |   4.000

Норма матрицы коэффициентов: 23

[НЕ СОШЛОСЬ] На 30-й итерации не удалось добиться точности 0.001.
```

Из файла:
input.txt

```
=== Решение СЛАУ методом Гаусса-Зейделя ===
1) Ввод с клавиатуры
2) Загрузка из файла
3) Случайная матрица
Выберите режим (1/2/3): 2

=== Введённая (или загруженная) расширенная матрица ===
 10.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 |  20.000
  5.000  10.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 | -10.000
  5.000   0.000  30.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 |  40.000
  0.000   0.000  -5.000  40.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 |  35.000
  0.000   0.000   0.000   0.000  10.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 |  20.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   5.000  10.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 | -10.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   5.000   0.000  30.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 |  40.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000  -5.000  40.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 |  35.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000  10.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 |  20.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   5.000  10.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 | -10.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   5.000   0.000  30.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 |  40.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000  -5.000  40.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 |  35.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000  10.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 |  20.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   5.000  10.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000 | -10.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   5.000   0.000  30.000   0.000   0.000   0.000   0.000 |  40.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000  -5.000  40.000   0.000   0.000   0.000 |  35.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000  10.000   0.000   0.000 |  20.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000  10.000   0.000 |  50.000
  0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000  10.000 |  50.000

Точность: 1e-09
Максимум итераций: 20

Диагональное преобладание выполняется.

Норма матрицы коэффициентов: 45

 Решение найдено за 2 итераций:
 Вектор решений x = [2.0, -2.0, 1.0, 1.0, 2.0, -2.0, 1.0, 1.0, 2.0, -2.0, 1.0, 1.0, 2.0, -2.0, 1.0, 1.0, 2.0, 5.0, 5.0]
 Вектор погрешностей r = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
```

Вывод

В результате выполнения данной лабораторной работы я познакомился с численными методами решения математических задач на примере систем алгебраических уравнений, реализовав на языке программирования Python метод Гаусса-Зейделя.